

2928



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE CIENCIAS

# SOBRE EL GENERO DE GRUPOS FINITOS

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
**M A T E M A T I C O**  
P R E S E N T A:  
**JESUS ANTONIO DE LOERA HERRERA**

MAYO DE 1989

**TESIS CON  
VAL A FE PRIOR**



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **INDICE**

<b>Prólogo</b>	<b>0</b>
<b>I: El Género de un grupo</b>	<b>1</b>
<b>II: Clasificación de los Diagramas de Cayley planos</b>	<b>13</b>
<b>III: Los Grupos Planos son grupos de isometrías</b>	<b>44</b>
<b>Apendices</b>	<b>50</b>
<b>Grupos de isometrías en el espacio</b>	<b>50</b>
<b>Gráficas Poliedrales</b>	<b>56</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>66</b>

# PROLOGO

**E**ste trabajo explora una interacción entre los conceptos de gráfica, grupo y superficie. El concepto de *género de un grupo* fue definido por Arthur T. White [Wh1] en 1972, desde entonces se ha trabajado intensamente en clasificar a los grupos finitos por su género.

En el primer capítulo enunciaremos la noción de género de un grupo, esto lo haremos en términos de los conceptos de encaje de una gráfica en una superficie y de diagrama de Cayley. Resultados obtenidos por Maschke ([Ma],1896) permiten clasificar a los grupos de género cero (llamados planos), en el capítulo dos analizaremos los detalles de esta clasificación. En el tercer capítulo se presenta una nueva forma de clasificar a los grupos planos, se utilizan algunos resultados obtenidos por Mani [Man] en gráficas poliedrales y resultados auxiliares de Víctor Neumann-Lara en conexidad de gráficas. La idea principal de la clasificación fue obtenida por Javier Bracho y el autor, de algunas observaciones de L. Babai e Imrich [BaIm].

# CAPITULO UNO

## EL GENERO DE UN GRUPO

**E**n este capítulo vamos a especificar nuestro problema central y para ello vamos a dar las definiciones necesarias. Comenzaremos por especificar la noción de encaje de una gráfica en una superficie. Después hablaremos de los Diagramas de Cayley y con estos dos conceptos podremos relacionar de una forma interesante a los grupos, las gráficas y las superficies. A lo largo de todo el trabajo nos remitiremos a [Ha] para las definiciones básicas.

### Encajes de gráficas en superficies

Una  $n$ -variedad  $M$  es un espacio topológico Hausdorff con base numerable tal que todo punto de  $M$  tiene una vecindad homeomorfa a  $R^n$ . A una 2-variedad compacta, sin frontera la denominaremos una *superficie*. Las superficies están clasificadas en términos de un invariante combinatorio de ellas, la característica de Euler  $\chi(M)$ , y su orientabilidad:

Aquellas superficies que no contienen un subespacio homeomorfo a la banda de Möbius se denominan orientables y en otro caso se les llama no orientables.

**TEOREMA 1.1** Toda superficie orientable  $M$ , tal que  $\chi(M) = k$ , es homeomorfa a la esfera con  $\frac{2-k}{2} = \gamma$  asas pegadas.  $\gamma$  se denomina el género de  $M$

**TEOREMA 1.2** Toda superficie no orientable  $N$ , tal que  $\chi(N) = k$ , es homeomorfa a una esfera con  $2 - k = \gamma$  bandas de Möbius pegadas.  $\gamma$  se denomina el género de  $N$

(En el caso orientable, intuitivamente el género es el número de asas que forman la superficie).

**DEFINICION 1.3** Una gráfica  $G$  con vértices  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y aristas  $A(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  se encaja en la superficie  $M$  ( $G \hookrightarrow M$ ) si existe un subespacio de  $M$ ,  $G(M)$ , tal que:

$$G(M) = (\cup_{i=1}^n v_i') \cup (\cup_{j=1}^m x_j')$$

donde

- i)  $v_1', \dots, v_n'$  son puntos distintos de  $M$ .
- ii)  $x_1', \dots, x_m'$  son  $m$  arcos abiertos disjuntos en  $M$ .
- iii)  $x_j' \cap v_i' = \phi$  para  $i \in \{1, n\}$  y  $j \in \{1, m\}$
- iv) Si  $x_j = (v_{j1}, v_{j2})$  entonces el arco  $x_j'$  tiene a  $v_{j1}'$  y  $v_{j2}'$  como puntos extremos (para toda  $j \in \{1, m\}$ ).

