

20
26

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO.

FACULTAD DE CIENCIAS.

ESTADOS RELAJADOS DE TAYLOR EN FUSION NUCLEAR.

T E S I S

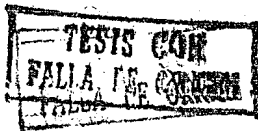
Que para obtener el grado de

F I S I C O

Presenta:

Héctor Perales Valdivia.

1989





UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

C O N T E N I D O.

INTRODUCCION

CAPITULO 1: "Ecuaciones de la magnetohidrodinámica ideal (MHD)."

- I. Ecuaciones MHD 1.1
- II. Forma conservativa 1.3
- III. Propiedades del campo magnético. 1.5
- IV. La helicidad magnética como cantidad conservada . . . 1.6

CAPITULO 2: "La hipótesis de Taylor."

- I. Descripción de la hipótesis. 2.1
- II. Solución a la ecuación para el campo libre de fuerzas
a partir de las de la ecuación vectorial de Helmholtz. 2.3
- III. Un ejemplo sencillo en coordenadas cilíndricas 2.4

CAPITULO 3: "Solución a la ecuación para el campo libre de fuerzas para diversas geometrías."

- I. Coordenadas cartesianas 3.1
- II. Coordenadas esféricas 3.2
- III. Coordenadas cilíndricas 3.3
- III.bis. Modos helicoidales. 3.5

CAPITULO 4: "El toroide axisimétrico."

CAPITULO 5: "El campo libre de fuerzas con valor propio dependiente de la posición."

COMENTARIOS Y CONCLUSIONES.

APENDICE A.

APENDICE B.

APENDICE C.

I N T R O D U C C I O N

Durante la década de los cincuentas, diversas observaciones astronómicas permitieron sustentar la suposición de que los campos magnéticos eran comunes en el universo. Las observaciones y mediciones espectrales de la nebulosa del Cangrejo, dieron a Woltjer elementos suficientes para proponer que el tipo de campo magnético en la nebulosa, debía ser libre de fuerzas ($\nabla \times \underline{B} = \lambda \underline{B}$) ya que era casi seguro que la densidad fuera tan baja que no podría compensar la intensa presión magnética [Woltjer, 1958a]. Esta configuración de campo magnético sirve en buen grado para modelar regiones del universo donde hay campo magnético y la densidad de materia es baja o bien la la conductividad eléctrica es muy grande (v.g. en las regiones cercanas a una estrella). Se encuentran en la literatura diversos trabajos donde se presentan soluciones a la ecuación para el campo libre de fuerzas [Lüst y Schlüter, 1954]; [Chandrasekhar y Kendall, 1957].

En un artículo posterior, Woltjer establece, usando un modelo variacional (ver capítulo 2) que los campos magnéticos libres de fuerzas con λ constante, representan el estado de energía magnética mínima para un sistema cerrado [Woltjer, 1958b]. Taylor, haciendo algunas suposiciones, aplica el resultado de Woltjer (capítulo 2) a una simplificación del "pinch" de campo invertido (PCI); máquina ésta, de forma toroidal dedicada al estudio del confinamiento de plasmas de fusión nuclear. El confinamiento se lleva a cabo debido a la combinación de un campo magnético poloidal (originado por una corriente que fluye dentro del plasma) y de uno toroidal (generado por bobinas externas). Se sabía que el PCI comenzaba a operar de forma violenta y se relajaba a un estado de aparente calma, situación que indujo a Taylor a utilizar el resultado de Woltjer con tan gran acierto que, pese a la extrema simplificación, es capaz de reproducir la inversión del campo toroidal cerca de las paredes del contenedor (característica que da nombre al PCI) [Taylor, 1975].

Es motivo del presente trabajo, el llevar a cabo una revisión de los artículos de Taylor, Woltjer, etc., así como la reproducción de los resultados y la profundización en ellos, la aplicación a otras situaciones y por último la extensión para casos en que λ no es

constante; siempre intentando hacerlo de la manera más detallada y completa posible, que permita la obtención de soluciones analíticas.

Se comienza entonces en el capítulo 1 por introducir el modelo magnetohidrodinámico (MHD) para un plasma, encontrando las ecuaciones a que da lugar en las que se llamarán forma usual (como aparecen comunmente en la literatura, [Schmidt,1979]) y forma conservativa. Se continúa con el estudio de las características de un campo magnético en un plasma que sigue el modelo MHD; concluyendo con la obtención de cantidades conservadas, específicamente la energía y la helicidad magnética.

En el capítulo 2 se presenta la hipótesis de Taylor. Exponiendo inicialmente las consideraciones que permiten el establecimiento de la misma (el trabajo previo de Woltjer y la evidencia experimental), pasando luego a describirla. Se muestra un método para encontrar soluciones a la ecuación para el campo libre de fuerzas auxiliándose de las de la ecuación vectorial de Helmholtz. Finalmente se aplica el método anterior a una configuración cilíndrica con simetrías axial y traslacional respecto al eje del cilindro, presentando la solución de manera detallada.

El capítulo 3 está dedicado a resolver la ecuación del campo libre de fuerzas para diversas geometrías, suponiendo siempre la aplicabilidad de la hipótesis de Taylor y auxiliándose del método expuesto en el capítulo 2. Inicialmente se resuelve el caso de coordenadas cartesianas, después en esféricas y finalmente se trata la configuración cilíndrica con mayor detalle.

Las configuraciones toroidales axisimétricas son tratadas en el capítulo 4. Iniciando con la obtención de la ecuación de equilibrio para dichas configuraciones, la ecuación de Grad-Shafranov. Considerando nuevamente la aplicabilidad de la hipótesis de Taylor, se resuelve la ecuación del campo libre de fuerzas para una situación específica: un toro de sección rectangular (el toro propiamente dicho y el caso límite en que no tiene agujero).

Finalmente, en el capítulo 5 se obtiene la ecuación del campo libre de fuerzas como un caso particular de las ecuaciones de la magnetostática (forma reducida de las ecuaciones MHD); pasando luego a la obtención de soluciones analíticas para cuando el valor propio de la

ecuación del campo libre de fuerzas no es constante.

Se incluyen 3 apéndices. El A, relativo a la interpretación de la helicidad magnética; el B, relacionado con el método del capítulo 2; y el C, revisión de un artículo que extrapola la aplicabilidad de la hipótesis de Taylor para resolver sistemas abiertos.

Ecuaciones de la magnetohidrodinámica ideal (MHD).

En este capítulo se obtienen las ecuaciones MHD en su forma habitual y en su forma conservativa. Se estudian, además, las propiedades del campo magnético en un plasma descrito por la aproximación MHD.

I. Ecuaciones MHD.

La teoría MHD de un plasma es una descripción macroscópica para fluidos conductores de la electricidad en presencia de campos magnéticos; esta teoría es también conocida como mecánica de los magnetofluidos o hidromagnética.

En el modelo MHD se considera al plasma como un continuo, despreciando efectos individuales de las partículas, ignorando las desviaciones de la cuasineutralidad y considerando sólo los fenómenos de baja frecuencia. La descripción trata, de manera consistente, las modificaciones al campo electromagnético debidas a corrientes inducidas por el movimiento del fluido y fuerzas mecánicas que alteran su movimiento cuando el plasma interactúa con el campo electromagnético. Se ven entonces involucradas las ecuaciones de Maxwell y las de los fluidos, así como las relaciones constitutivas.

Para un sistema de referencia inercial, los campos eléctrico y magnético cumplen con las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{J} + \partial \underline{D} / \partial t, \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \underline{E} = -\partial \underline{B} / \partial t, \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \underline{D} = \rho, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0, \quad (1.4)$$

y se considera un medio isotrópico,

$$\underline{B} = \mu \underline{H}; \quad \underline{D} = c \underline{E}; \quad \underline{J} = \sigma \underline{E}; \quad (1.5)$$

dónde \underline{H} , \underline{D} , \underline{J} , \underline{E} y \underline{B} son los vectores de intensidad magnética, desplazamiento eléctrico, densidad de corriente, campo eléctrico e inducción magnética respectivamente; ρ es la densidad de carga eléctrica, μ es la permeabilidad magnética, c la permitividad eléctrica y σ la conductividad.

Considérese un sistema donde l y t sean su longitud (o

dimensión) y tiempos característicos. Supóngase además, que la velocidad del fluido es muy pequeña en comparación a la de la luz. De (1.2) resulta que $E = (l/t)B$, y usando (1.5) se tiene que la corriente de desplazamiento, en (1.1) se puede ignorar:

$$\frac{|\partial \underline{D} / \partial t|}{|\nabla \times \underline{H}|} = \frac{l \epsilon \mu E}{t B} = (l/tc)^2 \ll 1.$$

Se ha empleado el hecho de que $\mu \epsilon = 1/c^2$; con c la velocidad de la luz. Por lo tanto, bajo esta aproximación la ecuación (1.1) queda:

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{J}. \quad (1.6)$$

Al cambiar a un sistema de referencia que se mueve con un elemento de fluido, que tiene una velocidad \underline{v} (pequeña en comparación a c) relativa al sistema inercial en que se estaba antes, los campos vistos en el nuevo sistema (de acuerdo a la transformación de Lorentz [Reitz-Milford-Christy, 1984] para el campo electromagnético con $v^2/c^2 \rightarrow 0$) resultan:

$$\underline{D}' = \underline{D} + (\underline{v} \times \underline{B})/c^2; \quad (1.7)$$

$$\underline{E}' = \underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}; \quad (1.8)$$

$$\underline{H}' = \underline{H}; \quad \underline{B}' = \underline{B}; \quad (1.9; 1.10)$$

$$\underline{J}' = \underline{J} - \rho \underline{v} \quad (1.11)$$

donde,

$$\underline{D}' = \epsilon \underline{E}'; \quad \underline{B}' = \mu \underline{H}'; \quad \underline{J}' = \sigma \underline{E}'. \quad (1.12)$$

La ley de Ohm ($\underline{J}' = \sigma \underline{E}'$), usando (1.8 y 1.11) resulta

$$\underline{J} = \sigma(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) + \rho \underline{v}. \quad (1.13)$$

Comparando el último término de (1.13) con respecto a \underline{J} , produce

$$\frac{\rho v}{J} = \frac{v |\nabla \cdot \underline{D}|}{|\nabla \times \underline{H}|} \approx \frac{(l/t) \epsilon E/l}{(B/\mu)/l} = \frac{l \mu \epsilon E}{t B} = (l/tc)^2 \ll 1;$$

y la ley de Ohm se puede expresar como

$$\underline{J} = \sigma(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}). \quad (1.14)$$

De la fuerza de Lorentz la densidad de fuerza en el plasma viene dada por

$$\underline{F} = \rho \underline{E} + \underline{J} \times \underline{B}; \quad (1.15)$$

donde el primer término es despreciable, ya que

$$\frac{\rho E}{|\underline{J} \times \underline{B}|} \approx \frac{|\nabla \cdot \underline{D}| E}{|\nabla \times \underline{H}| B} = \frac{\epsilon \mu E^2}{B^2} = (l/tc)^2 \ll 1;$$

y así se tiene
$$\underline{F} = \underline{J} \times \underline{B} . \quad (1.16)$$

Para completar la descripción macroscópica se necesita de las ecuaciones de los fluidos. Al tratar al plasma como a un medio continuo, se supone que el fluido se puede describir en términos de propiedades locales tales como temperatura, densidad de masa, etc.; las cuales están definidas como promedios sobre elementos de fluido, de dimensiones mayores que las dimensiones microscópicas características (longitud de Debye y radio de giro de los electrones, por ejemplo) y menores que las de los fenómenos macroscópicos. El plasma en su conjunto no está en un estado de equilibrio termodinámico; pero la suposición de que consta de elementos de fluido, implica un estado de equilibrio termodinámico local. Las variables termodinámicas asociadas, se supone que cumplen las mismas relaciones que las de la termodinámica usual. Para ello debe haber un número grande de colisiones en el plasma [Field,1981].

Las ecuaciones de los fluidos son [Schmidt,1979], la ecuación de continuidad de masa
$$\partial \rho_m / \partial t + \nabla \cdot (\rho_m \underline{v}) = 0 ; \quad (1.17)$$
 y la de conservación de momento

$$\rho_m D(\underline{v})/Dt = \underline{J} \times \underline{B} - \nabla p ; \quad (1.18)$$

donde ρ_m es la densidad de masa, $D(\underline{v})/Dt = \partial(\underline{v})/\partial t + \underline{v} \cdot \nabla(\underline{v})$ es la derivada convectiva, p es la presión y no se han considerado efectos de anisotropía y de viscosidad.

La descripción del comportamiento del fluido no está completa sin una ecuación de estado; la cual puede tener varias formas, de acuerdo a la naturaleza del fluido y al proceso involucrado.

Para un fluido incompresible

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 , \quad (1.19)$$

para un proceso isotérmico

$$D(p/\rho_m)/Dt = 0 , \quad (1.20)$$

o para uno adiabático

$$D(p/\rho_m^\gamma)/Dt = 0 , \quad (1.21)$$

donde γ es el cociente de los calores específicos ($\gamma = C_p/C_v$).

II. Forma conservativa.

Las ecuaciones anteriores se pueden escribir en forma conservativa¹, lo cual es útil para determinar las condiciones a la frontera que aislan al sistema del exterior, y también para resolverlas numéricamente.

Con objeto de encontrar la integral de energía se procederá inicialmente a reescribir las ecuaciones MHD en forma conservativa. La ecuación de continuidad ya está escrita de ese modo, y la ley de Faraday para el caso en que no hay resistividad (1.2) se puede expresar como [Bateman, 1978]:

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{B} / \partial t &= -\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{B}) + \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) - \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{B} \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{B}) . \end{aligned} \quad (1.22)$$

Para obtener la ecuación de conservación de momento se desarrolla el lado izquierdo de (1.18) y se escribe de la siguiente forma

$$(\rho_m) \partial \mathbf{v} / \partial t = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p - \rho_m \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} ;$$

multiplicando (1.17) por \mathbf{v} y sumándola a la ecuación anterior, se obtiene:

$$\partial (\rho_m \mathbf{v}) / \partial t = \mathbf{v} \cdot \nabla (\rho_m \mathbf{v}) + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nabla p - \rho_m \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} ;$$

y como $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mathbf{B} \mathbf{B} - \mathbf{I} B^2 / 2) / \mu$; $\nabla p = \nabla \cdot (p \mathbf{I})$ con \mathbf{I} siendo el tensor unitario, entonces

$$\nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v} \mathbf{v}) = \rho_m \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\rho_m \mathbf{v}) ;$$

teniéndose finalmente que

$$\partial (\rho_m \mathbf{v}) \partial t = -\nabla \cdot \rho_m \mathbf{v} \mathbf{v} + \mathbf{B} \mathbf{B} / \mu + \mathbf{I} (B^2 / 2 \mu + p) . \quad (1.23)$$

Para la de conservación de la energía [Norwood, 1981], se toma el producto escalar de \mathbf{v} con la ecuación (1.18)

$$\rho_m \mathbf{v} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}) / \mathbf{D}t = -\mathbf{v} \cdot \nabla p + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) / \mu ;$$

y se manipula término a término. El lado izquierdo se hace

$$\rho_m \mathbf{v} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}) / \mathbf{D}t = \rho_m \partial v^2 / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla v^2 / 2 = \partial (\rho_m v^2 / 2) / \partial t + \nabla \cdot (v^2 \rho_m \mathbf{v} / 2) ; (1.24)$$

habiéndose usado la ecuación de continuidad.

