



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

29
73

**UNA VERSION DE LA TEORIA DEL
EQUILIBRIO ECONOMICO GENERAL
BASADO EN EL METODO DE
INSUMO-PRODUCTO**

**TESIS
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
MATEMATICO
PRESENTA
JORGE RUIZ MORENO**

1989

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

PARTE A

A.1	LOS FISIOCRATAS.....	1
A.2	ADAM SMITH.....	12
A.3	DAVID RICARDO.....	25
A.4	LOS ECONOMISTAS VULGARES.....	31
A.5	EL MARXISMO.....	37
A.6	WALRAS.....	45
A.7	ALGUNOS COMENTARIOS A LA TEORIA DEL EQUILIBRIO GENERAL ECONOMICO.....	50
A.8	EL EQUILIBRIO ECONOMICO GENERAL EN KEYNES.....	60
A.9	LOS MONETARISTAS.....	80

PARTE B.

B. I.	UN MODELO LINEAL NEOCLASICO DEL EQUILIBRIO ECONOMICO GENERAL.....	92
B. I.1.	LOS ELEMENTOS ENDOGENOS Y EXOGENOS DEL MODELO.....	92
B. I.1.1	LOS ELEMENTOS QUE SE CONSIDERAN DADOS.	92
B. I.1.2	LOS ELEMENTOS QUE SE DESPRENDEN DE LOS ANTERIORES.....	94

B. I. 2	EXPLICACION DEL MODELO.....	94
B. I. 2. 1	ACTUACION DE LAS EMPRESAS.....	94
B. I. 2. 2	ACTUACION DE LAS FAMILIAS.....	96
B. I. 2. 3	RELACION ENTRE LA OFERTA Y LA DEMANDA	99
B. I. 3	DEFINICION DE EQUILIBRIO ECONOMICO.	104
B. II	EJEMPLOS DE EQUILIBRIO PARA LA ECONOMIA.....	107
B. II. 1	UN EJEMPLO CON PRODUCCION NULA.....	107
B. II. 2	UN EQUILIBRIO SIN GANANCIAS PARA LAS EMPRESAS PERO CON PRODUCCION NO NULA.....	108
B. III	LA ECONOMIA EN EQUILIBRIO.....	112
B. III. 1	PROPIEDADES DEL EQUILIBRIO E.....	112
B. III. 2	CANTIDADES DE PRODUCCION QUE MAXIMIZAN LA GANANCIA.....	116
B. III. 3	LA ECONOMIA CERCENADA.....	122
B. III. 4	PRECIOS DE EQUILIBRIO.....	125
B. III. 4. 1	PRECIOS DE EQUILIBRIO PARA $R > 0$	125
B. III. 4. 2	PRECIOS DE EQUILIBRIO PARA $R = 0$	129
B. III. 5	CANASTAS DE MERCANCIAS QUE MAXIMIZAN LA FUNCION DE UTILIDAD EN EL EQUILIBRIO.....	131

B.III.6	CANTIDADES DE PRODUCCION QUE EN EL EQUILIBRIO IGUALAN A LA DEMANDA.....	135
B.IV	TEOREMA DE EXISTENCIA.....	137
B.V	LA OFERTA Y DEMANDA DE TRABAJO.....	149
B.V.1	LA FUNCION $D(R)$	149
B.V.2	LA DEMANDA DE TRABAJO $D(R)$	150
B.V.2.1	DEMANDA DE FUERZA DE TRABAJO QUE SE DERIVA DEL SALARIO.....	151
B.V.2.2	LA DEMANDA DEL TRABAJO QUE SE DERIVA DE LAS GANANCIAS.....	151

PARTE C

APENDICES

C.A.1	TEOREMAS SOBRE MATRICES CONECTADAS NO NEGATIVAS.....	154
C.A.2	TEOREMAS QUE GARANTIZAN LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES NO NEGATIVAS PARA SISTEMAS DEL TIPO $BX=C$ CON $B_{ii} < 0$ SI $i \neq j$	169
C.A.3	LEMA DE NEYMAN Y PEARSON.....	189
C.A.4	LEMA DE NEYMAN Y PEARSON AMPLIADO.....	196

Prólogo.

El objetivo de este trabajo es doble; por una parte daremos discusión sobre el concepto equilibrio económico general: el equilibrio no es entendido como un modelo matemático el cual bajo "hipótesis simplificadoras" tiene un conjunto de soluciones a todo un sistema de ecuaciones que igualan a la oferta con la demanda, etc. En segundo lugar, aun tomando la definición walrasiana, mostrar que pueden existir equilibrios "raros"; el equilibrio neoclásico involucra precios para cada una de las mercancías, cantidades de producción y de consumo para las empresas y familias respectivamente, estas cantidades pueden ser semipositivas, y optimizar las funciones de beneficio y de utilidad, pero esto no implica, que la economía sea la "óptima".

Por lo cual este trabajo consta de dos partes: la primera son varios párrafos dedicados a mostrar como las escuelas económicas más importantes que han existido en esta forma de producción tienen una teoría de desarrollo económico que puede ser asociada con una concepción de equilibrio, el segundo es el planteamiento de un modelo lineal neoclásico de equilibrio usando matrices de insumo producto.

Explicuemos más que se busca con "la parte histórica": es reconocido que fueron los economistas clásicos los primeros en investigar a el sistema económico en su conjunto, tratando de descubrir sus leyes y sus tendencias. Arrow sintetiza que el asunto, por ejemplo para Adam Smith era investigar como existe "un grado notable de coherencia entre el vasto número de decisiones individuales y aparentemente separadas de la compra venta de bienes... hay una especie de balance entre las cantidades de bienes y servicios que algunos individuos quieren comprar y las cantidades que otros individuos pueden vender", y enseguida pasa a aseverar que esto -el grado notable de coherencia- ha sido una constante a travez del tiempo exepcto algunos momentos en donde "la oferta de mano de obra y del equipo disponible para la producción de bienes ha excedido a su utilización, a veces en cantidades muy considerables".

Así enmarcado el problema, la teoría del equilibrio, no es más que un topico que ha explicado y analizado a que se debe ese "grado de coordinación entre la oferta y la demanda" y se reconoce a Jevons, Menger y Leon Walras quienes han dado una explicación satisfactoria: "el hecho de que todos los agentes de la economía afronten el mismo conjunto de precios, provee el flujo común de información necesario para la coordinación del sistema. Se sostiene que existe un conjunto de precios, uno para cada bien, que igualará la oferta y la demanda de todos los bienes, y si la

oferta y la demanda fueran desiguales en todas partes, por lo menos algunos precios cambiarían, mientras que en el caso opuesto no cambiara ninguno. A causa de las últimas características, el balanceo de la oferta y demanda sobre estas condiciones puede llamarse equilibrio de acuerdo con el uso habitual de ese término en la ciencia y las matemáticas"

Pero la búsqueda en la explicación de "la notable coherencia" existente en la economía por los clásicos era mucho más amplia que las actuales interpretaciones. Los fisiócratas plantearon las condiciones para que una economía agrícola se reprodujera, esto fue desarrollada en su cuadro económico. Adam Smith argumentaba las causas de la riqueza de una nación, mientras que Ricardo se centraba en las leyes de la distribución del producto entre las clases sociales. Por otro lado, los economistas de los años setentas del siglo pasado hacían planteamientos alternativos a los desarrollados por el marxismo. Las escuelas económicas más importantes de este siglo, fundamentalmente el keynesianismo y los neoliberales, se han empeñado en estudiar los problemas más agudos que han surgido; sus proposiciones en determinados momentos, han sido la guía para la acción para las burguesías respectivas. Por un lado los keynesianos buscan una economía que no sólo tome en cuenta "la notable coherencia entre la oferta y la demanda", sino además, construyen una teoría del equilibrio que toma en cuenta entre otros aspectos a la "ocupación", centrándose en aspectos como el consumo y la inversión. Por otro lado los monetaristas justifican que la alteración del funcionamiento del sistema económico se debe a perturbaciones en la esfera dineraria, descalifican las medidas keynesianas y plantean un viejo discurso con renovados argumentos, para aseverar que el motor de la economía es el sistema financiero.

El problema de fondo que han tratado de atacar y resolver la ciencia económica desde antes de A.S hasta los monetaristas, es crear teorías globales de funcionamiento económico, es decir el desarrollo de modelos que explican la actual economía, por lo que, entonces, han existido tantos, modelos de economía como escuelas, es decir no sólo existe una "teoría del equilibrio". Aunque en una primera etapa no eran necesarios los modelos matemáticos tan sofisticados como los actuales para llevar a cabo tal tarea.

La teoría del equilibrio económico no sólo es una explicación a el "grado notable de coherencia de las vastas decisiones", sino que pretende ser la base para un modelo de funcionamiento para la economía actual.

El problema para que esto sea así son los elementos que considera centrales para la explicación del funcionamiento y la tendencia de la economía, los cuales sólo se ubican en el terreno de la circulación.

El concepto de equilibrio usado en las ciencias se refiere en primer lugar a tener bien definidos los elementos de un sistema, a el descubrimiento de las propiedades y leyes fundamentales que determinan el funcionamiento del sistema, a la concatenación de estas leyes y finalmente a estudiar la tendencia del sistema.

La teoría del equilibrio económico no es una teoría que sólo busca las hipótesis bajo las cuales se da un notable grado de coherencia entre la oferta y la demanda, sino el análisis de las leyes, el desarrollo de estas y su resultado final.

Cabe señalar que se observan varios métodos bajo los cuales se ha abordado este problema.

Los economistas clásicos basaban su análisis de la realidad existente y de aquí planteaban lo que debería ser lo central, y daban su teoría de funcionamiento económico. Actualmente se parte al revés. Los modelos de economía estudiados por los neoclásicos suponen el comportamiento de los agentes económicos y bajo una serie de hipótesis llegan a encontrar cantidades que cumplen todo un conjunto de ecuaciones, los cuales están basadas en definiciones matemáticas, exentas de contradicciones, y así se demuestra entonces el grado notable de coherencia entre el vasto número de decisiones de los diversos agentes económicos. Pero esto supone que se han encontrado los comportamientos finales de cada uno de los elementos, tanto exógenos como endógenos. Es decir primero se supone una economía, se da una definición sin contradicciones y a través de un razonamiento lógico se establece la coherencia de la economía. La coherencia de la economía se reduce a encontrar un conjunto de cantidades que entre otras cosas iguala la oferta con la demanda. Este planteamiento es un tanto reduccionista. La suposición de las leyes que rigen la economía no se basa en una explicación de los fenómenos reales, sino que se supone de antemano cuales son las leyes que deben de existir. El planteamiento de hipótesis simplificadoras en muchas ocasiones ayuda a resolver una serie de problemas, pero aquí sólo ayuda a esconder una serie de problemas económicos.

El planteamiento económico marxista se basa en un análisis de las leyes económicas, estas leyes son el resultado de las relaciones de producción. El marxismo se dedica a mostrar la tendencia de estas leyes, llegando a la conclusión de que el capitalismo no es más que otro modo histórico producción. En el contexto de la discusión del concepto equilibrio económico el marxismo, entonces, también tiene un planteamiento

Mientras que los economistas estudian la "notable coherencia de la economía", el marxismo muestra que aunque

exista esta aparente "coherencia", lo que se establece finalmente, no es una economía en donde todos y cada uno de los agentes económicos obtienen lo mejor para sí y en consecuencia de la sociedad, sino que se puede llegar a situaciones que precisamente son el resultado contrario de lo que se quería. Los teóricos del equilibrio afirman que en los individuos existe un comportamiento bien definido, si nadie en la búsqueda de sus objetivos entorpece a otros individuos, y bajo el ya bien determinado "rango de valores económicos" individuales, cada individuo obtendrá lo "óptimo", y la suma de cada uno de estos "óptimos" establece "óptimo" social. El marxismo afirma que el resultado que se establece en la economía, en muchas ocasiones no es lo que los individuos buscan, en muchas ocasiones, se llegan a resultados opuestos.

Las bases filosóficas y políticas que sustentan a el marxismo en su planteamiento económico han generado una reacción muy fuerte por parte de otras corrientes económicas. Pero aun hoy el análisis presentado por Marx no sólo es un método o la base para el análisis de las leyes y tendencia del capitalismo.

Lo presentado en la parte histórica de este trabajo no pretende ser un resumen de las teorías económicas que han planteado las escuelas, esto queda fuera de este trabajo. Sólo se presentan las ideas básicas que pueden servir para profundizar más en un análisis posterior. tampoco se tocan a todos aquellos que son reconocidos como los fundadores de la teoría clásica del equilibrio, consideramos a las escuelas más reconocidas sin dejar de considerar el mérito que han realizado otros autores.

En la segunda parte del trabajo se presenta un modelo lineal neoclásico del equilibrio basado en el método de insumo producto. La base que sirvió para la realización de esta parte fue el libro: Lectures on the Mathematical Method in Analytical Economics de Jacob T Schwartz, lo que se hizo fue desarrollar su modelo.

En el desarrollo del modelo se encontraron una serie de problemas los cuales no están bien resueltos por Schwartz. Uno se refiere a la desigualdad que refleja el que toda demanda es cubierta por una oferta. Aquí Schwartz generaliza la igualdad de oferta con demanda, una simple generalización no explica gran cosa. Otro aspecto a desarrollar de manera diferente es el tratamiento de los planes de producción que maximizan la ganancia en equilibrio. Por otro lado para la existencia de precios de equilibrio es necesario el que exista una única tasa de ganancia en toda la economía, pero esto no es posible a menos que se hagan una serie de simplificaciones.

En el primer capítulo de la parte B, se dan las definiciones y se explica el funcionamiento de la economía. En el segundo capítulo se plantean una serie de ejemplos de posibles equilibrios. El tercer capítulo, se prueban una serie de proposiciones para la economía en equilibrio, se muestra que esta es exógena. El capítulo cuarto se dedica a probar la existencia del equilibrio y, finalmente el quinto capítulo de esta parte se da una discusión sobre la localización de los puntos de equilibrio, a través de argumentos heurísticos, se establece que los equilibrios más factibles se encuentran en torno a salarios que son casi nulos. Además damos cuatro apéndices, aquí se establecen los resultados para ver como son las cantidades de producción y de precios de equilibrio

Sobre la notación: $L(A)$ es el vector propio positivo asociado a la matriz A cuadrada conectada no negativa. E se le llama matriz de capital fijo preservando la nomenclatura de Schwartz, pero no debe confundirse con el concepto usual de capital fijo, En su lugar más bien debería decir matriz de recursos necesarios.

PARTE A

A.1 LOS FISIÓCRATAS.

Los primeros economistas que hicieron conciencia de que la economía estaba regida por leyes, que estas leyes determinaban el rumbo económico y, en consecuencia, el de la sociedad, fueron los fisiócratas.

"Los fisiócratas suponían que el sistema de intercambio del mercado, el cual tenían como objetivo principal del análisis, estaba sujeto a ciertas leyes económicas; objetivos que funcionaban independientemente de la voluntad del hombre y eran susceptibles de ser descubiertas a la luz de la razón. Estas leyes gobernaban la forma y el movimiento del orden económico y, por tanto la forma y el movimiento del orden social en su totalidad".

Las ideas fisiócratas diferían en forma sustancial de las predominantes en su época, el mercantilismo, el cual era impulsado no sólo por el gobierno inglés si no también por los gobiernos de España, Portugal y los países bajos. "Los mercantilistas dedicaban la atención principalmente en sus obras a los problemas del comercio y el dinero, contraponiéndolos a las cuestiones de la economía feudal y a los fundamentos naturales de la hacienda de los señores feudales terratenientes" (2). Es decir los mercantilistas eran economistas que surgieron en la fase final del feudalismo y únicamente centraban su atención en la esfera de la circulación del capital. La idea central que atravesaba sus planteamientos era: "Debemos procurar comprar a los extranjeros menos de lo que pensamos venderles" (3).

Los mercantilistas tenían una doctrina económica la cual puede sintetizarse en cinco puntos .

1. El bienestar de un país depende de la masa de su población y su incremento.

2. El bienestar de una nación depende de la masa de metales preciosos que tenga a su disposición.

3. Debe activarse al máximo el comercio

exterior para obtener un saldo favorable en la balanza comercial para así conseguir abundancia de oro y plata.

4. El comercio y la industria contribuyen más al bienestar nacional que la agricultura.

5. El Estado es el encargado de lograr el bienestar nacional mediante una política económica que asegure el cumplimiento de tales principios.

Las consecuencias que se desprenden de esta doctrina tenían un doble filo: la prosperidad por un lado y su contraparte la decadencia de la economía.

Ya que el planteamiento mercantilista era tener una "balanza comercial positiva" (comprar poco y vender mucho), se establecieron una serie de reglamentaciones para la producción y comercialización de los distintos productos. Esto chocaba con el desarrollo económico que se iba teniendo. Las medidas proteccionistas aseguraban el monopolio en el mercado, el desarrollo de los gremios capitalistas, y el crecimiento del mercado internacional. Todo lo anterior va creando una contracción que no puede resolver la protegida economía que se basaba en talleres medievales.

En el s.XVI surgen industrias desarrolladas en Holanda, Francia, Inglaterra y se extienden también a otros países. La producción fundamental era la de paños. Inglaterra para estas épocas era abastecedora de lana a otros mercados, y al lograr el monopolio mediante el proteccionismo, se convierte de un país exportador de lana en exportador de paños. Para la mitad del s.XVI, Inglaterra se plantea tener el control del mercado a todos los niveles. A las medidas proteccionistas anteponian su poderío militar: Primero se introdujeron en la India, después fundaron colonias en América (E.U.), en 1558 destruye la "Armada invencible" de España, en el s.XVII se entabla la guerra entre Holanda e Inglaterra, y así Inglaterra quita a Holanda el monopolio de "fletador de Europa". Y en el s.XVIII se lleva a cabo la guerra comercial entre Francia e Inglaterra. "En resumen; durante cerca de 70 años se prolongaron guerras comerciales mantenidas por Inglaterra en el mar. Por tanto, la política bélica del mercantilismo propiamente dicho se reducía, en primer lugar, a asegurar la expansión comercial de Inglaterra en el mundo" (5).

Por otro lado, por ejemplo, en la Francia de Luis XIV a la vez que se impulsaba el comercio exterior, la navegación y la industria, también se impulsaba un alto proteccionismo, dejando de lado a la agricultura: "fueron dictados cerca de 200 reglamentos gubernamentales sobre la calidad de los productos de exportación, la longitud y el ancho de los tejidos, el número de hilos de la trama, los modos de teñir las telas, etc. los reglamentos constaban de numerosos párrafos, cuyo cumplimiento era vigilado por inspectores especiales de manufacturas, que intervenían en todo, incluso en los detalles de la fabricación, llevando a cabo y registros. Estaba muy extendido el sistema de multas y confiscaciones por infracción de las normas de fabricación de las mercancías" (6).

La industria francesa no tenía la suficiente capacidad para adecuarse a las situaciones cambiantes, aunado lo anterior a la guerra con Inglaterra por el dominio de los mercados, desplazaron a Francia de sus dominios.

Los reglamentos que en un momento habían servido para tener el control de los mercados, se convertían en una traba para el desarrollo económico subsiguiente. Los análisis posteriores tratan de plantear el centro del desarrollo económico en proposiciones deferentes a los mercantilistas.

En el contexto anterior es donde se ubican los Fisiócratas. "Frente al antiguo orden autoritario, con sus impuestos, códigos y sanciones, se levantaba el concepto de un orden natural, cuya mano-sólo se reía cuando el hombre, roto sus yugos, volvía a la libertad y de cuyas sanciones disponía la voluntad popular. En oposición al derecho divino autoritario se levantaba el derecho natural del individuo. Fue en este contexto en el que se desarrolló el concepto de una sociedad económica. En contra de las orientaciones autoritarias del mercantilismo, la Economía Política ofrecía la concepción de un orden económico regido por una ley natural que marcharía sólo si se le dejaba sólo y que daría mejores resultados si la ley natural pudiera operar libremente y sin estorbos.

El individuo tenía un derecho natural de buscar su propio interés personal porque, al hacerlo así, ayudado por aquella mano invisible, fomentaba el bien común (7)".

En términos más concretos, los fisiócratas planteaban la más completa libertad tanto en la producción como en la circulación de mercancías, es decir, menos impuestos, aranceles, mantención de precios bajos, etc.

Para la época de los fisiócratas el capitalismo irrumpía y se consolidaba en los países europeos, pero el análisis presentado por la escuela francesa, no era el de toda una economía capitalista. Veamos el análisis presentado por los fisiócratas.

Se analizaba la producción por medio de la industria imperante en ese momento, que se redujo a un conjunto de talleres artesanales, y se comparaba con la producción agrícola, de aquí se extraía la conclusión de que la agricultura era la única rama de la producción productiva; es decir, en la agricultura se era capaz de extraer una cantidad mayor de producto que la utilizada en el proceso productivo. Mirabeau decía "le doy un pedazo de paño a un sastre: no será capaz de aumentarlo de modo de sacar de él una casaca para él y otra para mí" ().

En el planteamiento fisiocrático se dará más importancia a la producción agrícola que a la industrial. En su análisis se concibe a la economía como todo un sistema, e investigan a todo el sistema en su conjunto.

Se parte de que si los individuos son dejados obrar libremente, sin ninguna traba que obstaculice sus objetivos, se establecerá un "orden" en la sociedad. La sociedad a la que se tiende en los fisiócratas es una sociedad "ordenada" y además una sociedad donde el "orden" trae una serie de ventajas que de otra manera no existirían. La hipótesis que se maneja es que cada individuo no sea obstaculizado y él no obstaculice a los demás, el Laissez-faire, Laissez-aller (dejad hacer, dejad pasar) se convierte en el fundamento de su planteamiento.

Se parte de que en la economía existen leyes, por ejemplo, cada individuo es ambicioso y quiere realizar sus ambiciones, si existe libertad, cada individuo podrá realizar su objetivo, como los individuos no se obstaculizan, todos los individuos que conforman la sociedad, obtendrán la satisfacción de obtener lo que desean. La ambición es el motor de la sociedad, y esta ambición individual conlleva a una sociedad que es "ordenada". El resultado de la existencia de las leyes económicas es una ley: el orden natural.

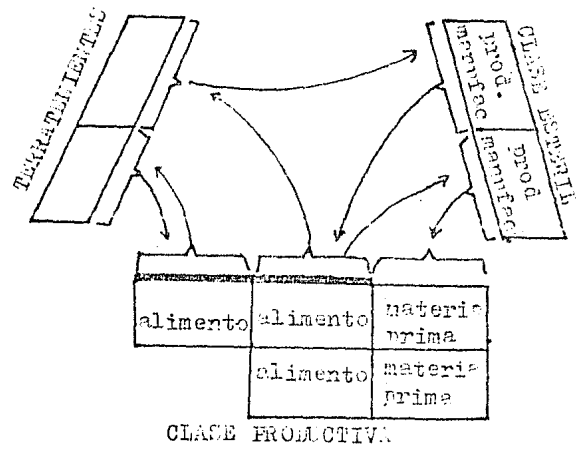
La fundamentación del porqué debe existir la más completa libertad (dejad hacer, dejar pasar) no se restringe a mostrar las ventajas para la economía; los aranceles, los impuestos, los reglamentos, etc.;, son un conjunto de medidas que no hacen competitiva a la industria, y ante el avance de Inglaterra, hace que entre otros países, Francia pierda mercados y colonias.

La economía que planteaban los fisiócratas es la siguiente.

Considerando únicamente productiva a la agricultura, la industria es importante porque sin ella la sociedad no puede existir, es decir en la industria no se crea un excedente de producción o "producto neto". Con esta concepción fisiócrata entonces harán su análisis en una economía agrícola, y el "orden" que se restablecerá será sólo en esta rama de la producción. Para mostrar que únicamente en la agricultura existía "producto neto" se comparaba la producción final, con los insumos que se requerían en la producción. En la industria, observaban que la materia prima se transformaba en un producto, (el paño se convertía en una prenda de vestir) aquí no era posible para los fisiócratas realizar la diferencia que se hacía para la agricultura. Se planteaba que el origen del crecimiento de la producción agrícola era la tierra, dependiendo de la fertilidad del suelo se obtendría un mayor producto neto, en conclusión los obreros que trabajaban en la industria manufacturera eran considerados como una clase social "estéril".

Teniendo como base las ideas anteriores se construye el tablieu économique. (9) la tabla económica muestra como deben circular las mercancías durante un periodo productivo para que se vuelvan a dar las condiciones para iniciar un

nuevo periodo de producción. En la tabla se considera a una sociedad en donde existen tres clases sociales: 1. La clase "productiva" o arrendatarios cuyo trabajo es el único productivo ya que es capaz de ser creador de producto neto (aquí se incluye a la burguesía y a los asalariados que desarrollan su actividad en la agricultura). 2. la clase que se apropia de este excedente: terratenientes, iglesia y Estado y 3. la clase "estéril" de los manufactureros. Haciendo algunas hipótesis simplificadoras la tabla sirve para mostrar como todo el producto anual de esta sociedad debe circular entre estas tres clases y se desarrollen las condiciones para iniciar un nuevo proceso productivo. Para este fin los cambios ocurren en una suma global al final del año y al mismo tiempo se van preparando todos los factores de producción allí donde se les necesita al comenzar el nuevo año. Para dar una idea, aquí no haremos uso de las líneas que usa Quesnay, en su lugar usaremos un diagrama para el tableau economique.



El diagrama representa la situación antes del cambio. La clase productiva posee cinco mil millones de unidades monetarias, valor de su propia producción total, tres mil millones en alimentos y dos mil millones en materias primas y, además dos mil millones en dinero que se utiliza únicamente como medio de cambio y se supone aquí que lo tiene dicha clase por razones de exposición. Los propietarios no poseen nada, pero reclaman a la clase productiva rentas por dos mil millones -que es igual al producto neto de la agricultura (es decir igual al excedente que se produjo). La clase estéril posee dos mil millones en productos manufacturados.

Para comenzar la clase productiva paga renta en dinero, dos mil millones de unidades monetarias, a los propietarios -el acto se indica en el diagrama con las dos flechas que salen de la línea gruesa y maciza que apunta al sector de los propietarios-. Otras flechas indican la dirección en que este dinero fluye al realizar la circulación de los artículos producidos. Los propietarios compran con mil millones alimentos para su consumo, devolviendo de este modo la mitad del dinero adelantado por la clase productiva a su lugar de origen. Con la otra mitad de la renta por ingresos de ventas, los propietarios compran artículos manufacturados a la clase estéril, la que a su vez emplea este dinero en comprar alimentos a la clase productiva. Esta compra con el dinero que tiene en sus manos artículos manufacturados a la clase estéril, la que a su vez compra productos agrícolas (para ser usados como materias primas en el periodo siguiente) a la clase productiva, devolviéndole de esta forma otros mil millones en dinero a su punto de origen. Además la clase productiva se "compra" a sí misma mil millones de su propia producción en alimentos y otros mil millones en materias primas para el periodo siguiente. Estos son cambios internos que se dan en el seno de esta clase y están por lo mismo, en la segunda cubierta del diagrama. El segundo diagrama representa la situación después de que todas las rentas y todas las compras han terminado. Cada una de las tres clases están en posesión de los artículos necesarios para entrar en un nuevo periodo de producción y el dinero, que desempeña sus funciones como medio de cambio ha vuelto a su lugar de origen.

PRODUCTOS
 alimento
 renta
 prod.
 manufac.

CLASE ESTÉRIL
 materia
 prima
 alimento

prod. manufac.	
alimento	materia prima

CLASE PRODUCTIVA

Se plantea que mientras mayor sea la cantidad de producto neto, la sociedad es más próspera. La cantidad de producto neto depende tanto de la fertilidad del suelo, la extensión cultivable y por la capacidad que tienen los hombres de manera más avanzada. Los intercambios que se hacen en la tabla dependen del producto neto, es decir de la renta de la tierra. El problema para que la sociedad sea próspera será el recomendar aumentar la renta: al aumentar el producto neto, se aumenta de manera automática la renta, esto trae como consecuencia una elevación en el consumo para los propietarios, con esto se impulsa la manufactura, y por otro lado al aumentar la renta una parte de esta se utiliza en la inversión para mejorar o hacer cultivos más amplios. Los fisiócratas daban algunas recomendaciones para obtener un mayor producto neto, entre otros puntos recomendaban que se constituyera un "fondo contra riesgos" el cual debería ser utilizado no únicamente para aquellas situaciones para las cuales fue creado, sino el fin debería ser para que se ampliaran los cultivos. Pero los fisiócratas recomendaban como mejor forma de hacer crecer el producto neto, el que una parte de la renta se invirtiera, disminuyendo con esto el consumo que lleva a cabo la clase estéril.

Si por acumulación entendemos la utilización del plusproducto en nuevos procesos productivos, los fisiócratas entonces recomendaban que este

proceso se desarrollara lo más plenamente en la agricultura. Pero si esta situación ocurre llegara el momento en que ya no haya más tierra por cultivar, pues ya toda estará cultivada y con esto el proceso de acumulación se detiene. La tabla económica se refiere a esta situación en la cual todo el territorio ha sido cultivado utilizando los métodos más eficaces de cultivo y con esto el producto neto es el máximo posible. Esta es la sociedad que los fisiócratas plantean.

La recomendación fisiocrática será entonces el cultivo de toda la tierra posible, utilizando los métodos más modernos de producción, pero para hacer esto debería existir la más completa libertad y así los individuos realizarían sus objetivos, en particular se debería abolir toda restricción a la exportación de granos, y eliminar todo lo que se oponga a un funcionamiento competitivo del mercado de bienes manufacturados.

En resumen: los fisiócratas consideraban que las mercancías se producían en la agricultura y sólo ellas arrojaban un excedente, la manufactura es considerada estéril. Si los hombres son dejados obrar libremente y el Estado no obstaculiza las leyes que operan en la sociedad, se tenderá al orden natural, en donde el producto neto que se obtendrá será el máximo posible. La tabla económica nos muestra precisamente ese orden de la sociedad. En esta sociedad todo el territorio estará cultivado y se utilizarán las mejores técnicas de producción.

Los problemas en la concepción fisiocrática: el análisis de una economía agrícola, el sólo ver productiva la agricultura, el no considerar la industria como generadora de "producto neto", etc. Pero dentro de los méritos fisiocráticos es que fueron los primeros en tratar de investigar las leyes económicas, y precisamente buscarlas en aquellas actividades que están vinculadas al proceso de producción y circulación.

Pero existen otros problemas ligados a la exposición.

El equilibrio general económico, es el resultado del funcionamiento de las leyes económicas, las cuales están determinadas por las actividades que se repiten continuamente y constantemente. Las leyes tienen una interacción recíproca y finalmente de esta compleja interacción se establece el camino de la economía la ley económica final para los fisiócratas es el "orden natural". El "orden" no se argumenta de manera explícita en términos de la flexibilidad de los precios, mercados competitivos, igualdad de oferta con demanda etc. El argumento fundamental es que si los individuos obran de acuerdo a "dejar hacer, dejar pasar" la ley será el "orden natural". La explicación de reproducción económica y tendencia global de la sociedad reproduciéndose de manera cíclica será una tendencia al equilibrio, donde las fuerzas económicas cesan de funcionar, es decir, las fuerzas económicas, que son el resultado de las actividades, generan leyes y llega un momento en el cual cesan, y se afirma que cesan cuando se ha establecido el "orden". Pero surge una pregunta, ¿Por qué no surge el desequilibrio? Los fisiócratas pensaban que la economía basada en los principios mercantilistas llevaba a ésta al caos. es por ello que contra las restricciones planteaban la libertad, etc. Al negar el mercantilismo negaban el desequilibrio, pero no argumentaban como al establecerse el Laissez faire, también se genera el desequilibrio. Este será un tema a tocar por los pensadores económicos de la época.

Para terminar esta parte, veamos que pensaban los fisiócratas de la tabla económica: "desde el principio del mundo no ha habido tres invenciones tan grandes, - dice el marqués de Mirabeau- ni que hayan dado tanta estabilidad a las sociedades políticas, no contando ahora con otros inventos que las han enriquecido y la han adornado, como la de la escritura, la cual solo habilita a la naturaleza humana para transmitir sin alteración sus leyes, sus contratos, sus anales y sus descubrimientos. La segunda es la invención de la moneda que liga todas las relaciones que tienen entre sí las naciones civilizadas. La tercera la tabla económica, que es el resultado de las otras dos, que las completa y perfecciona sus objetivos; el gran descubrimiento de nuestra edad pero cuyo beneficio y fruto sólo nuestra prosperidad ha de ser que la disfrute" (1).

BIBLIOGRAFIA (FISIOCRATAS)

- (1) Maurice Dobb, Teorías del valor desde Adam Smith, FCE Méx. 1970 p.14
- (2) Karataev, Ryndina, Stepanov y otros. Historia de las doctrinas económicas. Grijalbo, Méx. 1964. p.69
- (3) Op cit. p.70
- (4) Osvaldo Sunken y Pedro Paz. El subdesarrollo latinoamericano y la teoría del desarrollo. S.XXI. Méx. 1982 pp.100-102.
- (5) Karataev.....p.74.
- (6) Op.cit. p.127
- (7) Maurice Dobb. Introducción a la economía. FCE. Méx. 1986 p.13-14.
- (8) Op.cit. p.14
- (9) El planteamiento aquí expuesto es un resumen tomado de Paul Swesy de su libro Teoría del desarrollo capitalista FCE Méx. 1981 pp. 397-399.
- (10) Adam Smith. Investigación sobre la naturaleza y causas de la riqueza de las naciones. FCE. Méx. p.606.

A.2 ADAM SMITH.

En la época de Adam Smith aún se continuaba con la idea fisiocrática la cual plantea que las leyes económicas conducen a un orden económico y por tanto a un orden social, pero esta concepción había sido reformulada teniendo en cuenta varios problemas que habían surgido.

La opinión anterior no era la única, existían opiniones diametralmente opuestas. Thomas Hobbes partía de hipótesis similares a las de los fisiócratas pero llegaba a conclusiones contrarias a las ya expuestas. Les tocó a Hume y Locke rebatir los argumentos de Hobbes, pero no es si no hasta que con A. Smith que da una argumentación más "completa" de como la "ambición de cada uno de los individuos" no lleva a destrucción de la sociedad, como planteaba Hobbes, si no que se crea una economía en la cual las fuerzas individuales al actuar libremente conducen a una economía la cual es "mejor" para todos; la ambición individual entonces se convierte en el elemento fundamental para llegar a una sociedad la cual es "mejor".

"Los economistas en la época de Adam Smith basaban su preocupación en la noción del derecho individual como fuerza conductora de la economía. A partir de allí se modeló la concepción general de un sistema económico, propulsado por un ímpetu propio y la idea de que su movimiento estaba formado por leyes económicas específicas, fue la contribución que reveló y estableció la economía política clásica. Esto estaba dicho en la muy conocida frase de Hegel: de las acciones de los hombres se deriva algo distinto de lo que ellos desearon y pensaron concientemente"(1)

De toda esta problemática, aquí sólo abordaremos dos aspectos, en primer lugar la discusión que se planteó entre Hume, Locke y Hobbes, y en segundo lugar, como resultado de lo anterior, el análisis presentado por A. Smith

Tengamos presente que los fisiócratas planteaban que los hombres son ambiciosos, y que si estos son dejados obrar libremente y nadie los entorpece en la búsqueda de sus intereses se tenderá a una sociedad la cual es la "mejor" en el sentido de que se obtendrá el máximo producto neto y por tanto se establecerá el orden natural.

Ya habíamos mencionado que la anterior aseveración entraba en contradicción con otros planteamientos entre ellos con el de Hobbes: "Las leyes de la naturaleza (justicia, equidad, modestia, piedad, en suma has a otros lo que quieras que otros hagan por ti) son, por si mismos, cuando no existe el temor a un determinado poder que motive su observancia, contraria a nuestras pasiones naturales, las cuales nos inducen a la parcialidad, al, orgullo, a la venganza y a cosas semejantes. Por consiguiente a pesar de

las leyes de la naturaleza si no se ha instituido un poder o no es suficientemente grande para nuestra seguridad, cada uno fiará tan solo, y podrá hacerlo legalmente, sobre su propia fuerza y maña, para protegerse contra los demás hombres...Es cierto que determinadas criaturas vivas como las abejas, las hormigas, viven en forma sociable una con otra y no tienen otra dirección que sus particulares juicios y apetitos, ni poseen el uso de la palabra mediante la cual uno pueda significar a otra lo que considere adecuado para el beneficio común...El unico camino para erigir semejante poder común, capaz de defendernos contra la invasión de los extranjeros y contra las injurias ajenas asegurándonos de tal suerte que por su propia actividad y por los frutos de la tierra pueden nutrirse a si mismos y vivir satisfechos, es conferir toda su fortaleza a un hombre, todos los cuales, por pluralidad de votos, pueden reducir sus voluntades a una voluntad. Cada hombre hace un pacto con los demás: autorizo y transfiero a este hombre o asamblea de hombres mi derecho a gobernarme a mi mismo, con la condición de que vosotros transferéis a él vuestro derecho, y autoricéis todos sus actos de la misma manera. Hecho esto, la multitud así unida en una persona se denomina Estado. La esencia del Estado la podemos definir así: una persona de cuyos actos una gran multitud por pactos mutuos, realizados entre si, ha sido instituida por cada uno como autor, al objeto de que pueda utilizar su fortaleza y medios de todos, como lo juzgue oportuno, para asegurar la paz y la defensa común" (2)

Es decir T. Hobbes afirmaba que cada hombre buscando satisfacer sus intereses, tendrá que actuar egoístamente y como resultado, en la sociedad, después de que cada individuo a tratado de alcanzar su objetivo habrá un caos; Hobbes aseveraba que " un estado de naturaleza en el cual cada comportamiento humano no tiene otro móvil posible excepto el de la mera autoconservación, de cada uno o egoísmo, en el cual si alguna vez fuese posible su realización integral, tendría lugar una guerra general disgregadora de cada uno contra los demás" (3)

La sociedad que plantea Hobbes sería aquella en la cual existan guerras constantes, esto como consecuencia de los intentos al tratar de mejorar su mezquino interés personal: "la pugna de riquezas, placeres, honores u otras formas de poder inclina a la lucha, a la enemistad y a la guerra. Porque el medio que un competidor utiliza para su consecución de sus deseos es matar y sojuzgar, suplantar o repeler a otro" (4). El conjunto de acciones humanas que se repiten constantemente, que van conformando el desarrollo histórico de la sociedad; y que mantienen una regularidad, repitiéndose continua y constantemente, será en efecto la guerra general; esta concepción anárquica de la sociedad se contraponen en lo fundamental con la visión de los fisiócratas, y así sus premisas y conclusiones son cuestionadas.

Con una sociedad de individuos donde todos son ambiciosos y donde ésta no tiene límite: "ya que nada le satisface y queriendo ser feliz, el hombre es cada vez más infeliz" (5) siempre existirán guerras. ¿Cómo evitar esta situación? La solución que da Hobbes, plantea que debe existir una fuerza coercitiva dentro de la sociedad para controlar a los individuos; esta fuerza coercitiva es el Estado: "No existe una sociedad civil que en el orden natural preceda lógicamente al Estado, sino que es en virtud de la constitución del Estado que se forma la sociedad" (6). Si la guerra es el producto de cada vez más poder por parte de los individuos, la paz se logrará al disminuir este poder: "Para su propia felicidad es menester que el hombre frene su afán de poder". La paz será un hecho si cada hombre se propone no ser una amenaza para sus semejantes. La "felicidad" que no se logra queriendo satisfacer sus metas, puede lograrse si se aspira a una vida "confortable", esto se logra con la fuerza del Estado.

En contraposición a la tendencia de la guerra general y a un alto control por parte del Estado, los filósofos tendrán por tarea mostrar precisamente lo contrario: la ambición y el egoísmo que son los móviles de los individuos para satisfacer sus intereses producen una situación la cual no es el caos; es necesaria la libertad en la sociedad para que no ocurran desperfectos. Veamos como argumentan lo anterior tanto J. Locke como D. Hume.

Tanto en Locke como en Hobbes existir algunas coincidencias. Los dos aceptaban la existencia de un "estado natural", pero lo que entendían era diametralmente opuesto, veamos primero visión de Locke.

"Para Locke, un estado de naturaleza era definido por el hecho de que no hay una autoridad civil convenida que gobierne las acciones de los hombres. Afirma que en ausencia de un gobierno civil, todos los hombres son libres e iguales en el sentido de que ninguno tiene derecho natural a gobernar a los demás, cada quien es igual a cada cual en su poder político legítimo. La razón de que la soberanía individual absoluta no conduzca al completo caos, piensa Locke, es que cada quien tiene la ley de la naturaleza para guiar sus acciones. Aunque Locke nunca se muestra explícito sobre el contenido de esta ley de la naturaleza, si afirma que su fuente es Dios, y que se da a conocer a través de la razón, con sólo que los hombres desistan emplear su intelecto con tal propósito. Lo que enseña es que nadie debe dañar a otro en su vida, su salud, su libertad o sus posesiones. En realidad como los hombres son obra de un hacedor "omnipotente e infinitamente sabio" y en el mundo, para cumplir con su voluntad, cada persona tiene el deber de conservarse a si mismo y además cuando su propia conservación no entra en juego, debe hacer lo mejor para conservar a la humanidad. Así, el hombre tiene un derecho natural a vivir libre del daño de otros hombres, y

los derechos, correlativos: no dañar abiertamente a ningún ser humano, y proteger su propia vida y la de los demás.

"Así pues, la ley de la naturaleza garantiza que el estado de naturaleza Lockiano no sea la guerra de todos contra todos que caracterizó a Hobbes.

"En el estado Lockiano de naturaleza, la gente trabaja, recoge alimentos, siembra y cosecha, alquila sirvientes, crea y usa herramientas, intercambia los productos de su trabajo entre sí, por último usa el dinero. No sólo ocurren todas estas actividades, si no que conducen al crecimiento económico y al desarrollo de las instituciones económicas que finalmente se vuelven incompatibles con la continuación del estado de naturaleza. Cuando esto ocurre, los hombres se dedican a formar un gobierno civil que ayude a mantener el desarrollo económico ya logrado. Específicamente se crea la propiedad en el estado de naturaleza; es la necesidad de proteger la propiedad acumulada la que conduce a los principios de la sociedad civil".(7)

La naturaleza en Locke tiene una virtud, es responsable de los actos "malos" de los hombres: "para Locke el estado natural es esencialmente bueno, y si en el hay contrastes no dependen de una maldad natural de los hombres, si no de una especie de avaricia de la naturaleza física" (8); por naturaleza los individuos para conseguir lo que desean tienen que asesinar, desbancar, etc. a otros, y por tanto la naturaleza pone en peligro y en riesgo a la sociedad civil. Consecuentemente con esto plantea la "naturaleza" del Estado: "el Estado es la garantía de que cada individuo tenga seguridad de que no pueda ser despojado de su propiedad la cual se conquista por medio del trabajo"(9). El Estado es entonces el organismo que con la fuerza de la ley impide que la propiedad sea amenazada y en consecuencia permite el desarrollo del orden natural, es decir el Estado es el organismo que permite la existencia de la libertad de los individuos, y así los hombres tengan seguridad, y no como planteaba Hobbes: el Estado limita la libertad y sólo de esta forma puede existir la sociedad.

La limitación que tiene el método para abordar la problemática aquí tratada son evidentes, por ejemplo el problema del Estado, Lenin hace alusión a como debe ser tratado este tema: "Para poder abordar de la manera más científica este problema, es necesario hechar aunque sea una breve mirada a la historia del surgimiento y desarrollo del Estado"(10). Pero no únicamente lo anterior limita la visión del Estado, si no también su propio razonamiento interno: el desorden es debido a la naturaleza física, los hombres por naturaleza crean guerras al tratar de satisfacer sus ambiciones, esto trae como consecuencia que continuamente existan "desbancados", es decir se explica así la desigualdad social, y como esto es inherente a la naturaleza física ni el Estado ni nadie puede establecer la

"Igualdad" social, la función del Estado es que se logre conservar la sociedad civil.

Desde el punto de vista de David Hume no se ha logrado responder del modo más satisfactorio a T. Hobbes, y como aún no se ha llegado al fango del idealismo se continúa profundizando más en el, le corresponde a Hume realizar tal tarea.

D. Hume afirma que existe en los hombres un "sentimiento" distinto del egoísmo, este sentimiento es designado como "benevolencia", "sentido de humanidad", "simpatía", es, en primer lugar, de donde brotan los "juicios morales", que son juicios de aprobación para la virtud, o sea, para todo lo que es útil bajo aquel doble perfil individual y social; pero en segundo lugar es también el origen de un comportamiento virtuoso, ya que el sentimiento de la simpatía empuja a cada uno a obrar para el bien de los demás, como el mejor medio para conseguir un sistema de relaciones entre los hombres que resulta ventajoso al máximo para él mismo.

Con los anteriores argumentos se contraponían a la filosofía del egoísmo de Hobbes; por un lado la explicación de la "naturalaleza física" de Locke, y por otro lado el "sentimiento moral" de Hume. Pero Hume al reconocer en el Hombre el "sentido de humanidad" que logra lo mejor para sí y para los demás, ya no logró salir del pensamiento empirista, esta explicación toma vida propia y con ella no se puede explicar el problema político del Estado.

El problema para los filósofos de la época era doble: explotar la positividad del egoísmo del hombre, tomando en cuenta al sentido de humanidad dado por Hume y otros filósofos, y por otro lado reconsiderar el problema político del Estado que había planteado Locke.

Adam Smith hace esta doble tarea, en la teoría de los sentimientos morales: "La teoría de los sentimientos morales se preocupaba por explorar la motivación humana, la cual fue la esencia del orden automático burgués" (11). Claudio N. menciona que A.S. afirmaba que el individuo al buscar lo mejor para sí, conllevaba como consecuencia lo mejor para la sociedad. A.S. retomó el sentimiento moral humano, y analizando la zona donde brotan los juicios morales dice: "cuando alguien se esfuerza por conseguir la máxima ventaja personal en el cambio, obra más allá de su propia voluntad, para que sea máxima la disponibilidad de bienes para todos". (12) Es decir se genera algo "bueno" que el individuo le compláse y esto se refleja en el ámbito económico. La tesis central de A.S. es "que de hecho el egoísmo no es un elemento de desarrollo: puede, en el sentido de que para esta positividad del egoísmo resulte operante, es necesaria, al menos, una condición, y es que nadie, persiguiendo su propio interés, impida a los demás la persecución del suyo, es decir, es necesario que no haya

prevaricaciones, sean estas debidas a posiciones naturales de fuerza o lo sean a privilegios institucionales"(13).

La riqueza de las naciones es considerado como el discurso que plantea A.S. para explicar como el libre desarrollo de las fuerzas económicas da origen al desarrollo de la sociedad. Es decir el egoísmo es el responsable del desarrollo de la sociedad. La problemática del Estado se resuelve también en Smith dando una explicación económica. "El Estado debe de dar garantías y condiciones que son necesarias para el ordenado ejercicio de la producción, del cambio y del consumo"(14). El Estado no debe entorpecer la libertad de los individuos y así se llegará a una sociedad la cual es óptima para cada individuo y por tanto de la sociedad.

El planteamiento de Hobbes denominado filosofía del egoísmo es ahora cuestionado con un discurso que toma en cuenta la realidad económica de ese momento. Aunque en la interpretación de los hechos económicos una serie de problemas son importantes, las ideas de A.Smith crearon la corriente del liberalismo económico que aún hasta nuestros días subsiste.

La ley económica que se desprende -pudiera ser- para la sociedad en Smith vuelve a ser el "orden" que entendían los fisiócratas: los individuos al actuar egoístamente hacen progresar a la sociedad, y se establece una economía donde cada uno de los individuos obtienen lo que buscaban. Esta sociedad se reproduce una y otra vez y así la sociedad que se establece, es el "orden". El equilibrio que se genera en la economía es el resultado del comportamiento de todos y cada uno de los individuos. La premisa de la cual se parte es que exista la "libertad".