(En la definición anterior un arco es la imagen homeomorfa de  $[0, 1]$  y es abierto si se le han quitado sus extremos.)

A las componentes conexas de  $M - G(M)$  las denominaremos *regiones del encaje*. En el caso que toda región del encaje sea homeomorfa al disco de dimensión dos, diremos

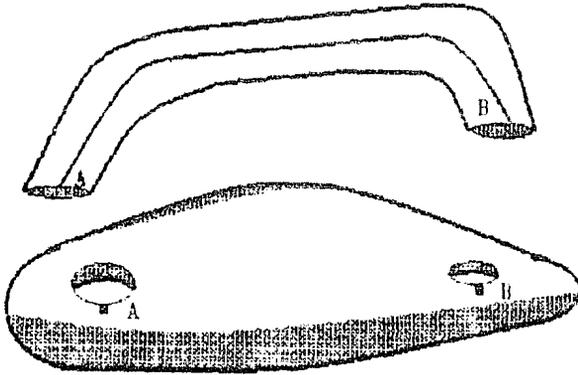
que el encaje es *celular*.

Al obtener un encaje de  $G$  en la superficie  $M$ , al encaje se le puede asociar el género de  $M$ , le llamaremos el *género del encaje*.

Vamos a garantizar la existencia de un encaje para cualquier gráfica:

**TEOREMA 1.4** *Dada cualquier gráfica  $G$ , existe una superficie  $M$ , tal que  $G \hookrightarrow M$*

**Demostración:** Por inducción en el número de aristas de la gráfica. Si la gráfica consta sólo de una arista, tiene naturalmente un encaje en la esfera, pues basta considerar la imagen del intervalo  $[0, 1]$ , bajo un homeomorfismo a la esfera. Por hipótesis de inducción cualquier gráfica con  $n$  aristas tiene un encaje en alguna superficie  $M$ . Para una gráfica  $G$  con  $n + 1$  aristas retiramos cualquier arista  $v$ , el resto de la gráfica  $G - v$  la podemos encajar en  $M$  y la arista que falta la agregamos encajando la arista  $v$  en un asa que pegamos a  $M$ . 



La característica de Euler de  $M$ , el invariante mencionado, se puede definir en términos de una gráfica  $G$  encajada celularmente en ella como el número de vértices de  $G$  menos sus aristas más el número de regiones del encaje. Este número es independiente de la gráfica y como dijimos determina a la superficie.

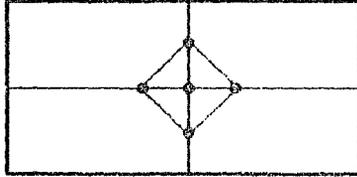
Hay otra definición del encaje de una gráfica en términos de complejos simpliciales, que desde luego es equivalente a la anterior (vea [Mi], [Mo] y [Yo]); para nuestros propósitos basta la definición anterior y manejar la intuición de que una gráfica  $G$  se encaja en la superficie  $M$  si  $G$  se puede dibujar en ella sin intersecciones impropias.

Los encajes de la gráfica  $G$  tienen dos encajes con género mínimo, uno orientable y otro no orientable. *A todo lo largo de este trabajo nos ocuparemos sólo del caso orientable, pero sí haremos la observación de que algunos teoremas tienen su contraparte no orientable. Al hablar de género nos estaremos refiriendo al género orientable.*

**DEFINICION 1.5** *El género de la gráfica  $G$ ,  $\gamma(G)$ , es el mínimo de los géneros de*

encajes de  $G$  en superficies orientables.

Como ejemplo piense en  $K_5$ , como sabemos es una gráfica que no es plana, sin embargo tiene un encaje en el Toro (vea la figura siguiente), que es un encaje de género uno, es entonces  $K_5$  una gráfica de género uno.



