88120 / 
12

# UNIVERSIDAD ANAHUAC

ESCUELA DE ACTUARIA

CON ESTUDIOS INCORPORADOS A LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Vince In Bono Malum

## APLICACION DE LA LOGICA BORROSA A DIAGNOSTICOS MEDICOS A TRAVES DE SISTEMAS EXPERTOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A N :


LAURA ANGELICA AGUILAR BERNAL

MARINA VELEZ ALONSO


MEXICO, D. F.



1989

## *I N D I C E*

*HOJA No.*

## CAPITULO IV: APLICACION.

# PREFACIO

# PREFACIO

*La teoría de los conjuntos borrosos nace de la necesidad del ser humano para lograr una mejor comprensión de los procesos mentales y del conocimiento; es decir, constituye un acercamiento entre la precisión de las matemáticas y la sutil imprecisión del mundo real.*

*Casi la totalidad del saber y de las interacciones de los seres humanos con el mundo exterior implican construcciones que no son conjuntos en el sentido clásico dado a esta palabra (colección de objetos), sino más bien "conjuntos borrosos". Estos conjuntos son clases con límites indeterminados en las que la transición de membresía a no membresía es más bien gradual que brusca.*

*En virtud de lo anterior se podría deducir que la lógica del razonamiento humano no es la lógica clásica de dos o más valores, sino una lógica de verdades, de conjunciones, de reglas de deducciones borrosas que permite estructurar mejor aquello que se encuentra separado por fronteras poco precisas como el pensamiento humano.*

*Es cierto que asociar el concepto de lógica con la palabra "borroso" puede resultar algo contradictorio. Sin embargo, dado que la lógica es una estructuración de los mecanismos del pensamiento humano -superposición de la intuición y del rigor- no resulta incoherente asociarla con la teoría de los subconjuntos borrosos.*

*El objetivo principal de este trabajo es el de poder introducir un nuevo cuerpo de conceptos y de técnicas sobre sistemas de computación -aún en desarrollo- en el ramo de la medicina. Estos sistemas utilizan lógica borrosa ya que para algunos procesos como los diagnósticos médicos se requiere de una aproximación más que de un análisis preciso.*

*El interés de enfocarnos en este tipo de sistemas nace del estudio de un sistema médico experto dentro de la medicina veterinaria creado por el Q.F.B Gabriel Garduño Soto, que utiliza reglas de la lógica clásica como mecanismos de inferencia para realizar el proceso de diagnóstico. No obstante, con anterioridad ya se había presentado -dentro de este campo- la inquietud de crear un sistema cuyos mecanismos eliminaran la ambigüedad que existe entre las entidades médicas, síntomas/enfermedades. Para ello se fundamentaron en la Estadística Bayesiana, particularmente en la probabilidad condicional, sin poder obtener resultados del todo satisfactorios.*

*Así, en investigaciones realizadas con el Q.F.B Gabriel Garduño Soto encontramos que las reglas de la lógica clásica utilizadas en su sistema como mecanismos de inferencia podían ser sustituidas por los nuevos conceptos de LOGICA BORROSA; encontrando que los resultados eran satisfactorios de acuerdo con la opinión de especialistas en la materia.*

# C A P I T U L O I

## NOCIONES BASICAS DE LA LOGICA BORROSA

## 1.1 INTRODUCCION.

*En muchas ocasiones se formulan preguntas que con la lógica de Boole sólo tienen dos posibilidades de respuesta: sí o no o lo que es lo mismo, verdadero o falso. Matemáticamente hablando, nuestras opciones de contestación se reducen al conjunto {0,1}; donde el 1 significa verdadero o sí y el 0, falso o no. Sin embargo, estas preguntas no siempre pueden ser contestadas con exactitud; esto es, la respuesta estaría dada en términos difusos o borrosos como "a veces", "quizá", "no siempre", "muy seguido", "de vez en cuando", etc. Es en estos casos donde la Teoría de Conjuntos Borrosos puede sernos sumamente útil pues los términos borrosos se relacionan con un elemento del intervalo [0,1] mediante el uso de ciertos modelos que se definirán según sea el caso.*

*Para poder comprender mejor estas ideas, supongamos que tenemos un conjunto de síntomas que definen una enfermedad. ¿Qué sucedería con aquellos síntomas que el paciente hubiese presentado "casi siempre"? ¿Sería lógico descartarlos por el simple hecho de no haberse presentado "siempre"? Por el contrario, si alguno de los síntomas lo hubiese presentado "de vez en cuando", ¿sería correcto incluirlo dentro de la sintomatología sin caer en la exageración? Para lograr un diagnóstico preciso, el médico tendría que ponderar estos datos y cuantificar si realmente el que un síntoma aparezca frecuentemente o no influirá en el diagnóstico final de la enfermedad. Entonces, si se quiere un diagnóstico real la pertenencia de estos síntomas al conjunto deberá ser gradual dependiendo de la frecuencia con que éstos se han presentado.*

*En este capítulo se introducirán brevemente las nociones básicas, operaciones y propiedades de los Subconjuntos Borrosos, concluyendo con el estudio de la Lógica Borrosa que con sus proposiciones y conectivos lógicos será una herramienta indispensable en la aplicación de que es objeto este trabajo pues nos permitirá trabajar de una manera más real en el campo de los diagnósticos médicos.*

## *1.2 CONJUNTOS BORROSOS: DEFINICION, OPERACIONES Y PROPIEDADES.*

### *1.2.1. DEFINICION DE SUBCONJUNTO BORROSO.*

*Un subconjunto A de un conjunto X, cuya función de membresía $M_A(x)$ toma cualquier valor del intervalo cerrado [0,1], se denominará SUBCONJUNTO BORROSO.*

*Representaremos cualquier subconjunto borroso A como sigue:*

$$A = \{(x, M_A(x)) / x \in X, M_A(x) \in [0,1]\}.$$

*EJEMPLO 1*

*Sea X el conjunto de los síntomas*

$$X = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}.$$

*Sea A el subconjunto borroso de los síntomas que padece el paciente P con cierta frecuencia.*

*Entonces otra manera de denotar el subconjunto borroso A de X sería:*

$$A = \{(s_1, 0.8), (s_2, 0.5), (s_3, 0), (s_4, 0.6), (s_5, 0.7)\}.$$

*Aquí, por ejemplo, $(s_1, 0.8)$ significa que el paciente P presenta el síntoma $s_1$ con una frecuencia de ocurrencia de 0.8; es decir, padece el síntoma $s_1$ a menudo.*

***NOTA:** Posteriormente se verá que la frecuencia de ocurrencia es una variable lingüística a la que se le asociará su correspondiente valor en el intervalo [0,1].*

## 1.2.2 OPERACIONES CON SUBCONJUNTOS BORROSOS

***DEFINICION.-*** *Sean A y B dos subconjuntos borrosos de un conjunto X. Se definirá la UNION de A y B como el subconjunto borroso de X denotado por $A \cup B$ con función de membresía*

$$M_{A \cup B}(x) = \text{máx}\,(M_A(x),\ M_B(x)).$$

***DEFINICION.-*** *Sean A y B dos subconjuntos borrosos de un conjunto X. La INTERSECCION de A y B estará dada por el subconjunto borroso de X denotado por $A \cap B$. Su función de membresía será*

$$M_{A \cap B}(x) = \text{mín}\,(M_A(x),\ M_B(x))$$

***EJEMPLO 2***

*Sea X el conjunto de los síntomas*

$$X = \{ s_1, s_2, \ldots\ldots, s_8 \}$$

*Sea A el subconjunto borroso de los síntomas que se presentan en la enfermedad $e_1$ con cierta frecuencia y sea B el subconjunto borroso de los síntomas que se presentan en la enfermedad $e_2$ con cierta frecuencia*

$$A = ((s_1,0.3),\ (s_2,0.8),\ (s_3,0),\ (s_4,0),\ (s_5,0.7),\ (s_6,0.9),\ (s_7,1),\ (s_8,0.4)).$$

$$B = ((s_1,0.7),\ (s_2,0),\ (s_3,1),\ (s_4,0),\ (s_5,1),\ (s_6,0.6),\ (s_7,0.8),\ (s_8,0.2)).$$

*Entonces $A \cup B$ constituye el subconjunto borroso de los síntomas que se presentan en la enfermedad $e_1$ y/o en la enfermedad $e_2$ con cierta frecuencia*

$$A \cup B = ((s_1,0.7),\ (s_2,0.8),\ (s_3,1),\ (s_4,0),(s_5,1),\ (s_6,0.9),\ (s_7,1),\ (s_8,0.4)).$$

*Por otra parte, $A \cap B$ simboliza el subconjunto borroso de los síntomas* *que se presentan conjuntamente en las enfermedades $e_1$ y $e_2$ con cierta frecuencia*

$$A \cap B = \{(s_1,0.3),\ (s_2,0),\ (s_3,0),\ (s_4,0),\ (s_5,0.7),\ (s_6,0.6),\ (s_7,0.8),\ (s_8,0.2)\}.$$

*__DEFINICION.-__ Sea A un subconjunto borroso de X. Se denotará por $A^c$ al COMPLEMENTO de A cuya función de membresía es*

$$M_{A^c}(x) = 1 - M_A(x).$$

***EJEMPLO 3***

*Sea X el conjunto de los pacientes*

$$X = \{p_1,\ldots,p_4\}$$

*y sea A el subconjunto borroso de los pacientes graves*

$$A = \{(p_1,0.2),\ (p_2,0.9),\ (p_3,0.6),\ (p_4,0.8)\}.$$

*Entonces, resulta lógico pensar que $A^c$ es el subconjunto borroso de los pacientes no graves*

$$A^c = \{(p_1,0.8),\ (p_2,0.1),\ (p_3,0.4),\ (p_4,0.2)\}.$$

## 1.2.3 PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON SUBCONJUNTOS BORROSOS.

*Es fácil verificar que las operaciones definidas entre subconjuntos borrosos de un conjunto X satisfacen las siguientes propiedades:*

*1.- CONMUTATIVIDAD*

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{y} \quad A \cap B = B \cap A.$$

2.- ASOCIATIVIDAD $\quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ y $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

3.- DISTRIBUTIVIDAD $\quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ y $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

4.- LEYES DE DEMORGAN $\quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ y $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$

5.- COMPLEMENTO $\quad (A^c)^c = A.$

## 1.3 LOGICA BORROSA

La lógica es una estructuración de los mecanismos del pensamiento humano que generalmente se han tratado de manejar a través de leyes rigurosas o exactas. Sin embargo, si consideramos que estos mecanismos también se basan en la intuición, ¿no resultaría más razonable tratar de utilizar una lógica cuyas propiedades se adapten más al carácter impreciso y borroso del pensamiento humnano?

### 1.3.1 VARIABLES BORROSAS Y SUS OPERADORES LOGICOS.

Partiendo de una analogía con las variables que se emplean en la lógica booleana y cuyos valores sólo pueden ser aquéllos del conjunto {0,1}, definiremos una variable borrosa como cualquier variable que tome su valor en el intervalo cerrado [0,1]. Se denotarán como

$$a = M_A(x),\ b = M_B(x), \ldots, etc.,$$

si $A$, $B$,... son subconjuntos borrosos del conjunto de referencia y $x$ un elemento del mismo.

Recordaremos también los operadores lógicos conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$) y negación ($-$) utilizados por Boole, definiéndose como sigue las operaciones para las variables borrosas $a$ y $b$:

$$a \wedge b = mín\ (a, b)$$

$$a \vee b = máx\ (a, b)$$

$$a^c = 1 - a$$

*__OBSERVACION__: Nótese que $\wedge, \vee$ usuales coinciden con $\wedge, \vee$ borrosos.*

## *1.3.2 PROPIEDADES DE LOS OPERADORES LOGICOS.*

***1.- CONMUTATIVIDAD***

$$a \wedge b = b \wedge a \quad y \quad a \vee b = b \vee a.$$

***DEMOSTRACION:***

$a \wedge b = mín\ (a,b) = mín\ (b,a) = b \wedge a.$

***2.- ASOCIATIVIDAD***

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \quad y \quad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c).$$

***DEMOSTRACION:***

$$(a \wedge b) \wedge c = mín\ (mín(a,b), c) = mín\ (a, b, c) = mín\ (a, mín(b,c)) = a \wedge (b \wedge c).$$

***3.- DISTRIBUTIVIDAD***

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad y \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

***DEMOSTRACION:***

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= mín\ (a, (b \vee c)) = mín\ (a, máx(b,c)) \\ &= max\ [(min(a,b), min(a,c)] \\ &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \end{aligned}$$

***4.- INDEMPOTENCIA***

$$a \wedge a = a \quad y \quad a \vee a = a.$$

DEMOSTRACION:

$a \wedge a = \min\,(a,\ a) = a.$

$a \vee a = \max\,(a,\ a) = a.$

5.- $a \wedge 0 = 0.$

DEMOSTRACION:

Como $a \in [0,1]$, entonces $0 \leq a \leq 1$. Por lo tanto, $\min\,(a,0) = 0.$

6.- $a \vee 0 = a.$

DEMOSTRACION:

Como $a \in [0,1]$, entonces $0 \leq a \leq 1$. Por lo tanto, $\max\,(a,0) = a.$

7.- $a \wedge 1 = a.$

DEMOSTRACION:

Como $a \in [0,1]$, entonces $0 \leq a \leq 1$. Por lo tanto, $\min\,(a,1) = a.$

8.- $a \vee 1 = 1.$

DEMOSTRACION:

Como $a \in [0,1]$, entonces $0 \leq a \leq 1$. Por lo tanto, $\max\,(a,1) = 1.$

9.- $(a^c)^c = a.$

DEMOSTRACION:

Por definición, $a^c = 1 - a$; así,
$(a^c)^c = 1 - a^c = 1 - (1 - a) = a.$

10.- LEYES DE DEMORGAN $(a \wedge b)^c = a^c \vee b^c$ y $(a \vee b)^c = a^c \wedge b^c.$

DEMOSTRACION:

$(a \vee b)^c = 1 - (a \vee b) = 1 - \max\,(a,\ b).$

Por definición sabemos que

$\max\ (x_i) \geq x_i, \quad \forall x_i$; por tanto,
$1 - \max\,(x_i) \leq 1 - x_i, \quad \forall x_i$

$$
\begin{aligned}
1 - \text{máx}\,(x_i) &= \text{mín}\,(1 - x_i), \quad \forall x_i \\
&= \text{mín}\,(x_i^{\,c}), \quad \forall x_i. \text{ Así,} \\
1 - \text{máx}\,(a,b) &= \text{mín}\,(a^c, b^c) \\
&= a^c \wedge b^c.
\end{aligned}
$$

*Como vemos, todas estas propiedades son las mismas que las que se cumplen para el álgebra de Boole, excepto porque:*

$$a \wedge a^c \neq 0 \text{ siempre que } a \neq 0 \text{ y } a \neq 1$$

*y*

$$a \vee a^c \neq 1 \text{ siempre que } a \neq 0 \text{ y } a \neq 1.$$

*En efecto, en el álgebra booleana*

$a \wedge a^c$ *es una falsedad a la cual asociamos el valor 0*

*y*

$a \vee a^c$ *es una tautología a la cual asociamos el valor 1,*

*puesto que a sólo puede tomar los valores 0 ó 1.*

### 1.3.3 FUNCIONES DE VARIABLES BORROSAS

***DEFINICION.-*** *Se definirá como función de variables borrosas a toda función f que dependa únicamente de variables borrosas y que cumpla con la condición:*

$$0 \leq f \leq 1$$

***TEOREMA:*** *Si f(a, b, ...) contiene sólo variables borrosas y los operadores (∧), (∨), (-), entonces se cumple la condición:*

$$0 \leq f \leq 1$$

*JUSTIFICACION:*

*Dado que $a \wedge b = \min(a, b)$, si $a, b \in [0,1]$ el máximo valor que $a \wedge b$ puede tomar es 1 si $a = b = 1$; y el mínimo valor que puede tomar es 0 si por lo menos una de las dos variables toma valor 0;*

$$\min(a, 0) = 0; \min(0, b) = 0 \text{ ( ver prop. 5)}$$

*lo mismo sucede para la operación (v) y para la operacion (-) cumpliéndose siempre que $0 \leq f \leq 1$.*

## *1.3.4 SIMPLIFICACION DE FUNCIONES DE VARIABLES BORROSAS*

*La simplificación de funciones de variables borrosas resulta mucho más complicada que la de funciones booleanas debido a que una variable borrosa puede tomar infinidad de valores, en tanto que una variable booleana sólo puede tomar 2 valores. Además, dentro de la lógica borrosa las propiedades*

$$a \wedge a^c = 0$$

$$\text{y}$$

$$a \vee a^c = 1$$

*no se cumplen como ya se vió en el inciso 1.3.3., lo que también dificulta el proceso de simplificación.*

*No obstante, haremos uso de las mencionadas para obtener otras dos, nuevas e importantes propiedades, que nos serán de suma utilidad en el proceso de simplificación de funciones de variables borrosas:*

*a) PROPIEDAD DE ABSORCION:*

$$f(a, b) = a \vee (a \wedge b) = a.$$

*DEMOSTRACION:*

*Sabemos que* $a = a \wedge 1$*, por lo tanto;*

$$
\begin{aligned}
a \vee (a \wedge b) &= (a \wedge 1) \vee (a \wedge b) \\
&= a \wedge (1 \vee b) \text{ (por distributividad)} \\
&= a \wedge 1 \\
&= a.
\end{aligned}
$$

***b) FORMA DUAL DE LA PROPIEDAD DE ABSORCION:***

$$f(a, b) = a \wedge (a \vee b) = a.$$

*DEMOSTRACION:*

*Sabemos que* $a = a \vee 0$*; entonces*

$$
\begin{aligned}
a \wedge (a \vee b) &= (a \vee 0) \wedge (a \vee b) \\
&= a \vee (0 \wedge b) \text{ (por distributividad)} \\
&= a \vee 0 \\
&= a.
\end{aligned}
$$

## *1.3.5 ANALISIS DE UNA FUNCION BORROSA*

*DEFINICION.- Una forma polinomial respecto a* $\vee$ *es unir dos o más monomios en* $\wedge$ *bajo la operación* $\vee$*.*