A.S. en su obra principal, trata de buscar -bajo la divisa del Laissez faire- los elementos que conducen a una nación a la riqueza. Es aquí donde tomando en cuenta las condiciones económicas y políticas de su época, muestra que existen leyes económicas, que lo único que hay que hacer es descubrir y dejar funcionar dichas leyes para que la sociedad "prosperere", es decir analiza y da recomendaciones para la actuación de terratenientes, empresarios, campesinos, obreros, pequeñas fabricas artesanales, etc., para que la "prosperidad" de la "sociedad", no sea una situación momentánea, si no algo más de corto y largo plazo.

Existe -entre lo que nos interesa aquí- dos elementos importantes de la concepción smithiana, uno de ellos es -repetiendo- la formación de la riqueza de una nación, y por otro lado cuales son las condiciones para que la sociedad en cuestión se reproduzca, es decir como debe circular la producción entre las clases sociales existentes para que la economía se vaya conduciendo al "orden económico". El primer tema esta asociado con la productividad del trabajo,

mientras que al segundo se le asocia con los problemas de la distribución. Tratemos de ver que dice A. Smith en cuanto a estos problemas.

Se analiza una sociedad donde existen tres clases sociales: propietarios de la tierra, la burguesía donde se incluyen a los arrendatarios y a los modernos empresarios y por otro lado a los trabajadores donde se incluyen a los obreros y campesinos. La sociedad analizada por A.S. tiene, entre otras características, las siguientes: los talleres artesanales van siendo desplazados ante la difusión y consolidación de la industria, esto es considerado en un primer plano. El trabajo asalariado va creciendo en contraposición al trabajo independiente o artesanal, así pues, los propietarios de los medios de producción -tierras y fábricas- contratan a los trabajadores. Como consecuencia de su análisis, que trata de buscar las condiciones para el enriquecimiento para una clase social, no tratará a los dos sectores que la conforman por igual, no tomará como algo importante a los terratenientes, si no que su análisis lo centrará en los empresarios. La tesis de que si cada individuo es dejado obrar libremente en la persecución de sus objetivos, la situación que se genera es lo mejor para sí, y como consecuencia lo mejor para la sociedad, será aplicada pero para los empresarios: cada empresario lo que trata de hacer es buscar la rama de la producción que le rinda un mayor beneficio, esto generará una situación de competencia de unos contra los otros, si las restricciones son nulas, se generarán "precios naturales" tales que serán benéficos para toda la sociedad.

La búsqueda de A.S. era similar a la de los fisiócratas, pero la forma de argumentarla era diferente, para los fisiócratas el laissez faire conducía al "orden natural", y argumentaban con el cuadro económico, como sería el "orden natural", el motor de la economía era la clase productiva identificada con los arrendatarios y campesinos. Para tener presentes las diferencias entre los fisiócratas y A.S. recordemos brevemente cómo argumentan los fisiócratas su planteamiento: el funcionamiento de la economía se basaba en el análisis del producto neto, se afirmaba que solo en la agricultura se obtenía dicho producto neto, y allí únicamente valía producir con las mejores técnicas de producción. La "acumulación" depende de qué tanta sea la fertilidad de la tierra. Los propietarios de la tierra son dueños del producto neto. Solo tiene una "teoría del valor" para la agricultura, solo en esta rama de la producción comparan el capital inicial con el capital final.

A.S. va más allá de lo planteado por los fisiócratas. En cada una de las tesis anteriores A.S. las niega o las amplía. Smith no argumenta que la riqueza de las naciones se base en la cantidad de producto neto obtenido en la agricultura, si no que la riqueza de una nación se basa en que tanto producto excedente se obtenga también en la

industria. Con esto no únicamente se considera al trabajo agrícola productivo, si no a todo aquél que sea capaz de producir un "excedente", en consecuencia, se considera a la industria como una rama productiva.

Teniendo en cuenta las premisas anteriores veamos como A.S. plantea los dos problemas aquí mencionadas.

"La suma anual de trabajo de cada nación constituye el fondo que la provee originalmente de todo lo que consume cada año para atender a las necesidades o a las comodidades de la vida, y que es siempre, o bien un producto inmediato de aquél trabajo o bien algo que con él se compra a otras naciones" (15).

Es decir A.S. sostiene que la riqueza de un país está originada por la cantidad de trabajo que desplegó dicha nación, la riqueza estará determinada por la productividad del trabajo, (observese que aquí se maneja el concepto de trabajo y no de fuerza de trabajo), pero ¿qué determina tal productividad?

Sobre la productividad del trabajo: la división del trabajo tiene por objeto el que un individuo no realice todas las operaciones que son necesarias para la realización de un objeto. Si no existiese la división del trabajo en una sociedad, cada individuo satisficaría sus propias necesidades creando los artículos que le son indispensables. En una sociedad donde la división del trabajo ha surgido, cada individuo tiene que interactuar con los demás para cubrir sus necesidades. La división del trabajo, trae como consecuencia, un aumento en la productividad. Pero no es el aumento de la productividad por lo que se realiza la división del trabajo, según A.S. Los seres humanos tienen una tendencia natural al trueque y al cambio, cada individuo se coloca en aquella rama de la producción en la cual pueda tener un mayor excedente de productos, para intercambiarlos por otros que le son necesarios. Investigando A.S. a qué se debe la "tendencia al intercambio" nos dice: "el fundamento real de la tendencia al cambio se encuentra en el hecho de que existe, innata en los hombres, la necesidad de persuadir de la tendencia natural, y por tanto inevitable al comercio espiritual y al comercio de las ideas" (16) y Smith concluye diciendo, "la tendencia al cambio de la riqueza material, no es un principio originario, si no la consecuencia natural de la razón y de la palabra" (17). Smith plantea como la persecución del interés individual en busca de la riqueza plantea ventajas para todos: si existe división del trabajo cada individuo se especializará en aquella rama de la producción donde se aumenta la capacidad productiva, y esto traerá como consecuencia un aumento de la riqueza personal mediante el cambio de excedentes cada vez más grandes, esto trae como consecuencia un aumento de los bienes de la sociedad y por tanto, en un aumento de la prosperidad en general.

Y por otro lado Smith afirma: "mientras que la división del trabajo dentro de la estructura total de una sociedad, se hallase o no condicionada al cambio de mercancías, es inherente a los tipos económicos más diversos de la sociedad, la división manufacturera del trabajo constituye una creación peculiar y específica del régimen capitalista de producción" (18).

Sobre la distribución del producto del trabajo entre las distintas clases sociales: el producto del trabajo se reparte entre tres clases sociales: la parte del salario que se destina para el mantenimiento y la reproducción del propio trabajo; y por otro lado el "producto neto" se reparte en dos: la renta del propietario de la tierra y el beneficio del capitalista. El problema a resolver es qué determina la distribución del producto entre estas tres clases.

La carencia de una teoría general del valor en los fisiócratas era una limitante pero no grave desde el punto de vista de sus planteamientos. Como solo existía producto neto en la agricultura, éste se medía con una simple resta entre la semilla total utilizada y la producción total, en este sentido podemos decir que existían rasgos de una teoría del valor en los fisiócratas, pero como Smith ha declarado productivo a todo aquél trabajo que produzca un excedente, será necesaria entonces una teoría más general. La formulación de la teoría del valor llega a ser una parte integrante e indispensable de la teoría de la distribución.

Sobre las leyes económicas que determinan el valor, se puede decir que A.S. fue quien hizo una notable contribución, pero que no resolvió el problema. Veamos: Smith afirmaba: "El precio real de cualquier cosa, lo que realmente le cuesta al hombre que quiere adquirirla, son las penas y las fatigas que su adquisición supone. Lo que realmente vale para el que ya ha adquirido, y desea disponer de ella, o cambiarla por otros bienes, son las penas y las fatigas que lo liberan, y que podía imponer a otros individuos" (19).

"El trabajo fue, pues, el precio primitivo, la moneda originaria que sirvió para comprar y pagar todas las cosas, en el estado primitivo y rudo de la sociedad, que precede a la acumulación del capital y a la apropiación de la tierra, la única circunstancia que puede servir de norma para el cambio recíproco de diferentes objetos parece ser la proporción entre las distintas clases de trabajo que se necesitan para adquirirlo. Si en una nación de cazadores, por ejemplo, cuesta usualmente el doble de trabajo matar a un castor que a un ciervo, el castor, naturalmente, se cambiará por o valdrá dos ciervos. Es natural que una caza que generalmente es producto del trabajo de dos días o de dos horas valga el doble que la que es consecuencia de un día o de una hora" (20).

Detengámonos en la aseveración: "El trabajo fue, el precio primitivo, la moneda original para comprar y pagar todas las cosas". A.S. define dos conceptos: el trabajo incorporado y el trabajo comando (labour commanded). El trabajo incorporado se asociaba con el valor del trabajo que se requería directamente para crear una mercancía, el valor de este trabajo se determinaba con el salario pagado a los trabajadores por la producción de este tipo de artículos. El trabajo comando es la cantidad de valor por la cual se puede intercambiar una mercancía. Planteadas las definiciones anteriores A.S. afirmaba que si el trabajo fuera lo que determina el valor de una mercancía, entonces, el valor del trabajo incorporado sería igual al valor del trabajo comando. Pero en una sociedad productora de mercancías, el valor esta compuesto por distintas partes: el salario el beneficio y las rentas. Es decir, que siempre ocurre que el trabajo incorporado es menor que el trabajo comando, ya que cuando se vende una mercancía se contempla en su precio no únicamente el salario, si no también el beneficio y la renta. A.S. concluye que únicamente en una economía mercantil simple el valor del trabajo incorporado es igual al valor del trabajo comando.

Se ha identificado a el trabajo comando como el valor que una mercancía puede adquirir en el intercambio, Smith dice: "el que una mercancía puede adquirir en el intercambio diferentes partes que componen el precio se mide por la cantidad de trabajo que cada una de estas porciones dispone o adquiere"(21). En consecuencia el trabajo comando está determinado por el nivel de los salarios, por el nivel del beneficio y por el nivel de renta. A.S. afirma que en la economía gracias al mecanismo de competitividad se generan "tasas ordinarias" o promedios respectivamente del salario, renta y beneficio, estas tasas son llamadas como tasas "naturales", ya que en torno a ellas fluctúan los precios del mercado y entonces se genera un "precio natural" para cada mercancía y estos son los que conforman el valor del trabajo comando.

En breves palabras veamos que dice la teoría del salario, beneficio y renta.

Sobre el salario: "los salarios deben ser lo suficientemente elevados para mantener al obrero y a su familia"(22), i.e. el salario es la cantidad de dinero con el cual el obrero puede comprar artículos para su subsistencia y alimentar a su familia. El salario natural es aquella cantidad de dinero que se le aporta al trabajador para mantenerlo en dicho nivel de subsistencia. Y existen en el mercado de trabajo ciertos mecanismos para que el trabajo tienda a su precio natural, A.S. dice que estos son de dos tipos: a la lucha que desarrollan los trabajadores y los patrones, y por otro lado a las condiciones demográficas. La lucha entre los obreros y los patrones se plantea por un lado, el aumento de los salarios por los primeros y la disminución por los segundos. Smith

dice que los patrones siempre tienen una ventaja en esta lucha, porque los patrones se pueden mantener más tiempo que los obreros, y además porque las leyes prohíben todo tipo de asociación entre los trabajadores. Por otro lado, si la demanda de los obreros es muy grande, esto quiere decir que los salarios aumentan, lo cual trae como consecuencia un aumento en los matrimonios y eso hace aumentar la población de manera gradual. Si la oferta de mano de obra es alta, los salarios son muy bajos, con lo cual existirá una deficiencia en la mano de obra, pero llegará el momento en que subirá el salario. Así el salario fluctúa en una vecindad del salario

natural.

Las fluctuaciones del beneficio son un poco análogas a las del salario: si en una rama de la producción existe un beneficio alto, los capitales afluirán a esta rama y como consecuencia el beneficio disminuirá. Si el beneficio en alguna rama de la economía es bajo, entonces ocurrirá que los capitalistas abandonaran esta rama, hasta que este abandono haga ascender la tasa de beneficio. En términos globales se puede afirmar que si existe una afluencia global de capitales en todas las ramas de la economía, el beneficio tenderá a bajar, ya que la afluencia de capitales implicará un beneficio alto.

La renta se define como el precio que se paga al propietario de la tierra. La renta natural es definida por A.S. como la cantidad máxima de valor, que el propietario puede obtener, después de descontar el salario y beneficios naturales. La productividad de la tierra afecta el valor de la renta, si la fertilidad es alta la renta será alta y viceversa.

Un aspecto importante es la conclusión que se puede obtener del concepto del trabajo comando: A.S. ha definido como trabajo productivo a aquel trabajo que no sólo reproduzca el valor de los medios de subsistencia, si no que genera además una renta y un beneficio. En otras palabras el trabajo será productivo si el trabajo comando es mayor que el trabajo contenido. Si tenemos una economía productiva, entonces, según A.S. se podrá incrementar la ocupación, bajo la hipótesis de que la diferencia -o parte de ella- del valor entre trabajo comando y contenido se vuelva a usar en la producción. Lo importante de lo anterior es lo siguiente: si el producto social es el resultado de un trabajo productivo, entonces, el empleo de trabajo es positivo y además mantiene un crecimiento sistemático y representa para A.S. un crecimiento económico positivo.

En conclusión: en el análisis presentado por A.S. se plantea que existen una serie de regularidades económicas, y que estas son las que van determinando en caminar de la sociedad. Las leyes económicas van interactuando entre

ellas y van conformando una sociedad en la cual todos los movimientos cesan, es decir se tiende a un equilibrio de las fuerzas económicas. La premisa de la cual se parte para construir el planteamiento smithiano, es que los hombres sean dejados obrar libremente, el egoísmo individual conllevará a la prosperidad social. Las leyes que plantea A.S. y sus hipótesis tienen una serie de problemas, algunos de los cuales serán abordados más adelante.

BIBLIOGRAFIA (ADAM SMITH)

- (1) Claudio Napoleoni. Fisiocracia, Smith, Ricardo, Marx. Oikos-tau, Barcelona p.
- (2) Thomas Hobbes. Leviatan (o la materia, forma y poder de una república, eclesiástica y civil). FCE. Méx. 1984 pp. 137-141.
- (3) Claudio Napoleoni op.cit. p.31
- (4) Leopoldo Zea. Introducción a la filosofía. UNAM. Méx p.230.
- (5) Op.cit. p.231.
- (6) Claudio Napoleoni....p.32.
- (7) Karen Iversen. John Locke, economista y sociólogo. FCE p103.
- (8) Claudio Napoleoni....p.32.
- (9) Op. cit. p.32.
- (10) V.I.Lenin. T.X.(obras escogidas en 12 tomos). Progreso 1977. p.62.
- (11) Claudio Napoleoni. Op. cit. p.37.
- (12) Op.cit. p.37
- (13) Op.cit. p.37.
- (14) Op.cit. p.37.
- (15) Adam Smith. An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nation. The Modern Library. New York, 1937. p.iii
- (16) Claudio Napoleoni. De las lecciones de Glasgow de Adam Smith (Op. cit.) p.141.
- (17) Op.cit. p.142.
- (18) Karataev, Ryndina, Stepanov, y otros. Historia de las doctrinas económicas. Grijalbo. Méx. p. 161.
- (19) Adam Smith. La riqueza de las naciones. FCE Méx. 1968. p.31-32.
- (20) Op.cit. p.32.
- (21) Claudio N. op.cit. p.47.
- (22) Op. cit. p.55.

A.3 DAVID RICARDO

Ricardo avanzó en varios terrenos de la economía: entre otros la teoría del valor, la teoría cuantitativa del dinero, teoría del capital y del beneficio, teoría de la distribución, la renta agraria, el problema de las crisis económicas, etc. Aquí trataremos brevemente de explicar su concepción sobre la teoría del valor y de la distribución, tocando algunos otros aspectos de su concepción.

La revolución industrial iniciada en el S. XVIII había transformado profundamente la vida económica de Inglaterra en la época vivida por Ricardo. La invención del telar, los progresos introducidos en la industria metalúrgica, el reinado de la máquina de vapor, etc., etc., transformaron a la industria textil y después esto se llevó a cabo en todas las ramas de la producción. Con esto el mundo capitalista se inunda de fábricas, y en consecuencia de obreros y capitalistas. También hubo profundas transformaciones en la producción agrícola; los granjeros capitalistas tomaban en arriendo grandes extinciones de tierra y las explotaban con ayuda de peones asalariados. Por otro lado se desarrollan con gran rapidez el crédito, los bancos y la bolsa. Así el sistema capitalista creció y se fortaleció.

La economía estudiada por David Ricardo (D.R) consistía de tres clases sociales, tomando en consideración las características antes descritas, donde el problema fundamental para él era "determinar las leyes de la distribución del producto de la tierra.

Para comenzar su análisis de las leyes de la distribución entre las tres clases, comienza su estudio con la ley del valor. Cabe señalar que D.R. no compartía la idea de Adam Smith en cuanto a este tema. Como se recordará A.S. decía que el valor de la mercancía estaba determinado por el trabajo contenido en dicha mercancía, pero que las mercancías en el sistema capitalista no se intercambiaban por el trabajo que contenían, ya que en la venta de las mercancías además de salario se obtiene un beneficio y la renta. Es decir no sólo el trabajo determina el valor. Y así A.S. afirmaba que el trabajo químicamente fue la moneda con la cual se cambiaban las mercancías en las épocas precapitalistas. D.R dedica la sección 1 de los principios a argumentar contra A.S. como el "el valor de un artículo, es la cantidad de cualquier otro artículo por el cual puede cambiarse, depende de la cantidad relativa de trabajo que se necesita para su producción, y no de la mayor o menor compensación que se paga por dicho trabajo". Contra la argumentación de A.S. de que el trabajo demandable es mayor que el trabajo contenido, Ricardo afirma lo contrario: "el hecho de que en la economía capitalista una parte del producto no vuelve a los trabajadores porque se transforma en beneficio o en renta, lo cual no impide enteramente que las mercancías se cambien según los trabajos contenidos"

Veamos el siguiente ejemplo: supongamos que se pagan 8

Veamos el siguiente ejemplo: supongamos que se pagan 8 horas de trabajo, al final del proceso productivo el dueño del capital tendrá una mercancía que contendrá el salario, renta y beneficio que será de un valor de 16 horas de trabajo. Así observando este ejemplo concluirá que el trabajo no es el valor de la mercancía. El trabajo sólo pudo ser el valor de las mercancías en una economía mercantil simple, o sea, en una economía de trueque y no en una sociedad donde se use el dinero.

Quien endereza todos estos argumentos es Marx: en términos de Marx, se diría que la mercancía representada en 16 horas de trabajo se convirtió en capital (que se obtuvo de comprar 8 horas de fuerza de trabajo) lo que se intercambia por trabajo. Con capital se compra fuerza de trabajo, veamos más de cerca esto: el capital no se cambia por trabajo, ya que el trabajo no es mercancía, el capital se cambia por fuerza de trabajo. La fuerza de trabajo tiene un valor de cambio como cualquier otra mercancía, y este valor está constituido por el valor de los productos que el obrero consume para su subsistencia, es decir, su salario. El capital está respaldado por el valor de mercancías, en el ejemplo de arriba se da una mercancía con 16 horas de trabajo, y esta será intercambiada por otra mercancía, la fuerza de trabajo. Al final se obtiene en realidad un cambio de mercancías por mercancías: el capital y la fuerza de trabajo. Además de tener un valor de cambio, la fuerza de trabajo tiene un valor de uso, y el dueño de la mercancía fuerza de trabajo lo que hará será extraer ese valor de uso, que en este caso no será otra cosa que ponerlo en acción en el proceso productivo. Pero el trabajo que realiza el obrero, no se termina cuando éste ha creado un valor equivalente a su salario, sino que sigue produciendo un tiempo mayor. El trabajo que presta el obrero está compuesto por dos partes: un trabajo necesario que produce el valor de la fuerza de trabajo y un trabajo no pagado que explicaría tanto la renta y beneficio de la economía clásica.

La defensa del trabajo como eje del valor de la mercancía, sólo alcanza las dimensiones ya descritas, y ahora Ricardo se dedica a observar los problemas que esto tiene. En el capítulo I sección tres dice: "el valor de los bienes no sólo resulta afectado por el trabajo que se les aplica de inmediato, sino también por el trabajo que se emplea en los instrumentos, herramientas y edificios con lo que se complementa el trabajo inmediato". Haciendo abstracción de los problemas que puedan tener las ideas de Ricardo, la idea central es que el valor de las mercancías depende no solamente del trabajo que se empleó directamente en el proceso productivo de su creación, si no que también hay que contemplar el trabajo que se ha invertido en tiempos anteriores a la creación de la mercancía, por ejemplo, hay que contemplar el tiempo de trabajo contenido en los medios de producción, el cual debe ser contemplado para medir el valor de la mercancía. Pero existe otro problema más fuerte que el anterior, para mostrar las

problema más fuerte que el anterior, para mostrar las dificultades de la teoría del valor-trabajo, es que no existe ninguna medida perfecta para el trabajo: "cuando los bienes varían su valor relativo, sería deseable averiguar con certeza cuáles de ellos bajan y cuáles aumentaron su valor real, y ello sólo podría lograrse comparándolos sucesivamente con cierta medida estandard invariable de valor, que no debe estar sujeto a ninguna de las fluctuaciones a la cuales están expuestas los demás bienes. Es imposible poseer una medida de esta clase, ya que no existe ningún bien que no se halle expuesto a las mismas variaciones que las cosas cuyo valor queremos determinar; o sea, no hay ninguno que no esté expuesto a requerir más o menos trabajo para su producción". Suponiendo que exista una unidad invariable que sirva para medir todas estas mercancías, siempre deberá tener la misma cantidad de trabajo, pero siempre cambian las cantidades de trabajo que una mercancía tiene, por tanto dicha unidad no existe. Y como no se tiene una unidad perfecta, no se puede atribuir únicamente al trabajo contenido en una mercancía, como lo que determina unívocamente el valor de las mercancías, el trabajo es fundamental pero no lo único.

Otro problema de gran importancia en Ricardo, es la renta; analiza de que depende el beneficio que existe en la economía, concluyendo que éste depende del que se ha formado en la agricultura, pero el examen del beneficio en la agricultura requiere del análisis de la renta territorial:

"En la primera colonización de un país, en el cual existe abundancia de tierra rica y fértil, requiriéndose cultivar tan sólo una porción muy reducida para el sostenimiento de la población existente, porción ésta que puede cultivarse con el capital a la disposición existente de la población, no habrá renta, ya que nadie pagaría por el uso de la tierra, cuando todavía no es de propiedad privada una gran extensión de ésta.

"Con el progreso de la sociedad, cuando se inicia el cultivo de la tierra de segundo grado de fertilidad, principia inmediatamente la renta en la tierra de la primera calidad, y la magnitud de dicha renta dependerá de la diferencia en la calidad de esas dos porciones de tierra.

"Cuando se inicia el cultivo de tierras de tercera calidad, la renta comienza inmediatamente en la segunda, y está regulada, como antes, por las diferencias en sus energías productivas. Al mismo tiempo, la renta de la primera calidad aumentará, ya que ésta siempre debe ser superior a la segunda, por razón de la diferencia existente entre el producto que rinden, con una cierta cantidad de capital y de trabajo."

Veamos el siguiente ejemplo.

Supongamos que se cultiva tierra del primer tipo, y que

Supongamos que se cultiva tierra del primer tipo, y que se invierten como capital 200 kilos de trigo -tanto en medios de producción y fuerza de trabajo- y que al final se obtienen 300 Kg.; aquí el beneficio es de 100/200; es decir, del 50%. Para obtener los mismos 300 Kg. de trigo, en las tierras del segundo tipo será necesaria más mano de obra y medios de producción, que en términos de capital, digamos, se representan con 200 Kg. de trigo; el beneficio obtenido en éste caso es de 90/210 Kg, o sea el 43%. Si estamos en una economía competitiva, existe sólo una tasa de beneficio, y el caso de que se estén cultivando tierras del tipo uno y del tipo dos, el beneficio será del 43% en toda la economía. Lo cual quiere decir que de cada 100 Kg. de trigo invertidos, en tierras del tipo uno, se obtendrán 86 Kg. en beneficio, pero como la cosecha es de 300 Kg. entonces en las tierras de tipo uno sobrarán 14 Kg. de trigo, lo que constituye la renta del propietario. En la tierra del tipo dos sólo existe beneficio y no renta. Así, en el cultivo de tierras de la fase dos, surge una renta diferencial sobre la tierra cultivada en la fase uno al cultivar tierras del tercer tipo, serán menos improductivas, y supongamos que para obtener 300 Kg. de trigo es necesario un capital de 220 Kg. de trigo, el beneficio aquí en toda la economía (es decir, en las tierras del tipo uno, dos y tres) es de 80/200; es decir, del 36%. Con este tipo de beneficio en la tierra del tipo 1, 200 Kg de trigo invertidos dan un beneficio de 72 Kg. y 28 Kg de renta, y en las tierras del segundo tipo al invertir 210 Kg se obtendrán 76 Kg de beneficio y 14 de renta. En otras palabras, a medida que se desarrolla la sociedad el tipo de beneficio disminuye y aumenta la renta, en las antiguas tierras.

Se ha mencionado que Ricardo sostiene que la renta territorial afecta el beneficio en la economía, entonces se concluye que a medida que el capitalismo avanza la renta tiende a aumentar y el beneficio a disminuir, como una ley global

Varios problemas surgen del planteamiento anterior: la consideración del capital en términos del grano; el cultivo del trigo son necesarias herramientas, maquinas abonos, etc. y además fuerza de trabajo. El valor de estos medios de producción pueden ser reducidos a trigo. La tesis de la disminución del beneficio (como consecuencia del aumento de la renta) es válida si no intervienen otros factores en la determinación del beneficio, que no sean los factores agrícolas. En otras palabras, el sector de la economía que provee los medios de producción es incapaz de alterar la tasa de beneficio. Los medios de producción deben en consecuencia tener un precio constante. Pero en la economía examinada por Ricardo esto es imposible.

"El valor de cambio de todas las mercancías sube a medida que aumentan las dificultades de su producción. Por tanto si existen, nuevas dificultades en la producción del grano, debidas a que se necesita más trabajo, mientras que

grano, debidas a que se necesita más trabajo, mientras que no se requiere mas trabajo para producir oro, plata, paño, etc, el valor del cambio del grano necesariamente aumentará al compararlo con estos casos". Pero Ricardo plantea.

"Los beneficios tienden siempre naturalmente a decrecer, puesto que al progresar la sociedad y la riqueza, la cantidad adicional de alimentos requerida sólo se obtienen por el sacrificio de una cantidad creciente de mano de obra. Esta tendencia, esta gravitación de los beneficios, se ve afortunadamente contrarrestada a intervalos repetidos por las mejoras en la maquinaria empleada para la producción de los artículos necesarios, así como los descubrimientos científicos registrados en el sector agrícola lo cual nos permite prescindir de una gran cantidad de mano de obra que antes era necesaria, y en consecuencia, disminuir el precio de los artículos primarios que necesita el trabajador" pero recordemos bajo qué condiciones se mantiene la tesis de la baja en la tasa de beneficio. El salario tiene que permanecer constante, sobre este punto Ricardo manifiesta:

"El precio de la mano de obra es el precio necesario que permite a los trabajadores, uno con otro, subsistir y perpetuar su raza, sin incremento y disminución. Por tanto el precio natural de la mano de obra depende del precio de los alimentos, de los productos necesarios y de las comodidades para el sosten del trabajador y su familia... Con el progreso de la sociedad, el precio natural de la mano de obra tiende siempre a aumentar, por que uno de los principales bienes (trigo) que regula su precio natural tiende a encarecerse debido a la mayor dificultad para su producción ". Y por otro lado, se debe mantener la hipótesis de que el precio de los medios de producción son

BIBLIOGRAFIA (DAVID RICARDO)

- (1) David Ricardo. Principios de Economía Política y Tributación. FCE. Méx. 1985 p.5.
- (2) Op. cit. p.52-53.
- (3) Op. cit. p.92.
- (4) Op. cit. p.71.

A.4 LOS ECONOMISTAS VULGARES

El capitalismo en el primer cuarto y mitad del siglo XIX pasaba por la consolidación de la llamada revolución industrial, y esta revolución traía aparejada una transformación profunda en todas las áreas de la actividad humana, en particular la economía sufre profundos cambios.

El pensamiento fisiocrático, de A. Smith, David Ricardo, etc. habían planteado una serie de problemas y una serie de soluciones, los cuales constituían verdaderos modelos sobre el funcionamiento del modo de producción capitalista, que salía adelante en todas estas etapas de la historia. Aunque los análisis presentados por todos estos economistas diferían en forma sustancial, los planteamientos de cada una de las escuelas tienen su base material. El análisis de los fisiócratas considera a una economía mercantil simple, y se le da un peso fundamental a la agricultura; esto se puede explicar debido a que en Francia existían tierras demasiado fértiles, de tal manera que la agricultura puede ser la base de la economía para ese país; pero además, la concepción fisiocrática es una respuesta al mercantilismo como forma de impulsar el desarrollo económico en la época que era de transición entre el feudalismo y el capitalismo, en estas circunstancias los principios mercantilistas se hacían cada vez más endebles; pero el carecer de un análisis para la industria hacia su teoría muy vulnerable, esto era además un reflejo del desarrollo de la industria de esa época. En A.S. se presenta aún la polémica con los mercantilistas, y considera a la industria como la rama principal de la economía. Para haber llegado a esas conclusiones, las condiciones económicas se habían ido transformando, se considera que las lecciones dadas en Glasgow toman más en cuenta una economía donde esencialmente predominan los artesanos. En la riqueza de las naciones el centro de gravedad de su planteamiento ya no es el mismo. Del análisis de una economía mercantil simple en donde el trabajo cobra una fuerza importante, pasa a tener una visión de todo un capitalismo inglés de su época, en donde el trabajo como creador de la riqueza queda cuestionado. Así A.S. pasa de un análisis de un capitalismo poco desarrollado a uno en donde este se ha impuesto como forma de producir. Para los fisiócratas era explicar como los terratenientes son la clase productiva, el Estado monárquico de ese entonces, debía entonces jugar el papel de garantizar la libertad, es decir los fisiócratas explicaban cómo la riqueza podía existir para ambas clases sociales. A.S. en la riqueza de las naciones centra su atención en dos sectores sociales, el Estado y los empresarios. Ambas formas de pensar responden a situaciones económicas y políticas de dos sectores de una misma clase social.

En Ricardo se pasa de un capitalismo poco desarrollado a un capitalismo más desarrollado. Los problemas económicos

a un capitalismo más desarrollado. Los problemas económicos y políticos que antes podían haber sido empañados por la transición del feudalismo al capitalismo quedan nitidamente claros. El capitalismo es otra forma nueva de producir, y que era el resultado de todo un largo proceso histórico; en esta forma de producción existen nuevas relaciones sociales, los dueños de los medios de producción constituían una clase social y los dueños de únicamente su fuerza de trabajo constituían otra. La riqueza de una clase social era a expensas de la otra, el papel que tienen que jugar las clases sociales es cada vez más clara, para unos el problema era como apropiarse de más trabajo excedente, para otros era como luchar contra las formas de explotación existentes. los planteamientos ricardianos daban elementos para ambos lados. En la economía clásica van a existir tantos planteamientos de sociedades económicas como escuelas haya. Pero claro que hubo toda una serie de características comunes, que precisamente los hicieron encajonar dentro de esta categoría.

Dos son los grandes problemas a los cuales se enfrento la economía clásica, hablando en el terreno estrictamente económico, pero el abordar tales problemas reflejaba concepciones económicas, políticas, morales, religiosas, etc. Se ha considerado a los economistas de etapa clásica que estos no sólo eran unos "eruditos" en el terreno de la economía, si no también de muchas ramas del conocimiento humano.

Uno de los problemas económicos a los cuales se enfrento la economía clásica fue la plusvalía; en el tomo 2 del capital (prologo) C. Marx señala: "la escuela ricardiana (y por tanto clásica) fracasó hacia 1830 por culpa de la plusvalía. El problema que ella no fue capaz de resolver siguió siendo un problema sin solución, para su sucesora, la economía vulgar"

Recordemos que los fisiócratas daban gran importancia al "producto neto" pero solo lo observaban en la agricultura, este producto neto se explicaba gracias a la productividad de la tierra. A.S. por otro lado afirmaba que solo en una economía mercantil simple las mercancías se intercambiaban por el trabajo incorporado, en otras ocasiones planteaba que lo fundamental era el trabajo comando, la diferencia que existía entre estos dos tipos de trabajo no fueron analizados más allá. Ricardo dio grandes avances pero no resolvió el problema. Los economistas que explícitamente atacaron el problema fueron A.S. y D.R. la solución de cada uno de ellos atrajo partidarios, y hubo algunos que queriendo ser innovadores se quedaron sin partido, y así los argumentos de los unos se contrapusieron a los de los otros.

El segundo problema es la formación de la ganancia media: "según la ley ricardiana del valor, dos capitales que emplean la misma cantidad de trabajo vivo y con la misma remuneración producen en tiempos iguales -suponiendo

misma remuneración producen en tiempos iguales -suponiendo que todas las demás circunstancias sean idénticas- productos de igual valor, y plusvalía o ganancia en cantidad también igual. Pero si emplean cantidades desiguales de trabajo vivo, no pueden producir una plusvalía o, como dicen los ricardianos, una ganancia de igual tipo. Pero en realidad, como demuestran los hechos, capitales iguales producen en tiempos iguales, por término medio ganancias iguales, cualquiera que sea la cantidad, pequeña o grande, de trabajo

vivo que empleen. Se encierra, por tanto, una contradicción ya descubierta por Ricardo, y que su escuela fue también incapaz de resolver" (1).

Para la época de Ricardo se desarrollaban las grandes transformaciones, "las consecuencias de la revolución industrial se dejaron sentir en muchas ramas de la economía:

la ruina de la producción manufacturera y del artesano, por una parte, y el progreso de la industria maquinaria por otro, conducen a un mayor desarrollo de la burguesía y el proletariado. Las crisis económicas industriales, que entonces se iniciaban, se convirtieron en periódicas, contribuyendo a la revelación de las contradicciones de clase del capitalismo. En Inglaterra y en Francia, la burguesía había logrado conquistar el poder político; estaban agotadas sus tendencias progresivas de la lucha contra el régimen de producción feudal. La burguesía se transformo en una fuerza reaccionaria, que actúa abiertamente contra el proletariado"(2). También en el terreno de la economía se reflejaban los problemas; las respuestas las escuelas inglesas y francesas caen en una situación difícil, y así la economía política de esa época cae en un bache. Se ha clasificado en dos corrientes a los economistas de esa época (1820-1830 y ss): los ricardianos socialistas y por otra parte a los economistas vulgares

Los ricardianos burgueses, son también conocidos como los economistas vulgares. Se les denomina así porque como su nombre lo indica vulgarizan la economía política clásica, sin aportar algo más original que lo que simplemente ya se había repetido. Dentro de esta corriente se han ubicado a James Mill, John Ramsey Mac Culloch, William Nassau Senior, John Stuart Mill, Federico Basiat, Benjamin Franklin, Charles Carey, etc.

La propia estructura del pensamiento clásico daba para desarrollar variadas y multifacéticas interpretaciones de lo que serían los problemas a resolver, y así los economistas vulgares no sólo no aportaron nada si no que además lo que repetían era de tal forma tal que los propios clásicos no estarían de acuerdo; por ejemplo J. Mill vulgarizando a Ricardo afirma, "el valor de la mercancía se determina por su valor de uso". Mc Cullock en cambio afirma: "el valor se crea no solo por el trabajo y, en

afirma: "el valor se crea no solo por el trabajo y, en general incluso no por el trabajo, sino, por las fuerzas de la naturaleza". Por otro lado decía acerca del beneficio: "El beneficio surge en el cambio, el beneficio es el excedente que se percibe en el cambio de una mercancía por otra". Senior por otro lado profundizando y tergiversando a A.S. plantea que la "acumulación del capital es el resultado de la abstinencia de los capitalistas, y está es la fuerza motriz del progreso económico". Veamos un poco esto: "los capitalistas se abstienen del empleo improductivo de los capitales, los invierten en la organización de las fabricas, facilitando trabajo a obreros, quienes por su parte "se abstienen" del ocio y del reposo, entregándose al trabajo en las fabricas capitalistas. Así toda la economía se mueve por mutua abstinencia". Como con la teoría de la abstinencia no pudo determinar la magnitud del valor, afirma que "la magnitud del valor es determinada por la comparencia". Sobre la ganancia Senior afirmaba que era recompensa por la abstinencia del capitalista. Además afirmaba que la ganancia los obreros la producían en la ultima hora de trabajo. Este era el estilo de los vulgares.

Pero así como existían vulgarizadores de la economía política clásica, existió otra corriente que basándose en la teoría de Ricardo planteaba cuestiones muy diferentes y en otra dirección, ellos son los ricardianos de izquierda, dentro de los cuales se ubican a los socialistas utópicos como Saint Simon, Fourier, Owen, etc.

Los fundamentos que basaban su pensamiento son dos: por un lado, el haber vivido las revoluciones que se desarrollaron en el segundo cuarto del S XIX y por otro, la situación económica en la cual se encontraba la sociedad en ese entonces. El haber vivido en la época de las grandes revoluciones los hacían plantear que la sociedad capitalista tendía a desaparecer, que este sistema no podía seguirse continuando hasta infinito. Owen basaba sus planteamientos directamente en la economía política clásica: "las numerosas obras que estos escribieron enderezaron la teoría ricardiana del valor y de la plusvalía, en interés del proletariado contra la producción capitalista, combatiendo a la burguesía con sus propias armas. Todo el comunismo, en la medida que reviste una forma económica -polémica- se basa en Ricardo".

Saint Simon "observo que todos los acontecimientos se desarrollaban conforme a determinadas leyes: todo periodo histórico anterior encierra en si las premisas del periodo que le sucede. Admitió las siguientes formaciones sociales, según su grado de desarrollo: barbarie, antigüedad, feudalismo, capitalismo y sociedad de industriales". Uno de los méritos de Saint Simon es el plantear que el capitalismo es una fase económica.

De las ideas que se pueden destacar de Fourier son por un lado la crítica sarcástica del sistema capitalista: "Fourier desarrollo la crítica ingeniosa auténticamente

"Fourier desarrollo la crítica ingeniosa auténticamente francesa, pero por ello menos profunda de las condiciones existentes". Por otro lado "concibió hasta en sus menores detalles la organización de la sociedad futura y de su base: las falanges de la comunidad socialista". Se dice que la base de sus análisis eran las obras desarrolladas en la revolución francesa.

Pero como mencionábamos, uno de los más destacados socialistas fue R. Owen quien tuvo entre otros partidarios a Hodskins Thomson que intentaban unificar el socialismo con la economía política: "adoptaron la teoría del valor trabajo de Ricardo y especialmente la teoría de la plusvalía, probaron a extraer de dicha teoría conclusiones socialistas. Fueron los primeros en relacionar seriamente las cuestiones de economía política con los problemas del socialismo, utilizando la teoría del valor en la lucha contra la burguesía y el interés de los obreros".

Los socialistas ricardianos consideraban que la teoría del valor trabajo actuaba únicamente en las formaciones precapitalistas. "Partiendo del intercambio de equivalentes, a base de la ley del valor, excluye la explotación del hombre por el hombre, los socialistas ricardianos llegaban a la conclusión de que al determinarse el valor por el trabajo, el productor tiene derecho a recibir el valor equivalente al trabajo aportado". La conclusión era el derecho del productor a recibir el producto completo de su trabajo.

Concluyendo, podemos decir que la economía política vulgar no avanza en la solución de los grandes problemas planteados por la economía política clásica. Y por otro lado los economistas ricardianos de izquierda, tomando como base la teoría del valor trabajo de Ricardo hicieron sus planteamientos de una nueva sociedad, pero estos planteamientos tenían una base muy débil.

BIBLIOGRAFIA (ECONOMISTAS VULGARES)

- (1) Carlos Marx y Federico Engels. El Capital T.II Ed. S.XXI Méx.1982. pp.22
- (2) Op. cit. p.22-23.
- (3) Karataev, Ryndina, Stepanov, y otros. Historia de las doctrinas económicas. Ed Grijalbo Méx. 1964 p.230.
- (4) Op. cit. p.232.
- (5) Op. cit. p.233.
- (6) Op. cit. p.234.
- (7) Op. cit. p.235.
- (8) Op. cit. p.235.
- (9) Carlos Marx, op.cit. p.16.
- (10) Karataev...pp.251-252.
- (11) Op. cit. p.254.
- (12) Op. cit. p.270.

A.5 EL MARXISMO

Carlos Marx y Federico Engels, en el contexto de la polémica que surge en el pensamiento económico toman la palabra, dando un planteamiento distinto a los ya conocidos hasta entonces. La parte fundamental de sus obras están dedicadas a responder la pregunta ¿a dónde conducen las leyes que rigen el modo de producción capitalista?. C. Marx en el tomo I del capital dice: "lo que de por sí nos interesa aquí, no es precisamente el grado más o menos alto de desarrollo de las contradicciones sociales que brotan de las leyes naturales de la producción capitalista. Nos interesan más bien estas leyes de por sí estas tendencias, que actúan y se imponen con férrea necesidad"

Pero antes de llegar a tener las bases para hacer tal investigación tuvieron que haber grandes cambios. Para la época de C.M y F.E el capitalismo maduraba y fue precisamente el desarrollo del capitalismo que dio la clave al marxismo para sus planteamientos, abordaron el análisis de lo que ocurría de manera multifacética, abordándolos desde bases económicas, políticas, filosóficas, etc.

Para ubicar los planteamientos de Marx y Engels que abordaremos aquí es necesario tener presente las ideas fisiocráticas en cuanto al orden natural, las cuales fueron replanteadas de manera distinta por A. Smith. La polémica sobre este punto ya había sido abordada por muchos filósofos y en términos generales se puede decir, que la solución planteada por A.S. a la filosofía del egoísmo de Hobbes fue aceptada por los filósofos de su época. Los planteamientos posteriores a A.S. manejados por los economistas vulgares, partían de esta base, por lo cual la polémica para la época de Marx y Engels en lugar de terminar prosigue.

Carlos Marx y Federico Engels dan una respuesta un tanto distinta a las ya mencionadas, la respuesta no es en polémica directa contra A.S. si no en términos mucho más generales. Engels refiriéndose a las bases que se tiene para conocer más profundamente a la naturaleza, etc. da una respuesta a A.S. y sus seguidores. Veamos la siguiente cita un tanto larga pero necesaria.

"Hay sobre todo tres grandes descubrimientos, que han dado un impulso gigantesco a nuestros conocimientos acerca de la concatenación de los procesos naturales: el primero es el descubrimiento de la célula, nos señala el camino por el que los organismos pueden cambiar de especie, y por tanto desarrollar una trayectoria superior a la individual. El segundo es la transformación de la energía. Finalmente, el tercero es la prueba, desarrollada primeramente por Darwin de un modo completo, de que los productos orgánicos de la naturaleza que hoy existen en torno nuestro,

incluyendo los hombres, son el resultado de todo un proceso largo de evolución.

"Gracias a estos grandes descubrimientos, y a los demás progresos formidables de las ciencias naturales, estamos hoy en condiciones de poder demostrar no sólo la trabazón entre los fenómenos de la naturaleza dentro de un campo determinado, sino también, a grandes rasgos, la existencia entre los distintos campos. Hoy cuando los resultados de las investigaciones naturales sólo necesitan enfocarse dialécticamente, es decir, en su propia concatenación, para llegar a un "sistema de naturaleza" suficiente para nuestro tiempo: cuando el carácter dialéctico de esta concatenación se impone, incluso contra su voluntad, a las cabezas metafísicamente educadas de los naturistas; hoy, la filosofía de la naturaleza ha quedado definitivamente liquidada. cualquier intento de resucitarla no sería sóloamente superfluo: significaría un retroceso.

"Y lo que decimos de la naturaleza, concebida aquí, también como un proceso de desarrollo histórico, es aplicable igualmente a la historia de la sociedad en todas sus ramas, y en general, a todas las ciencias que se ocupan de cosas humanas. También la filosofía de la historia, del derecho, de la religión, etc. consistía en sustituir la trabazón real acusada en los hechos mismos por otra inventada por la cabeza del filósofo, y la historia era concebida, en conjunto y en sus diversas partes, como la realización gradual de ciertas ideas, que eran, naturalmente, las ideas favoritas del propio filósofo. Según esto, la historia laboraba inconscientemente, pero bajo el imperio de la necesidad, hacia una meta ideal fijada de antemano, como, por ejemplo, en Hegel, hacia la realización de su idea absoluta formaba la trabazón interna de los acaecimientos históricos. Es decir, que la trabazón real de los hechos, todavía ignorada, se suplantaba por una nueva providencia misteriosa, inconsciente, o que llega poco a poco a la comunidad. Aquí, al igual que en el campo de la naturaleza, había que acabar con estas concatenaciones inventadas y artificiales, descubriendo las leales y verdaderas, misión esta que, en última instancia, suponía descubrir las leyes generales del movimiento que se imponen como dominantes en la historia de la sociedad humana.

"Ahora bien, la historia del desarrollo de la sociedad difiere sustancialmente, en un punto, del desarrollo de la historia de la naturaleza. En ésta -si prescindimos de la reacción ejercida a su vez por los hombres sobre la naturaleza-, los factores que actúan los unos sobre los otros y en cuyo juego mutuo se impone la ley general, son todos agentes inconscientes. De cuanto acontece en la naturaleza -lo mismo los innumerables fenómenos aparentemente fortuitos que afloran en la superficie, que los resultados finales por los cuales se comprueba que esas aparentes casualidades se rigen por sus leyes-, nada

acontece por obra de la voluntad, con arreglo a un fin consciente. En cambio, en la historia de la sociedad, los agentes son hombres dotados de conciencia, que actúan movidos por la reflexión o la pasión, persiguiendo determinados fines: aquí, nada acaece sin una intención consciente, sin un fin deseado. Pero la distinción, por muy importante que ella sea para la investigación histórica, sobre todo la de épocas y acontecimientos aislados, no altera para nada el hecho de que el curso de la historia se rija por leyes generales de carácter interno. También aquí reina, en la superficie y en conjunto, pese a los fines conscientemente deseados de los individuos, un aparente azar; rara vez acaece lo que se desea, y en la mayoría de los casos los muchos fines perseguidos se entrecruzan unos con otros y se contradicen, cuando no son de suyo irrealizables o insuficientes los medios de que se disponen

Para llevarlos a cabo. Las coaliciones entre las innumerables voluntades y actos individuales crean en el campo de la historia un estado de cosas muy análogo al que impera en la naturaleza inconsciente. Los fines que se persiguen con los actos son obra de la voluntad, pero los resultados que en realidad se derivan de ello no son, y aun cuando parezcan ajustarse de momento al fin perseguido, a la postre encierran consecuencias muy distintas a las apetecidas. Por eso, en conjunto, los acontecimientos históricos también parecen estar precedidos por el azar. Pero allí donde en la superficie de las cosas parece reinar la casualidad, esta se halla siempre gobernada por leyes internas ocultas, y de lo que se trata es de descubrir estas leyes

"Los hombres hacen su historia, cualquiera que sean los rumbos de ésta, al perseguir cada cual sus fines propios con la conciencia y la voluntad de lo que hacen; y la resultante de estas numerosas voluntades, proyectadas en diversas direcciones, y de su múltiple influencia sobre el mundo exterior, es precisamente la historia. Importa, pues, también lo que quieran los muchos individuos. La voluntad esta movida por la pasión y la reflexión. Pero los resortes que, a su vez, mueven directamente a éstas, son muy diversas. Unas veces, son objetos exteriores; otras veces, son objetos exteriores; otras veces, motivos ideales: ambición, "pasión por la verdad y la justicia", odio personal, y también manías individuales de todo género. Pero, por una parte, ya veíamos que las muchas voluntades individuales que actúan en la historia producen casi siempre resultados muy distintos de los perseguidos -a veces incluso contrarios- y, por tanto, sus móviles tienen también una importancia puramente secundaria en cuanto al resultado total. Por otra parte, hay que preguntarse qué fuerzas propulsoras actúan, a su vez, detrás de esos móviles, qué causas históricas son las que en las cabezas de los hombres se transforman en estos móviles"

Quedémonos con la siguiente idea: los hombres actúan con una cierta voluntad, esas voluntades chocan y se da un complejo entrecrocado de voluntades y de aquí se obtiene una resultante la cual es una ley social y esta puede apuntar hacia lo que los hombres quieren o en sentido opuesto o hacia otra situación.