El género de una gráfica ha sido estudiado a profundidad por su relación con el teorema de coloración de mapas (además de él de los cuatro colores). A la fecha hay muy pocas familias de gráficas para las cuales se conoce su género. Muchos autores han trabajado en determinar los géneros de gráficas muy conocidas o que tienen un interés especial para otros problemas ( como es el caso de la determinación del género de  $K_n$  para el problema de coloración de mapas). Ringel determinó que el género del  $n$ -cubo  $Q_n$  está dado por  $\gamma(Q_n) = 1 + 2^{n-3}(n-3)$  para  $n \geq 2$ . Auslander, Brown y Youngs exhibieron una familia de gráficas  $G_n$  para la que  $\gamma(G_n) = n$ . Ringel encontró que el género de la gráfica  $K_{m,n}$  es  $\lfloor \frac{(m-2)(n-2)}{4} \rfloor$ . Ringel y Youngs mostraron que el género de la gráfica completa  $K_n$  es  $\lfloor \frac{(n-3)(n-4)}{12} \rfloor$  (vea [Wh2]). La técnica usual para determinar el género es usar la fórmula de la característica de Euler en términos del género  $k$  de la superficie:

$$V - A + C = 2 - 2k$$

Donde  $V$ ,  $A$ ,  $C$  corresponden al número de vértices, aristas y caras para un encaje de la gráfica  $G$  en la superficie orientable de género  $k$ , para encontrar una cota inferior del género de la gráfica en términos del número de caras. En segundo lugar se construye un encaje de la gráfica que alcance la cota impuesta; para esto se han utilizado muchas técnicas, en ocasiones sólo convenientes para un caso especial, otras son poco o mucho más generales. Vamos a analizar un caso interesante, pues clasifica y enumera todos los encajes en superficies orientables de una gráfica dada.

### Rotación de gráficas

Dada  $G = (V(G), A(G))$  una gráfica, en la cual llamamos a sus vértices  $1, \dots, n$ ; para cada  $i = 1, \dots, n$  definamos  $V(i)$  como el conjunto de los vértices adyacentes a  $i$ .

Sea  $p_i : V(i) \rightarrow V(i)$  una permutación cíclica de los elementos de  $V(i)$ .

A cada permutación  $p_i$  le llamaremos una *rotación alrededor del vértice  $i$* , la encada  $(p_1, \dots, p_n) = \sigma$  se llamará una *rotación de la gráfica  $G$* .

Una manera de obtener una rotación para una gráfica es a partir de sus encajes; si tiene un encaje en la superficie orientable  $M$ , para cada orientación de  $M$  la rotación en el vértice  $v$  es la permutación de sus vértices adyacentes, que induce la orientación localmente.

Ahora demostraremos el teorema que establece la relación entre la rotación como concepto combinatorio y los encajes de la gráfica:

**TEOREMA 1.6** *Las rotaciones de una gráfica se corresponden biunívocamente con sus encajes celulares en superficies orientables.*

**Demostración:** Definamos  $W$  como la totalidad de pares ordenados de vértices  $(a, b)$  tales que la pareja no ordenada  $\{a, b\}$  correspondiente es una arista de la gráfica  $G$ .

Dada una rotación  $(p_1, \dots, p_n)$  de la gráfica  $G$ , sea  $P : W \rightarrow W$  definida por la fórmula:

$$P((a, b)) = (b, p_b(a))$$

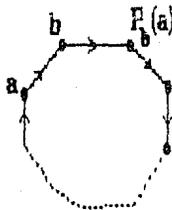
La transformación  $P$  está bien definida, ya que si  $\{a, b\} \in A(G)$ , tenemos que  $a \in V(b)$ , por lo cual  $p_b(a)$  tiene significado; además  $P$  es 1-1, pues parejas distintas van a dar a parejas distintas y la pareja  $(a, b)$  proviene de la pareja  $(p_a^{-1}(b), a)$ .

Consideremos las órbitas determinadas en  $W$  por la permutación  $P$ , les llamaremos *circuitos de la rotación  $\sigma$* .

Cada circuito de la rotación determina un polígono con aristas dirigidas, considere un disco o celda en la forma de ese polígono, con las mismas orientaciones en sus lados. Para el circuito

$$\{(a, b), (b, p_b(a)), (p_b(a), p_{p_b(a)}(b)), \dots, (p_a^{-1}(b), a)\}$$

tenemos asociada la celda



La instrucción de identificación de estas celdas es que  $(a, b)$  se identifica con  $(b, a)$ . Como toda arista dirigida  $(a, b)$  tiene una compañera  $(b, a)$ , el espacio obtenido

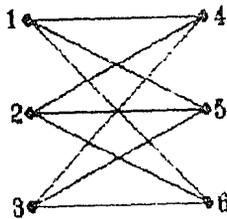
no tiene frontera, es orientable pues  $(a,b)$  se identifica con  $(b,a)$ . Por la definición del pegado de las celdas tenemos un encaje de la gráfica rotada en la superficie obtenida.