*Una forma polinomial respecto a* $\wedge$ *es unir dos o más monomios en* $\vee$ *bajo la operación* $\wedge$ *.*

*EJEMPLO 4*

*Una forma polinomial respecto a* $\vee$ *es*

$$f(a, b, c) = (a \wedge b \wedge c^c) \vee (a \wedge b^c) \vee (a^c \wedge c).$$

*mientras que una forma polinomial respecto a $\wedge$ es*

$$f(a, b, c) = (a \vee b^c) \wedge (a^c \vee c) \wedge (a \vee b \vee c).$$

*Gracias a las propiedades de distributividad, cualquier función $f(a, b, \ldots)$ puede escribirse en una forma polinomial respecto a $\wedge$ o respecto a $\vee$.*

***EJEMPLO 5***

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= (a \wedge b \wedge c^c) \vee (a^c \wedge b) \\ &= (a \vee (a^c \wedge b)) \wedge (b \vee (a^c \wedge b)) \wedge (c^c \vee (a^c \wedge b)) \\ &= (a \vee a^c) \wedge b \wedge (c^c \vee a^c) \wedge (c^c \vee b) \\ &= (a \vee a^c) \wedge b \wedge (a^c \vee c^c). \end{aligned}$$

***DEFINICION.-*** *Sea $f(a, b, \ldots)$ una función expresada en forma polinomial respecto a $\wedge$ ( $\vee$ ); entonces un monomio de esta forma polinomial se llamará MAXIMAL si no es absorbido por ningún otro.*

***DEFINICION.-*** *Se llamará FORMA POLINOMIAL REDUCIDA RESPECTO A $\vee$ ( $\wedge$ ) a cualquier forma polinomial respecto a $\vee$ ( $\wedge$ ) en la que sólo se encuentren monomios maximales.*

*A una función borrosa $f(a, b, \ldots)$ podrán corresponder varias formas polinomiales reducidas.*

*Para comprobar esto, veremos cómo se construye una tabla de valores para funciones de variables borrosas.*

*Lo primero que hay que hacer es enumerar los posibles casos que se pueden presentar en una función $f$ según el número de variables borrosas que tenga y siempre tomando en cuenta que si*

$$x \leq y \quad \text{entonces} \quad y^c \leq x^c \quad \text{(propiedad de antisimetría)}$$

*Así, si la función es de una sola variable borrosa, se estudiarán dos casos:*

$$a \leq a^c$$

*y*

$$a^c \leq a.$$

*Si la función es de dos variables borrosas, se estudiarán los siguientes ocho casos:*

$$a \leq b \leq b^c \leq a^c \text{ ,}$$

$$a \leq b^c \leq b \leq a^c \text{ ,}$$

$$a^c \leq b \leq b^c \leq a \text{ ,}$$

$$a^c \leq b^c \leq b \leq a \text{ ,}$$

$$b \leq a \leq a^c \leq b^c \text{ ,}$$

$$b \leq a^c \leq a \leq b^c \text{ ,}$$

$$b^c \leq a \leq a^c \leq b \text{ ,}$$

$$b^c \leq a^c \leq a \leq b.$$

*Si la función es de tres variables borrosas, se estudiarán los siguientes cuarenta y ocho casos, presentados sin el signo $\leq$ para ahorrar espacio:*

| | | |
|---|---|---|
| $a\ b\ c\ c^c\ b^c\ a^c$ | $b\ a\ c\ c^c\ a^c\ b^c$ | $c\ a\ b\ b^c\ a^c\ c^c$ |
| $a\ b\ c^c\ c\ b^c\ a^c$ | $b\ a\ c^c\ c\ a^c\ b^c$ | $c\ a\ b^c\ b\ a^c\ c^c$ |
| $a\ b^c\ c\ c^c\ b\ a^c$ | $b\ a^c\ c\ c^c\ a\ b^c$ | $c\ a^c\ b\ b^c\ a\ c^c$ |
| $a\ b^c\ c^c\ c\ b\ a^c$ | $b\ a^c\ c^c\ c\ a\ b^c$ | $c\ a^c\ b^c\ b\ a\ c^c$ |
| $a\ c\ b\ b^c\ c^c\ a^c$ | $b\ c\ a\ a^c\ c^c\ b^c$ | $c\ b\ a^c\ a\ b^c\ c^c$ |
| $a\ c\ b^c\ b\ c^c\ a^c$ | $b\ c\ a^c\ a\ c^c\ b^c$ | $c\ b^c\ a\ a^c\ b\ c^c$ |
| $a\ c^c\ b\ b^c\ c\ a^c$ | $b\ c^c\ a\ a^c\ c\ b^c$ | $c\ b\ a\ a^c\ b^c\ c^c$ |
| $a\ c^c\ b^c\ b\ c\ a^c$ | $b\ c^c\ a^c\ a\ c\ b^c$ | $c\ b^c\ a^c\ a\ b\ c^c$ |
| $a^c\ b\ c\ c^c\ b^c\ a$ | $b^c\ a\ c\ c^c\ a^c\ b$ | $c^c\ a\ b\ b^c\ a^c\ c$ |
| $a^c\ b\ c^c\ c\ b^c\ a$ | $b^c\ a^c\ c\ c^c\ a\ b$ | $c^c\ a^c\ b\ b^c\ a\ c$ |
| $a^c\ b^c\ c\ c^c\ b\ a$ | $b^c\ a\ c^c\ c\ a^c\ b$ | $c^c\ a\ b^c\ b\ a^c\ c$ |
| $a^c\ b^c\ c^c\ c\ b\ a$ | $b^c\ a^c\ c^c\ c\ a\ b$ | $c^c\ a^c\ b^c\ b\ a\ c$ |
| $a^c\ c\ b\ b^c\ c^c\ a$ | $b^c\ c^c\ a\ a^c\ c\ b$ | $c^c\ b\ a\ a^c\ b^c\ c$ |
| $a^c\ c^c\ b\ b^c\ c\ a$ | $b^c\ c\ a^c\ a\ c^c\ b$ | $c^c\ b^c\ a\ a^c\ b\ c$ |
| $a^c\ c\ b^c\ b\ c^c\ a$ | $b^c\ c\ a\ a^c\ c^c\ b$ | $c^c\ b\ a^c\ a\ b^c\ c$ |
| $a^c\ c^c\ b^c\ b\ c\ a$ | $b^c\ c^c\ a^c\ a\ c\ b$ | $c^c\ b^c\ a^c\ a\ b\ c$ |

*Si la función es de n variables borrosas se estudiaran $n!2^n$ casos:*

$$\underbrace{(2)\ (2)\ (2)\ldots\ldots\ldots(2)}_{n \text{ veces}}\ \underbrace{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots 1}_{n \text{ factorial}}$$

*En efecto, n! resulta de ver cómo se van a acomodar las n primeras* variables (el resto se acomoda de acuerdo a la propiedad de la antisimetría) y $2^n$ porque para cada una de las $n$ posiciones se tienen 2 posibilidades: $x_i$ ó $x_i^c$

*EJEMPLO 6*

$f(a, b) = (a \wedge a^c) \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge b^c)$ y

$g(a, b) = (a \wedge b) \vee (a \wedge b^c)$

corresponden a la misma función.

Procederemos a construir las tablas de valores con lo que demostraremos que $f(a, b) = g(a, b)$.

Para $f(a, b)$ se tienen los siguientes casos:

| CASOS | $(a \wedge a^c)$ | $(a \wedge b)$ | $(a \wedge b^c)$ | $(a \wedge a^c) \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge b^c)$ |
|---|---|---|---|---|
| $a \le b \le b^c \le a^c$ | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $a\ b^c\ b\ a^c$ | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $a^c\ b\ b^c\ a$ | $a^c$ | $b$ | $b^c$ | $b^c$ |
| $a^c\ b^c\ b\ a$ | $a^c$ | $b$ | $b^c$ | $b$ |
| $b\ a\ a^c\ b^c$ | $a$ | $b$ | $a$ | $a$ |
| $b\ a^c\ a\ b^c$ | $a^c$ | $b$ | $a$ | $a$ |
| $b^c\ a\ a^c\ b$ | $a$ | $a$ | $b^c$ | $a$ |
| $b^c\ a^c\ a\ b$ | $a^c$ | $a$ | $b^c$ | $a$ |

Para $g(a, b)$ se tiene los siguientes casos:

| CASOS | $(a \wedge b)$ | $(a \wedge b^c)$ | $(a \wedge b) \vee (a \wedge b^c)$ |
|---|---|---|---|
| $a \le b \le b^c \le a^c$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $a\ b^c\ b\ a^c$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $a^c\ b\ b^c\ a$ | $b$ | $b^c$ | $b^c$ |
| $a^c\ b^c\ b\ a$ | $b$ | $b^c$ | $b$ |
| $b\ a\ a^c\ b^c$ | $b$ | $a$ | $a$ |
| $b\ a^c\ a\ b^c$ | $b$ | $a$ | $a$ |
| $b^c\ a\ a^c\ b$ | $a$ | $b^c$ | $a$ |
| $b^c\ a^c\ a\ b$ | $a$ | $b^c$ | $a$ |

Comparando las últimas columnas de un caso a otro, vemos que

$$f(a, b) = g(a, b).$$

DEFINICION.- Se dice que dos funciones de variables borrosas f y g son iguales si y sólo si una vez enumerados todos los casos posibles producen la misma tabla de valores.

## 1.4 PROPOSICIONES BORROSAS Y SU REPRESENTACION FUNCIONAL

La lógica borrosa se apoya en tablas de valores construidas en base a las operaciones definidas para los subconjuntos borrosos.

A las operaciones de intersección ($\cap$), unión ($\cup$) y complemento (-), se les asocia con los conectivos borrosos $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción) y - (complemento) definidos en el inciso 1.3.1.

A continuación se definen las principales proposiciones borrosas en base a sus conjuntos de veracidad:

a) CONJUNCION BORROSA (Y BORROSO), definida por el conjunto $A \cap B$ cuya función de membresía es

$$\min\,[M_A(x),\ M_B(x)].$$

EJEMPLO 7

Sea X el conjunto de los pacientes

$X = (p_1, \ldots, p_5)$

Sea A el subconjunto borroso de los pacientes con indicios de anemia y B el subconjunto borroso de los pacientes enfermos de gravedad

$A = ((p_1,0.3),\ (p_2,0),\ (p_3,0.8),\ (p_4,0.9),\ (p_5,0.6)).$

$B = ((p_1,0.7),\ (p_2,0.5),\ (p_3,0.8),\ (p_4,0.2),\ (p_5,0.9)).$

Entonces, $A \cap B$ representa el subconjunto borroso de pacientes enfermos *de gravedad y con indicios de anemia*

$$A \cap B = \{(p_i, M_{A \cap B}(p_i)); \; i = 1,\ldots,5\}$$
$$= \{(p_1,0.3), (p_2,0), (p_3,0.8), (p_4,0.2), (p_5,0.6)\}.$$

*b) **DISYUNCION BORROSA (Y/O BORROSO)**, definida por el conjunto A U B cuya función de membresía es*

$$\text{máx } [M_A(x), M_B(x)].$$

***EJEMPLO 8***

*Sean X el conjunto referencia y A y B los subconjuntos borrosos definidos en el inciso a).*

*Entonces, A U B representa el subconjunto borroso de pacientes enfermos de gravedad y/o con indicios de anemia*

$$A \cup B = \{(p_1,0.7), (p_2,0.5), (p_3,0.8), (p_4,0.9), (p_5,0.9)\}.$$

*c) **NEGACION BORROSA (NO BORROSO)**, definida por el conjunto $A^c$ cuya función de membresía es*

$$1 - M_A(x).$$

***EJEMPLO 9***

*Sean X el conjunto de referencia y B el subconjunto borroso definidos en el inciso a).*

*Entonces, $B^c$ representa el subconjunto borroso de los pacientes enfermos no de gravedad*

$$B^c = \{(p_i, 1 - M_B(p_i)); \; i = 1,\ldots,5\}$$
$$= \{(p_1,0.3), (p_2,0.5), (p_3,0.2), (p_4,0.8), (p_5,0.1)\}.$$

*d) IMPLICACION BORROSA, definida por el conjunto $A^c \cup B$ cuya función de membresía es*

$$\text{máx}\ [M_{A^c}(x),\ M_B(x)] = \text{máx}\ [1-M_A(x),\ M_B(x)].$$

*EJEMPLO 10*

*Sea X el conjunto de los pacientes*

$X = (p_1,\ p_2,\ p_3)$

*Sean A el subconjunto borroso de los pacientes que padecen peritonitis con cierto grado y B el subconjunto borroso de los pacientes enfermos de gravedad.*

$A = ((p_1,0.8),\ (p_2,0.7),\ (p_3,0.9)).$

$B = ((p_1,0.9),\ (p_2,0.8),\ (p_3,1)).$

*Entonces la implicación borrosa significa que "el que el paciente $p_1$ padezca peritonitis es condición suficiente para que esté enfermo de gravedad". Su representación en notación de subconjuntos borrosos estará dada por*

$A^c \cup B = ((p_1,0.9),\ (p_2,0.8),\ (p_3,1)).$

*e) **EQUIVALENCIA BORROSA (SI Y SOLO SI BORROSO)**, definida por el conjunto $(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B)$ cuya función de membresía es*

$$\text{mín}\ [\text{máx}\ (M_A(x),\ M_{B^c}(x)),\ \text{máx}\ (M_{A^c}(x),\ M_B(x))]$$

*EJEMPLO 11*

*Sea X el conjunto de los pacientes*

$X = (p_1,\ p_2,\ p_3).$

*Sean $A$ el subconjunto borroso de los pacientes que pueden morir y $B$ el subconjunto borroso de los pacientes enfermos de gravedad*

$A = ((p_1,0.6),\ (p_2,0.2),\ (p_3,0.9))$.

$B = ((p_1,0.7),\ (p_2,0.4),\ (p_3,1))$.

*Entonces la equivalencia borrosa significa que "el que el paciente $p_i$ pueda morir es condición necesaria y suficiente para que esté enfermo de gravedad" o bien, "el paciente $p_i$ puede morir si y sólo si está enfermo de gravedad". Su representación en notación de subconjuntos borrosos será*

$(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B) = ((p_1,0.6),\ (p_2,0.6),\ (p_3,0.9))$.

*Como podemos ver las proposiciones antes descritas son análogas a las que se definen para la lógica de Boole. Sin embargo, dentro de la lógica borrosa existe otro tipo de proposición, que no es una generalización de las anteriores, definida a través de la composición de relaciones binarias borrosas:*

***f) "SI...ENTONCES" BORROSO.***

*Para la aplicación de la lógica borrosa a los diagnósticos médicos éste será el tipo de proposición en que se fundamente el método sugerido para establecer las relaciones entre los pacientes y las enfermedades, dados los síntomas que se presenten.*

*Sean*

$A = ((x_i,\ M_A(x_i));\ i = 1,\dots,n)$ y

$B = ((y_j,\ M_B(y_j));\ j = 1,\dots,m)$

*subconjuntos borrosos. Entonces este tipo de proposición establece una correspondencia del tipo:*

$$\begin{aligned}
&\text{Si } x=x_1 \text{ entonces } B = ((y_1,0.8),\dots,(y_m,0.9));\\
&\text{si } x=x_2 \text{ entonces } B = ((y_1,0.3),\dots,(y_m,0.5));\\
&\qquad\vdots\\
&\text{si } x=x_n \text{ entonces } B = ((y_1,0.4),\dots,(y_m,0.7)).
\end{aligned}$$

*es decir, a cada $x_i \in A$ le corresponderá un subconjunto borroso B.*

*Para facilitar al lector la comprensión de este concepto se utilizará la noción de relación binaria, tema del siguiente capítulo, por lo que ahora sólo estableceremos la definición formal en base a su función de membresía:*

$$M_B(y_j) = \max_{x_i \in A} (\min (M_R(x_i,y_j),\ M_A(x_i))).$$

*Donde $M_R(x_i,y_j)$ es la función de membresía de la relación que existe entre A y B.*

*<u>EJEMPLO 12</u>*

*Si se padece el síntoma $x_i$ ($x_i \in X$), entonces se sufre, en cierto grado de alguna enfermedad $e_j$.*

*Sea X el subconjunto borroso de los síntomas que padece el paciente "p", con cierta frecuencia.*

$X = ((x_1,0.8),\ (x_2,0.5),\ (x_3,0.6),\ (x_4,0.9),\ (x_5,0))$.

*y E el subconjunto borroso de las posibles enfermedades que puede padecer el paciente "p" dados los síntomas que presente.*

$E = ((e_1,\ .\ ),\ldots,(e_4,\ .\ ))$

*donde:*

Si $x=x_1$, entonces $E=((e_1,0.0),\ (e_2,0.5),\ (e_3,0.9),\ (e_4,0.2))$;
si $x=x_2$, entonces $E=((e_1,0.3),\ (e_2,0.7),\ (e_3,1.0),\ (e_4,0.0))$;
si $x=x_3$, entonces $E=((e_1,0.2),\ (e_2,0.8),\ (e_3,0.6),\ (e_4,0.9))$;
si $x=x_4$, entonces $E=((e_1,0.9),\ (e_2,0.1),\ (e_3,0.4),\ (e_4,0.5))$;
si $x=x_5$, entonces $E=((e_1,0.6),\ (e_2,0.7),\ (e_3,0.7),\ (e_4,0.6))$.