A. Smith afirmaba que si los individuos son dejados actuar libremente, cada uno tratando de egoístamente perseguir el bien individual, no se produce el caos, si no el orden, etc. Esta afirmación en Engels queda cuestionada ya que no necesariamente ocurre lo que afirma A.S. una situación particular de la resultante, es aquella en la cual el bien particular implique el bien social, pero entonces las tesis smithianas no se pueden plantear como la ley social.

El marxismo analiza cuáles son las leyes económicas que se establecen en este modo de producción, estas leyes se generan como resultado del movimiento de los diversos "agentes económicos", cada "agente" tomando conciencia de su objetivo tratara de llevarlo a cabo. La ambición del capitalista es, objetivamente, apoderarse de la mayor plusvalía posible, el obrero al ser "libre" busca el modo de sobrevivir. El trabajo es el creador de la riqueza la cual va a parar a manos de los dueños de los medios de producción. Se crea una contradicción entre las dos clases sociales existentes en la visión marxista. El mérito de Marx no es el haber descubierto dicha contradicción, si no que dicho enfrentamiento genera condiciones económicas políticas y sociales, para instaurar nuevas relaciones de producción. Todo lo anterior se deriva como consecuencia de la acción de los diversos "agentes económicos" existentes en la sociedad. La argumentación basada en el materialismo dialéctico es como sigue.

El capitalismo está constituido por un inmenso arsenal de mercancías. Cada mercancía satisface cierta necesidad humana y además puede ser cambiado por otra mercancía. La utilidad de un objeto lo convierte en un valor de uso. El valor de cambio es la proporción en que un número de valores de uso de una especie se cambie por valores de uso de otra especie. Lo que tienen en común los diversos valores de uso que los hace equivalentes es que son productos del trabajo. Los hombres al realizar un cambio entre dos mercancías estaban comparando cantidades de trabajo equivalentes. La existencia de diversos valores de uso en la sociedad, nos muestra que en ella se ha desarrollado la división social del trabajo. Lo que todas las mercancías poseen es trabajo humano abstracto, no es trabajo concreto de una determinada rama, sino trabajo humano en general. La magnitud del valor se determina por la cantidad de trabajo socialmente necesario, o por el tiempo de trabajo socialmente necesario para producir determinada mercancía o determinado valor de uso. Marx analiza detenidamente el doble carácter del trabajo y

después de esto pasa al análisis de la forma del valor y de la forma dinero. Aquí Marx busca el origen de la forma monetaria del valor, estudia el proceso histórico del desenvolvimiento del cambio, comenzando con las operaciones sueltas y fortuitas de trueque, hasta remontarse hasta la forma general del valor en que mercancías diferentes se cambian por otra determinada y concreta, siempre la misma, y es la forma monetaria, en que la función de esta mercancía, o sea, la función de equivalente general, la ejerce el oro.

Marx plantea como la producción de mercancías en un determinado grado de desarrollo, el dinero se convierte en capital. La forma de circular de las mercancías era $M-D-M$, la fórmula general del capital es $D-M-D'$ comprar para vender, aquí $D'=D+V$, el valor del dinero se ha acrecentado en V al final del proceso: este acrecentamiento es lo que convierte al dinero en capital, esto determina un modo social de producción. El problema a analizar es de donde proviene la plusvalía V , no proviene de la circulación de mercancías ya que estas se intercambian sólo por sus equivalentes. Para obtener plusvalía el poseedor del dinero D debe encontrar una mercancía que tenga la cualidad de crear valor, una mercancía que en el proceso de su consumo sea a la vez un proceso de creación de valor; y esta mercancía es la fuerza de trabajo.

El poseedor del dinero D , compra fuerza de trabajo por su valor, es decir, por el tiempo de trabajo socialmente necesario para su producción. El obrero es puesto a trabajar durante una jornada de trabajo, en esta jornada, una parte es utilizada para crear productos que son el equivalente a la fuerza de trabajo, en la otra parte de la jornada, crea un plusproducto, el cual se apropia el capitalista, de aquí surge la plusvalía.

Marx menciona que el capital se desdobra en capital constante y capital variable. El valor del capital constante se transfiere en el proceso productivo, el valor del capital variable es lo que paga el capitalista por la fuerza de trabajo y este valor no permanece constante sino que se acrecienta en el proceso de trabajo. Así, para obtener el grado de explotación del obrero tenemos que relacionar la plusvalía no con todo el capital sino únicamente con el capital variable. Existen dos maneras de hacer crecer la plusvalía: prolongando las jornadas de trabajo (plusvalía absoluta), y reduciendo el tiempo de trabajo socialmente necesario (plusvalía relativa). La clase obrera ha mantenido una lucha constante desde el surgimiento del capitalismo contra la primera forma de explotación, así ha logrado que las jornadas de trabajo sean de tal manera que no se consuma el obrero como tal. En la segunda forma de explotación, se analizan tres etapas: cooperación simple, la división del trabajo y manufactura y maquinaria y gran industria.

Hara cuando trata el problema de la acumulación argumenta que una parte de la plusvalía se utiliza nuevamente para producir, es decir, el capitalista no gasta toda la plusvalía, sino que invierte parte de ella. Como el capitalista compra capital constante y variable, existe una tendencia en el capitalismo a acrecentar más la parte del capital constante que la del variable. Así pues las máquinas desplazan a los obreros, creándose así el ejército industrial de reserva y se hace crecer la producción en grandes cantidades, creándose así crisis de sobreproducción.

Para que el capitalismo surja como medio de producción son necesarias dos condiciones: la acumulación del dinero en manos de ciertas personas, con un nivel alto de producción de mercancías y la existencia de obreros "libres" para vender su fuerza de trabajo y libres de poseer medios de producción-. Marx en la acumulación originaria muestra como es que el obrero va quedando "libre" y además como surgen los capitalistas, la forma de como se va desarrollando la acumulación es la violencia.

En la "tendencia histórica de la producción capitalista" se argumenta la tendencia de este sistema de producción: "la expropiación del productor directo se lleva a cabo con el más despiadado vandalismo y bajo el acicate de las pasiones más infames, más sucias, más mezquinas, y más odiosas. La propiedad privada fruto del propio trabajo y basado, por así decirlo, en la compenetración del obrero individual e independiente con sus condiciones de trabajo, es devorada por la propiedad privada capitalista, basada en la explotación del trabajo ajeno aunque formalmente libre"

"Una vez que este proceso de transformación corroe suficientemente, en profundidad y extensión, la sociedad antigua; una vez que los trabajadores se convierten en proletarios y sus condiciones de trabajo en capital; una vez que el régimen capitalista de producción se mueve por sus propios medios de producción explotados socialmente, es decir colectivos, y, por tanto, la marcha ulterior de la expropiación de los propietarios privados, cobra una gran forma nueva. Ahora, ya no se trata de expropiar al trabajador independiente, si no de expropiar al capitalista explotador de numerosos trabajadores"

"Esta expropiación la lleva a cabo el juego de las leyes immanentes de la propia producción capitalista, la centralización de los capitales. Cada capitalista desplaza a otros muchos. Paralelamente a esta centralización del capital o expropiación de muchos capitalistas por unos pocos, se desarrolla a una escala cada vez mayor la forma cooperativa del proceso del trabajo, la aplicación técnica consciente de la ciencia, la explotación sistemática y organizada de la tierra, la transformación de los medios de trabajo en medios de trabajo utilizados sólo colectivamente la economía de todos los medios de producción al ser

empleados como medios de producción de un trabajo combinado, social, la absorción de todos los países por la red del mercado mundial y. como consecuencia de esto, el carácter internacional del régimen capitalista. Conforme disminuyen progresivamente el número de magnates capitalistas que usurpan y monopolizan este proceso de transformación, crece la masa la miseria, de la opresión, de la esclavización, de la degeneración, de la explotación; pero crece también la rebeldía de la clase obrera, cada vez más numerosa y más disciplinada, más unida y más organizada por el mecanismo del propio proceso capitalista de producción. El monopolio del capital se convierte en grillete del régimen de producción que ha crecido con él y bajo él. la centralización de los medios de producción y la socialización del trabajo llegan a un punto en que se hacen incompatibles con su envoltura capitalista. Esta salta hecha añicos. Ha sonado la hora final de la propiedad privada capitalista. Los expropiadores son expropiados".

En el segundo tomo del capital Marx desarrolla los esquemas de reproducción capitalista en su conjunto, y en el tercer tomo desarrolla el problema de la formación de la cuota media de ganancia, basándose en todo lo anterior en la teoría del valor trabajo, con lo cual da una respuesta muy amplia a los dos problemas que para la economía clásica habían sido insolubles. Una de las ideas centrales de Marx es la siguiente: al elevarse la productividad del trabajo, significa un crecimiento más rápido del capital constante con relación al capital variable. Y como la cuota de ganancia es la relación que guarda la plusvalía con todo el capital, se desprende que la cuota de ganancia tenga una tendencia a la baja. Marx analiza esta tendencia a la baja, así como las diversas circunstancias que la contrarrestan. Además otro punto importante es la renta del suelo y la renta diferencial.

En resumen, la idea global que muestra Marx es que la ley general del movimiento capitalista es la tendencia a la transformación de este modo de producción, su argumentación en lo fundamental se basa en los elementos dados anteriormente. Esto se contraponía en lo fundamental con la economía clásica.

El marxismo daba los argumentos del porque de un cambio económico, basándose para esto del movimiento de las leyes del modo de producción capitalista. La lucha de la clase obrera que se fundamentaba en la teoría del valor trabajo de Ricardo, con los planteamientos marxistas cobran una mayor solides. La argumentación basada en el materialismo dialéctico tenía pocos flancos débiles. Pero la ciencia económica se distingue de otras ciencias, como ya lo ha mencionado Engels, porque los individuos actúan con conciencia, los intereses que se van conformando por una clase hace necesario desarrollar una argumentación que vaya minando la forma de pensar marxista

BIBLIOGRAFIA (EL MARXISMO)

- (1) Carlos Marx. El Capital T.I. FCE. Méx. p.XIV.
- (2) Federico Engels. Ludwing Feuerbach y el fin de la filosofía clásica alemana. Ed de Cultura Popular. Méx. pp.198-204.
- (3) Carlos Marx. Op. cit. p. 647.

A.6 WALRAS

La influencia que tuvo la economía marxista dentro del movimiento obrero fue muy grande. Ya anteriormente la reacción que generaron los planteamientos owenistas que eran impulsados por Hodskins, etc, fue muy fuerte. Pero no se puede comparar esto con lo que sucedería con los planteamientos marxistas.

"Entre 1870 y 1880 el movimiento obrero cobro gran importancia, poniendose de manifiesto el conflicto capital-trabajo. El periodo ha sido caracterizado como el de una rápida difusión de la doctrina marxista, quedando esta a la cabeza del movimiento obrero. En este sentido los hechos mas importantes fueron: la actividad de la primera internacional, fundada en 1864 por Marx y Engels, cuya finalidad fue la creación de una organización proletaria internacional que reuniera y organizara a los obreros de todos los países; y la comuna de Paris, primer intento de dictadura del proletariado, que ejercio una notable influencia en la lucha de la clase obrera".

"El auge del movimiento obrero organizado y los primeros intentos para conquistar el poder ocasionaron serios temores a la clase burguesa, quien reprimio dichos movimientos e ideológicamente creo nuevas teorías para legitimar el sistema capitalista y suprimir a la teoría marxista y su influencia en el movimiento obrero. En este contexto surgieron y se difundieron las teorías de la utilidad marginal"(1)

"...tanto en Inglaterra como en francia, Alemania, Estados Unidos, Italia y Austria surgieron en los años setenta del S XIX, dentro del desarrollo de la teoría económica burguesa, "nuevas teorías del valor"...En Inglaterra, el desarrollo de la teoría fue emprendido po W. Jevons (1835-1882), por Alfred Marshall (1842-1894) y John Hics. En Alemania por H. Gossen (1810-1850). En Austria por Karl Menger(1840-1921), Bohm-Bawer (1851-1914) y F. Wiser (1851-1926). En Estados Unidos por J.B. Clark(1847-1938). En Italia por Wilfrido Pareto (1849-1923) y en Francia por Leon Walras"(2).

"La critica el libro de marx -escribia Pareto- ya no esta por realizarse. No solo se encuentra en las monografías especiales que se han publicado sobre ese tema, si no también sobre todo en los progresos hechos por4 la economía política de la teoría del valor. La mejor respuesta a la teoría del valor de Marx, pensaba Pareto -y muchos otros a partir de Bohm-Bawer han compartido esta creencia-, la constituían las nuevas teorías del valor surge como resultado directo o indirecto de la "revolución marginal" del deconio de 1870" (3)

Un punto culminante de esta corriente económica es la publicación de la Teoría del Equilibrio General Económico por Leon Walras en 1873. Se plantea un modelo matemático, planteando una economía en la "ambición de cada individuo" genera una ley social, donde la sociedad no se tiende a transformarse, si no a una situación en la cual cada individuo busca consumir distintas cantidades de mercancías que maximicen su satisfacción, y donde cada productor sabe que cantidades debe producir para optimizar su ganancia, y además donde no haya escasez ni sobreproducción de recursos y se define al equilibrio económica a el sistema de precios donde todo lo anterior ocurra. Veamos mas de cerca la visión de Walras.

Al igual que los fisiócratas, Walras trata de analizar, el "movimiento económico" que da lugar a que la sociedad siga produciendo. En este sistema económico se supone que únicamente existen dos "agentes económicos": Familias y empresas. Al inicio del proceso productivo, cada familia tiene un conjunto de recursos o bienes incluyendo el trabajo. Así, dado un sistema de precios, cada familia puede calcular el ingreso que obtiene al vender sus posesiones. Con este ingreso el individuo o familia escoge consumir distintas cantidades de mercancías que no superen su ingreso y optimicen su utilidad. Es decir la demanda de las familias depende de sus recursos iniciales y los precios. La demanda de bienes determina los niveles de producción y por tanto determina los recursos que las empresas demandan. Se supone que existe competencia perfecta, y que la información corre en lo inmediato entre los agentes económicos, además se supone que la tasa de beneficio es cero y que se tienen conocidos los coeficientes de producción. Se tiene, entonces, determinado una oferta, una demanda, etc. Un precio de equilibrio es aquel que hace que la oferta sea igual a la demanda, bajo las suposiciones anteriores. Los trabajos posteriores a Walras introdujeron la función de producción. Con la introducción de los conceptos marginales se determinaban los precios de equilibrio marginales

De lo anterior se desprendía un conjunto de ecuaciones que igualaban la oferta con la demanda, y la existencia del precio de equilibrio se concluye porque el número de ecuaciones era igual al número de incógnitas. Al examinar las ecuaciones Walras, fijaba un "bien", de tal manera que los precios de otras mercancías se expresaban en términos de tal numerario, con lo cual se reducía el número de incógnitas. Además en el mismo examen establecía lo que los economistas conocen como la ley Say, el precio de la producción total es igual a el precio de la demanda, para cualquier conjunto de precios no solo para los precios de equilibrio; esta suposición se desprendía porque el ingreso de cada familia determinaba la demanda y esto implicaba una oferta para las empresas, suponiendo que existe un beneficio de cero.

En la teoría de los tanteos (o tatonnements) Walras examino la "estabilidad" del equilibrio: supongamos que tenemos numerados los mercados. Si se da un precio se determina una oferta y una demanda, en cada uno de los mercados las cuales en general no son iguales. Tomando el primer mercado se ajusta el precio para que la oferta sea igual con la demanda. Si la demanda es mayor que la oferta entonces el precio sube y baja en caso contrario. Este cambio en el precio altera las ofertas y las demandas en lo demás mercados. Se hace lo mismo en el segundo mercado, y así sucesivamente, hasta llegar a el ultimo mercado. Al terminar este proceso, el ultimo mercado estará en equilibrio pero no existe garantía para que los demás lo estén. Walras decía que la oferta y la demanda de cada bien era mas afectada por su propio precio que por el precio de las otras mercancías. Así después de la primera vuelta la diferencia entre oferta y demandas en los mercados es menor que al inicio! Si se continua el proceso después de hacer ajustes pertinentes sucesivamente Walras garantizaba que la oferta seria igual que la demanda.

Esta versión fue carregida y aumentada en cada uno de sus argumentos, solo señalaremos en resumen, en algunos.

Edgeworth y Pareto trataron el problema de la "asignación óptima de recursos". Edgeworth considero a un par de individuos los cuales cada uno tenia un conjunto de recursos iniciales, y analizaban como se llevarian a cabo las transacciones de estos recursos entre estos dos individuos. Razonando a lo A.S. de que cada individuo busca lo mejor para si, se supone que cada individuo realizara una transacción si es que no existe otra mejor y que ninguno de los dos realizara la transacción si es que lo coloca en una situación peor que antes. Demostro que existía una curva de contratos que satisfacía estas condiciones, cada transacción representa una curva y una de las posibles transacciones es un equilibrio competitivo. Pareto dio la definición de una asignación óptima de recursos, el llamado óptimo de Pareto.

Durante este siglo "los adelantos verdaderamente importantes se lograron apenas en los años treinta. Hubo dos corrientes claras de pensamiento: una, iniciada en la literatura de habla alemana y preocupada primordialmente con la existencia del carácter único del equilibrio; la otra expresada fundamentalmente en ingles, preocupada con la estabilidad y la estática comparativa" (6).

A la primera corriente de "pensamiento" están asociados los nombres de Cassel (1924), Zeuthen (1932), Abraham Wald (1932-34) y finalmente John Von Newman (1938). Después vinieron a pulir el planteamiento Wald Mc Kenzie (1954), Arrow y Debreu (1954). Se considera a Debreu como el apartador de una exposición sistemática y general de las condiciones de existencia del equilibrio. A la segunda corriente están asociados los nombres de John R Hicks,

Harold Hotelling, Paul Samuelson, R.G. Allen, Mosak y Metzler, entre otros.

BIBLIOGRAFIA (WALRAS)

(1) Jose Fernandez Garcia, Victoria Ortega Rodriguez, Marta Ferrer-Lara López, Flor de Maria Reyes Ramos, Claudia Rodriguez Ortiz, Sergio F. Sierra Romero. Un enfoque critico de la concepción marginalista en microeconomía y su vinculo con el calculo diferencial. UAM.X. 1985 p.99.

(2) Op. cit. p.100.

(3) Op. cit. P.107.

(4) Ronald Meek. La revolución marginal y sus consecuencias (Publicado en Lecturas No. 21 Critica de la teoría económica FCE. donde los articulos recopilados fueron llevados a cabo por E.K Hunt y J.G Schwartz).Méx.1977 p.83.

(5) Keneth J. Arrow, F.H. Hahn. Análisis General competitivo. FCE. Méx.1971 p.83.

(5) Op. cit. p. 24.

A.7 ALGUNOS COMENTARIOS A LA TEORIA DEL EQUILIBRIO GENERAL ECONOMICO

Los siguientes comentarios no son validos unicamente para las ideas planteadas por Walras en su exposicion de la teoria del equilibrio, si no tambien y fundamentalmente a los continuadores de dicha teoria. Nos referiremos a la metodologia, a los supuestos, al final daremos un contraejemplo.

Los fisiócratas, A.S., D.Ricardo, etc.habian tratado de descubrir las leyes economicas, politicas, sociales, para de alli plantear el funcionamiento economico, no solo en el momento en que vivian, si no un planteamiento de mas largo plazo; las hipotesis que sustentaban los economistas clasicos tenian su razon de ser: el poco desarrollo de las fuerzas productivas, etc. Pero despues de que el marxismo basandose en un estudio materialista dialéctico, haya criticado a la economia politica existente, mostrando sus debilidades y sus avances, no era posible rehacer una discusion sobre el funcionamiento y tendencia del modo de produccion capitalista, sin contemplar dicha critica.

El estudio de las leyes economicas y su tendencia desde el punto de vista marxista, tomaba en cuenta, como parte central, las contradicciones existentes entre las clases sociales, concluyendo que la economia existente, no es mas que otro modo de produccion. La base teorica en la cual se sustenta su argumentacion es la teoria del valor.

La economia politica despues de Marx, -o sea neoclásica-, continua desarrollando la discusion sobre cuales son las leyes y su tendencia en este modo de produccion. Reflejo de estas investigaciones es por ejemplo el trabajo de Walras. Llamam la atencion estas respuestas "novedosas" despues de que Marx hizo su planteamiento.

La economia neoclásica se rehace con nuevos terminos y argumentos sin contemplar la critica demolidora marxista realizada a la economia clásica. En lugar de clases sociales y las contradicciones existentes entre ellas, los neoclásicos nos presentan agentes economicos con atributos bien definidos los cuales unicamente buscan optimizar su utilidad y beneficio.

La armonia social es machacada en el modelo del equilibrio: "cada individuo recibe una dotacion de factores y los intercambia por otro conjunto de factores en forma tal que su utilidad se eleva al máximo. Todos están felices. El sistema es estable y se reproduce a si mismo. No hay conflictos, no hay clases sociales, no hay explotacion, no hay imperialismo, no hay guerras. La mano invisible ha vaciado el mercado. El mecanismo de

intercambio se ha materializado en la ideología política de la sociedad occidental en su conjunto"1

No es la teoría del equilibrio general la explicación global del modo de producción capitalista, esta teoría es solo la síntesis. Para ubicar la crítica a la teoría del equilibrio general es necesario ubicarla dentro del marco de la teoría neoclásica, el equilibrio es un tópico dentro de la ciencia económica y por eso no es ajena a los defectos de dicha ciencia. E. K. Hunt y J.G. Schwartz mencionan que en particular la ciencia económica se basa en los siguientes supuestos.

" 1. Aceptación de la estructura institucional socioeconómica. El capitalismo define las restricciones; la tarea del economista queda delimitada dentro de estas fronteras .

2. La premisa de una armonía social. Aparte de algunas fricciones y dificultades no hay conflictos de intereses irreconciliables entre los grupos sociales.

3. Un individuo inflado, anticuado.

4. El Estado es un árbitro imparcial, no comprometido con ninguna clase social o grupo particular.

5. Falta de perspectiva histórica -se acepta a el capitalismo como algo eterno-: la evolución a partir del feudalismo se estudia en forma sumaria; otros sistemas se examina sólo para poner de relieve la superioridad del capitalismo" 2

Observemos que en efecto los anteriores supuestos son aplicables en toda la línea a la teoría del equilibrio

Una teoría que tenga como bases los supuestos anteriores y que su síntesis sea la teoría del equilibrio, no puede ser aceptada, ya no digamos como una respuesta al marxismo, si no como una explicación del modo de producción capitalista

"Los supuestos limitan rigidamente la investigación al sistema vigente y es en verdad un modelo poco realista del sistema vigente. Una recitación monótona de la elección libre, la competencia y el mercado. La propiedad privada se toma como un hecho sociológico benéfico".3

La teoría del equilibrio es el modelo de funcionamiento económico ideal. No se basa en un análisis económico de la realidad y desprender como conclusión tal modelo. El modelo del equilibrio primero idealiza que tipo de sociedad quiere

y en seguida busca las hipótesis necesarias y el camino adecuado para fundamentarlo. La competencia perfecta, la elección libre, etc. son hipótesis necesarias y retomadas por los teóricos del equilibrio. "la producción y el intercambio tal como existen en el capitalismo se toman como patrón normativo"⁴

En terminos de la ciencia económica tales supuestos no resultan cuestionables o endebles para una economía ficción, pero cuando de lo que se trata es de fundamentar el funcionamiento y reproducibilidad del actual modo de producción, planteando que las fuerzas económicas tienden a establecer algo óptimo para cada individuo y en consecuencia óptimo en terminos sociales, se ponen en tela de juicio las hipótesis y conclusiones.

La ciencia económica trata de analizar las leyes económicas: "Las conclusiones implican sin lugar a dudas la noción de que el análisis económico es capaz de producir leyes en el sentido de normas, y no solo en el sentido de recurrencias y regularidades demostrables de acontecimientos efectivos y posibles"⁵, pero en la actual ciencia económica las leyes económicas que se argumentan parten de deosos: "la libre competencia no pretende ser una explicación científica del curso que toman las relaciones económicas... se convierten en en desideratum político"⁶

La critica que desarrolla Marx a la economía política clásica sigue vigente: "la economía política parte del hecho de la propiedad privada, pero no nos lo explica. Expresa en formulas generales, abstractas, el proceso material que experimenta en realidad la propiedad privada, y luego toma esa formulas por leyes. No comprende estas leyes, es decir no demuestra cómo surgen de la naturaleza misma de la propiedad privada. La economía política no descubre la fuente de la división entre el trabajo-y el capital y entre el capital y la tierra... La economía política no nos enseña nada acerca de la medida en que las circunstancias externas y aparentemente accidentales son solo la expresión de un curso de desarrollo necesario... el intercambio mismo aparece como un hecho accidental. los únicos motores que la economía política pone en movimiento son la avaricia y la guerra entre los avarientos: la competencia"⁷

La "critica al libro de Marx" no unicamente no se ha hecho, como afirmaba Pareto, y si esto a ocurrido podriamos preguntar, como es que critican, por ejemplo, el siguiente planteamiento tipicamente marxista.

"Hemos partido de las premisas de la economía política. Hemos aceptado su lenguaje y sus leyes. Supusimos la propiedad privada, la separación del trabajo, el capital y la tierra, y de los salarios, la ganancia del capital y de la renta de la tierra; también la división del trabajo, la competencia, el concepto del valor de cambio, etcétera. Sobre la base de la economía política misma, en sus propias palabras, hemos demostrado-que el obrero se abate al nivel de una mercancía y se convierte en verdad en la mas miserable de las mercancías; que la miseria del obrero se encuentra en proporción inverza al poder y la magnitud de su producción; que el resultado necesario de la competencia es la acumulación del capital en pocas manos y por ende el restablecimiento del monopolio en una forma más terrible; y finalmente que desaparece tanto la distinción-entre los capitalistas y terrateniente rentista, como aquella entre cultivador de la tierra y obrero fabril, y que toda la sociedad se divide en dos clases: los dueños de la propiedad y los obreros sin propiedad"8

A esta argumentación se puede responder que parte de un concepto erróneo, como es la teoría del valor trabajo, y que esta teoría ha sido substituida por otra mas general, la teoría de la utilidad marginal, pero estaremos en una discusión donde salen a vislumbrar mas los intereses ideológicos que los intereses "científicos"

Pero volvamos a la discusión, tratemos de ver no los supuestos globales, sino los supuestos particulares que sustentan dicha teoría.

La teoría del equilibrio general económico, toma como punto de partida a el individuo; el individuo es analizado al margen de la sociedad, y se supone que tiene "atributos" bien establecidos, estos "atributos" son eternos, propios de dichos individuos, independientemente de la sociedad de la que se trate. Entre los "atributos" principales del individuo es su "escala de valores". El individuo es propietario de un "sistema de bienes". Teniendo este punto de partida, se reúnen en lo que se denomina sociedad, sin que se vean los vínculos entre ellos, la sociedad es la suma de los individuos. Como la escala de valores es inmutable, determinada, esta no cambia en la sociedad. Los individuos reunidos en la sociedad tienen un atributo, el cual es una tendencia al intercambio, realizan intercambios voluntarios bajo algunas reglas: hay regateo, los intercambios se realizan bajo acuerdo de los individuos participantes, no se realiza un-intercambio si hubiera desventaja para alguno de los participantes, y además del intercambio siempre se trata salir mejor. Si el individuo no puede hacer efectivos sus "valores de uso" y no intercambia no afecta en nada a el individuo.

Por otro lado se consideran a las empresas. Cada empresa de manera individual, bajo las hipótesis de información "perfecta" y conocidos los precios, organiza su

producción de modo que se obtengan las ganancias máximas. Bajo las hipótesis del *laissez faire* se llega a la "soberanía del consumidor, el óptimo de Pareto. Todos los recursos se están empleando, todos los bienes se están produciendo de acuerdo con los deseos de los consumidores: no es posible reasignar sin disminuir la utilidad de alguien"⁸

Podemos afirmar que el punto de partida es erróneo: el punto de partida es el individuo, el individuo es un producto social, la sociedad conforma a los individuos, los individuos conforman la sociedad, no es posible tomar a el individuo aislado. En la teoría del equilibrio general económico, al considerar a un individuo aislado y egoísta, que solo le interesan los intercambios, bajo estas condiciones se abstraen de las relaciones de producción. Considerar que lo único que realiza el individuo, es el intercambio como actividad fundamental, es considerar a este eterno, es el hombre que existe a el margen de la historia: el sentido de propiedad le es inherente al hombre". Este individuo aislado, egoísta, que tiende naturalmente a el intercambio, es un producto histórico de condiciones históricas concretas, se trata de reflejar a el individuo que vive en la sociedad capitalista, el cual es distinto al que existe en otros modos de producción. Una problemática es investigar, si es que este individuo se da en algún momento histórico, cuales son las condiciones históricas para que exista una sociedad de individuos aislados que solo están interesados en el intercambio.

Oskar Morgenstein ha llamado la atención sobre algunos problemas que tiene la teoría del equilibrio, su énfasis se centra en la problemática matemática y social. Retomaremos algunos de los problemas que él ha señalado.

"La teoría económica actual pretende ocuparse de; por ejemplo de beneficio, utilidad,...la objeción fundamental es que estos extremos existan y pueden alcanzarse sólo si el individuo o la empresa controla todas las variables de que depende el máximo. Algunas variables pueden ser estadísticamente controlables, como el comportamiento de la naturaleza. Si algunas variables de las que depende el resultado, se encuentran bajo el control consciente de otras entidades que se desea maximizar su utilidad o beneficio y que pueden oponerse a un agente económico dado o, como puede ocurrir en ocasiones, que deseen cooperar con él, tal control esta fuera del individuo y no está comprendido un problema de máximo, sino una mezcla curiosa de máximos y mínimos"⁹. Mas adelante señala: "Esta clase de problema no se trata en ninguna parte de la matemática clásica. Repetimos a riesgo de parecer pedantes que este no es un problema de máximo condicional, no es un problema del

cálculo de variaciones, de análisis funcional, etcétera, surge con toda claridad aún en las situaciones más "elementales", por ejemplo cuando las variables pueden asumir un número finito de valores".¹⁰

O. Morgenstern señala que ni aun con la teoría de juegos se resuelve este problema, y que allí está el reto para los futuros economistas matemáticos para que resuelvan este problema.

Pero además las matemáticas utilizadas en la teoría del equilibrio general económico en lugar de aclarar oscurecen la realidad. Es verdad que en cualquier rama de la ciencia cuando un fenómeno es matemático se pierden algunas de sus características, esto se hace explícito, pero se trata de mostrar algún elemento central de dicho fenómeno. Las fórmulas más aceptadas son aquellas que hacen en forma explícita sus limitaciones y restricciones, la matemática que es un instrumento útil para el análisis de fenómenos sociales y naturales que ocurren con ciertas regularidad, es utilizada, en la teoría del equilibrio para erigir una superestructura refinada con escasa consideración de aplicación. No se discute la explicitación en la teoría del equilibrio sino la transparencia de los supuestos.¹¹ cuando los supuestos no son explícitos lo que resulta es una teoría oscura y engañosa, los conflictos sociales se tratan de meter en una estructura tan pequeña como una nuez, minimizando los problemas sociales a, la solución de problemas de optimización. Pero esto no es el único problema.

"se alcanza un óptimo de un grupo o sociedad cuando, mejorando la posición de un individuo, no se deteriora la posición de nadie ... Una supuesta ventaja fundamental de óptimo de Pareto es el hecho de que se evitan comparaciones interpersonales de utilidad que, como es bien sabido, siempre parecen comprender juicios éticos que no tiene cabida en una teoría descriptiva. Pero ¿se evitan realmente tales comparaciones y en su caso a que precio?. ¿Como sabemos si hay mejoramiento o disminución?. Hay solo dos formas: debemos preguntar a los individuos o el observador externo debe tomar la decisión de acuerdo con los hechos. Pero ¿cuales hechos conoce?, ¿como se establecen?. Si se le pregunta, un individuo puede negar que se encuentre mejor o afirmar que se encontrara peor si otra persona recibe una adición a sus posesiones. Ninguna de estas afirmaciones necesita ser cierta. Puede formularse para extraer mayores cantidades compensatorias o para evitar que los demás obtengan lo que está ofrecido. Así pues, la falsedad debe excluirse expresis verbis de los supuestos; pero restringe la teoría fundamental y resultaría de imposible aplicación

en la realidad. O bien, el observador debe de decidir cual es el caso: debe de decidir si la utilidad total experimentada por el primer individuo es mayor que antes y si no ha disminuido por las hasta que se compare la utilidad de ningún otro individuo. Pero esto es una comparación interpersonal de utilidades, les precisamente el concepto que el filósofo de Pareto trataba de eludir!"¹²

La teoría del equilibrio general llega a tal punto que es tan general, que todo aspecto particular queda determinado de tal manera que nunca se puede decir nada de nada. Pero en términos económicos, no solo sirve tener caracterizaciones o solo globales o solo particulares

"En la teoría de Walras y Pareto se hace o implica un supuesto de previsión perfecta. Ahora bien, es claro de que si existe previsión perfecta no habrá tatonnement porque todos irán directamente al precio de equilibrio final. Por otra parte, he demostrado que el concepto de previsión "perfecta", tomado literalmente, como debe ser, conduce a contradicciones lógicas tales que el concepto en cuestión no puede constituir la base de una teoría del equilibrio económico. Si se abandona esta idea, deberán hacerse otros supuestos específicos acerca de la distribución de grados diversos de previsión, o de su ausencia, entre los participantes del mercado, y examinar cómo se obtiene un equilibrio. No conozco tales investigaciones en la bibliografía del equilibrio general. Por supuesto, la "previsión perfecta" no debe confundirse con la información perfecta"¹³

Recordemos que la teoría de los tantaleos se refiere a una-situación en la cual al realizarse contratos de compra venta de manera sucesiva, los precios de las mercancías se van ajustando de tal manera que llegara un momento en que se tendrá un precio donde la oferta sera igual a la demanda en cada uno de los mercados. En terminos matemáticos se prueba que existe la estabilidad de los precios de equilibrio, que conforme transcurre el tiempo los precios convergen. Pero esto que ha sido demostrado no concuerda en absoluto con la realidad. La determinación de los precios no dependen unicamente de la oferta y la demanda, o de las condiciones técnicas de producción. Si esto fuera cierto los procesos inflacionarios, o deflacionarios, serian muy fáciles de resolver. La determinación de los precios que igualen la oferta con la demanda, y hagan óptimar la ganancia y utilidades, no puede ser reducido de un análisis que no toma en cuenta la complejidad de la realidad. El propio "egoísmo" que es el motor de la economía neoclásica, puede ser el factor que hace variar a los precios. El planteamiento subjetivo de la teoría del equilibrio, no toma en cuenta las variables subjetivas mas importantes que

lo pueden hacer variar de manera contraria, a lo que se maneja.

Una última observación es la siguiente: la discusión que plantean los neoclásicos, es, ¿cuales son las leyes fundamentales y la tendencia de estas en el modo de producción capitalista?. Se toma a un individuo aislado y egoísta, y se reducen sus actividades económicas, a elevar al máximo su utilidad, el empresario su ganancia,, el precio de equilibrio sera aquel que en cada mercado la función de igualar la oferta con la demanda, y además se tenga que la ganancia y la utilidad sean máximas. Podemos preguntarnos ¿estas actividades que se plantean en la teoría del equilibrio, y que son tomadas como las leyes del consumidor y del empresario, tomando encuentra las cantidades de producción, consumo, precios, nos dan los elementos básicos para un análisis de la actual economía?

La teoría del valor trabajo ha sido la herramienta marxista para dar un análisis de las leyes capitalistas de producción y la tendencias de estas leyes. Observando la estructura lógica, metodológica, etc, el marxismo sigue siendo no solo un método para el análisis económico, dentro del gran desierto económico que han generado los científicos de la economía contemporánea.

Para finalizar esta parte daremos un contraejemplo. O. Morgenstern y J.V. Newman han-realizado un análisis de la economía capitalista en terminos de enfrentamiento de unos con otros, tratando desincorporar los conflictos sociales con una hipótesis mas, y han probado la existencia del equilibrio económico, aquí mostraremos un ejemplo que trata de reflejar una situación-económica competitiva y bajo la hipótesis de que cada individuo es inteligente, y busca lo mejor para si llega a una situación-catastrófica. El ejemplo es un juego llamado el dilema del prisionero, el cual fue tomado del libro de Morton Davis titulado Teoría del juego.

Dos hombres sospechosos de cometer un crimen juntos son detenidos y situados en-celdas separadas por la policía. Cada sospechoso puede confesar o permanecer silencioso, y cada uno conoce las posibles consecuencias de su acción. Estas son: 1. Si un sospechoso confiesa y su compinche no, el que confiesa cambia la evidencia y queda libre, y el otro va a la corcel po 20 años. 2. Si ambos sospechosos confiesan los dos van a dar a la corcel por cinco años. 3. Si ambos permanecen silenciosos, ambos van ala corcel por un año por llevar armas ocultas -un cargo menor-. Suponiendo que no hay "honor entre ladrones" y que lo que a cada sospechoso concierne su propio interés. Bajo esas condiciones, ¿que harian los criminales? el juego se muestra en la figura de abajo

BIBLIOGRAFIA (ALGUNOS COMENTARIOS A LA TEORIA DEL EQUILIBRIO ECONOMICO GENERAL)

- (1) E.K. Hunt y J.G. Schwartz. Lecturas No.21 del FCE. Critica de la teoria económica. Méx.(1977) p10.
- (2) Op. cit. p.12.
- (3) Op. cit. p.9
- (4) Op. cit. p.9.
- (5) Op. cit. p.9.
- (6) Op. cit. p.9
- (7) Carlos Marx. Trabajo enajenado y capital. Ed. Grijalbo. Méx.(1978) p.2.
- (8) E.K. Hunt, y J.G. Schwartz...p.19
- (9) Oskar Morgenstern. Trece puntos criticos de la teoria económica contemporánea: una interpretación. Publicado en lecturas No. 21 del FCE. p.324.
- (10) Oskar Morgenstern...p.237.
- (11) Oskar Morgenstern p.329.
- (12) O.M. Op.cit p.330.
- (13) Op. cit. p. 332.
- (14) morton Davis. Teoria del Juego Alianza Editorial. Barcelona 1971 p.

A.8 EL EQUILIBRIO ECONOMICO GENERAL EN KEYNES.

La concepción del equilibrio económico en Keynes difiere en aspectos importantes, de la desarrollada por los economistas neoclásicos antes de 1930. La idea manejada hasta antes de este año, se basaba en el análisis atomista del individuo egoísta, que buscaba lo mejor para él, y bajo las condiciones de las más completa "libertad económica" se llegaba a lo "mejor" para cada uno de los individuos y por tanto de la sociedad. Para los años 30's de este siglo se decía que se llegaba al final-del *laissez faire* (ver por ejemplo en Essay in persuasion, Harrod, *life of Keynes*). El futuro que se vislumbraba al sistema económica, era de grandes

Y profundas transformaciones, había bastantes elementos que mostraban lo anterior: la crisis la inflación, la primera guerra imperialista mundial, la revolución rusa, etc.

Keynes había perdido la confianza en las ideas económicas neoclásicas para resolver los grandes problemas de su época, y por otro lado deslindaba de los economistas que fundamentaban el derrumbe capitalista: "Aparte de la necesidad de un control central, para poder lograr un equilibrio entre la propensión al consumo y la propensión a la inversión, no existen mayores razones para la socialización de la vida económica que las anteriores existentes" 1

Keynes ha sido considerado como el creador de una "revolución" en el pensamiento económico. Veamos en qué consisten sus ideas "revolucionarias".

Se parte de que en los años 30's existió la más fuerte de las crisis económicas hasta ese entonces. Uno de los problemas más agudos era el del "paro obrero", o en términos de Keynes, de la "ocupación de los recursos disponibles". Keynes parte de que si existe una alta tasa de desempleo, es debido a que la burguesía tiene problemas para seguir extendiendo el crecimiento de las empresas y tampoco existe una adecuado "ocupación de los recursos disponibles", así el problema que considera como el fundamental, es el problema de la ocupación. Para resolver este problema publica "La Teoría General", el cual el mismo resume en los siguientes puntos.

1. En determinada situación de la técnica, los recursos y los costos, el ingreso (tanto monetario como real) dependen del volumen de ocupación, N (de obreros).

2. La relación entre el ingreso de la comunidad y lo que se puede esperar que se gaste en consumo, denotado por $D(1)$, depende de las características psicológicas de la comunidad, que llamaremos su propensión a consumir. Es decir, que el consumo dependerá de nivel del ingreso

global, y por tanto, del nivel de ocupación N , excepto cuando ocurre un cambio en la propensión a consumir.

3. El volumen de trabajo N que los empresarios deciden emplear depende de la suma D de dos cantidades, es decir $D(1)$, la suma que se espera que se gastará la comunidad en consumo, y $D(2)$ la que se espera que dedicará a nuevas inversiones.

4. Desde el momento que $D(1)+D(2)=D=F(N)$, en donde la F es la función de la oferta global, y como según hemos visto en 2, $D(1)$ es función de N , que puede escribirse $X(N)$, dependiendo de la propensión a consumir, se deduce que $F(N) - X(N) = D(2)$.

5. De aquí se desprende que, en equilibrio, el volumen de ocupación depende, a) de la función de la oferta global, F , b) de la propensión a consumir X y del volumen de inversión $D(2)$. Esta es la esencia de la teoría general de la ocupación.

6. Para cada valor N hay una productividad marginal correspondiente de la mano de obra en las industrias de artículos para asalariados, lo que determina es salario real. El párrafo 5, está sujeto, por tanto, a la condición de que N no pueda exceder de aquel valor que reduce el salario real hasta igualarlo con la con la desutilidad marginal de la mano de obra. Esto quiere decir que no todos los cambios en D son compatibles con nuestro supuesto provisional de que los salarios nominales son constantes. por esta razón será necesario, para realizar una exposición más completa de nuestra teoría, renunciar a esta hipótesis.

7. En la teoría clásica, de acuerdo con lo cual $D=F(N)$ para todos los valores de N , el volumen de ocupación está en equilibrio neutral en todos los casos en que N sea inferior al máximo, de manera que se puede esperar que la fuerza de la competencia entre los empresarios lo eleve hasta dicho valor máximo. Sólo en este punto, según la teoría clásica puede existir equilibrio estable.

8. Cuando la ocupación aumenta, $D(1)$ hará lo propio, pero no tanto como D ; ya que cuando el ingreso sube, el consumo lo hará también, pero menos. La clave de nuestro problema práctico se encuentra en esta ley psicológica: porque de aquí se sigue que cuanto sea el volumen mayor de ocupación, más grande será la diferencia entre el precio de la oferta global (Z) de la producción correspondiente y la suma $D(1)$ que los empresarios esperan recuperar con los gastos de los consumidores. Por tanto si no ocurren cambios en la propensión a consumir, la ocupación no puede aumentar, a menos que al mismo tiempo $D(2)$ crezca en tal forma que llene la diferencia creciente entre Z y $D(1)$. Por consiguiente el sistema económico puede encontrar en sí mismo un equilibrio estable con N a un nivel inferior a la ocupación completa, es decir al nivel dado por la

intersección de la función de la demanda global y la función de la oferta global excepto en los supuestos especiales de la teoría clásica, de acuerdo con lo cual actúa alguna fuerza, que cuando la ocupación aumenta, siempre hace que $D(2)$ suba lo suficiente para cubrir la distancia creciente que separa a Z de $D(1)$.²

Expliquemos brevemente en qué consisten dichos puntos. El punto 1 nos dice que el número de obreros determina la producción, el ingreso el consumo, etc. El segundo punto dice que el consumo depende del ingreso de la sociedad, y que si Y es el ingreso de la sociedad y C es la parte del ingreso que destina al consumo, la propensión al consumo será C/Y , la cual está regida por leyes psicológicas. El tercer punto dice que el empleo depende del volumen del consumo y el volumen de la inversión existente en la sociedad. 4 dice que la inversión es igual al valor de la producción menos el valor del consumo que se realiza en la sociedad. 5 dice que en el equilibrio el empleo depende de la producción, C/Y y de la inversión. El punto 6 puede resumirse diciendo que los salarios nominales no serán considerados constantes. El punto 7 dice que el punto de equilibrio será estable si hay el máximo de empleo posible. Para explicar 8, tomemos el segmento OD y un punto $D(1)$ en el interior de dicho segmento. OD representa el ingreso de la sociedad, el cual es igual al producto destinado al consumo, $OD(1)$ la parte que se consume de este ingreso. Lo que ocurre en las "sociedades avanzadas", según Keynes, es que el ingreso crece conforme la sociedad "avanza", pero lo que ocurre es que el consumo $OD(1)$ no es OD por la mencionada ley psicológica, y como la oferta no será igual con la demanda, para que la cantidad $D(1)D$ se consuma, Keynes recomienda que se incremente la inversión para que esto ocurra.

¿Qué tipo de economía plantea Keynes y cómo es el funcionamiento de dicha economía?, ¿cómo es el equilibrio económico?. Para comprender la respuesta, tengamos presente que Keynes lo que trata de hacer es llegar a una situación económica donde se preserve la igualdad de la oferta con la demanda, pero, además donde se considere a el empleo. Primero veremos cómo es la igualdad de la oferta con la demanda, enseguida trataremos el efecto que trae en el empleo la variación del ahorro e inversión, finalizaremos planteando cómo es el equilibrio keynesiano.

Antes de comenzar, veamos que las categorías tanto exógenas como endógenas son categorías tales como producción, ingreso, consumo, inversión, ahorro, las respectivas propensiones y las propensiones marginales, al consumo, al ahorro, a la inversión, al ahorro, además en su momento se manejarán conceptos tales como el multiplicador de la inversión, la eficacia marginal del capital, la tasa de interés, la oferta y demanda de dinero, entre otras no nos detendremos a definir las aquí; ya irán saliendo.

Hemos mencionado que Keynes trata de analizar una economía donde se tenga la igualdad de la oferta con la demanda, pero además donde se tome en cuenta el empleo.

Para explicar su idea sin entrarle a fondo, tomemos la siguiente cita de la cual sólo nos interesa la conclusión.

" podemos aceptar como nuestras últimas variables independientes

1. Los tres factores psicológicos fundamentales, o sea la propensión psicológica a consumir, la actitud psicológica frente a la liquidez y la expectativa psicológica de rendimientos futuros devengados de inversiones del capital.

2. La unidad del salario, que se fija a base de negociaciones entre empresarios y trabajadores.

3. La cantidad monetaria, fijada por la actitud del banco central; de manera que si admitimos los factores mencionados como dados, estas variables determinan los ingresos nacionales y el volumen de ocupación del sistema"3

Es decir el problema fundamental para la determinación del empleo es el ingreso, pero el ingreso queda determinado al conocer 1, 2 y 3. Más aun, los Keynesianos, para determinar el ingreso donde se iguale la oferta con la demanda y por tanto determinar los niveles de empleo, lo determinan con la igualdad de ahorro e inversión.

Del punto 3 y 4 del resumen planteado podemos decir que la inversión para llegar al equilibrio, es la diferencia entre el valor del producto nacional, menos la parte del ingreso destinado al consumo. O en símbolos $Y=C+I$, donde Y es el ingreso, C la parte del ingreso destinada al consumo e I la parte que se requiere para invertir. Por otro lado Keynes en la pag. 62 de la teoría general dice. "Que yo sepa todo el mundo está de acuerdo en que ahorro significa el excedente del ingreso sobre los gastos de consumo". Por tanto, si S denota el ahorro, se tiene la igualdad $S=Y-C$, con lo cual $Y=C+S$ y por otro, arriba se ha manejado la igualdad $Y=C+I$, i.e. se tiene que el ahorro es igual a la inversión4

Después de haber planteado los keynesianos lo anterior concluyen, "el núcleo del problema de la determinación de los ingresos totales (y por tanto del empleo) lo constituye la determinación del equilibrio entre el ahorro y la inversión"5

Veamos la siguiente interpretación geométrica: "a mayor ingreso, mayor consumo, pero no todo el ingreso se gasta en consumo", dicen los keynesianos. Esto se llega a interpretar diciendo que la función consumo es una función creciente del ingreso, y que la derivada de la función

consumo en cada punto es menor que uno. Se ha llamado al cociente C/Y la propensión al consumo, y se llama en consecuencia dC/dY la propensión marginal al consumo, por tanto $dC/dY < 1$.