Como observamos, si  $G \hookrightarrow M$  a una orientación de  $M$  corresponde una rotación de  $G$ , de hecho, de esa rotación obtenemos el encaje original de  $G$ : la misma superficie, con la misma orientación en la superficie, las mismas regiones, con las mismas adyacencias entre ellas.  $\rightarrow$

La idea intuitiva de lo que son los circuitos de la rotación nos la da pensar en las aristas de la gráfica como bastidores o armazones de una estructura de madera, vamos a pegar retazos de tela en las aristas (bastidores) siguiendo las instrucciones, nos las dan los circuitos de la rotación de nuestra gráfica; circulamos por las aristas sujetando la tela en ellas; en pocas palabras los circuitos de la rotación serán las fronteras de discos (retazos de tela) que cubrirán a todo vértice de la gráfica. Por cada arista pasamos dos veces en sentidos opuestos (si la arista es  $\{a,b\}$  usamos  $(a,b)$  y  $(b,a)$ ).

Los circuitos son las regiones del encaje, podemos calcular fácilmente la característica de Euler de la superficie en que encajamos a la gráfica rotada, y por tanto tenemos el género del encaje.

Veamos el siguiente ejemplo con  $K_{3,3}$ , figura siguiente.



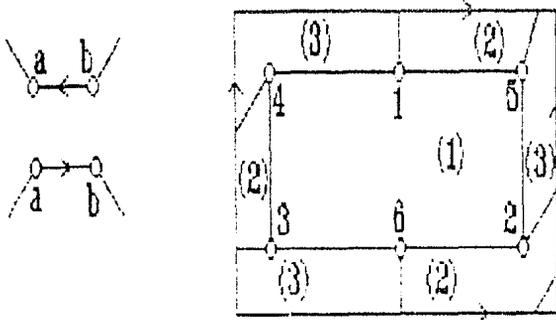
Sean los vértices de  $K_{3,3} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  con  $V(i)$  los vecinos del vértice  $i$ , tenemos entonces:  $V(1) = V(2) = V(3) = \{4, 5, 6\}$ ;  $V(4) = V(5) = V(6) = \{1, 2, 3\}$ . Vamos a escoger una rotación para la gráfica de entre las 64 posibles rotaciones de  $K_{3,3}$ , tomemos:

$$\begin{aligned} p_1 &: (4, 5, 6) & p_4 &: (1, 2, 3) \\ p_2 &: (4, 5, 6) & p_5 &: (1, 2, 3) \\ p_3 &: (4, 5, 6) & p_6 &: (1, 2, 3) \end{aligned}$$

Los circuitos de la rotación (los discos que vamos a identificar) son:

$$\begin{aligned} (1) & \{(1,5)(5,2)(2,6)(6,3)(3,4)(4,1)\} \\ (2) & \{(5,1)(1,6)(6,2)(2,4)(4,3)(3,5)\} \\ (3) & \{(2,5)(5,3)(3,6)(6,1)(1,4)(4,2)\} \end{aligned}$$

el encaje de  $K_{3,3}$  obtenido es el siguiente:



El género del encaje es uno, pero  $K_{3,3}$  no es plana, por lo que el género de  $K_{3,3}$  es uno, al ser el menor posible.

### Diagramas de Cayley y Género de un Grupo

En dos de sus trabajos publicados en 1879 Cayley mostró una manera de representar un grupo con una gráfica; obtenida del grupo y una presentación del mismo. En honor de Cayley se le ha denominado *DIAGRAMA DE CAYLEY*.