*Esta es una relación binaria que podemos poner en forma de tabla:*

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.0 & 0.5 & 0.9 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 & 1.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.8 & 0.6 & 0.9 \\ 0.9 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.6 & 0.7 & 0.7 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}$$

*Entonces el subconjunto borroso de las enfermedades estará dado por*

$$M_E(e_j) = \text{máx } [\text{min } (M_R(e_j,x_i),\ M_X(x_i))].$$

*donde R es la relación binaria existente entre E y X.*

*Así,*

$$\begin{aligned} M_E(e_1) &= \text{máx } [\text{min}(0,0.8),\ \text{min}(0.3,0.5),\ \text{min}(0.2,0.6), \\ &\qquad \text{min}(0.9,0.9),\ \text{min}(0.6,0)] \\ &= \text{máx } [0,\ 0.3,\ 0.2,\ 0.9,\ 0] \\ &= 0.9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_E(e_2) &= \text{máx } [\text{min}(0.5,0.8),\text{min}(0.7,0.5),\text{min}(0.8,0.6), \\ &\qquad \text{min}(0.1,0.9),\ \text{min}(0.7,0)] \\ &= \text{máx } [0.5,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.1,\ 0] \\ &= 0.6. \end{aligned}$$

*De igual manera obtendremos*

$M_E(e_3) = 0.8$
$M_E(e_4) = 0.6$

*Los cálculos se presentan en la siguiente tabla en la que se utilizará el símbolo * para introducir la operación máx - min:*

$$
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}
$$
$$
p\,[0.8 \quad 0.5 \quad 0.6 \quad 0.9 \quad 0.0] \quad * \quad \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline x_1 & 0.0 & 0.5 & 0.9 & 0.2 \\ x_2 & 0.3 & 0.7 & 1.0 & 0.0 \\ x_3 & 0.2 & 0.8 & 0.6 & 0.9 \\ x_4 & 0.9 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ x_5 & 0.6 & 0.7 & 0.7 & 0.6 \end{array} \quad =
$$

$$
\begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array}
$$
$$
p\,[0.9 \quad 0.6 \quad 0.8 \quad 0.6]\ .
$$

# C A P I T U L O II

## RELACIONES BORROSAS.

## 2.1 INTRODUCCION

*Las nociones de grafo, correspondencia y relación juegan un papel fundamental en casi todas las ramas de las matemáticas y sus aplicaciones. Tales conceptos se pueden generalizar tomando como base la noción de subconjunto borroso.*

*A partir de esta generalización se pueden descubrir propiedades nuevas, muy interesantes. Por ejemplo, el concepto de clase de equivalencia será reemplazado por el de similitud, menos fuerte y más apto para representar situaciones menos precisas pero con las cuales nos enfrentamos con mayor frecuencia. Asimismo, es posible crear otro tipo de relaciones como las de semejanza y desemejanza.*

*Resulta entonces que una nueva teoría puede ser construida a través de las relaciones borrosas. Cabe aclarar que apenas nos encontramos al principio de esta construcción: la investigación sobre los conceptos borrosos está adquiriendo cada vez mayor importancia, permitiendo describir mejor fenómenos complejos del mundo real reducidos hasta la fecha a especificaciones de todo o nada.*

*Por ejemplo, consideremos el conjunto de síntomas referentes a trastornos digestivos. Supongamos que deseamos identificar en este conjunto la relación de presencia en una misma enfermedad; es decir, dos síntomas están relacionados si están presentes en la misma enfermedad.*

*Aquí nos enfrentamos al problema de falta de apego a la realidad si consideramos ésta como una relación ordinaria; es decir, si sólo aceptamos las opciones "están presentes en la misma enfermedad" o "no están presentes en la misma enfermedad". En este caso, al igual que en la mayor parte de las relaciones entre las situaciones del mundo real, conviene considerar un grado de relacionamiento, ya que, como se aprecia en este ejemplo, ocurre que para una misma enfermedad un síntoma se puede encontrar algunas veces mientras que el otro se encuentra siempre presente.*

*De esta manera, el objetivo de este trabajo es el de poder comprobar la eficacia de las relaciones borrosas en su aplicación a los diagnósticos médicos, a través de sistemas expertos.*

*En muchos casos, los diagnósticos envuelven procesos que son más susceptibles de ser aproximados que sujetos a un análisis preciso. Así, en este capítulo se sugieren las bases con las cuales se pueden desarrollar procedimientos prácticos efectivos, como son los métodos basados en la composición máx-min de relaciones borrosas, que son una generalización de los procesos de diagnóstico médico derivados del estudio de las ecuaciones de suma - producto Booleanas.*

## 2.2 DEFINICION Y OPERACIONES DE RELACIONES BORROSAS.

Es de esperarse que siendo una relación ordinaria entre los conjuntos A y B un subconjunto del producto cartesiano AxB, el concepto de relación sea fácilmente generalizable para el caso borroso; definimos, pues, una relación borrosa entre los conjuntos A y B como un subconjunto borroso de AxB.

Comenzaremos definiendo el PRODUCTO CARTESIANO usual de dos conjuntos $E_1$ y $E_2$ como:

$$E_1 x E_2 = \{(x,y)/x \in E_1 \text{ y } y \in E_2\}.$$

Esta definición puede generalizarse al caso de n conjuntos

$$E_1 x \ldots x E_n = \{(x_1,\ldots,x_n)/x_1 \in E_1,\ldots,x_n \in E_n\}.$$

### 2.2.1 DEFINICION DE RELACIONES BORROSAS

Sea P el producto cartesiano de n conjuntos y M su conjunto de membresía -generalmente se tomará todo el intervalo [0,1].

Una relación n-aria borrosa $\underline{R}$ es un subconjunto borroso de P que toma sus valores en M.

En el caso de dos conjuntos A y B, $\underline{R}$ es un subconjunto borroso de AxB caracterizado por una función de membresía:

$$M_{\underline{R}}: AxB \rightarrow [0,1].$$

Una forma de representar las relaciones borrosas es la forma matricial.

EJEMPLO 1

Sea $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ el conjunto de pacientes que padecen de cierta enfermedad y $S=\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$ el conjunto de síntomas que pueden presentarse con cierta frecuencia de ocurrencia en esa enfermedad.

*Entonces:*

$$PxS=\{(p_1,s_1),\ (p_1,s_2),\ (p_1,s_3),\ (p_1,s_4),\ (p_2,s_1),\ (p_2,s_2),\ (p_2,s_3),\ (p_2,s_4),\ (p_3,s_1),\ (p_3,s_2),\ (p_3,s_3),\ (p_3,s_4)\}.$$

*Definamos la relación borrosa* $\underset{\sim}{R}$ *en PxS como: "el paciente* $p_i$ *padece el síntoma* $s_j$*, con cierta frecuencia de ocurrencia". Se tiene, por ejemplo,*

$$\underset{\sim}{R}=\{((p_1,s_1),0.7),\ ((p_1,s_2),0),\ ((p_1,s_3),0.1),\ ((p_1,s_4),0.3),\ ((p_2,s_1),0),\ ((p_2,s_2),0.8),\ ((p_2,s_3),0.6),\ ((p_2,s_4),0),\ ((p_3,s_1),0.4),\ ((p_3,s_2),0.2),\ ((p_3,s_3),0.5),\ ((p_3,s_4),0)\},$$

*cuya representación matricial es*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\ \underset{\sim}{R} = \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.0 & 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.4 & 0.2 & 0.5 & 0.0 \end{bmatrix} \end{array}$$

*En virtud de que se ha defindo la relación borrosa como un subconjunto borroso, las operaciones definidas para éstos se extienden para las relaciones.*

*En lo sucesivo se utilizarán los símbolos:*

$\vee$ *, para representar el máximo respecto a un elemento o variable x.*

$\wedge$ *, para representar el mínimo respecto a un elemento o variable x.*

## 2.2.2 OPERACIONES CON RELACIONES BORROSAS

*DEFINICION.-* La UNION de dos relaciones borrosas $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{Z}$, representada por $\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{Z}$, es una relación tal que:

$$M_{\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{Z}}(x,y) = M_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \vee M_{\underset{\sim}{Z}}(x,y).$$
$$= \text{máx}[M_{\underset{\sim}{R}}(x,y),\ M_{\underset{\sim}{Z}}(x,y)].$$

Si $\underset{\sim}{R}_1, \underset{\sim}{R}_2, \ldots, \underset{\sim}{R}_n$ son relaciones borrosas, entonces

$$M_{\underset{\sim}{R}1 \cup \underset{\sim}{R}2 \cup \ldots \cup \underset{\sim}{R}n}(x,y) = \bigvee_{\underset{\sim}{R}i} M_{\underset{\sim}{R}i}(x,y),\ i = 1,\ldots,n.$$

EJEMPLO 2

a) Sea D el conjunto de las enfermedades del aparato respiratorio y S el conjunto de los síntomas comunes en enfermedades del aparato respiratorio,

$D = (d_1, d_2, d_3)$

$S = (s_1, s_2, s_3, s_4)$.

Sea $\underset{\sim}{R}$ la relación borrosa definida en DxS como: "los pacientes entre 0 y 15 años de edad, presentan el síntoma $s_j$ con cierta frecuencia de ocurrencia, cuando padecen enfermedades del aparato respiratorio".

Sea $\underset{\sim}{Z}$ la relación borrosa definida en DxS como: "los pacientes entre 20 y 50 años de edad presentan el síntoma $s_j$ con cierta frecuencia cuando padecen enfermedades del aparato respiratorio".

Específicamente, supóngase que se tienen las tablas

$$\underset{\sim}{R} = \begin{array}{c} \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 1.0 & 0.0 \\ 0.8 & 1.0 & 0.0 & 0.2 \\ 0.5 & 0.0 & 0.4 & 0.0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \underset{\sim}{Z} = \begin{array}{c} \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.0 & 0.7 & 0.0 \\ 0.1 & 0.8 & 1.0 & 1.0 \\ 0.6 & 0.9 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array} \quad ;$$

entonces

$$
\underline{R} \cup \underline{Z} = \begin{array}{c} \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 1.0 & 0.0 \\ 0.8 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.6 & 0.9 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array} ,
$$

*donde $\underline{R} \cup \underline{Z}$ representa la relación borrosa: "Los pacientes entre 0 y 15 años de edad y/o entre 20 y 50 años de edad presentan el síntoma $s_j$ con cierta frecuencia".*

*b) Sea D el conjunto de las enfermedades,*

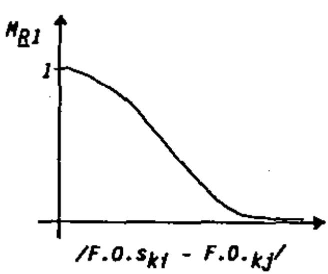
$$D = (d_i/i=1,\ldots,n).$$

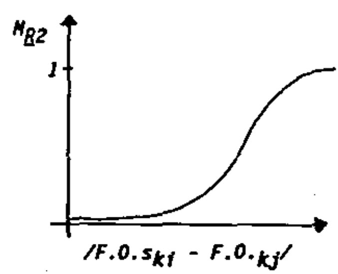
*Sea $\underline{R}_1$ la relación borrosa definida en DxD como "$d_i$ y $d_j$ son enfermedades muy parecidas".*

*Sea $\underline{R}_2$ la relación borrosa definida en DxD como "$d_i$ y $d_j$ son enfermedades muy distintas".*

*Supongamos que ambas o una de estas enfermedades está caracterizada por la presencia en el paciente del síntoma $s_k$.*

*Si $d_i$ y $d_j$ son enfermedades muy parecidas significará que ambas presentarán el síntoma $s_k$ con la misma o casi la misma frecuencia de ocurrencia. Por el contrario, si son enfermedades muy diferentes, el síntoma $s_k$ se presentará con una frecuencia de ocurrencia muy distinta. Así, la representación gráfica de $\underline{R}_1$ y $\underline{R}_2$ basándonos en la frecuencia de ocurrencia del síntoma $s_k$ será*



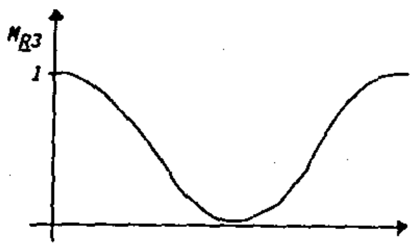



donde

$F.O.s_{ki}$ representa la frecuencia de ocurrencia del síntoma $s_k$ en la enfermedad $d_i$, y

$F.O.s_{kj}$ representa la frecuencia de ocurrencia del síntoma $s_k$ en la enfermedad $d_j$.

En consecuencia, $\underset{\sim}{R}_3 = \underset{\sim}{R}_1 \cup \underset{\sim}{R}_2$ será la relación borrosa definida como: "$d_i$ y $d_j$ son muy parecidas y/o son muy diferentes", y su representación gráfica será




En una lógica construida en base a la teoría de los conjuntos ordinarios, una proposición como "$d_i$ y $d_j$ son muy parecidas y/o son muy diferentes" debe reducirse a "$d_i$ y $d_j$ son muy parecidas o son muy diferentes". Pero a partir de la teoría de los conjuntos borrosos, la primera proposición es coherente; expresa que el caso "y" es concebible con una ponderación muy débil que corresponde a la proposición borrosa "$d_i$ y $d_j$ son muy parecidas "y" son muy diferentes".

De esta manera, podemos decir que el ejemplo anterior ilustra la flexibilidad proposicional que se encuentra en el estudio de esta teoría.

**DEFINICION.-** La INTERSECCION de dos relaciones borrosas $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{Z}$, representada por $\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{Z}$, es la relación que satisface

$$M_{\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{Z}}(x,y) = M_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \wedge M_{\underset{\sim}{Z}}(x,y)$$
$$= min[M_{\underset{\sim}{R}}(x,y),\ M_{\underset{\sim}{Z}}(x,y)].$$

Inductivamente, si $\underset{\sim}{R}_1$, $\underset{\sim}{R}_2, \ldots, \underset{\sim}{R}_n$ son relaciones borrosas se tiene:

$$\mu_{\underset{\sim}{R}1\cap \underset{\sim}{R}2\cap\ldots\cap \underset{\sim}{R}n}(x,y) = \underset{\underset{\sim}{R}i}{\wedge}\ \mu_{\underset{\sim}{R}i}(x,y),\ i = 1,\ldots,n.$$

*EJEMPLO 3*

*a) Consideremos las relaciones $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{Z}$ dadas en el ejemplo 2 inmediato anterior; entonces*

$$\underset{\sim}{R}\cap\underset{\sim}{Z} = \begin{array}{c} \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{array}\overset{\begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array}}{\begin{bmatrix} 0.3 & 0.0 & 0.7 & 0.0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.0 & 0.2 \\ 0.5 & 0.0 & 0.3 & 0.0 \end{bmatrix}} \quad ;$$

*aquí, $\underset{\sim}{R}\cap\underset{\sim}{Z}$ representa la relación "los pacientes entre 0 y 15 años de edad y 20 y 50 años de edad que padecen enfermedades del aparato respiratorio, presentan el síntoma $s_j$ con cierta frecuencia".*

***DEFINICION.-*** *El COMPLEMENTO de una relación borrosa $\underset{\sim}{R}$ representado por $\underset{\sim}{R}^c$ es tal que:*

$$\forall (x,y) \in E_1 x E_2;\ \mu_{\underset{\sim}{R}c}(x,y) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y).$$

*EJEMPLO 4*

*Sea P el conjunto de los pacientes y S el conjunto de los síntomas,*

$P = (p_1,\ p_2,\ p_3)$

$S = (s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4).$

*Sea $\underset{\sim}{R}$ la relación borrosa definida en PxS como "el paciente $p_i$ padece el síntoma $s_j$ con cierta frecuencia de ocurrencia" cuya representación matricial es*

$$\underset{\sim}{R} = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}\overset{\begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array}}{\begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.8 & 1.0 \\ 0.5 & 1.0 & 0.0 & 0.1 \\ 0.6 & 1.0 & 0.9 & 0.2 \end{bmatrix}} \quad .$$

*Entonces*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\ \underset{\sim}{R}^c = \begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.0 \\ 0.5 & 0.0 & 1.0 & 0.9 \\ 0.4 & 0.0 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array}$$

*Lo anterior significa que, por ejemplo, el paciente $p_1$ padece el síntoma $s_1$ con una frecuencia de ocurrencia de 0.7; es decir, padece el síntoma $s_1$ a menudo. Así, y de acuerdo con la definición de $\underset{\sim}{R}^c$, el paciente $p_1$ rara vez padece el síntoma $s_1$ (con una frecuencia de ocurrencia de 0.3).*

***NOTA:*** *Posteriormente se verá que la frecuencia de ocurrencia es una variable lingüística a la cual se le asociará un valor numérico en el intervalo [0,1].*

***DEFINICION.-*** *La INVERSA de una relación borrosa $\underset{\sim}{R}$ denotada por $\underset{\sim}{R}^{-1}$, es la relación borrosa que cumple que*

$$\forall\ (x,y) \in E_1 x E_2;\ M_{\underset{\sim}{R}^{-1}}(y,x) = M_{\underset{\sim}{R}}(x,y).$$

*A continuación citaremos otro tipo de operaciones entre relaciones borrosas que son generalmente muy utilizadas en los casos prácticos, sobre todo para la representación de grafos borrosos, pero que para el propósito de este trabajo no son de vital importancia. Si el lector desea ampliar este tema, deberá consultar la referencia 1 de la bibliografía.*

*a) PRODUCTO ALGEBRAICO DE DOS RELACIONES BORROSAS: Se representa por $\underset{\sim}{R} \cdot \underset{\sim}{Z}$ y cumple*

$$M_{\underset{\sim}{R} \cdot \underset{\sim}{Z}}(x,y) = M_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \cdot M_{\underset{\sim}{Z}}(x,y).$$

*b) SUMA ALGEBRAICA DE DOS RELACIONES BORROSAS: Se representa por $\underset{\sim}{R} \dotplus \underset{\sim}{Z}$ y satisface*

$$M_{\underset{\sim}{R} \dotplus \underset{\sim}{Z}}(x,y) = M_{\underset{\sim}{R}}(x,y) + M_{\underset{\sim}{Z}}(x,y) - M_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \cdot M_{\underset{\sim}{Z}}(x,y).$$

*En las dos definiciones anteriores + y $\cdot$ representan la suma y* *multiplicación ordinarias, respectivamente.*

*c) SOPORTE DE UNA RELACION BORROSA: Se llama así al subconjunto ordinario de pares ordenados (x,y) para los cuales la función de membresía es no nula:*

$$S(\underline{R}) = \{(x,y)/ M_{\underline{R}}(x,y) > 0\}.$$

*d) CONTINENTE DE UNA RELACION BORROSA: Sean $\underline{R}$ y $\underline{Z}$ dos relaciones borrosas para la cuales se tiene que*

$$\forall (x,y) \in E_1 x E_2,\ M_{\underline{R}}(x,y) \leq M_{\underline{Z}}(x,y).$$

*Se dice entonces que $\underline{Z}$ es un continente de $\underline{R}$ o que $\underline{R}$ es un contenido de $\underline{Z}$.*

## 2.2.3 PROPIEDADES

*El tipo de relaciones más importantes es el de las relaciones de un conjunto en sí mismo; por tanto, nos ocuparemos de las propiedades de las relaciones borrosas en ExE; es decir, consideraremos $E_1 = E_2 = E$ y $M=[0,1]$.*

*a) REFLEXIVIDAD: Esta propiedad se define por:*

$$\forall (x,x) \in ExE,\ M_{\underline{R}}(x,x) = 1.$$

*EJEMPLO 5*

*Sea D el conjunto de las enfermedades del aparato digestivo ($D = \{d_i/i=1,...,n\}$) y sea $\underline{R}$ la relación borrosa definida en DxD por "la enfermedad $d_i$ es muy parecida a la enfermedad $d_j$, de acuerdo con los síntomas que presenta".*

*b) SIMETRIA: Es una propiedad definida por:*

$$\forall (x,y) \in ExE,\ M_{\underline{R}}(x,y) = M_{\underline{R}}(y,x).$$

*EJEMPLO 6*

*a)* Nuevamente la relación borrosa definida en DxD: "la enfermedad $d_i$ es muy parecida a la enfermedad $d_j$, de acuerdo con los síntomas que presentan".