De la ecuación de continuidad y de (1.21) se tiene

$$\partial p / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \mathbf{v} \cdot \nabla p = 0 ;$$

¹Se dice que una ecuación está escrita en forma conservativa cuando se puede igualar la derivada parcial respecto al tiempo de una cantidad con la divergencia de otra.

de donde

$$\underline{v} \cdot \nabla p = 1/(\gamma-1) \partial p / \partial t + \gamma/(\gamma-1) \nabla \cdot (p \underline{v}) . \quad (1.25)$$

El último término de (1.24) se puede escribir como

$$\begin{aligned} (1/\mu) \underline{v} \cdot (\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B} &= - (1/\mu) (\underline{v} \times \underline{B}) \cdot \nabla \times \underline{B} = (1/\mu) \underline{B} \cdot \nabla \times \underline{E} - \nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{B}) \\ &= - \partial (B^2/2\mu) / \partial t - \nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{B}) ; \end{aligned} \quad (1.26)$$

donde se han usado la ley de Faraday, la ley de Ohm y las relaciones constitutivas. La ecuación (1.24) adquiere entonces la forma

$$\begin{aligned} \partial \rho_m v^2 / 2 + p / (\gamma-1) + B^2 / 2\mu / \partial t &= \\ &= - \nabla \cdot v^2 \rho_m \underline{v} / 2 + \gamma / (\gamma-1) \rho_m \underline{v} + \underline{E} \times \underline{H} . \end{aligned} \quad (1.27)$$

Si esta ecuación se integra sobre todo el espacio, como el término de divergencia da una integral de superficie, en virtud del teorema de Gauss, y puesto que esta superficie está en el infinito, su contribución desaparece y se obtiene la integral de energía

$$\int_V (\rho_m v^2 / 2 + p / (\gamma-1) + B^2 / 2\mu) dv = \text{constante} . \quad (1.28)$$

El primer término de esta integral es la energía cinética del fluido, el segundo es la energía térmica libre y el último es la energía del campo magnético.

Resumiendo; las ecuaciones MHD son:

de manera usual

$$\partial \underline{B} / \partial t = - \nabla \times \underline{E} , \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{J} , \quad (1.6)$$

$$\underline{J} = \sigma (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) , \quad (1.14)$$

$$\partial (\rho_m) / \partial t + \nabla \cdot (\rho_m \underline{v}) = 0 , \quad (1.17)$$

$$\rho_m D(\underline{v}) / dt = \underline{J} \times \underline{B} - \nabla p , \quad (1.18)$$

con condición inicial $\nabla \cdot \underline{B} = 0$, más una ecuación de estado;

de manera conservativa

$$\partial (\rho_m) / \partial t = - \nabla \cdot (\rho_m \underline{v}) , \quad (1.17)$$

$$\partial \underline{B} / \partial t = \nabla \cdot (\underline{B} \underline{v} - \underline{v} \underline{B}) , \quad (1.22)$$

$$\partial (\rho_m \underline{v}) = - \nabla \cdot \rho_m \underline{v} \underline{v} + \underline{B} \underline{B} / \mu + I (B^2 / 2\mu - p) , \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} \partial (\rho_m v^2 / 2 + p / (\gamma-1) + B^2 / 2\mu) / \partial t &= \\ &= - \nabla \cdot v^2 \rho_m \underline{v} / 2 + \gamma \rho_m \underline{v} / (\gamma-1) + \underline{E} \times \underline{H} , \end{aligned} \quad (1.27)$$

donde se ha supuesto que el sistema es adiabático.

III. Propiedades del campo magnético.

Considérese un plasma perfectamente conductor [Schmidt, 1979], es decir uno en el que (1.14) se reduce a $\underline{E} = -\underline{v} \times \underline{B}$. Sustituyendo en la ley de Faraday resulta

$$\partial \underline{B} / \partial t = \nabla \times (\underline{v} \times \underline{B}) . \quad (1.29)$$

Integrando la ecuación sobre una superficie arbitraria dentro del plasma y usando el teorema de Stokes

$$\int_S \partial (\underline{B} \cdot d\underline{s}) / \partial t - \int_C (\underline{v} \times \underline{B}) \cdot d\underline{l} = 0 , \quad (1.30)$$

la integral de línea va sobre la periferia de la superficie S. Reescribiéndola toma la forma

$$\partial (\Phi_B) / \partial t + \int_C \underline{B} \cdot (\underline{v} \times d\underline{l}) = 0 , \quad (1.31)$$

el primer término representa la variación temporal del flujo a través de la superficie S, mientras el otro término es el incremento adicional del flujo, por unidad de tiempo, que resulta al moverse la periferia; la cual lleva la misma velocidad que el fluido. Ambos términos nos dan entonces el cambio total de flujo magnético a través de la superficie S. Considérese una línea de campo, definida por la intersección de 2 superficies para las cuales \underline{B} es tangencial al tiempo $t = 0$. El flujo a través de tales superficies es cero y la línea así definida, es una línea de campo magnético. Al pasar el tiempo el flujo será siempre cero a través de las superficies que se mueven con el fluido (de lo cual se puede estar seguro gracias a (1.31)), y la línea de intersección será siempre una misma línea de campo. La velocidad local del fluido será la velocidad local de la sección de la línea, se dice entonces que la línea de campo está congelada o atada al fluido. Las líneas de campo no pueden cortarse ni cambiar la topología, ya que el fluido se mueve de manera continua. Para un fluido con cierta resistividad no es cierto, ya que

$$d(\Phi_B) / dt = (\eta / \mu) \int_S \Delta (\underline{B}) \cdot d\underline{s} ; \quad (1.32)$$

donde $\eta = 1/\sigma$ es la resistividad, y Δ es el operador laplaciano.

Si se sigue una línea de campo lo suficiente, se notará que se cierra sobre sí misma, o continúa de manera infinita hasta cubrir una superficie, llenar un volumen o irse al infinito. Las de mayor interés son las 2 primeras; y las superficies así generadas se denominan superficies magnéticas o de flujo.

IV. La helicidad magnética como cantidad conservada.

Para un plasma perfectamente conductor, se tiene que la helicidad magnética, K , definida como:
$$K = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, dv, \quad (1.33)$$
 donde \mathbf{A} es el potencial vectorial magnético y v el volumen encerrado por una superficie de flujo, es una constante de movimiento [Woltjer, 1958b]. El comprobarlo es sencillo:

$$dK/dt = d(\int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, dv)/dt$$

y como el volumen de la superficie de flujo es constante

$$\begin{aligned} d(\int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, dv)/dt &= \int_V \partial(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})/\partial t \, dv = \int_V \partial \mathbf{A}/\partial t \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \partial \mathbf{B}/\partial t \, dv \\ &= -\int_V (\mathbf{E} + \nabla \chi) \cdot \mathbf{B} + (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{A} \, dv \\ &= \int_V -2\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - \nabla \chi \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) \, dv \\ &= \int_V 2(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot \chi \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{A} \, dv; \end{aligned}$$

el primer término en la integral es directamente cero, el de la divergencia, usando el teorema de Gauss y dado que para una superficie de flujo $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ y $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ también lo es. Se tiene así

$$dK/dt = 0. \quad (1.34)$$

Para este caso, la K no depende de la elección de la norma de \mathbf{A} , pero sí de \mathbf{B} y del volumen que se considera, es decir para distintas superficies de flujo se tienen distintos valores de K ; más aún, si se tienen líneas de campo cerradas, hay un invariante para cada línea (en realidad se considera un tubo muy delgado que envuelve a dicha línea).

La denominación "helicidad" se aplica en general a integrales de la forma $\int_V \mathbf{X} \cdot \nabla \times \mathbf{X} \, dv$. El nombre proviene de la hidrodinámica donde $(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$ mide la proyección de la vorticidad de un fluido en la dirección de avance del mismo y da una medida del grado de enlace de las líneas de vorticidad (ver apéndice A) [Moffatt, 1969]. En el caso en el que \mathbf{X} es el potencial vectorial magnético, K mide el grado de enlace de las líneas de campo magnético y es entonces de esperarse que un plasma con conductividad infinita, donde las líneas de campo están congeladas, el grado de enlace de las mismas se conserve.

Si la resistividad no es cero, la K no será más una constante.

Considérese un plasma resistivo en una región bien delimitada (es decir, con un volumen fijo), aprovechando el cálculo anterior, a partir de

$$dK/dt = \int_V -2\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot (\chi \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{A}) \, dv =$$

$$= \int_V 2(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} - 2\eta \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot (\chi \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{A}) \, dv ,$$

reescribiendo $dK/dt = \int_V \partial K / \partial t \, dv$ y como se puede tomar cualquier región (siempre que sea simplemente conexa y esté bien delimitada)

$$\partial K / \partial t = -2\eta \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot (\chi \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{A}) ; \quad (1.35)$$

se tiene una especie de teorema de Poynting para la helicidad, donde K representa la densidad de helicidad y $\chi \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{A}$ es el "vector de Poynting de la helicidad" [Jensen y Chu, 1984]. Dependiendo de como se escojan las condiciones a la frontera de la región en cuestión, se puede tener que la helicidad decaiga únicamente por efectos resistivos o que bien el término de divergencia compense tales pérdidas; pudiéndose hablar de una inyección de helicidad. Para lograr la inyección, es necesario que la componente tangencial de \mathbf{E} en la frontera sea distinta de cero. Piénsese, por ejemplo, en un plasma dentro de un contenedor metálico de forma esférica, el cual se parte por la mitad; separando un poco los hemisferios y conectándolos a los polos opuestos de una batería se puede lograr que \mathbf{E} tangencial en la separación no sea cero. El término $\chi \mathbf{B}$ se llama de inyección electrostática, se da únicamente cuando hay líneas de campo abiertas, es decir que salen o entran del contenedor, y para sistemas simplemente conexos es la única posible. Si la separación entre los hemisferios es pequeña, χ puede asociarse con una diferencia de potencial constante, por lo que la inyección de helicidad electrostática se puede poner como $dK/dt|_{\text{iny}} = 2V\dot{\Phi}_m$; con $\Phi_m = (1/2) \int_{\text{frontera}} (\mathbf{E}_{\text{frontera}}) \cdot \mathbf{n} \, ds$ y V la diferencia de potencial aplicada a las paredes del contenedor.

Para regiones múltiplemente conexas se puede inyectar helicidad con el término $\mathbf{E} \times \mathbf{A}$, que se denomina de inyección electromagnética. Para la helicidad de este tipo no es necesario que existan líneas de campo magnético abiertas.

C A P I T U L O 2

La hipótesis de Taylor.

Se exponen inicialmente las consideraciones que llevaron a la elaboración de la hipótesis, pasando luego a describirla. Se presenta un método general para la solución de la ecuación a que da lugar la teoría (la ecuación para el campo libre de fuerzas) y se aplica de manera particular y detallada para el caso de una configuración cilíndrica con simetrías axial y traslacional respecto al eje del cilindro.

I. Descripción de la hipótesis.

El "pinch" de campo invertido PCI al igual que el tokamak, es una máquina de forma toroidal dedicada al estudio del confinamiento de plasmas para fusión nuclear [Bodin y Newton, 1984]. El confinamiento se lleva a cabo debido a la combinación de un campo magnético poloidal, B_p (originado por la corriente que fluye dentro del plasma), y de uno toroidal, B_t (generado por bobinas externas). Las características del PCI son, primera, que la magnitud del campo poloidal es ligeramente mayor que la del toroidal (situación diferente a la del tokamak, donde la magnitud del campo toroidal es bastante más grande que la del poloidal) y, segunda, que el campo toroidal se invierte en la región exterior del plasma respecto de la central (de esta última característica es de donde toma su nombre). Dicha inversión se presenta cuando el cociente del campo poloidal en la pared del aparato entre el campo toroidal promedio ($\theta = B_p / \bar{B}_t$, el llamado parámetro de "pinch"), que mide el grado de compresión del plasma, excede un cierto valor crítico [Taylor, 1974].

Cuando el aparato entra en operación lo hace iniciando con una fase violenta e inestable para después llegar a una de aparente calma, caracterizada, además, por ser muy estable. Basado en este hecho Taylor propuso que si se tiene un plasma que puede disipar energía (puede pensarse que tiene cierta resistividad), que está contenido en un recipiente de paredes perfectamente conductoras y que parte de un estado inicial fuera de equilibrio; entonces se relaja a un estado donde no pueden ya suceder cambios bruscos y así el estado final debe ser uno en el que la energía sea un mínimo determinado por las

constricciones que gobiernan la evolución.

Ya en 1958 Woltjer encontró que para un sistema cerrado se puede encontrar un estado no trivial de mínima energía magnética, al minimizarla bajo la restricción de que la helicidad magnética se conserve (tal minimización se efectúa al calcular la variación de la integral de energía magnética y la restricción de que la helicidad sea constante se introduce empleando la técnica de los multiplicadores de Lagrange); y que a dicho estado le corresponde una configuración de campo magnético libre de fuerzas [Woltjer, 1958b].

Si se tiene un plasma, en un recipiente metálico, con conductividad infinita, y además se pueden despreciar las energías cinética e interna del plasma en comparación a la magnética, se puede aplicar entonces el resultado de Woltjer, el cual se reproduce a continuación:

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} / 2\mu - \lambda' \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, dV \\
 &= \int_V \delta \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} / \mu - \lambda' \mathbf{A}) - \lambda' \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, dV \\
 &= \int_V (\nabla \times \delta \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} / \mu - \lambda' \mathbf{A}) - \lambda' \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{A} \, dV \\
 &= \int_V \nabla \cdot (\mathbf{B} / \mu - \lambda' \mathbf{A}) \times \delta \mathbf{A} + \delta \mathbf{A} \cdot \nabla \times (\mathbf{B} / \mu - \lambda' \mathbf{A}) - \lambda' \mathbf{B} \, dV \\
 &= \int_V \delta \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B} / \mu - 2\lambda' \mathbf{B}) \, dV + \int_C (\mathbf{B} / \mu - \lambda' \mathbf{A}) \times \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS;
 \end{aligned}$$

(λ' es el multiplicador de Lagrange) debido a que el sistema es cerrado, los movimientos dentro de él no afectan al potencial vectorial afuera, y como además el potencial debe ser continuo (aún cuando existan corrientes superficiales) entonces $\delta \mathbf{A}$ debe ser cero en la frontera; anulándose así la integral de superficie. Para la integral restante, como se trata de una variación $\delta \mathbf{A}$ arbitraria

$$\nabla \times \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B} \quad (\lambda_v = 2\mu\lambda') \quad (2.1)$$

Como se tiene una K para cada superficie de flujo, existe un valor propio λ_v para cada volumen que satisfaga las condiciones a la frontera para las que K es constante.

Si el plasma tuviera una pequeña resistividad, esto ocasionaría que las líneas de campo magnético se recombinasen, dando lugar a cambios en la topología del plasma. No puede hablarse entonces de que la helicidad se conserve para cada superficie o cada línea (de hecho no es así). La única superficie que se mantiene es la asociada al recipiente mismo y entonces, si η es muy pequeña el usar la helicidad

de la superficie asociada al contenedor (a la que se llamará K_0) parece ser la constricción adecuada para llevar a cabo la minimización de la energía y encontrar el campo magnético de la situación de equilibrio (ésta es propiamente la hipótesis de Taylor). De esta manera la ecuación que debe satisfacer el campo magnético es

$$\nabla \times \underline{B} = \lambda \underline{B} \quad , \quad (2.2)$$

(donde ahora si, λ es verdaderamente una constante) el cual queda bien determinado una vez que se conoce λ , dadas las condiciones a la frontera del problema.

En el capítulo 1 se obtuvo la densidad de fuerza en el plasma, la que viene dada por $\underline{F} = \underline{J} \times \underline{B}$, con $\mu \underline{J} = \nabla \times \underline{B}$. En el caso del campo del estado de equilibrio se tiene $\mu \underline{J} = \lambda \underline{B}$, por lo que $\underline{F} = 0$, razón por la que se conoce a esta configuración de \underline{B} como la del campo libre de fuerzas.

Ahora bien, se está diciendo que de esta manera se obtiene un mínimo para la energía; pero podría ser que se tuviera una serie de λ que cumplieran la ecuación (2.2) para la misma K_0 ; ¿cuál escoger?. Notando que $\nabla \times \underline{B} = \lambda \underline{B}$; $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$; $\nabla \times \underline{B} = \lambda \nabla \times \underline{A}$; $\nabla \times \underline{B} - \lambda \underline{A} = 0$; se tiene que $\underline{B} = \lambda \underline{A} + \nabla \chi$. Al calcular la energía se encuentra

$$U_B = \int_{VT} (1/2\mu) (\nabla \chi + \lambda \underline{A}) \cdot \underline{B} dV = \lambda K_0 / 2\mu + \int_{VT} (1/2\mu) \nabla \chi \cdot \underline{B} dV$$

$$U_B = (\lambda/2\mu) K_0 \quad , \quad (2.3)$$

ya que la integral en la penúltima igualdad se anula debido a las condiciones a la frontera ($\underline{B} \cdot \underline{n} = 0$).