Consideremos un grupo  $\Gamma$  y un conjunto generador del mismo  $\Delta$ . El diagrama de Cayley  $C_\Delta(\Gamma)$  tiene como conjunto de vértices los elementos de  $\Gamma$  y todas las aristas dirigidas de la forma  $(g, g\delta)$ , para  $g \in \Gamma$  y  $\delta \in \Delta$ . Cada arista dirigida  $(g, g\delta)$  está "coloreada" por el generador  $\delta$ . Si suprimimos los colores y las direcciones de las aristas obtendremos una multigráfica  $G_\Delta(\Gamma)$  llamada *multigráfica de Cayley*. Para asegurar que sea una gráfica, es decir que no tenga lazos ni aristas múltiples asumiremos las siguientes restricciones sobre el diagrama de Cayley:

- i)  $I \notin \Delta$  (con  $I$  el elemento identidad)
- ii) Si  $\delta \in \Delta \cap \Delta^{-1}$  entonces  $\delta^2 = I$   
con  $\Delta^{-1} = \{\delta^{-1} | \delta \in \Delta\}$
- iii) Si  $\delta^2 = I$ , entonces cada par  $(g, g\delta), (g\delta, g)$  de aristas dirigidas será reemplazada con una sola arista no dirigida  $[g, g\delta]$

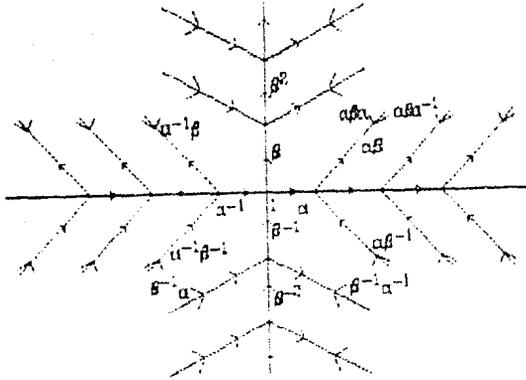
A continuación vamos a construir en detalle algunos ejemplos:

Considérese la presentación siguiente:

$$F_2 = \langle \alpha, \beta \rangle$$

No se pone restricción alguna, los elementos son palabras infinitas en los dos generadores, la gráfica tiene un número infinito de vértices y no contiene ciclos (véase la figura

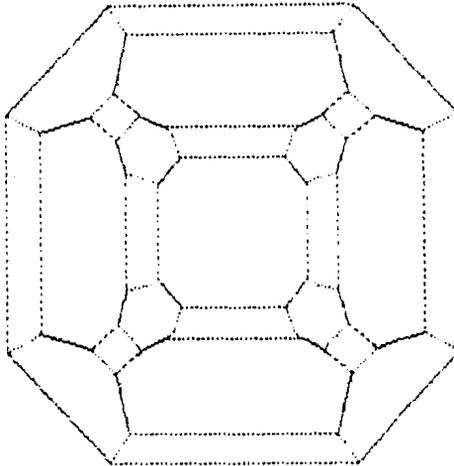
siguiente)



Otro ejemplo lo tenemos en el grupo de simetrías del octaedro que tiene la siguiente presentación:

$$\langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = (\alpha\beta)^2 = (\alpha\gamma)^2 = (\beta\gamma)^2 = 1 \rangle$$

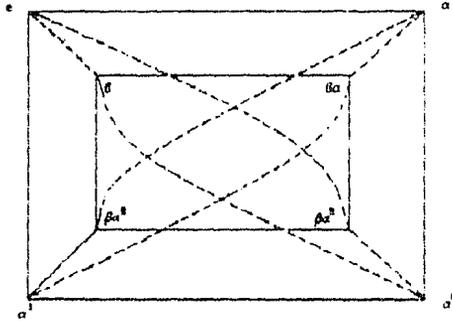
Esta presentación tiene asociado el siguiente diagrama, con  $\alpha$  de color verde,  $\beta$  de color amarillo y  $\gamma$  de color rojo:



Consideremos ahora el grupo de los cuaternios generalizados, para su definición demos la presentación siguiente:

$$Q^n = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^{2^{n-1}} = 1, \beta\alpha\beta^{-1} = \alpha^{-1}, \beta^2 = \alpha^{2^{n-2}} \rangle$$

El dibujo del diagrama asociado a esta presentación, en el caso  $n = 3$  es el siguiente:



Para nosotros es un ejemplo interesante pues, cualquier diagrama de Cayley asociado con el grupo  $Q^n$  no tiene un encaje en la esfera o el plano (al final de este capítulo veremos los detalles).

A nosotros son justamente estas propiedades topológicas de los diagramas, las que nos interesan.

Las relaciones que hemos señalado entre los conceptos de grupo, superficie y gráfica son de la siguiente naturaleza:

A cada grupo podemos asociarle una colección de diagramas de Cayley (uno por cada conjunto generador). A su vez cada diagrama puede encajarse en algunas superficies (alguna de ellas con género mínimo), aprovechando esto definiremos.