*b)* Sea $S$ el conjunto de los síntomas de enfermedades del aparato digestivo ($S=(s_1, s_2, s_3)$) y sea $\underset{\sim}{R}$ la relación borrosa definida en SxS, como "el síntoma $s_i$ y el síntoma $s_j$ se padecen comúnmente en la infección intestinal". Su representación matricial es:

$$\underset{\sim}{R} = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.0 & 0.3 & 0.7 \\ 0.3 & 1.0 & 0.5 \\ 0.7 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\underset{\sim}{R}$ es simétrica.

*c) **TRANSITIVIDAD:*** Sean $x,y,z \in E$. Entonces la transitividad estará definida como sigue:

$$\forall (x,y),(y,z),(x,z) \in ExE,\ M_{\underset{\sim}{R}}(x,z) \geq \max_{y}[\min(M_{\underset{\sim}{R}}(x,y),\ M_{\underset{\sim}{R}}(y,z))].$$

Es interesante verificar que esta definición es una generalización de la transitividad en las relaciones formales. Se sabe que para tales relaciones, la transitividad está definida por:

$$[(x,y) \in ExE \ \ y \ \ (y,z) \in ExE] \Rightarrow [(x,z) \in ExE].$$

Esta relación expresa el hecho de que si existe al menos una "y" tal que $(x,y) \in \underset{\sim}{R}$ y $(y,z) \in \underset{\sim}{R}$ ;es decir, $M_{\underset{\sim}{R}}(x,y)=1$ y $M_{\underset{\sim}{R}}(y,z)=1$, entonces $M_{\underset{\sim}{R}}(x,z)=1$ y, en consecuencia, $(x,z) \in \underset{\sim}{R}$.

La operación $\wedge$ (mínimo) corresponde a la conjunción de la proposición lógica y la operación $\vee$ (máximo respecto a todas las "y") corresponde al resultado que se puede obtener por la implicación ( $\Rightarrow$ ).

*EJEMPLO 7*

a) La enfermedad $d_i$ es muy parecida a la enfermedad $d_j$, de acuerdo a los síntomas que presentan.

b) El síntoma $s_i$ es más frecuente que el síntoma $s_j$.

c) A continuación expondremos un ejemplo numérico con el objeto de poder mostrar más claramente el cálculo para comprobar la transitividad de una relación a través de su representación matricial.

Sea $E = \{a, b, c, d\}$ y sea $\underline{R} \subset E x E$ definida por la tabla

$$\underline{R} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 1.0 & 0.4 & 0.4 \\ 0.0 & 0.6 & 0.3 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.3 & 0.0 \\ 0.1 & 1.0 & 1.0 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array};$$

Para comprobar la transitividad de esta relación hay que efectuar 16x4 operaciones; sólo se relizará la comprobación para los elementos b y c. Tenemos que verificar que

$$M_{\underline{R}}(b,c) \geq \max_{y \in E}(\min(M_{\underline{R}}(b,y),\ M_{\underline{R}}(y,c))).$$

Ahora,

si $y=a$, $\min(M_{\underline{R}}(b,a),\ M_{\underline{R}}(a,c)) = \min(0,0.4) = 0;$

si $y=b$, $\min(M_{\underline{R}}(b,b),\ M_{\underline{R}}(b,c)) = \min(0.6,0.3) = 0.3;$

si $y=c$, $\min(M_{\underline{R}}(b,c),\ M_{\underline{R}}(c,c)) = \min(0.3,0.3) = 0.3;$ y

si $y=d$, $\min(M_{\underline{R}}(b,d),\ M_{\underline{R}}(d,c)) = \min(0,0.1) = 0.$

Así,

$$\max_{y}(\min(M_{\underline{R}}(b,y),\ M_{\underline{R}}(y,c))) = \max_{y}(0,\ 0.3,\ 0.3,\ 0)$$

$= 0.3$

$\leq 0.3 = M_{\underset{\sim}{R}}(b,c).$

*Para un conjunto finito E cuya cardinalidad sea n, habrá $n^2$ veces n operaciones que realizar; es decir, $n^3$ para verificar la transitividad si no hay regla alguna que permita razonar acerca de la función de membresía.*

## *2.3 COMPOSICION DE RELACIONES BORROSAS*

*A continuación definiremos la operación de composición de relaciones borrosas, que será la base de nuestra aplicación a los diagnósticos médicos.*

*Se buscará dar al lector una explicación intuitiva de esta definición con el fin de que interprete apropiadamente el resultado de componer dos relaciones borrosas.*

*DEFINICION.-* *Sean $\underset{\sim}{R}_1 \subset XxY$ y $\underset{\sim}{R}_2 \subset YxZ$. Se define la COMPOSICION MAX-MIN de $\underset{\sim}{R}_1$ y $\underset{\sim}{R}_2$, representada por $\underset{\sim}{R}_1 o \underset{\sim}{R}_2$, mediante la expresión*

$$M_{\underset{\sim}{R}1 o \underset{\sim}{R}2}(x,z) = \bigvee_y [M_{\underset{\sim}{R}1}(x,y) \wedge M_{\underset{\sim}{R}2}(y,z)]$$

$$= \max_y [\min(M_{\underset{\sim}{R}1}(x,y),\ M_{\underset{\sim}{R}2}(y,z))].$$

### *EJEMPLO 8*

*Sea $P = (p)$, el conjunto del paciente que padece una enfermedad del aparato digestivo y sean también D y S los conjuntos de las enfermedades que afectan el aparato digestivo y de los síntomas que pueden presentarse en enfermedades del aparato digestivo, respectivamente,*

$D=(d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4,\ d_5)$

$S=(s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4).$

*Sean $\underline{R}_1$ la relación borrosa definida en PxS como "el síntoma $s_j$ (j=1,2,3,4) puede presentarse con cierta frecuencia en el paciente p" y $\underline{R}_2$ la relación borrosa definida en SxD como "el síntoma $s_i$ (i=1,2,3,4) puede presentarse con cierta frecuencia en la enfermedad $d_k$ (k=1,2,3,4,5)".*

*Las representaciones matriciales de las relaciones $\underline{R}_1$ y $\underline{R}_2$ son*

$$\underline{R}_1 = p \begin{array}{c} \\ \end{array}\!\!\begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \end{array}$$
$$\underline{R}_1 = p\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.0 & 0.7 \end{bmatrix} \qquad y \qquad \underline{R}_2 = \begin{array}{c|ccccc} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ \hline s_1 & 0.9 & 0.0 & 0.3 & 0.4 & 0.6 \\ s_2 & 0.2 & 1.0 & 0.8 & 0.0 & 0.2 \\ s_3 & 0.4 & 0.2 & 0.3 & 0.0 & 0.6 \\ s_4 & 0.7 & 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{array}$$

*y la composición $\underline{R}_1 o \underline{R}_2$ tiene la representación matricial*

$$\begin{array}{c} \\ \underline{R}_1 o \underline{R}_2 = p \end{array} \begin{array}{ccccc} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ 0.7 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \end{array} \quad .$$

*con lo cual se puede concluir que una de las enfermedades del aparato digestivo que puede padecer el paciente p de acuerdo a la frecuencia de ocurrencia de los síntomas que presenta es la enfermedad $d_1$, ya que es la que posee el grado de confirmación de diagnóstico más alto (0.7).*

*La operación de matrices máx-min que nos permite obtener la matriz de la composición es análoga a la multiplicación usual de matrices, sustituyendo en ésta las multiplicaciones por conjunciones y las sumas por disyunciones. Mostraremos cómo obtener el elemento del primer renglón y la primera columna de la matriz $\underline{R}_1 o \underline{R}_2$.*

*Hay que operar máx-min el primer renglón de la matriz correspondiente a $\underline{R}_1$ con la primera columna de la matriz correspondiente a $\underline{R}_2$; esto es:*

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.0 & 0.7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

*Si se efectuase la operación usual de multiplicación de vectores, el resultado sería*

$$(0.1)\ (0.9) + (0.2)\ (0.2) + (0)\ (0.4) + (0.7)\ (0.7).$$

*Para realizar la operación máx-mín basta sustituir en la operación anterior el producto por el operador mín y la suma por el operador máx; es decir:*

$$\text{máx}(\text{mín}(0.1,0.9),\ \text{mín}(0.2,0.2),\ \text{mín}(0,0.4),\ \text{mín}(0.7,0.7))$$

$$= \text{máx}(0.1,\ 0.2,\ 0,\ 0.7) = 0.7.$$

*Basándonos en la definición de la composición, el valor de la posición de la matriz que deseamos encontrar está dado por:*

$$\begin{aligned}
M_{(\underset{\sim}{R}1 \circ \underset{\sim}{R}2)}(p,d_1) &= \underset{s \in S}{\text{máx}}(\text{mín}(M_{\underset{\sim}{R}1}(p,s),\ M_{\underset{\sim}{R}2}(s,d_1))) \\
&= \underset{s \in S}{\text{máx}}(\text{mín}(M_{\underset{\sim}{R}1}(p,s_1),\ M_{\underset{\sim}{R}2}(s_1,d_1)), \\
&\qquad \text{mín}(M_{\underset{\sim}{R}1}(p,s_2),\ M_{\underset{\sim}{R}2}(s_2,d_1)), \\
&\qquad \text{mín}(M_{\underset{\sim}{R}1}(p,s_3),\ M_{\underset{\sim}{R}2}(s_3,d_1)), \\
&\qquad \text{mín}(M_{\underset{\sim}{R}1}(p,s_4),\ M_{\underset{\sim}{R}2}(s_4,d_1))) \\
&= \underset{s \in S}{\text{máx}}(\text{mín}(0.1,0.9),\ \text{mín}(0.2,0.2),\ \text{mín}(0,0.4), \\
&\qquad \text{mín}(0.7,0.7)) \\
&= \underset{s \in S}{\text{máx}}(0.1,0.2,0,0.7) \\
&= 0.7.
\end{aligned}$$

*Como se podrá observar, la operación entre matrices facilita la obtención de la relación compuesta.*

*Nosotros interpretaremos la composición de relaciones borrosas como el máximo relacionamiento posible, tomando en cuenta los valores de las* *relaciones involucradas. En efecto, del ejemplo anterior se concluye que, de acuerdo con la frecuencia de ocurrencia con que el paciente p padece cada uno de los síntomas en conjunción con la frecuencia con que éstos se presentan en las distintas enfermedades consideradas, la enfermedad mayormente relacionada con p será $d_1$. De aquí, el clínico decidirá las pruebas de laboratorio a realizar enfocando su búsqueda hacia la enfermedad $d_1$, que es la que tiene más en común con los síntomas que padece p.*

## 2.3.1 PROPIEDADES DE LA COMPOSICION MAX-MIN

*La operación COMPOSICION MAX-MIN es asociativa; es decir:*

$$(\underline{R}_3 o \underline{R}_2) \; o \; \underline{R}_1 = \underline{R}_3 \; o \; (\underline{R}_2 o \underline{R}_1)$$

*Por otra parte, si $\underline{R}$ es una relación definida en XxX, entonces $\underline{R}$ C XxX se puede escribir como*

$$\underline{R} \; o \; \underline{R} = \underline{R}^2,$$

*y de aquí*

$$\underline{R} \; o \; \underline{R}^2 = \underline{R}^2 \; o \; \underline{R} = \underline{R}^3$$

*y, más generalmente,*

$$\underbrace{\underline{R} \; o \; \underline{R} \; o \; \ldots o \; \underline{R}}_{k \text{ veces}} = \underline{R}^k.$$

*La operación COMPOSICION MAX-MIN es distributiva con respecto a la unión, pero no lo es con respecto a la intersección; es decir:*

$$(\underline{R}_1 \cup \underline{R}_2) \; o \; \underline{R}_3 = (\underline{R}_1 \; o \; \underline{R}_3) \cup (\underline{R}_2 \; o \; \underline{R}_3)$$

*pero*

$$(\underline{R}_1 \cap \underline{R}_2) \circ \underline{R}_3 \neq (\underline{R}_1 \circ \underline{R}_3) \cap (\underline{R}_2 \circ \underline{R}_3) \text{ (1)}$$

(1) *Ver una demostración de estas propiedades en el apéndice 3.*

# C A P I T U L O III

## SISTEMAS EXPERTOS.

## *3.1 INTRODUCCION*

*Los diagnósticos médicos, al igual que otras operaciones de previsión y prognosis que se realizan en las áreas más diversas del conocimiento humano, involucran procesos de análisis del problema en cuestión bajo una situación de aproximación lógica más que de una definición lógica precisa, respecto de las entidades que interaccionan en dicho problema. El objetivo de este capitulo es demostrar la eficacia de las relaciones borrosas en su aplicación al proceso de diagnóstico médico, a través de sistemas expertos.*

*Los sistemas expertos son programas creados para resolver problemas que requieren de "experiencia". Esto significa que deben poseer un amplio conocimiento acerca del dominio o campo del problema a resolver.*

*Los próximos dos incisos de este capitulo pretenden dar una visión general de lo que es un sistema experto y su proceso de funcionamiento. Luego, con la conjunción de conocimientos de estos incisos y los dos primeros capitulos, se pasará al cuarto inciso, objeto esencial del presente trabajo: SISTEMAS MEDICOS EXPERTOS EMPLEANDO LOGICA BORROSA.*

## *3.2 DEFINICION Y CUALIDADES DE UN SISTEMA EXPERTO.*

*Definiremos el concepto de sistema experto a través de siete caracteristicas que son fundamentales para los objetivos de trabajo en este campo. Tales caracteristicas son:*

*1) Contar con experiencia, reglas de alto nivel y alto funcionamiento.*
*2) Razonar mediante manipulación de simbolos.*
*3) Poseer inteligencia.*
*4) Tratar con problemas dificiles y complejos.*
*5) Posser capacidad de reformulación.*
*6) Razonar acerca de sí mismo.*
*7) Ejecutar cierto tipo de tareas.*

*1) EXPERIENCIA.- El objetivo primordial en el trabajo de un sistema experto es el de alcanzar un funcionamiento de alto nivel al ejecutar una tarea; es decir, actuar como un experto. Esto significa producir resultados de alta calidad en un minimo de tiempo.*

*Aunque el funcionamiento exitoso de una tarea es parte parcial del comportamiento experto, no es suficiente para determinar que un sistema lo* *sea; es decir, una de las características esenciales que debe poseer todo sistema experto es la capacidad de reconocer, a través de su búsqueda hacia la solución, las hipótesis más razonables eliminando en cada paso inferencial aquéllas que no lo sean.*

*2) RAZONAMIENTO MEDIANTE MANIPULACION DE SIMBOLOS.- Los sistemas expertos emplean razonamiento simbólico como un medio para representar el conocimiento referente al dominio del problema que se desea resolver.*

*3) INTELIGENCIA [2].- Un sistema experto puede ser más o menos inteligente dependiendo del alcance de sus principios; es decir, de su conocimiento acerca del dominio del problema que se desea resolver, de su capacidad para crear sus propias decisiones y de la calidad de su proceso inferencial mediante la aplicación eficiente de ese conocimiento.*

*4) DIFICULTAD Y COMPLEJIDAD.- Los problemas a resolver necesitan ser lo suficientemente complejos como para requerir de un sistema experto; así, un sistema experto - en un dominio de relaciones complejas o cada vez más complejas - debe poder involucrar reglas lógicas que representen una mayor experiencia con las cuales sea posible alcanzar una respuesta adecuada para problemas de gran dificultad.*

*5) REFORMULACION.- Significa que un sistema experto debe poseer la capacidad de tomar un problema en el estado inicial dado y convertirlo a una forma apropiada para procesar las reglas expertas y llegar a la solución; o sea, debe realizar la transcripción de una forma superficial del problema a una completa reconceptualización del mismo.*

*6) RAZONAMIENTO ACERCA DE SI MISMO.- Un sistema experto necesita poseer la capacidad de razonar sus propias decisiones; es decir, analizar sus propias cadenas de razonamiento y entenderlas. Esto significa reconstruir cada trayectoria inferencial que el sistema debió tomar para llegar a la solución del problema y asociarla con los principios fundamentales del dominio para justificarlas.*

*7) TIPO DE TAREAS.- Los sistemas expertos han sido creados para realizar esencialmente tareas como interpretación, diagnósticos, predicciones, instrucciones, monitoreo, planeación y diseño.*

*(2) En este trabajo se denota por inteligencia al mecanismo de obtención de inferencias lógicas del sistema, a través de procesos automáticos.*