Para asegurarse entonces de tener la mínima energía, basta con escoger el menor de los valores propios λ de entre aquellos que satisfagan (2.2).

II. Solución a la ecuación para el campo libre de fuerzas a partir de las soluciones de la ecuación vectorial de Helmholtz.

Al tomar el rotacional de (2.2), se obtiene (dado que $\nabla \cdot \underline{B} = 0$)

$$\Delta \underline{B} = -\lambda^2 \underline{B} \quad ; \quad (2.4)$$

que es la ecuación vectorial de Helmholtz. Toda solución de (2.2) es, de manera evidente, solución de (2.4); pero no al revés. Una manera de resolver (2.2) es encontrar de entre las soluciones de (2.4) aquellas que la satisfagan.

Cualquier campo vectorial se puede expresar como la suma del

gradiente de un potencial escalar (componente longitudinal), más el rotacional de un potencial vectorial (componente transversal) Morse-Feshbach, 1953. Esta división simplifica la aplicación de las condiciones a la frontera. El campo \underline{B} solución de (2.4) se puede escribir como: $\underline{B} = \underline{B}_L + \underline{B}_T$, con $\underline{B}_L = \nabla\phi$ y $\underline{B}_T = \nabla \times \underline{A}$; sujetos a las condiciones $\nabla \times \underline{B}_L = 0$, $\nabla \cdot \underline{B}_T = 0$; y donde se considera usualmente $\nabla \cdot \underline{A} = 0$.

A partir de Ψ (relacionada con el flujo magnético), solución de la ecuación escalar de Helmholtz, y para un sistema de coordenadas donde uno de los factores de escala sea la unidad, y el cociente de los otros dos sea independiente de la primera coordenada (ver apéndice A), se puede obtener una solución a (2.4) de la forma

$$\underline{L} = \nabla\Psi, \quad \underline{T} = \nabla \times (\hat{a}\Psi), \quad \underline{S} = \nabla \times \underline{T} / \lambda; \quad (2.5; 2.6; 2.7)$$

con \hat{a} el vector unitario en la dirección de la coordenada cuyo factor de escala es la unidad [Chandrasekhar-Kendall, 1957]. La primera de estas soluciones satisface (2.4) sólo en el caso de que $\lambda = 0$ (solución para el vacío). De (2.7) se tiene $\nabla \times \underline{T} = \lambda \underline{S}$; calculando el rotacional de \underline{S}

$$\nabla \times \underline{S} = \nabla \times \nabla \times \underline{T} / \lambda = (-\Delta \underline{T}) / \lambda = (\lambda^2 \underline{T}) / \lambda = \lambda \underline{T}.$$

De lo anterior resulta que $\nabla \times (\underline{S} + \underline{T}) = \lambda (\underline{S} + \underline{T})$, teniéndose así una solución a (2.2) de la forma

$$\underline{B} = \nabla \times (\hat{a}\Psi) + \lambda^{-1} \nabla \times \nabla \times (\hat{a}\Psi). \quad (2.8)$$

Las soluciones del tipo de (2.8) no son exclusivas de Ψ (solución de la ecuación escalar de Helmholtz) y de un sistema de coordenadas de las características antes descritas, ya que para el caso de un toroide axisimétrico (como podrá verse más adelante) se tienen también soluciones de esa forma, donde Ψ satisface una ecuación diferente.

III. Un ejemplo sencillo en coordenadas cilíndricas.

Se encuentra la solución para el caso en que existe simetría axial y simetría traslacional respecto al eje del cilindro.

Una sección de un toro de razón de aspecto grande, es decir, uno cuyo radio mayor sea grande en comparación al menor, bien puede aproximarse por un cilindro. La situación más sencilla con que se puede uno encontrar es cuando existen simetría axial y traslacional respecto al eje del cilindro. En tales condiciones y para un sistema coordenado

cilindrico como el de la figura, la ecuación escalar de Helmholtz queda expresada en la forma

$$r^{-1}d(r d\Psi/dr)/dr + \lambda^2\Psi = 0,$$

la cual tiene como solución

$$\Psi = AJ_0(\lambda r),$$

con A una constante y $J_0(\lambda r)$ la función de Bessel de orden cero (sólo se

considera la solución regular porque la otra diverge en el origen). De la expresión para Ψ es directo que las superficies de flujo (superficies para las que Ψ es constante) resultan cilindros concéntricos.

El campo magnético correspondiente, usando $\vec{a} = z$, tiene la siguiente expresión

$$\vec{B}_r = 0, \quad B_\phi = \lambda AJ_1(\lambda r), \quad B_z = \lambda AJ_0(\lambda r); \quad (2.9)$$

el cual cumple la condición $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$, con \vec{n} el vector normal a la superficie del cuerpo del cilindro, ya que éste se considera perfectamente conductor.

El potencial vectorial se puede calcular de

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}; \quad \vec{B} = \nabla \times \hat{z}\Psi + \nabla \times (\hat{z}\Psi)/\lambda;$$

así la expresión más general para la \vec{A} resulta

$$\vec{A} = z\Psi - \phi \lambda^{-1}d\Psi/dr + \nabla\chi; \quad (2.10)$$

y en este caso (por componentes)

$$A_r = (\nabla\chi)_r = G_r(r, \phi, z),$$

$$A_\phi = AJ_1(\lambda r) + (\nabla\chi)_\phi = AJ_1(\lambda r) + G_\phi(r, \phi, z),$$

$$A_z = AJ_0(\lambda r) + (\nabla\chi)_z = AJ_0(\lambda r) + G_z(r, \phi, z).$$

Para la determinación unívoca de las componentes del potencial vectorial, se utiliza la conservación de Φ_{BTOR} Y Φ_{BRAD}

$$\Phi_{\text{BTOR}} = \int \vec{B} \cdot \hat{z} dA = \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{z} dA = \oint \vec{A} \cdot \hat{\phi} dl = \int_0^{2\pi} A_\phi \Big|_{r=a} a d\phi \quad (2.11)$$

$$\Phi_{\text{BRAD}} = 0 = \int \vec{B} \cdot \hat{r} dA = \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{r} dA = \oint \vec{A} \cdot \hat{z} dl = \int_{-\pi}^{\pi} A_z \Big|_{r=a} dz \quad (2.12)$$

El $\nabla\chi$ se puede considerar como un vector constante $\nabla\chi = (G_r, G_\phi, G_z)$. En realidad para una situación más general deberían considerarse χ soluciones de la ecuación de Laplace, pero por simplicidad se

considerará constante. De (2.11) resulta, por un lado

$$\int \underline{B} \cdot \underline{z} \, dA = 2\pi A a \lambda J_1(\lambda a), \quad (2.11a)$$

y por otro

$$\oint \underline{A} \cdot \underline{\phi} \, dl = 2\pi A a J_1(\lambda a) + 2\pi a G_\phi; \quad (2.11b)$$

de donde $G_\phi = 0$. Empleando (2.12) se obtiene

$$0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (A J_0(\lambda a) + G_z) \, dz; \quad G_z = -A J_0(\lambda a). \quad (2.12a)$$

A G_r puede considerársele cero sin problema, resultando el potencial vectorial

$$\underline{A}_r = 0, \quad \underline{A}_\phi = A J_1(\lambda r), \quad \underline{A}_z = A J_0(\lambda r) - J_0(\lambda a).$$

Disponiendo ya de las expresiones para \underline{A} y \underline{B} se puede estimar K_0

$$\begin{aligned} K_0 &= \int_V \underline{A} \cdot \underline{B} \, dV = A^2 \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^a \int_0^{2\pi} J_1^2(\lambda r) + J_0^2(\lambda r) - J_0(\lambda a) J_0(\lambda r) \, r \, dr \, d\phi \, dz \\ &= (2\pi)^2 A^2 \lambda a^2 J_1^2(\lambda a) + J_0^2(\lambda a) - (2/\lambda a) J_0(\lambda a) J_1(\lambda a). \end{aligned}$$

Tomando el cociente de K_0 entre Φ_{BTOR}^2 , se elimina el factor A^2

$$K_0 \Phi_{\text{BTOR}}^{-2} = \lambda a^{-1} J_1^{-2}(\lambda a) \lambda a J_1^2(\lambda a) + J_0^2(\lambda a) - 2 J_0(\lambda a) J_1(\lambda a). \quad (2.13)$$

De esta relación se calcula el factor λ , determinándose así completamente el estado a que llega el plasma.

En la figura 2.2 se muestra el comportamiento de λ respecto a la razón de aspecto para diversos valores de $K_0 \Phi_{\text{BTOR}}^{-2}$ (indicados sobre cada curva), de acuerdo a (2.13). De la gráfica puede apreciarse que la λ tiene un comportamiento asintótico conforme a (el radio del cilindro) es cada vez más pequeño. Desarrollando (2.13) para un $K_0 \Phi_{\text{BTOR}}^{-2} = A$, dado y para valores de a pequeños

$$\begin{aligned} a (\lambda a/2) - (\lambda a)^3/16 \quad A - \lambda &= \\ &= 1 - (\lambda a/2)^2 \quad \lambda a \quad 1 - (\lambda a/2)^2 - 2 (\lambda a/2) - (\lambda a)^3/16; \end{aligned}$$

donde se ha empleado $1 = 1$ y las siguientes expresiones para las funciones de Bessel

$$J_0(x) = 1 - x^2/4; \quad J_1(x) = x/2 - x^3/16.$$

Trás un poco de álgebra y reteniendo únicamente los términos de

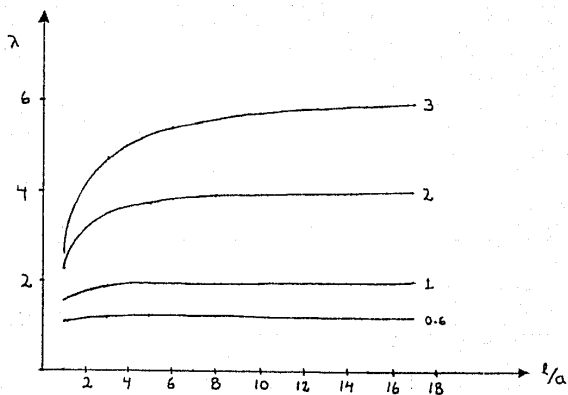


Fig. 2.2 Comportamiento de λ con la razón de aspecto.

La obtención de las raíces se llevó a cabo numéricamente. En este programa y en los que se usan más adelante se emplearon subrutinas, para el cálculo de las funciones de Bessel, del libro Numerical Recipes [Press-et al., 1986].

hasta orden a^3 se llega a

$$a(\lambda a/2)^2 (A - \lambda) + \lambda/2 = 0$$

de donde se obtiene el valor asintótico para la λ de $2A$.

El factor λ está también relacionado con θ (el parámetro de "pinch"). Usando la ley de Ampere se calcula el campo poloidal en la pared del cilindro

$$\oint \underline{B} \cdot d\underline{l} = \int_0^{2\pi} B_\phi |_{r=a} a d\phi = 2\pi a B_p = \mu_0 I.$$

El campo toroidal promedio se obtiene al dividir el flujo toroidal entre el área de la sección transversal $B_T = \Phi_{\text{BTOR}}/\pi a^2$; el parámetro θ resulta entonces $\theta = \mu_0 I a / (2\Phi_{\text{BTOR}})$.

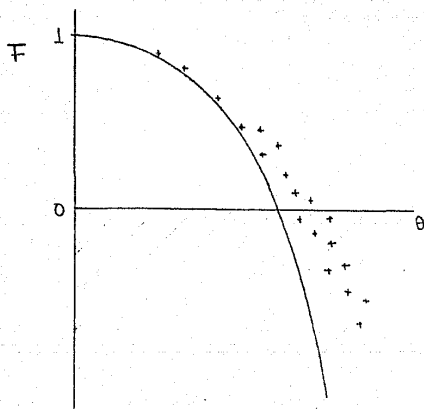
De la ecuación (2.2)

$$\lambda \Phi_{\text{BTOR}} = \lambda \int \underline{B} \cdot \hat{z} dA = \int \nabla \times \underline{B} \cdot \hat{z} dA = \int \underline{B} \cdot \hat{\phi} dl = \mu_0 I$$

de donde se tiene finalmente $\theta = \lambda a/2$.

Experimentalmente se observa que para $\theta \geq 1.4$ aparece la inversión del campo, que además coincide con la obtención de los estados de aparente calma Bodin-Newton, 1980. De las expresiones para \underline{B} , (2.9), se encuentra que para que B_z se invierta cerca de la pared del recipiente, es necesario que el producto λa sea mayor que la primera raíz de la función J_0 , es decir $\lambda a > 2.404\dots$, lo cuál corresponde a tener un valor de $\theta > 1.202\dots$.

En la figura siguiente (tomada de Bodin y Newton, 1980; correspondiente a la fig. 27) se aprecia como este modelo reproduce en buen grado el comportamiento experimental; aunque se encuentra cierta discrepancia (en especial, cerca de la frontera el modelo no reproduce bien los valores del campo magnético). Tal discrepancia parece deberse, en gran parte, a efectos de curvatura [Jain, 1988].



$$F = B_{r_{\text{PARED}}} / \bar{B}_r$$

$$\theta = B_{p_{\text{PARED}}} / \bar{B}_r$$

+ Puntos experimentales
de diversos aparatos
(ZETA, HBTX1, ALPHA)

▨ Región de operación del "pinch" de campo invertido

CAPITULO 3

Soluciones a la ecuación para el campo libre de fuerzas para diversas geometrías.

Suponiendo siempre la aplicabilidad de la hipótesis de Taylor, se resuelve la ecuación para el campo libre de fuerzas, empleando el método expuesto en el capítulo anterior, para los casos de geometrías cartesianas, cilíndrica y esférica.

I. Coordenadas cartesianas.

Supóngase que se tiene un plasma dentro de un contenedor como el de la figura 3.1. De acuerdo a la sección 2.II, para hallar los estados

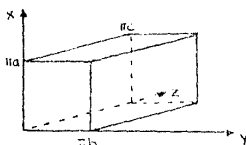


Fig. 3.1

de equilibrio del plasma, la ecuación a resolver es

$$\partial^2 \Psi / \partial x^2 + \partial^2 \Psi / \partial y^2 + \partial^2 \Psi / \partial z^2 = -\lambda^2 \Psi.$$

Resolviendo por separación de variables, $\Psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, se tienen

$$X(x) = A_1 \cos(k_x x) + A_2 \sin(k_x x), \quad (3.1)$$

$$Y(y) = B_1 \cos(k_y y) + B_2 \sin(k_y y), \quad (3.2)$$

$$Z(z) = C_1 \cos(k_z z) + C_2 \sin(k_z z), \quad (3.3)$$

donde $\lambda^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Las expresiones para el campo magnético, de (2.8), empleando $\hat{a} = z$, son

$$\begin{aligned} B_x &= \partial \Psi / \partial y + \lambda^{-1} \partial^2 \Psi / \partial x \partial z; & B_z &= \lambda^{-1} \partial^2 \Psi / \partial y \partial z - \partial \Psi / \partial x; \\ E_z &= \lambda^{-1} \lambda^2 \Psi + \partial^2 \Psi / \partial z^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Donde $\Psi = \sum_{xyz} D_{xyz} \Psi_{k_x, k_y, k_z}$; esto es, la Ψ será en general una suma de diversos modos, siempre y cuando tengan la misma λ .

Pueden suponerse un par de casos: que todas las paredes del contenedor sean conductoras, o bien que aquellas que lo delimitan en la dirección z no existan y se trate de una sección de un prisma más largo.

La condición a la frontera en el primer caso es $\underline{B} \cdot \underline{n} = 0$, con \underline{n} el vector normal exterior a las paredes, por tratarse de un recipiente conductor. Las condiciones para el segundo caso son: $\underline{B} \cdot \underline{n} = 0$ en las paredes conductoras y donde no hay tapas se pide periodicidad del campo magnético.