**DEFINICION 1.7** El género de un diagrama de Cayley se define como el género de su gráfica subyacente.

**DEFINICION 1.8** Sea  $\Gamma$  grupo, el género de  $\Gamma$ ,  $\gamma(\Gamma)$ , es el género mínimo de entre los diagramas de Cayley asociados con el grupo.

La pregunta que nos planteamos ahora es:

**¿Cuáles son los grupos de género cero o planos?**

La respuesta a esta pregunta es el objetivo principal de los siguientes capítulos.

Un aspecto importante de los diagramas de Cayley es que realizan en sus automorfismos de color al grupo que les dio origen, vamos a estudiar en detalle esto, pues nos será útil en lo futuro.

**LEMA 1.9** Dado un grupo  $\Gamma$  con conjunto generador  $\Delta$ , el conjunto de los automorfismos  $\alpha$  de  $C_\Delta(\Gamma)$  tales que:  $\alpha(gh) = \alpha(g)h \forall g \in \Gamma$  y  $\forall h \in \Delta$  es un grupo y coincide con el conjunto de automorfismos que preservan color en las aristas dirigidas de  $C_\Delta(\Gamma)$ .

**Demostración:** Consideremos dos automorfismos  $\alpha$  y  $\beta$  que satisfacen la propiedad mencionada. Claramente dado  $g \in \Gamma$ ,  $h \in \Delta$  tendremos:

$$\alpha\beta(gh) = \alpha(\beta(gh)) = \alpha(\beta(g)h) = \alpha(\beta(g))h = \alpha\beta(g)h$$

La transformación identidad satisface también la propiedad y si  $\alpha^{-1}$  es el inverso de  $\alpha$  para cada  $g \in \Gamma$  existe  $k \in \Delta$  tal que:

$$\alpha(k) = g \text{ por lo cual } \alpha^{-1}(gh) = \alpha^{-1}(\alpha(k)h) = \alpha^{-1}(\alpha(kh)) = kh = \alpha^{-1}(g)h$$

de donde el conjunto especificado es efectivamente un grupo. Por otra parte si un automorfismo  $\alpha$  preserva color, dado  $g \in \Gamma$ , y sus aristas  $(g, gh_1), (g, gh_2), \dots, (g, gh_n)$  con  $h_i \in \Delta$ . Por construcción  $(g, gh_j)$  tiene color  $h_j$  de modo que  $(\alpha(g), \alpha(gh_j))$  tiene color  $h_j$  lo cual ocurre solamente si  $\alpha(gh_j) = \alpha(g)h_j$ , cumpliéndose la propiedad para los automorfismos que preservan color. El modo en que se construyó el diagrama de Cayley asegura por último que al cumplir la propiedad el automorfismo  $\alpha$ , preservará color de las aristas dirigidas. 

Podemos establecer ahora el isomorfismo entre el grupo  $\Gamma$  con el cual construimos el diagrama de Cayley y el grupo de los automorfismos que preserva color de las flechas del diagrama al cual denominaremos los automorfismos de color de  $C_\Delta(\Gamma)$ . y lo denotaremos por  $\Omega(\Gamma, \Delta)$ .

**TEOREMA 1.10** Sea algún diagrama de Cayley asociado al grupo  $\Gamma$ ,  $C_\Delta(\Gamma)$ , entonces el grupo de automorfismos de color  $\Omega(\Gamma, \Delta)$  es isomorfo a  $\Gamma$ .

**Demostración:** Definamos  $\lambda : \Gamma \rightarrow \Omega(\Gamma, \Delta)$  por  $\lambda(g) = \theta_g$  donde:

$$\theta_g : V(C_\Delta(\Gamma)) \rightarrow V(C_\Delta(\Gamma))$$

está dado por  $\theta_g(k) = gk$  (multiplicación izquierda por  $g$ ).