*Resumiendo las características anteriormente mencionadas, podríamos decir que un sistema experto es aquél que posee reglas lógicas - producto de la experiencia de expertos humanos - elimina la llamada búsqueda a ciegas, razona por medio de manipulación de símbolos y comprende los principios fundamentales del dominio en cuestión. Trata con problemas difíciles en dominios complejos, puede tomar la descripción de un problema en ciertos términos y transformarlo a una representación interna apropiada para procesarlo con sus reglas expertas. Posee la capacidad de razonar acerca de sus propias decisiones, principalmente para reconstruir sus trayectorias inferenciales y así explicar cómo llegó a las conclusiones obtenidas de modo que pueda justificarlas.*

## *3.3 CONCEPTOS FUNDAMENTALES PARA LA CONSTRUCCION DE UN SISTEMA EXPERTO*

*Durante el desarrollo de este inciso enfatizaremos dos conceptos básicos: el de SIMBOLOS y el de BUSQUEDA. Ellos están relacionados con los sistemas de símbolos gráficos que manipulan colecciones de estructuras simbólicas y ejecutan la solución de los problemas utilizando la búsqueda heurística que describiremos más adelante. Como se verá, contaremos con los medios necesarios y suficientes para ejecutar acciones o decisiones lógicas inteligentemente y, dado que los sistemas expertos intentan estructurar el conocimiento y la inteligencia de un experto, estos dos conceptos resultan de suma importancia.*

### *3.3.1 SIMBOLOS*

*DEFINICION.- Un SIMBOLO es un caracter o una cadena de caracteres. Por ejemplo:*

*ORANGE*
*TRANSISTOR-13*
*RUNNING*
*FIVE.*

*DEFINICION.- Una ESTRUCTURA SIMBOLICA es una estructura de datos (lista) la cual contiene símbolos. Por ejemplo:*

*(SAME-AS (FATHER-OF PETE) (FATHER-OF (BROTHER-OF PETE)))*
*(ON BLOCK 1 BLOCK 2)*
*(PLUS 5 x)*

#### *3.3.1.1 CALCULO DE PREDICADOS.*

*El cálculo de predicados es una formalización de las estructuras lógico-simbólicas capaz de representar cualquier tipo de relaciones lógicas y que puede ser implementado en una computadora.*

*Aunque actualmente los resultados del razonamiento en un sistema experto pueden ir más allá de los previstos por la lógica clásica, el conocimiento del cálculo de predicados es un fundamento primordial para entender los resultados de la representación simbólica y la inferencia.*

*El cálculo de predicados, como se mencionó anteriormente, está formado de estructuras simbólicas que contienen TERMINOS y PREDICADOS.*

*Los <u>términos</u> se utilizan para dar nombre a las cosas; los <u>predicados</u> representan relaciones entre esas cosas. Por ejemplo:*

*Consideremos que el paciente "p" padece la enfermedad "d" que afecta a su aparato digestivo "s"; esta enfermedad presenta tres síntomas: "a", "b", "c". Entonces en las listas*

| | |
|---|---|
| *(IS-A a SYMPTOM)* | *(IS-A d DISEASE)* |
| *(IS-A b SYMPTOM)* | *(IS-A s DIGESTIVE APPARATUS)* |
| *(IS-A c SYMPTOM)* | *(IS-A p PATIENT)* |

| | |
|---|---|
| *(PART-OF a d)* | *(AFFECTS-A a s)* |
| *(PART-OF b d)* | *(AFFECTS-A b s)* |
| *(PART-OF c d)* | *(AFFECTS-A c s)* |

*a, b, c, d, s, p son términos mientras que IS-A, PART-OF, AFFECTS-A son predicados. Donde (IS-A a SYMPTOM) significa que "a" es un síntoma; (PART-OF a d) significa que el síntoma "a" se presenta en la enfermedad "d" y (AFFECTS-A a s) significa que el síntoma "a" afecta al aparato digestivo "s".*

*Asimismo, en lógica a los predicados anteriores se les denomina PROPOSICIONES.*

*El cálculo de predicados toma en cuenta funciones y conectivos lógicos.*

*Las funciones denotan una correspondencia entre los términos. Por ejemplo:*

*Si (MOST-SIGNIFICANT) es el símbolo de una función, entonces (MOST-SIGNIFICANT a b) denota que a es un síntoma más caraterístico que b para la enfermedad d.*

*Los conectivos como $\wedge$ (y), $\vee$ (o), $\Rightarrow$ (implicación), se utilizan para combinar proposiciones. Por ejemplo:*

*La proposición "a es un síntoma o a afecta al aparato digestivo" podría ser representada en notación funcional como*

*(IS-A a SYMPTOM) $\vee$ (AFFECTS-A a s)*

*o, lo que es lo mismo;*

*(OR (IS-A a SYMPTOM)(AFFECTS-A a s))*

*El símbolo – (no) se utiliza para negar una proposición. Por ejemplo:*

*La proposición "el síntoma a no afecta al hígado" se representaría en notación funcional como*

*–(AFFECTS-A (IS-A a SYMPTOM)(LIVER)),*

*o también*

*NOT(AFFECTS-A (IS-A a SYMPTOM)(LIVER)).*

*El cálculo de predicados también puede expresar proposiciones que involucren cuantificadores como "todos los síntomas afectan al aparato digestivo". Escrito en notación funcional esto quedaría*

$(\forall x)(SYMPTOM\ (x) \Rightarrow AFFECTS\text{-}A\ x\ (s))$

*o, en otra forma*

*(ALL(x)(IF (IS-A x SYMPTOM)(AFFECTS-A x s))).*

*Este es el cuantificador universal ($\forall$) que indica que la proposición es verdadera para todos los valores que se le asignen a la variable x.*

*Otro cuantificador importante es el cuantificador existencial ($\exists$), que indica que la proposición es verdadera para algunos de los valores que se le asignen a la variable x, como por ejemplo: "existen síntomas que afectan al hígado". Escrito en notación funcional podría leerse*

$(\exists x)(SYMPTOM\ (x) \Rightarrow AFFECTS\text{-}A\ x\ (LIVER)),$

*o*

*(EXISTS (x) (IF (IS-A x SYMPTOM)(AFFECTS-A x LIVER))).*

*Las proposiciones construidas con conectivos lógicos y cuantificadores pueden dar una interpretación asignando una correspondencia entre los elementos del lenguaje utilizado y las entidades (términos) y relaciones (predicados) del dominio del problema que se desea resolver.*

### ***3.3.1.2 INFERENCIA.***

***DEFINICION.-** Se denomina INFERENCIA a la creación de nuevas estructuras simbólicas a partir de las ya conocidas.*

*Para que un sistema experto "razone" debe ser capaz de inferir nuevos hechos a partir de los que ya han sido mencionados. Por ejemplo:*

*Del predicado (MOST-SIGNIFICANT a b) podemos inferir el predicado (MOST-FREQUENT):*

$$(ALL\ a)\ (ALL\ b)\ [((MOST\text{-}SIGNIFICANT\ a\ b) \Rightarrow (MOST\text{-}FREQUENT\ a\ b))]$$

*Para las proposiciones de este trabajo se utilizarán dos reglas de inferencia:*

*1) **MODUS PONENS:** Si se tiene A y $A \Rightarrow B$, entonces A produce B.*

*2) ESPECIALIZACION UNIVERSAL: Es la generalización del modus ponens. Si se tiene A, $(\forall x)$, $W(x) \Rightarrow W(A)$, entonces para toda x se produce W(A).*

*La aplicación directa de estas reglas de inferencia a los sistemas expertos consiste en representar lo ya establecido por medio de proposiciones almacenadas en la memoria de la computadora y utilizar reglas de inferencia para derivar nuevas proposiciones.*

### 3.3.2 BUSQUEDA.

*Muchos de los sistemas creados para la solución de problemas están basados en la formulación de la ejecución del mismo como una búsqueda.*

*En esta clase de formulación, una descripción de la solución deseada se llama OBJETIVO y el conjunto de las posibles alternativas hacia el objetivo se denomina ESPACIO DE BUSQUEDA.*

*La formulación de búsqueda más simple es la del ESPACIO DE BUSQUEDA POR ESTADOS donde se utilizan estados y operadores.*

*Un ESTADO es una estructura de datos que presenta una "instantánea" del problema en alguna etapa de la solución. Los operadores cambian de un estado a otro y se aplican de manera secuencial desde el estado inicial hasta el estado donde se alcanza el objetivo.*

*A continuación detallaremos brevemente las distintas maneras de llevar a cabo la búsqueda hacia una solución:*

*1) **BUSQUEDA A CIEGAS.-** Este tipo de búsqueda se lleva a cabo sin* *seguir un patrón determinado, pasando por cada etapa hacia la solución del problema hasta alcanzar el objetivo.*

*Los métodos de búsqueda a ciegas pueden ser:*

- *Búsqueda retrospectiva desde el estado final deseado hasta las condiciones iniciales, aplicando inversamente los operadores.*

- *Una búsqueda que parta de las condiciones iniciales dadas hacia el objetivo.*

- *Una búsqueda que se inicia desde las condiciones iniciales y/o del estado final deseado hasta encontrar una solución durante el desarrollo del proceso.*

*Cabe hacer la aclaración que este tipo de búsqueda no es práctico para problemas grandes ya que se pasa - probablemente en forma innecesaria - por muchos estados antes de encontrar la solución.*

*2) **BUSQUEDA HEURISTICA**.- Debido a que en la búsqueda hacia la solución de un problema existen límites sobre la cantidad de tiempo y la capacidad de memoria requeridos, el método de búsqueda heurística utiliza información sobre el dominio específico del problema para guiar el proceso hacia la solución y reducir así el tiempo de cálculo.*

*Una forma de búsqueda heurística es la que utiliza una función de valuación que determina la cercanía de la trayectoria óptima seguida hacia el objetivo.*

*Debe mencionarse que, para la construcción de estas funciones, no sólo se requieren funciones aritméticas y promedios ponderados, sino también grandes cantidades de cálculo simbólico.*

*3) **ABSTRACCION DEL ESPACIO SOLUCION**.- Este tipo de búsqueda se enfoca a las consideraciones más importantes hacia la solución de un problema clasificándolo jerárquicamente.*

*4) **GENERAR Y EXAMINAR**.- Este tipo de método divide el proceso de búsqueda en dos partes, asociadas a dos mecanismos de que dispone:*

*a) Un generador de posibles soluciones.*

*b) Un examinador que rechaza las soluciones que fallan al encontrar restricciones.*

*Una forma importante de esta clase de método es la de generar y examinar jerárquicamente, lo que elimina las posibles soluciones que están descritas parcialmente; es decir, aquéllas que no pueden ser justificadas.*

*En resumen, de las definiciones anteriores se puede concluir que el segundo y tercer método son más efectivos en problemas donde se tiene un objetivo a satisfacer. El cuarto método es más apropiado para la optimización de objetivos.*

*En la aplicación objeto de este trabajo los métodos de búsqueda utilizados son el método de abstracción del espacio solución y el método de generar y examinar.*

*A continuación citaremos un ejemplo que muestre una idea general del razonamiento del sistema médico experto que se presentará en el siguiente capítulo:*

*Consideremos que el paciente "p" presenta n síntomas,* $s_1, s_2, \ldots, s_n$. *Existen cientos de enfermedades que podrían presentar uno o más de estos n síntomas. Si se considerara este hecho, al tratar de diagnosticar se requeriría de mucho tiempo y esfuerzo para lograr un resultado satisfactorio.*

*El médico, al realizar su diagnóstico, no se ocuparía de analizar todas y cada una de las enfermedades del ser humano sino que reduciría su campo de diagnósticos sólo a aquéllas que se relacionaran con los sistemas fisiológicos afectados por los síntomas considerados. Razonando de esta manera, el problema original se reduce a uno más simple ya que el proceso de búsqueda se limita a un espacio más pequeño.*

*Así, si el médico concluye que por la frecuencia de ocurrencia y confirmación de los síntomas éstos afectan al aparato digestivo, concentrará su atención en las enfermedades de dicho sistema.*

### 3.3.3 OTRAS CARACTERISTICAS ESENCIALES DE UN SISTEMA EXPERTO.

*Un sistema experto posee un razonamiento dinámico, crea y rechaza suposiciones que conducen a las justificaciones para la solución del problema.*

*Este tipo de razonamiento requiere no de una matemática formal sino de sentido común.*

*Para obtener conclusiones el razonamiento matemático necesita poseer información previa que las justifique. En contraste, el sentido común* *puede obtener conclusiones sólo de información parcial, creando suposiciones e inferencias sobre las mismas, que están sujetas a cambio dependiendo de la adquisición de mayor información o conocimiento.*

*Un sistema experto, al ir analizando las suposiciones y justificaciones obtenidas de nueva información, debe poseer un registro de las inconsistencias anteriores a los pasos inferenciales que las crearon para no volver a caer en los mismos errores.*

*Por último, un sistema experto debe poseer la capacidad de "razonar" sobre su propio proceso de razonamiento. Esto es, debe poseer la habilidad de saber cuál es el próximo paso a seguir una vez que ha terminado una etapa del problema. Para ello, lo factoriza en subproblemas utilizando reglas de planeación tales como:*

- *"Si una precondición no es satisfecha, crea un subobjetivo para satisfacerla".*

- *"Si hay conflicto entre los subobjetivos se reformula el problema".*

## *3.4 SISTEMAS MEDICOS EXPERTOS.*

### *3.4.1 INTRODUCCION*

*Un sistema médico experto es una herramienta que se utiliza en el proceso de diagnóstico. Su base de datos se forma a partir del conocimiento médico de los síntomas y enfermedades y de las historias clínicas de los pacientes.*

*Este tipo de sistemas tiene la ventaja de que pueden manejar un gran número de síntomas y enfermedades que un médico por sí sólo no podría tomar en cuenta simultáneamente.*

*Las primeras incursiones en este tipo de sistemas datan de 1968 con el desarrollo de CADIAG 1 -de sus siglas en Inglés "COMPUTER ASSISTED DIAGNOSIS"-. Este sistema se fundamenta en la lógica de Boole mediante la representación lógico simbólica entre las entidades médicas síntomas/enfermedades, considerando que éstas sólo pueden tomar sus valores del conjunto (1=presente, 0=ausente, - =no examinado). Así, este sistema sólo puede confirmar o excluir diagnósticos. Los síntomas que se presentan en el paciente con cierto grado de ambigüedad sirven para generar hipótesis de diagnóstico a través de la creación de modelos que* *puedan ser equiparables a síntomas ya confirmados.*

*Posteriormente -a principios de 1980- se crea CADIAG 2, sistema con la misma estructura esquemática de CADIAG 1 pero fundamentado en la LOGICA BORROSA, considerando que las relaciones entre las entidades médicas -síntomas/enfermedades- son variables lingüísticas asociadas a valores numéricos representativos dentro del intervalo [0,1], elegidos en base a estudios estadísticos y el criterio de médicos especializados; eliminando así la ambigüedad antes mencionada.*

*Ambos sistemas, CADIAG 1 y CADIAG 2(3), obtienen su base de datos directamente del sistema de información de la Escuela de Medicina de la Universidad de Viena.*

*A continuación, introducimos formalmente los términos médicos de más relevancia para el trabajo que presentamos.*

*__DEFINICION.-__ Un SINDROME es un conjunto de posibles enfermedades que puede padecer el enfermo.*

*__DEFINICION.-__ Una ENFERMEDAD es una desviación anormal del metabolismo debida a causas ambientales o a la acción patógena de ciertos organismos.*

*__DEFINICION.-__ Un SINTOMA (4) es un fenómeno propio y característico de una enfermedad. Se manifiesta por una alteración orgánica y funcional apreciable por el médico o por el enfermo.*

### *3.4.2 SISTEMAS MEDICOS EXPERTOS FUNDAMENTADOS EN LA LOGICA BORROSA*

*Dado que las relaciones entre las entidades médicas (síntomas/enfermedades) a menudo contienen términos como casi siempre, a menudo, algunas veces, nunca, fuerte, débil, etc.; una herramienta útil para poder interpretarlas es la TEORIA DE CONJUNTOS BORROSOS, pues con su capacidad de definir entidades médicas inexactas y con su aproximación lingüística y del razonamiento utilizando su lógica como mecanismo de inferencia, resulta apropiada para diseñar y desarrollar SISTEMAS MEDICOS EXPERTOS.*

*(3) Si el lector desea ampliar información referirse al punto número 10 de la bibliografía.*
*(4) En este trabajo el término síntoma incluye lo detectado por pruebas de laboratorio.*

*Los sistemas médicos expertos basados en la lógica borrosa emplean dos tipos de relaciones entre síntomas y enfermedades:*

1) *Frecuencia de ocurrencia de un síntoma con respecto a una enfermedad ($M_o(s_i, d_j)$) (necesidad de ocurrencia).*

2) *Fuerza de confirmación del síntoma con respecto a la enfermedad ($M_c(s_i, d_j)$) (suficiencia de ocurrencia de un síntoma para reconocer la enfermedad).*

*Estas relaciones son consideradas como relaciones borrosas binarias que toman sus valores, $M_o(s_i,d_j)$ y $M_c(s_i,d_j)$ en el intervalo [0,1].*

*Los términos lingüísticos antes mencionados: casi siempre, a menudo, algunas veces, nunca, fuerte, débil, etc., son semánticamente útiles para describir estas relaciones borrosas entre síntomas y enfermedades asignándoles un valor numérico representativo[5] dentro del intervalo [0,1], como se muestra a continuación:*

**FRECUENCIA DE OCURRENCIA.**

| VALOR LINGUISTICO ($\theta_o$) | VALOR NUMERICO ($M_o$) |
|---|---|
| SIEMPRE | 1.00 |
| CASI SIEMPRE | 0.99 |
| MUY A MENUDO | 0.90 |
| A MENUDO | 0.75 |
| MAS O MENOS | 0.50 |
| RARA VEZ | 0.25 |
| MUY RARA VEZ | 0.10 |
| CASI NUNCA | 0.01 |
| NUNCA | 0.00 |

*(5) Estos valores numéricos son los utilizados por el sistema médico CADIAG 2, por encontrarlos adecuados al objetivo que se persigue en este trabajo.*

FUERZA DE CONFIRMACION.

| VALOR LINGUISTICO ($B_c$) | VALOR NUMERICO ($M_c$) |
|---|---|
| SIEMPRE | 1.00 |
| CASI SIEMPRE | 0.99 |
| MUY FUERTE | 0.90 |
| FUERTE | 0.75 |
| MAS O MENOS | 0.50 |
| DEBIL | 0.25 |
| MUY DEBIL | 0.10 |
| CASI NUNCA | 0.01 |
| NUNCA | 0.00 |

Así, la incertidumbre en la observación de síntomas patológicos, al igual que la confirmación o la exclusión de enfermedades, pueden ser expresadas apropiadamente.