Repitiendo, para cada ingreso Y , la sociedad en su conjunto determina un consumo, los empresarios sus inversiones y los consumidores sus ahorros, Keynes ha dicho que $S=I$ siempre. Por lo dicho anteriormente podemos suponer que la función consumo es como se describe abajo. El eje Y es el eje del ingreso, que es igual al producto neto de la sociedad, que también se puede identificar con la oferta, mientras que el eje C, S, I mide el ahorro el consumo y la inversión, es claro que también el consumo también se puede identificar con la demanda.

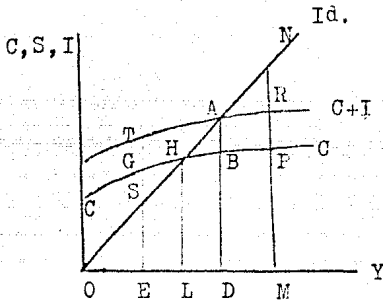


Figura 1

la figura muestra la situación en que para cada ingreso Y , las familias determinan el consumo que se describe con la curva CC . Aquí por ejemplo, BD indica el consumo cuando se tiene el ingreso OD . la recta $Id.$ es la recta idéntica, se tiene por ejemplo que $OM=MN$, los puntos de la idéntica nos indican que los ingresos correspondientes son tales que se igualan con los gastos del consumo, es decir indican los puntos de "equilibrio". Los puntos de "equilibrio" determinan la "demanda efectiva". Sólo cuando los ingresos corresponden a OL , este se iguala con lo que existe de mercancías. Con ingresos menores, por ejemplo OE el consumo GE es mayor, y aquí se da un consumo por "desahorro". Si los ingresos son mayores a OL por ejemplo DM , se consumirá MP y se ahorrará NP . Así pues la distancia que existe entre la recta idéntica y la curva CC determina los ahorros y desahorros

Pero en la economía, el consumo no únicamente está determinado por el ingreso que tiene la sociedad, los keynesianos suponen que la sociedad independientemente de cualquier ingreso Y siempre se realiza una "inversión autónoma" I_0 , y esta inversión autónoma determina un

consumo. Por tanto la función de consumo global debe contemplar dos tipos de consumo: uno que depende del ingreso y el segundo que se desprende de las inversiones. La Función de demanda global será, entonces la curva CC subida I unidades.

Para encontrar el nuevo ingreso que determina los niveles de empleo de la sociedad, se tendrá que encontrar un punto sobre la recta idéntica, tal que la distancia de la idéntica a la curva CC sea igual a la inversión I. Llamemos A a éste punto de "equilibrio", a B el punto sobre CC donde la distancia AB sea I, aquí se tiene que el ingreso cuando $S=I$ es OD. Veamos cómo es que los keynesianos argumentan el "ajuste automático entre el ahorro y la inversión": "Dado el volumen de inversiones, el volumen del ahorro habrá de ser igual a esta inversión, ya que esto sucede siempre en cada volumen de las inversiones. Pero el volumen del ahorro depende del volumen de los ingresos. Para que, dadas unas inversiones determinadas, el ahorro pueda ser igual que la inversión, los ingresos habrán de sufrir una variación a fin de que a estos ingresos se ahorre la misma cantidad que la invertida (independientemente del volumen de los ingresos). Simplificándola en forma algo drástica: el volumen de inversiones "obliga" a una correspondiente de los ingresos" B

Observemos que en efecto A es el punto donde el ingreso, es tal que lo ofrecido se iguala con el consumo más ahorro, o igual al consumo más la inversión. A el ingreso OD se determina un consumo DB y por tanto un ahorro AB, y este coincide con la inversión. Cualquier otro punto distinto de A determina un ingreso distinto de OD y no cumple que $S=I$. A el ingreso OM, se tiene un consumo MP y un ahorro PN, el cual evidentemente es mayor que I. En este caso el ingreso OM al ser mayor que $MP+PN$, se tiene una situación de sobreproducción, el consumo sera $MP+I$, pero la producción aquí es OM, generándose una situación dinámica que hace que la producción se ajuste con el ingreso OD. En caso contrario cuando se tiene un ingreso OE, el consumo es $EG+I$, es decir la demanda supera a la oferta y análogamente, aquí las "fuerzas del mercado" hacen que la producción tenga un ingreso OD, para el cual la producción se iguala con el consumo, y el ahorro coincida con la inversión.

El planteamiento anterior nos dice cómo se equilibra la demanda con la oferta, habiéndose contemplado el problema del empleo, pero no se dice la "dinámica económica" para afirmar que esta situación se da. Aunque el "equilibrio" se basa en términos geométricos, esto únicamente ayuda a entender a Keynes. Pero tengamos presente que el planteamiento de Keynes es un planteamiento de "equilibrio general económico", pero como el planteamiento neoclásico. Keynes no centra su atención en la flexibilidad de los precios y la competitividad de los mercados para llegar a

la igualdad de la oferta con la demanda. En contraposición al *laissez faire*, argumenta cómo la "acción del Estado es un factor importante de compensación" para llegar al equilibrio.

Veamos cómo es el análisis keynesiano de los elementos que entran en juego en su planteamiento, y cómo es la concatenación de ellos para tener una sociedad en "equilibrio", y donde se vayan contemplando las variaciones del empleo

Un "axioma" keynesiano afirma: el empleo depende del ingreso, y el ingreso está determinado por el consumo y la inversión. En consecuencia al problema a investigar es el consumo y la inversión.

El argumento de la importancia, del consumo en la determinación del empleo no es debida a Keynes. La demanda puede identificarse con el consumo; al variar la demanda se determinan inversiones en sentido positivo o negativo, y esto en consecuencia determina un mayor empleo o desempleo. Esto que resulta claro para todo empresario es explotado por Keynes. Pero el análisis del consumo no va muy lejos.

El consumo al quedar determinado por la parte del ingreso que se destina a la compra de artículos para satisfacer las necesidades de los "consumidores", afirma el consumo es una función del ingreso. Para llegar a esta conclusión keynes realiza todo un análisis. Se afirma que en los seres humanos existe una ley psicológica, que hace que los consumidores siempre destinen la misma parte del ingreso al consumo, en términos matemáticos, si Y es el ingreso y C es la parte del ingreso destinado al consumo entonces C/Y es más o menos constante. Keynes plantea lo anterior como sigue.

"Definimos lo que hemos llamado propensión al consumo como la relación funcional entre el consumo y el ingreso a un nivel de ingreso dado...", 9. Después de haber planteado lo anterior analiza lo que hace variar a este cociente, y en varias paginas dice que los cambios se deben a

1. Un cambio en la unidad de salario.
2. Un cambio en la diferencia entre ingreso e ingreso neto
3. Cambios imprevistos en el valor de los bienes de capital no considerados al calcular el ingreso neto.
4. Cambios en la tasa de descuento del futuro, es decir, en la relación de cambio entre los bienes presentes y futuros.
5. Cambios en la política fiscal

6. Cambios en las expectativas, acerca de la relación entre el nivel presente y futuro del ingreso. 10

A continuación señala.

"La propensión al consumo puede considerarse como una función bastante estable, de tal manera que, por lo general, el monto del consumo, en conjunto, depende principalmente del ingreso" 11

Y finalmente señala:

"La ley psicológica fundamental en que podemos basarnos con entera confianza, tanto a priori partiendo de nuestro conocimiento de la naturaleza humana como de la experiencia, consiste en que los hombres están dispuestos, por regla general y en promedio a aumentar su consumo a medida que su ingreso crece, aunque no tanto como el crecimiento de su ingreso. Esto quiere decir que si C es el monto del consumo y Y el ingreso, C tiene el mismo signo que Y , pero es de menor magnitud, es decir dC/dY es positivo y menor que 1" 12

En resumen el consumo en Keynes depende del ingreso y del comportamiento psicológico social, y como tal propensión a consumir es bastante estable, entonces las variaciones en el empleo no dependen de manera importante del consumo. Keynes afirma que el problema central será en consecuencia la inversión. Antes de pasar al análisis de la inversión, tengamos presentes algunas expresiones algebraicas. Se ha dicho que el ingreso es igual al consumo más el ahorro, pero en el "equilibrio" el ahorro coincide con la inversión, además la propensión al consumo es el cociente mencionado, con lo cual tenemos las siguientes igualdades: $Y=C+I$, $Pc=C/Y$. Las expresiones que se obtienen al variar de manera

discreta tanto el ingreso como la propensión al consumo son $Y=C+I$ y $Pc=C/Y$. Pero la última expresión usando la primera se puede escribir como $1-I/R$.

Por otro lado Keynes define al cociente R/I como el multiplicador de la inversión: "llamemos a k el multiplicador de la inversión total. Este nos indica que, cuando existe algún incremento en la inversión total, el ingreso aumenta una cantidad que es k veces el incremento de la inversión. De aquí se desprende que $Pc=(1-1/k)=(k-1)/k$. Estas expresiones que los keynesianos utilizan para cambios discretos, son aplicados de manera natural para cambios "infinitamente pequeños", y en consecuencia se puede llegar a la igualdad $dC/dR=k-1/k$, y como se tiene que dC/dR se encuentra el el intervalo semiabierto cero uno, se tiene que $k>1$. De la igualdad $dC/dR=k-1/k$, se puede obtener fácilmente que $k=1/(1-dC/dR)$. Quedémonos momentáneamente con la igualdad $R=k(I)$ con $k>1$.

La última igualdad por ejemplo significa por ejemplo que si la inversión se aumenta en una unidad, la renta aumenta aun más que la inversión. En términos de Marx se diría que el capitalista hace una inversión de capital en I , y al final tendrá capital en cantidad kI . Pero Keynes no argumenta el crecimiento de I , por medio del proceso productivo, sino que el incremento de la inversión se analiza en el proceso de la circulación de mercancías.

Si se tiene una propensión marginal al consumo fija para cada ingreso, dábamos Pc' , al incrementarse la inversión I en I , se suponen que se contratan más medios de producción y obreros, y el dinero que tendrán los consumidores será mayor al que tenían inicialmente. Como existe una propensión a consumir de Pc' , entonces la parte de I que se destina al consumo será $Pc'I$. Esta cantidad es considerado como un nuevo ingreso, del cual una parte se destina al consumo, tenemos que en consecuencia que la parte que se destina al consumo de $Pc'I$, es $Pc'(Pc'I) = Pc^2 I$. esta cantidad $Pc^2 I$ se considera como un nuevo ingreso para la misma sociedad, los cuales consumirán $Pc(Pc^2 I) = Pc^3 I$, y así sucesivamente. El ingreso final, que se obtiene es según Keynes, sumar todos los terminos anteriores. Estos terminos son $I, Pc'I, Pc^2 I, \dots$ por tanto tenemos

$$I + Pc'I + Pc^2 I + \dots = I(1 + Pc' + Pc'^2 + \dots) \\ = I(1/(1 - Pc'))$$

pero esto no es otra cosa que kI , por tanto $R = kI$

Con esta idea podemos hacer una precisión en la Fig 1. Si se hizo una inversión I , la magnitud LD será kI , con lo cual el ingreso nuevo de "equilibrio" OD estará completamente determinado, conociendo solamente la propensión al consumo, y las nuevas inversiones. Ahora tratemos a analizar la segunda variable de la cual depende el empleo

Primero trataremos la relación que existe entre el ahorro y la inversión y los efectos que trae en el empleo.

Al ser el consumo algo que se puede determinar institucionalmente, sólo a través del ingreso (i.e que el consumo es una función bastante estable), y al considerarse el ahorro como la diferencia entre el ingreso y el consumo, entonces la función consumo quedará completamente determinado al quedar conocido la inversión y el ahorro; el aumento del ahorro disminuye el consumo, y el aumento del consumo disminuye el ahorro. El comportamiento de la inversión depende del "ánimo" de los empresarios, no es tan fácil de determinar como el ahorro. Pero teóricamente se pueden considerar variantes entre el ahorro y la inversión. Para ver la influencia que tiene el ahorro y la inversión (léase consumo e inversión), sobre el empleo los

keynesianos, suponen que la inversión depende del ingreso, y simplificándola algunos la dibujan como una recta.

Para simplificar supongamos que la función ahorro e inversión son dos rectas

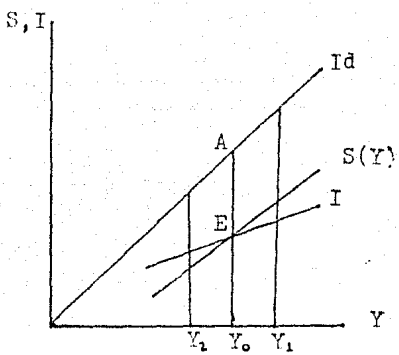


Figura 2

En la figura los ahorros e inversiones se miden en el eje vertical y el ingreso se mide horizontalmente. Aquí mostramos una situación donde la propensión marginal al ahorro es mayor que la propensión marginal a invertir, ambas líneas se cruzan, en el punto E, aquí el ahorro es igual a la inversión, en términos del ingreso podemos decir que $I(Y(0)) - S(Y(1)) = 0$, para un ingreso mayor que $Y(0)$, digamos $Y(1)$ se tiene que $S(Y(1)) - I(Y(1)) > 0$ y para $Y(2) < Y(0)$, $S(Y(2)) - I(Y(1)) < 0$. La recta idéntica muestra que en $Y(0)$ tenemos que la inversión coincide con el ahorro y que el consumo AE es tal que $C + I = C + S$. Si $S > I$ entonces $C + S > C + I$, es decir, $Y > C + I$ y si $S < I$ $Y < C + I$. Veamos los efectos que se tiene al variar la inversión y el ahorro.

De entrada supongamos que estamos en una situación de "equilibrio" entre el ahorro y la inversión en un cierto punto E_0 , con un cierto porcentaje de empleo, digamos el 80%. Esta situación se refleja en la figura 3.

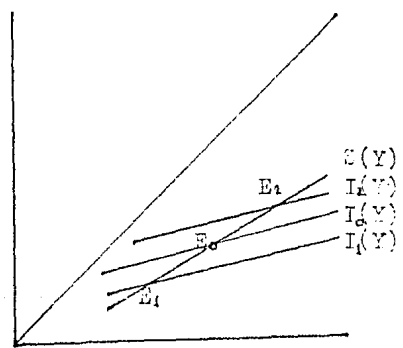


Figura 3

Aquí las funciones $S(Y)$ e $I_0(Y)$, representas funciones de ahorro e inversiones iniciales, donde $S(Y)$ intersección $I_0(Y)$ es E_0 . Veamos una primera situación, donde los empresarios disminuyen sus inversiones. Al realizarse tal desinversión, se supone que habrá desempleo, y una utilización menor de los medios de producción, si esto es para cualquier tipo de ingreso y al mantenerse los ahorradores con una misma conducta en la curva $S(Y)$, se puede observar que se determina un nuevo punto donde la inversión se iguala con el ahorro, el cual está descrito por la intersección de las curvas $S(Y)$ e $I(Y)$. Esta situación puede ser planteado en términos del consumo como sigue: al mantenerse el consumo "constante" para cada Y , y al disminuir la inversión entonces se determinará un nuevo punto donde el ahorro se iguala con la inversión. En Y_0 $S=I$, y el consumo es tal que $Y=C+I$, pero ahora existe un mayor desempleo por abajo del 80%. Otra situación diferente ocurre si en lugar de desinvertir se incrementa la inversión. El nuevo punto donde $S=I$ será $E(2)$ con un empleo mayor del 80%. Esta situación se representa en la Fig.3, específicamente en las curvas de $I(2)$ y S , y donde $I(2)$ intersección S es $E(2)$, aquí el nuevo ingreso es $Y(2)$.

En la figura 4, se describe una situación, en la cual, la inversión es la misma para todas las situaciones, y el ahorro aumenta o disminuye (por tanto el consumo disminuye o aumenta), aquí se tiene que $S=I$ con ocupación del 80%, ocupación mayor al 80%, y ocupación menor al 80%.

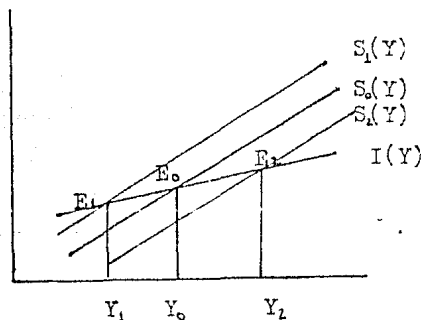


Figura 4

$E(1)$ es el resultado de intersecar a $S(1)$ con I , aquí el empleo disminuye: como se aumenta el ahorro de $S(0)$ a $S(1)$, el consumo disminuye, y esto provoca más desinversión y por tanto el empleo disminuye, aquí el ingreso que hace que $S=I$ es $Y(1)$. Por otro lado la curva $S(2)$ representa una disminución de los ahorros, (y por tanto un aumento en la demanda) con $Y(2)$ como un nuevo ingreso donde $S=I$.

En conclusión, pueden existir situaciones donde el ingreso de la sociedad coincida con el consumo más el ahorro, donde el ahorro sea igual a la inversión, pero los

niveles de desempleo varían al variar tanto S como I. Pasemos al análisis de la inversión.

El análisis de la inversión radica en la investigación de dos conceptos fundamentales: la eficacia marginal del capital y la tasa de interés

"Defino la eficacia marginal del capital como si fuera igual a la tasa de descuento que lograría igualar el valor presente de la serie de anualidades dada por los rendimientos esperados del bien del capital, en todo el tiempo que dure su tiempo de oferta" 13

Para entender el concepto de eficacia marginal es necesario comprender el término "expectativa del rendimiento probable, y el concepto "precio de oferta corriente", ya que se define el concepto de eficacia marginal como el cociente de el "rendimiento esperado" y el "precio de oferta". Ejemplifiquemos los conceptos anteriores.

En primer lugar el " precio de oferta" se refiere al costo original que el empresario tiene que desembolsar en la compra de un "bien de capital", o a su vez es la cantidad de dinero a invertir para producir una unidad de capital. Supongamos que un capitalista desea comprar un "bien de capital" cuyo precio de oferta es de \$4800 unidades monetarias, y supongamos que dicho "bien de capital" aporta \$1050 el primer año, \$882 el segundo año y \$3473 el tercer y último año de su vida del "bien de capital". Supóngase que en la economía existe durante los tres años una tasa de interés del 5%. El valor de mil unidades hoy a finales del primer año es de $1000 + (.05)(1000)$, el valor de 800 unidades monetarias es de $800(1+.05)(1+.05)$ y el valor de 3000 unidades monetarias dentro de tres años es de $3000(1+.05)(1+.05)(1+.05)$, es decir 1050, 882 y 3473 unidades respectivamente. Así pues tenemos la ecuación.

$$\begin{aligned} 4800 &= 1000 + 800 + 3000 \\ &= 1050/(1.05) + 882/(1.05)^2 + 3473/(1.05)^3 \end{aligned}$$

En este ejemplo, en efecto, el valor de 4800 unidades de dinero se desquita en tres años. Aunque el primer, segundo y tercer año el "rendimiento" que se espera sea de 1050, 882 y 3473 unidades monetarias hoy. Se dice que la inversión será positiva si la eficacia marginal del capital es mayor o igual que la tasa de interés. En este ejemplo se considera a 0.05 como la única "tasa de descuento" que logra igualar el valor presente de la "serie de anualidades" dada por los "rendimientos esperados del bien de capital" en los tres años que dura el precio de oferta. Es decir que 0.05 es la eficiencia marginal en este caso. En la igualdad anterior se dice que el lado izquierdo representa el precio de oferta y los miembros del lado

derecho las "anualidades descontadas al 0.05%". En general Keynes maneja la siguiente igualdad

$$P_0 = y_1/(1+e) + y_2/(1+e)^2 + \dots + y_n/(1+e)^n$$

Donde P_0 es el precio de oferta, y_1, y_2, \dots, y_n son los términos que describen los rendimientos anuales y e es la eficiencia marginal del capital.

Los keynesianos -incluido Keynes-, afirma que si la eficacia marginal e es menor que la tasa de interés, no habrá inversión, que existe una situación neutra cuando e coincide con la tasa de interés, y que si e es mayor que la tasa de interés entonces habrá un aliciente para nuevas inversiones.

De lo anterior podemos concluir que la inversión es función decreciente del interés; veamos la fig. 5. Si la tasa de interés disminuye de $r(1)$ a $r(2)$, entonces las inversiones se incrementan de $I(1)$ a $I(2)$. Pero las variaciones en la tasa de interés traen variaciones en la eficacia marginal del capital en particular al incrementarse

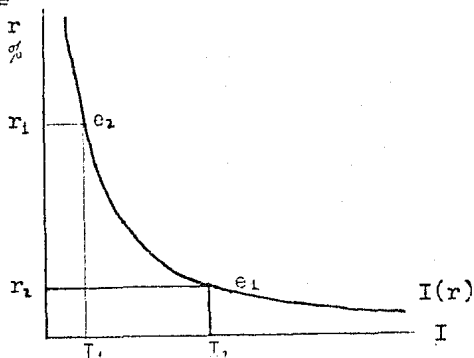


Figura 5

la inversión de $I(1)$ a $I(2)$ la eficacia marginal del capital disminuye, se argumentan dos razones: "al incrementarse la inversión en bienes de capital, estos tendrán que competir con los ya existentes y esta competencia hace reducir el precio esperado, la segunda es que la eficiencia marginal del capital puede disminuir con una cantidad incrementada a medida que el costo marginal de producir bienes de capital se incrementa y eleva su precio de oferta"¹⁴. En la figura la eficiencia marginal disminuye de $e(1)$ a $e(2)$ a medida que $I(1)$ se incrementa a $I(2)$. En consecuencia los Keynesianos consideran que si existe una inversión que iguale a la tasa de interés con la eficiencia marginal del capital entonces se estará en una situación neutral, aquí entonces la condición de equilibrio es $e(I)=r$

En teoría el análisis de la eficacia marginal del capital puede resumirse como hemos hecho. Pero en términos concretos ¿qué hace variar a la eficacia marginal del capital?

Una variable evidente es la tasa de interés. Pero existen dos elementos importantes que definen a la eficacia marginal, el rendimiento probable y el precio de oferta. De estos dos términos el que más fácilmente puede determinar los capitalistas es el precio de oferta, por lo cual Keynes centra su atención en el "rendimiento probable". Keynes en el capítulo 12 de su libro trata esta problemática y casi por terminar menciona.

"El hecho más destacado es lo extremadamente precario de las bases del conocimiento en qué han de basarse nuestros cálculos de los rendimientos probables. Nuestro conocimiento de los factores que regirán el rendimiento de una inversión en los años próximos es muy ligero y a menudo desdeñable..." 15. Lo que sí puede hacer Keynes es enumerar una serie de puntos que afectan de manera negativa el "rendimiento probable", y además al igual que la ley psicológica para el consumidor, trata de mostrar la ley psicológica del inversionista. "Aun haciendo a un lado la inestabilidad debida a la especulación, hay otra inestabilidad que resulta de las características de la naturaleza humana: que gran parte de nuestras actividades positivas dependen más del optimismo espontáneo que de una expectativa matemática, ya sea moral hedonista o económica" 16. Así como puede existir el optimismo, rápidamente puede apoderarse de los inversionistas "el miedo de empresa". Es el punto anterior donde Keynes centrará sus principales medidas de "política económica".

Decíamos que los dos elementos importantes a tratar en Keynes, en su análisis de la inversión, es la eficacia marginal del capital y la tasa de interés. Sólo nos falta tratar la tasa de interés.

La definición de la tasa de interés nos dice que, "la tasa de interés es la recompensa por privarse de la liquidez

durante un periodo determinado" 17. Keynes al igual que la propensión al consumo para el consumidor, define un concepto para el inversionista llamado "preferencia por la liquidez", la cual se realiza si no se invierte la parte del ingreso que no se destina al consumo. El problema aquí es manejar adecuadamente la tasa de interés para determinar y eliminar la "preferencia por la liquidez". En el capítulo 15 de su libro Keynes trata los motivos por los cuales existe una preferencia por la liquidez, que en resumen son

1. El motivo del gasto del consumo.
2. El motivo de los negocios.

3. El motivo precaución.

4. El motivo especulación.

A el motivo 1 y 2 los llama motivos de transacciones, al tercer motivo de negocios, y al cuarto motivo de especulación. Denotando a las cantidades de dinero que se usa en 1, 2, y 3 por $M(1)$, y $M(2)$ el dinero que se refiere al cuarto motivo; si M es la masa monetaria entonces $M=M(1)+M(2)$. Se identifica a M como la cantidad de dinero ofrecida por las "autoridades centrales". Se dice que hay una situación de equilibrio, si esta cantidad ofrecida es igual a la cantidad demandada: denótese como $L(1)$ la cantidad de dinero demandada por motivos de transacciones, y a $L(2)$ la cantidad de dinero demandada por motivos de especulación, se supone que $L(1)$ depende del ingreso y $L(2)$ depende de la tasa de interés. En símbolos la condición de equilibrio es $M(1)+M(2)=L(1)+L(2)$. Los keynesianos observan que las funciones $M(1)$ y $L(1)$ son estables, y donde se llevan a cabo más variaciones son en $M(2)$ y $L(2)$. El problema se centra en manejarse adecuadamente la tasa de interés, para que de esta forma, la cantidad ofrecida sea igual a la cantidad demandada en el mercado del dinero. Para el análisis presente no se gana mucho con el examen de las curvas L y M , sólo señalemos que Keynes proponía una autoridad muy fuerte en la economía que tuviera el control, tanto de la oferta de dinero. La tasa de interés en Keynes cobra una importancia grande, en primer lugar, ésta debe ser de tal manera que se iguale con la eficacia marginal del capital, y por otra parte, tiene que ser adecuado para que iguale la oferta con la demanda de dinero. En términos generales se puede decir que si la tasa de interés es baja, afectará a la eficacia marginal de capital de manera positiva, y además la cantidad que tiene la "sociedad" para especular disminuye. La autoridad que se necesita es, entonces, para disminuir la tasa de interés.

Con todo lo dicho anteriormente ya podemos decir como es que los keynesianos consideran al equilibrio económico: "una condición de equilibrio se cumple cuando el nivel planeado de depósitos de caja es igual a la cantidad de dinero dada; cuando el rendimiento marginal de capital es igual al tipo de interés, así como finalmente, el volumen de las inversiones es igual al volumen planeado del ahorro. Y estos factores están ligados unos con otros. Así, por ejemplo, cuando el rendimiento marginal es lo bastante alto para provocar un volumen de inversiones suficientes para compensar los ahorros normales, tal como se determinan por las costumbres de la sociedad (es decir $I=S$ en el sentido de equilibrio), entonces se observa que la cantidad de dinero es exactamente suficiente para satisfacer el deseo de reserva de caja pública, insistimos en que las curvas de rendimiento marginal y de propensión a la liquidez se suponen como dadas", (?) Keynes da una serie de recomendaciones para que la economía vaya encaminándose de manera adecuado: "Se impulse la

inversión de tal forma que se iguale la tasa de interés con la eficacia marginal del capital.

Con esto se crean condiciones en las industrias de capital con estado psicológico de confianza y también con una actitud psicológica por la preferencia por la liquidez y así pues se puede determinar la nueva tasa de inversión. Los cambios en la inversión traen cambios análogos en el consumo del mismo signo. Estos cambios se determinan por la propensión marginal al consumo. Los cambios en el ingreso producto de la inversión se miden con el multiplicador de la inversión.

Finalmente, si suponemos (como una primera aproximación) que el multiplicador de la ocupación es igual al de la inversión podemos, aplicando el multiplicador al aumento (o al descenso) en la tasa de inversión ocasionado por los elementos descritos antes, inferir el crecimiento de la ocupación.

Un aumento (o disminución) de la ocupación puede, sin embargo hacer subir (o bajar) la curva de preferencia por la liquidez, y tenderá a aumentar la demanda de dinero de tres maneras, pues el valor de la producción sube cuando la ocupación crece aun en el caso de que la unidad de salario y los precios permanezcan invariantes; pero, además, la unidad de salarios misma tenderá a subir a medida que la ocupación mejore, y el incremento en la producción irá acompañado de un aumento en los precios debido al aumento de los precios".19

Veamos el siguiente ejemplo tomado de Paulsen para mostrar los efectos de la inversión en el ingreso y en el empleo. Se suponen en el ejemplo que existen condiciones para inversiones positivas y además se parte de una situación de equilibrio entre ahorro e inversión

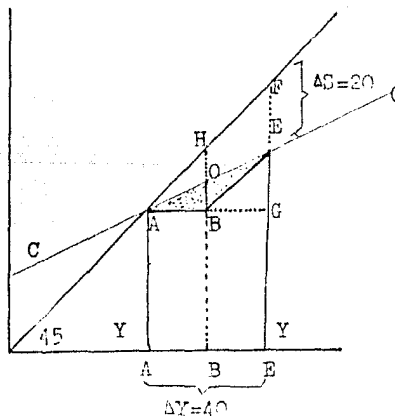


Figura 6

"En el ejemplo la línea CC mide el consumo el cual depende del ingreso, la tasa marginal de consumo es igual a 0.5, y por tanto el multiplicador es igual a 2. En Y(O) se tiene que la oferta es igual a la demanda (OA' = A'A) ni se ahorra ni se invierte. Una inversión autónoma AB = 20 aumenta

primariamente los ingresos por $A'B'$. Según el transcurso de la función consumo, siendo los ingresos OB' , el volumen del consumo planeado igual a DH . El incremento de los ingresos se debe, sin embargo, a una mejor producción de bienes de inversión, de manera que el valor de los bienes del consumo vendidos queda fijo en $B'B(=A'A)$. Por tanto la totalidad del ahorro se eleva a $DH(=a$ la inversión autónoma $AB)$, siendo "no planeado" el ahorro por el valor BD . La igualdad del ahorro e inversión no es, como se ve, equilibrio, puesto que ahorro y consumo divergen cada uno en 10 de las cantidades planeadas. Si los consumidores disminuyen los ahorros no planeados, mediante la demanda de bienes de consumo, la línea de gastos del consumo será BE (que tiene un ángulo de 45 grados). Porque los perceptores de dichos gastos, para los cuales estos representan, ingresos, planean sólo un ahorro adicional por un valor de 0.5 de los importes, siendo como supimos, la tasa marginal del ahorro y el consumo 0.5 cada una, o sea que vuelven a gastar por su parte la mitad de los ingresos adicionales. El triángulo rayado EAB , designa, pues, no los ahorros "no planeados" que son gastados hasta que, con unos ingresos $Y(1)$, el ahorro real es igual al planeado. En todo este proceso el volumen del ahorro total sigue siendo invariablemente HD , es decir igual al de las inversiones adicionales $AB=20$, cambiando sin embargo las tasas correspondientes al ahorro planeado. Por tanto, la línea que representa el gasto de los ahorros no planeados tiene que tender en forma paralela a la línea de referencia.

Los ingresos $Y(1)$, son los ingresos de equilibrio, porque $S=I$, y además hay equilibrio en S e I ya que el volumen del consumo y del ahorro planeados hechos efectivos con estos ingresos, y designados por la función de consumo, es igual al consumo y ahorros reales. Así pues si se incrementa la inversión en 20 unidades el ingreso final será de 40 unidades. Y es evidente que se incrementa el empleo.

"Para el multiplicador en movimiento descendente puede hacerse suponiendo que la inversión FE queda en suspenso, una deducción correspondiente, tomando como punto de partida los ingresos $Y(1)$; los ingresos primariamente bajarán por $E'B'$, pero el consumo será invariablemente $B'H=E'F$, o sea "no planeado" por la magnitud HD . La reducción de este consumo no planeado hace bajar los ingresos a $Y(0)$ ".

Para finalizar esta parte, recordemos que Keynes en contraposición al *laissez faire* proponía la acción del Estado en la economía. Sus estudios fundamentan y recomiendan tal participación para afectar tanto el consumo, e inversión. Las medidas que se plantean pueden dividirse en.

1. Inversiones públicas e interversión del Estado en "áreas privadas", para compensar las fluctuaciones de la inversión privada y evitar así violentos desajustes del "ciclo económico"

2. Elevar la "propensión al consumo" de la comunidad.

3. Autoridad monetaria fuerte para regular la tasa de interés.

Los efectos del keynesianismo como "práctica económica" han sido severamente cuestionado, aunque sin tener demasiadas virtudes se le achacan problemas como inflación, crisis económicas, etc.

BIBLIOGRAFIA (EL EQUILIBRIO GENERAL EN KEYNES)

(1) Andreas Paulsen. La nueva teoría económica. Ed.

(2) Jonh Maynard Keynes. Teoría general de la ocupación el interés y el dinero. FCE. Méx.1981. pp.36-37.

(3) Andreas Paulsen . Op.cit. p.85.

(4) J.M. Keynes. Op.cit. p.64.

Como el monto del ahorro es una consecuencia del proceder colectivo de los consumidores individuales, y el monto de la inversión lo es de la conducta colectiva de los empresarios individuales, estas dos cantidades son necesariamente iguales, ya que cada una de ellas iguala al excedente del ingreso sobre el consumo...en pocas palabras.

Ingreso=valor de la producción=consumo+inversión

Ahorro=Ingreso-consumo

Por tanto ahorro=inversión.

(5) A. Paulsen. Op.cit.p.86.

(6) Aquí manejamos la idea usual de equilibrio entre la oferta y la demanda, luego veremos que la idea de equilibrio en Keynes involucra más variables.

(7) El volumen de la ocupación está determinado por la intersección de la función de la demanda global y la función de la oferta global, porque es en ese punto donde las expectativas de ganancias del empresario alcanzan el máximo. El valor D en el punto de intersección de la función de la demanda global con la función de la oferta global se le denomina demanda efectiva. Keynes...pp.33-34.

(8) La inversión es más complicada como se vera, aquí lo estamos haciendo como lo hacen los keynesianos.

(9) Andreas Paulsen p.

(10) J.M.Keynes...p.104.

(11) J.M.Keynes...pp.87-92.

(12) Op.cit. p.93.

(13) Op. cit.p.108.

(14) Ahora bien, resulta evidente que la tasa real de inversión corriente sera empujada hasta el punto en que no haya clase alguna de capital cuya eficiencia marginal exceda de la tasa corriente de interés. En otras palabras, la tasa de inversión sera empujada hasta aquel punto de la curva de demanda de inversión en que la eficiencia marginal de capital en general sea igual a la tasa de interés en el mercado. Teor. Gral. p.125.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

- (15) Op.cit. p. 137.
- (16) Op.cit. p. 137.
- (17) Op.cit. p. 151.
- (18) Op.cit. p. 177.
- (19) Andreas Paulsen Op. cit. p 48.
- (20)

BIBLIOGRAFIA (UNA TENDENCIA ACTUAL DE LA TEORIA
DEL EQUILIBRIO ECONOMICA GENERAL. LOS MONETARISTAS)

(1) Raúl Arias, Jesús Fresno, Nuria Ordoras,
hilda Sánchez.. El monetarismo como ideología.
Cide, Economía de america Latina No.6. p. 159.

(2) Milton y Rose Friedman. Libertad de elegir
P.86

(3) Op.cit. p.87

(4) Op.cit. p.101

(5) Op.cit. p.102

(6) Op.cit. p.351

(7) Raúl Arias....p.

(8) Milton y Rose Friedman...p.35

(9) Raúl Arias...p.

(10) Op.cit. p.157

(11) Op.cit. p.162

(12) Op.cit. p.167

(13) Op.cit. p.173

A.9 UNA TENDENCIA ACTUAL DE LA TEORIA DEL EQUILIBRIO ECONOMICO GENERAL. LOS MONETARISTAS.

Tocaremos tres aspectos en esta exposición: el planteamiento monetario sobre la crisis, elementos de "la teoría económica", y las proposiciones de la "economía política". De estos aspectos sólo tocaremos los que se consideran más importantes ligados a la presente exposición.

El monetarismo ha sido abrazado por las distintas burguesías de los países capitalistas para salir de la actual crisis económica. Las medidas y proposiciones keynesianas han perdido el consenso. En contraposición a los keynesianos los neoliberales se ponen a la vanguardia de la economía trayendo un discurso que plantea la ineficacia del keynesianismo y un planteamiento de sociedad "más completo".

Los principales estados del mundo se han puesto a la moda en el terreno económico: el anterior gobierno de los Estados Unidos ha tenido como asesor "independiente" al principal impulsor de la teoría monetaria, Milton Friedman. La Gran Bretaña con su actual primer ministro es la encargada de llevar adelante las medidas monetarias, etc. En una palabra, el monetarismo ha irrumpido en los principales países capitalistas y se ha difundido a los demás países a través de la fuerza del sistema financiero internacional; es conocida la injerencia del FMI en las decisiones de tipo económico en los países latinoamericanos endeudados, en Chile por ejemplo despues de haber sido derrocado Salvador Allende se impone un gobierno militar con una concepción de tipo monetarista.

Dada la importancia de esta concepción económica, trataremos de plantear brevemente sus ideas en lo que ellos dicen, es decir su estrategia declarada. Nos centraremos en el principal impulsor de esta teoría, Milton Friedman.

La posición monetaria ante la crisis económica.

Desde luego que los monetaristas ven a el capitalismo como la sociedad donde se puede llegar a obtener lo más óptimo para cada individuo y así obtener que la resultante de todos estos óptimos es lo más óptimo para toda la sociedad. No ven las crisis económica como fenómenos recurrentes que son el resultado lógico del funcionamiento del capitalismo. Esto no es negado sino que simplemente se hace abstracción de ello. Desarrollan su discurso con respecto a la crisis actual en polémica con las medidas que se tomaron para salir de la crisis de los años treinta. Con estas medidas explican la actual crisis.

Desde el punto de vista de Milton Friedman la crisis de 1929 trajo graves consecuencias al mundo y para salir de

ella el Estado tuvo mayor injerencia en la economía, esto debido a la inestabilidad que provocaba la actividad privada, la cual parecía incontrolable. El principio de que la iniciativa privada es el motor de la economía es violado. Esto lo traducen como una violación a la "libertad". El Estado viola la libertad y toma decisiones que no le corresponden.

Ya hemos mencionado anteriormente cómo el keynesianismo proponía un agente regulador de la inversión para llegar a un equilibrio donde se contemple el empleo, que si la sociedad era dejada a la voluntad de la libre empresa se llegarían a grandes desajustes en la economía, y se planteaba que el Estado debería jugar este papel de regulador, un "agente económico" con mucho peso

Friedman se opone resueltamente a cómo se resolvió la crisis de los años 30's. Para Friedman el problema no era cómo lo planteaban los keynesianos: la inversión y por tanto la tasa de interés y la eficacia marginal del capital. Los problemas económicos por los monetaristas se centran en los desajustes monetarios. "La moneda incide sobre las fluctuaciones económicas a corto plazo en la economía y sobre la inflación, o sea los precios. Parte de la noción central -rasgo que le distingue del keynesianismo- de que lo que importa es la cantidad de dinero y nos las tasas de interés, las condiciones del mercado monetario, las condiciones de crédito y cosas por el estilo".(1)

Así entonces, la crisis y su solución, se plantean como problemas de índole monetaria. Si se considera primordial a el dinero, la atención se centrará en los bancos.

Un hecho importante en la crisis de 1929 es el crac financiero. Aquí M. Friedman menciona cómo la "visión popular de la crisis es que empezó el Jueves negro 24 de Octubre de 1929, cuando la bolsa de Nueva York se derrumbó".(2) Las crisis para Friedman son crisis en el sistema financiero. Así después de la quiebra de la bolsa de N. York el sistema de reserva federal actuó de la siguiente forma según M.F., "reforzó los efectos depresivos de la quiebra de la bolsa... el Banco de Reserva General de Nueva York para amortiguar el choque compró títulos de deuda pública, con lo cual aumento las reservas bancarias. Esto hizo que se concedieran créditos a empresarios que actuaban en la-bolsa -aquí viene lo malo según M.F.-. En vez de aumentar con rapidez la oferta monetaria en un porcentaje superior al corriente para compensar la contracción económica, el "fed" dejó que la cantidad de dinero disminuyera tendencialmente a lo largo de 1930...El efecto combinado de las consecuencias de la crisis de la bolsa y de la lenta reducción de la cantidad de dinero durante el año de 1930, fue recesión bastante severa".(3) Las consecuencias de todo lo anterior fueron quiebras en los bancos de E.U. El banco más importante de E.U. se

hundió, entre otros, "la gente de la calle perdió su confianza en las instituciones". Y conforme más avanzaba el tiempo más bancos quebraban.

Las medidas que se debieron aplicar a juicio de Friedman las podemos resumir en:

1. "La misma medida tomada en 1907: la restricción de pagos... con esto no se producirán las quiebras posteriores... pero la existencia del sistema de reserva federal impidió esta drástica medida terapéutica.

2. El fed pudo haber llegado a una solución mucha mejor comprando en el mercado abierto títulos de deuda pública. Esta medida habría proporcionado dinero efectivo adicional a los bancos para hacer frente a las peticiones de sus impositores".

El no aplicar estas medidas según Friedman trajo como "efecto y consecuencia" la crisis económica.

Así es como explican la crisis de los treinta y se preparan las condiciones para una nueva crisis con la política seguida, veamos que es lo que según Friedman se hizo para que no se vuelva a repetir.

En 1932 sube Franklin Delano Roosevelt a la presidencia de los E.U. apoyado por un "comité de cerebros" provenientes de la Universidad de Columbia -que proyectaron una serie de medidas para poner en práctica, se creía que el Estado no debía estar tan "limitado", que el gobierno debería de cuidar la economía "en nombre del interés general". El capitalismo había fallado y había que tener más control, y así el "comité de cerebros" -según M.F.- impulsó el keynesianismo en ese entonces. En terminos concretos se propuso: "Administración Nacional para la Recuperación, la comisión de Valores y Bolsa, el Consejo Nacional de Salarios Mínimos, etc Programas de seguridad social, el seguro del desempleo y la asistencia pública, etc. etc." (4)

Todo esto en conjunción con la segunda guerra mundial donde el Estado tuvo un control muy fuerte en la vida económica: "fijación de precios y salarios por decreto, racionamiento de bienes de consumo, prohibiciones para fabricar ciertos productos de uso militar, asignación de materias primas y productos acabados, y control de importaciones y exportaciones" (5) en la visión de M.F. "la política del pleno empleo en 1946 se convirtió en ley" (6)

Esto "restringe la libertad económica", y se argumenta que la línea seguida era errónea, y el resultado lo muestran con la situación actual.

En su discurso el monetarismo contempla las características de la crisis actual: el fin de la expansión que se desarrolló en la economía a nivel mundial después de la segunda guerra tiene como síntomas: un nulo crecimiento económico, altas tasas de inflación y desempleo, la tendencia al proteccionismo del comercio internacional, y señalemos un punto más para los países capitalistas "subdesarrollados": el alto nivel de endeudamiento.

El monetarismo plantea nuevas propuestas para que el capitalismo siga funcionando y abrir nuevas vías para revitalizar el sistema económico. Se plantea que quien debe de dirigir la economía es el sector financiero y no el empresarial. La banca privada internacional tiene un lugar muy importante en su discurso. Por otro lado el monetarismo cruza palmo a palmo la idea de lanzarse contra las medidas estatales. Plantean la ineﬁcaz de la política de "pleno empleo", el control de precios de bienes y servicios y factores productivos, así como el proteccionismo en el comercio exterior, también la crítica del Estado en la fijación de la tasa de interés, y en general en cuanto al Estado como banquero y empresario. Se convierte en algo importante "reconvertir" al Estado. Esto va conformando al monetarismo como una teoría y práctica de la nueva estrategia del capital financiero, y teoría y práctica de la gran burguesía.

Observemos aquí dos cosas: las crisis económicas son por perturbar la libertad, la libertad del mercado, etc. es por violar el entrecuchar de voluntades, al no dejar que el libre entrecuchar de la resultante que es la mejor para todos. Esto se debe fundamentalmente a que la injerencia del Estado no deja obrar libremente a la economía. Y la segunda cuestión, en el año de 1929 se tenía la opinión de que el capitalismo sólo podía funcionar con la regulación del Estado: buscando resolver el problema de todos los capitalistas se resolvía el de cada uno.

Se vuelve a reafirmar la diferencia de los economistas anteriores a 1929 y Keynes. Ahora, con nuevos matices, esta diferencia es de Keynes con los neoliberales.

Ahora tocaremos los aspectos "teóricos" que fundamentan el discurso monetario. Tres rasgos son esenciales en cuanto a la política monetaria: 1. La teoría walrasiana, 2. La teoría del dinero, 3. La teoría del "libre circular de mercancías".

1. La teoría walrasiana.

Aquí Friedman maneja el modelo de funcionamiento del sistema capitalista, sustentado en la idea de los fisiócratas y reafirmado por A. Smith. La consigna nuevamente es dejad hacer-dejad pasad (laissez faire-laissez passer).

Nuevamente, los individuos buscando lo mejor para si han logrado el progreso de la sociedad. La "iniciativa privada" es el eje del discurso en el planteamiento del equilibrio.

"El equilibrio, es un equilibrio de mercado con pleno empleo que para el mencionado autor, estará inicialmente determinado según el modelo de la teoría cuantitativa más las ecuaciones walresianas del equilibrio general. Es un equilibrio que supone simultáneamente el logro de otros equilibrios en los distintos mercados que componen el sector "real" de la economía, y que asociado a la igualación de la ecuación cuantitativa en el sector monetario, determina el equilibrio global del sistema económico". (7)

La idea que acarrea de equilibrio maneja precios flexibles, mercados competitivos, agentes económicos, etc. y todo esto lleva a una economía donde los agentes económicos obtienen lo mejor para si.

En libertad de elegir se menciona "el poder del mercado" donde muestra mercados separados unos de otros y donde el papel que juegan los precios es muy importante - según F.- transmiten información, aportan estímulos para adoptar los medios de producción menos costosos... con precios flexibles al alza y a la baja, donde las variaciones están determinados por la oferta y la demanda, existe una información perfecta y se tenderá a igualar la oferta con la demanda y habrá equilibrios en los mercados. Serán usados los escasos recursos para resolver los problemas económicos.

Los argumentos que plantea Friedman por los cuales no se ha llegado a el equilibrio son contra el Estado. El premio Nobel de economía analiza situaciones y encuentra que al interferir el Estado con impuestos en el comercio, en la producción, en la fijación de precios, etc. son acciones que "emiten ruidos y que distorsionar el libre desenvolvimiento de la actividad económica. Toda intervención del Estado en la economía entorpece la libertad y en consecuencia provoca desequilibrios. Se plantea así una de las máximas friedmaninas: "La libertad económica es un requisito para la libertad política" (8)

La actividad del Estado sólo queda justificada en aquellas cosas que no son rentables para la iniciativa privada, y el otro campo donde el Estado tiene manos libres es en cuanto a los gastos militares.

Para llegar al equilibrio el Estado tiene que funcionar como administrador de la burguesía y garantizar la seguridad en las inversiones. Delimitando las Areas del Estado en términos de sus funciones, no queda debilitado sino fortalecido.

2. La teoría "cuantitativa del dinero".

Friedman parte de la hipótesis de que si se actúa con la más completa libertad, se puede llegar al equilibrio walrasiano. Pero para llegar al equilibrio económico se debe de controlar adecuadamente la cantidad de dinero y para justificar esta afirmación se basa en la teoría "cuantitativa del dinero".

Existen problemas si la cantidad de dinero excede a la cantidad de productos, y viceversa si la cantidad de productos excede al dinero se tienen problemas difíciles.

El problema es entonces, plantear una teoría que determine cual es la cantidad de dinero que debe circular en la economía. Friedman plantea que la demanda de dinero depende fundamentalmente del ingreso permanente de los individuos y de aquél que se espera tener a futuro.

El dinero se considera como una variable exógena, la cual debe ser movida por autoridades monetarias entre las cuales se encuentra el Estado. Son cautelosos en cuanto a la injerencia del Estado en este terreno.