Observemos que efectivamente  $\theta_g \in \Omega(\Gamma, \Delta)$ , pues  $\theta_g$  es una función biyectiva (resultado de que  $\Gamma$  es grupo) y preserva adyacencias (por construcción de  $C_\Delta(\Gamma)$ ) y dados  $k \in \Gamma$  y  $h \in \Delta$  tendremos:

$$\theta_g(kh) = g(kh) = (gk)h = \theta_g(k)h$$

por lo que el lema anterior asegura que  $\theta_g$  preserva color.  $\lambda$  es un homomorfismo pues dados  $g_1, g_2, k \in \Gamma$   $\lambda(g_1g_2) = \theta_{g_1g_2}$  tenemos

$$\theta_{g_1g_2}(k) = k(g_1g_2) = (kg_1)g_2 = \theta_{g_1}(k)g_2 = \theta_{g_2}(\theta_{g_1}(k))$$

que a su vez es igual a:

$$\theta_{g_2}(\lambda(g_1)(k)) = \lambda(g_2)(\lambda(g_1)(k)) = \lambda(g_1)\lambda(g_2)(k)$$

$\lambda$  es inyectiva, pues por su definición  $\ker \lambda = \{e\}$ . Además, dado  $\alpha \in \Omega$ , sea  $g = \alpha(e)$  con  $e$  la identidad en  $\Gamma$ . Cualquier elemento del grupo puede ser escrito como una palabra en los generadores de  $\Delta$ , es decir, para  $k \in \Gamma$ ,  $k = h^{a_1} h^{a_2} \dots h^{a_n}$  con  $h_i \in \Delta$  y  $a_j = \pm 1$  de donde:

$$\alpha(k) = \alpha(ek) = \alpha(e)h^{a_1}h^{a_2}\dots h^{a_n}$$

por lo que  $\alpha = \theta_g$ , comprobándose así que  $\lambda$  es sobreyectiva, quedando así establecido el isomorfismo. 

De la prueba anterior es claro que cualquier vértice puede ser etiquetado con  $e$ , la identidad en  $\Gamma$ , y una vez hecho esto, todos los vértices tienen su etiqueta determinada. El grupo  $\Gamma$  actúa transitivamente en los vértices (pues actúa transitivamente en sí mismo). De este modo la gráfica de Cayley asociada a cualquier diagrama es una gráfica transitiva.

## Los Cuaterniones

Ahora vamos a demostrar el siguiente resultado que habíamos dejado pendiente, la idea de la demostración es de Babai [Ba1].

**LEMA 1.11** *Si  $H$  es un conjunto de generadores para el grupo  $Q^n$ , entonces el diagrama de Cayley asociado  $C_H(Q^n)$  no es un plano.*

Antes vamos a estudiar algunas propiedades de los cuaterniones que nos serán muy útiles:

Obsérvese que el orden del grupo  $Q^n$  es justamente  $2^n$ , esto se sigue de observar que toda palabra en el alfabeto  $\{\alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}\}$  puede ser llevada a la forma  $\alpha^s \beta^t$  con  $0 \leq s \leq 2^{n-1} - 1$ ,  $t = 0, 1$ . Demostrándolo por inducción en la longitud  $L$  de la palabra, para  $L = 1$  tenemos

$$\alpha^{-1} = \alpha^{2^{n-1}-1}, \text{ y también } \beta^{-1} = \beta^3 = \beta^2\beta = \alpha^{2^{n-2}}\beta.$$

Supongamos cierta la afirmación para palabras de longitud  $L - 1$ ; sea  $s$  una palabra de longitud  $L$ , asociando podemos separar la palabra  $s$  en una palabra  $W$  de longitud  $L - 1$  seguida de un elemento del alfabeto  $(\alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1})$  analicemos el caso en que este elemento es  $\beta$  los restantes son similares:

$s = W\beta = \alpha^s \beta^t \beta = \alpha^s \beta^{t+1}$ , si  $t$  es cero, tenemos  $s = \alpha^s \beta$ , por el contrario, si  $t$  es uno,  $s = \alpha^s \beta^2$ , que por la tercera relación que satisface  $Q^n$  tendremos:  $\alpha^s \alpha^{2^{n-2}} = \alpha^{s+2^{n-2}}$ , de modo que  $s = \alpha^r$  con  $r$  congruente a  $s + 2^{n-2}$  módulo  $2^{n-1}$ , cumpliendo ser de la forma esperada.