Debido a que se cuenta sólo con 2 datos adicionales (K y Φ_{BTOR}) no

es posible determinar de éstos y de las condiciones a la frontera, cuales modos intervienen (no hay manera de conocer las D). Una alternativa es aplicar las condiciones a la frontera para cada modo por separado y tomar los que tengan una misma λ .

En los casos descritos anteriormente, la aplicación de las condiciones a la frontera imponen restricciones que no permiten obtener una solución distinta de $B = 0$. Esto puede verse al calcular B_x y evaluarlo en $x = 0$ teniéndose

$$A_1 Z(z) d Y(y) / dy + (k_x / \lambda) A_2 Y(y) d Z(z) / dz = 0 ,$$

y como debe anularse para cualquier y y z , $A_1 = A_2 = 0$, lo que conduce a $B = 0$ para ambos casos.

Podría pensarse que si se aplicaran las condiciones a la frontera a $\Psi = \sum D_{xyz} \Psi_{k_x, k_y, k_z}$, quizá fuera posible encontrar una solución distinta de $B = 0$, pero aún en este caso, dado que los modos involucran funciones seno y coseno de distintas frecuencias (distintas k) no es posible obtener $B_x(x=0) = 0$ para cualesquiera y, z si no es haciendo las D idénticamente cero.

Para tener una solución no trivial basta con suponer que la función Ψ no depende de la variable z (o de cualquiera de las otras), es decir $\Psi = \Psi(x, y)$; aunque tal suposición sólo permite tratar el segundo de los anteriores casos. La ecuación inicial se reduce a

$$\partial^2 \Psi / \partial x^2 + \partial^2 \Psi / \partial y^2 = -\lambda^2 \Psi ; \quad (3.5)$$

resolviendo, nuevamente, por separación de variables,

$\Psi(x, y) = X(x)Y(y)$, se obtienen las soluciones (3.1 y 3.2), y donde ahora $\lambda^2 = k_x^2 + k_y^2$. Las expresiones para el campo magnético se simplifican, resultando

$$B_x = \partial \Psi / \partial y ; \quad B_y = - \partial \Psi / \partial x ; \quad B_z = \lambda \Psi . \quad (3.6)$$

Al aplicar las condiciones a la frontera, la expresión para Ψ queda

$$\Psi_{m, n} = A_{m, n} \text{sen}(mx/a) \text{sen}(ny/b) , \quad (3.7)$$

con m y n enteros; y las correspondientes para los modos del campo magnético son

$$\begin{aligned} (B_{m, n})_x &= (n/b) A_{m, n} \text{sen}(mx/a) \cos(ny/b) , \\ (B_{m, n})_y &= (-m/a) A_{m, n} \cos(mx/a) \text{sen}(ny/b) , \\ (B_{m, n})_z &= [(m/a)^2 + (n/b)^2]^{1/2} A_{m, n} \text{sen}(mx/a) \cos(ny/b) . \end{aligned} \quad (3.8)$$

El campo magnético puede, en general, ser una combinación de

varios modos, siempre y cuando todos ellos compartan la misma λ . Un ejemplo sencillo donde se puede apreciar esto es en el caso en que la sección es cuadrada. En tal situación el campo magnético es

$$\vec{B} = \vec{B}_{m,n} + \vec{B}_{n,m}; \quad (3,9)$$

ya que $\lambda_{m,n} = a(m^2 + n^2)^{1/2} = \lambda_{n,m}$ [Horiuchi-Sato, 1986].

II. Coordenadas esféricas.

El estudio de las soluciones a la ecuación (2.2) para situaciones con geometría esférica, se llevó a cabo inicialmente en el ámbito de la astronomía, donde el campo magnético libre de fuerzas resulta el modelo apropiado para el tipo de campos magnéticos cósmicos más usuales y en particular para el campo en la cercanía de una estrella (donde la conductividad del medio que la rodea es muy alta y la energía magnética predomina sobre cualquiera otra) [Lüst-Schlüter, 1954; Woltjer, 1958]. Estas soluciones se pueden emplear en el estudio de los estados de equilibrio de un aparato usado en fusión nuclear conocido como esferomak [Rosenbluth-Bussac, 1979].

Partiendo nuevamente de la ecuación escalar de Helmholtz

$$r^{-2} \partial(r^2 \partial \Psi / \partial r) / \partial r + (r \operatorname{sen} \theta)^{-2} \partial(\operatorname{sen} \theta \partial \Psi / \partial \theta) / \partial \theta + (r \operatorname{sen} \theta)^{-2} \partial^2 \Psi / \partial \phi^2 + \lambda^2 \Psi = 0; \quad (3.10)$$

cuyas soluciones axisimétricas son [Chandrasekhar-Kendall, 1956]

$$\Psi_n^m = Z_n(\lambda r) P_n^m(\cos \theta) \exp(im\phi); \quad (3.11)$$

donde Z_n son las funciones esféricas de Bessel

$$Z_n(x) = (\pi/2x)^{1/2} J_{n+1/2}(x),$$

y $P_n^m(\cos \theta)$, la función adjunta de Legendre de orden n .

Las expresiones para el campo magnético, empleando $\hat{a} = r$, resultan

$$\vec{B}_m = \sum_{n=m}^{\infty} b_n^m \exp(im\phi) \left[\left\{ n(n+1) P_n^m(\cos \theta) Z_n(\lambda r) / \lambda r \right\} \hat{r} + \left\{ (im/\operatorname{sen} \theta) P_n^m(\cos \theta) * \right. \right. \\ \left. \left. * Z_n(\lambda r) + (\lambda r)^{-1} d[r^2 Z_n(\lambda r)] / dr \partial(P_n^m[\cos \theta]) / \partial \theta \right\} \hat{\theta} + \right. \\ \left. + \left\{ [im/(\lambda r \operatorname{sen} \theta)] P_n^m(\cos \theta) d[r Z_n(\lambda r)] / dr - \right. \right. \\ \left. \left. - Z_n(\lambda r) \partial(P_n^m \cos \theta) / \partial \theta \right\} \hat{\phi} \right] \quad (3.12)$$

Para un esferomak no se puede permitir la solución $n = 0, m = 0$; ya que significaría tener un monopolo en el origen. El caso que se considera como el de equilibrio clásico [Rosenbluth-Bussac, 1975], es el de $m = 0, n = 1$; donde además se emplea $b_1^0 = 1$ y todas las otras

idénticas a cero, permitiendo ésto el escribir el campo magnético como $B_0 = \lambda^{-1} \nabla(-r \operatorname{sen} \theta Z_1(\lambda r) P_1^1[\cos \theta]) \times \nabla \phi - \dot{r} \operatorname{sen} \theta Z_1(\lambda r) P_1^1(\cos \theta)$. (3.13)

III. Coordenadas cilíndricas.

Se resuelve ahora la ecuación para el campo libre de fuerzas en coordenadas cilíndricas.

Volviendo al problema del toro de razón de aspecto grande (ver sección 2.III); se considera un plasma en un contenedor como el de la figura 2.1, la ecuación escalar de Helmholtz queda expresada como

$$r^{-1} \partial(r \partial \Psi / \partial r) / \partial r + r^{-2} \partial^2 \Psi / \partial \phi^2 + \partial^2 \Psi / \partial z^2 + \lambda^2 \Psi = 0. \quad (3.14)$$

Resolviendo por separación de variables, $\Psi(r, \phi, z) = R(r) \Phi(\phi) Z(z)$, se obtienen para las partes angular y axial

$$\Phi_m(\phi) = A_m \cos(m\phi + \xi_m), \quad (3.15)$$

$$Z_k(z) = B_k \cos(kz + \theta_k), \quad (3.16)$$

donde k y m son las constantes de separación.

Para la parte radial se tiene

$$r^{-1} d(r \, dR/dr) / dr + [(\lambda^2 - k^2) - (m/r)^2] R = 0, \quad (3.17)$$

la cuál tiene como soluciones $J_m(\alpha r)$, funciones de Bessel regulares de orden m ; donde $\alpha^2 = \lambda^2 - k^2$ (nuevamente, sólo se consideran las soluciones regulares porque las otras son infinitas en el origen).

A partir de estas soluciones y después de un poco de álgebra, la expresión más general para la $\Psi_{m,k}$ es

$$\Psi_{m,k} = T_{m,k} J_m(\alpha r) \cos(kz + m\phi + \eta_{m,k}) + \cos(kz - m\phi + \zeta_{m,k}) \quad (3.18)$$

Los modos del campo, empleando $\hat{a} = z$, quedan expresados, en términos de $\Psi_{m,k}$

$$\begin{aligned} B_{m,k} = & \hat{r} \{ r^{-1} \partial(\Psi_{m,k}) / \partial \phi + \lambda^{-1} \partial^2(\Psi_{m,k}) / \partial z \partial r \} + \\ & + \hat{\phi} \{ (\lambda r)^{-1} \partial^2(\Psi_{m,k}) / \partial z \partial \phi - \partial(\Psi_{m,k}) / \partial r \} + \\ & + \hat{z} \{ \lambda^{-1} \partial^2(\Psi_{m,k}) / \partial z^2 + \lambda^2 \Psi_{m,k} \}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Las condiciones a la frontera que deberán cumplir son $\underline{B} \cdot \underline{n} = 0$ en el cuerpo del cilindro, y para imitar un toroide, $\underline{B}(z=-\pi l) = \underline{B}(z=\pi l)$. Como datos adicionales habrán de conocerse Φ_{BTOR} y K_0 . Al aplicar la

condición a los extremos, la ecuación (3.18) se reduce a

$$\Psi_{m,k} = T_{m,k}^* J_m(\alpha r) \{ \cos(kz) \cos(m\phi + \eta_{m,k}) \}, \quad (3.20)$$

y las expresiones para el campo magnético

$$\begin{aligned} (\underline{B}_{m,k})_r &= (-m/r) T_{m,k}^* J_m(\alpha r) [\cos(kz) \sin(m\phi + \eta_{m,k})] - \\ &\quad - (\alpha k/\lambda) T_{m,k}^* J_m(\alpha r) [\sin(kz) \cos(m\phi + \zeta_{m,k})], \\ (\underline{B}_{m,k})_\phi &= (mk/\lambda r) T_{m,k}^* J_m(\alpha r) [\sin(kz) \sin(m\phi + \eta_{m,k})] - \\ &\quad - \alpha T_{m,k}^* J_m(\alpha r) [\cos(kz) \cos(m\phi + \eta_{m,k})], \\ (\underline{B}_{m,k})_z &= (\alpha^2/\lambda) T_{m,k}^* J_m(\alpha r) [\cos(kz) \cos(m\phi + \eta_{m,k})]; \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde $k = n/l$, con n entero.

El modo con m, k iguales a cero, es la solución encontrada en la sección 2.III.

En general, el campo magnético de la situación de equilibrio puede ser una combinación de diversos modos, es decir $\underline{B} = \sum_{m,k} \underline{B}_{m,k}$, siempre que los $\underline{B}_{m,k}$ compartan el mismo valor propio λ . En cualquier combinación que resulte, el modo más bajo puede incluirse siempre (ya que cumple la condición a la frontera para cualquier λ).

Surge entonces el problema de determinar cuáles modos son los que intervienen y la especificación de sus coeficientes. Para ello sólo se cuenta con la condición a la frontera y los valores de K_0 y el flujo toroidal. Sólo esto, no es suficiente para determinar adecuadamente el problema. Una alternativa es el aplicar la condición a la frontera a cada uno de los modos, tomando luego aquellos compatibles con la misma λ [Taylor, 1974].

La aplicación de la condición a la frontera, como en el caso de las coordenadas cartesianas, no permite obtener una solución diferente de $\underline{B}_{m,k} = 0$ (con m y k diferentes de cero) - como ya se vió antes los distintos modos no se pueden hacer interferir destructivamente, por tener las soluciones senos y cosenos de distintas frecuencias y funciones de Bessel de distinto orden-. Nuevamente se recurre a la eliminación de la dependencia de alguna de las variables asociadas a m y k , teniéndose dos casos: independencia de z (simetría traslacional) o independencia de ϕ (axisimetría).

Las expresiones de la función de flujo y del campo magnético, se pueden obtener, para el primer caso, haciendo $k = 0$ en las ecuaciones

(3.20;3.21), mientras para las otras se obtienen haciendo $m = 0$.

El modo más bajo para ambas soluciones (que es la solución vista en la sección 2.III) satisface la condición a la frontera para cualquier valor de λ , mientras los otros sólo lo hacen para un cierto conjunto discreto de valores; éstos se obtienen de la parte radial únicamente y están relacionados con las raíces de las funciones de Bessel.

Como se desea tener el estado de energía más baja compatible con las condiciones adicionales, habrá de usarse entonces la λ más pequeña de entre las disponibles. Siguiendo este criterio, el modo que proporcionaría la menor de las λ sería el de $k = 1/l$; $\lambda = (\mu_1/a)^2 + 1/l^2$, donde μ_1 es la primera raíz de J_0 (ya que la menor de las λ , de los modos con $k = 0$ es $\lambda = \beta_1/a$, con β_1 la primera raíz distinta de cero de J_1).

La función de flujo usando $k = 1/l$ resulta $\Psi_{0,1} = BJ_0(\alpha r) \cos(z/l)$, y agregando la del modo más bajo

$$\Psi = A J_0(\lambda r) + B J_0(\alpha r) \cos(z/l) . \quad (3.22)$$

Pero ahora bien, si se sigue el procedimiento empleado en la última parte del capítulo 2 para la determinación de las constantes A y B en (3.22), se hallará que no es posible hacerlo, debido principalmente a que se obtiene ϕ_{BTOR} en función de z . Tomando cualquier modo que involucre a z se tiene el mismo problema. Descártanse así estas soluciones. Intentando con los modos asociados a ϕ resulta que la solución formada por el modo más bajo y el $m = 1$ es una solución a un problema sin flujo magnético toroidal. La siguiente combinación, empleando $m = 2$, da un valor de $\lambda a = 5.14$, el que corresponde a un parámetro de "pinch" $\theta = 2.57$. Los valores experimentales de θ , en el "pinch" de campo, para los que se han obtenido estados de aparente calma están entre 1.4 y 2.9 Bodin-Newton, 1980. Con los modos asociados a ϕ no se obtienen estados con valores propios que cubran el rango experimental, no siendo adecuada una descripción en base a ellos.

III bis. Modos helicoidales.

Como Cowling hace notar, la ecuación 2.2 implica que si uno viaja a lo largo de una línea de campo magnético, las líneas vecinas se enredan una cierta cantidad alrededor de ella, con lo que un campo libre de fuerzas es esencialmente un campo helicoidal [Cowling, 1976]. Intentando obtener soluciones de este tipo, se efectúa el siguiente cambio de variables: $\xi = uz + v\phi$ y $\eta = uz - v\phi$. Haciendo la substitución, la ecuación adquiere la forma

$$r^{-1} \partial(r \partial \Psi / \partial r) / \partial r + (v^2 / r^2) [\partial^2 \Psi / \partial \xi^2 - 2 \partial^2 \Psi / \partial \xi \partial \eta + \partial^2 \Psi / \partial \eta^2] + u^2 [\partial^2 \Psi / \partial \xi^2 + 2 \partial^2 \Psi / \partial \xi \partial \eta + \partial^2 \Psi / \partial \eta^2] + \lambda^2 \Psi = 0. \quad (3.24)$$

De entrada, la forma es más complicada que la de la ecuación original; pero si se supone que la solución consiste únicamente de modos derechos (independientes de η) o izquierdos (independientes de ξ) pueden obtenerse soluciones (por separación de variables) de la forma

$$\Psi_s = A_s \cos(s\xi) + B_s \sin(s\xi) J_{s,v}(ar), \quad (3.25d)$$

para las soluciones derechas y

$$\Psi_s = C_s \cos(s\eta) + B_s \sin(s\eta) J_{s,v}(ar), \quad (3.25i)$$

para las soluciones izquierdas; donde s es la constante de separación y $a^2 = \lambda^2 - s^2 u^2$. Las denominaciones "derecha" e "izquierda", corresponden a pensar que para un valor determinado de ξ o η , al avanzar a lo largo de z , la ϕ habrá de "moverse" a la derecha o izquierda para mantener ese valor constante.