Lo que determina la emisión de billetes en la economía se basa en el análisis estadístico es decir empírico. Y además la teoría se sustenta en "la teoría cuantitativa de Fisher"

En concreto propone:

"necesitamos depender de un ingreso solido. En la actualidad, la mejor medida consiste en exigir a las autoridades monetarias que mantuviera la tasa de crecimiento porcentual de la base monetaria dentro de un intervalo determinado"(9), se refiere a que "la cantidad total de dólares aumente en no más de un 5% cada año y no menos de un 3%, ajustándose en el tiempo al incrementarse el producto y la población para garantizar la estabilidad en los precios"(10)

En breves palabras Friedman plantea:

"Para lograr un equilibrio económico será preciso, pues establecer una regla de crecimiento monetario. Es decir una tasa estable de crecimiento, la cual, junto con la estabilidad de la demanda de dinero y del nivel del ingreso real, conducirá a que el sistema económico tienda a el equilibrio", (11)

Por otro lado entre otras funciones que plantea Friedman en cuanto al Estado se pueden resumir en: "El poder de acuñar moneda, regular su valor y el de la moneda extranjera"(12), y que no tenga demasiada injerencia en la impresión de billetes.

3. La teoría del "libre circular de mercancías".

El discurso monetario plantea las ventajas que se obtendrían si existiera la más completa libertad de circulación de mercancías entre los países. La propuesta que se plantea es la libre circulación de mercancías.

"El libre comercio, para los monetaristas, se fundamenta en una estructura competitiva del mercado internacional, y en la cual ninguno de los países puede tener capacidad de incidir en la determinación de los precios internacionales". (13)

Tanto los monopolios, como cualquier otra forma económica semejante, no entorpecen el equilibrio, en la medida que exista una libre competencia del mercado, y entre los propios monopolios, lo cual traería beneficios, ya que los precios aquí serán ajustados para llegar al equilibrio de la oferta con la demanda. La hipótesis que se maneja es que exista la más completa libertad económica. "En esas condiciones, los bienes que un país venderá al exterior serán aquellos en los cuales dicho país tenga ventajas comparativas, entendidas estas según el criterio de la mayor productividad, lo cual refleja una mejor y eficaz utilización de los recursos". Plantean que tanto el comercio interior como el exterior son de interés "para el conjunto de la población, comprar al que venda más barato, y vender al que compra más caro... la libertad de comercio no sólo procura nuestro bienestar, sino que también promoverá la paz y la armonía entre las naciones y estimulará la competencia interna" y concluye diciendo "protección significa en realidad explotación del consumidor".

Todas estas ideas llevan detrás la concepción de que la restricción y por otro lado la protección del comercio llevan a una situación en la cual se atenta contra la "libertad de los individuos" y se les "explota". En conclusión se postulará la libertad del comercio. Nada de aranceles y medidas que caminen en esta dirección. Con esto la economía será más competitiva y cada nación se dedicará a producir aquellos productos que tengan ventajas comparativas"

Estos tres puntos son los que en términos generales sustentan los monetaristas como una teoría global de funcionamiento del sistema capitalista.

Observamos que su teoría se basa no en un análisis de la realidad sino en cómo debería ser el capitalismo.

Ahora nos centraremos en la cuestión relativa a los planteamientos que el monetarismo tiene en el terreno de la "economía política". Nos referiremos principalmente a la inflación ya que es considerado como el principal fenómeno económico fuente de diversos "desajustes" a los que está

expuesta la economía y allí centran sus principales preocupaciones de "política económica"

Ya los monetaristas nos han hablado -en su explicación que surge de la crisis de los treinta- de la disminución del dinero en la economía, que esto trajo como "causa y efecto" la crisis económica. Los monetaristas también dicen que el exceso de dinero causa graves situaciones.

Los monetaristas hacen un tratamiento de la inflación como enfermedad económica y dicen "a veces es fatal y peligrosa que si no se le remedia a tiempo puede destruir una sociedad", y mencionan a Rusia 1917, China con Mao Tze Tung, Chile en los setentas, Argentina con la caída de Isabel Perón en '74, etc. Las críticas de los gobiernos se debieron en su argumentación por altas tasas de inflación. Diagnosticado la enfermedad -tan peligrosa- busca los elementos que hacen que se desarrolle ésta. Y buscando dichos elementos plantea que no la provocan "los hombre de negocios voraces, sindicatos codiciosos, consumidores despilfarradores, los jeques árabes, el mal tiempo, o cualquier otra cosa que se le parezca". Y como todos estos elementos no provocan la inflación demuestra afirmando que "la inflación es un fenómeno monetario". Veamos cómo argumentan esta afirmación al "hombre de la calle". La inflación es un fenómeno monetario, fundamentalmente monetario, provocado por un crecimiento mayor de la cantidad de dinero que de la producción. El papel de la cantidad de dinero es el factor más importante; el de la producción secundario. Muchos fenómenos pueden producir fenómenos temporales, pero sus efectos sólo pueden ser duraderos en tanto y cuanto afecten a la tasa de crecimiento monetario".

El mecanismo a través del cual un exceso de oferta monetaria repercute sobre la tasa de crecimiento de los precios en el largo plazo, "cuando los empresarios y los trabajadores no tienen conocimiento, de las consecuencias que trae una expansión de dinero", son las siguientes: si la tasa de crecimiento de dinero aumenta en mayor proporción que la del producto, se genera un incremento de la "demanda agregada nominal" que se expresa en una elevación del gasto de "bienes de consumo e inversión", en tanto que las ganancias de la actividad en la producción resulta mucho mejor que la generada por los activos financieros. De aquí resulta que los precios de los productos en el mercado aumenten su demanda y por tanto se elevan. Al existir más dinero aumenta la demanda de productos y ello impulsa a producirlos, generándose un aumento en la demanda de trabajo y el desempleo disminuirá. O dicho de otra manera: los trabajadores al obtener un salario nominal más elevado, experimentan un alza inesperada en su salario real, en la medida que no esperan que los precios aumenten en un futuro, lo cual provoca un aumento en la oferta de trabajo. Por otro lado al

verificarse una mayor demanda los empresarios aumentan los precios de los artículos, con lo cual provocan la disminución del salario real y esto hace rentable aumentar la demanda de mano de obra, ya sea contratando más obreros, o bien aumentando las horas de trabajo de la mano de obra contratada. En cualquier caso la demanda de trabajo, medida en horas de trabajo, se eleva. De igual forma, las empresas entienden que se genera un aumento de la demanda de productos específicos y aumentará la demanda de trabajo. Pero la disminución del desempleo será temporal, en la medida que todo el mecanismo económico se ajusta a la nueva situación. Pero ahora existen precios más altos y la misma tasa de desempleo que antes.

De este modo M.F. concluye que la política monetaria, derivada del aumento de la oferta monetaria, sólo puede reducir el nivel desempleo a costa de una inflación continua.

Observemos que de paso derrumba la teoría keynesiana. Recordemos que Keynes planteaba que el empleo dependía del consumo e inversión, donde el consumo era constante y la inversión era variable sin menos control, y proponía que el Estado estuviera inyectando inversión para llegar a un equilibrio con pleno empleo, pero según esto los friedmanianos causa inflación y no abate el desempleo.

Sin desarrollar una argumentación "teórica" sino únicamente continuando con sus argumentos continúa diciendo por enésima ocasión que el culpable de la inflación es el Estado, esto debido a que regula la cantidad de dinero en la economía y hace uso de la máquina de imprimir billetes, esto, cuando la recaudación fiscal es insuficiente para financiar sus gastos. Así, la culpa de la inflación la tienen los llamados gastos públicos generados por el Estado. Dentro de los puntos que -según Friedman- hacen crecer la oferta monetaria están "en primer lugar, el rápido aumento del gasto público, en segundo lugar la política de pleno empleo adoptada por la administración, en tercer lugar, un plan equivocado de prioridades seguido por el sistema de reserva general".

Con todo lo anterior ya se tiene el análisis clínico de la principal enfermedad del capitalismo y su remedio. Y teniendo diagnosticado el remedio se propone la solución: "reducción de la tasa de crecimiento de la oferta monetaria".

La puesta en práctica de lo anterior ya que las medidas, para que el capitalismo siga viviendo y se revitalice, es que la crisis toque fondo, que se llegue hasta sus últimas consecuencias económicas. En particular la medida implica que se incremente el desempleo, que la recesión económica continúe, estos serán los efectos secundarios que trae la medida. "El paro y el crecimiento económico menor no son el remedio para la inflación, son

los efectos secundarios de una solución adecuada". Los efectos pueden ser muy graves de tal manera que el remedio pueda ser mortal para el capitalismo a la cual argumentan que si la disminución de dinero es acompañada con "medidas atenuadoras" se revitalizara el enfermo.

En otra dirección Friedman plantea ser un defensor de la "libertad", y en nombre de la "libertad" plantea las siguientes medidas, que se concluyen de su discurso.

1. Reducir el "gasto deficitario" del Estado, que se traduce un recorte en el gasto público en los renglones que componen el llamado sector servicios cómo son: salud, educación, obras públicas, etc.

2. La libre circulación de capitales de un país a otro para lo cual se debe eliminar el proteccionismo, eliminación de "aranceles" tanto para las importaciones como las exportaciones.

3. Liberalización de la tasa de interés.

4. Que se liberen todos los precios, en particular, que el Estado no tenga injerencia en este asunto. Con esto los mercados tenderán al equilibrio.

5. Libertad en el mercado de la fuerza de trabajo. Es decir flexibilidad de contratación y despido de los trabajadores y el consiguiente abaratamiento de la mano de obra, adecuándola según consideren los empresarios. Esto conlleva a una represión sistemática de las organizaciones sindicales para facilitar el objetivo anterior.

Por otro lado las funciones del Estado se vuelven a readequar planteando que las propuestas smithianas en este terreno siguen siendo válidas: "El Estado debe de administrar justicia en forma correcta, se debe de dar protección a los individuos de la violencia que proviene de los otros ciudadanos o del exterior. Proteger a los ciudadanos que no puedan considerarse como individuos responsables y finalmente que se hagan funcionar determinadas instituciones públicas cuyo interés no es de la iniciativa privada y son útiles para la sociedad en su conjunto".

Algunos problemas que se desprenden de esta visión son los siguientes.

La valides de los supuestos que mantienen su teoría: la existencia de mercados competitivos, la flexibilidad de los precios, la libre circulación de capitales, etc. Su teoría se basa en este supuesto. Por un lado podemos observar que el discurso y las propuestas monetarias no son un análisis real de los fenómenos económicos, más bien plantea el cómo debería de ser el sistema capitalista. Y como para probar cualquier teoría en economía siempre existen argumentos,

los argumentos que nos presenta Friedman son verdades a medias. Algunos de los fenómenos económicos en su análisis son contemplados con un cierto grado de verdad, pero de allí concluir que esto constituye un análisis económico objetivo es otro cantar. La explicación que se da de la crisis de 1929 es imparcial y por tanto falsa. El análisis del capitalismo no únicamente abarca la rama de la circulación de mercancías, y menos aun la parte que se dedica a el capital dinerario. El análisis del capitalismo se debe de hacer en forma más global, analizar el proceso productivo y el proceso de circulación del capital. Los capitalistas, quieren cada vez obtener sus ganancias sin considerar el aspecto productivo, únicamente se quedan en la esfera de la circulación en su forma más fetichista. El dinero produce dinero, sin estudiar el proceso de la formación de la ganancia en el proceso productivo, y por tanto no únicamente buscar los problemas económicos en la esfera de la circulación. Es evidente que algunos problemas son exclusividad de alguna esfera, pero un análisis global del capitalismo no puede ser reducido.

El monetarismo es un análisis apologético del sistema capitalismo de producción. Y esto es lo que conforma el nuevo análisis del capitalismo.

En pocas palabras la crítica se centra en la realidad de los supuestos y en la objetividad de su análisis. Finalicemos con la siguiente cita:

"La libertad es una gran palabra; pero bajo la bandera de la libertad de industria se han hecho las guerras más rapases, y bajo la bandera de libertad de trabajo se ha expoliado a los trabajadores".

PARTE B.

B.1 UN MODELO LINEAL NEOCLASICO DEL EQUILIBRIO ECONOMICO GENERAL.

B.1.1 Los elementos endógenos y exógenos del modelo.

B.1.1.1 Los elementos que se consideran dados son los siguientes:

Existen $M+1$ mercancías denotadas como C_0, C_1, \dots, C_n .

Existen m firmas.

La relación entre firmas y mercancías es la siguiente: cada firma $K=1, \dots, m$ puede producir la mercancía C_1, C_2, \dots etc. dependiendo de su conveniencia. El "puede" de la proposición anterior es entendido de tal manera que no existen trabas de ninguna especie para la producción de cualquiera de las mercancías existentes en la economía.

Se consideran conocidas las condiciones técnicas de producción: la matriz $A^{(k)} = (a^{(k)j})$ es tal que cada entrada nos dice la cantidad que de la mercancía C_j insume la empresa K para producir una unidad de mercancía C_i .

Se supone que solo existe una única técnica de producción para producir cada mercancía y además es conocida por todas, como no existen ventajas tecnológicas esto se expresa diciendo que $A^{(k)} = A^{(l)}$ para $k, l = 1, \dots, m$. Por esta razón solo denotaremos como A a la matriz de insumo.

En el conocimiento de las condiciones técnicas, se supone que se conoce la matriz $B^{(k)}$ de capital fijo, la cual tiene entradas $b^{(k)j}$; $b^{(k)j}$ nos dice la cantidad que de la mercancía C_j se requiere como capital fijo para producir una unidad de la mercancía C_i por la empresa K . Análogamente se supone que $B^{(k)} = B^{(l)}$ para $k, l = 1, \dots, m$.

Como solo existe una única técnica para la producción de las mercancías C_i , solo existe un único tipo de trabajo para su producción; L , es la cantidad de trabajo vivo que se requiere para producir una unidad de la mercancía C_i . El vector $(1, \dots, L)$ son las cantidades de trabajo vivo para producir todas y cada una de las mercancías existentes, por unidad.

El vector $Q^{(K)}$ es el inventario inicial o capital que tiene la empresa K; aquí $q_i^{(K)}$ es la cantidad de la mercancía C_i que la empresa K tiene como capital inicial para comenzar un nuevo periodo de producción.

Existen n unidades de consumo o familias.

Se denota a h_{vk} como la fracción que tiene la familia v de la empresa K. O mejor dicho, son las acciones que la familia v tiene de la empresa K. de esto resulta que para toda $K=1, \dots, m$

$$\sum_{v=1}^n h_{vk} = 1$$

Cada familia v tiene una función de utilidad $U^{(v)}$ que mide la satisfacción de dicha familia al consumir distintas cantidades, tanto de la mercancía C_0 , es decir descanso, como de las mercancías C_1, \dots, C_n . Aunque lo que ocurra en realidad sea que los individuos trabajen, se considera que una familia entre más descansa es mejor para ella, así la función de utilidad esta definida como

$$U^{(v)}: \{ \text{espacio de mercancías y descanso} \} \rightarrow \mathbb{R}$$

donde

$$U^{(v)}(d_0^{(v)}, S_1^{(v)}, \dots, S_n^{(v)})$$

aquí $d_0^{(v)}$ mide la cantidad descansada en un periodo de producción. $S_i^{(v)}$ denota la cantidad de la mercancía C_i consumida en el mismo periodo de producción por la familia v .

La hipótesis manejada en $U^{(v)}$ como función de utilidad es la usual, en particular es de clase $C_1^{(2)}$, estrictamente cóncava. además existe una relación de preferencias en el espacio de las mercancías, en donde otras propiedades se admite el principio de la no saciedad para los consumidores, esto se expresa diciendo que para cada $v=1, \dots, n$ y dado $(d_0^{(v)}, S_i)$ paquete de descanso consumo existe otro paquete de $(d_0^{(v)}, S_i)$ tal que es mayor en al menos una entrada v se tiene que

$$U^{(v)}(d_0^{(v)}, S_i) < U^{(v)}(d_0^{(v)}, S_i')$$

Esto quiere decir que cada familia siempre podra incrementar su satisfacción con otro paquete

de mercancías. lo cual trae como consecuencia que no habrá ahorro por parte de ninguna de las familias, y con esto quedan descartados los análisis de la inversión en este sentido.

B.1.1.2 LOS ELEMENTOS QUE SE DESPRENDEN DE LOS ANTERIORES

Cada empresa $K=1, \dots, m$ puede determinar los planes de producción que pueda realizar y elegir aquellos que considere convenientes, dependiendo de cuanta ganancia máxima pueda obtener.

Cada familia v obtiene un ingreso Δ^v por ser accionista y vender su fuerza de trabajo. Cada familia puede determinar un vector de descanso-consumo y elegir aquel que le produzca una mayor utilidad.

Lo anterior nos determina las funciones de oferta y demanda.

B.1.2 EXPLICACION DEL MODELO.

Sea P un vector de precios, donde P_i es el precio de una unidad de la mercancía C_i . El salario se denota por w .

Al establecerse un sistema de precios y un salario, los agentes económicos (empresas y familias) toman sus decisiones. Lo que haremos será analizar como actúan cada uno de los agentes económicos y de aquí desprender el comportamiento global de la economía por todo un periodo de producción.

B.1.2.1 ACTUACION DE LAS EMPRESAS

Dado el vector de precios, cada empresa K calcula su capital: como $Q^{(K)}$ es el vector que posee la empresa K , el capital medido en términos dinerarios es $PQ^{(K)}$.

Al inicio de un periodo de producción, la empresa K va con su vector $Q^{(K)}$ al mercado a ofrecerlo en venta a otras empresas. La reasignación de capitales iniciales $Q^{(K)}$ involucra a las empresas K . Se supone que no existen problemas para que dicha venta ocurra y así obtiene su capital en dinero. Con este capital demandará medios de producción, en términos de capital fijo, y por otro lado contratará obreros, la demanda de trabajo depende

de cuenta cantidad de producto de cada mercancía C_1, \dots, C_n puede producir.

Veamos que planes de producción se pueden llevar a cabo por la empresa K: si la empresa K tiene capacidad para producir cualquiera de las mercancías, elegirá producir cantidades $X_1^{(K)}, X_2^{(K)}, \dots, X_n^{(K)}$ de las mercancías C_1, C_2, \dots, C_n respectivamente, de modo que el capital fijo que se requiera para producir dichas cantidades no rebase el precio del capital $Q^{(K)}$, en términos matemáticos, el conjunto de planes de producción factibles para la empresa K se define como

Definición: Sea P un sistema de precios, el conjunto de planes de producción factibles para la empresa K se denota como

$$P^{(K)} = \{ X^{(K)} \in \Omega^{(K)} \mid P B X^{(K)} \leq P Q^{(K)} \}$$

La empresa K elegirá producir el vector $X^{(K)} \geq 0$ con el cual obtenga la máxima ganancia, veamos como se calcula la ganancia.

Si la empresa K elige producir el vector $X^{(K)}$ el cual es factible, el valor de esta producción bruta es

$$P X^{(K)}$$

Si a esta cantidad descontamos los costos de producción y el pago de los salarios para llevar a cabo el vector $X^{(K)}$, obtenemos la ganancia. Calculemos el costo de los insumos para producir $X_1^{(K)}$.

Para producir $X_1^{(K)}$ se requieren distintas cantidades de las mercancías C_1, \dots, C_n y además trabajo, es decir se requieren cantidades

$$a_{11} X_1^{(K)}, a_{21} X_1^{(K)}, \dots, a_{n1} X_1^{(K)}; l_1 X_1^{(K)}$$

de las mercancías C_1, \dots, C_n ; C_n respectivamente, y esto tiene un costo de

$$P_1 a_{11} X_1^{(K)} + P_2 a_{21} X_1^{(K)} + \dots + P_n a_{n1} X_1^{(K)} + w l_1 X_1^{(K)}$$

o simplificando

$$P A^1 X_1^{(K)} + w l_1$$

sumando sobre $i=1, \dots, N$ se tiene

$$P (A^1, A^2, \dots, A^N) X^{(K)} + w l X^{(K)}$$

con lo cual concluimos que el costo de los insumos y el trabajo para producir $X^{(k)}$ es

PARA LA EMPRESA K

Definición: Sea P un sistema de precios. Sea $X^{(k)}$ un plan de producción para la empresa K , arbitrario. La ganancia para la empresa K es la función

$$g_{(k)} : \Omega^{(k)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$g_{(k)}(X^{(k)}) = (P(I-A) - wI) X^{(k)}$$

Concluimos que el problema que tiene que resolver cada empresa es

$$\begin{aligned} \max g_{(k)}(X^{(k)}) \\ \text{sujeto a } X^{(k)} \in P^{(k)} \end{aligned}$$

En resumen: la empresa K vende el vector $Q^{(k)}$, con lo cual obtiene un capital $P \cdot Q^{(k)}$, se supone que la empresa elige producir aquellos planes de producción que le dejen un máximo beneficio, caracterizados dichos planes, lo que se hará será comprar medios de producción y contratar fuerza de trabajo para realizar un plan de producción óptimo. Si descontamos a la producción bruta los insumos requeridos para la producción, obtenemos la producción neta que se destina al consumo de las familias.

1.1.2.2 ACTUACION DE LAS FAMILIAS

Al final del proceso productivo, cada familia tiene un ingreso que se obtiene por vender su fuerza de trabajo, y también de las diversas acciones que tienen en cada una de las empresas, el cálculo en términos matemáticos es como sigue.

Sea v una familia. Después de un ciclo productivo las empresas tienen ganancias en cantidades g_1, \dots, g_n ; por ejemplo en la empresa K se obtuvo la ganancia g_k , y como la familia v es accionista de dicha empresa va a reclamar la parte que le corresponde de esta ganancia, así reclamara $h_{kv} g_k$, pero esto lo realiza para cada una de las empresas, así se obtiene que el ingreso de la familia v por ser accionista de las distintas empresas es

$$h_{1v} g_1 + h_{2v} g_2 + \dots + h_{nv} g_n$$

con lo cual concluimos que el costo de los insumos y el trabajo para producir $X^{(K)}$ es

$$PAX^{(K)} + w_1 X^{(K)}$$

Definición: Sea P un sistema de precios. Sea $X^{(K)}$ un plan de producción para la empresa K , arbitrario. La ganancia para la empresa K es la función

$$g_{(K)} : \Omega^{(K)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$g_{(K)}(X^{(K)}) = (P(I-A) - w_1) X^{(K)}$$

Concluimos que el problema que tiene que resolver cada empresa es

$$\begin{aligned} \max g_{(K)}(X^{(K)}) \\ \text{sujeito a } X^{(K)} \in P^{(K)} \end{aligned}$$

En resumen: la empresa K vende el vector $Q^{(K)}$, con lo cual obtiene un capital $P \cdot Q^{(K)}$, se supone que la empresa elige producir aquellos planes de producción que le dejen un máximo beneficio, caracterizados dichos planes, lo que se hará será comprar medios de producción y contratar fuerza de trabajo para realizar un plan de producción óptimo. Si descontamos a la producción bruta los insumos requeridos para la producción, obtenemos la producción neta que se destina al consumo de las familias.

B.1.2.2 ACTUACION DE LAS FAMILIAS

Al final del proceso productivo, cada familia tiene un ingreso que se obtiene por vender su fuerza de trabajo, y también de las diversas acciones que tienen en cada una de las empresas, el cálculo en términos matemáticos es como sigue.

Sea v una familia. Después de un ciclo productivo las empresas tienen ganancias en cantidades g_1, \dots, g_n : por ejemplo en la empresa K se obtuvo la ganancia g_K y como la familia v es accionista de dicha empresa va a reclamar la parte que le corresponde de esta ganancia, así reclamara h_K pero esto lo realiza para cada una de las empresas, así se obtiene que el ingreso de la familia v por ser accionista de las distintas empresas es

$$h_1 g_1 + h_2 g_2 + \dots + h_n g_n$$

o lo que es lo mismo

$$\sum_{i=1}^n h_i g_i$$

substituyendo la ganancia tenemos

$$\sum_{i=1}^n h_i (P(I-A) - w_l) X^{(t)}$$

a esta cantidad la denotaremos como $\Delta^{(t)}$ en este mismo ciclo productivo la familia v trabaja $t^{(v)}$, y siendo w el precio de la jornada de trabajo, entonces el ingreso por la venta $t^{(v)}$ jornadas de trabajo es $w t^{(v)}$.

El ingreso de la familia v por ser accionista y vender su fuerza de trabajo es

$$w t^{(v)} + \sum_{i=1}^n h_i (P(I-A) - w_l) X^{(t)} = I^{(v)}$$

Como la familia v eligió trabajar $t^{(v)}$, podrá comprar distintas cantidades mercancías $(S_1^{(v)}, \dots, S_n^{(v)}) \geq 0$ tal que no rebase su ingreso, i.e.

$$P S_v \leq I^{(v)}$$

Definición: Se dirá que un plan de trabajo consumo $(t^{(v)}, S_1^{(v)}, \dots, S_n^{(v)}) \geq 0$ es accesible para la familia v si

$$P S_v \leq w t^{(v)} + \Delta^{(t)}$$

Definición: El conjunto de planes de trabajo consumo accesible para la familia v es

$$\{ (t^{(v)}, S_1^{(v)}, \dots, S_n^{(v)}) \geq 0 \mid P S_v \leq I^{(v)} \}$$

Hemos mencionado que la función $U^{(v)}$ es creciente, etc. Pero en la entrada correspondiente a lo que sería el trabajo, la función como hemos mencionado antes no la considera. Si se considerara, esto significa que mientras más trabaja se siente más dichoso, pero en la concepción general del equilibrio esto no es cierto, mientras más se trabaja más se sufre. Para considerar la situación de descanso en lugar del trabajo en la entrada correspondiente, se harán los siguientes cambios. Se considera que la búsqueda de

los individuos es descansar lo más posible, mientras más descansa se siente más dichoso.

Sea $J^{(v)}$ la cantidad máxima de trabajo que puede desplegar el individuo v en un periodo de producción. Esta cantidad es en promedio la misma para cada individuo, le llamaremos entonces J . Es claro que $t_v^{(v)} \leq J$. La cantidad que el individuo descansa aquí es $d_v^{(v)} = J - t_v^{(v)}$, por la relación existente entre $t_v^{(v)}$ y J se tiene que $d_v^{(v)} \geq 0$. Si $t_v^{(v)} = 0$, esto significa que el individuo no trabajó y solo se la pasó descansando durante todo el periodo productivo, pero esto quiere decir que para poder vivir el individuo fue necesario que otros trabajaran para él.

Teorema: Sea v una familia arbitraria.

$(t_v^{(v)}, S_v)$ es accesible $\iff (w, P) (d_v^{(v)}, S_v) \leq wJ + \Delta^{(v)}$

Demostración: Como $(t_v^{(v)}, S_v^{(v)}, \dots, S_n^{(v)})$ es accesible

$$\iff PS_v \leq w t_v^{(v)} + \Delta^{(v)}$$

$$\iff PS_v - w t_v^{(v)} + wJ \leq wJ + \Delta^{(v)}$$

$$\iff PS_v + w d_v^{(v)} \leq wJ + \Delta^{(v)}$$

$$\iff (w, P) (d_v^{(v)}, S_v) \leq wJ + \Delta^{(v)} \text{ Q.E.D.}$$

El conjunto de descanso consumo para la familia v es

$$C^{(v)} = \{ (t_v^{(v)}, S_v^{(v)}, \dots, S_n^{(v)}) \geq 0 \mid (w, P) ((d_v^{(v)}, S_v)) \leq I^{(v)} \}$$

donde $I^{(v)} = wJ + \Delta^{(v)}$

Si bien es cierto la cantidad de dinero recibida por la familia v es a el final del periodo productivo, lo que se supone es que las familias pueden hacer todos los cálculos desde el inicio, y lo que se hará será es planear cuanto descansará y consumirá de cada una de las mercancías existentes.

El problema matemático que resuelve cada familia es:

Sea $U^{(v)} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ función de utilidad

tal que

tal que

$$U^k(d^k, S^k)$$

mide la satisfacción del descanso consumo, entonces tenemos que

$$\text{maximizar } U^k(d^k, S^k)$$

$$\text{sujeto a } (d^k, S^k) \in C^k$$

B.1.2.3 RELACION ENTRE LA OFERTA Y LA DEMANDA

Las empresas realizan en dos momentos una oferta de mercancías: el primero es cuando realizan sus capitales en forma dineraria. El segundo es cuando han concluido el ciclo productivo, esta oferta está destinada a cubrir la demanda de las familias. Veamos más de cerca estos dos momentos.

En el inicio del ciclo productivo, cada empresa va con su vector Q^k al mercado -bajo el supuesto de que existe un vector de precios y salario- y así obtiene un capital PQ^k (k se supone que no existen problemas para que esto ocurra), las empresas conocen, dentro de los planes de producción factibles, aquellos que maximizan su beneficio, sea X^k uno de dichos planes. Para llevarlo a cabo demandará capital fijo en cantidades BX^k de cada una de las mercancías C_1, \dots, C_n , lo cual tiene un costo de PBX^k ; y además demandará fuerza de trabajo en cantidad lX^k , y así, entonces tiene que pagar salarios en cantidad wlX^k . En este primer movimiento la empresa k ofreció Q^k y demandó BX^k y lX^k de capital fijo y jornadas de trabajo. X

En su poder el capitalista con medios de producción y obreros, los reúne y después de desarrollarse el ciclo de producción obtiene como resultado una producción bruta de X^k , pero además como (como en el inicio del proceso productivo tenía BX^k y se insumió AX^k) tiene un capital $(B-AX)^k$ de cada una de las mercancías. La cantidad X^k está formada por el capital fijo AX^k que se transfirió en el proceso productivo, y las jornadas de trabajo ejecutadas por los obreros contratados.

No se pagan los salarios con el capital que dispone la empresa k al inicio del proceso productivo, i.e. PQ^k , con esto sólo se compra BX^k ; los pagos salariales son al final del proceso productivo, y estos son cubiertos con una parte del

precio de la producción ofrecida, que será devuelto a las empresas de manera inmediata al realizarse la demanda por parte de los consumidores.

El conjunto de las empresas ofrece

$$\sum_{k=1}^n X^{(k)} = X \text{ y } \sum_{k=1}^n (B-A)X^{(k)} = (B-A)X.$$

la demanda de mercancías depende por cómo sea $t_v^{(v)}$ y $\Delta^{(v)}$. Si las familias conocen $\Delta^{(v)}$, elegirán descansar y consumir paquetes tales que no rebasen la cantidad $wJ + \Delta^{(v)}$ y que eleven su satisfacción al máximo. Si la familia v demanda $S^{(v)}$ de la mercancía C_i , la demanda de todas las familias de dicha mercancía será.

$$S_i = \sum_{v=1}^n S_i^{(v)}$$

así el vector demanda será aquél que tenga como componentes S_1, \dots, S_n , y si el ofrecimiento de trabajo por cada familia es $t_v^{(v)}$, se tiene que la oferta de trabajo por todas las familias es

$$t_0 = \sum_{v=1}^n t_0^{(v)}$$

es decir lo que se descansa es

$$\sum_{v=1}^n (J - d(v))$$

La demanda S en el segundo periodo de intercambios es cubierta con la producción X y $(B-A)X^{(k)}$, siendo X el vector de producción formado por planes de producción factibles que maximizan la ganancia para cada una de las empresas, y S está formado por planes consumo, que conjuntamente que con la cantidad elegida de descanso cumple las restricciones del ingreso y que maximiza $U^{(v)}$.

En resumen, si la teoría examinada aquí supone que todo lo demandado es ofrecido, la ecuación que refleja esta situación en los dos periodos pueden ser aclarados con la siguiente tabla

	OFERTA		DEMANDA	
	EMPRESAS	FAMILIAS	EMPRESAS	FAMILIAS
INICIO	Q	t	BX IX	
FINAL	(B-A)X X			S

En el inicio del proceso productivo las empresas ofrecen Q y demandan BX, y las familias ofrecen trabajo t y las empresas demanda IX. Al final de este periodo de producción las empresas tienen X y (B-A)X en, habiéndose transferido AX y IX al vector X, y las familias demandarán mercancías en cantidades S, si todo lo demandado es ofrecido debe ocurrir que

$$BX + S \leq Q + X + (B-A)X$$

$$IX \leq t$$

Esta es la expresión y no otra la que refleja la hipótesis que se mencionó, la cual no puede ser reducida a menos que se hagan más hipótesis.

Pero no se razona así: La expresión que refleja que la demanda sea cubierta con una oferta se plantea como:

$$S \leq (I-A)X$$

$$IX \leq t$$

La forma de como se pueden reducir las desigualdades originales a las últimas es considerando que en el proceso final de intercambios también se demanda un capital Q por parte de las empresas, con lo cual en este segundo periodo de intercambios entran en acción las empresas y familias, y con esto en realidad el cuadro tiene la forma siguiente

	OFERTA		DEMANDA	
	EMPRESAS	FAMILIAS	EMPRESAS	FAMILIAS
INICIO	Q	t	BX IX	
FINAL	(B-A)X X		Q	S

Con lo cual la proposición: toda demanda es cubierta con una oferta se expresa

$$S + BX + Q \leq Q + X + (B - A)X$$

$$IX = t$$

es decir

$$S \leq (I - A)X$$

$$IX \leq t$$

Pero con esto la visión de considerar a el capital fijo es parcial: el capital fijo está constituido por aquellas mercancías las cuales no necesariamente se consumen en el proceso productivo, es decir edificios, máquinas, etc. Si se trata de considerar a el capital fijo como algo que las empresas siguen preservando en los periodos de producción subsiguiente, estas cantidades no tiene porque ser puestas en venta en cada periodo de producción.

Si X es tal que en el primer periodo de intercambios cumple $BX = Q$ y que en el segundo cumple que $S = (I - A)X$, teniendo una oferta de mercancías en cantidad $X + (B - A)X$ entonces las empresas salen con un capital mayor o igual al que tenían inicialmente. Pero por otro lado teniendo $BX = Q$ en el inicio del proceso productivo y que las empresas siempre inicien con un mismo capital equivalente a Q , el que la demanda siempre se ofrezca se puede reflejar con cualquiera de las desigualdades $S \leq (I - A)X$ o $S + BX \leq Q + X + (B - A)X$. pero ninguna de las dos consideraciones anteriores contempla que en el segundo periodo de intercambios se demande y se ofrezca Q .

Esto argumenta el porque considerar a el capital fijo como se hace aquí, no es diferente al tratamiento de un modelo sin tal hipótesis.

Otra observación que se desprende en el estudio de la oferta y la demanda de ésta forma es el pago de los salarios. La empresa en el inicio del proceso productivo compró $BX^{(1)}$ y $IX^{(1)}$, esto último en jornadas de trabajo, al final tiene un producto $BX^{(2)}$ y $(B - A)X^{(2)}$, pero $X^{(2)} = AX^{(2)} + (I - A)X^{(2)}$, es decir el capital fijo transferido a $X^{(2)}$ y el producto neto. Se puede argumentar que parte del producto neto se destina a salarios, es decir que el capitalista paga en especie, pero esto no es así: los pagos salariales son realizados después de que la venta de la producción neta a transcurrido, al realizarse esto, entonces si, parte del valor se destina al pago de los salarios. Pero para realizar la oferta, las familias necesitan su ingreso que depende de de las jornadas trabajadas y de sus acciones en las

empresas. Esto puede ocurrir si la producción neta se ha realizado. Una hipótesis que puede salvar esto es que las empresas vendan a "alguien" su producción neta y con esto se cubran los pagos salariales y los pagos a los accionistas y ese "alguien" es quien cubrirá la demanda de las familias, y por su actividad no tendrá beneficio.

En resumen: la relación que se supone entre la oferta y la demanda será el que toda demanda es cubierta con una oferta y esto se expresa como

$$S \leq (I-A)X$$

$$IX \leq t.$$

Pensemos ahora en cómo la economía debe ser productiva, que no es lo mismo que considerar que toda oferta debe ser cubierta con una demanda.

Al inicio del periodo de producción las empresas ofrecen Q ; pero ahora no sólo las empresas entran al juego de la oferta y la demanda, sino que también las familias. Así, con esta cantidad Q , las familias y empresas cubren su demanda, que como hemos mencionado, no es otra cosa que $BX + S$; es decir, BX que demandan las empresas y S que demandan las familias.

La parte que no se vendió de Q y que mantienen las empresas durante todo el periodo de producción es $Q - (BX + S)$.

Al final de este periodo, de la cantidad de BX que tienen en su poder las empresas, se desgastó AX , por lo cual tienen un sobrante de $(B - A)X$, pero además se produjo un vector X .

Para que la economía sea productiva, debemos pedir que los inventarios iniciales sean menores o iguales a los inventarios finales. El inventario inicial es Q , y el final, por lo que hemos mencionado es

$$Q - (BX + S) + (B - A)X + X$$

donde $Q - (BX + S)$ es la parte de Q que no se vendió al inicio del proceso productivo, $(B - A)X$ es la parte de B que se preserva para el periodo subsecuente, y X es la producción bruta que resulta del proceso productivo. Entonces debe ocurrir que

$$Q < Q - (BX + S) + (B - A)X + X$$

Pero esto no es otra cosa que

$$0 < -S + (I - A)X$$

por lo cual esta expresión refleja que la economía es productiva.

B.1.3 DEFINICION DE EQUILIBRIO ECONOMICO

Sintetizando, la economía E examinada aquí consta de :

1. M mercancías.
2. m empresas
3. n consumidores
4. Para cada $v = 1, \dots, n$ se tiene una función $U^v: \Omega^v \rightarrow R$ de utilidad.
5. Una matriz $A = 0$ de $M \times M$.

Una matriz $B = A$

$l \in R^{(n)}$ Un vector renglón de trabajo vivo $l > 0$,

$R^{(m)}$ 6. Para cada $K = 1, \dots, m$ un vector $Q^{(K)} \geq 0$ ($Q^{(K)} \in R^{(M)}$).

7. Para cada v y K un número real h_{vK} tal que

(a) $h_{vK} \geq 0$

(b) para cada $K = 1, \dots, m$ $\sum_{v=1}^n h_{vK} = 1$

8. Un $J > 0$, $J =$ la jornada de trabajo.

Si las empresas teniendo un capital $Q^{(k)}$ producen un vector $X^{(k)}$, el cual es un plan de producción que maximiza la ganancia, y las familias descansan $d_v^{(v)}$ y consumen $(S_1^{(v)}, S_2^{(v)}, \dots, S_n^{(v)})$, sujeto a las restricciones de su ingreso, y donde todo lo demandado es ofrecido y que al final las empresas vuelven a quedar con un capital equivalente a el inicial para continuar la producción, se dirá que ésta es una economía en equilibrio, en términos formales.

Definición: Un equilibrio E para E consta de

(A) Un sistema $(w, P) \geq 0$ salario-precio.

(B) Para cada $k = 1, \dots, m$ un $X^{(k)}$

(C) Para cada $v = 1, \dots, n$ un $(d_v^{(v)}, S_v^{(v)})$, con $d_v^{(v)} \geq 0$ y $S_v^{(v)} \in \Omega^{(v)}$

de tal modo que

(1) para cada $k = 1, \dots, m$ $X^{(k)}$ es solución al problema de

$$\text{maximizar } (P - PA - wI)X^{(k)}$$

sujeto a

$$PBX^{(k)} \leq pQ^{(k)} \text{ y } X^{(k)} \geq 0$$

(2) para cada $v = 1, \dots, n$ $(d_v^{(v)}, S_v^{(v)})$ es solución al problema de

$$\text{maximizar } U^{(v)}(d_v^{(v)}, S_v^{(v)})$$

$$\text{sujeto a } w d_v^{(v)} + p S_v^{(v)} \leq wJ + \sum_{k=1}^m h_{vk} g^{(k)}(X^{(k)})$$

$$(d_v^{(v)}, S_v^{(v)}) \geq 0$$

$$3. \sum_{v=1}^n S_v^{(v)} \leq (I - A) \sum_{k=1}^m X^{(k)}$$

$$\text{y } 1. \sum_{k=1}^m X^{(k)} \leq \sum_{v=1}^n (J - d_v^{(v)})$$

de tal modo que, si se la desigualdad estricta vale en algún caso, entonces el precio correspondiente a ese caso es cero.

Que $(w, P) \geq 0$ significa que no todos los precios de las mercancías son cero; la condición (1) nos dice que cada empresa tiene un plan de producción con lo cual obtiene una máxima ganancia, y que dicho plan es realizable; la condición (2) dice que en el equilibrio las familias sólo consumirán y descansarán en cantidades que optimicen su utilidad, teniendo conocido su ingreso. La condición (3) plantea que en el equilibrio la oferta siempre es igual a la demanda, y siempre que se tenga un precio positivo la oferta coincide con la demanda. □

B. II EJEMPLOS DE EQUILIBRIO PARA LA ECONOMIA

B. II.1 UN EJEMPLO CON PRODUCCION NULA

Suponga que E es una economía tal que

$$(i) A > 0$$

$$(ii) a_{ii} > 1 \text{ para toda } i$$

$$(iii) l > 0$$

Sea $P = (1, 1, \dots, 1)$ y $w = 0$

$$x^{(k)} = 0 \text{ para toda } k = 1, \dots, m$$

$$d_v = 0 \text{ para todo } v = 1, \dots, n$$

$$s_v = 0 \text{ para todo } v = 1, \dots, n.$$

La cantidad

$$(P - PA - w) < 0$$

de lo cual se desprende que las cantidades mencionadas conforman un equilibrio.

El siguiente ejemplo es más general.

Si $L(A) > 1$ y A indescomponible

Sea $P > 0$ un vector de Frobenius de A .

Entonces

$$P - PA = P - L(A)P = (1 - L(A))P < 0.$$

Si hacemos $w = 0$, entonces $P^j - PA^j - w < 0$ para $J = 1, \dots, M$

Los únicos planes de producción que maximizan la ganancia, aplicando el lema de Neyman y Pearson generalizado, son $S = \{0\}$.

Por tanto la ganancia es cero y $(v) \neq 0$, y como $w = 0$, se tiene que $S_{(v)} = 0$ y $d_0^{(v)} = 0$, pero también ocurre que

$$S = \sum S_{(v)} = 0 = (I-A)X, \quad X = \sum X^{(v)}$$

es decir como $P_i > 0$ la oferta coincide con la demanda. Sólo basta probar que la demanda de trabajo es estrictamente menor que su oferta, esto debido a que $w = 0$. La demanda es $lX = 0$, la oferta de trabajo es

$$\sum (J - d_0^{(v)}), \text{ pero de aquí } lX < nJ.$$

B.II.2 UN EQUILIBRIO SIN GANANCIAS PARA LAS EMPRESAS PERO CON PRODUCCION NO NULA

Sea E una economía tal que

$A > 0$ productiva

$B = A$

$l > 0$

Sea $w = 1$, y $P = wI(I-A)^{-1} > 0$ (como $(I-A)^{-1} \geq 0 \Rightarrow I(I-A)^{-1} > 0$ y $wI(I-A)^{-1} > 0$).

Sean m y $Q = \sum Q^{(k)}$ suficientes para que el conjunto de planes de producción accesible sea "suficientemente grande", nos estamos refiriéndonos a el conjunto $\{ X = 0 \mid PBX = PQ \}$.

En efecto las ganancias son nulas: por definición la ganancia tiene la expresión.

$$(P(I-A) - wI)X^{(k)}$$

pero

$$P(I-A) - wI = wI(I-A) - I(I-A) - wI = wI - wI = 0$$

Aquí los planes de producción que maximizan la ganancia están dados por el caso 2. De acuerdo con Neyman y Pearson ampliado.

Como $B > 0$ y $PBX = \alpha X^N = \alpha$ para todo $X \in \Omega$, se tiene que $\alpha > 0$. Pero también $PB > 0$, por lo que $\alpha > 0$, con lo cual $N = 0$ y $P = \langle i = 1, \dots, M | \alpha_i > 0 \rangle = \langle 1, \dots, M \rangle$. $\alpha_i = PB^{(i)}$

Por tanto la ganancia se optimiza sobre el conjunto

$$S = \langle X \in \Omega, \Omega^N | \sum \alpha_i x_i \leq \alpha \rangle$$

Las funciones de utilidad son de Bernoulli

$$U^{(v)}(d_0^{(v)}, S_{1(v)}, \dots, S_{M(v)}) = \alpha \log(d_0^{(v)}) + \sum a_i \log(S_{i(v)})$$

$$\text{con } \alpha + \sum_{i=1}^M a_i = 1 \text{ con } \alpha, a_i \geq 0$$

Usando Lagrange se obtiene que el descanso consumo que maximiza la función de utilidad es

$$d_0^{(v)} = \alpha wJ/w = \alpha J$$

$$S(v) = a_i wJ/P_i = (w/P_i) a_i J.$$

El descanso y demanda total de C_i es

$$\sum_{v=1}^N d_0^{(v)} = \sum_{v=1}^N \alpha J = n \alpha J$$

$$\sum S^{(v)} = \sum (w/P_i) a_i J = n w J (a_i/P_i)$$

El vector de demanda total es

$$S = n w J \begin{bmatrix} (a_1/P_1) \\ \vdots \\ (a_n/P_n) \end{bmatrix}$$

$$= w1J \begin{bmatrix} (1/P_1) & & & \\ & (1/P_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (1/P_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix}$$

Sea $L^* = (a_1, \dots, a_n)$

Las cantidades de producción que igualan la oferta con la demanda son

$$S = (I-A)X$$

Por lo cual

$$X = (I-A)^{-1}S > 0$$

La producción es positiva y tenemos que $Q^{(K)}$ es suficiente para $BX = Q$.

$$X = (I-A)^{-1}w1J \begin{bmatrix} (1/P_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & (1/P_n) \end{bmatrix}$$

Pero como $P = w1(I-A)^{-1}$

Hacemos $(v_1, \dots, v_n) = 1(I-A)^{-1} = V$

$$P = wV = w(v_1, \dots, v_n)$$

$$X = w1J(I-A)^{-1}(1/w) \begin{bmatrix} (1/v_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & (1/v_n) \end{bmatrix}$$

1. equilibrio de trabajo:

La demanda de trabajo es

$$lX = nJ(I-A)^{-1} \begin{bmatrix} (1/v_1) \\ \vdots \\ (1/v_n) \end{bmatrix}$$

$$= nJ(1, \dots, 1)L = nJ \sum a_i$$

como $\alpha + \sum a_i = 1$

$$lX = nJ(1-\alpha) = nJ - \alpha nJ = \sum (J - d\alpha^i)$$

Por tanto, si $PBX = PQ$, nos encontramos con un equilibrio sin ganancias. ■

P.III LA ECONOMIA ES EN EQUILIBRIO

Supongamos que

$$E = [(w', P'), (d^{(1)}), (S, \nu), (X^{(1)})]$$

son cantidades de equilibrio para E.

IS.III.1 PROPIEDADES DEL EQUILIBRIO E

(A). $X^{(1)}$ es tal que

$$[P' (I-A) - w'1] X^{(1)} > [P' (I-A) - w'1] X^{(2)}$$

para todo

$$X^{(2)}$$

tal que

$$P' B X^{(2)} \leq P' Q^{(2)}$$

$$X^{(2)} > 0$$

y

$$P' B X^{(1)} \leq P' Q^{(1)}$$

$$X^{(1)} \geq 0.$$

(B). $(d^{(1)}, S, \nu, *)$ cumple que

$$1. (w', P') (d^{(1)}, S, \nu, *) < w'J + w''$$

$$2. U^{(1)} (d^{(1)}, S, \nu, *) > U^{(2)} (d^{(1)}, S, \nu, *)$$

para todo $(d^{(2)}, S, \nu)$ tal que

$$(w', P') (d^{(2)}, S, \nu) \leq w'J + w''$$

(C) La demanda total es producida

$$\sum_{i=1}^n S_i \nu_i \leq \sum_{k=1}^n (I-A) X^{(1)}_k$$

y si en algún lado se tiene la desigualdad estricta el precio es cero.

Definición: Se dice que la $z_0 = P^0x_0$, donde P^0 es la columna i -ésima de P , y $\tau_i = P^0x_0 - P^0A - w^0$, es el costo del capital i -ésimo que se requiere para producir una unidad de la mercancía i , y τ_i es la ganancia que se obtiene por producir una unidad de la mercancía i .

Proposición 1. En el equilibrio

Si $\tau_i > 0 \implies x_i = 0$.