Los valores $M(p_k, s_i)$ expresarán la relación binaria borrosa entre el paciente $k$ y el síntoma $i$ que exhibe, y se obtienen tomando en cuenta las observaciones que realiza el médico (frecuencia de ocurrencia y fuerza de confirmacion); esto es:

| VALORES BORROSOS | INTERPRETACION |
|---|---|
| $M(p_k, s_i)=0$ | $s_i$ está ausente en el paciente $p_k$. |
| $0 < M(p_k, s_i) < 1$ | $p_k$ presenta $s_i$ con cierto grado, $s_i$ cae entre los rangos normales y patológicos. |
| $M(p_k\ s_i)= 1$ | $s_i$ está definitiva-- mente presente en $p_k$. |
| $M(p_k\ s_i)= -$ | $s_i$ no ha sido examinado en $p_k$. |

Para obtener la relación borrosa $M(p_k, d_j)$; es decir, el grado al cual la enfermedad $j$ se presenta en el paciente $k$, la regla que se empleará es la REGLA COMPOSICIONAL DE INFERENCIA, cuya forma general es:

$$\text{SI } s_i \text{ ENTONCES } d_j \text{ CON } (M_o, M_c).$$

*EJEMPLO 1*

*a) Si se presentan cristales de ácido úrico en las articulaciones ENTONCES el paciente tiene artritis con $M_o$ = 0.25 (algunas veces), $M_c$ = 1 (siempre).*

*b) Si se encuentra amilasa elevada en suero ENTONCES PUEDE SER que el paciente tenga pancreatitis aguda con $M_o$ = 0.9 (muy a menudo), $M_c$ = 0.7 (fuerte).*

*También se pueden tener combinaciones de síntomas, evaluadas por medio de los conectivos lógicos borrosos (conjunción, disyunción y negación), definidos en el Capítulo I, que muestren relación con las enfermedades.*

*EJEMPLO 2*

*Si dolor en la parte inferior trasera, limitación de movimiento en las vértebras lumbares y disminución en la expansión del tórax, y si el paciente es varón entre 20 y 40 años de edad, ENTONCES PUEDE SER que se trate de spondilitis anquilosante con $M_o$ = 0.9 (muy a menudo), $M_c$ = 0.8 (fuerte).*

**DEFINICION.-** *Denotemos por*

*D AL CONJUNTO DE ENFERMEDADES,*
*P AL CONJUNTO DE PACIENTES, y*
*S AL CONJUNTO DE SINTOMAS.*

*Sea $\underline{R}$ la relación borrosa de S a D.*

*Dejemos que A sea un subconjunto borroso de S correspondiente a un determinado paciente $p_k$; entonces la regla composicional de inferencia que describe el estado del paciente en términos de las enfermedades como un subconjunto borroso B de D se define como:*

$$M_B(d) = \max_{s \in S} [\min (M_A(s), M_R(s,d))], \; d \in D.$$

*donde $M_A(s)$ representa el grado con el cual el paciente $p_k$ exhibe el síntoma s; $M_R(s, d)$ expresa el grado de relacionamiento entre el síntoma s y la enfermedad d.*

*Consideremos varios pacientes; es decir, el conjunto P. Para cada paciente se tendrá un subconjunto borroso de S llamado A y un subconjunto borroso de D llamado B.*

*Sean $\underset{\sim}{Q}$ una relación borrosa de P a S, $\underset{\sim}{R}$ una relación borrosa de S a D y $\underset{\sim}{T}$ una relación borrosa de P a D, tales que:*

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{Q}$$

*entonces:*

$$M_{\underset{\sim}{T}}(p,d) = \max_{s \in S} [\min (M_{\underset{\sim}{Q}}(p,s), M_{\underset{\sim}{R}}(s,d))], \ (p,d) \in P \times D.$$

*Un diagnóstico confirmado se obtiene si:*

*1) $M_C(s_i,d_j)=1$ (siempre).*

*2) $M_C(cs_i,d_j)=1$ (siempre); donde $cs_i$ significa "combinación de síntomas".*

*3) Las enfermedades en cuestión son sub-términos de otras enfermedades ya confirmadas, y por lo tanto tienen fuerza de confirmación igual a 1 (siempre).*

*Un diagnóstico excluido se obtiene si:*

*1) $M_C(s_i,d_j)=0$ (nunca).*

*2) $M_C(cs_i,d_j)=0$ (nunca), donde $cs_i$ de nuevo quiere decir "combinación de síntomas".*

*3) Las enfermedades ya confirmadas tienen una fuerza de confirmación = 0 (nunca) con respecto a otras enfermedades que el paciente podría presentar de acuerdo a sus síntomas.*

*4) Las combinaciones de síntomas definitivamente ausentes en el paciente tienen una frecuencia de ocurrencia igual a 1 (siempre) en la enfermedad; es decir, es necesario que estén presentes para que se padezca la enfermedad.*

*5) Las enfermedades en cuestión son sub-términos de otras enfermedades ya excluidas y por lo tanto tienen una fuerza de confirmación igual a 1 (siempre).*

*Las hipótesis de diagnóstico se obtienen considerando los valores de $M_B(d)$ o $M_I(p,d)$, calculados a través de la regla composicional de inferencia.*

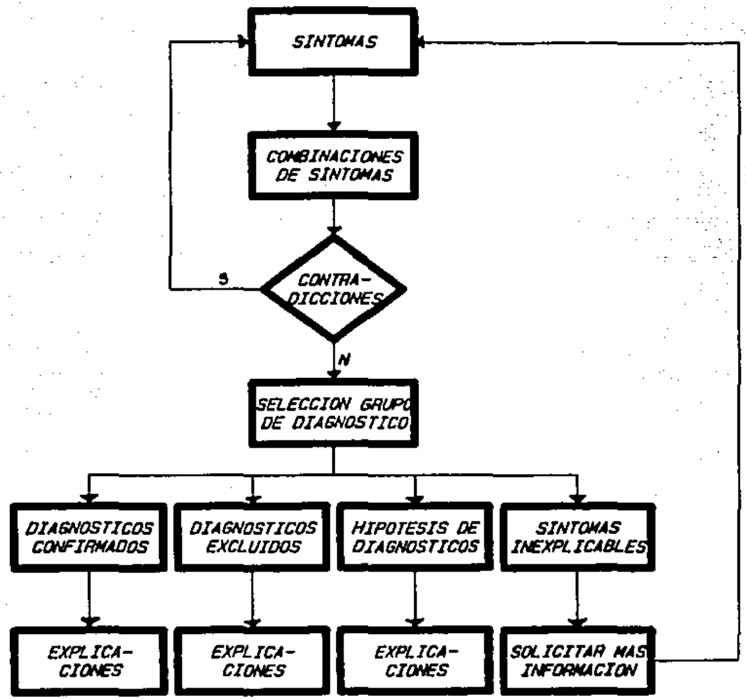
*Así, si*

$$\gamma \leq M_I(p,d) \leq 1$$

*se considerará a la enfermedad d como una posibilidad para explicar los males del paciente p, donde $\gamma$ es un valor inicial dado para evitar hipótesis de diagnóstico con baja evidencia.*

*A continuación se presenta el diagrama de flujo del proceso de diagnóstico de un sistema médico experto empleando lógica borrosa:*

# DIAGRAMA DE FLUJO



# C A P I T U L O IV

## APLICACION.

## *4.1 INTRODUCCION*

*El diagnóstico médico es una disciplina cuyo dominio requiere de una amplia experiencia. Su aprendizaje implica un conocimiento profundo del clínico en las más diversas áreas del conocimiento biomédico, tales como la bioquímica, la anatomía, la patología, la clínica, etc. De este modo, la capacidad diagnóstica que debe desarrollar el médico se va enriqueciendo a través del tiempo, a medida que su experiencia le provee de un marco cada vez más amplio para considerar, juzgar y decidir acerca de las posibles enfermedades que puedan afectar a un paciente y tomar, en consecuencia, las medidas terapéuticas más oportunas.*

*Este proceso de aprendizaje, a nivel básico, requiere de varios años de práctica. De hecho, podemos decir que nunca termina en la inteligencia de que su naturaleza misma es perfectible ya que el patrón en el cual se registra la aparición de un padecimiento no es fijo, estrictamente hablando. En tal caso, bastaría con presentar al clínico un cuadro o tabla de relaciones definitivas entre síntomas y enfermedades. Sin embargo, en la realidad la naturaleza de los vínculos que mantienen los síntomas y las enfermedades no es determinante, dado que todo clínico conoce que la presentación de un mal no siempre va acompañada de los síntomas básicos o más frecuentemente asociados a él. Esto constituye, de entrada, una dificultad para el establecimiento de la decisión diagnóstica, que sólo podrá ser superada por largos años de experiencia clínica y un agudo sentido de observación y análisis por parte del médico para discernir, entre múltiples posibilidades, la naturaleza y tipo real de la enfermedad que sufre el paciente.*

*En estas circunstancias, cabe señalar que si bien dicha relación no es fija y definitiva, sí existen conjuntos de síntomas asociados a cada una de las enfermedades posibles. Este es el motivo por el cual los primeros enfoques computarizados sobre el problema de la decisión diagnóstica en medicina tomaron como punto de partida un tratamiento estadístico de los datos asociados en la relación antes mencionada. Tal enfoque respondía al problema de la incertidumbre existente en esta relación, con una estrategia probabilística creada por Bayes en el siglo XVIII.*

*En esta concepción estadística, surge la probabilidad condicionada como elemento formal de decisión diagnóstica. De este modo, la probabilidad de aparición de una enfermedad dada la presencia de los síntomas correspondientes, se ve condicionada por el criterio del clínico que introduce como variable asociada una probabilidad subjetiva sobre dicha relación. Este tratamiento ha conducido a la elaboración de programas de cómputo que actualmente se utilizan en diversas partes del* *mundo. Sin embargo, es necesario hacer notar que hoy en día el clínico cuenta con instrumentos de cómputo lógicos y matemáticos más poderosos y versátiles que el tratamiento bayesiano de los datos asociados en la relación síntomas-enfermedades.*

*El presente trabajo es un intento de introducción a las técnicas modernas de decisión automática en el campo del diagnóstioco médico, donde se pretende responder al problema de la incertidumbre en la relación síntomas-enfermedades mediante la aplicación de la teoría de los subconjuntos difusos o borrosos, creada por Lofti A. Zadeh en 1975. Por otra parte, se ha implementado una base de datos dinámica con el lenguaje de quinta generación "Prolog" que permite un ágil manejo de los datos asociados en la relación síntomas-enfermedades. Esta base de datos es susceptible de actualización constante a medida que la capacidad diagnóstica del médico se vea aumentada por la práctica clínica y la interacción con el programa desarrollado.*

*El sistema se concibió como una herramienta que coadyuve a la formación de un criterio médico facilitando el manejo de la enorme cantidad de datos sintomáticos relacionados a las enfermedades pertenecientes a cada uno de los síndromes posibles. En este caso, se ha escogido como ejemplo el síndrome diarreico en cerdos, de gran importancia económica en la porcicultura nacional. Se ha dado este enfoque veterinario al presente proyecto porque se persigue su aplicación en grandes poblaciones y debido a la disponibilidad de los datos; puesto que fue posible para el autor del sistema obtener más rápida y fácilmente historias clínicas de brotes de enfermedades actuales en granjas animales que, por ejemplo, en instituciones de salud pública, donde el manejo estadístico de los datos debe ser procesado primeramente en forma interinstitucional. Cabe señalar que el programa desarrollado también es susceptible de aplicación en humanos, o bien en otras especies de importancia médica veterinaria.*

*El sistema experto creado interacciona con el usuario para conducirlo paulatinamente a una decisión diagnóstica, en el caso de que éste se encuentre en posesión de los datos suficientes para efectuar cabalmente esta decisión. En el caso contrario, el sistema experto solicita más datos orientando en su búsqueda al usuario a través de requerimientos de pruebas de laboratorio o de identificación de los agentes etiológicos -mayormente bacterianos- y aún de pruebas de necropsia.*

## *4.2 MODELO DEL SISTEMA CREADO POR EL Q.F.B. GABRIEL GARDUÑO SOTO.*

*El autor del sistema eligió el lenguaje de programación "Prolog" para la implementación del sistema experto dado que sus características como lenguaje declarativo -no procedural o algorítmico- lo hacen ideal para el* *manejo de estructuras complejas de reglas lógicas, pues el diagnóstico, como señalamos anteriormente, requiere de enormes bancos de datos que deben ser constantemente actualizados y modificados en forma radical. La versión utilizada fue la ofrecida por la firma Borland y actualmente se denomina "Turbo Prolog".*

*La técnica de programación en "Prolog" difiere fundamentalmente de otros lenguajes usados para la elaboración de sistemas expertos, como por ejemplo el lenguaje "Pascal", en que se procede a través de definiciones lógicas donde se especifican la naturaleza de los dominios a manejar, las declaraciones, las cláusulas de producción inferencial y los hechos observados en el análisis propiamente dicho de la situación a diagnosticar. Esto ahorra al clínico el tiempo que sería necesario invertir en el estudio de un lenguaje algoritmico donde aparte de realizar las definiciones arriba señaladas, debería implementar la búsqueda y control de relaciones a través de todos los ramales inferenciales significativos para el análisis y solución de cada situación diagnóstica en particular. Esto es posible gracias a que el lenguaje "Prolog" posee un motor lógico que genera automáticamente las inferencias derivables del conjunto de declaraciones lógicas que se han realizado previamente en el sistema. Cabe aclarar que una de las propiedades más espectaculares del lenguaje antes mencionado es su capacidad para generar respuestas que involucran producciones inferenciales propias, que el programador no ha introducido previamente; esta capacidad no está actualmente presente en ningún otro lenguaje de programación. Por otra parte, ofrece la posibilidad de comunicarse con otros lenguajes computacionales.*

*El modelo de diagnóstico consiste fundamentalmente en una estructura lógica que permite, además de una búsqueda rápida de datos, la identificación de la situación de la información provista al sistema. Con esta información como punto de partida, se intentará satisfacer la demanda diagnóstica a través de la realización de múltiples deducciones que pueden surgir de varios campos de la semiótica médica, tales como signos y síntomas, comportamiento, extensión de la enfermedad en la población, retraso en la producción, edades y así sucesivamente hasta generar un posible diagnóstico o bien, una petición específica de datos necesarios que irá acompañada de una orientación acerca del área que el usuario deberá consultar; por ejemplo: laboratorio bioquímico, necropsias, etc.*

*Una vez que el usuario ha provisto los datos correctos a la máquina, es posible realizar un rastreo profundo del modo en el cual se ha llegado a la emisión de un determinado diagnóstico. Esta cualidad proporciona una ayuda incalculable al médico pues permite la explicación detallada de todos los pasos realizados hasta llegar a la formulación de un diagnóstico satisfactorio.*

## *4.3 BASE DE DATOS.*

*En este capítulo, como ya se ha mencionado anteriormente, se presentarán los componentes principales y el funcionamiento de un sistema experto cuyo fin es el diagnóstico médico. Este sistema experto se construyó eligiendo como modelo de aplicación al género de cerdos SUIS, y más específicamente a la población porcina afectada por enfermedades infecciosas del tracto digestivo. Los datos clínicos fueron proporcionados por el Q.F.B Gabriel Garduño Soto tanto para la definición del perfil sintomático de cada una de las enfermedades comprendidas dentro del síndrome DIARREAS, como para la presentación de casos clínicos reales provenientes de especímenes afectados por dicho síndrome en México.*

*Dado que la relación sintomática procede de una muy amplia experiencia médica veterinaria, se buscó que la descripción de dicho perfil fuese la más representativa en lo que se refiere a cada uno de los síntomas elegidos para la investigación diagnóstica. Esto se logró mediante la observación y el estudio de grandes poblaciones de cerdos y tomando como base los textos y publicaciones más importantes en el área de diagnóstico de enfermedades diarreicas, a saber:*

*PIJOAN C,*
*TAYLOR C,*
*LEHMAN, y*
*HORNEDO S*

*Las referencias obtenidas a partir de dicha literatura fueron revisadas y normalizadas, adecuándolas a las enfermedades más comunes que se presentan en la producción porcina en México. Además, se puso un especial énfasis en considerar el aspecto real que cada enfermedad reviste en nuestro país pues es bien conocido el hecho de que las enfermedades se presentan en forma específica en cada país y en cada región geográfica. Como un ejemplo de este hecho, podemos citar la normalización efectuada en Sao Paulo, Texas, que en México no tiene significación estadística. Por otra parte, los datos para cada una de las enfermedades fueron agrupados de acuerdo a la población "blanco" que la enfermedad en cuestión esté afectando, ya que en algunas ocasiones la presentación sintomática puede variar radicalmente dependiendo precisamente del sector de la población porcina en que la enfermedad se haya manifestado.*

*Ejemplos de poblaciones que se han usado como base en la jerarquización y agrupación de los datos sintomáticos son:*

*a) EDAD:*
- *LECHON*
- *PRIMERA SEMANA*
- *POST PRIMERA SEMANA*
- *DESTETADO*
- *ADULTO*

*b) SEXO:*
- *HEMBRA*
- *MACHO*

*c) ESTADO REPRODUCTIVO:*
- *HEMBRA CARGADA*
- *HEMBRA PRIMERIZA*
- *SEMENTAL*

*d) ESTADO DE DESARROLLO:*
- *DESTETADO*
- *EN DESARROLLO*
- *EN ENGORDA*
- *EN FINALIZACION*

*Para llevar un control de la significación estadística de los datos presentados como base del sistema experto, se procedió a consultas periódicas con especialistas de la producción porcina en México, así como con un importante grupo de médicos veterinarios zootécnicos. Estas consultas sirven de apoyo a la información clínica de los datos que inicialmente se habían seleccionado a partir de los textos clásicos en el área.*