Las expresiones (3.25d; 3.25i), en términos de z y ϕ , resultan

$$\Psi_{m,k} = A_{m,k} \cos(kz + m\phi) + B_{m,k} \sin(kz + m\phi) J_{m,k}(ar), \quad (3.26d)$$

$$\Psi_{m,k} = C_{m,k} \cos(kz - m\phi) + D_{m,k} \sin(kz - m\phi) J_{m,k}(ar), \quad (3.26i)$$

donde se han definido $k = su$ y $m = sv$. Sustituyendo las expresiones (3.26) en la ecuación (3.14), se encuentra que también la satisfacen. Los modos del campo magnético, empleando $\hat{a} = \underline{z}$, están dados por (3.19). Las condiciones a la frontera y en los extremos, así como los datos adicionales siguen siendo los mismos.

De aplicar la condición a los extremos, se obtiene (para ambas soluciones) $k = n/l$, con n entero.

El modo independiente de z y ϕ , es nuevamente la solución de la sección 2.III.

Como antes, el campo magnético de la situación de equilibrio puede ser una combinación de diversos modos que compartan la misma λ . El modo

más bajo deberá incluirse en cualquier combinación, ya que es el único que contribuye al flujo toroidal (si m es distinta de cero). Una vez más, aparece el problema de determinar cuáles modos contribuyen y en que proporción lo hacen. Recurriendo a la alternativa de aplicar la condición a la frontera a cada uno de los modos y tomar los compatibles con la misma λ (cuidando, además, de utilizar la menor de ellas), no será suficiente, ya que se tendrán soluciones de la forma $\Psi = A \Psi_{0,0} + B \Psi_{m,k}$, donde la $\Psi_{m,k}$ tiene 2 constantes por determinar que más la de $\Psi_{0,0}$, dan 3, y se cuenta sólo con 2 datos adicionales (Φ_{BTOR} y K_0). El problema se puede sortear, ya que la parte dependiente de ϕ y z en $\Psi_{m,k}$, se puede expresar en la forma $B_{m,k} \cos(kz + m\phi + \xi)$, pudiéndose escoger el sistema de coordenadas de tal manera que la fase, ξ , sea cero o bien $\pi/2$, y utilizar el $\sin(kz + m\phi)$.

De la aplicación de la condición a la frontera ($B \cdot r = 0$), se obtienen 2 ecuaciones (que vienen únicamente de la parte radial), de donde se habrán de determinar los valores propios λ ,

$$\lambda m J_m(\alpha a) + k \alpha a J'_m(\alpha a) = 0, \quad (3.27d)$$

$$\lambda m J_m(\alpha a) - k \alpha a J'_m(\alpha a) = 0; \quad (3.27i)$$

teniendo en cuenta que a (el radio del cilindro) es dado, $k = n/l$ con n entero y m también.

En las tablas 1 y 2 se presentan valores calculados para la λ . En la primera se analiza el comportamiento al variar la k (para un radio fijo) de los modos $m = 1$ y $m = 2$, tanto derechos como izquierdos. En la segunda se muestra el comportamiento para diversos radios, con k fijo, de los mismos modos m . Se excluyeron los modos con m igual a cero (que son como los estudiados en la sección III) por presentar el problema de la dependencia del flujo toroidal de la variable z (lo que no permite determinar las constantes para los modos); y el $m = 1, k = 0$ por tratarse del caso en que $\Phi_{\text{BTOR}} = 0$.

Como puede comprobarse fácilmente, los valores de λa cubren, a diferencia de los modos únicamente dependientes de ϕ , el rango de valores experimentales.

En la figura 3.2, se puede observar el comportamiento de λ respecto de k , para diversos radios, del modo $m = 1$ derecho.

Con los resultados presentados anteriormente, se puede concluir que el modo que proporciona las λ menores es el $m = 1$ de las soluciones

Tabla 1.Radio: $a = 0.2 \text{ l}^*$

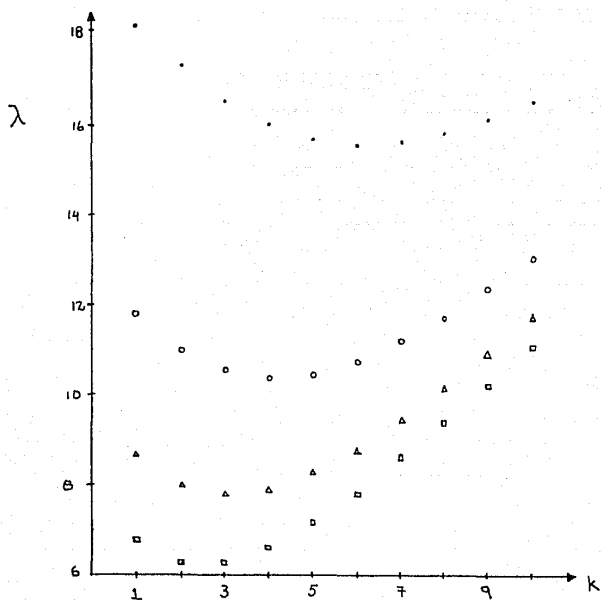
k	m = 1,d	m = 1,1	m = 2,d	m = 2,1
1	18.173	20.146	25.195	26.191
2	17.273	21.074	24.753	26.721
3	16.535	21.912	24.367	27.261
4	16.002	22.662	24.045	27.802
5	15.684	23.338	23.799	28.342
6	15.564	23.958	23.632	28.879

Tabla 2.Para $k = 1$

a/l^*	m = 1,d	m = 1,1	m = 2,d	m = 2,1
0.1	37.321	39.314	50.864	51.963
0.2	18.173	20.146	25.195	26.191
0.3	11.805	13.747	16.645	17.636
0.4	8.637	10.537	12.337	13.361
0.5	6.752	8.602	9.821	10.769
0.6	5.512	7.304	8.122	9.087
0.7	4.641	6.371	6.913	7.866

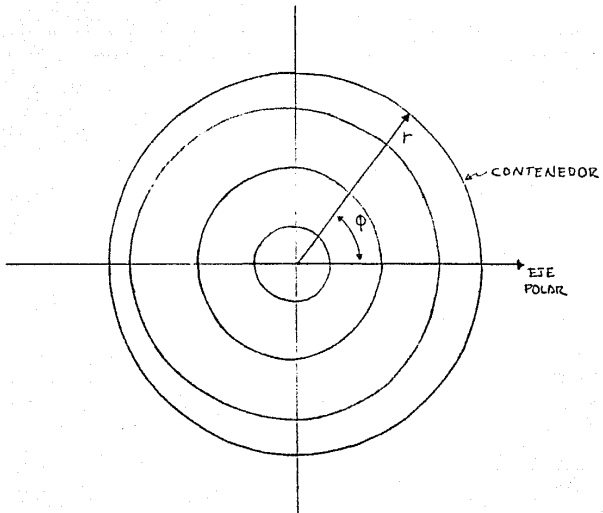
* para los cálculos se usó $l = 1$

Fig 3.2



Comportamiento de λ respecto de k , para el modo $m=1$ derecho.

• $a=0.2$ ○ $a=0.3$ △ $a=0.4$ □ $a=0.5$



Contornos de $\psi = \text{cte}$ para el plano

$$k = 0 .$$

CAPITULO 4

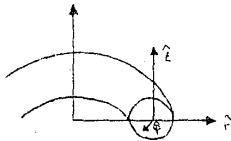
El toroide axisimétrico.

Se obtiene la ecuación para un plasma en equilibrio con geometría toroidal axisimétrica y se resuelve para situaciones específicas.

En la aproximación MHD, un plasma en estado estacionario debe cumplir la siguiente ecuación de equilibrio

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} . \quad (4.1)$$

La ecuación de Grad-Shafranov es una ecuación reducida de equilibrio para un toroide axisimétrico. Para derivarla [Bateman, 1978], considérese un sistema de coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) , cuyo eje coincide con la línea central de un toroide. El ángulo ϕ es una coordenada ignorable. De esto último se sigue que el campo magnético poloidal puede escribirse sólo en términos de la componente toroidal del potencial vectorial magnético. La expresión para el campo completo es



$\mathbf{v}_p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \nabla \times (A_\phi \hat{\phi}) + B_\phi \hat{\phi} . \quad (4.2)$$

Se acostumbra utilizar una función de flujo Ψ , que además de servir para caracterizar a las superficies magnéticas (superficies de $\Psi = \text{cte.}$), permite escribir el campo magnético en función de ella. Pcr ser Ψ una cantidad de superficie, cumple $\mathbf{B} \cdot \nabla \Psi = 0$. Desarrollando ésta y la condición sobre la divergencia de \mathbf{B} ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$), se tiene

$$B_r \partial \Psi / \partial r + B_z \partial \Psi / \partial z = 0 , \quad (4.3a)$$

$$r^{-1} \partial (r B_r) / \partial r + \partial B_z / \partial z = 0 , \quad (4.3b)$$

de (4.3b) se obtiene: $\partial (r B_r) / \partial r = - \partial (r B_z) / \partial z$.

Pidiendo que $r B_r = - \partial \Psi / \partial z$ y $r B_z = \partial \Psi / \partial r$, se satisface (4.3a).

Así el campo magnético puede reescribirse como

$$\mathbf{B} = \nabla \Psi \times \nabla \phi + B_\phi \hat{\phi} = \hat{r}^{-1} \partial \Psi / \partial z \hat{r} - \hat{r}^{-1} \partial \Psi / \partial r \hat{z} + B_\phi \hat{\phi} ; \quad (4.4)$$

donde se ha usado el hecho de que $\nabla \phi = \hat{\phi} / r$.

De la ley de Faraday se obtiene una expresión para la densidad de corriente

$$\mu \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} = - \hat{\phi} / r [r \partial (r^{-1} \partial \Psi / \partial r) / \partial r + \partial^2 \Psi / \partial z^2] - \hat{z} \partial B_\phi / \partial z + \hat{z} / r \partial (r B_\phi) / \partial r . \quad (4.5)$$

Llamando $\Delta^* \Psi$ a la expresión en el paréntesis cuadrado, y reescribiendo

los 2 últimos términos como $\nabla(rB_\phi) \times \nabla\phi$, se puede reducir (4.5) a

$$\mu \underline{J} = -\nabla\phi \Delta^* \Psi + \nabla(rB_\phi) \times \nabla\phi ; \quad (4.6)$$

con lo cual se obtiene una expresión para (4.1) similar a la ecuación (4.3)

$$\begin{aligned} \nabla p &= \underline{J} \times \underline{B} = \mu^{-1} [-\Delta^* \Psi \nabla\phi + \nabla(rB_\phi) \times \nabla\phi] \times [\nabla\Psi \times \nabla\phi + rB_\phi \nabla\phi] \\ &= \mu^{-1} \{-\Delta^* \Psi \nabla\Psi |\nabla\phi|^2 - \nabla(rB_\phi) |\nabla\phi|^2 rB_\phi + \nabla\phi [\nabla(rB_\phi) \cdot \nabla\phi] (rB_\phi)\} ; \end{aligned}$$

como $\nabla p \cdot \underline{B} = 0$, p es una cantidad de superficie, es decir $p = p(\Psi)$ y así, reescribiendo la expresión anterior

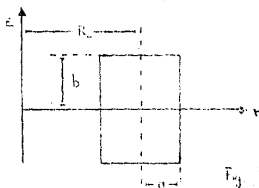
$$\mu dp/d\Psi \nabla\Psi = -\Delta^* \Psi r^{-2} \nabla\Psi - \nabla(rB_\phi) r^{-2} (rB_\phi) + \nabla\phi [\nabla(rB_\phi) \cdot \nabla\phi] (rB_\phi) .$$

El coeficiente de $\nabla\phi$ debe anularse, por axisimetría; y entonces $\nabla(rB_\phi)$ debe ser proporcional a $\nabla\Psi$, es decir rB_ϕ es cantidad de superficie, $rB_\phi = g(\Psi)$. Se llega así a la ecuación de Grad-Shafranov

$$\mu r^2 dp/d\Psi + g dg/d\Psi = -\Delta^* \Psi . \quad (4.7)$$

a) Toroide de sección rectangular.

Considérese un toroide de sección rectangular como el de la figura 4.2. Se supondrá que las paredes son conductoras, que se cumple con las condiciones que pide la suposición de Taylor, y que además hay



axisimetría. De la axisimetría y de la ecuación (2.2) se tiene

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{B} &= -\nabla\phi \Delta^* \Psi + dg/d\Psi \nabla\Psi \times \nabla\phi = \lambda \underline{B} = \\ &= \lambda (\nabla\Psi \times \nabla\phi + g \nabla\phi) ; \end{aligned}$$

igualando las componentes

$$dg/d\Psi = \lambda , \quad (4.8)$$

$$-\Delta^* \Psi = \lambda g . \quad (4.9)$$

Resolviendo (4.8)¹ y sustituyendo en (4.9) se llega a

$$\Delta^* \Psi = -\lambda^2 \Psi , \quad (4.10)$$

la cuál puede resolverse por separación de variables. Comparando con (4.7) se da uno cuenta de que para el caso en el cual se desprecia el gradiente de presión y la función g es lineal en Ψ , se tiene como solución un campo libre de fuerzas. Haciendo $\Psi = R(r)Z(z)$, sustituyendo en (4.10) y dividiendo entre Ψ , se tiene

$$r/R d(r^{-1}dR/dr)/dr + Z^{-1}d^2Z/dz^2 + \lambda^2 = 0 . \quad (4.11)$$

La solución de la parte dependiente de z es

$$Z = A \cos(mz) + B \operatorname{sen}(mz) ; \quad (4.12)$$

¹Se ha supuesto que la constante de integración es cero.

donde m es la constante de separación.

Para la solución de la parte radial se hace $R = rP$, con lo cual, al sustituir en la ecuación correspondiente se tiene una ecuación de Bessel de 1^{er} orden para P , cuyas soluciones son

$$P = C J_1(\alpha r) + D Y_1(\alpha r) ; \quad (4.13)$$

donde $\alpha^2 = \lambda^2 - m^2$. La expresión final para la Ψ es

$$\Psi = r A \cos(mz) + B \operatorname{sen}(mz) C J_1(\alpha r) + D Y_1(\alpha r) ; \quad (4.14)$$

y empleando (4.4) se obtiene

$$\begin{aligned} B = & \frac{1}{r} m [C J_1(\alpha r) + D Y_1(\alpha r)] [B \cos(mz) - A \operatorname{sen}(mz)] + \\ & + \frac{1}{r} \lambda [C J_1(\alpha r) + D Y_1(\alpha r)] [A \cos(mz) + B \operatorname{sen}(mz)] - \\ & - \frac{1}{2} r^{-1} [A \cos(mz) + B \operatorname{sen}(mz)] \{ \alpha C J_1'(\alpha r) + \alpha D Y_1'(\alpha r) \} r + \\ & + C J_1(\alpha r) + D Y_1(\alpha r) \} . \end{aligned} \quad (4.15)$$

De la condición a la frontera $B_z|_{z=b} = 0$ se tienen 2 relaciones: $A \cos(mb) - B \operatorname{sen}(mb) = 0$, y $A \cos(mb) + B \operatorname{sen}(mb) = 0$; lo que da lugar a 2 condiciones $2A \cos(mb) = 0$, y $2B \operatorname{sen}(mb) = 0$.

De la 1^{ra} de estas expresiones $A = 0$ o $mb = (2n + 1)\pi/2$, y de la otra $B = 0$ o $mb = n\pi$. Se tienen así 2 tipos de soluciones, las asociadas con $A = 0$ y $mb = n\pi$ (a las que se llamará enteras), y las que tienen que ver con $B = 0$ y $mb = (2n + 1)\pi/2$ (a las que corresponderá la denominación de semienteras).