Demostración: Supongamos $x_i = 0$

(observemos que $(x_1, \dots, x_M) X^{(k)} = P^0 X^{(k)}$)

Sea $N = \{i = 1, \dots, M \mid x_i = 0\}$

Definimos un nuevo plan de producción

$$X^{(k+1)} = \begin{cases} X_i^{(k)} = X_i^{(k)} & \text{si } i \text{ no está en } N \\ X_i^{(k+1)} = X_i^{(k)} + \delta & \text{con } \delta > 0 \text{ si } i \in N \end{cases}$$

es claro que $X^{(k+1)}$ cumple que

$$X^{(k+1)} \geq X^{(k)} > 0$$

la desigualdad es estricta si $j \in N$, y

$$P^0 X^{(k+1)} = P^0 X^{(k)} < P^0 x_0$$

luego $X^{(k+1)}$ es factible para k , pero como

$$\tau_j X_j^{(k+1)} > \tau_j X_j^{(k)} \quad \text{para } j \in N$$

$$[P^0(I-A) - w^0] X^{(k+1)} > [P^0(I-A) - w^0] X^{(k)}$$

Se concluye que $X^{(k+1)}$ no es un plan de producción en el equilibrio, pero esto es un absurdo. Q.E.D.

Proposición 2. En el equilibrio

Si $\tau_i < 0 \implies X_i = 0$

Demostración: Supongamos $X_i > 0$

Sea $I = \{i = 1, \dots, M \mid \tau_i < 0 \text{ y } X_i > 0\}$

Construimos un nuevo plan de producción como sigue

$$X^{(k+1)} = \begin{cases} X_j^{(k+1)} = X_j^{(k)} & \text{si } j \text{ no está en } T \\ X_j^{(k+1)} = 0 & \text{si } j \in T \end{cases}$$

$X_j^{(k+1)} \leq X_j^{(k)}$, ya que si $j \in T$ $0 = X_j^{(k+1)} < X_j^{(k)}$.

Entonces

$$P \cdot B X^{(k+1)} \leq P \cdot B X^{(k)} \leq P \cdot Q(K)$$

$$X^{(k+1)} \geq 0$$

luego $X^{(k+1)}$ es factible para k

Pero al mismo tiempo para $j \in T$

$$\tau_j X_j^{(k+1)} < \tau_j X_j^{(k)} = 0$$

y para j que no este en T

$$\tau_j X_j^{(k+1)} = \tau_j X_j^{(k)}$$

Por tanto

$$[P \cdot (I-A) - w \cdot 1] X^{(k+1)} > [P \cdot (I-A) - w \cdot 1] X^{(k)}$$

es un absurdo. Q.E.D.

De las proposiciones concluimos que en el equilibrio, si alguna rama de la economía tiene una ganancia negativa, nadie produce nada allí, con lo cual no se descarta una producción positiva con una ganancia nula. Pero si la tasa de ganancia es positiva, siempre se requiere capital fijo, el cual tiene un precio positivo.

Proposición 3. En el equilibrio

$$\text{Si } X_j = 0 \implies \sum_{i=1}^M a_{ij} X_i = 0 \text{ y } S_j = 0.$$

Demostración: De la definición de equilibrio tenemos

$$0 \leq S_j \leq X_j - (I-A)X_j$$

la entrada j de la desigualdad es

$$0 < S_j \leq X_j - \sum_{i=1}^M a_{ij} X_i$$

$$0 \leq S_i \text{ y } \sum_{j=1}^M a_{ij} X_j^* - X_i^* = 0$$

luego

$$\sum_{j=1}^M a_{ij} X_j^* = 0 \text{ y } S_i^* = 0 \quad \text{Q.E.D.}$$

Corolario 1: Si para toda k , $X_k^{(k)*} = 0 \implies \sum_{i=1}^M a_{ij} X_j^* = 0$

Corolario 2: Si $X_i^{(i)*} = 0$ y $X_i^{(i)*} > 0 \implies a_{ij} = 0$.

Demostración: Como

$$a_{i1} X_1^{(i)*} + \dots + a_{in} X_n^{(i)*} = 0$$

se tiene que

$$a_{ij} X_j^{(i)*} = 0 \text{ para } i = 1, \dots, n$$

pero no todas la $X_j^{(i)*}$ son cero, por tanto

$$a_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad \text{Q.E.D.}$$

En palabras: si una mercancía no es producida en el equilibrio, ésta no se utilizará para la producción de otras mercancías, ni tampoco se consume.

Pero si bien es cierto que una mercancía no puede ser requerida como insumo directo, esto no significa que no se requiera como capital fijo. Esto puede ser descartado, suponiendo que si una mercancía no se requiera en el equilibrio entonces tampoco se requiere como capital fijo.

Postulado

$$\text{Si } b_{ij} > 0 \implies a_{ij} > 0.$$

De aquí podemos desprender los resultados siguientes

Proposición 4. En el equilibrio

$$\text{Si } X_j^* = 0 \implies \sum_{i=1}^M b_{ij} X_i^* = 0.$$

Demostración: Supongamos que $X_i^* = 0$ y que $\sum_{i=1}^M b_{ij} X_i^* > 0$.

Entonces existe i tal que

$$b_{ij} X_i^* > 0$$

pero esto implica

de los otros recursos

$$x_i > 0 \text{ y } x_i' > 0$$

lo cual es un absurdo.

Corolario 3. Si $x_i' = 0$ y $x_i > 0 \implies b_{i1} = 0$.

Corolario 4. Si $x_i' = 0$ y $b_{i1} > 0 \implies x_i = 0$.

Tengamos presente: $r_i < 0$, la ganancia se maximiza haciendo $x_i'' = 0$; y si $x_i'' = 0$, C_i no se consume, ni se utiliza en la producción de otras mercancías.

En términos económicos no es posible considerar a una economía que sólo tenga $r_i < 0$, para $i = 1, \dots, n$. En esta economía no se consume, no se produce, etc.

3. III.2 CANTIDADES DE PRODUCCIÓN QUE MAXIMIZAN LA GANANCIA.

Investiguemos como son las x_i'' que en el equilibrio maximizan el beneficio. Para analizar todos los casos tendremos que echar mano del Lema de Neyman y Pearson y su generalización.

Teorema: Supongamos el problema

$$\text{maximizar } (P' - (I-A) - wI) X''$$

$$\text{sujeito a } P'' = \{ X'' \in \mathbb{R}^m \mid P' B X'' \leq P' Q'' \}$$

Entonces la solución está dada por los siguientes casos

Caso I: Suponga que existe C_i tal que

$$\tau_i = P_i - P' A_i - w' i_i > 0$$

y además que $\alpha_i = P' B_i > 0$ para toda i

Construimos el conjunto

$$S = \{ i \in \{1, \dots, n\} \mid (\tau_i / \alpha_i) = \max (\tau_i / \alpha_i) \}$$

Entonces el conjunto

$$L = \{ X'' \in \mathbb{R}^m \mid x_i'' = 0 \text{ si } i \in S$$

$$\text{y tal que } P' B X'' = P' Q'' \}$$

Caso II: existen $\alpha_i \neq 0$ para $i \in T$
 con $\alpha_i > 0$. Construimos en este caso

$$T = \{i = 1, \dots, N \mid \alpha_i > 0\}$$

y sea

$$V = \{X^{(k)} \in \Omega^{(k)} \mid X_i^{(k)} = 0 \text{ si } i \in T \text{ y } P \cdot B X^{(k)} \leq P \cdot Q\}$$

es el conjunto solución al problema.

Para los casos siguientes tengamos presente la siguiente notación

$$N = \{i = 1, \dots, N \mid \alpha_i = 0\}$$

$$P = \{i = 1, \dots, N \mid \alpha_i > 0\}$$

Caso III. Si existe $i \in N$ tal que $\tau_i > 0$, entonces el conjunto de soluciones es el vacío.

Caso IV. Si para todo $i \in N$ $\tau_i < 0$

Sea

$$N_1 = \{i \in N \mid \tau_i < 0\}$$

$$N_0 = \{i \in N \mid \tau_i = 0\}$$

Caso IV.1 Si para todo $i \in P$, $\tau_i < 0$, el conjunto de soluciones es

$$\{X^{(k)} \in \Omega^{(k)} \mid \begin{cases} X_i^{(k)} = 0 & \text{si } i \in N_1 \\ X_i^{(k)} \geq 0 & \text{si } i \in N_0 \\ X_i^{(k)} = 0 & \text{si } i \in P \end{cases} \}$$

Caso IV.2 Para todo $i \in N$, $\tau_i < 0$

Para todo $i \in P$ $\tau_i < 0$ y existe $i_0 \in P$ tal que $\tau_{i_0} = 0$

El conjunto de soluciones es

$$\{X^{(k)} \in \Omega^{(k)} \mid \begin{cases} X_i^{(k)} = 0 & \text{si } i \in N_1 \text{ y } i \in N_0 \\ X_i^{(k)} \geq 0 & \text{si } i \in N_0 \text{ y } i \in N_1 \\ X_i^{(k)} = 0 & \text{si } i \in P \text{ y } \tau_i < 0 \\ X_i^{(k)} > 0 & \text{si } i \in P \text{ y } \tau_i = 0 \\ \text{y } P \cdot B X^{(k)} \leq P \cdot Q \end{cases} \}$$

Donde α es el nivel de selección es

$$P(X^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}) = 1 - \alpha \quad \text{si } \tau_1 = 0$$

$$P(X^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}) = \alpha \quad \text{si } \tau_1 > 0$$

$$P(Y^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}) = 1 - \alpha \quad \text{si } \tau_2 = 0$$

$$P(Y^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}) = \alpha \quad \text{si } \tau_2 > 0$$

donde $\chi^2_{1-\alpha}$ es el $\chi^2_{1-\alpha}$.

Demostración:

La demostración consiste en rehacer el tema de Neyman y Pearson, los cuales se encuentran probados en este trabajo.

Si consideramos "algunas" posibilidades para las cantidades τ_1 y α_1 expuestas en los casos anteriores podemos observar que son válidos los siguientes

	$\tau_1 > 0$ $\alpha_1 > 0$	$\tau_1 < 0$ $\alpha_1 > 0$	$\tau_1 = 0$ $\alpha_1 > 0$	$\tau_1 > 0$ $\alpha_1 = 0$	$\tau_1 = 0$ $\alpha_1 = 0$	$\tau_1 < 0$ $\alpha_1 = 0$
Caso I	V	0	0	0	0	0
Caso II	0	V	V	0	0	0
Caso III	0	0	0	V	0	0
Caso IV.1	0	V	0	0	V	V
2	0	V	V	0	V	V
3	V	V	V	0	V	V

Para darle una interpretación al teorema anterior haremos uso de la tasa de ganancia.

El cociente

$$(\tau_1/\alpha_1) = (P_1 - P_1' - \alpha_1')/P_1'$$

cuando está bien definido, es la tasa de ganancia que obtiene cualquier empresa al producir una unidad de la mercancía C.

El equilibrio, tiene una serie de situaciones.

En el caso I, sólo se producen las mercancías C, que dejan la máxima ganancia, y ésta es positiva, aquí es necesario que gasten todo su capital.

En el caso II, sólo se producen las mercancías que dan una tasa de beneficio cero, como no se obtiene beneficio, no es indispensable que inviertan todo su capital inicial.

El caso III es un poco raro, puede ser interpretado de la siguiente manera: La tasa de ganancia se ha disparado a infinito y no existe plan de producción capaz de alcanzar dicha tasa de ganancia. Por eso no existe plan de producción que alcance dicha tasa de ganancia. Este caso no puede ocurrir en el equilibrio. Es decir no pueden ocurrir que en el equilibrio si se regala capital para producir la mercancía C, la ganancia no puede ser positiva.

Para interpretar el caso IV, hagamos explícita la interpretación que se daba en el caso III: el que $\alpha_i = 0$, quiere decir que el capital fijo que se requiere para producir una unidad de i es gratis, pero el que $\alpha_i = 0$ para esta misma mercancía quiere decir que en su producción las empresas no obtienen ninguna ganancia. i.e. se regala capital fijo para producir una mercancía para la cual no se obtiene nada de ganancia. Otra manera como puede ser interpretado es como "ayuda humanitaria": se "regala" capital para aquellas "naciones o empresas" que están en una situación de desastre. Aunque sin meternos a discutir si la ayuda humanitaria lo es- los neoliberales han planteado de mil formas que estas economías no son las más viables

El caso IV.1 significa que en el equilibrio la economía produce, con un capital gratis y un beneficio cero. Este caso puede ser descartado.

cuales se tenga $\alpha_i > 0$ y $r_i = 0$ o $\alpha_i = 0$ y $r_i = 0$. Puede significar que el costo del capital fijo para producir una unidad de x_i es positivo, pero resulta que no se obtiene beneficio alguno, y si $\alpha_i = 0$ y $r_i = 0$ aquí se obtiene el mismo beneficio, pero el capital que se requiere para la producción es regalado.

El caso IV.3: existe la posibilidad en donde se tenga r_i y α_i positivas o r_i y α_i iguales a cero. En el caso 1, el capital fijo es positivo, pero también el beneficio es positivo; en el caso 2 el beneficio es cero y el capital para la producción también es nulo. Se puede razonar diciendo que la empresas buscan aquellas ramas que dejan un beneficio positivo, por lo cual la economía se traslada a producir a las ramas donde se tenga un r_i y un α_i positivo. En los casos IV.2 y IV.3 no están descartadas situaciones análogas al juego de la mayoría.

No es posible establecer que en la economía, estando en equilibrio, se establezca una única tasa de ganancia. Esto sólo es posible si descartamos los casos "raros". Aunque hasta ahora no existen argumentos para descartarlos.

Teorema: Supongamos que en el equilibrio no se puede tener i tal que α_i y $r_i = 0$ con $X_i^{(0)} > 0$.

Entonces

1. Si para toda $i = 1, \dots, M$ $\alpha_i > 0$ y $r_i > 0$

si $X_i^{(0)} > 0$ p.a. i y $K \implies r = (r_i/\alpha_i)$

2. Si para toda $i = 1, \dots, M$ $\alpha_i > 0$ y $r_i < 0$

Si $X_i^{(0)} > 0$ p.a. i , $K \implies r = (r_i/\alpha_i) = 0$

3. Si para $i \in \mathbb{N}$ $r_i < 0$

Si $i \in \mathbb{P}$, $r_i < 0$ y existe $i_0 \in \mathbb{P}$ tal $r_{i_0} = 0$

Si $X_{i_0}^{(0)} > 0 \implies r = (r_i/\alpha_i) = 0$

4. Si para toda $i \in \mathbb{N}$, $r_i > 0$

y existe $i_0 \in \mathbb{P}$ tal que $r_{i_0} > 0$

Si $X_{i_0}^{(0)} > 0 \implies r = (r_i/\alpha_i) > 0$

automática del teorema anterior enunciado. Veamos a manera de ejemplo el caso 3.

Aquí se tiene $N_1 = N$ y $N_2 = \emptyset$.

Si $i \in N_1$, $r_i < 0$, y si $i \in \mathbb{P}$, $r_i < 0$, y para cierto $i \in \mathbb{P}$ tal que $r_i = 0$.

Por tanto $X^{(k)}$ que maximiza q_k es tal que

$$\begin{cases} X_i^{(k)} = 0 & \text{si } i \in N_1 \\ X_i^{(k)} = 0 & \text{si } r_i < 0 \text{ e } i \in \mathbb{P} \\ X_i^{(k)} > 0 & \text{si } r_i = 0 \text{ e } i \in \mathbb{P} \end{cases}$$

Y tal que $P'B X^{(k)} < P'Q^{(k)}$.

Por tanto si $X_i^{(k)} > 0 \iff (\tau_i/\alpha_i) = 0$. Q.U.D.

En palabras, si existe el equilibrio "excepto casos raros" se tiene una única tasa de ganancia, y ésta es positiva o nula.

Cuando se analizó el lema de Neyman y Pearson generalizado, el caso que se puede decir cubre a los demás era el caso IV.3. Tomemos a este caso para argumentar lo que sigue, pero los argumentos no pierden su generalidad para los otros casos.

En proceso de conformarse la economía en el equilibrio, ha ido desapareciendo distintas ramas. No se produce en aquellas mercancías que tengan $\alpha_i = 0$ y $r_i < 0$; y $\alpha_i > 0$ y $r_i < 0$; $\alpha_i > 0$ y $r_i = 0$; y en aquellas que no cumplan $(\alpha_i/r_i) \leq M$, donde $M = \max(\tau_i/\alpha_i)$ y suponiendo que no se produce en donde se tenga $r_i = 0$ y $\alpha_i = 0$, podemos ver que la economía ha eliminado a muchas mercancías.

que se producen en el

...

El índice es el vector $X^{(t)}$ el cual es aquel que se produce al pasar el tiempo t después de haber eliminado las entradas $X_{ij}^{(t)} = 0$, y de haber ordenado las entradas en forma creciente. El vector $X^{(t)}$ tendrá tantas entradas como la cardinalidad que surge al eliminar $|I| = \pi$.

La matriz A puede ser reducida a una matriz A' que tendrá coincido con la cardinalidad de π : si $X_{ij}^{(t)} = 0$ tenemos que $A_{ij} = 0$ (por la proposición 3), quiere decir que el renglón j de la matriz A únicamente consta de ceros. Pero debido al carácter de la misma proposición 3, también la columna j de la mencionada matriz consta de ceros. Eliminando los renglones j y las columnas correspondientes a las $X_{ij}^{(t)} = 0$ en efecto podemos obtener la matriz A' , que sólo tiene entradas $(i,j) \in \pi$.

Debido a las proposiciones 4 y 5 también podemos reducir la matriz B a una nueva matriz B' , la cual contempla en sus entradas sólo a aquellas mercancías que son producidas y que son necesarias como capital fijo, es decir los renglones y columnas de B' no son nulos. El tamaño de la matriz B' es de $M' \times M'$.

La matriz I' es la identidad de tamaño $M' \times M'$. Si $X_{ij}^{(t)} = 0$ En el equilibrio es de esperarse que no existan obreros que laboren en la no producción de esta mercancía, así podemos borrar tanto de t como de l aquellas entradas donde se tiene $X_{ij}^{(t)} = 0$, con lo cual tenemos un nuevo vector t' y l' .

P' será el vector de precios que sólo contempla aquellas entradas i con $i \in \pi$.

El único vector para el cual no existen argumentos matemáticos para reducirlo de tamaño es $Q^{(t)}$. En el vector $Q^{(t)}$ existen mercancías que no se produce, que no se demandaran, para los cuales puede haber precios positivos o nulos, la empresa k los llevará al mercado en cada inicio de cualquier periodo de producción, y como nadie los ocupa se regresara a su casa con ellas.

Hacemos

$A' = (a_{ij})$ con $(i, j) \in \pi \times \pi$

$B' = (b_{ij})$ con $(i, j) \in \pi \times \pi$

$l' = (l_j)$ con $j \in \pi$

$S' = (S_j)$ con $j \in \pi$

$P' = (P_i)$ con $i \in \pi$

$X^{(k')} = (X_i^{(k')})$ con $i \in \pi$

$|\pi| = m'$

Al no considerar en la economía aquellas mercancías que no son producidas, las cantidades que no cambian son el número de familias n , con sus respectivas acciones en las s empresas. Pero ahora se tiene una nueva función de utilidad $U^{(k')}$ que sólo tiene entradas para las mercancías que son producidas. Y tampoco cambia el número de empresas m .

Llamemos E' a la economía inducida de E , después de haber eliminado las mercancías no producidas y cercenado a los elementos antes mencionados.

Teorema : Sea $E = [(w', P'), (d^{(k')}, (S_{j'})), (X^{(k')})]$ un equilibrio para E . Consideremos $E' = [(w'', P''), (d^{(k')}, (S_{j''})), (X^{(k')})]$ la situación cercenada de E . Entonces E' es un equilibrio

Demostración: El problema que tiene que resolver la empresa K en la economía cercenada es

maximiza $[P'' (I' - A') - w'' l'] X^{(k')}$

sujeto a $P'' B' X^{(k')} < P'' Q^{(k')}$

con $X^{(k')} \geq 0$

Sea $X^{(k')}$ factible para este problema

y sea $X^{(k')}$ la solución cercenada de la empresa

K .

Entonces

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i \in \pi} P_i^* a_{ij} - w^* l_j \\
 &= \sum_{i \in \pi} P_i^* a_{ij} - w^* l_j \\
 &< P^* b_j
 \end{aligned}$$

Es decir $X^{(K)}$ es factible para el problema cercenado

Ahora bien

Si $i \in \pi$

$$\begin{aligned}
 r_i &= P_i^* - P^* A^* - w^* l_i = P_i^* - \sum_{j \in \pi} P_i^* a_{ij} - w^* l_i \\
 &= P_i^* - \sum_{j \in \pi} P_i^* a_{ij} - w^* l_i = P_i^* - P^* A^* - w^* l_i
 \end{aligned}$$

Sea $X(i) \in R^n$ dado por

$$\begin{aligned}
 X_i(i) &= X_i^{(K)} \text{ si } i \in \pi \\
 X_i(i) &= 0 \text{ si } i \in \pi^c
 \end{aligned}$$

Entonces

$$P^* X(i) < P^* B^* X^{(K)}$$

por tanto X^k es factible en el problema original abordado por la empresa K. Es decir

$$[P^* (I^* - A^*) - w^* l^*] X^{(K)} > [P^* (I^* - A^*) - w^* l^*] X^{(K)}$$

y $X^{(K)}$ es solución al problema cercenado.

En la situación cercenada del consumidor v habría tenido el ingreso

$$\begin{aligned}
 \Delta^{(K)} &= \sum h_{vk} [P^* (I^* - A^*) - w^* l^*] X^{(K)} \\
 &= \sum h_{vk} [P^* (I^* - A^*) - w^* l^*] X^{(K)} = \Delta^{(K)}
 \end{aligned}$$

y por tanto elegiría del mismo modo que en la situación completa.

Finalmente

$$\begin{aligned}
 S^* &\leq (I^* - A^*) X^* \\
 I^* X^* &\leq \sum (J - d^{(K)})
 \end{aligned}$$

Por tanto el equilibrio completo induce un equilibrio cercenado. Q.E.D.

Consideraremos que la economía está en equilibrio, que sólo existe una tasa de ganancia, y además que $X_i^{(j)}$ está bien determinada. Estaremos considerando la economía E^1 , donde todas las cantidades A_i, B_i, I_i^1, S_i^1 , etc. son cantidades endógenas. Es decir, sólo consideraremos una tasa de ganancia para la economía E^1 para cuando la tasa r es positiva o es cero.

111.4.1 PRECIOS DE EQUILIBRIO PARA $R \geq 0$.

El teorema que nos dice como son las cantidades de producción en el equilibrio, sólo considera dos casos para cuando se tenga $X_i^{(j)} > 0$ y una misma tasa de ganancia, para todas estas cantidades.

Sea $\pi = \{i = 1, \dots, M \mid X_i^{(j)} > 0\}$

Tenemos que $r > 0$ si $i \in \pi$ y con lo cual sólo se considera el caso I y el caso IV.3.

No necesariamente la cardinalidad de π en ambos casos es igual, pero el análisis que se desarrolla es el mismo, sólo lo haremos, sin pérdida de generalidad para el caso I, comencemos.

Del párrafo anterior hemos dicho que la tasa de ganancia tiene la siguiente expresión

$$r = (P_i^1 - P^1 A_i^1 - w^1) / (P^1 B_i^1) \text{ donde } i \in S$$

esta expresión puede ser escrita como

$$r = (P_i^1 - \sum_j P_j^1 a_{ij} - w^1) / (\sum_j P_j^1 b_{ij})$$

Notemos que aquí j corre de 1 a M e $i \in S$, en el equilibrio la cardinalidad de S no es M , pero esto no es t problema, como sólo estamos considerando la situación de equilibrio para la cual se tenga una producción positiva. Si i no está en S se tiene que $X_i^{(j)} = 0$, pero esto implica que j no se usa en la producción, i.e. $a_{ij} = 0$, con lo cual tenemos que el sistema se reduce a

$$r = (P_i^1 - P^1 A_i^1 - w^1) / (P^1 B_i^1)$$

$$= (P_i^1 - \sum_j P_j^1 a_{ij} - w^1) / \sum_j P_j^1 b_{ij}, \text{ con } i \in S$$

entonces $w_i > 0$ y si $w_i = 0$ entonces $(w_i / w_j) =$

con lo cual se tiene el siguiente

El sistema de ecuaciones es

Este sistema es equivalente a

$$w_i l_i = P_i A_i - r P B_i, \quad i \in \pi$$

Como se supone que estamos en equilibrio, es o, vemos ambos casos.

Supongamos que se está en equilibrio con $w_i > 0$, esto quiere decir que la oferta y demanda de trabajo se igualan.

Hacemos

$$P_i = (P_i / w_i) \quad \text{con } i \in \pi$$

se sigue que

$$l_i = P_i - P A_i - r P B_i, \quad i \in \pi$$

Escribiendo este sistema en forma desarrollada

$$l_1 = P_1 - P A_1 - r P B_1$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$l_n = P_n - P A_n - r P B_n$$

lo cual en forma matricial es

equivalente a decir

$$I = P - PA' - rPB'$$

Este es un sistema que tiene la forma de los analizados en la sección de economías. Si la matriz $A + rB$ es conectada no negativa y si $l > 0$ entonces el que $P > 0$ es equivalente a decir que $L(A + rB) < 1$.

Teorema: Supongamos que estamos en el equilibrio.

Sea $A' + rB'$ conectada no negativa y $w \geq 0$.

Los precios $P > 0$ del equilibrio se obtienen para r tal que

$$L(A' + rB') < 1.$$

Demostración: Nos remitimos a los teoremas ya probados.

La consideración del capital fijo, hace que puedan existir tasas de ganancias negativas para los cuales se tiene un precio positivo, el siguiente ejemplo ilustra lo anterior.

$$A = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/16 \\ 1/4 & 1/32 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/8 \\ 1/2 & 1/16 \end{bmatrix}, \quad l = (1/4, 1/3)$$

Tanto la matriz A como la matriz B tienen raíces menores que 1.

$$|lI - B| = l^2 - (5/16)l - (3/64)$$

con lo cual,

$$l_1 = (5 + \sqrt{73})/32 \quad l_2 = (5 - \sqrt{73})/32$$

Por tanto A es conectada no negativa y sus raíces son menores que 1.

El sistema de precios queda

$$(P_1, P_2) \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/8 & 1/16 \\ 1/4 & 1/32 \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} 1/4 & 1/8 \\ 1/2 & 1/16 \end{bmatrix} \right] = (1/4, 1/3)$$

el cual es analogo

$$P_1(7/8 - r/4) + P_2(-1/4 - r/2) = 1/4$$

$$P_1(-1/16 - r/8) + P_2(31/32 - r/16) = 1/3$$

de aquí se tiene

$$P_1(r) = (2/3)(125 + 58r/213 - 92r - 12r^2) \text{ y}$$

$$P_2(r) = (4/3)(59 - 10r/213 - 92r - 12r^2)$$

resolviendo los diferentes casos para los cuales se tiene P_1 y $P_2 > 0$ tenemos que

$$r \in (-2.15, 1.86).$$

Ahora suponemos que estamos en equilibrio con $w^i = 0$. Esto implica que la oferta de trabajo es mayor o igual a la demanda, aquí el sistema

$$w^i_1 = P_i^i - P^{ii}A^i - r P^{ii}B^i \text{ con } i \in \pi$$

se reduce a

$$P_i^i - P^{ii}A^i - r P^{ii}B^i = 0 \text{ con } i \in \pi$$

pero esto es equivalente a

$$P^{ii} = P^{ii}(A^i + rB^i)$$

de lo cual se concluye que $L(A^i + rB^i) = 1$.

Por otro lado definamos la tasa de ganancia r_{max}

$$\text{Definición: } r_{\dots} = \text{Sup } \{ r \mid L(A^i + rB^i) \}$$

Como la función dominante es creciente y continua r_{max} es tal que

$$L(A^i + rB^i) = 1$$

Pero si $L(A^i + rB^i) = 1$ por los teoremas de matrices conectadas no negativas tenemos que existe $P_{\dots} > 0$, con la hipótesis de que $r_{\dots} > 0$, además por los mismos resultados

$$r_{\dots} > 0 \iff L(A^i) < 1.$$

Teorema: Si la economía está en equilibrio y A^* de conectada no puede ser r_{max} .

Demostración: Para la demostración de "cualquier lado" se tiene que $r_{max} > 0$ ya que estamos en equilibrio con $i \in S$.

\Rightarrow) Supongamos $w^i = 0$. Entonces el sistema de precios es

$$P_i^* - P^{**}A^i - rP^{**}B^i = 0 \text{ con } i \in \pi$$

escribiéndolo en forma matricial

$$P^{**} = P^{**} (I' - A')$$

esto se cumple con $P^{**} > 0$, por tanto

$$L(A' + rB') = 1$$

pero la función dominante es creciente y continua, esto la hace inyectiva, y concluimos que

$$r = r_{max}$$

\Leftarrow) supongamos $w^i > 0$. Aquí el sistema de precios que se obtiene es

$$w^i l_i = P_i^* - P^{**}A^i - rP^{**}B^i \quad i \in \pi$$

nuevamente haciendo $P_i^* = (P^*/w^i)$, entonces $(A' + rB')$ es conectada por tanto si $l \geq 0$ existe un $P^{**} > 0$, pero esto implica que

$$L(A' + rB') < 1$$

lo cual es una contradicción, por la definición de r_{max} .

Corolario: Si la economía está en equilibrio y A' es conectada. Entonces si $r = r_{max}$ se tiene $P_i^{**} > 0$ y $w^i = 0$.

B.III.4.2 PRECIOS DE EQUILIBRIO PARA $R=0$.

El segundo caso supone que para todas las ramas de la economía la ganancia es cero, y ésta es la única, y que en esta situación se tiene una producción positiva.

El teorema que se desprende del lema de Neyman y Pearson y su generalización nos dice que en el equilibrio se puede tener una producción positiva

... el caso II, en el cual se tiene $r_i = 0$ con $\alpha_i > 0$. Nuevamente la cardinalidad de π es la misma en ambos casos, pero el análisis que se realiza en ambos casos es similar, por lo cual sólo lo haremos para el caso II.

El que toda la ganancia sea negativa quiere decir que

$$r_i = P_i' - P''A'' - w'1_i, \text{ con } i \in \pi$$

Puede ocurrir que la rama i requiera de la mercancía j para su producción, pero se puede tener $X^{(j)} = 0$, con lo cual no se produjera j pero entonces tampoco se requiere para la producción de i . Al estar en equilibrio con una tasa de ganancia nula, las mercancías que no se producen no son necesarias. Así al considerar una economía donde se tienen mercancías que se producen, se tiene

$$r_i = P_i' - P''A'' - w'1_i = 0 \text{ con } i \in \pi$$

el cual es equivalente

$$w'1_i = P_i' - P''A'' \text{ con } i \in \pi$$

el cual es equivalente

$$w'1' = P''(I' - A')$$

Proposición: Suponga que la economía está en equilibrio con $r = 0$ y A' conectada.

$$\text{Si } w' = 0 \iff L(A') < 1$$

$$w' = P' - P'' - rA'$$

Haciendo $P'' = (P''/w')$ se tiene

$$1' = P'(I' - A')$$

sabemos que si $1' \geq 0$ existe $P'' > 0$ que satisface el sistema anterior, pero esto es equivalente a pedir que $L(A') < 1$.

\Leftarrow Supongamos que $w' = 0$, haciendo los mismos pasos anteriores tenemos que

$$P'' = P''A'$$

con lo cual $L(A') < 1$,

pero esto es una contradicción.

Corolario: Si la economía está en equilibrio con $r = 0$.

Supongamos A' conectada con $L(A') < 1$. Entonces $w' > 0$ y $P'' > 0$.

La teoría de precios presentada aquí difiere en forma sustancial de la desarrollada por los teóricos del equilibrio en su forma clásica. Para la determinación de los precios no entran consideraciones de oferta y demanda, sino únicamente consideraciones técnicas.

B.III.5. CANASTAS DE MERCANCIAS QUE MAXIMIZAN LA FUNCION DE UTILIDAD EN EL EQUILIBRIO

Considerando que estamos en el equilibrio, con una única tasa de ganancia y donde los precios son positivos, y además las mercancías existentes son las que son producidas, lo que haremos es investigar que tipo de paquetes de mercancías son los que maximizan la función de utilidad U'' .

La dinámica del modelo explica que cuando cada familia maximiza su utilidad, éstas poseen sus ingresos correspondientes, y esto se da al final de cada periodo de producción, así cada empresa ha elegido su plan de producción que maximiza su ganancia y lo ha realizado, además cada familia ha

pueden reclamar la parte de las ganancias que les corresponden por ser accionistas de las empresas y también su ingreso que obtienen por vender su fuerza de trabajo. al sumar estas dos cantidades obtienen el ingreso total que se destina a la compra de las distintas mercancías producidas, repetimos sólo veremos como se resuelve tal situación en el caso en que r este entre cero y r_{max} con las consideraciones adicionales sobre A' y B' .

Primero probaremos que la ganancia de cada empresa depende de su capital y es proporcional a este; obtendremos una expresión matemática para la ganancia y con esto pasaremos a resolver el problema planteado arriba.

Lema: En el equilibrio

Si $0 < r < r_{max}$ Entonces $g_{(k)} = r P'' Q^{(k)}$

Demostración: Por la definición de ganancia tenemos que

$$g_{(k)} = [P''(I' - A') - w'l'] X^{(k)} \quad k = 1, \dots, m$$

esto es para toda $X^{(k)}$ factible. sin pérdida de generalidad supongamos que el equilibrio existe para alguna r entre cero y r_{max} . Las cantidades $X^{(k)}$ que maximizan la ganancia son tales que

$$P'' B' X^{(k)} = P'' Q^{(k)}$$

Como $0 < r < r_{max}$, se satisface la ecuación

$$[P''(I' - A') - w'l'] = r P'' B'$$

multiplicando por $X^{(k)}$ de ambos lados

$$[P''(I' - A') - w'l'] X^{(k)} = r P'' B' X^{(k)}$$

multiplicando a la segunda ecuación que se da en la argumentación de esta demostración tenemos

$$r P'' B' X^{(k)} = r P'' Q^{(k)}$$

Por tanto

$$g_{(k)}(X^{(k)}, r) = r P'' Q^{(k)}$$

Si $r = 0$, entonces $P''(I' - A') = 0$ y por tanto

$$g_{(k)}(X^{(k)}, 0) = 0$$

dada por el lema. Q.E.D.

Supongamos que $(d^{(v)}, S_{(v)})$ son cantidades de demandado concuerdan en el equilibrio. Entonces estas cantidades tienen que ser solución al problema

$$\max U^{(v)}(d^{(v)}, S_{(v)})$$

$$\text{sujeito a } (d^{(v)}, S_{(v)}) \in C^{(v)}$$

donde

$$C^{(v)} = \{ (d^{(v)}, S_{(v)}) \in \Omega^{(v)} \mid (w^v, P^v)(d^{(v)}, S_{(v)})$$

$$\leq w^v J + r \sum h_{v,k} P^v Q^{(v)} \}$$

Definición; Para $v = 1, \dots, n$ llamemos

$$C^{(v)*} = \{ (d^{(v)}, S_{(v)}) \in \Omega^{(v)} \mid (w^v, P^v)(d^{(v)}, S_{(v)}) = w^v J + r \sum h_{v,k} P^v Q^{(v)} \}$$

El conjunto $C^{(v)*}$ no es más que una parte de la frontera de $C^{(v)}$

Teorema: Si $(d^{(v)}, S_{(v)})$ es solución al problema que se plantea cada $v = 1, \dots, n$. Entonces, si $U^{(v)}$ es estrictamente cóncava se tiene que $(d^{(v)}, S_{(v)}) \in C^{(v)*}$ y además estas cantidades son únicas.

Demostración: Denotemos a

$$I^v = w^v J + r \sum h_{v,k} P^v Q^{(v)}$$

Supongamos que $(d^{(v)}, S_{(v)}) \in C^{(v)*}$ es solución del problema pero que $(d^{(v)}, S_{(v)})$ no está en $C^{(v)*}$. Entonces ocurre que

$$(w^v, P^v)(d^{(v)}, S_{(v)}) < I^v$$

Debido a el principio de la no saciedad existe otro paquete de mercancías $(d^{(v)*}, S_{(v)*})$ tal que $(d^{(v)}, S_{(v)}) \leq (d^{(v)*}, S_{(v)*})$, sólo basta construir uno de tales paquetes que sea factible. Sin pérdida de generalidad supongamos que $P_{i'}^v > 0$.

Sea

$$(d^{(v)*}, S_{(v)*}) = \begin{cases} d^{(v)*} = d^{(v)} \\ S_{i',(v)*} = S_{i',(v)} \\ S_{j,(v)*} = S_{j,(v)} + \delta \text{ con } \delta > 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & (w', P') (d^{(w', P')}, S_{(w', P')}) = (w', P') (d^{(w', P')}, S_{(w', P')}) + P_1' \lambda \\
 & = (w', P') (d^{(w', P')}, S_{(w', P')}) + (1 - (w', P') (d^{(w', P')}, S_{(w', P')}) / P_1') P_1' \\
 & = 1'
 \end{aligned}$$

Es claro que $(d^{(w', P')}, S_{(w', P')}) \geq (d^{(w', P')}, S_{(w', P')})$

Por tanto

$$U^{(w', P')} (d^{(w', P')}, S_{(w', P')}) > U^{(w', P')} (d^{(w', P')}, S_{(w', P')})$$

Pero esto quiere decir que $(d^{(w', P')}, S_{(w', P')})$ no es solución al problema del consumidor v.

Por tanto si $(d^{(w', P')}, S_{(w', P')})$ es solución se tiene que

$$(w', P') (d^{(w', P')}, S_{(w', P')}) = w'J + r \sum_{i=1}^n P_i' Q_i^{(w', P')}$$

Sólo falta probar la unicidad

Supongamos que $(d^{(w', P')}, S_{(w', P')})$ y $(d^{(w', P')}, S_{(w', P')})$ son soluciones y ambas se encuentran en $C^{(w', P')}$

El conjunto $C^{(w', P')}$ es claramente convexo. Por tanto

si $\alpha \in [0, 1]$

$$\alpha (d^{(w', P')}, S_{(w', P')}) + (1 - \alpha) (d^{(w', P')}, S_{(w', P')}) \in C^{(w', P')}$$

aplicando $U^{(w', P')}$ a este elemento

$$U^{(w', P')} (\alpha (d^{(w', P')}, S_{(w', P')}) + (1 - \alpha) (d^{(w', P')}, S_{(w', P')})) >$$

$$\alpha U^{(w', P')} (d^{(w', P')}, S_{(w', P')}) + (1 - \alpha) U^{(w', P')} (d^{(w', P')}, S_{(w', P')})$$

pero debido a que $(d^{(w', P')}, S_{(w', P')})$ y $(d^{(w', P')}, S_{(w', P')})$ son soluciones se tiene que

$$U^{(w', P')} (d^{(w', P')}, S_{(w', P')}) = U^{(w', P')} (d^{(w', P')}, S_{(w', P')})$$

Por tanto

$$U^{(w', P')} (\alpha (d^{(w', P')}, S_{(w', P')}) + (1 - \alpha) (d^{(w', P')}, S_{(w', P')}))$$

$$> U^{(w', P')} (d^{(w', P')}, S_{(w', P')})$$

Pero esto implica que las soluciones propuestas no son tales.

... el equilibrio de cantidades de mercancías en el mercado. Si no se le pide a la función U^i que sea estrictamente concava no se asegura la unicidad.

B.iii.b CANTIDADES DE PRODUCCIÓN QUE EN EL EQUILIBRIO IGUALAN A LA DEMANDA...

Nuevamente, esta problemática será abordada bajo la hipótesis de que la economía E^i con tasa de ganancia nula o positiva, sólo se consideran las mercancías que son producidas, etc.

Si $r > 0$ las cantidades de producción que obtienen todas las empresas es

$$\sum X^{(k)} = X^i$$

donde $X^{(k)}$ es tal que $P^{(k)}B^i X^{(k)} = P^{(k)}Q^{(k)}$ para $k = 1, \dots, n$.

Luego la producción destinada al consumo es

$$X^i - AX^i$$

Esto lo hacen las empresas sin contemplar si la producción neta cubrirá la demanda de los consumidores.

Por otro lado se conforma la demanda de los consumidores. Si $(d^{(v)}, S_{(v)}^i)$ es tal que maximiza la función de utilidad de cada $v = 1, \dots, n$ lo que descansarían todas las familias y lo que se demandara de las mercancías es

$$d^i = \sum d^{(v)}$$

$$\text{y } S^i = \sum S_{(v)}^i$$

Si todo lo demandado es ofrecido debe ocurrir que

$$S^i \leq X^i - AX^i$$

$$\text{y } 1'X^i \leq nJ - d^i$$

equilibrio, con $r = 0$ y A^* conectada no negativa.

$$X' = (I - A^*)^{-1} S' \quad y \quad 1'X' = \sum (J - d^{(i)})$$

Proposición: Toda A^* con $L(A^*) < 1$, $r = 0$, $P(A^*) > 0$ y A^* conectada no negativa, es un equilibrio con $r = 0$ y A^* conectada no negativa.

$$X' = (I - A^*)^{-1} S' \quad y \quad 1'X' = \sum (J - d^{(i)})$$

$$(I - A^*)^{-1} S' = X' \quad y \quad 1'X' = \sum (J - d^{(i)})$$

en conclusión

$$X' = (I - A^*)^{-1} S' \quad \text{D.E.D.}$$

Proposición: Supongamos que se está en equilibrio con $r = 0$, A^* conectada y $L(A^*) < 1$, nuevamente si X' y S' son los vectores de oferta y demanda en la economía. Entonces se satisface la ecuación

$$X' = (I - A^*)^{-1} S' \quad y \quad 1'X' = \sum (J - d^{(i)})$$

Demostración: La prueba es análoga a la de la última proposición.

siguientes elementos:

$M+1$ mercancías

m firmas

$A = (a_{ij})$ matriz de insumo.

$B = (b_{ij})$ matriz de capital fijo.

$B > A$.

$l > 0$. vector de trabajo vivo

$Q^{(k)} > 0$ vector de recursos iniciales para la empresa K .

n familias

Para cada v , existe h_{vk} tal que

$h_{vk} > 0$ y para cada $K = 1, \dots, m$, $\sum_{v=1}^n h_{vk} = 1$.

Para cada $v = 1, \dots, n$ existe U^v función de utilidad estrictamente concava.

Además es válido el principio de la no saciedad.

Teorema: Sea $0 < r < r_{\dots}$, y A conectada no negativa.

1. Si $L(A+rB) < 1$ el sistema

$$w1 = P(I - A - rB)$$

tiene solución positiva (w^1, P^1) para $r < r_{\dots}$.

2. Si $r = r_{\dots}$, la solución (w^1, P^1) es tal que $w^1(r_{\dots}) = 0$ y $P^1(r_{\dots}) > 0$, $(L(A+rB) < 1)$

Denotemos en adelante a $P(r)$ y $w(r)$ la solución a el sistema de precios para $r \in [0, r_{\dots}]$.

Para esta economía a cada individuo lo podemos asociar la cantidad

$$\Delta^{(v)}(r) = r P(r) \sum_{k=1}^m h_{vk} Q^{(k)}$$

Se conocen los precios para el intervalo cerrado $[0, r]$, las cantidades que intervienen en los intercambios de las mercancías determinadas: r, h, r, U^0 son conocidos.

Si U^0 es estrictamente cóncava, podemos calcular el conjunto

$$C^0 = \{ (d^0(r), S^0(r)) > 0 \mid (w(r), P(r)) (d^0(r), S^0(r)) < wJ + \pi(r) \}$$

y determinar para cada $r \in [0, r_0]$ el único paquete de descanso-consumo que maximiza U^0 y este cumple

$$(w(r), P(r)) (d^0(r), S^0(r)) = wJ + \pi(r)$$

Así podemos -para cada $r \in [0, r_0]$ - determinar la demanda de cada una de las mercancías existentes en la economía, y también al mismo tiempo la cantidad que los individuos aportarán a el trabajo, la demanda de la mercancía j y la cantidad de tiempo descansada es

$$S_j(r) = \sum_{i=1}^n S_{ij}(r)$$

$$d_j(r) = \sum_{i=1}^n d_{ij}(r)$$

Podemos calcular el vector de producción que las empresas deben aportar para satisfacer a la demanda, esta $X(r)$ debe de cumplir que

$$S(r) = (I-A) X(r)$$

este sistema tiene solución pidiendo que $L(A) < 1$.

Es decir si pedimos que $L(A+rB) < 1$, siempre podemos garantizar la existencia de un vector $(w(r), P(r))$ que satisface la ecuación de los precios: el ingreso de cada familia por ser accionista será $\pi(r)$, con esto se determina la existencia de el único paquete de descanso-consumo $(d^0(r), S^0(r))$ que maximiza U^0 , con esto queda determinado $d_j(r)$ y $S_j(r)$.

Para cuando $L(A+rB) = 1$, $r = r_0$ se tiene que $w(r_0) = 0$ y $P(r_0) > 0$, y todas las demás cantidades se siguen de los argumentos dados anteriormente.

Observese que para $r = 0$, el sistema que se tiene es

$$r_1 = P(A+B)$$

Si se tiene $L(A) < 1$ el sistema $L(r) > 0$ y $r(0) > 0$, pero esto es un caso particular de $L(A+rB) < 1$ para cuando $r = 0$.

Lo que haremos en esta parte del trabajo es probar que existe un $r \in [0, r_{\dots}]$, para el cual siempre se tiene la existencia de un equilibrio:

$$E = [(w(r), P(r)); (d_0^{(1)}(r), (S_1(r)), \dots, (d_0^{(m)}(r), S_m(r)); (X^{(1)}(r)), \dots, (X^{(m)}(r))].$$

Probaremos primero que el vector $X(r)$ que hace que se iguale la oferta con la demanda en terminos sociales se puede repartir entre las m empresas de tal manera que cada quien maximice su beneficio.

Tengamos presente la siguiente notación.

$$Q = \sum_{i=1}^n Q^{(i)}$$

$$X = \sum_{i=1}^m X^{(i)}$$

$$S = \sum_{i=1}^n S_i$$

$$d_0 = \sum_{i=1}^m d_0^{(i)}$$

etc

Es decir son cantidades totales las cuales han sido determinadas por metodos exógenos o endógenos.

Lema: Supongamos que son validas las proposiciones para la economía E

$$(1.i) \text{ Si } 0 < r < r_{\dots} \quad P(r) \geq X(r) = P(r) \cdot Q$$

$$(1.ii) \text{ Si } r = 0 \quad P(0) \geq X(0) < P(0) \cdot Q$$

$$(2.i) \text{ Si } 0 < r < r_{\dots} - 1 \quad X(r) = nJ - d_0(r)$$

$$(2.ii) \text{ Si } r = r_{\dots} - 1 \quad X(r) < nJ - d_0(r)$$

Si se acepta o rechaza una hipótesis de 1 y otra de 2.

Entonces existe una forma de dividir $X_i(r)$ en m partes

$X_i^{(k)}(r)$ partes tal que

$$\sum_{k=1}^m X_i^{(k)}(r) = X_i$$

donde estas cantidades conjuntamente $(w(r), P(r))$ y las cantidades S_i que conforman S constituyen un conjunto de cantidades de equilibrio.

Demostración: Se analizarán tres casos que se desprenden de la hipótesis anterior

Caso 1. $r = r_{\dots}$ y aquí se cumple la hipótesis (1.i) y (2.ii)

Caso 2. $0 < r < r_{\dots}$ se cumple cuando (1.i) y (2.i)

Caso 3. $r = 0$, aquí tenemos (1.ii) y (2.i)

Los casos son todos por cubrir, se barre a todo el intervalo $[0, r_{\max}]$ y cada caso es mutuamente excluyente de los otros dos.