*Por todo lo anteriormente especificado, se da por sentado que la base de datos con la cual se alimentó al sistema experto es de alta confiabilidad.*

*En este caso, el método de recopilación de datos ha sido el adecuado debido a la práctica inexistencia de bancos de datos grandes y confiables sobre estadísticas en clínica porcina así como en epizootias (epidemias) y enzootias (endemias) porcinas. Es decir, que para expresar la base de datos, estamos confiando directamente en la experiencia personal de médicos veterinarios para efectuar la normalización. No obstante, existe otro método más laborioso pero más fácil de expresar en términos estadísticos: la consulta directa en los archivos de la Dirección General de Sanidad Animal, en la unidad de Producción Porcina y en la Unidad Patológica de la Facultad de Medicina Veterinaria Zootécnica de la U.N.A.M. Sin embargo, este procedimiento tiene dos desventajas:*

*1) Los archivos no están del todo disponibles.*

*2) En nuestro país, la base de datos obtenida de dichos archivos no resultaría con mayor significación que la nuestra, pues los reportes de casos patológicos en animales no siguen actualmente la misma rutina y frecuencia que se tiene en otros países, donde este método de obtención de datos directos de grandes poblaciones de animales sería el mejor.*

*Por todo ello, a nuestra base de datos se le podrá adjudicar una representatividad alta: de un 85% a un 95%.*

*En cuanto al funcionamiento del sistema experto, nuestra aportación al mismo consistió en la elaboración de un programa en el lenguaje Pascal que introduce el concepto de REGLA COMPOSICIONAL DE INFERENCIA dentro del contexto de la lógica borrosa. Este programa es el encargado de realizar la composisción máx - mín, de la que tanto se ha hablado a lo largo de este trabajo. Funciona como una sub-rutina dentro del sistema experto, ejecutando la composición de la matriz que relaciona a los pacientes con los síntomas que padecen con la matriz que asocia a los síntomas con las enfermedades que presentan al menos uno de ellos; de modo que, una vez introducidos los datos sintomáticos del paciente y el grado de relación de cada síntoma con las enfermedades probables, dé como resultado el diagnóstico médico buscado: los posibles padecimientos que sufra el paciente.*

## *4.4 APLICACION*

*El campo de las aplicaciones del sistema experto es muy amplio pues el conjunto de reglas que asocian a los síntomas y a las enfermedades puede ser extendido a voluntad para que pueda abarcar cada vez un mayor número de observaciones clínicas. Estas irán conformando un banco de datos dinámico y personal, dado que su diseño permite incorporar los nuevos conocimientos que el usuario vaya adquiriendo paulatinamente, lo que le hará posible retroalimentar el sistema y revalidar o rechazar automáticamente las reglas anteriores a medida en que su práctica vaya siendo más extensa.*

*El conjunto de enfermedades diarreicas que abarca el sistema, incluye un número de enfermedades que comparten gran cantidad de síntomas lo que dificulta su identificación por medios puramente clínicos. Tal es el caso de la colibacilosis, la salmonelosis, el cólera porcino y la peste porcina africana. Es precisamente en este momento, cuando el sistema recurre a la implementación algorítmica realizada a través del programa en el lenguaje Pascal.*

*Los datos sintomáticos son tratados a través de un filtro matemático en que se indaga el grado de pertenencia del conjunto de síntomas presentados por el paciente a cada uno de los posibles padecimientos con síntomas similares. De este modo, el sistema ofrece la posibilidad de investigar el mal observado, ya sea mediante métodos de lógica formal o bien mediante métodos de lógica borrosa, en el caso en que la identificación de la enfermedad presente los problemas antes mencionados. Se ha preferido ofrecer las dos posibilidades lógicas -formal y borrosa- debido al status que actualmente guardan las implementaciones del Prolog en los computadores personales IBM/PC y compatibles donde la capacidad de memoria activa mínima para correr cualquier programa en el lenguaje Turbo Prolog es de 512 Kb, lo cual dificulta el manejo simbólico que requiere la implementación del análisis borroso correspondiente.*

*Es necesario hacer notar que el sistema ha sido probado desde ambas perspectivas lógicas para la diferenciación diagnóstica entre los cuatro padecimientos con síntomas comunes ya señalados -colibacilosis, salmonelosis, cólera porcino y fiebre porcina africana; siendo las dos primeras enfermedades bacterianas y las dos últimas, virales-. Los resultados obtenidos fueron satisfactorios pues mientras que el trato dentro de la lógica formal no establece diferenciación alguna, el programa procedural implementado en Pascal logra establecer una distinción significativa en este tipo de casos que, a pesar de ser prácticamente un matiz en la misma, proporciona una guía real para orientar la ulterior búsqueda de laboratorio en las otras áreas del programa.*

*Para nuestra aplicación se tomaron en cuenta los siguientes síntomas comunes a las cuatro enfermedades ya mencionadas*

$s_1$ *Ataca lechones de primer semana.*
$s_2$ *Ataca lechones lactantes post-primer semana.*
$s_3$ *La diseminación de la enfermedad no está localizada en un sector por edades.*
$s_4$ *Heces líquidas, amarillas, con moco y en mayor cantidad que siempre.*
$s_5$ *Heces líquidas, amarillo mostaza, sin sangre ni vómito y en mayor cantidad que siempre.*
$s_6$ *Heces líquidas, amarillo mostaza, sin sangre ni moco y en mayor cantidad que siempre.*
$s_7$ *Presenta morbilidad baja.*
$s_8$ *Presenta morbilidad intermedia.*
$s_9$ *Presenta morbilidad muy alta.*
$s_{10}$ *Presenta mortalidad variable.*
$s_{11}$ *Presenta mortalidad intermedia.*
$s_{12}$ *Presenta mortalidad muy alta.*
$s_{13}$ *La función principalmente afectada es la digestiva.*
$s_{14}$ *Una de las funciones más evidentemente afectada es la digestiva.*
$s_{15}$ *La función principalmente afectada es la motora.*

$s_{16}$ Una de las funciones más evidentemente afectada es la respiratoria.
$s_{17}$ La parte anatómica interna afectada son los intestinos.
$s_{18}$ Presenta ataxia (incoordinación de miembros traseros).
$s_{19}$ Presenta convulsiones y ataxia.
$s_{20}$ Responde favorablemente a los antibióticos.
$s_{21}$ No responde favorablemente a los antibióticos (viral).

Sean

$d_1$ Colibacilosis,
$d_2$ Salmonelosis,
$d_3$ Cólera porcino y
$d_4$ Fiebre porcina africana.

La matriz que da la relación borrosa de los síntomas con las enfermedades a considerar es la que a continuación se muestra

| | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $d_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | .8 | .2 | 0 | 0 |
| $s_2$ | .5 | .4 | 0 | 0 |
| $s_3$ | .2 | .5 | .7 | .7 |
| $s_4$ | .7 | .2 | 0 | 0 |
| $s_5$ | 0 | .8 | .3 | 0 |
| $s_6$ | 0 | 0 | .8 | .7 |
| $s_7$ | .9 | .5 | 0 | 0 |
| $s_8$ | .2 | .6 | .1 | .1 |
| $s_9$ | .5 | .4 | .95 | .9 |
| $s_{10}$ | .5 | 0 | 0 | 0 |
| $s_{11}$ | 0 | .5 | 0 | 0 |
| $s_{12}$ | 0 | 0 | .95 | .9 |
| $s_{13}$ | .8 | .4 | .5 | .9 |
| $s_{14}$ | 0 | .8 | .9 | .9 |
| $s_{15}$ | 0 | 0 | .9 | .9 |
| $s_{16}$ | 0 | 0 | .8 | .9 |
| $s_{17}$ | .8 | .8 | .8 | .8 |
| $s_{18}$ | 0 | .7 | .9 | .9 |
| $s_{19}$ | 0 | .7 | .9 | .8 |
| $s_{20}$ | .8 | .7 | 0 | 0 |
| $s_{21}$ | .2 | .4 | .9 | .9 |

A su vez, la matriz que da la relación borrosa de los pacientes con los síntomas que padecen está dada por

| | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_5$ | $s_6$ | $s_7$ | $s_8$ | $s_9$ | $s_{10}$ | $s_{11}$ | $s_{12}$ | $s_{13}$ | $s_{14}$ | $s_{15}$ | $s_{16}$ | $s_{17}$ | $s_{18}$ | $s_{19}$ | $s_{20}$ | $s_{21}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_1$ | 0.9 | 0.0 | 0.0 | 0.9 | 0.4 | 0.0 | 0.2 | 0.5 | 0.0 | 0.7 | 0.5 | 0.0 | 0.9 | 0.9 | 0.0 | 0.3 | 0.9 | 0.0 | 0.0 | 0.7 | 0.3 |
| $p_2$ | 0.4 | 0.8 | 0.3 | 0.2 | 0.9 | 0.2 | 0.3 | 0.6 | 0.8 | 0.3 | 0.2 | 0.7 | 0.7 | 0.7 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.4 | 0.3 | 0.8 | 0.1 |
| $p_3$ | 0.6 | 0.5 | 0.9 | 0.1 | 0.8 | 0.2 | 0.0 | 0.3 | 0.9 | 0.5 | 0.3 | 0.6 | 0.8 | 0.6 | 0.6 | 0.7 | 0.5 | 0.8 | 0.7 | 0.3 | 0.9 |

*En la matriz que relaciona a los síntomas y a las enfermedades, puede notarse que los síntomas que presentan un mayor grado de pertenencia con respecto a los padecimientos virales involucran principalmente como sistema afectado al nervioso tales como:*

$s_{15}$ *La función principalmente afectada es la motora.*
$s_{18}$ *Presenta ataxia (incoordinación de miembros traseros).*
$s_{19}$ *Presenta convulsiones y ataxia.*

*Por otra parte, también se puede observar que:*

$s_{21}$ *No responde favorablemente a los antibióticos (viral),*

*tiene un alto grado de pertenencia en las enfermedades virales, ya que los antibióticos no surten efecto en infecciones de este tipo; en tanto que los padecimientos bacterianos registran alto grado de pertenencia para síntomas que involucran más específicamente como sistema afectado al digestivo, siendo su respuesta a los antibióticos favorable ($s_{20}$).*

*La principal dificultad surge al considerar la salmonelosis, que a pesar de ser una enfermedad bacteriana, incluye algunos síntomas pertenecientes primordialmente a los padecimientos virales (síntomas nerviosos) como son:*

$s_{18}$ *Presnta ataxia (incoordinación de miembros traseros), y*
$s_{19}$ *Presenta convulsiones y ataxia,*

*aunque es posible observar que el grado de pertenencia de estos síntomas es menor en la salmonelosis que en cualquiera de los otros dos padecimientos virales (cólera y fiebre porcina africana).*

*En este marco de circunstancias, es claro que el tratamiento de las relaciones síntomas/enfermedades comprendidas por medio de la lógica formal es incapaz de inducir una partición representativa en los datos. Por este motivo, la lógica borrosa resulta ser la herramienta más apropiada puesto que establece particiones significativas en el tipo de enfermedades que pueden estar afectando al paciente, tal y como puede observarse en la matriz resultado que muestra los grados de pertenencia del enfermo respecto a los cuatro padecimientos antes considerados.*

*La partición observada en este tipo de enfermedades puede ser una herramienta diagnóstica muy poderosa, dado que permite al clínico intervenir directamente en el desarrollo de un brote epidemiológico (epizootias) de grandes consecuencias. Esto significa que el médico puede confiar en los resultados así obtenidos para tomar una decisión clínica. Como ejemplo, podemos citar el brote de cólera porcino que se registró en nuestro país a mediados de 1985 en Jalisco, Guanajuato y Michoacán (el interesado puede referirse al boletín quincenal de Sanidad Animal de la Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos, SARH).*

*El caso arriba expuesto logra establecer una partición clara para las enfermedades que son causadas por virus -cólera y fiebre porcina africana- y para aquéllas que son causadas por bacterias -colibacilosis y salmonelosis-.*

*Como aplicación a futuro, se entrevé la posibilidad de comprender el diagnóstico de síndromes múltiples causados por entidades etiológicas en asociación. Tal es el caso de las asociaciones patógenas que establecen, por ejemplo, los géneros bacterianos <u>Pasteurella</u> y <u>Mycoplasma</u>, aunque podemos anticipar que el tratamiento de dichas enfermedades requiere de otro tipo de lógica más poderosa que la implementada en este proyecto, con el propósito de inducir particiones claras entre las asociaciones de agentes etiológicos causantes de la enfermedad.*

*A continuación presentaremos la estructura del programa, escrito en el lenguaje Pascal, que se creó con el objeto de llevar acabo la composición máx-mín de la matriz que relaciona a los pacientes con el grado con que padecen ciertos síntomas, con la matriz que relaciona, a su vez, dichos síntomas con las enfermedades que presentan alguno de ellos con cierta frecuencia. Posteriormente, se mostrará la matriz resultado del caso antes expuesto.*

```
PROGRAM DIAGNOS(INPUT, OUTPUT);

VAR
PS,SD,PD: ARRAY [1..50,1..50] OF REAL;
I,J,K,P,M,N: INTEGER;
MAX,TEMP: REAL;
OPCION: CHAR;
NOMBRE: STRING[8];
FILVAR: TEXT;

BEGIN
WRITE('YA SE CAPTURARON LAS MATRICES [S/N]:');
READLN(OPCION);
IF (OPCION='n') OR (OPCION='N') THEN BEGIN
REPEAT
    WRITELN;WRITELN;
    WRITELN ('CUANTOS PACIENTES SON?');
    READ(M);WRITELN;
    WRITELN ('CUANTOS SINTOMAS PRESENTAN?');
    READ(N);WRITELN;
    WRITELN ('CUANTAS ENFERMEDADES PRESENTAN AL MENOS UNO DE ESTOS SINTOMAS?');
    READ(P);WRITELN;
UNTIL (M>0) AND (M<51) AND (N>0) AND (N<51) AND (P>0) AND (P<51);

WRITE('EL NOMBRE DEL ARCHIVO ES:');
READLN(NOMBRE);
ASSIGN(FILVAR,NOMBRE);
REWRITE(FILVAR);
WRITELN(FILVAR,M,' ',N,' ',P);

FOR I := 1 TO M DO

FOR J := 1 TO N DO

    BEGIN
    WRITELN('PARA EL PACIENTE ',I,' LA FRECUENCIA DE OCURRENCIA ');
    WRITELN('DEL SINTOMA ',J,' ES: ');
    READ(PS[I,J]);WRITELN;
    WRITELN(FILVAR,PS[I,J]);
    END;

FOR J := 1 TO N DO

FOR K := 1 TO P DO
```

```
    BEGIN
    WRITELN('EL SINTOMA ',J,' SE PRESENTA EN LA ENFERMEDAD ',K);
    WRITELN('CON UNA FRECUENCIA DE OCURRENCIA DE: ');
    READ(SD[J,K]); WRITELN;
    WRITELN(FILVAR,SD[J,K]);
    END;

END

ELSE
BEGIN
     WRITE('EL NOMBRE DEL ARCHIVO ES: ');
     READLN(NOMBRE);
     ASSIGN(FILVAR,NOMBRE);
     RESET(FILVAR);
     READ(FILVAR,M,N,P);

FOR I := 1 TO M DO

FOR J := 1 TO N DO
     READ(FILVAR,PS[I,J]);

FOR J := 1 TO N DO

FOR K := 1 TO P DO
     READ(FILVAR,SD[J,K]);

END;

CLOSE(FILVAR);

FOR I := 1 TO M DO

FOR K := 1 TO P DO

BEGIN
     MAX := -1;
     FOR J := 1 TO N DO
     BEGIN
     IF PS[I,J] <= SD[J,K] THEN
     TEMP := PS[I,J]
     ELSE
     TEMP := SD[J,K];
     IF TEMP >= MAX THEN
     MAX := TEMP;
     END;

PD[I,K] := MAX;
```

```
END;

WRITE('DATOS EN LA IMPRESORA O EN LA PANTALLA: ');
READLN(OPCION);

FOR I := 1 TO M DO

FOR K := 1 TO P DO

IF (OPCION='i') OR (OPCION='I') THEN BEGIN
    WRITELN(LST,'EN EL PACIENTE ',I,' LA ENFERMEDAD ',K);
    WRITELN(LST,'SE PRESENTA CON UNA FUERZA DE CONFIRMACION DE: ',PD[I,K]:1:6);
END
ELSE
```