De la condición correspondiente a $B_r|_{R_1, R_2} = 0$, ($R_1 = R_0 - a$; $R_2 = R_0 + a$) se obtiene

$$J_1(\alpha R_1) Y_1(\alpha R_2) - J_1(\alpha R_2) Y_1(\alpha R_1) = 0 , \quad (4.16)$$

de la cual se determinan las α (y por consiguiente las λ). En la figura 4.3 se muestra el comportamiento de la α respecto al cociente a/R_0 .

La expresión de la Ψ para las soluciones enteras resulta

$$\Psi_n = D' r \operatorname{sen}(n\pi z/b) [Y_1(\alpha r) - J_1(\alpha r) * Y_1(\alpha R_2) / J_1(\alpha R_2)] , \quad (4.17)$$

y la correspondiente a las soluciones semienteras

$$\Psi_n = D' r \cos([2n+1]\pi z/2b) [Y_1(\alpha r) - J_1(\alpha r) * Y_1(\alpha R_2) / J_1(\alpha R_2)] ; \quad (4.18)$$

donde D' habrá de calcularse de alguna condición extra (pudiendo ser ésta el valor del flujo toroidal o poloidal).

En la figura 4.4 se muestran los contornos de las superficies de $\Psi = \text{cte.}$ al intersectar con el plano de la sección transversal, tanto para las soluciones enteras como las semienteras.

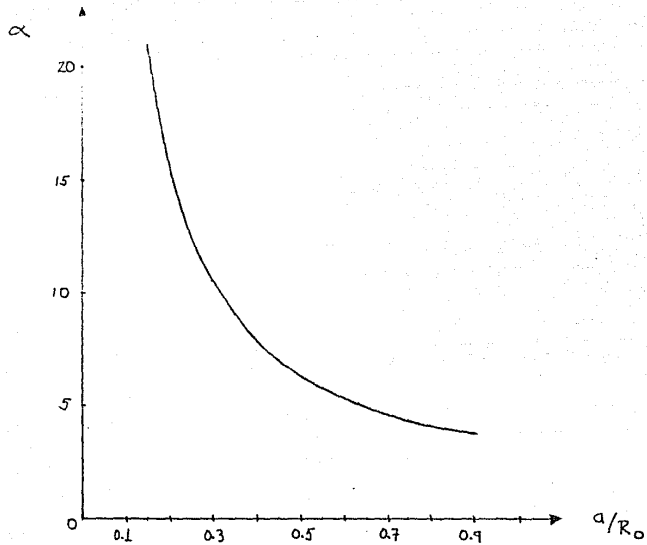


Fig. 4.3 Comportamiento de α respecto al cociente a/R_0 .

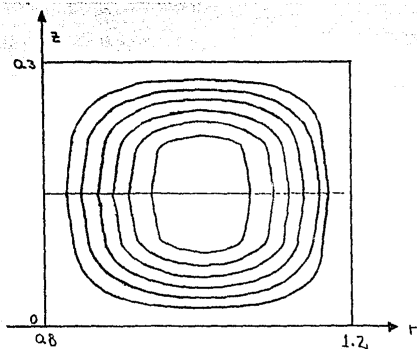
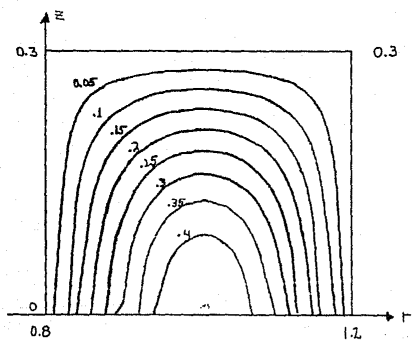
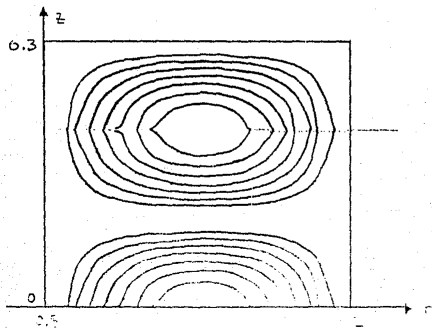


Fig. 4.4

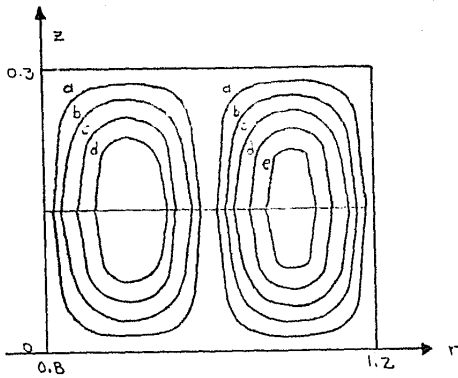
1^a solución entera
para la primera
raíz; $\alpha_1, n=1$.



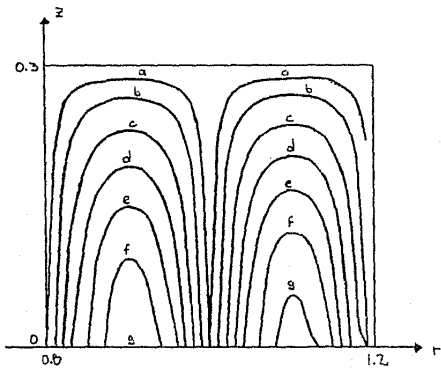
1^a solución semientera
para la primera
raíz; $\alpha_1, n=0$.



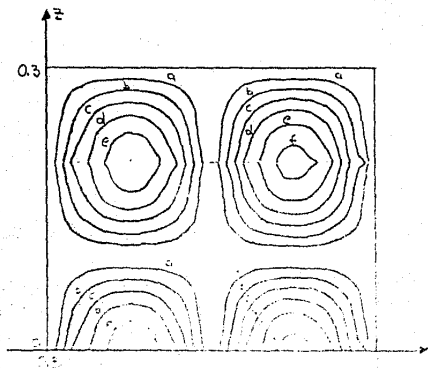
2^a solución semientera
para la primera
raíz; $\alpha_1, n=1$



1^a solución entera
para la segunda
raíz; $\alpha_2, n=1$



1^a solución semientera
para la segunda
raíz; $\alpha_2, n=0$

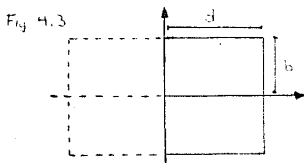


2^a solución semientera
para la segunda
raíz; $\alpha_2, n=1$

Para el caso en que a adquiera el valor R_0 se tendría algo así como un "toroide sin agujero", es decir, se tendría un recipiente (como una lata de atún) donde el plasma en su interior mantuviera una configuración toroidal axisimétrica (esta situación sería similar a la que se presenta en un esferomak). La solución a tal situación (representada en la fig.3) se obtiene de forma idéntica a la anterior con la salvedad de que las soluciones de la parte radial resultan

$$P = C J_1(\alpha r) , \quad (4.19)$$

ya que se requiere que la solución sea regular en $r = 0$. Las expresiones para Ψ y B se pueden obtener de (4.14) y (4.15) haciendo $D = 0$.



La condición a la frontera $B_r(r=d) = 0$, determina el valor de α .

Para que exista la configuración toroidal axisimétrica se requiere que en $r = 0$, $B_r = 0$, cumpliéndose adecuadamente debido a la forma de la solución.

Las condiciones a la frontera relacionadas con z dan, nuevamente, lugar a soluciones del tipo entero y semientero. Para las soluciones enteras se tiene

$$\Psi_n = C' r \operatorname{sen}(n\pi z/b) J_1(\alpha r) , \quad (4.20)$$

$$B_n = \hat{r} \{ (n\pi/b) C' J_1(\alpha r) \cos(n\pi z/b) \} + \hat{\phi} \{ \lambda C' J_1(\alpha r) \operatorname{sen}(n\pi z/b) \} + \hat{z} \{ (-\alpha/r) C' \operatorname{sen}(n\pi z/b) J_0(\alpha r) \} ; \quad (4.21)$$

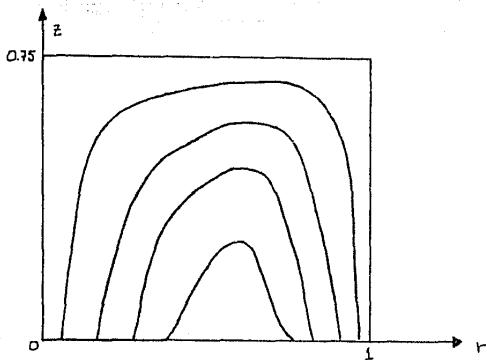
y las correspondientes expresiones para las semienteras

$$\Psi_n = C' r \cos(2n+1 \pi z/2b) J_1(\alpha r) , \quad (4.22)$$

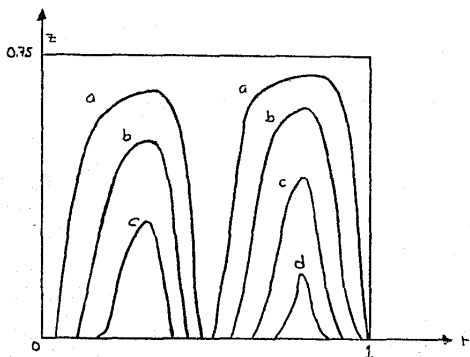
$$B_n = \hat{r} \{ (-2n+1 \pi/2b) C' J_1(\alpha r) \operatorname{sen}(2n+1 \pi z/2b) \} + \hat{\phi} \{ \lambda C' J_1(\alpha r) \cos(2n+1 \pi z/2b) \} + \hat{z} \{ (-\alpha/r) C' \cos(2n+1 \pi z/2b) J_0(\alpha r) \} . \quad (4.23)$$

La constante C' deberá, nuevamente, calcularse con alguna condición auxiliar.

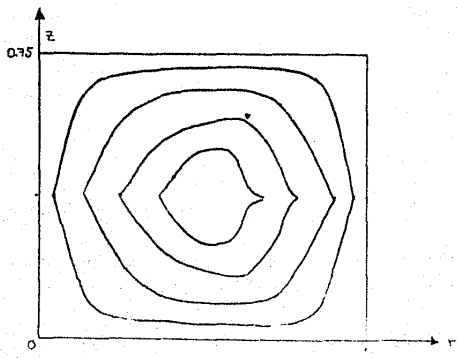
A continuación se muestran contornos de las superficies $\Psi = \text{cte.}$ en la intersección con el plano de la sección transversal.



1^a solución semientera
para la primera
raíz, α_1



1^a solución semientera
para la segunda
raíz, α_2



1^a solución entera
para la primera
raíz, α_1

C A P I T U L O 5

El campo libre de fuerzas con valor propio dependiente de la posición.

La reducción de las ecuaciones MHD para el caso de equilibrio estático en que además puede despreciarse el gradiente de presiones, da lugar a una configuración de campo magnético libre de fuerzas. Se estudia la solución para el valor propio dependiente de la posición.

Supóngase que se tiene un plasma en la aproximación MHD y que se quieren estudiar los estados de equilibrio estático, es decir, en las ecuaciones MHD, escritas de manera usual, las derivadas temporales y v , la velocidad del fluido, se hacen cero; con lo cual la ecuación (2.18) se reduce a

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nu \mathbf{p} . \quad (5.1)$$

Si se hace una simplificación más despreciando el gradiente de presiones (lo cual está bien para plasmas muy diluidos) se tiene que la configuración del campo magnético de equilibrio es del tipo libre de fuerzas, esto es

$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B} . \quad (5.2)$$

A diferencia de los casos en que se obtiene la ecuación del campo libre de fuerzas bajo la hipótesis de Taylor, la α es en general una función escalar de la posición (se ha cambiado intencionalmente la notación para resaltar el hecho de que α -que corresponde a la λ empleada anteriormente- no es una constante). Calculando la divergencia de (5.2) y usando (2.4) se llega a la siguiente relación

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \alpha = 0 ; \quad (5.3)$$

esta ecuación implica que la α es constante en cada superficie de campo magnético (lo que de paso, sirve para caracterizarlas).

La solución de (5.2) es en general bastante difícil.

Si se considera nuevamente la situación del final del capítulo 2, es decir un plasma dentro de un cilindro circular recto de cuerpo metálico, que tiene simetrías traslacional y alrededor del eje (ver figura 2.1), el campo magnético puede expresarse como

$$\mathbf{B} = \nabla \times [f(r)\hat{z}] + g(r)\hat{z} ; \quad (5.4)$$

donde $f(r)$ determina las superficies de campo magnético y $g(r)$ es una

función asociada al flujo axial, siendo además cantidad de superficie (ver capítulo 4). Buscando que $\nabla \cdot \underline{B} = \alpha \underline{B}$, en términos de (5.4)

$$\nabla \cdot \underline{B} = \nabla g(r) \times z - \Delta f(r) z = \alpha \nabla f(r) \times z + \alpha g(r) z = \alpha \underline{B};$$

igualando las componentes

$$\Delta f(r) = -\alpha g(r) \quad \text{y} \quad \nabla g(r) = \alpha \nabla f(r).$$

Por ser $g(r)$ cantidad de superficie, $\nabla g(r) = (dg/df)\nabla f(r)$, teniéndose finalmente

$$\alpha = dg/df; \quad (5.5)$$

$$\Delta f(r) = -(dg/df)g(r). \quad (5.6)$$

Para poderse resolver, se tiene que dar la expresión para $g(r)$ (que se puede encontrar si se sabe como es el flujo axial). Para el caso en que g es lineal en f , α es constante y se tiene lo mismo que al final del capítulo 2. Para cualquier otra dependencia funcional, es casi imposible resolver si no es por métodos numéricos. El caso en que g resulta proporcional a la raíz cuadrada de f , $g = \mu\sqrt{f}$, permite tratarlo analíticamente ya que (5.5) y (5.6) se transforman en

$$\alpha = dg/df = \mu(2\sqrt{f})^{-1}, \\ \Delta f = -\mu^2/2 = -\xi^2,$$

la solución de ésta última es

$$f_h + f_p = -\xi^2 r^2/4 + A \ln(r) + b$$

donde f_h es la solución homogénea y f_p es la solución particular. Como el origen está incluido en la región de interés $A = 0$, resultando únicamente $f = b - \mu^2 r^2/8$, con $b > \mu^2 a^2/8$; las expresiones para α y \underline{B} son entonces

$$\alpha = \mu \left(2\sqrt{b - \mu^2 r^2/8} \right)^{-1}, \\ B_r = r^{-1} \partial f / \partial \theta = 0, \\ B_\theta = -\partial f / \partial r = \mu r^2/4,$$

$$B_z = \mu \sqrt{b - \mu^2 r^2/8}. \quad (5.7)$$

Es obvio que \underline{B} cumple la condición a la frontera ($\underline{B} \cdot \underline{n} = 0$). Las superficies de campo magnético son claramente cilindros concéntricos. En la figura 5.1 se muestran los posibles perfiles de f en función de r , para un b determinado.

Lo anterior se puede extender sin dificultad para el caso en que f dependa también de θ , esto es, donde aparece $f(r)$ se puede poner $f(r, \theta)$, pudiéndose también suponer que $g(r, \theta) = \mu\sqrt{f(r, \theta)}$; aunque se

tiene el inconveniente de que no se puede aplicar al caso de un cilindro de paredes metálicas, ya que las condiciones a la frontera no se pueden satisfacer. Esto es evidente al revisar la solución para f

$$f(r, \theta) = A \sin(k\theta + \phi) r^k - \mu^2 r^2 / 8$$

ya que $B_r(r=a) = Ak \cos(k\theta + \phi) a^{k-1} = 0$, y sólo se cumple para $A = 0$ (o bien $k = 0$, pero entonces se vuelve al caso únicamente dependiente de r).

Otra situación que se puede plantear de manera similar es la tratada en el capítulo 4, ya que

$$\underline{E} = \nabla \Psi \times \nabla \phi + h \nabla \phi ; \quad \Psi(r, z), \quad h(r, z).$$

Las ecuaciones equivalentes a (5.5) y (5.6) son: $dh/dz = \alpha$ y $\Delta^* \Psi = -\alpha h$, donde $\Delta^* \Psi = r \partial(r^{-1} \partial \Psi / \partial r) / \partial r + \partial^2 \Psi / \partial z^2$.