Caso 1. Si $L(A + rB) = 1$, el sistema

$$w_1 = P - PA - rPB$$

tiene solución $w(r_{\dots}) = 0$ y $P(r_{\dots}) > 0$

aquí se satisface

$$P(r_{\dots}) - P(r_{\dots})A - w(r_{\dots})1 = r_{\dots} P(r_{\dots}) B$$

por lo que la i -ésima ecuación de este sistema queda

$$P_i(r_{\dots}) - P(r_{\dots})A^i - w(r_{\dots})1 = r_{\dots} P(r_{\dots}) B^i$$

si denotamos a $\alpha_i = P(r_{\dots}) B^i$ y $\tau_i = P_i(r_{\dots}) - P(r_{\dots})A^i - w(r_{\dots})1$, se tiene que en toda la economía ocurre que

$$r_{\dots} = (\alpha_i / \tau_i) \quad i = 1, \dots, M.$$

Con lo cual tenemos que la tasa de ganancia es única. El ingreso de cada familia es

$$P(r_{j...}) = r_{j...} P(r_{j...}) + B_j Q_j$$

conociendo U^j estrictamente concava, se puede determinar un único paquete de descanso-consumo

$$(d_0^j(r_{j...}), S_{j...}(r_{j...})) \text{ tal que}$$

$$(w(r_{j...}), P(r_{j...})) (d_0^j(r_{j...}), S_{j...}(r_{j...})) = w_j + U^j(r_{j...})$$

Con esto queda determinada la demanda para cada una de las mercancías y como se tiene $P_j(r_{j...}) > 0$ para toda j , igualando la oferta y la demanda se tiene

$$X_i(r_{j...}) - \sum_{k=1}^m a_{ik} X_k(r_{j...}) = S_i(r_{j...}) \text{ con } i = 1, \dots, M$$

Este sistema tiene solución X si $L(A) < 1$, con A conectada no negativa.

Solo basta probar que $X_i(r_{j...})$ puede ser repartida entre las m empresas, de tal manera, que en efecto, la cantidad $X_i^{(k)}(r_{j...})$ puede ser producida por la empresa K y maximiza su ganancia.

La hipótesis (1.1) afirma que cuando se tiene la ganancia $r_{j...}$ se cumple

$$P(r_{j...}) B X(r_{j...}) = P(r_{j...}) Q$$

aquí las $X_i(r_{j...})$ son las cantidades que igualan la oferta con la demanda.

Ahora hacemos, para cada $K = 1, \dots, m$

$$L(k) = (P(r_{j...}) Q^{(k)} / P(r_{j...}) Q)$$

El numerador de este cociente es el capital de la empresa K medidos en terminos de precios dados por $r_{j...}$. El denominador es el precio del capital que poseen todas las empresas.

Construimos el vector

$$X^{(k)}(r_{j...}) = L(k) X(r_{j...})$$

Probaremos que para toda K , este plan de producción es factible y además es tal que maximiza la ganancia g_k .

Recordemos que el conjunto de planes de producción factibles que maximizan la g_k son tales que

Por lo tanto, el conjunto de precios que maximiza la producción que se puede producir está dentro del conjunto descrito.

$$\begin{aligned}
 P(r_{\dots})B X^{(k)}(r_{\dots}) &= P(r_{\dots})B(L(k) X(r_{\dots})) \\
 &= L(k)P(r_{\dots})BX(r_{\dots}) \\
 &= (P(r_{\dots}) Q^{(k)}/P(r_{\dots})Q) \\
 P(r_{\dots})BX(r_{\dots}) & \\
 &= P(r_{\dots})Q^{(k)}
 \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n X(k)(r_{\dots}) &= \sum_{k=1}^n L(k)X_1(r_{\dots}) \\
 &= X_1(r_{\dots}) \sum_{k=1}^n L(k) \\
 &= X_1(r_{\dots}) \sum_{k=1}^n (P(r_{\dots}) Q^{(k)}/P(r_{\dots})Q) \\
 &= X_1(r_{\dots}) (P(r_{\dots}) \sum_{k=1}^n Q^{(k)}/P(r_{\dots})Q) \\
 &= X_1(r_{\dots})
 \end{aligned}$$

Con esto, la cantidad que produciría la empresa k , al conjuntarse con la producción de las demás, es tal que igualan la oferta con la demanda. Solo falta probar que la demanda de trabajo es cubierta con una oferta; pero por hipótesis 2.ii se tiene

$$1 X(r_{\dots}) < n J-d_0(r_{\dots})$$

Por tanto para $r = r_{\dots}$ se pueden construir $P(r_{\dots})$, $w(r_{\dots})$, que son solución a el sistema de precios, además existen cantidades $(d_0^{(w)}(r_{\dots}), S_0(r_{\dots}))$ que maximizan $U^{(w)}$ y g , respectivamente y donde todo lo demandado es cubierto por una oferta.

Caso 3: Supongamos $r = 0$. Se cumple (1.i) y (2.i) se tiene el sistema

$$w \cdot 1 = P(I-A)$$

$$\text{si } L(A) < 1, w(0) > 0 \text{ y } P(0) > 0$$

aquí podemos tener una única tasa de ganancia si $Q_1 > 0$.

Nuevamente

$$w^{(1)}(0) = 0$$

el vector de descanso consumo que maximiza $U(v)$ es tal que

$$(d_0^{(1)}(0), S_0^{(1)}(0)) (w(0), P(0)) = w(0)J$$

Al ser igualada la oferta con la demanda en todas y cada una de las mercancías tenemos

$$(I-A) X(0) = S(0)$$

$$IX(0) = n J - \sum_{i=1}^n d_i^{(i)}$$

la primera igualdad es válida si $L(A) < 1$, la segunda es válida por hipótesis. Solo basta probar que $X_i(0)$ puede ser dividida entre las m firmas y que es factible para estas. Nuevamente llamemos

$$L(k) = (P(0) Q^{(k)} / P(0) Q^{(k)}) \text{ y}$$

$$X^{(k)}(0) = L(k) X(0)$$

se tiene que

$$P(0)B X^{(k)}(0) = P(0)B(L(k)X(0)) < (P(0)Q^{(k)}/P(0))P(0)Q$$

la desigualdad es debida a la hipótesis (1.ii) y además nuevamente

$$\sum_{k=1}^n X^{(k)}(0) = X_1(0)$$

Caso 2. Tomando las matrices A y B construimos el sistema

$$wI = P - PA - rPB$$

$$\text{Si } L(A+rB) < 1, (w(r), P(r)) > 0$$

y nuevamente

$$r = (\alpha_i, r_i) \quad i = 1, \dots, M$$

el ingreso de la familia y es

$$A = rP(r) \sum_{j=1}^n h_j Q_j^{(n)}$$

determinándose así $(d_j^{(n)}(r), S_j^{(n)}(r))$ que maximiza U^j , con lo cual la demanda de la mercancía j es

$$S_j(r) = \sum_{i=1}^n S_i^{(n)}(r)$$

las $X_i(r)$ que deben producirse para que se cubra la demanda son tales que

$$\sum_{i=1}^n (\delta_{ij} - a_{ij}) X_i(r) = S_j(r)$$

el salario es $w(r) > 0$ y por hipótesis

$$1 \cdot X(r) = nJ - d_0(r)$$

nuevamente llamemos

$$L(k) = (P(r) Q^{(n)} / P(r) Q)$$

y siguiendo los mismos pasos dados anteriormente acabamos.

El caso 1 nos dice que si se tiene una solución para el sistema

$$w1 = P - PA - rPB$$

la tasa de ganancia existente en la economía es única. Para la existencia del equilibrio fue importante que los capitalistas invirtieran todo su capital, y que en el mercado del trabajo, la oferta sea mayor o igual que la demanda.

El caso 2 plantea que se tiene una misma tasa de ganancia en toda la economía, si se tienen precios positivos. El equilibrio existe si los capitalistas invierten todo su capital, y además que la oferta de trabajo sea igual a la demanda.

El caso 3. Si $\alpha_j > 0$, la tasa de ganancia será nula en toda la economía. Se pueden construir cantidades de equilibrio bajo la hipótesis de que la demanda y oferta en el mercado de trabajo se igualen, y si los empresarios, desean emplear o no todo su capital.

La existencia del equilibrio depende como sean

$$P(r) = X(r) - Y(r) \text{ y } Y(r) = P(r)X(r)$$

... (text partially obscured)

Denotaremos a la demanda de trabajo por

$$D(r) = I - X(r)$$

Por otro lado la oferta de trabajo es

$$Q(r) = \sum_{v=1}^n t_v(r) = \sum_{v=1}^n (J - d_v(r)) = nJ - \sum_{v=1}^n d_v(r) = nJ - d_0(r)$$

Lema: Sea $0 < r < r_{max}$

Sean $(w(r), P(r), S(r), X(r), Q, D(r), O(r), \dots)$, cantidades como siempre. Entonces

$$w(r)(Q(r) - D(r)) = r(P(r)X(r) - P(r)Q)$$

Demostración: Para $0 < r < r_{max}$

$$wI = P(r) - P(r)A - rP(r)B \text{ y}$$

$$(w(r), P(r)) (d_v(r), S_v(r)) = wJ + t_v(r)$$

como $d_v(r) + t_v(r) = J$

$$w(r)IX(r) = P(r)X(r) - P(r)AX(r) - rP(r)BX(r)$$

$$-w(r)t_v(r) + P(r)S_v(r) = t_v(r)$$

a la segunda igualdad sumandola sobre i

$$w(r)D(r) = P(r)X(r) - P(r)AX(r) - rP(r)BX(r)$$

$$-w(r)Q(r) + P(r)S(r) = \sum_{v=1}^n t_v(r)$$

tenemos que en este intervalo

$$S(r) = (I - A)X(r) \text{ y}$$

$$\Delta^{(v)}(r) = r \sum_{v=1}^n h_v P(r) Q^{(v)}$$

Por tanto

restando el precio de la demanda a el precio de la

$$w(r)(D(r)-O(r)) = P(r)S(r) - rP(r)BX(r)$$

$$w(r)(D(r)-O(r)) = P(r)S(r) - rP(r)BX(r)$$

$$-P(r)S(r) + rP(r)Q$$

$$= r(P(r)Q - P(r)BX(r)) \quad \text{D.E.D.}$$

Con este lema se pueden reducir las condiciones para la existencia del equilibrio.

Para el caso 1, cuando $r = r_{\max}$ por los teoremas sabemos que $w(r_{\max}) > 0$, pero si tenemos la igualdad

$w(r_{\max})(D(r_{\max}) - O(r_{\max})) = rP(r_{\max})(BX(r_{\max}) - Q)$ teniendo $r_{\max} > 0$ y $P(r_{\max}) > 0$, concluimos que

$$P(r_{\max})BX(r_{\max}) = P(r_{\max})Q$$

asi para que exista el equilibrio basta pedir que

$$D(r_{\max}) \leq O(r_{\max})$$

En el caso 2. Cuando $0 < r < r_{\max}$, se sabe que $w(r) > 0$ y $P(r) > 0$ por lo que si se tiene la hipótesis $O(r) = D(r)$, se tendrá que

$$P(r)BX(r) = P(r)Q.$$

El caso 3. cuando $r = 0$, $w(0) > 0$ y $P(0) > 0$ por lo que $O(0) = D(0)$. Solo basta pedir que

$$P(0)BX(0) \leq P(0)Q$$

y el equilibrio existira.

Corolario: Sean $(w(r), P(r)), S(r), X(r), Q, D(r), O(r)$, cantidades como siempre.

Supongamos que

(a) Si $r = r_{\max}$ $D(r) < O(r)$

(b) Si $0 < r < r_{\max}$ $D(r) = O(r)$

Entonces para cada caso existen cantidades de

$$Q_c(r) = Q(r) - D(r)$$

Corolario: 1. $Q_c(0) = 0$

$$2. \frac{d}{dr}[w(r)Q_c(r)]|_{r=0} = P(0)BX(0) - P(0)Q_c$$

Demostración: 1. Por el lema se tiene

$$w(r)(Q(r) - D(r)) = rP(r)(BX(r) - Q)$$

si hacemos $r = 0$ tenemos que

$$w(0)(Q(0) - D(0)) = 0$$

pero $w(0) > 0$

Por tanto $Q_c(0) = 0$.

$$\begin{aligned} 2. \frac{d}{dr}[w(r)Q_c(r)]|_{r=0} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{w(r)Q_c(r) - w(0)Q_c(0)}{r - 0} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{rP(r)(BX(r) - Q) - 0}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} P(r)(BX(r) - Q) \\ &= P(0)BX(0). \quad \text{Q. E. D.} \end{aligned}$$

Para hacer un resumen de los resultados enunciaremos el siguiente teorema.

Teorema: Supongamos que en cada caso son validas las proposiciones

(a) Si $r = r_{\dots}$, $Q_c(r_{\dots}) > 0$

(b) Si $0 < r < r_{\dots}$, $Q_c(r) = 0$

(c) Si $r = 0$, $\frac{d}{dr}[w(r)Q_c(r)]|_{r=0} < 0$.

Entonces, para cada caso, existen precios, cantidades de descanso consumo y producción tales que cumplen la definición de equilibrio.

tres proposiciones (a), (b), o (c).

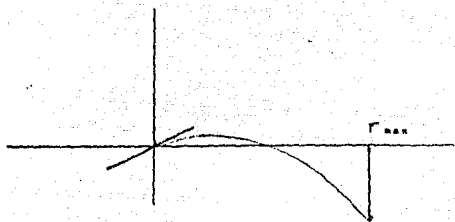
Teorema: Supongamos que θ_0 es continua en $(0, r_{\max}]$.

Si para $r_{\max} > 0$ se tiene que $\theta_0(r_{\max}) < 0$ y

$$d/dr[w(r)\theta_0(r)]|_{r_{\max}} > 0.$$

Entonces existe $r \in (0, r_{\max})$ tal que $\theta_0(r) = 0$

Demostración: Como $\theta_0(0) = 0$ y $d/dr[w(r)\theta_0(r)]|_{r_{\max}} > 0$ esto quiere decir que la función θ es creciente y positiva en una vecindad alrededor del cero. Aplicando el teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe $r \in (0, r_{\max})$ tal que $\theta_0(r) = 0$ Q.E.D



Hemos probado que si no se cumplen las condiciones (a) y (c) simultáneamente, entonces ocurre la condición (b). Con lo cual hemos concluido la existencia del equilibrio.

Una importante para la existencia del equilibrio es la relación que se tiene entre la oferta y la demanda en el mercado de trabajo. Demanda una interrelación sobre el comportamiento de ambas funciones. Los argumentos que se dan se dan una interpretación curística.

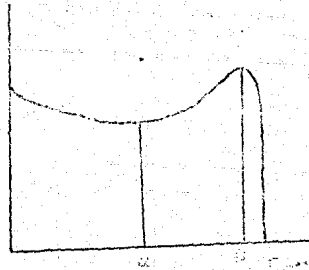
E.V.1 LA FUNCION $O(r)$

Veamos como es el comportamiento de la función oferta de trabajo en el intervalo $[0, r_{max}]$.

La relación existente entre el salario y la ganancia, es que son cantidades inversamente proporcionales. Al crecer una cantidad la otra decrece.

Si la función $O(r)$ toma el valor $r=0$, aquí según los teoremas probados muestran que $w(0) > 0$, con este salario positivo, un cierto número de personas existentes en la economía ofrecerán su fuerza de trabajo. Se puede interpretar esto, como una situación "buena" para los trabajadores.

Conforme la tasa de ganancia crece de cero a r_{max} , el salario va disminuyendo, y para un subintervalo, la gente prefiere no trabajar. Los trabajadores son "flojos" en el sentido de que prefieren realizar la actividad descanso, que el ganar un salario bajo. Pero cuando los salarios "bajan suficientemente", el desempleo no continúa; ahora ocurre que más miembros de la familia deben emplearse para obtener un ingreso que les permita continuar con el nivel de consumo anterior, así mujeres, niños, etc. ofrecen su fuerza de trabajo. En el plano $r \times O(r)$, habrá un mínimo. Conforme r sigue creciendo y se acerca a r_{max} , los salarios siguen bajando hasta el punto en que la fuerza de trabajo ya no puede subsistir, y, entonces la cantidad de trabajo ofrecida baja muy rápidamente a cero. El salario para el cual se tiene que la cantidad ofrecida de fuerza de trabajo cae, está muy cercana r_{max} . Por lo cual la gráfica es como sigue.



En otras palabras:

Si $r=0$, $w(0) > 0$ y por tanto se ofrece una cantidad $D(0)$ de trabajo.

Si $0 < r < \alpha$, entonces los salarios siguen siendo positivos pero menores que antes. en este caso la gente prefiere descansar a ganar un salario bajo. Es decir, con el ingreso que obtienen los que se mantienen trabajando es suficiente para comprar los artículos de subsistencia, llegando a ofrecer la mínima cantidad de fuerza de trabajo en $r=\alpha$.

Si $\alpha < r < \beta$, ya no es posible que los miembros que se han mantenido trabajando obtengan el ingreso necesario para mantener a la sociedad en un nivel de consumo "adecuado". Siendo el salario tan bajo, donde más miembros de la familia entran a el mercado de trabajo, en β los salarios pagados son tan bajos que el consumo que realizan los trabajadores ya no les permite seguir trabajando.

Si $\beta < r < r_{max}$ el desempleo aumenta en forma instantánea. Aquí el salario siendo casi cero, no permite desarrollar consumo alguno.

B.V.2 LA DEMANDA DE TRABAJO $D(r)$

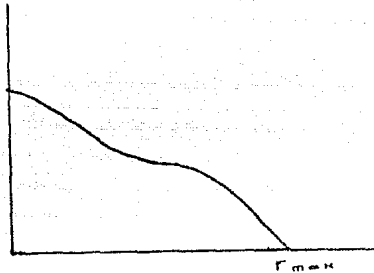
Los únicos demandantes de fuerza de trabajo son las empresas. La demanda de fuerza de trabajo, depende, de cuenta gente sea necesaria para llevar a cabo los planes de producción factibles para las empresas tales que maximicen su ganancia.

La demanda de trabajo depende, entonces, de cual sea los niveles de producción. Pero estos niveles, dependen del consumo que realizarán las familias, y éste a su vez dependerá de los ingresos que poseen. El ingreso proviene de dos fuentes: Por un lado se tiene el ingreso dividido, debido a que son accionistas y por otro a el ingreso que obtienen por

son salariables. Veamos como es la demanda de trabajo en cada caso.

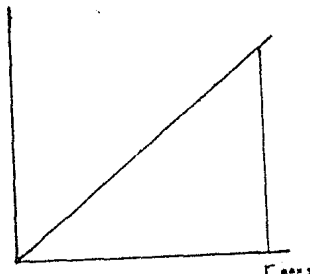
B.V.2.1 DEMANDA DE FUERZA DE TRABAJO QUE SE DERIVA DEL SALARIO

Tomando $w(r)D(r)$, nos dice el ingreso que tiene toda la sociedad por haber vendido su fuerza de trabajo. Debido a el principio de no saciedad, todo este ingreso se destina a el consumo, es decir la demanda de trabajo corresponde a la cantidad $w(r)D(r)$. Así tenemos que la demanda de trabajo que corresponde a cubrir la producción, para satisfacer la demanda realizada por los salarios es aproximadamente multiplicar a $D(r)$ por $w(r)$. La gráfica será entonces.

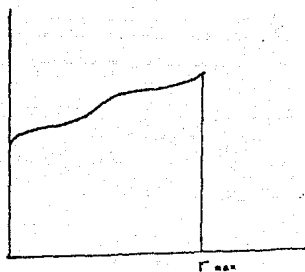


B.V.2.2 LA DEMANDA DEL TRABAJO QUE SE DERIVA DE LAS GANANCIAS

Si $r=0$, el ingreso que se tiene por ser accionista es nulo y con ello la demanda que se genera por esta cantidad también es nula. Si $r>0$ el ingreso que tienen las familias por ser accionista también es positivo, y de nuevo debido a el principio de no saciedad gastarán todo este ingreso en consumo, y se genera una demanda de trabajo para producir las mercancías que se consumirán por esta cantidad. Si r crece el ingreso crece, en consecuencia crece la demanda de trabajo. Esta situación puede ser representada por una línea recta, por lo que entonces la demanda de trabajo generada por los ingresos dividendos es



La suma de las dos gráficas $d(r)$ y $d(r)$ nos determina el nivel total de la demanda de trabajo que se genera por la obtención de salarios y ganancias, y así tenemos que la demanda total es aproximadamente

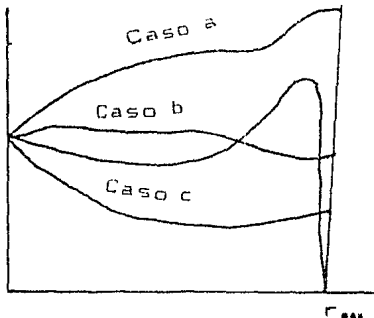


RELACION ENTRE LA OFERTA Y DEMANDA DE TRABAJO

Hemos probado que $\theta_0(0)=0$, donde $\theta_0(r)=D(r)-D(r)$. Con lo cual se tiene que $D(0)=D(0)$.

Los economistas clásicos han hablado de la ley Say para argumentar que siempre toda oferta es cubierta con una demanda, que los precios del salario al ser flexibles llevan a una igualación de su oferta con su demanda, y esto en cada momento. La crítica desarrollada a este planteamiento ha sido planteada por diversos autores, pero se ha reconocido, entre otros muchos, a Keynes como uno de los críticos más agudos de este asunto. Por lo cual no podemos considerar que la oferta se iguale con la demanda como una hipótesis plausible.

De lo que hemos desarrollado hasta aquí, podemos considerar tres casos que son los más relevantes: el primero es que la demanda de trabajo siempre sea mayor que la oferta. El segundo es para el cual haya algunos puntos donde las funciones se igualen. El tercero es para aquél en que la función demanda de trabajo está por abajo de la oferta.



El primer caso corresponde a $\theta(r)=0$, y como

$$w(r)D(r) - P(r) = P(r)(BX(r) - U)$$

se tiene que

$$BX(r) \leq 0$$

Esto puede ser asociado con una economía para la cual es necesaria mucha fuerza de trabajo en relación a la existente y además donde se tiene una subutilización de sus capitales. Esto sólo puede ocurrir en una economía con tecnología poco desarrollada. Al tener $w(r)D(r) < w(r)D(r)$, para llegar a una situación de equilibrio es necesario que la tasa de ganancia tienda a cero.

El caso b es aquél donde existen varios puntos donde se intersectan las funciones de oferta y demanda de trabajo. Un primer punto donde se intersectan las dos funciones es en $r=0$. Pero al crecer r , y disminuir en consecuencia los salarios, la gente decide no trabajar a obtener la paga correspondiente, llega un momento en que nuevamente $\theta(r)=0$. Pero si se sigue disminuyendo más el salario la oferta de trabajo aumentara, el tercer punto de equilibrio es una tasa de ganancia para la cual se tiene un salario casi nulo. El establecimiento de un punto de equilibrio depende de cómo sea la relación de fuerzas entre las organizaciones obreras y las firmas.

Pero la relación que se tiene en una economía con tecnología desarrollada es el caso (c), aquí la población en capacidad de trabajar siempre excede a la demanda. Aquí siempre se tiene la existencia de un ejército industrial de reserva. Los puntos de equilibrio para esta situación, son por un lado la tasa de ganancia cero, y por el otro tasas de ganancias muy cercanas a r_{max} , es decir para salarios casi cero.

Pero para puntos cercanos a r_{max} , la lucha de las organizaciones obreras se intensifica, el motivo es tratar de ganar un salario más alto. Así los puntos de equilibrio económico, para una economía con una tecnología desarrollada, se localizan -según este modelo- para puntos donde el salario es casi nulo.

C.A.1 TEOREMAS SOBRE MATRICES CONECTADAS NO NEGATIVAS.

A denota la matriz de insumo producto, cuyas entradas son a_{ij} , donde $i, j = 1, \dots, n$. Análogamente B denota la matriz de capital fijo cuyas entradas son b_{ij} , análogamente $i, j = 1, \dots, n$. $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ denota el vector de precios de la economía. r es la tasa de ganancia de la i -ésima mercancía. Se considera que A y B son iguales.

La ecuación de precios que se obtiene del modelo cerrado es

$$P = PA + rPB$$

El problema a tratar será: ¿bajo que condiciones sobre A, b y r podemos garantizar que la P que cumple la ecuación anterior es positiva y además única?.

Observemos un primer caso, el cual nos dice cuando no existe solución única para el sistema de precios.

Supongamos que existe una economía E dividida en dos subeconomías E_1 y E_2 , tal que las mercancías de E_1 nunca se utilicen para la producción de las mercancías de E_2 , y las mercancías de E_2 nunca son usadas para la producción de E_1 . En este caso se pueden establecer dos tasas de ganancias r_1 y r_2 para E_1 y E_2 respectivamente con $r_1 \neq r_2$. Aquí no se puede asegurar la existencia de un único P que cumpla la ecuación de precios. Estos casos no serán considerados. Se anula la situación anterior si pedimos que la economía sea conectada.

Definición 1. Decimos que la mercancía C_i es directamente requerida para la producción de la mercancía C_j si $a_{ij} > 0$.

Definición 2. C_i es indirectamente requerida para la producción de C_j si existe una sucesión C₁, C₂, ..., C_n, C_i, tal que cada miembro de la sucesión es directamente requerido para la producción del próximo miembro.

Definición 3. A es conectada (indescomponible, irreducible) si

(i) $a_{ii} > 0$

(ii) para todo (i, j) existe J_1, J_2, \dots, J_n tal que

donde $\dots a_{ij} > 0$.

Una matriz conectada nunca puede ser llevada a una matriz de la forma $\begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix}$ mediante permutaciones de renglones y sus respectivas columnas, donde X y Z son matrices cuadradas.

Es decir, que la matriz A es descomponible si existe una matriz de permutaciones P tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix}$$

Donde X, Y, Z son matrices como antes. Teniendo como base estas definiciones contestaremos a la pregunta realizada anteriormente por medio de una serie de resultados matemáticos.

Lema 1. Sea A una matriz cuadrada, no negativa, conectada. Y sea $X > 0$ tal que $AX > 0$. Entonces $X = 0$

Demostración: Por inducción es fácil ver que para todo N entero positivo, tenemos que $A^N X = 0$.

Análogamente, por inducción podemos probar que la entrada (i, j) de la matriz A^l (con $l \in \mathbb{N}$) se denota como

$$A^l = \left(\sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \sum_{j_3=1}^n \dots \sum_{j_{l-1}=1}^n a_{ij_1} a_{j_1 j_2} a_{j_2 j_3} \dots a_{j_{l-1} n} \right)$$

Para $l=2$ tenemos

$$A^2 = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jn} \right)$$

Por lo cual la expresión es válida para $n=2$.

Supongamos que el argumento es válido para $l-1$

$$A^{l-1} = \left(\sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_{l-2}=1}^n a_{ij_1} a_{j_1 j_2} \dots a_{j_{l-2} n} \right)$$

Denotemos a esta matriz por (C_{ij})

Multiplicando a la matriz A^{l-1} por A tenemos

$A^1 = (\sum C_{i_1, i_2, \dots, i_{l-1}, i_l})$
 Substituyendo los valores C_{ij} en los lugares correspondientes

$$A^1 = (\sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_{l-1}} \sum_{i_l} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_{l-1} i_l} a_{i_l i_1})$$

de aquí podemos concluir que los términos (i, j) de A^1 es precisamente el término dado anteriormente.

Como la matriz A es conectada, para todo (i, j) existe una sucesión j_1, j_2, \dots, j_{l-1} tal que $a_{i j_1} a_{j_1 j_2} \dots a_{j_{l-1} j} > 0$

En términos de las potencias de a , quiere decir que existe un l , natural tal que A^{l-1} tiene la entrada (i, j) positiva. Llamemos la longitud (i, j) al número l_{ij} tal que $a_{i j_1} \dots a_{j_{l-1} j} > 0$

Tomamos el máximo de esas longitudes y denotémosla como L . La matriz A^L es tal que tiene todas sus entradas positivas. Apliquemos X a la matriz A^L . Entonces tenemos que

$$A^L X = 0$$

donde la entrada k -ésima es

$$\sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_{L-1}} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_{L-1} i_L} X_{i_L} = 0$$

Como $\sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_{L-1}} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_{L-1} i_L} > 0$ tenemos que

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0$$

Y como X es mayor o igual que cero se tiene que $X_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Q.E.D

Definición. Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$ y X un vector columna tal que $AX = \alpha X$ en donde α es un escalar. Entonces se dice que X es un vector propio de la matriz A con valor propio α .

Lema 2. Sea A una matriz cuadrada, conectada, no negativa. Entonces existe un número positivo L tal que $AX = LX$, se cumple con $\lambda \geq 0$.

Demostración. Sea $S_n = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^n X_i = 1\}$

Si $X \in S_n$, entonces $AX \geq 0$; ya que si $AX = 0$ por el lema 1 (A conectada, no negativa y $X \geq 0$) tenemos que $X = 0$ lo cual no es posible, ya que $X \in S_n$. $AX < 0$ nunca puede ocurrir, porque $A \geq 0$ y $X \geq 0$.

Sea T transformación lineal tal que

$$T: S_n \longrightarrow S_n$$

$$T(X) = (\tilde{Q} \circ A)(X) \text{ donde}$$

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} X_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni} X_i \end{bmatrix}$$

y

$$\tilde{Q}(Y) = \begin{bmatrix} (Y_1 / \sum_{i=1}^n Y_i) \\ \vdots \\ (Y_n / \sum_{i=1}^n Y_i) \end{bmatrix}$$

En efecto, todo elemento de S_n es enviado a S_n

$$T(X) = \tilde{Q}(AX) = \tilde{Q} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} X_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni} X_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^n a_{1i} / \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} X_i) \\ \vdots \\ (\sum_{i=1}^n a_{ni} / \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} X_i) \end{bmatrix}$$

Obsérvese que

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_{1i} X_i}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} X_i} \right) + \dots + \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_{ni} X_i}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} X_i} \right) = 1$$

los cocientes anteriores tienen sentido. Como $AX \geq 0$ existe j tal que

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} X_i > 0$$

y por tanto

T envía al vector ortante de R en S , en particular envía a 1 en S .

T es composición de funciones lineales continuas: A es continua y $\hat{1}$ es continua, por tanto p es continuo, en particular mapas a S de manera continua en S .

T es sobre: T es composición de transformaciones lineales inyectivas, en consecuencia T es inyectiva, pero la inyectividad en este caso implica la sobrevectividad.

Por otro lado S es compacto y convexo.

Como T es una función lineal continua y sobre, definida sobre un conjunto compacto y convexo, entonces T tiene un punto fijo i.e. existe $X^* \in S$ tal que $T(X^*) = X^*$.

Pero observemos que

$$T(X^*) = \begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^n a_{1i} X_i / \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j) \\ \vdots \\ (\sum_{i=1}^n a_{ni} X_i / \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j) \end{bmatrix} = (1 / \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j) \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} X_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni} X_i \end{bmatrix}$$

$$= (1 / \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j) AX^*$$

Si hacemos $L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j$, tenemos que

$$AX = LX$$

Como $X \in S$, se tiene que $X \geq 0$, y es claro que $L > 0$.
Q.U.D.

Lema 3. Sea A matriz cuadrada, conectada, no negativa. Supongamos que X y L son los del Lema 2. Entonces $X > 0$.

Demostración. En el lema anterior teníamos que

$$AX = (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j) X$$

o escrito en forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{kj} X_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} X_j \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

En un k arbitrario entre cero y n , tenemos

$$\sum_{i=1}^n a_{ki} X_i = 0$$

y como $A > 0$ y $X \geq 0$, tenemos que

$$a_{ki} X_i = 0 \text{ para } i = 1, \dots, n$$

el renglón k -ésimo de A es diferente de cero
por tanto $X_i = 0$ para $i = 1, \dots, n$

pero en el lema 2 habíamos probado que $X \geq 0$ por
tanto tenemos una contradicción.

Es decir, si suponemos que tenemos una entrada
de $X = 0$, el vector X' será el vector 0 . QED

Lema 4. Sea A matriz de $n \times n$, conectada no
negativa.

Supongamos que $AX = LX$ con $L > 0$ y X positivo
entonces L y X son únicos.

Demostración.

Unicidad de L .

Sea $B = A'$ donde A' es la traspuesta de A . Si A
es conectada, B lo es, por tanto existen r y Y tales
que

$$BY = rY$$

transponiendo tenemos

$$Y'A = rY'X$$

de aquí tenemos

$$LY'X' = rY'X$$

por tanto, $(Y'X > 0)$

$$L = r$$

con esto tenemos las ecuaciones

$$AX' = LX' \text{ y } A'Y = LY$$

Supongamos que existe α número real tal que

$$AX' = \alpha X'$$

probaremos que $\alpha = L$

transponiendo la última ecuación

$$X''A' = \alpha X''$$

multiplicando por Y de ambos lados tenemos

$$X''A'Y = \alpha X''Y$$

de donde

$$LX''Y = \alpha X''Y$$

por tanto

$$L = \alpha$$

de donde concluimos la unicidad de L

Unicidad de X'

Supongamos que existe $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} > 0$ y tal que

$$AX = LX$$

$n \rightarrow$ Sea $S = \{s = 1, \dots, n \mid (X_s/X_s') \leq (X_j/X_j') \text{ } j = 1, \dots,$

para $s \in S$ llamemos

$$t = (X_s/X_s')$$

para $s \in S$ tenemos $(X_s/X_s') \leq (X_j/X_j')$ para $j = 1, \dots, n$

multiplicando por X_j' de ambos lados obtenemos

$$(X_j/X_j')X_j' \leq X_j \text{ para } j = 1, \dots, n$$

por tanto $tX' \leq X$

es decir $X - tX' \geq 0$

si $s \in S$ las entradas del vector $X - tX'$ son cero

apliquemos A a $X - tX'$

$$A(X - tX') = AX - tAX' = LX - tLX' = L(X - tX')$$

con lo cual $X - tX'$ es vector propio de A con valor propio L . En el lema 3, hemos probado que si tenemos una matriz A cuadrada, no negativa, conectada, que tenga un vector propio con alguna entrada nula, entonces A manda a ese vector en el vector 0.

$$A(X - tX') = 0$$

por tanto $L(X - tX') = 0$

por tanto $X = tX'$

i.e. el vector propio es único salvo múltiplos.

QED

Los anteriores resultados se pueden resumir

Teorema 1. Sea A matriz cuadrada, no negativa y conectada. Entonces existe un único vector $X > 0$ y un único escalar $L > 0$ tal que satisfacen la ecuación

$$AX = LX$$

la demostración se desprende de los lemas 2, 3 y 4.

QED

Definición. Sea $A \geq 0$ matriz cuadrada, conectada. El valor único L que se obtiene del teorema 1 será llamado el valor propio dominante de A y se denotará como $L(A)$. El vector X único que afirma el mismo teorema, será llamado el vector propio dominante de A .

Corolario. A y A^t tienen el mismo valor propio dominante.

Lema 5. Sea $A \geq 0$ matriz cuadrada, conectada

(i) Si existe $Z \geq 0$ tal que $AZ \geq kZ$ p.a. k entonces $L(A) > k$

(ii) Si existe $Z \geq 0$ tal que $AZ \leq kZ$ p.a. k entonces $L(A) < k$

(iii) Si existe $Z \geq 0$ tal que $AZ \geq kZ$ p.a. k entonces $L(A) \geq k$

(iv) Si existe $Z \geq 0$ tal que $AZ \leq kZ$ p.a. k entonces $L(A) \leq k$

Demostración.

(i) Sea $X > 0$ t.q. $AX = L(A)X$ se cumple y tomemos $Y > 0$ tal que $A^t Y = L(A)Y$

se ha supuesto que

$AZ \geq kZ$ multiplicando por Y^t de ambos lados

$$Y^t AZ \geq kY^t Z$$

por tanto $Z^t A^t Y \geq kZ^t Y$
utilizando que

$$A^t Y = L(A)Y$$

$$Z^t L(A)Y \geq kZ^t Y$$

por tanto $L(A) > k$.

(ii) Es análogo a (i), sólo se reemplaza $>$ por $<$.

(iii) Partamos de $AZ \geq kZ$ multiplicando por Y^t de ambos lados

$$Y^t AZ \geq kY^t Z$$

transponiendo

$$Z^t A^t Y \geq kZ^t Y$$

nuevamente utilizando $A^t Y = L(A)Y$

$$L(A)Z^t Y \geq kZ^t Y$$

por tanto

$$L(A) \geq k$$

(iv) La prueba es exactamente igual que (iii) cambiando la desigualdad correspondiente.
QED

Lema 6. Sea $A \geq 0$ conectada

Si $AZ = \beta Z$ p.a. $Z \neq 0$ entonces $|\beta| < L(A)$

Demostración. Como $AZ = \beta Z$ tenemos

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j = \beta z_i, \quad i = 1, \dots, n$$

tomando el valor absoluto de ambos lados

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j \right| = |\beta z_i|, \quad i = 1, \dots, n$$

aplicando la desigualdad del triángulo y que $A \geq$

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j \right| < \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |z_j| = \sum_{j=1}^n a_{ij} |z_j|$$

por tanto tenemos

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} |z_j| > |\beta| |z_i| \text{ para } i = 1, \dots, n$$

y esto puede ser escrito en forma matricial

$$AY \geq |\beta| Y$$

$$\text{donde } Y = (y_1, \dots, y_n) = (|z_1|, \dots, |z_n|)$$

el vector $Y \geq 0$ por ser $Z \neq 0$. Aplicando el lema 5 (iii) tenemos que

$$L(A) \geq |\beta| \quad \text{QED}$$

Es decir $L(A)$ es el valor propio positivo más grande que tiene A

Teorema 2.

Sea $L : \{A \in M_{n \times n} \mid A \geq 0 \text{ irreducible}\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$A \longmapsto L(A)$$

es una función estrictamente creciente

$$\begin{bmatrix} \frac{\sum x_i}{2} \\ \vdots \\ \frac{\sum x_i}{2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \frac{\sum x_i}{2} \\ \vdots \\ \frac{\sum x_i}{2} \end{bmatrix}$$

multiplicando por 1 el vector renglón de J , tenemos

$$L(A)X - \epsilon \begin{bmatrix} ((\sum x_i)/x_i) \times \\ \vdots \\ ((\sum x_i)/x_i) \times \end{bmatrix} < BX < L(A)X + \delta \begin{bmatrix} ((\sum x_i)/x_i) \times \\ \vdots \\ ((\sum x_i)/x_i) \times \end{bmatrix}$$

y por la expresión dada para M tenemos

$$L(A)X - \epsilon X < BX < L(A)X + \epsilon X.$$

o lo que es lo mismo

$$(L(A) - \epsilon)X < BX < (L(A) + \epsilon)X$$

pero aplicando el lema 5 (i) y (ii) tenemos

$$L(A) - \epsilon < L(B) < L(A) + \epsilon$$

por tanto $|L(A) - L(B)| < \epsilon$ QED

Los resultados anteriores servirán para decir cuando existe un P y un r positivos para que sean solución de la ecuación

$$P = AP + rBP$$

bajo ciertas condiciones sobre A y B .

Teorema 4. Supongamos $A \geq 0$ conectada y que tenemos la ecuación

$$P = AP + rBP \quad (1)$$

Si existe $P > 0$ y $r > 0$ que cumplan (1) si y sólo si $L(A) < 1$

Demostración. \implies) Supongamos que existe $P > 0$ y $r > 0$ tal que

$$P = AP + rBP$$

se satisface, entonces tenemos $L(A+rB) = r$

por otro lado sabemos

$$A < A+rB \text{ para } r > 0$$

como la función dominante es creciente

$$L(A) < L(A+rB)$$

por lo que concluimos

$$L(A) < 1$$

(\Leftarrow) Supongamos que $L(A) < 1$

observemos que la función

$$L(A+rB)$$

toma valores menores o iguales a 1 y no es acotada superiormente

$$L(A+rB) < 1 \text{ si } r=0$$

$$\text{y } L(A+rB) \rightarrow 0 \text{ cuando } r \rightarrow \infty$$

para verificar esto veamos lo siguiente

$$rB < A+rB \text{ para } r > 0$$

$$\text{por lo tanto } L(rB) < L(A+rB)$$

$$\text{por otro lado } rL(B) < L(rB)$$

$$\text{por tanto } rL(B) < L(A+rB)$$

$$\text{si } r \rightarrow \infty \text{ entonces } rL(B) \rightarrow \infty$$

$$\text{por tanto } L(A+rB) \rightarrow 0 \text{ cuando } r \rightarrow \infty$$

como la función L es continua y creciente, entonces existe

$$r_0 > 0$$

para el cual

$$L(A+r_0B) = 1$$

llamemos P al vector propio asociado a r_0 .

$$\text{por lo que tenemos } (A+r_0B)P = P$$

si la función f no es continua en x_0 y $f(x_0) > 0$.

como $A > 0$ es conectada, entonces

$A + rB$ es conectada para $r > 0$

para el caso en que $r = r_0$, se obtiene

$A + r_0 B$ conectada

por lo tanto existe

$\epsilon > 0$ tal que

$$(A + r_0 B)P_\epsilon = L(A + r_0 B)P_\epsilon$$

pero como $L(A + r_0 B) = 1$ y por el teorema de la unicidad

$$(A + r_0 B)P_\epsilon = F_\epsilon$$

por tanto, existe un $\epsilon_0 > 0$ y $r_0 > 0$ para el cual la ecuación

$$AP_{\epsilon_0} + r_0 BP_{\epsilon_0} = F_{\epsilon_0}$$

se cumple. QED

Corolario. La cantidad r del teorema 4 es positiva si y sólo si $L(A) < 1$.

Demostración. \implies) Supongamos $r > 0$ y tal que se cumple

$$(A + rB)P = F \text{ con } P > 0$$

$$\text{entonces } L(A + rB) = 1$$

y como $A < A + rB$

tenemos entonces $L(A) < 1$

\Leftarrow) La función

$$L(A + rB)$$

es menor que 1 para $r = 0$ y no es acotada cuando $r \rightarrow \infty$.

Por tanto existe un $r_0 > 0$ para el cual

$$L(A + r_0 B) = 1$$

ya que la función dominante es continua.

Aquí existe un P.O. para el cual

$(A+B)P_1 = P_1$ con lo que hemos acabado. QED

C. n. TEOREMAS QUE GARANTIZAN LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES NO NEGATIVAS PARA SISTEMAS DEL TIPO $BX=C$ CON $b_{ii} > 0$ SI $i=1, \dots, n$.

Supondremos que B es una matriz de $n \times n$ y que X y C representan vectores.

Teorema 1. Supóngase que la ecuación

$$BX = C$$

se satisface con $b_{ii} \leq 0$ si $i \neq j$ entonces son equivalentes las siguientes proposiciones.

(i) Si $C > 0$ entonces $X \geq 0$.

(ii) Si $C \geq 0$ entonces $X \geq 0$.

(iii) El menor principal correspondiente a b_{ii} es positivo.

(iv) Todos los menores principales de B son positivos.

Demostración. (i) \implies (iii) Supóngase que la ecuación

$$BX = C$$

se satisface con $C > 0$ y $X \geq 0$. También supóngase momentáneamente que B es de tamaño $k \times k$.

Sea $F(k) =$ si la ecuación $BX = C$ se satisface con $C > 0$ y $X \geq 0$ entonces el menor principal b_{ii} de B es positivo.

Probaremos que esta proposición es válida para toda k .

Para $k = 1$ tenemos que B es de 1×1 , por tanto $B = (b_{11})$ aquí se cumple

$$b_{11}X = C.$$

Con la suposición que $C > 0$ y $X \geq 0$, tenemos que $b_{11} > 0$. Por tanto el menor principal es positivo.

Supongamos que la proposición es válida para $n-1$, (i.e. si B es una matriz de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ y se cumple la ecuación $BX = C$ con $C > 0$ y $X \geq 0$ entonces el menor principal b_{ii} es positivo). Probaremos que la proposición es válida para n .

Partimos de que, $BX = C$ se cumple con $C > 0$ y que $X \geq 0$; tomando la primera entrada de aqui tenemos que

$$\sum_{i=1}^n b_{1i} X_i = C_1$$

De aqui obtenemos

$$b_{11} X_1 = C_1 - \sum_{j=2}^n b_{1j} X_j$$

Se afirma que $b_{11} X_1 > 0$:

$b_{1j} < 0$ si $j \neq 1$ y como $X_j > 0$ tenemos $b_{1j} X_j < 0$ por tanto

$$\sum_{j=2}^n b_{1j} X_j < 0 ;$$

Hemos supuesto que $C_1 > 0$, asi se concluye que

$C_1 > 0$, y asi se concluye que

$$C_1 - \sum_{j=2}^n b_{1j} X_j > 0$$

Escribiendo el sistema $BX = C$

$$b_{11} X_1 + b_{12} X_2 + \dots + b_{1n} X_n = C_1$$

$$b_{21} X_1 + b_{22} X_2 + \dots + b_{2n} X_n = C_2$$

$$b_{n1} X_1 + b_{n2} X_2 + \dots + b_{nn} X_n = C_n$$

multiplicando la primera ecuación por $(-b_{1j}/b_{11})$ queda

$$(-b_{1j}/b_{11}) b_{11} X_1 + (-b_{1j}/b_{11}) b_{12} X_2 + \dots + (-b_{1j}/b_{11}) C_1 = (-b_{1j}/b_{11}) C_1$$

sumando esta ecuación, a la ecuación i

$$((-b_{1j}/b_{11}) b_{11} + b_{ij}) X_1 + ((-b_{1j}/b_{11}) b_{12} + b_{i2}) X_2 + \dots + ((-b_{1j}/b_{11}) b_{1n} + b_{in}) X_n = (-b_{1j}/b_{11}) C_1 + C_i$$

el coeficiente correspondiente a X_1 es cero y haciendo

$$b_{ij} = (b_{ij} - (b_{1j}/b_{11}) b_{1i}) \text{ y } C_i = C_i - (b_{1j}/b_{11}) C_1$$

para $j = 2, \dots, n$ tenemos el sistema

$$b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n = c_1$$

$$b_{21}x_1 + \dots + b_{2n}x_n = c_2$$

Demostremos que $b_{11} < 0$ si $i \neq j$

Si $b_{11} < 0$ si $i \neq j$ y $b_{1j} < 0$ si $i \neq j$, así se tiene $b_{11} = (c_1/b_{11}) < 0$ si $i \neq j$ y $i \neq j$; como $c_1 > 0$ y $(b_{11}/b_{11}) < 0$ si $i \neq j$, $c_1 = (b_{11}/b_{11}) > 0$.

Si $b_{11} > 0$ si $i \neq j$ y $b_{1j} > 0$ si $i \neq j$, así se tiene $b_{11} = (c_1/b_{11}) > 0$ si $i \neq j$ y $i \neq j$; como $c_1 > 0$ y $(b_{11}/b_{11}) > 0$ si $i \neq j$, $c_1 = (b_{11}/b_{11}) > 0$.

$$b_{21}x_1 + \dots + b_{2n}x_n = c_2$$

.

.

$$b_{n1}x_1 + \dots + b_{nn}x_n = c_n$$

Aquí $b_{11} < 0$ si $i \neq j$ y $c_1 > 0$, además $x_i > 0$ $i = 2, \dots, n$

por hipótesis de inducción tenemos que

$$\begin{vmatrix} b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

para $k = 2, \dots, n$.

pero sabemos que

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

los cuales son positivos.

Por tanto hemos probado que si la hipótesis de inducción es válida para $n-1$ se cumple entonces para n .

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{vmatrix} > 0, \quad k=1, \dots, n$$

tenemos que demostrar que: Si $BX = C$ se cumple $C \geq 0$ entonces $X \geq 0$.

Se probará por inducción.

Para $n = 1$.

En este caso la ecuación $BX = C$ es equivalente a

$$b_{11}x_1 = C_1$$

por hipótesis tenemos que $b_{11} > 0$. Si $C_1 \geq 0$ entonces

$$x_1 = (C_1/b_{11}) > 0$$

Supóngase que se cumple para $n-1$, i.e. que

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n-11} & \dots & b_{n-1k} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{con } k = 1, \dots, n-1$$

y que $BX = C$ se satisface con $C \geq 0$ entonces $X \geq 0$ (B es de $(n-1) \times (n-1)$).