*EN EL PACIENTE 1 LA ENFERMEDAD 1*
*SE PRESENTA CON UNA FUERZA DE CONFIRMACION DE: 0.800000*

*EN EL PACIENTE 1 LA ENFERMEDAD 2*
*SE PRESENTA CON UNA FUERZA DE CONFIRMACION DE: 0.800000*

*EN EL PACIENTE 1 LA ENFERMEDAD 3*
*SE PRESENTA CON UNA FUERZA DE CONFIRMACION DE: 0.900000*

*EN EL PACIENTE 1 LA ENFERMEDAD 4*
*SE PRESENTA CON UNA FUERZA DE CONFIRMACION DE: 0.900000*

*EN EL PACIENTE 2 LA ENFERMEDAD 1*
*SE PRESENTA CON UNA FUERZA DE CONFIRMACION DE: 0.800000*

*EN EL PACIENTE 2 LA ENFERMEDAD 2*
*SE PRESENTA CON UNA FUERZA DE CONFIRMACION DE: 0.800000*

*EN EL PACIENTE 2 LA ENFERMEDAD 3*
*SE PRESENTA CON UNA FUERZA DE CONFIRMACION DE: 0.800000*

*EN EL PACIENTE 2 LA ENFERMEDAD 4*
*SE PRESENTA CON UNA FUERZA DE CONFIRMACION DE: 0.800000*

*EN EL PACIENTE 3 LA ENFERMEDAD 1*
*SE PRESENTA CON UNA FUERZA DE CONFIRMACION DE: 0.800000*

*EN EL PACIENTE 3 LA ENFERMEDAD 2*
*SE PRESENTA CON UNA FUERZA DE CONFIRMACION DE: 0.800000*

*EN EL PACIENTE 3 LA ENFERMEDAD 3*
*SE PRESENTA CON UNA FUERZA DE CONFIRMACION DE: 0.900000*

*EN EL PACIENTE 3 LA ENFERMEDAD 4*
*SE PRESENTA CON UNA FUERZA DE CONFIRMACION DE: 0.900000*

# CONCLUSIONES

## *CONCLUSIONES*

*Las posibilidades reales de este tipo de sistemas expertos son grandes dentro del campo de la enseñanza de la medicina, pues introducen un nuevo concepto pedagógico: el del auto-aprendizaje con supervisión automática. Este, a su vez, tiene posibilidades de retroalimentación, dando así un nuevo matiz a la tarea de aprendizaje bajo actividades educativas autónomas que desde un principio permiten al estudiante ejercitar su propio criterio, corregirlo y enriquecerlo siempre en armonía con los resultados provenientes de la práctica real. Dichos resultados serán analizados e incorporados a los conocimientos propios del estudiante de un modo más rápido y organizado, todo ello en un área donde tradicionalmente el aprendizaje se realiza básicamente a través de arduos años de esfuerzos, bajo la estricta supervisión de un experto humano. Bajo esta perspectiva pedagógica, el supervisor médico de los conocimientos adquiridos por el alumno podria dedicar mayor atención al desarrollo del criterio clínico que requiere el trabajo de diagnóstico de enfermedades.*

*Desde un punto de vista práctico, es necesario aclarar que por el momento, el sistema no comprende como una posibilidad la sustitución del experto médico humano para el desarrollo del trabajo de diagnóstico, a pesar de que ya existen sistemas expertos que igualan el desarrollo del especialista humano en áreas muy limitadas. Sin embargo, surge como una realidad la utilidad del sistema como una herramienta para el diagnóstico, tanto clínico como de laboratorio, pues -dentro de las ventajas que introduce su uso- se cuenta con una reducción del tiempo real de respuesta a través del manejo automático de los datos. Es también una característica importante del sistema la facilidad de acceso a la red inferencial que puede ser abordada prácticamente desde cualquier punto en que se encuentre la definición de la situación diagnóstica real. Esto introduce la posibilidad de intervenir rápidamente en el desarrollo de brotes epidémicos (epizootías, en nuestra aplicación actual) en grandes poblaciones y, por otra parte, permite al clínico afrontar con mayor grado de confianza la toma de la decisión terapéutica correspondiente.*

*Por otra parte, el sistema de lógica borrosa permite al clínico establecer rutinas de simulación para la afinación lógica de los criterios previamente establecidos, ya sea a nivel de sintomatología para las enfermedades o bien para la presentación clínica en cada uno de los pacientes.*

*Esta capacidad de retroalimentación entre el sistema borroso y el clínico no está presente en el sistema formal. Con ello, es evidente que la relación entre los valores numéricos acordados por el sistema a cada* *una de las enfermedades y pacientes y la situación real -a pesar de su contingencia- es un indicador válido para discernir el grado de fidelidad con que el clínico ha contemplado dicha situación, pues el surgimiento de incongruencias numéricas obliga al usuario a reconsiderar el planteamiento lógico de sus problemas.*

*Asimismo, debe tomarse en cuenta el fenómeno de variabilidad biológica que en la presentación de las enfermedades consideradas induce aspectos parcial o radicalmente distintos según sea la región en donde se esté realizando el estudio. Es conocido el hecho de que un mismo microorganismo presenta distintas características bioquímicas y epidemiológicas en el transcurso del tiempo. A este respecto, cabe señalar una cualidad adicional del sistema borroso: permite al clínico establecer cuál es el aspecto particular que la enfermedad en cuestión está presentando en la región y en el tiempo, y evaluar, bajo estos parámetros, la dimensión y naturaleza real de las enfermedades locales.*

*De este modo, esperamos contribuir al desarrollo del criterio médico del estudiante y a incorporar en nuestras aulas las nuevas técnicas de diagnóstico y análisis a través de la introducción de los marcos lógicos y cibernéticos actuales.*

# APENDICES

APENDICE I

<u>OTRAS OPERACIONES CON SUBCONJUNTOS BORROSOS</u>.

<u>DEFINICION.-</u> Sean $A$ y $B$ dos subconjuntos borrosos de $X$. Entonces la DIFERENCIA entre $A$ y $B$ se denotará por $A$-$B$ y su función de membresía estará dada por

$$M_{A-B}(x) = M_{A\cap B^c}(x) = \min(M_A(x),\ M_{B^c}(x) = 1 - M_B(x)).$$

<u>EJEMPLO 1</u>

Sea $X$ el conjunto de los pacientes

$X = (p_1, \ldots, p_5)$.

Sea $A$ el subconjunto borroso de los pacientes enfermos de gravedad y sea $B$ el subconjunto borroso de los pacientes con indicios de anemia

$A = ((p_1,0.3),\ (p_2,0.8),\ (p_3,0),\ (p_4,0),\ (p_5,0.7))$

$B = ((p_1,0.7),\ (p_2,0),\ (p_3,1),\ (p_4,0.5),\ (p_5,1))$

Entonces $A$-$B$ simboliza el subconjunto borroso de los pacientes enfermos de gravedad pero no con indicios de anemia

$A\text{-}B = ((p_1,0.3),\ (p_2,0.8),\ (p_3,0),\ (p_4,0),\ (p_5,0)).$

<u>DEFINICION.-</u> Sean $A$ y $B$ dos subconjuntos borrosos de $X$. Entonces $A=B$ si y sólo si

$$M_A(x) = M_B(x),\ \forall\, x \in X.$$

*__DEFINICION.-__ Sean A y B dos subconjuntos borrosos de X. Entonces $A \subset B$ si y sólo si*

$$M_A(x) \leq M_B(x), \ \forall x \in X.$$

*APENDICE 2*

*ALGUNAS OTRAS PROPIEDADES DE LAS RELACIONES BORROSAS.*

*A continuación haremos una breve mención de algunas otras propiedades de las relaciones borrosas que tienen gran utilidad práctica en lo que se refiere a clasificación de elementos de un conjunto dado ya que a partir de éstas es posible refinar la clasificación de los mismos tomando como base una relación n-ésima que permitirá medir el máximo relacionamiento posible entre los elementos a clasificar, considerando que éstos deben tener al menos un grado de similitud dado.*

*DEFINICION.-* *Sea $\underset{\sim}{R}$ una relación borrosa de X a Y. Llamaremos RELACION ORDINARIA DE NIVEL B, donde $B \in [0,1]$, a la relación que cumple*

$$\underset{\sim}{R}_B = ((x,y)/M_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \geq B).$$

*Una RELACION DE NIVEL es una relación ordinaria (subconjunto del producto cartesiano XxY), en la cual los elementos tienen al menos un grado de relacionamiento del nivel en cuestión.*

*DEFINICION.-* *Sea $\underset{\sim}{R}$ una relación borrosa de X a Y reflexiva, simétrica y transitiva. Entonces, se le llama a $\underset{\sim}{R}$ RELACION DE SIMILITUD o RELACION DE EQUIVALENCIA BORROSA.*

*TEOREMA.-*(*) *Si $\underset{\sim}{R}$ es una relación borrosa de equivalencia en un conjunto X que contiene n elementos, entonces existe $k \leq n$ tal que*

$$\underset{\sim}{R}^1 \leq \underset{\sim}{R}^2 \leq \cdots \leq \underset{\sim}{R}^k = \underset{\sim}{R}^{k+1},$$

*donde $\underset{\sim}{R}^i(x,y) \leq \underset{\sim}{R}^j(x,y) \Leftrightarrow M_{\underset{\sim}{R}}{}^i(x,y) \leq M_{\underset{\sim}{R}}{}^j(x,y), \forall (x,y)$.*

*Este teorema nos asegura que en un conjunto de n elementos tendremos, en n composiciones como máximo, la relación de similitud $\underset{\sim}{R}^k$, la cual da*

*(*) Para ver una demostración consúltese el punto núm. 1 de la bibliografía.*

*la similitud máxima posible entre cualquier par de elementos.*

*Basándonos en este teorema se introducirá la definición de una relación ordinaria a partir de la cual se obtienen los patrones de clasificación en base a la partición que induce dicha relación.*

***DEFINICION.-*** *La RELACION ORDINARIA DE SIMILITUD $\alpha$, $\alpha \in [0,1]$, denotada por $R_\alpha$, se define por:*

$$R_\alpha = \{(x,y)/M_R(x,y) \geq \alpha\}.$$

*Es importante aclarar que $\alpha$ debe ser elegida por el investigador de acuerdo a lo estricta que desee hacer su clasificación. Si $\alpha \geq \gamma$, entonces la partición que induce $R_\alpha$ refina la correspondiente de $R_\gamma$.*

## APENDICE 3

### DEMOSTRACIONES CAPITULO III

#### DEMOSTRACION A

$$R_1 o (R_2 U R_3) = (R_1 o R_2) U (R_1 o R_3).$$

Donde $R_1$, $R_2$, $R_3$ son relaciones borrosas con sus respectivas funciones de membresía $M_{R1}$, $M_{R2}$, $M_{R3}$.

Sean $E_i$, $E_j$ y $E_k$ los conjuntos de referencia, entonces

$\forall x_i \in E_i$, $\forall y_j \in E_j$, $\forall z_k \in E_k$: $x_i R_1 y_j$, $y_j R_2 z_k$, $y_j R_3 z_k$ se tiene que

1)

$$M_{R1o(R2UR3)}(x_i, z_k) = M_{R1oR2}(x_i, z_k) \; U \; M_{R1oR3}(x_i, z_k).$$

Establezcamos para simplificar la escritura:

$a_\beta = M_{R1}(x_i, y_\beta)$,

$b_\gamma = M_{R2}(y, z_k)$ y

$c_\gamma = M_{R3}(y, z_k)$.

con $\beta, \sigma, \gamma = 1,2,\ldots,n$.

Así, podemos ver que:

2)

$$M_{R1o(R2UR3)}(x_i, z_k) = [a_1 \wedge (b_1 \vee c_1)] \vee \ldots \vee [a_n \wedge (b_n \vee c_n)].$$

3)

$$M_{R1oR2}(x_i, z_k) = (a_1 \wedge b_1) \vee \ldots \vee (a_n \wedge b_n).$$

*4)*

$M_{\underline{R}1o\underline{R}3}(x_i,\ z_k)=(a_1\wedge c_1)\vee\ldots\vee(a_n\wedge c_n).$

*Uniendo bajo el operador* $\vee$ *las fórmulas 3) y 4) se tiene*

*5)*

$[(a_1\wedge b_1)\vee\ldots\vee(a_n\wedge b_n)]\vee[(a_1\wedge c_1)\vee\ldots\vee(a_n\wedge c_n)]=$

$[(a_1\wedge b_1)\vee(a_1\wedge c_1)]\vee\ldots\vee[(a_n\wedge b_n)\vee(a_n\wedge c_n)].$

*debido a la asociatividad para* $\vee$.

*Además, como sabemos,*

$$a_\beta\wedge(b_\sigma\vee c_\gamma)=(a_\beta\wedge b_\sigma)\vee(a_\beta\wedge c_\gamma),\ \beta,\sigma,\gamma\ =1,2,\ldots,n.$$

*Por lo que podemos concluir, comparando las fórmulas 2) y 5), que*

$M_{\underline{R}1o(\underline{R}2U\underline{R}3)}(x_i,\ z_k)=M_{(\underline{R}1o\underline{R}2)U(\underline{R}1o\underline{R}3)}(x_i,\ z_k).$

***DEMOSTRACION B***

$$\underline{R}_1o(\underline{R}_2\cap\underline{R}_3)\neq(\underline{R}_1o\underline{R}_2)\cap(\underline{R}_1o\underline{R}_3).$$

*Utilizaremos la notación empleada en la demostración inmediata anterior.*

*Dado que se pretende demostrar que no se cumple la propiedad de distributividad para la composición de relaciones cualesquiera que sean los subconjuntos referencia A, B, C; nos limitaremos a un conjunto referencia en el que* $\beta,\sigma,\gamma\ =1,\ 2.$

*Así*

9)

$$M_{\underline{R}1o(\underline{R}2\cap\underline{R}3)}(x_i,\ z_k)=[a_1\wedge(b_1\wedge c_1)]\vee[(a_2\wedge(b_2\wedge c_2)]$$
$$=(a_1\wedge b_1\wedge c_1)\vee(a_2\wedge b_2\wedge c_2).$$

10)

$$M_{\underline{R}1o\underline{R}2}(x_i,\ z_k)=[(a_1\wedge b_1)\vee(a_2\wedge b_2)].$$

11)

$$M_{\underline{R}1o\underline{R}3}(x_i,\ z_k)=[(a_1\wedge c_1)\vee(a_2\wedge c_2)].$$

Uniendo las fórmulas 10) y 11) bajo el operador $\wedge$ se tiene

12)

$$[(a_1\wedge b_1)\vee(a_2\wedge b_2)]\wedge[(a_1\wedge c_1)\vee(a_2\wedge c_2)].$$

Desarrollando la fórmula 9) se tiene

13)

$$(a_1\vee a_2)\wedge(a_1\vee b_2)\wedge(a_1\vee c_2)\wedge(a_2\vee b_1)\wedge(b_1\vee b_2)\wedge(b_1\vee c_2)\wedge(a_2\vee c_1)\wedge(b_2\vee c_1)\wedge(c_1\vee c_2).$$

Desarrollando la fórmula 12) se tiene

14)

$$(a_1\vee a_2)\wedge(a_1\vee b_2)\wedge(a_2\vee b_1)\wedge(b_1\vee b_2)\wedge(a_1\vee a_2)\wedge(a_1\vee c_2).$$

Comparando término a término las fórmulas 13) y 14) encontramos que

$$(a_1\vee a_2)\neq(b_1\vee c_2)\wedge(b_2\vee c_1).$$

lo que verifica que

$$M_{\underline{R}1o(\underline{R}2\cap\underline{R}3)}(x_i,\ z_k)\neq M_{(\underline{R}1o\underline{R}2)\cap(\underline{R}1o\underline{R}3)}(x_i,\ z_k).$$

# BIBLIOGRAFIA

***BIBLIOGRAFIA***

*1) Quirós Roberto. Tesis para obtener el título de Actuario; "Teoría de los Conjuntos Borrosos". México, D.F, Universidad Anáhuac, 1986. De esta referencia bibliográfica se obtuvieron los conceptos teóricos para los Capítulos I y II.*

*2) A. Kaufmann. "Introducción a la Teoría de los Subconjuntos Borrosos" (Elementos Teóricos de Base), Ed. C.E.C.S.A. De este libro también se obtuvo parte de los conceptos teóricos de los Capítulos I y II, así como la demostración del Apéndice 3.*

*3) Enciclopedia Salvat tomo V. De aquí se obtuvieron las definiciones de las entidades médicas descritas en el Capítulo III.*

*4) Brackman Ronald J, Amarel Saul, Engelman Carl, Engelmore Roberts, Feigenbaum Edward A. and Wikins David E.."What are Expert Systems?" en "Building Experts Systems" (Hayes, Roth y Waterman). pp 31-57. De este artículo se obtuvo teoría para la primera parte del Capítulo III.*

*5) Stefik Mark, Aikins Janice, Balzer Robert, Benoit John, Bimbaurn Lawrence, Hayes Roth Frederick and Sacerdoti Earl. "Basic Concepts for Building Expert Systems" en "Building Experts Sysytems" (Hayes, Roth y Waterman). pp 59-86. De este artículo se obtuvo teoría para la primera parte del Capítulo III.*

*6) Sánchez Elie. "Compositions of Fuzzy Relations" en "Advances in Fuzzy Set Theory and Applications" (M.M. Gupta, R.K. Ragade, R.R. Yager), Ed. North-Holland and Publishing Company, 1979. pp 421-433. De este libro se obtuvieron conceptos fundamentales para la segunda parte del Capítulo III.*

*7) Sánchez Elie. "Solutions in Composite Fuzzy Relation Equations. Application to Medical Diagnosis in Browerian Logic" en "Fuzzy Automata and Decision Processes" (M.M. Gupta, R.K. Ragade, Georges N. Saridis, Brian R. Gaines), Ed. North-Holland and Publishing Company, 1980. pp 221-234. De este artículo se obtuvo teoría para la segunda parte del Capítulo III.*

*8) Wilfread A. Fordon and James C. Bezdek. "The Application of Fuzzy Set Theory to Medical Diagnosis" en "Advances in Fuzzy Set Theory and Applications" (M.M. Gupta, R.K. Ragade, R.R. Yager), Ed. North-Holland and Publishing Company, 1979. pp 445-461. De este artículo se obtuvieron ideas sobre la aplicación de la lógica borrosa a los diagnósticos médicos.*

*9) Sánchez Elie. "Medical Diagnosis and Composite Fuzzy Relations" en "Advances in Fuzzy Set Theory and Applications" (M.M. Gupta, R.K. Ragade, R.R. Yager), Ed. North-Holland and Publishing Company, 1979. pp 437-444. De este artículo se obtuvieron ideas para la creación del algoritmo en el lenguaje Pascal en el que se fundamenta el sistema experto para diagnosticar enfermedades diarreicas en cerdos.*

*10) Addlassing Kalus-Peter, Kolarz Gernot, Scheithaver Werner, Effenbergers Harald and Grabner Georg. "Cadiag: Approaches to Computer-Assisted Medical Diagnosis. Computer Biomedical Research." Vol.15. Impreso en Gran Bretaña, 1985. pp 315-333. De este libro se obtuvo la estructura sobre la que se basa el sistema médico experto para realizar diagnósticos médicos empleando lógica borrosa.*

*11) Richard Conway, David Gries, E. Karl Zimmermann. "Primer On Pascal". Ed. Winthrop Publishers, Inc. 1981. pp 312, 313, 316 y 297. De este libro se obtuvo la información para la creación del programa en el lenguaje Pascal que efectúa la composición de relaciones borrosas.*