Suponiendo nuevamente que $h = \mu \sqrt{\Psi}$, se pueden tener soluciones para Ψ del tipo $\Psi(r, z) = r \sin(kz + \phi) \{ BK_1(kr) + CI_1(kr) \} - \mu^2 z^2 / 4$, donde K_1 e I_1 son las funciones modificadas de Bessel de orden 1.

Si se intenta aplicar la solución anterior a configuraciones como las descritas en el mismo capítulo 4, surge el problema de que las condiciones a la frontera (en r) no se pueden satisfacer.

En astronomía, donde los campos libres de fuerzas resultan el modelo apropiado en diversas situaciones, es de especial interés el estudio de casos donde la α no sea constante, por ejemplo en la atmósfera solar [Low, 1977]. En el artículo a que se hace mención, se desea encontrar el campo magnético en la atmósfera solar conociendo el campo en la fotosfera del mismo. Para hacerlo se considera a la fotosfera como el eje y del semiplano que forma con las z positivas, suponiendo además que que el campo no depende de x . De esto último, el campo se puede expresar como $\underline{E} = B_0 \nabla \times (\Psi \mathbf{x}) + f \mathbf{x}$, con lo que nuevamente, suponiendo que \underline{E} es libre de fuerzas

$$\alpha = df/d\Psi \quad \text{y} \quad \Delta \Psi = -f df/d\Psi. \quad (5.8)$$

Las expresiones para f y Ψ en la fotosfera, es decir en $z = 0$, que mejor se ajustan a los datos experimentales son

$$\Psi(y, 0) = \ln(1 + y^2), \quad (5.9)$$

$$f(y, 0) = \lambda(1 + y^2)^{-1}. \quad (5.10)$$

La λ que aquí se usa no tiene nada que ver con el valor propio de la ecuación (2.2), esta λ es un parámetro dependiente del tiempo.

Estrictamente hablando sería contradictorio el introducir al tiempo en las ecuaciones ya que se están tratando de encontrar los estados de equilibrio estáticos (para ello se eliminaron los términos donde había derivadas temporales en las ecuaciones MHD), pero considerando que estos estados de equilibrio son los estados representativos del fenómeno para, piénsese, un tiempo τ que es muy pequeño, comparado con el que transcurre para obtenerse una variación apreciable en el valor de λ , entonces se puede ver que si se substituye el campo magnético en función de la posición y del tiempo (a través de λ) en las ecuaciones MHD se encontrará que los términos que involucran derivadas temporales, son pequeños, pudiéndose despreciar, con lo que en una buena aproximación (para tiempos cortos) representan bien un campo estacionario.

La $f(y, z)$, en términos de la Ψ es (generalizando (5.9) y (5.10)) $f(\Psi) = \lambda \exp(-\Psi)$, lo cual permite escribir (5.8) como

$$\Delta \Psi = \lambda^2 \exp(-2\Psi) . \quad (5.11)$$

Para la condición a la frontera en infinito, se puede pedir que el campo decaiga a cero. Si se resuelve la ecuación (5.11) con $\lambda = 0$ ($t = 0$), pidiendo que en $z = 0$ sea (5.9), se obtiene un campo con las características deseadas, tal solución es

$$\Psi_0(y, z) = \ln y^2 + (z+1)^2 ;$$

pudiéndose usar como condición a la frontera al problema con λ , (t), cualquiera, que cuando $(y^2 + z^2)^{1/2}$ tienda a infinito, entonces $\Psi(y, z)$ tienda a $\Psi_0(y, z)$ (esto es, que el campo magnético muy lejos del sol no se vea afectado por el que éste genera; es la condición de acoplamiento).

La ecuación (5.11) se conoce por la ecuación de Liouville, la cual tiene por integral

$$\lambda^2 \exp(-2\Psi) = 4 |\nabla \phi|^2 (1 + \phi^2 + \xi^2)^{-2}, \quad (5.12)$$

con $\phi + i\xi$ una función analítica arbitraria de la variable compleja ($y + iz$). La ecuación se puede reescribir

$$\lambda^2 \exp(-2\Psi) = 4 [(\partial \phi / \partial y)^2 + (\partial \xi / \partial y)^2] (1 + \phi^2 + \xi^2)^{-2}, \quad (5.13)$$

ya que ϕ y ξ son armónicas conjugadas. Imponiendo (5.9), (5.13) se ve

$$4 [(\partial \phi / \partial y)^2 + (\partial \xi / \partial y)^2] (1 + \phi^2 + \xi^2)^{-2} = \lambda^2 (1 + y^2)^{-2}, \quad (5.14)$$

de ésta se pueden hallar soluciones $\phi(y)$ y $\xi(y)$ que pueden continuarse analíticamente para el semiplano de las z positivas, además tiene que

cumplir con la condición en infinito y no tener irregularidades. Para lograrlo se hace el cambio de variable $y = \operatorname{tg}(\theta)$, así (5.14) se transforma en

$$4[(\partial\phi/\partial\theta)^2 + (\partial\xi/\partial\theta)^2] = \lambda^2(1 + \phi^2 + \xi^2)^2,$$

con soluciones $\phi + i\xi = \mu^{-1}\exp(i\nu\theta)$, donde μ y ν son parámetros relacionados con el λ a través de $\lambda^2 = 4\mu^2\nu^2(1 + \mu^2)^{-2}$.

Por continuación analítica, en el semiplano de las z positivas se tiene

$$\phi + i\xi = \mu^{-1} \left[\frac{1 + i(y + iz)}{1 - i(y + iz)} \right]^{\nu/2}$$

la cual da la solución para la Ψ , en términos de μ y ν

$$\exp(\Psi) = \frac{\mu^2 y^2 + (z-1)^2 \nu/2 + y^2 + (z-1)^2 \nu/2}{(1 + \mu^2)[y^2 + (z+1)]^{(\nu/4)-1/2} [y^2 + (z-1)]^{(\nu/4)+1/2}} \quad (5.15)$$

La expresión (5.15) cumple la condición en infinito para ν y μ cualesquiera, pero sólo con $\nu = \pm 2$ es libre de singularidades. Ambos valores generan el mismo conjunto de soluciones

$$\Psi = \ln[y^2 + z^2 + 2z(1 - \mu^2)(1 + \mu^2)^{-1} + 1].$$

Por lo tanto, baste con saber que es posible hallar soluciones analíticas a (5.2).

Para $b=1, a=1$

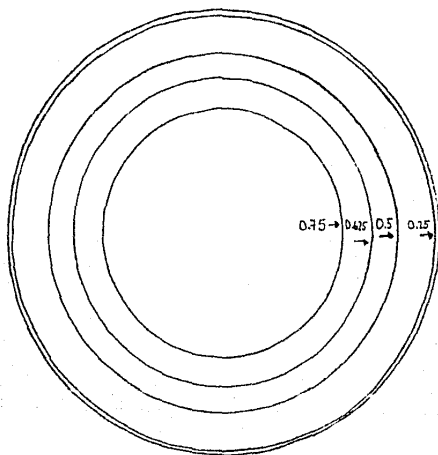
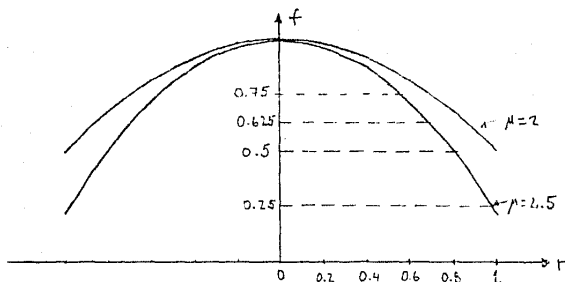


Fig. 5.1 Perfiles de f en función de r para un b determinado (arriba); intersección de las superficies de $f = cte$ con el plano $z=0$ (abajo).

COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

Es interesante (o cabría decir, hasta sorprendente) que una simplificación tal como la de la hipótesis de Taylor, pueda resultar un modelo que reproduzca tan bien las características principales de un sistema tan complejo como lo es el "pinch" de campo invertido (opera establemente para valores grandes de β entre 0.1 y 0.3 [Bodin y Newton, 1980]). El calificativo de sorprendente se debe a que dado que sólo se considera la energía magnética para la minimización, es la electrodinámica la que gobierna el comportamiento, dejando de lado el aspecto de fluido del plasma, aún más, podría uno olvidarse de él. La extrema simplificación, hace difícil el querer proponer y sustentar mecanismos de relajación, ya que surgen preguntas tales como: si el sistema es cerrado, la energía es puramente magnética y decae, ¿adonde va?. Para justificar algún mecanismo debería hacerse un modelo más detallado en el cual, deberían incluirse también las energías térmica y cinética con sus constricciones apropiadas. En fin como una primera aproximación es adecuado.

En el capítulo 3, para todos los ejemplos presentados, sólo es posible el tener soluciones analíticas para las situaciones que presentan alguna simetría, lo cual hace pensar que el pedir que se tenga un campo libre de fuerzas, que satisfaga condiciones a la frontera como las impuestas, deba siempre implicar el reducir un grado de libertad al problema.

A primera vista la parte inicial del capítulo 4 parece innecesaria, pero mirando más adelante se da uno cuenta que la hipótesis de Taylor da lugar a un tipo de equilibrio para el toro axisimétrico (otra vez una situación con una simetría), es equivalente a la que resulta de la ecuación de Grad-Shafranov (G-S) al eliminar el gradiente de presiones y proponer la función g lineal en ψ . El hacer esto en la ecuación de G-S, limita su aplicación a plasmas muy diluidos. Nuevamente resalta la electrodinámica como rectora del comportamiento.

En todas las situaciones en que se resuelve la ecuación para el campo libre de fuerzas hasta el capítulo 4 (inclusive), la ecuación aparece al suponer la hipótesis de Taylor. En el capítulo 5 y el

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

apéndice C en cambio, se llega a la ecuación por otros caminos. Para el capítulo 5 se considera un plasma MHD en equilibrio estático donde se puede, además, desprestigiar el gradiente de presiones y como hasta entonces en todos los casos había soluciones analíticas si existía algún tipo de simetría, se propusieron situaciones en las que la había. Aún así sólo se pudo resolver para casos muy específicos.

Adicionalmente, cabría mencionar que la extensión natural del presente trabajo sería el estudio de la estabilidad de los equilibrios considerados.

A P E N D I C E A

Interpretación de la helicidad.

Para esclarecer la aseveración del final del capítulo 1, se presentan los puntos sobresalientes, referentes a la interpretación de la helicidad, del trabajo de Moffatt [Moffatt, 1969] .

Considérese un fluido no viscoso, con un flujo $\underline{u}(\underline{x}, t)$, sujeto a fuerzas de volumen (cuerpo) conservativas (v.g. la gravedad) y con densidad uniforme ρ , a lo sumo, dependiente de la presión. La circulación alrededor de un circuito C que se mueve con el fluido es constante

$$I = \oint_C \underline{u} \cdot d\underline{l} = \text{cte.} \quad (\text{A.1})$$

En el caso particular en que la vorticidad $\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u}$ sea cero dentro del fluido, excepto en 2 vórtices de línea C_1 y C_2 , de intensidades k_1 y k_2 (que se mueven junto con el fluido Batchelor, 1977). Se puede elegir a C_1 como el C en (A.1) y en caso de que C_1 no esté anudado, esto es, que pueda ser la frontera de una superficie S_1 que no se intersecta a sí misma; por el teorema de Stokes

$$I_1 = \oint_{C_1} \underline{u} \cdot d\underline{l} = \int_{S_1} \underline{\omega} \cdot d\underline{s} \quad ; \quad (\text{A.2})$$

y como el flujo de vorticidad a través de S_1 es únicamente el debido a C_2 , I_1 será cero ó $\pm k_2$, dependiendo de si los circuitos están o no enlazados (el signo depende de la orientación relativa). Podría suceder que C_2 se enrollara varias veces alrededor de C_1 , con lo cual $I_1 = \alpha_{12} k_2$, con α_{12} un entero (positivo o negativo) al que se conoce por número de enrollamiento de la curva C_2 sobre C_1 .

Si se tratara de n vórtices de línea (C_1, C_2, \dots, C_n) sin nudos; la circulación para el i-ésimo circuito sería

$$I_i = \oint_{C_i} \underline{u} \cdot d\underline{l} = \sum_j \alpha_{ij} k_j \quad ; \quad (\text{A.3})$$

donde α_{ij} sería el número de enrollamiento de C_j sobre C_i .

La cantidad $k_1 I_1$, se puede escribir en forma de integral sobre el volumen V_1 ocupado por el vórtice de línea C_1 . Como $d\underline{l}$ es paralelo a $\underline{\omega}$ en la línea, la cantidad de vorticidad en una sección a lo largo del circuito, se puede poner ya sea como $k_1 d\underline{l}$, ó bien como $\int_{V_1} \underline{\omega} \cdot d\underline{V}$, donde V_1 es el volumen que contiene la sección del circuito. Así

$$k_1 I_1 = \oint_{C_1} k_1 d\underline{l} \cdot \underline{u} = \int_{V_1} \underline{u} \cdot \underline{\omega} \cdot d\underline{V} \quad ;$$

V_1 es el volumen ocupado por un tubo delgado alrededor de C_1 ; sumando

sobre todos los vórtices

$$K = \sum_i k_i I_i = \sum_{i,j} \alpha_{ij} k_i k_j = \int_V \underline{u} \cdot \underline{\omega} \, dV = \int_V \underline{u} \cdot (\nabla \times \underline{u}) \, dV ;$$

con V el volumen que contiene a todos los vórtices. A la K se le denomina helicidad.

La deducción presentada corresponde al caso de un campo vortiginoso discreto, pudiéndose extender al caso de uno continuo, manteniéndose la interpretación.

Sustituyendo a \underline{u} por \underline{A} , el potencial vectorial magnético, se obtiene la helicidad magnética, la cuál da una medida del grado de enlace de las líneas de campo magnético.

A P E N D I C E B

Soluciones a la ecuación vectorial de Helmholtz.

Partiendo de la descomposición del campo vectorial en una parte longitudinal y una transversal, escójase un sistema curvilíneo de coordenadas ξ_1, ξ_2, ξ_3 con factores de escala h_1, h_2, h_3 , apropiado al problema que se estudia. Supóngase que la frontera es por ejemplo $\xi_1 = C$. La parte longitudinal es $\nabla\phi$, y si la ecuación de Helmholtz es separable en este sistema de coordenadas, las condiciones a la frontera para la parte longitudinal pueden aplicarse sin mayor problema.

La parte transversal depende de 2 campos escalares y sería ventajoso escogerlos de forma que al obtener la parte transversal, uno contribuyera con una componente tangencial a la superficie $\xi_1 = C$ y el otro fuere normal a ella.