Se probará para n

Supóngase que $\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$ para $K = 1, \dots, n$.

y además que se cumple $BX = C$ con $C \geq 0$. P.d.
 $x \geq 0$.

Que $BX = C$ se cumpla implica que

$$\begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n &= C_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n &= C_2 \\ \vdots & \vdots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n &= C_n \end{aligned}$$

como $b_{11} > 0$, aplicando el artificio anteriormente explicado, esta sistema se puede llevarse a otro equivalente

$$\begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n &= C_1 \\ b_{22}'x_2 + \dots + b_{2n}'x_n &= C_2' \\ \vdots & \vdots \\ b_{n2}''x_2 + \dots + b_{nn}''x_n &= C_n' \end{aligned}$$

análogamente por ser $b_{ij} \geq 0$ si $i \neq j$, tenemos que $b_{ij}' < 0$ si $i \neq j$ y además que $C_i' \geq 0$, para $i = 2, \dots, n$.

La matriz

$$\begin{bmatrix} b_{22}' & \dots & b_{2n}' \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n2}'' & \dots & b_{nn}'' \end{bmatrix}$$

tiene un determinante positivo, veamos

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kk} \end{vmatrix} \text{ es positivo para } k = 1, \dots, n.$$

por otro lado tenemos

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kk} \end{vmatrix} = \frac{1}{b_{11}} \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

por tanto tenemos que

$$\begin{vmatrix} b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k2} & \dots & b_{kk} \end{vmatrix} > 0 \text{ para } k = 2, \dots, n.$$

por hipótesis de inducción existe un $X_2 \geq 0$ tal que cumple la ecuación

$$\begin{aligned} b_{22} X_2 + \dots + b_{2n} X_n &= C_2 \\ \vdots & \\ b_{k2} X_2 + \dots + b_{kn} X_n &= C_k \end{aligned}$$

siendo $C_i \geq 0$. Substituyendo X_2, \dots, X_n en $\sum_{j=2}^n b_{1j} X_j =$

$$X_1 = (C_1/b_{11}) - (1/b_{11}) \sum_{j=2}^n b_{1j} X_j = X_1$$

el cual es mayor o igual a cero.

... las variables básicas que forman la solución
 $x_1, \dots, x_n = 0$, que cumple el sistema $BX = C$, siendo
 el C_i la hipótesis de

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} > 0 \text{ para } k = 1, \dots, n.$$

(ii) \implies (i). Sabemos por (ii) que si $BX = C$ se
 satisface con $C_i > 0$ entonces $x_i > 0$. Para probar (i)
 supongamos que $BX = C$ se satisface con $C_i > 0$,
 probaremos que $x_i > 0$.

De entrada por (ii) $x_i > 0$, por lo que basta probar
 que $x_i > 0$.

De la primera ecuación de $BX = C$ se tiene

$$\sum_{i=1}^n b_{1i} x_i = C_1$$

como $b_{1j} \leq 0$ para $j \neq i$, $b_{1i} x_i < 0$, $\sum_{j \neq i} b_{1j} x_j < 0$.

Por tanto

$$b_{1i} x_i = C_1 - \sum_{j \neq i} b_{1j} x_j > 0$$

por tanto $b_{1i} x_i > 0$, de donde $x_i > 0$, por lo que
 concluimos $x_i > 0$.

(iv) \implies (iii). (iv) es el caso general que incluye
 a (iii) como caso particular.

(ii) \implies (iv). Supongamos que se cumple

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$

Tenemos que probar que cualquier submatriz principal de B tiene un término positivo.

Sea S una matriz de permutaciones tal que a cualquier matriz principal de B la transforme en una submatriz principal de B colocándola del lado superior izquierdo. La última ecuación queda

$$SBS^T X = SC$$

al tomar las submatrices principales los elementos diagonales de B y los que no se encuentran allí, preservan su mismo signo en la matriz SBS^T . Análogamente si $X_{ij} > 0$ y $C_{ij} > 0$ se tiene que $S_{ij} > 0$ y $S_{ij} > 0$.

Como la matriz SBS^T y los vectores SC y X cumplen la hipótesis (ii), esto es equivalente a la proposición (iii) lo cual nos afirma que los menores principales correspondientes a las entradas (i,i) de SBS^T es positivo, pero esto implica que todos los menores principales de B son positivos. Q.E.D.

Hemos definido a una matriz B conectada, como aquella que no puede ser llevada a la forma

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$$

mediante la transposición de renglones y las correspondientes columnas y donde B_1 y B_4 son matrices cuadradas no necesariamente del mismo tamaño y donde $B_3 = 0$; es decir una matriz B es no conectada si existen dos conjuntos I y J de índices tales que $I \cup J = \{1, \dots, n\}$ y $I \cap J = \emptyset$ con $b_{ij} = 0$ si $i \in I$ y $j \in J$.

Teorema: Sea A conectada y $B = (I-A)$, con $b_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$.

Consideremos la ecuación

$$BX = C.$$

Entonces si $C \geq 0$, $X \geq 0$.

Demstración: Como A es conectada B lo es.

Supongamos que X no es ≥ 0 , por el teorema anterior existen números K tal que $1 \leq K \leq n$ tal que $X_i = 0$ dado $C \geq 0$.

$$B = (b_{ij}) \quad B = (b_{ij} | X_j)$$

Considerando que $I \neq \emptyset$.

Sea $r \in I$ y consideremos la r -ésima ecuación de $BX = 0$.

$$\sum_{j \in J} b_{rj} X_j = 0$$

Como $C_r = 0$ la ecuación anterior queda

$$\sum_{j \neq r} b_{rj} X_j = 0$$

en esta ecuación se supone que $C_r > 0$ y además tenemos que $b_{rj} < 0$ si $r \neq j$, así pues

$$\sum_{j \neq r} b_{rj} X_j \leq 0$$

Si $C_r > 0$ tenemos que $\sum_{j \in J} b_{rj} X_j \leq 0$, de donde se desprende una contradicción.

Si $C_r = 0$ entonces

$$\sum_{j \in J} b_{rj} X_j = \sum_{j \in I} b_{rj} X_j + \sum_{j \in J} b_{rj} X_j = \sum_{j \in J} b_{rj} X_j = C_r = 0$$

como $X_j > 0$ para $j \in J$ y $b_{rj} < 0$ para $j \neq r$, por tanto

$$\sum_{j \neq r} b_{rj} X_j = 0$$

implica que $b_{rj} X_j = 0$, donde $b_{rj} = 0$ si $j \in J$, por tanto para todo $r \in I$ y $j \in J$ tenemos $b_{rj} = 0$, se concluye entonces que B es descomponible, llegando así a una contradicción. Q.E.D.

Definición: Una matriz cuadrada tiene una diagonal dominante en el sentido original (abreviado como d.d.) si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad |a_{ii}| = 0 \text{ para } j = 1, \dots, n$$

Teorema: Si A tiene una d.d. entonces A es no singular.

Demostración: Supongamos que A es no singular, entonces existe $x \neq 0$ tal que $x^t A = 0$.

Sea $|x_i| = \max |x_j|$

consideramos la k-ésima ecuación de $x^t A = 0$

$$\sum_{i=1}^n x_i a_{ik} = 0$$

de lo cual obtenemos

$$-x_i a_{ik} = \sum_{j=1, j \neq i}^n x_j a_{jk}$$

tomando valores absolutos de ambos lados y aplicando la desigualdad triangular

$$|x_i| |a_{ik}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{jk}| |x_j|$$

dividiendo de ambos lados por $|x_j|$ y como $|x_i| < |x_j|$ $i = 1, \dots, n$

$$|x_i| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n (|x_j| / |x_i|) |a_{jk}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{jk}|$$

por tanto

$$|a_{ik}| < \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{jk}|$$

es una contradicción. Q.E.D.

Teorema: Sea A conectada.

Si $|a_{jj}| \geq 0$, para toda j con al menos una desigualdad estricta. Entonces A es no singular.

Demostración: Supóngase que $1 \leq s \leq n$ es tal que

$$|a_{ss}| > 0.$$

Ahora supongamos que A es singular; i.e. existe $x \neq 0$ tal que $x^t A = 0$. Tomando la ecuación s de $x^t A = 0$

$$|X_i| = \sum_{j \in J} |a_{ij}| |X_j|$$

consideremos el valor absoluto

$$|X_i| |a_{ii}| \leq \sum_{j \in J} |a_{ij}| |X_j|$$

si $|X_i| = |X_j|$ entonces

$$|a_{ii}| \leq \sum_{j \in J} |a_{ij}| = 0.$$

que es una contradicción.

Supóngase ahora que $|X_i| \neq |X_j|$ p.a. i

$$\text{Sea } |X_i| = \max |X_j|$$

$$\text{Sea } J = \{j \mid |X_j| = |X_i|\}$$

considerando la ecuación k -ésima de $XtA = 0$

$$|a_{ik}| |X_k| \leq \sum_{j \in J} |a_{ij}| |X_j| \quad \text{para } k \in J$$

dividiendo ambos lados por $|X_k|$ tenemos

$$|a_{ik}| \leq \sum_{j \in J} (|X_j| / |X_k|) |a_{ij}| \quad \text{para } k \in J$$

$$\leq \sum_{j \in J} |a_{ij}| + \sum_{j \in J} (|X_j| / |X_k|) |a_{ij}| \quad \text{para } k \in J$$

Si $|a_{ik}| \neq 0$ p.a. $i \in J^c$ entonces $|X_i| < |X_k|$ para esta i (esto porque $i \in J^c$ y $i \neq k$), se concluye que

$$\sum_{j \in J} (|X_j| / |X_k|) |a_{ij}| < \sum_{j \in J} |a_{ij}|$$

de donde concluimos que

$$|a_{ik}| < \sum_{j \in J} |a_{ij}| + \sum_{j \in J} |a_{ij}| = \sum_{j \in J} |a_{ij}|, \quad k \in J$$

pero esto contradice la hipótesis que tenemos.

Si $|a_{ii}| = 0$ entonces $a_{ii} = 0$ para $i \in I^c$ y $i \in J$, pero esto implica que A es descomponible, y esto contradice la indecomponibilidad de A . Así pues, suponer que A es singular es falso. Q.E.D.

Corolario: Supongamos que A es indecomponible y que existe $d > 0$ $i = 1, \dots, n$ tal que $d_i |a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} d_j |a_{ij}|$ para toda

con al menos una desigualdad estricta. Entonces A es no singular.

Demostración: Sea $D = (d_i \delta_{ij})$ y $B = DA$.

Si A es conectada, B es conectada, por tanto cumple la primera hipótesis del lema anterior y como también cumple la hipótesis de que

$$d_i |a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} d_j |a_{ij}| \text{ para toda } i$$

con al menos una desigualdad estricta, entonces tenemos que B es no singular. Como $B = DA$, D es no singular claramente, por tanto, si B es producto de D y A donde B es no singular y D también, concluimos que A es no singular. Q.E.D.

Definición: La matriz cuadrada A tiene una diagonal casi dominante (d.c.d.) si

(i) Cuando A es indecomponible entonces existe $d_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ tal que $d_i |a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} d_j |a_{ij}|$ para toda i , con al menos una desigualdad estricta.

(ii) Cuando A es descomponible (i.e. $a_{ij} = 0$ si $i \in I$ y $j \in J$ donde $I \cup J = \{1, \dots, n\}$ y $I \cap J = \emptyset$) entonces existen $d_i > 0$ $i = 1, \dots, n$ tal que $d_i |a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} d_j |a_{ij}|$ para toda i , con al menos una desigualdad estricta.

Teorema: Si A tiene una d.c.d. entonces A es no singular.

Demostración: Caso (i) Si A es indecomponible, la prueba es la misma que la del corolario anterior.

Caso (ii): Supongamos A es descomponible

Caso A es descomponible existe P matriz de permutaciones tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} F & G \\ 0 & H \end{bmatrix}$$

donde F y H son matrices cuadradas. Probarémos que F y H son no singulares, con lo cual concluiremos que $P^{-1}AP$ es no singular y por tanto A será no singular.

Supongamos que los renglones y columnas de F están indexadas por los elementos de J y que los elementos y columnas de H están indexados por los elementos de I.

Primero: F es no singular. (si A es d.c.d. $\implies P^{-1}AP$ es d.c.d.) como $P^{-1}AP$ es d.c.d. entonces

$$d_r |f_{rr}| \geq \sum_{i \neq r} d_i |f_{ri}|$$

con al menos una desigualdad estricta. Entonces por el corolario anterior F es no singular.

Segundo: H es no singular.

Supongamos $G \neq 0$; aplicando que $P^{-1}AP$ es d.c.d. con los elementos de H tenemos (los elementos de h_{ii} están indexados por I)

$$d_r |h_{rr}| \geq \sum_{i \in I} d_i |h_{ri}| + \sum_{i \in J} d_i |g_{ri}| \text{ para todo } j \in J$$

como $G \neq 0$ existe $g_{ri} \neq 0$ y por tanto $|g_{ri}| \neq 0$ $r \in J$, $k \in I$, para esta k tenemos

$$d_r |h_{rr}| \geq \sum_{i \in I} d_i |h_{ri}| + \sum_{i \in J} d_i |g_{ri}| > \sum_{i \in I} d_i |h_{rk}|$$

por tanto

$$d_r |h_{rr}| > \sum_{i \in I} d_i |h_{rk}| \text{ con } k \in I$$

De aquí concluimos que

$$d_r |h_{rr}| > \sum_{i \in I} d_i |h_{ri}| \text{ para toda } j \in I$$

estricta. Aplicando el teorema anterior concluimos

que B es invertible. B es invertible por su definición, aplicando los mismos argumentos para f .
Efectuando g se es no singular. U.E.D

Teorema: Sea B matriz cuadrada con $b_{ii} > 0$ para $i=1, \dots, n$ y para $i \neq j$ entonces $Bx = C$ tiene un único solución dada $X \geq 0$ si $C \geq 0$ si solo si B es estricta.

Prueba: (i) (\Rightarrow) Supongamos que B tiene una diagonal estricta dominante. Entonces B es no singular. i.e. dado C existe un único X tal que $BX = C$. Probaremos que si damos $C \geq 0$ entonces la X que satisface $BX = C$ es tal que $X \geq 0$.

Sea $C \geq 0$ p.d. $X \geq 0$.

Supongamos que no es valido $X \geq 0$, i.e. existe j entre uno y n tal que $X_j < 0$. Sea $J = \{j: X_j < 0\}$ y tomemos $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Si $j \in N - J$, $X_j \geq 0$. probaremos que suponer $J \neq \emptyset$ nos lleva a una contradicción.

Consideremos la i -ésima ecuación de $BX = C$, donde $i \in J$.

$$\sum_{k=1}^n b_{ik} X_k = \sum_{k \in J} b_{ik} X_k + \sum_{k \in N-J} b_{ik} X_k = C_i \geq 0$$

multiplicando por $d_i > 0$ y sumando sobre $i \in J$

$$\sum_{i \in J} \sum_{k \in J} d_i b_{ik} X_k + \sum_{i \in J} \sum_{k \in N-J} d_i b_{ik} X_k = \sum_{i \in J} d_i C_i \geq 0$$

la contradicción será desprendida de probar que el lado izquierdo de la igualdad es negativo de manera estricta.

$$\text{Primero: } \sum_{i \in J} \sum_{k \in N-J} d_i b_{ik} X_k < 0,$$

para $i \in J$ y $j \in N - J$ $b_{ij} < 0$, $X_j \geq 0$ y $d_i \geq 0$, por tanto

$$\sum_{i \in J} \sum_{k \in N-J} d_i b_{ik} X_k < 0.$$

segundo: se probará que $\exists j \in J$ tal que

1.º. Se probará que existe $j \in J$ tal que

$$\sum_{k \in J} d_k b_{kj} > 0$$

como B es d.c.d. entonces

$$d_j |b_{ij}| \geq \sum_{k \in J} d_k |b_{ki}| \text{ para } i=1, \dots, n$$

con al menos una desigualdad estricta

$|b_{ij}| = b_{ij}$ ya que es positiva para toda i

y $b_{ki} \leq 0$, por tanto $|b_{ki}| = -b_{ki}$, se obtiene

$$d_j b_{ij} \geq -\sum_{k \in J} d_k b_{ki}$$

con al menos una desigualdad estricta, en consecuencia

$$\sum_{k \in J} d_k b_{kj} = \sum_{k \in J} d_k b_{kj} + \sum_{k \in J} d_k b_{kj} \geq 0 \quad j=1, \dots, n$$

con al menos una desigualdad estricta

Se afirma que existe $j \in J$ tal que

$$\sum_{k \in J} d_k b_{kj} > 0$$

supongamos que para toda $j \in J$

$$\sum_{k \in J} d_k b_{kj} = 0 \text{ como}$$

$$\sum_{k \in J} d_k b_{kj} + \sum_{k \notin J} d_k b_{kj} \geq c \text{ para } j=1, \dots, n$$

con al menos una desigualdad estricta. En particular para $j \in J$ pueden ocurrir dos situaciones

situación 1. Existe $j \in J$ tal que

$$\sum_{k \in J} d_k b_{kj} + \sum_{k \notin J} d_k b_{kj} > 0$$

y como $\sum_{k \in J} d_k b_{kj} = 0$ si $j \in J$, se tiene

$$\sum_{k \notin J} d_k b_{kj} > 0$$

pero si j no es en J y $j \in J$

$$\sum_{k \in J} d_k b_{kj} \leq 0$$

lo cual es una contradicción.

Situación 2. Para toda $i \in J$

$$\sum_{i \in J} d_{ij} b_{ij} + \sum_{i \notin J} d_{ij} b_{ij} = 0$$

y análogamente como $\sum_{i \in J} d_{ij} b_{ij} = 0$ tenemos

$$\sum_{i \notin J} d_{ij} b_{ij} = 0 \text{ para todo } j \in J$$

por tanto $b_{ij} = 0$ con i no en J y $j \in J$

i.e. B es descomponible

si B es descomponible y d.c.d. por definición

$$d_{ij} b_{ij} \geq -\sum_{i \in J} d_{ij} b_{ij} \text{ para toda } j$$

con al menos una desigualdad estricta para $j \in J$

$$\text{i.e. } \sum_{i \in J} d_{ij} b_{ij} + \sum_{i \notin J} d_{ij} b_{ij} \geq 0 \text{ para toda } j$$

con al menos una desigualdad estricta para $j \in J$.

i.e. existe $j \in J$ tal que

$$\sum_{i \in J} d_{ij} b_{ij} + \sum_{i \notin J} d_{ij} b_{ij} > 0$$

pero $\sum_{i \in J} d_{ij} b_{ij} = 0$ ya que $j \in J$

por tanto existe $j \in J$ tal que

$$\sum_{i \notin J} d_{ij} b_{ij} > 0$$

pero análogamente como $j \in J$ e i no está en J ,
 $b_{ij} \leq 0$ y así

$$\sum_{i \notin J} d_{ij} b_{ij} \leq 0$$

concluimos que suponer $\sum_{i \in J} d_{ij} b_{ij} = 0$ para toda $j \in J$
nos lleva a contradicciones. Por tanto existe $j' \in J$
tal que $\sum_{i \in J} d_{ij'} b_{ij'} > 0$ y como $X_{j'} < 0$, para $j' \in J$ se tiene

$$\sum_{j' \in J} (\sum_{i \in J} d_{ij'}) X_{j'} < 0$$

por tanto

$$\sum_{i \in J} \sum_{j' \in J} d_{ij'} b_{ij'} X_{j'} + \sum_{j' \notin J} \sum_{i \in J} d_{ij'} b_{ij'} X_{j'} < 0$$

pero esto contradice el hecho de que sea menor o
igual a 0.

La contradicción parte de suponer $J \neq \emptyset$ por tanto
 $j = \emptyset$

i.e. $X_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, n$.

por todo $\alpha \geq 0$ para $j = 1, 2, \dots, n$

\Rightarrow) Sea $C \geq 0$ y supongamos que existe $X \geq 0$ tal que $BX = C$

p.d. que B tiene una d.c.d. i.e. existe $Z > 0$ tal que

$$Z'B > 0$$

dado $C = 0$, si $BX = C$ entonces $B(\alpha X) = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y como la solución es única tenemos que

$X = \alpha(X)$ para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ por tanto $X = 0$ i.e. si $C = 0$ entonces $X = 0$.

Supongamos $C > 0$, probaremos $X > 0$

Supongamos que $X \geq 0$ pero X no es estrictamente > 0 . Existe

k entre 1 y n tal que $X_k = 0$.

Consideremos la k -ésima ecuación de $BX = C$

$$\sum b_{kj} X_j = C_k > 0$$

y como $X_k = 0$

$$\sum b_{kj} X_j = C_k > 0$$

pero si $b_{kj} \leq 0$ si $j \neq k$ y $X_j \geq 0$ se tiene

$$\sum b_{kj} X_j \leq 0$$

lo cual es una contradicción.

por tanto, si $C > 0$ la única solución X de la ecuación $BX = C > 0$.

Considerando $C > 0$ tenemos que

$$BX > 0$$

transponiendo $X'B' > 0$ pero esto quiere decir que B' tiene una d.c.d.

si B' tiene una d.c.d. entonces dado $f > 0$ existe $Z > 0$ tal que $B'Z = f$.

De manera análoga a como se demostró que X es positivo se concluye que $Z > 0$, de donde

$$Z'B > 0$$

1.3.9. El primer teorema de esta sección queda demostrado con lo cual queda probado el teorema. QED

Corolario. Sea B una matriz cuadrada con $b_{ii} > 0$ para $i = 1, \dots, n$ y $b_{ij} < 0$ si $i \neq j$. entonces B es una P-matriz si y sólo si B tiene una d.c.d.

Demostración aplicando el primer y el último teorema de esta sección se concluye la prueba. QED

Lema. Sea B una matriz cuadrada tal que $b_{ii} < 0$ si $i \neq j$. entonces $B^{-1} \geq 0$ si y sólo si B es una P-matriz.

Demostración

\implies) Supóngase que $B^{-1} \geq 0$ p.d. dado $C \geq 0$ existe $X \geq 0$ tal que satisface la ecuación $BX = C$.

tomemos X como $B^{-1}C$

si $B \geq 0$ y $C \geq 0$ entonces $B^{-1}C \geq 0$ y por tanto $X \geq 0$. Además X cumple claramente la ecuación.

\impliedby) Supóngase que B es una P-matriz, por tanto para $C \geq 0$ existe $X \geq 0$ tal que $BX = C$. Probaremos que $B^{-1} \geq 0$.

Es claro que si $C \geq 0$ entonces $X \geq 0$.

tomemos $C = E^j$ donde E^j es el vector que tiene 1 en el lugar j -ésimo y 0 en los demás lugares i.e. $E^j = (\delta_{ij})$, $j = 1, \dots, n$

como para $C = E^j \geq 0$ tenemos que $X \geq 0$ tal que

$$X = B^{-1}E^j$$

denotemos a

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

la expresión $B^{-1}E^j$ queda

$$\begin{bmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ \vdots & & \vdots \\ f_1 & \dots & f_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

para asegurarse que el resultado que nos da de la ecuación anterior es el cual es ≥ 0 para cada i que $0 \leq i \leq n$

Teorema. Sea $A \geq 0$ conectada

$L(A) < 1$ si y solo si $L(A) < 1$ para $L \geq 0$ si y solo si $L(A) < 1$.

Demonstración

\implies Como $A \geq 0$ conectada entonces existe $X > 0$ y $L(A) < 1$ tal que

$$AX = L(A)X$$

Sea $C \geq 0$, por tanto la X' que cumple la ecuación

$$(I-A)X' = C' \text{ es } \geq 0 \text{ i.e.}$$

$(I-A)X' = C' \geq 0$ como $X' \geq 0$ cumple que $AX' \leq X'$ entonces $L(A) < 1$

\impliedby análogamente, por ser $A \geq 0$ conectada, existe X y $L(A)$ positivos tal que $AX = L(A)X$

Supongamos que $L(A) < 1$ esto implica que $(I-A)X$ es positivo

hagamos $B = (I-A)$. Entonces $BX = C$.

Pero esto implica que B es d.c.d.

queremos probar que dado $C' > 0$ existe $X' > 0$ tal que $BX' = C'$ se cumple

como $BX > 0$ denotemos a esto como C , es decir $BX = C$

$b_{ii} < 0$ si $i \neq j$ y se afirma que b_{ii} es positivo

tomemos la ecuación inversa de $BX = C$

$$B^{-1}BX = C^{-1}C$$

$b_{ii} = (C_i - X_i b_{ii}) / X_i$, el cual es positivo

Yours truly,
[Signature]
[Name]
[Title]
[Address]
[City, State, Zip]

C.A.5 LEMA DE NEYMAN Y PEARSON

Lema. Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{i=1}^m r_i x_i \text{ donde } r_i \in \mathbb{R}$$

Sea $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \text{ para } i=1, \dots, m \text{ y } \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \leq \beta \text{ con } \alpha_i > 0 \text{ y } \beta > 0\}$

entonces el problema

$$\begin{aligned} \max_x & f(x) \\ \text{s.t. } & x \in A \end{aligned}$$

Entonces

Caso I. Si existe i tal que $r_i > 0$, tomemos

$$S = \{s = 1, \dots, m \mid r_i / \alpha_i > r_j / \alpha_j \text{ para } i = 1, \dots, m\}$$

entonces el conjunto

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = 0 \text{ si } i \text{ no está en } S \text{ y } \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = \beta\}$$

es el conjunto solución del problema

Caso II. Para toda $i, r_i < 0$, construimos

$$T = \{s = 1, \dots, m \mid r_s = 0\}$$

entonces el conjunto

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = 0 \text{ si } i \text{ no está en } T \text{ con } \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \leq \beta\}$$

es el conjunto de las soluciones.

Demostración:

Caso I

Sea W = el conjunto de soluciones al problema

$$\text{Sea } \bar{W} = \{\beta/\beta_0 \mid \beta_0 \in S\}$$

y $C(\bar{W})$ su cápsula convexa

Probaremos que $W \subset C(\bar{W})$

Sea β el valor máximo de $\sum r_i x_i$ dentro del conjunto factible

Primero: $C(\bar{W}) \subset W$

Sea $x \in \mathcal{A}(\bar{w})$, entonces

$$x = \sum_{i \in S} \lambda_i (\beta/\alpha_i) e_i, \text{ en donde } \lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum \lambda_i = 1$$

tenemos que probar que $x \in \mathcal{A}$

Es decir hay que probar que x es solución al problema dentro del conjunto factible i.e., hay que probar que si $x \in \mathcal{A}$ entonces $f(x) \leq f(x)$ lo cual es equivalente a probar que si $x \in \mathcal{A}$ entonces

$$\sum \lambda_i x_i \leq \sum \lambda_i x_i$$

Pero observemos

$$\begin{aligned} \sum \tau_i x_i &= \sum_{i \in S} \tau_i (\beta/\alpha_i) \\ &= \beta \sum_{i \in S} (\tau_i/\alpha_i) \lambda_i \\ &< \beta (\tau/\alpha) \sum_{i \in S} \lambda_i \\ &= \beta (\tau/\alpha) \end{aligned}$$

por tanto hay que probar que

$$\text{Si } x \in \mathcal{A} \text{ entonces } \sum_{i=1}^m \tau_i x_i \leq \beta (\tau/\alpha)$$

Sabiendo lo que buscamos, comencemos:

$$\text{Sea } x \in \mathcal{A} \text{ i.e. } \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \leq \beta$$

Construimos x tal que

$$x_i = x_i \text{ si } \tau_i > 0$$

$$x_i = 0 \text{ si } \tau_i < 0$$

es claro que

$$\sum_{\tau_i > 0} \alpha_i x_i \leq \beta$$

construimos t y Y como sigue

$$t = (\beta / \sum_{\tau_i > 0} \alpha_i x_i) \geq 1$$

$$\text{y } tY = X$$

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i y_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i (\beta / \sum_{\tau_i > 0} \alpha_i x_i) x_i \leq \beta$$

de aquí obtenemos

$$\sum_{i \in S} \tau_i \alpha_i < \sum_{i \in S} \tau_i \alpha_i + \sum_{i \in S} \tau_i \alpha_i = \sum_{i \in S} \tau_i \alpha_i,$$

para concluir lo que buscamos hagamos los siguientes supuestos y observaciones

Si $\tau_i > 0$ definamos

$$\mu_i = (\alpha_i \tau_i / \beta)$$

entonces $\mu_i \geq 0$

y $\sum_{i \in S} \mu_i = (1/\beta) \sum_{i \in S} \alpha_i \tau_i = 1$, (se obtiene al substituir τ_i)

ademas, despejando $\tau_i = (\beta/\alpha_i) \mu_i$

$$\sum_{i \in S} \mu_i (\beta/\alpha_i) e_i = \sum_{i \in S} \tau_i e_i = y.$$

Usando lo anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} \tau_i \alpha_i &< \sum_{i \in S} \tau_i \alpha_i = \sum_{i \in S} \mu_i (\beta/\alpha_i) \alpha_i \\ &= \beta \sum_{i \in S} \mu_i < \beta \sum_{i \in S} \mu_i (\tau_i/\alpha_i) \\ &= \beta (\tau_i/\alpha_i) \sum \mu_i \\ &= \beta (\tau_i/\alpha_i) \end{aligned}$$

por tanto $x \in W$

i.e. $C(\bar{W}) \subset W$

segundo $W \subset C(\bar{W})$

La prueba se hará en tres pasos; primero probaremos que si $\bar{x} \in W$, entonces $\sum_{i \in S} \alpha_i \bar{x}_i = \beta$; segundo, probaremos que $\bar{x}_i = 0$ si i no está en S ; tercero, se hará ver que

$$\bar{x} = \sum_{i \in S} \mu_i (\beta/\alpha_i) e_i; \text{ i.e. } \bar{x} \in C(W)$$

Sea $\bar{x} \in W$ p.d. $\sum_{i \in S} \alpha_i \bar{x}_i = \beta$ supongamos que

$$\exists i \alpha_i \bar{x}_i < \beta$$

si $r_i x_i < \beta$ y $r_i x_i$

hagamos

$$\hat{r}_i = r_i \text{ si } r_i > 0 \\ \hat{r}_i = 0 \text{ si } r_i < 0$$

luego

$\sum_{i=1}^n \hat{r}_i x_i < \beta$ y existe ε tal que

$$\varepsilon > \hat{r}_i \text{ si } r_i > 0 \\ \varepsilon = 0 \text{ si } r_i < 0$$

y donde todavía

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon x_i < \beta$$

pero

$$\sum_{i=1}^n r_i x_i < \beta \quad r_i x_i = \sum_{i=1}^n r_i x_i < \beta$$

absurdo

$$\text{entonces, } \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \beta$$

Entonces probaremos que si $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ entonces $w_i = 0$ si j no está en \mathbb{S}

Supongamos que existe $j \notin \mathbb{S}$ tal que $\bar{x}_j > 0$

Sea $s \in \mathbb{S}$

Definimos \hat{x} como

$$\hat{x}_i = \bar{x}_i \text{ para } i \neq j \text{ e } i \neq s$$

$$\hat{x}_j = \bar{x}_j + (\alpha_j / \alpha_s) \bar{x}_s$$

entonces

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i \in I} \alpha_i (\bar{x}_i + (\alpha_j / \alpha_i) \bar{x}_j) \\
 &= \sum_{i \in I} \alpha_i \bar{x}_i + \alpha_j \bar{x}_j \\
 &= \sum_{i \in I} \alpha_i \bar{x}_i
 \end{aligned}$$

como $\bar{x} \in W$, $\sum_{i \in I} \alpha_i \bar{x}_i = \beta$

$$\text{i.e. } \sum_{i \in I} \alpha_i \bar{x}_i = \beta$$

además

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \in I} \tau_i \bar{x}_i &= \sum_{i \in I} \tau_i \bar{x}_i + \tau_j \bar{x}_j + \tau_j \bar{x}_j \\
 &= \sum_{i \in I} \tau_i \bar{x}_i + \tau_j \bar{x}_j \\
 &= \sum_{i \in I} \tau_i \bar{x}_i + \tau_j (\bar{x}_j + (\alpha_j / \alpha_j) \bar{x}_j) \\
 &= \sum_{i \in I} \tau_i \bar{x}_i + \alpha_j (\tau_j / \alpha_j) \bar{x}_j
 \end{aligned}$$

como $(\tau_j / \alpha_j) > (\tau_j / \alpha_j)$ ya que $j \in S^c$,

$$\alpha_j (\tau_j / \alpha_j) > \tau_j > \sum_{i \in I} \tau_i \bar{x}_i + \tau_j \bar{x}_j = \sum_{i \in I} \tau_i \bar{x}_i$$

por tanto, $f(\bar{x}) > f(\bar{x})$,

por lo cual \bar{x} no es elemento de W lo cual es una contradicción.

Por tanto $\bar{x}_j = 0$ para toda $j \in S^c$

y además $\sum_{i \in I} \alpha_i \bar{x}_i = \beta$

i.e. si $\bar{x} \in W$ entonces $\bar{x} \in U$

concluimos que $W \subset U$

Finalmente probaremos que si $\bar{x} \in W$,

$$\bar{x} = \sum_{i \in S} p_i (\beta/\alpha_i) e_i,$$

donde $p_i > 0$ y $\sum_i p_i = 1$

Si $\bar{x} \in W$ entonces $\sum_{i \in S} x_i \bar{x}_i = 0$ y $\bar{x}_i = 0$ si $i \notin S$

para toda $i \in S$ definimos

$$p_i = (\bar{x}_i \alpha_i / \beta) > 0$$

$$\text{y } \sum_{i \in S} p_i = \sum_{i \in S} (x_i \alpha_i / \beta) = (1/\beta) \sum_{i \in S} x_i \alpha_i = 1$$

y para toda $i \in S$

$$\sum_{i \in S} p_i (\beta/\alpha_i) \delta_{ij} = p_i (\beta/\alpha_i) = \bar{x}_i,$$

(donde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$)

luego

$$\bar{x} = \sum_{i \in S} p_i (\beta/\alpha_i) e_i,$$

por tanto si $\bar{x} \in W$ entonces $\bar{x} \in U$ y luego
entonces $x \in \bar{C}(W)$

por tanto, $W \subset \bar{C}(W)$

concluimos que

$$W = \bar{C}(W)$$

Supongamos ahora que se da el caso II.

Sea W = el conjunto de soluciones al problema y

$$W = \{0\} \cup \{(\beta/\alpha_i) e_i \mid i \in T\}$$

probaremos que $W = \bar{C}(W)$

$W \subset V$

Sea $\bar{x} \in W$ entonces $\sum \alpha_i x_i \leq \beta$

Si i no está en T entonces, $r_i < 0$, probaremos que $x_i = 0$

Construimos \hat{x} como sigue

$$\begin{aligned}\hat{x}_j &= x_j, j \neq i \\ \hat{x}_i &= 0,\end{aligned}$$

probaremos que $\hat{x} \in A$

$$\begin{aligned}\sum_{j \in T} \alpha_j \hat{x}_j &= \sum_{j \in T} \alpha_j x_j = \sum_{j \in T} \alpha_j x_j < \sum_{j \in T} \alpha_j x_j + \alpha_i x_i \\ &= \sum_{j \in T} \alpha_j x_j < \beta \text{ i.e. } \hat{x} \in A\end{aligned}$$

ahora probaremos $f(\hat{x}) > f(x)$

$$\sum_{j \in T} r_j \hat{x}_j = \sum_{j \in T} r_j x_j > \sum_{j \in T} r_j x_j + r_i x_i = \sum_{j \in T} r_j x_j$$

lo cual es un absurdo.

Es decir, si i no está en T , entonces $x_i > 0$ nos lleva a una contradicción. Por tanto si i no está en T , entonces $x_i = 0$

por tanto, si $\bar{x} \in W$ entonces $\bar{x} \in V$, $W \subset V$

$V \subset W$

Sea $\bar{x} \in V$

Sea $x \geq 0$ tal que $\sum \alpha_i x_i \leq \beta$

entonces

$$\sum_{i \in T} r_i x_i = \sum_{i \in T} r_i x_i + \sum_{i \notin T} r_i x_i < \sum_{i \in T} r_i x_i = 0$$

$$0 = \sum_{i \in T} r_i x_i = \sum_{i \in T} r_i x_i + \sum_{i \notin T} r_i x_i = \sum_{i \in T} r_i x_i$$

luego $\bar{x} \in W$

entonces $V \subset W$ y $W = V$.

D.P. LEMA (DE ROYMAN Y PEARSON AMPLIADO).

Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

tal que

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n r_i x_i \quad \text{con } r_i \in \mathbb{R}$$

Supongamos el problema

$$\max f(\bar{x})$$

sujeto a

$$A = \{ \bar{x} \in \Omega^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{x}_i \leq A \text{ con } \alpha_i \geq 0 \text{ y } B > 0 \}$$

Hemos considerado la solución para dos casos

Caso I: existe i tal que $r_i > 0$ y

Caso II: para toda i , $r_i \leq 0$

La situación económica examinada aquí prueba que si $r_i > 0$ entonces $\alpha_i > 0$, pero falta por examinar el caso cuando $r_i > 0$ y $\alpha_i > 0$. Y además varios casos más.

$$\text{Definamos } N = \{ i = 1, \dots, n \mid \alpha_i = 0 \}$$

$$\text{Y } P = \{ i = 1, \dots, n \mid \alpha_i > 0 \}$$

Lema 1: Si existe $i_0 \in N$ tal que $r_{i_0} > 0$, entonces el conjunto de soluciones es el conjunto vacío.

Demostración: Probaremos que ninguna $X \in A$ es solución al problema planteado.

Sea $X_0 \in A$.

para todo $t > 0$ real hagamos

$$X(t) = X_0 + t E_{i_0}$$

Entonces $X(t) \geq 0$ y

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_{i0} + \alpha_{i0} t$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i(t) \geq 0$$

Por tanto $X(t) \in A$.

Para

$$\sum_{i=1}^n \tau_i X_i(t) = \sum_{i=1}^n \tau_i X_{i0} + \tau_{i0}(t) \longrightarrow \infty$$

cuando $t \longrightarrow \infty$. Por tanto el conjunto S de todas las soluciones está dado por el conjunto vacío.

Lema 2: Para toda $i \in N$, $\tau_i \geq 0$.

Sea $N_- = \{i \in N \mid \tau_i < 0\}$

$N_0 = \{i \in N \mid \tau_i = 0\}$

Caso 2.1. Si $\tau_i < 0$ para toda $i \in P$.

Sea

$$A = \{X \in \Omega^N \mid \begin{cases} X_i = 0 & \text{si } i \in N_- \\ X_i > 0 & \text{si } i \in N_0 \\ X_i = 0 & \text{si } i \in P \end{cases}\}$$

Si S es el conjunto de soluciones $S = A$.

Demostración: $A \subset S$

Sea $\bar{x} \in A$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{x}_i = \sum_{i \in N_-} \alpha_i \bar{x}_i + \sum_{i \in P} \alpha_i \bar{x}_i = 0 \leq \beta$$

Por tanto $\bar{x} \in S$

Solo falta probar que \bar{x} es solución.

Sea $X \in A$

$$\sum_{i=1}^n r_i x_i =$$

$$= \sum_{i \in N_+} r_i x_i + \sum_{i \in N_-} r_i x_i + \sum_{i \in P} r_i x_i$$

$$\leq \sum_{i \in N_+} r_i \bar{x}_i + \sum_{i \in N_-} r_i \bar{x}_i + \sum_{i \in P} \delta_i \bar{x}_i$$

$$= \sum_{i=1}^n r_i \bar{x}_i$$

Por tanto $\bar{x} \in S$ y $A \subset S$.

$S \subset A$

Sea $\bar{x} \in S$

Como $\bar{0} \in A \subset S$

Por lo que toda solución es igual a cero.

$$\sum_{i=1}^n r_i \bar{x}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n r_i \bar{x}_i$$

$$= \sum_{i \in N_+} r_i \bar{x}_i + \sum_{i \in N_-} r_i \bar{x}_i + \sum_{i \in P} \delta_i \bar{x}_i$$

Por tanto $r_i \bar{x}_i = 0, i = 1, \dots, n$

pero si $i \in N_- \cup P, r_i < 0$

entonces $\bar{x}_i = 0$ (con $i \in N_- \cup P$)

y si $i \in N_+, r_i = 0$

$\bar{x}_i \geq 0$ si $i \in N_+$

para esto implica que $\bar{x} \in A$.

Por tanto $S \subset A$ y $A = S$.

Caso 2.2. Para toda $i \in P, r_i \leq 0$ y existe $i_0 \in P$ tal que $r_{i_0} = 0$. Sea

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{cases} x_i = 0 & \text{si } i \in N \\ x_i \geq 0 & \text{si } i \in P \\ x_i = 0 & \text{si } i \in U \end{cases}\}$$

$$\sum_{i \in I} \alpha_i x_i \leq \beta, \text{ con } x_i \geq 0 \text{ para toda } i$$

$$u = 0$$

Si S es el conjunto de soluciones $S = A$

Demostración. ACS.

Sea $\bar{x} \in A$

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \bar{x}_i = \sum_{i \in P} \alpha_i \bar{x}_i = \sum_{i \in P} \alpha_i \bar{x}_i \leq \beta$$

por tanto $\bar{x} \in A$. \bar{x} es un máximo.

Sea $X \in A$

$$\sum_{i \in I} \tau_i X_i = \sum_{i \in N} \tau_i X_i + \sum_{i \in P} \tau_i X_i + \sum_{i \in U} \tau_i X_i$$

$$\leq \sum_{i \in N} \tau_i \bar{x}_i +$$

$$\sum_{i \in P} \tau_i \bar{x}_i + \sum_{i \in U} \tau_i \bar{x}_i +$$

$$+ \sum_{i \in U} \tau_i \bar{x}_i = \sum_{i \in I} \tau_i \bar{x}_i$$

Por tanto $\bar{x} \in S$ y ACS.

S \subset A

Sea $X \in S$

Como $0 \in ACS$

$$0 = \sum_{i \in I} \tau_i \bar{x}_i = \sum_{i \in N} \tau_i \bar{x}_i + \sum_{i \in P} \tau_i \bar{x}_i + \sum_{i \in U} \tau_i \bar{x}_i$$

con: cada componente no menor e igual a zero, cada terminal tendrá que ser cero. Por tanto

$$\begin{aligned}
 & \bar{x}_i = 0 \text{ si } i \in N_1 \\
 & \bar{x}_i = 0 \text{ si } i \in P \text{ y } r_i \leq 0 \\
 & \bar{x}_i \geq 0 \text{ si } i \in N_2 \text{ y } i \in P \\
 & \text{y además} \\
 & \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{x}_i = \beta
 \end{aligned}$$

Por tanto, $\bar{x} \in A$, $\bar{x} \in C$.

Concluimos que $A = S$.

Caso 2.3. Existe $i_0 \in P$ tal que $r_{i_0} < 0$

Sea $M = \max (r_i / \alpha_i)$

Sea

$$A_0 = \left\{ x \in \Omega \mid \begin{array}{l} x_i = 0 \text{ si } i \in N_1 \\ x_i \geq 0 \text{ si } i \in N_2 \\ x_i = 0 \text{ si } i \in P \text{ y } (r_i / \alpha_i) < M \\ \text{y } \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \beta \end{array} \right.$$

es el conjunto de soluciones

Demostración: $A \subset S$

Sea $\bar{x} \in A$, es claro que $\bar{x} \in A$

Sea $\bar{x} \in A$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n r_i \bar{x}_i &= \sum_{i \in N_1} r_i \bar{x}_i + \sum_{i \in N_2} r_i \bar{x}_i + \sum_{i \in P} r_i \bar{x}_i \\
 &\leq \sum_{i \in N_1} r_i \bar{x}_i + \sum_{i \in N_2} r_i \bar{x}_i +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i \in P} (\tau_i / \alpha_i) \alpha_i \bar{x}_i \\
& \leq \sum_{i \in N} \tau_i \bar{x}_i + M \sum_{i \in P} \alpha_i \bar{x}_i \\
& \leq \sum_{i \in N} \tau_i \bar{x}_i + M \alpha \\
& = \sum_{i \in N} \tau_i \bar{x}_i + \sum_{i \in P} \frac{1}{\alpha_i} \bar{x}_i + M \sum_{i \in P} \alpha_i \bar{x}_i \\
& \qquad \qquad \frac{1}{\alpha_i} < M \qquad \qquad \frac{1}{\alpha_i} = M \\
& = \sum_{i \in N} \tau_i \bar{x}_i = M \alpha
\end{aligned}$$

Por tanto $\bar{x} \in S$ y ACS

finalmente, sea $\bar{x} \in S$. Entonces

$$\sum_{i \in N} \tau_i \bar{x}_i = M \alpha$$

por tanto

$$\begin{aligned}
M \alpha &= \sum_{i \in N} \tau_i \bar{x}_i + \sum_{i \in P} \tau_i \bar{x}_i + \\
& + \sum_{i \in P} \tau_i \bar{x}_i
\end{aligned}$$

Si $\bar{x}_i > 0$ para $i \in N_{-}$, haciendo $\bar{x}_i = 0$ se seguirá en f y se incrementara la función objetivo.

Por tanto $\bar{x}_i = 0$ para $i \in N_{-}$ (1)

$\bar{x}_i \geq 0$ para $i \in N_0$ (2)

Por tanto

$$\begin{aligned}
M \alpha &= \sum_{i \in P} \tau_i \bar{x}_i = \sum_{i \in P} \tau_i \bar{x}_i + \\
& \qquad \qquad \frac{1}{\alpha_i} < M \\
& + \sum_{i \in P} \tau_i \bar{x}_i
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que existe $i_0 \in P$ tal que $(\tau_{i_0} / \alpha_{i_0}) < M$ y $\bar{x}_{i_0} > 0$.

Entonces

$$z = \sum_{i \in P} (\alpha_i / \alpha_i) \alpha_i \bar{x}_i +$$

$$\sum_{i \in N} (\alpha_i / \alpha_i) \alpha_i \bar{x}_i$$

= 0, $\alpha \bar{x}$, $\notin N \alpha$, absurdo

Luego para toda $i \in P$ tal que $\alpha_i \bar{x}_i > 0$ se tiene que $\bar{x}_i = 0$
 (3)

Finalmente, como consecuencia de (3)

$$\alpha \bar{x} = \sum_{i \in P} \alpha_i \bar{x}_i = \sum_{i \in N} \alpha_i \bar{x}_i, \dots (4)$$

Pero si

$$\alpha > \sum_{i \in N} \alpha_i \quad (4)$$

podemos incrementar un \bar{x}_i de tal modo que aún obtenemos un punto factible y obtenemos mayor valor de la función objetivo, por tanto

$$\bar{x}_i = \alpha_i \bar{x}_i = \alpha \dots (5)$$

por (1), (2), (3), y (5) $\bar{x} \in A$

luego $S = A$

Para facilitar el uso del lema haremos el siguiente cuadro sinóptico.

Num. caso	Caracterización del caso	conjunto solución
1	existe $i_0 \in N$ que $\tau_{i_0} > 0$	\emptyset
2.1	para todos $i \in N$ $\tau_i \leq 0$ para todos $i \in P$ $\tau_i < 0$	$\{ X \in \Omega^n \mid \begin{cases} X_i = 0 & \text{si } i \in N \\ X_i \geq 0 & \text{si } i \in N_0 \\ X_i = 0 & \text{si } i \in P \end{cases} \}$
2.2	para todo $i \in N$ $\tau_i < 0$ para todos $i \in P$ $\tau_i < 0$ existe $i_0 \in P$, $\tau_{i_0} = 0$	$\{ X \in \Omega^n \mid \begin{cases} X_i = 0 & \text{si } i \in N \\ X_i \geq 0 & \text{si } i \in N_0 \\ X_i = 0 & \text{si } \tau_i < 0 \text{ e} \\ & i \in P \text{ y donde } \sum \alpha_i X_i \leq \beta \end{cases} \}$
2.3	para todo $i \in N$ $\tau_i < 0$ existe $i_0 \in P$ tal que $\tau_{i_0} > 0$	$\{ X \in \Omega^n \mid \begin{cases} X_i = 0 & \text{si } i \in N \\ X_i \geq 0 & \text{si } i \in N_0 \\ X_i = 0 & \text{si } i \in P \text{ e} \\ & (\tau_i / \alpha_i) < M \end{cases} \}$ $\text{y } \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i = \beta$