El vector $\underline{M} = \nabla \times (\underline{a}_1 f)$ con \underline{a}_1 el vector unitario en la dirección de ξ_1 , es tangencial a la superficie $\xi_1 = C$ y dado que su divergencia es cero, bien podría ser una solución, siempre y cuando el campo escalar f permita que \underline{M} cumpla la ecuación de Helmholtz. Se tiene entonces

$$-\Delta \underline{M} = -\nabla(\nabla \cdot \underline{M}) + \nabla \times (\nabla \times \underline{M}) = \nabla \times (\nabla \times \underline{M}) = k^2 \underline{M},$$

necesitándose arreglar las cosas para que $\nabla \times (\nabla \times (\underline{a}_1 f))$ sea igual a $k^2 \underline{a}_1 f$ más el gradiente de un escalar. Así

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{M} = & (-\underline{a}_1 / h_2 h_3) \{ \partial ([h_3 / h_1 h_2] \partial (h_1 f) / \partial \xi_2) / \partial \xi_2 + \\ & + \partial ([h_2 / h_1 h_3] \partial (h_1 f) / \partial \xi_3) / \partial \xi_2 \} + \\ & + (\underline{a}_2 / h_1 h_3) \partial \{ (h_3 / h_1 h_2) \partial (h_1 f) / \partial \xi_2 \} / \partial \xi_1 + \\ & + (\underline{a}_3 / h_1 h_2) \partial \{ (h_2 / h_1 h_3) \partial (h_1 f) / \partial \xi_3 \} / \partial \xi_1 \end{aligned}$$

lo cual no se parece mucho a $k^2 \underline{a}_1 f + \nabla U$, pero si $h_3 / h_1 h_2$ y $h_2 / h_1 h_3$ son independientes de ξ_1 , lo que implica que h_1 y el cociente h_2 / h_3 también lo sean, se puede invertir el orden de derivación. Rearreglando la componente asociada a ξ_1 , sumándole y restándole el término que completa el gradiente, se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{M} = & h_1^{-2} \nabla(\partial (h_1 f) / \partial \xi_1) - \underline{a}_1 \{ h_1^{-2} \partial^2 (h_2 f) / \partial \xi_1^2 + \\ & + h_2^{-1} h_3^{-1} \partial ([h_3 / h_2 h_1] \partial (h_1 f) / \partial \xi_2) / \partial \xi_2 + \\ & + h_2^{-1} h_3^{-1} \partial ([h_2 / h_1 h_3] \partial (h_1 f) / \partial \xi_3) / \partial \xi_3 \}. \end{aligned}$$

El primer término no tendrá un rotacional igual a cero a menos que h_1 no dependa de ξ_2 y ξ_3 , es decir h_1 debe ser constante; escogiendo a ésta como la unidad, los 2 últimos términos se hacen equivalentes a aquellos de Δf , y para el efecto de que posteriormente resulte

separable en este sistema de coordenadas, se pide que se cumpla la condición de Robertson para los factores de escala¹ [Morse y Feshbach, 1953]. El término que difiere del de Δf , en los corchetes, es el primero; pero se puede forzar a que la expresión sea $\omega(\xi_1)\Delta\Psi$, sustituyendo $f = \omega(\xi_1)\Delta\Psi$ y exigiendo que

$$\partial^2(\omega\Psi)/\partial\xi_1^2 = \omega f_1^{-1}[\partial(f_1\partial\Psi/\partial\xi_1)/\partial\xi_1];$$

desarrollando se tiene

$$2(d\omega/d\xi_1)[\partial\Psi/\partial\xi_1] + \Psi(d^2\omega/d\xi_1^2) = \omega f_1^{-1}(df_1/d\xi_1)[\partial\Psi/\partial\xi_1].$$

Esta ecuación se satisface para cualquier Ψ si $d^2\omega/d\xi_1^2 = 0$ y si $2 \ln(\omega) = \ln(f_1)$; la primera ecuación se cumple si $\omega = 1$ o ξ_1 , y la segunda si f_1 es 1 o ξ_1^2 . Se tiene entonces que

$$\nabla \times \underline{M} = \nabla(\partial f/\partial\xi_1) - a_1 \omega \Delta\Psi,$$

y para Ψ la solución de la ecuación escalar de Helmholtz

$$\nabla \times \underline{M} = \nabla(\partial f/\partial\xi_1) + k^2 a_1 f; f = \omega\Psi,$$

cumpléndose así

$$\Delta \underline{M} = -k^2 \underline{M}.$$

La componente normal de la parte transversal de la solución se calcula usando $\underline{N} = k^{-1} \nabla \times [\nabla \times \{a_1 \omega(\xi_1) \chi\}]$, donde ω es la misma que para la \underline{M} y χ es nuevamente solución de la ecuación escalar de Helmholtz.

Las condiciones impuestas a los factores de escala, permiten únicamente obtener soluciones de este tipo para algunos sistemas coordenados (cartesiano, cilíndricos, esférico y cónico).

La solución de Chandrasekhar y Kendall se obtiene de las expresiones anteriores usando $\omega(\xi_1) = 1$ y $\Psi = \chi$.

$$h_1 h_2 h_3 S^{-1} = f_1(\xi_1) f_2(\xi_2) f_3(\xi_3); \text{ con } S \text{ el determinante de Stäckel.}$$

A P E N D I C E C

Sistemas abiertos.

Recientemente apareció un artículo donde se continúa el estudio de la ecuación para el campo magnético libre de fuerzas [Turner, 1984]. Si bien se trata de la misma ecuación, no se obtiene de acuerdo a la hipótesis de Taylor, esto es, no proviene de la minimización de la energía magnética; debe considerarse como una tentativa en la búsqueda de estados de equilibrio del tipo de campo libre de fuerzas para ciertas máquinas empleadas para el estudio de fusión (específicamente se hace para los esferomakes PS-1 de la Universidad de Maryland y el CTX de Los Alamos; y para el "pinch" de campo invertido PCI de la Universidad de Wisconsin).

A diferencia de las situaciones tratadas, Turner propone sistemas abiertos; presenta a los esferomakes como contenedores cilíndricos metálicos de radio r_0 y longitud L , con un par de orificios en los extremos (los opuestos para el PS-1 y en sólo uno de ellos para el CTX) por los que entra y sale un flujo magnético finito. Al PCI lo considera también como un cilindro, al que introduce 4 "filamentos" de corriente simétricamente localizados respecto del eje. Turner trabaja únicamente con situaciones en las que se puede ignorar alguna de las variables.

Para el caso del esferomak PS-1, resuelve la ecuación del campo libre de fuerzas, independiente de ϕ , por el método descrito en el capítulo 2, es decir, auxiliándose de Ψ , con lo que el campo magnético viene dado por (2.8) con $\hat{a} = \underline{z}$. Sus condiciones a la frontera cambian evidentemente, siendo éstas, que la componente de \underline{B} normal a la frontera se anule, exceptuando los puntos de entrada y salida del flujo, además, $r \partial \Psi / \partial r |_{\text{FRONT. (r=0)}} = -\Phi / 2\pi$, con Φ el flujo magnético axial. Debido a que sus condiciones a la frontera no son homogéneas, redefine la Ψ como

$$\Psi(r, z) = -(\phi/2\pi) \ln(r/r_0) + \eta(r, z),$$

$\eta(r, z)$ deberá entonces cumplir con

$$(\Delta + \lambda^2)\eta(r, z) = (\phi/2\pi)[r^{-1}\delta(r) + \lambda^2 \ln(r/r_0)],$$

$\partial \eta / \partial r |_{\text{frontera}} = 0$; para que Ψ siga siendo solución de la ecuación escalar de Helmholtz (δ es la función delta de Dirac). La ecuación para

$\eta(r, z)$ tiene como solución, en términos de la función de Green

$$\eta(r, z) = (\phi/2\pi) \int_0^r r' dr' \int_0^z dz' G(r, z; r', z') [(r')^{-1} \delta(r-r') + \lambda^2 \ln(r'/r_0)];$$

la cual queda definida por

$$(\Delta + \lambda^2) G(r, z; r', z') = [r^{-1} \delta(r-r')] \delta(z-z');$$

con las condiciones

$$\partial [G(r_0, z; r', z')] / \partial r_0 = \partial [G(r, z; r_0, z')] / \partial r_0 = 0$$

$$G(r, 0; r', z') = G(r, z; r', 0) = G(r, L; r', z') = G(r, z; r', L) = 0.$$

Empleando las técnicas usuales

$$G(r, z; r', z') = \frac{\pi}{L} \sum_{l, \alpha} \frac{J_0(\alpha - l r_0) [J_1(\alpha - l r_0) Y_0(\alpha - l r_0) - Y_1(\alpha - l r_0) J_0(\alpha - l r_0)]}{J_1(\alpha - l r_0)} \sin(k_l z) \sin(k_l z')$$

$$- \frac{2}{L} \sum_{l, \alpha} \frac{J_0(\alpha + l r_0) [J_1(\alpha + l r_0) K_0(\alpha + l r_0) + K_1(\alpha + l r_0) I_0(\alpha + l r_0)]}{I_1(\alpha + l r_0)} \sin(k_l z) \sin(k_l z'),$$

con $k_l = l\pi/L$, $\alpha_{-l} = (\lambda^2 - k_l^2)^{1/2}$, $\alpha_{+l} = (k_l^2 - \lambda^2)$, donde l es el valor máximo de l para el cual $\lambda^2 \geq k_l^2$. La convergencia de esta representación en serie de la función de Green, es muy lenta para $r \rightarrow r'$.

Otra posible representación es

$$G(r, z; r', z') = \frac{2}{r_0} \sum_{\alpha < \alpha_{n^*}} \frac{J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_n r') \sin \beta_{-n} z \cos(\sin \beta_{-n} z - \cos \beta_{-n} L - \cos \beta_{-n} z + \sin \beta_{-n} L)}{J_0^2(\gamma_n r_0) (\beta_{-n} r_0) \sin \beta_{-n} L}$$

$$+ \frac{2}{r_0} \sum_{\alpha > \alpha_{n^*}} \frac{J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_n r') \sinh \beta_{+n} z \cosh(\sin \beta_{+n} z - \cosh \beta_{+n} L - \cosh \beta_{+n} z + \sinh \beta_{+n} L)}{J_0^2(\gamma_n r_0) (\beta_{+n} r_0) \sinh \beta_{+n} L}$$

donde $\{\gamma_n, \alpha_{n^*}\}$ representa el conjunto de ceros de J_1 , $\beta_{-n} = (\lambda^2 - \gamma_n^2)^{1/2}$, $\beta_{+n} = (\gamma_n^2 - \lambda^2)^{1/2}$, con n^* el valor máximo de n para el que $\lambda^2 \geq \gamma_n^2$.

J_n y Y_n , son las funciones de Bessel del primero y segundo tipos de orden n ; I_n y K_n , las correspondientes funciones modificadas de Bessel.

Sustituyendo en la expresión integral de $\eta(r, z)$ y efectuando las integrales; las funciones $\Psi(r, z)$ resultan:

$$\psi(r, z) = \frac{\phi}{2\pi} \left(\frac{\sin \lambda(z-L) - \sin \lambda z}{\sin \lambda L} \right) \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) - \frac{\phi}{\pi} \sum_{l=1, \infty, \dots} \left(\frac{k_l^2}{\lambda^2 - k_l^2} \right)$$

$$\times \left(\frac{J_1(\alpha - l r_0) Y_0(\alpha - l r) - Y_1(\alpha - l r_0) J_0(\alpha - l r)}{J_1(\alpha - l r_0)} \right) \frac{\sin(k_l z)}{l} + \frac{2\phi}{\pi^2} \sum_{l=1, \infty, \dots} \left(\frac{k_l^2}{\lambda^2 - k_l^2} \right)$$

$$\times \left(\frac{J_1(\alpha + l r_0) K_0(\alpha + l r) + K_1(\alpha + l r_0) I_0(\alpha + l r)}{I_1(\alpha + l r_0)} \right) \frac{\sin(k_l z)}{l} + \frac{2\phi}{\pi^2} \sum_{l=1, \infty, \dots} \left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - k_l^2} \right)$$

$$\times \left(\frac{J_0(\alpha - l r)}{(\alpha - l r_0) J_1(\alpha + l r_0)} \right) \frac{\sin(k_l z)}{l} - \frac{2\phi}{\pi^2} \sum_{l=1, \infty, \dots} \left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - k_l^2} \right) \left(\frac{I_0(\alpha + l r)}{(\alpha + l r_0) I_1(\alpha + l r_0)} \right) \frac{\sin(k_l z)}{l}$$

$$\begin{aligned}
\psi(r, z) = & \frac{\Phi}{2\pi} \left(\frac{J_0 \lambda r}{\lambda r_0 J_0(\lambda r_0)} \right) + \frac{\Phi}{\pi} \left(\frac{\sin \lambda(z-L) - \sin \lambda z}{\lambda r_0^2 \sin \lambda L} \right) \left(1 - \frac{(\lambda r_0)^2}{4} \right) - \frac{\Phi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \beta_{-n}(z-L) - \sin \beta_{-n} z}{\sin \beta_{-n} L} \right) \\
& \times \left(\frac{J_0 \gamma_n r}{(\gamma_n r_0)^2 J_0'(\gamma_n r_0)} \right) - \frac{\Phi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sinh \beta_{+n}(z-L) - \sinh \beta_{+n} z}{\sinh \beta_{+n} L} \right) \left(\frac{J_0 \gamma_n r}{(\gamma_n r_0)^2 J_0'(\gamma_n r_0)} \right) \\
& + \frac{\Phi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \beta_{-n}(z-L) - \sin \beta_{-n} z}{\sin \beta_{-n} L} \right) \left(\frac{(\lambda r_0)^2 J_0(\gamma_n r)}{[(\lambda r_0)^2 - (\gamma_n r_0)^2] (\gamma_n r_0)^2 J_0'(\gamma_n r_0)} \right) \\
& + \frac{\Phi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sinh \beta_{+n}(z-L) - \sinh \beta_{+n} z}{\sinh \beta_{+n} L} \right) \left(\frac{(\lambda r_0)^2 J_0(\gamma_n r)}{[(\lambda r_0)^2 - (\gamma_n r_0)^2] (\gamma_n r_0)^2 J_0'(\gamma_n r_0)} \right).
\end{aligned}$$

El análisis de estas soluciones tiene que efectuarse numéricamente. Turner lleva a cabo el estudio del flujo magnético a través de la sección longitudinal de cilindro, para diferentes valores de $\lambda r_0 = \{(\gamma_1 r_0)^2 + (\pi r_0/L)^2\}^{1/2}$ con el mismo valor de L/r_0 . De entre los casos que presenta, resultan interesantes (desde el punto de vista de fusión) aquéllos en que los estados de equilibrio presentan una envolvente de líneas de campo magnético abiertas que rodean y aíslan del contenedor a un grupo de líneas cerradas. Este tipo de estructuras sugieren la posibilidad de máquinas de fusión, que se llevaría a cabo en la estructura cerrada, que pudiera mantenerse auxiliándose de las líneas abiertas (que permitirían inyectar flujo magnético, helicidad magnética -ver final del capítulo 2-, etc.).

B I B L I O G R A F I A

- BATCHELOR (1977). An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press.
- BATEMAN, G. (1976). MHD Instabilities. The M.I.T. Press
- BODIN, H.- NEWTON, A.: (1960). Nucl. Fus. 20, 1255
- COWLING, T. G.: (1976). Magnetohydrodynamics. Adam Higler Ltd.
- CHANDRASEKHAR, S.-KENDALL, F. C.: (1957). Astrophys. J. 126, 467
- FIELD, J.: (1961). En "Plasma Physics and Nuclear Fusion Research" (R. D. GILL, editor). Academic Press. 2a. Secc., cap. 4
- HORIUCHI, R.-SATO, T.: (1966). Phys. Fluids 9, 1161
- JAIN, K. K.: (1966). Phys. letters A, vol. 126, n.º.4, pg.269
- JENSEN, T. H.-CHU, M. S.: (1964). Phys. Fluids 7, 2681
- LOW, B. C.: (1977). Astrophys. J. 212, 234
- LUST, R.-SCHLUTER, A.: (1954). Z. Astrophys. 34, 263
- MOFFATT, H. K.: (1969); J. Fluid Mech. 35, 117
- MORSE, P. M.-FESHBACH, H.: (1953). Methods of theoretical Physics, Mc. Graw-Hill; Book Co.
- NORWOOD Jr., J.: (1961). Mecánica clásica a nivel intermedio. Prentice-Hall internacional.
- PRESS, W. H. et al.: (1966). Numerical Recipes, Cambridge University Press
- REITZ, J.-MILFORD, F.-CHRISTY, R.: (1964). Fundamentos de la teoría electromagnética, 3a. ed., Fondo educativo interamericano.
- ROSENBLUTH, M. N.-BUSSAC, M. N.: (1979). Nucl. Fus. 19, 469
- SCHMIDT, G.: (1979). Physics of high temperature plasmas, 2a. ed., Academic Press.
- TAYLOR, J. B.: (1975). En "Plasma physics and nuclear fusion research" (Proc. 5th. Int. Conf. Tokyo, 1974) vol.1. IAEA, Viena.
- TURNER, L.: (1964). Phys. Fluids 7, 1677.
- WOLTJER, L.: (1956a). Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands, vol. 14, No.483
- WOLTJER, L.: (1956b). Proc. Natl. Acad. Sciences. 44, 469