La segunda observación importante es que el único elemento de orden 2 es  $\gamma = \beta^2$ . Para demostrar este hecho hay que analizar los distintos tipos de un elemento de orden 2:

$x = \alpha^s$  o bien  $x = \alpha^s \beta$ , de modo que si  $x = \alpha^s$  y  $x^2 = 1$  tendremos que  $\alpha^{2s} = 1 = \alpha^{2^{n-1}}$  y como  $s$  es un número entre cero y  $2^{n-1} - 1$ , por lo que  $s = 2^{n-2}$  y  $\alpha^s = \beta^2 = \gamma$  (recuerde que el orden de  $\alpha$  es justamente  $2^{n-1}$ ). De este hecho además podemos concluir que  $\gamma$  es potencia de todo elemento distinto del neutro (el orden de todo elemento es una potencia de dos). En el otro caso, cuando  $x = \alpha^s \beta$  supongamos que  $s$  es el exponente más pequeño para el que  $x$  es involutivo.  $\alpha^s \beta \alpha^s \beta = 1$  y de ahí tenemos  $\alpha^s \beta \alpha^s = \beta^{-1}$  pero sabemos que  $\alpha \beta^{-1} \alpha = \beta^{-1}$ , por lo que de una sencilla sustitución se tiene:

$$\alpha^s \beta \alpha^s = \beta^{-1} = \alpha \beta^{-1} \alpha$$

y por tanto

$$\alpha^{s-1} \beta \alpha^{s-1} \beta = 1$$

que es una contradicción, con nuestra suposición sobre  $s$ .

Por último observaremos que este elemento privilegiado  $\gamma$  es parte del centro del grupo. Esto es resultado de su expresión en términos de  $\alpha$  y de  $\beta$  pues entonces tenemos  $x \in Q^n$  y  $x = \alpha^s \beta$  por lo que

$$x\gamma = \alpha^s \beta (\beta^2) = \alpha^s (\beta^2) \beta = \alpha^{2^{n-2}+s} \beta$$

pero asociando de nuevo

$$\alpha^{2^{n-2}+s} \beta = \alpha^{2^{n-2}} (\alpha^s \beta) = \gamma (\alpha^s \beta)$$

que es justamente  $\gamma x$

Ahora estamos en posibilidades de demostrar el lema:

**Demostración:**  $H$  genera un grupo no abeliano por lo que contiene dos elementos  $x, y$  tales que  $xy \neq yx$ . Sea la gráfica  $Y = C_{\{x,y\}}(Q^n)$ ; observe que  $Y \subseteq C_H(Q^n)$  como  $\gamma$  es el único elemento de orden dos y está en el centro, los órdenes de  $x$  y de  $y$  son distintos de dos, por lo cual  $rx, rx^{-1}, ry, ry^{-1}$  son distintos para cualquier  $r \in Q^n$ . Por eso sabemos que  $Y$  es una gráfica regular de grado cuatro.

Además  $Y$  no contiene triángulos, pues cualquier producto de tres factores de  $x, x^{-1}, y, y^{-1}$  no es igual a la identidad.

$$x^{\pm 1} x^{\pm 1} y^{\pm 1} = 1, x^{\pm 1} y^{\pm 1} x^{\pm 1} = 1, y^{\pm 1} x^{\pm 1} x^{\pm 1} = 1$$

Implicaría que  $y$  es una potencia de  $x$  lo que contradice  $xy \neq yx$ . Por otra parte la combinación  $x^{\pm 1}x^{\pm 1}x^{\pm 1} = 1$  implica que el orden de  $x$  es uno o bien es un múltiplo de tres pero  $x$  es distinta de la identidad y sabemos que su orden es una potencia de dos por lo que la combinación no es posible.

Un razonamiento totalmente igual es aplicado para los casos restantes (en que  $y$  toma el lugar de  $x$ ). Con esto podemos concluir que  $Y$  es una gráfica regular de grado cuatro y sin triángulos. Sean  $V = |V(Y)|$ ,  $A = |A(Y)|$  y  $C = |C(Y)|$ ; el número de vértices, aristas y caras de un encaje plano de la gráfica  $Y$ .

De modo que  $A = 2V$  y  $A \geq C$  por lo tanto  $A \geq V + C$ . Pero por otra parte  $V + C > A$  (pues al ser un encaje en la esfera  $V + C - A = 2$ ). Por lo que llegamos a una contradicción. ✎

Visto como gráfica el diagrama de Cayley tiene definido un género, de la manera como lo hicimos en la parte anterior, lo que demostramos es que los diagramas de Cayley asociados a los cuaterniones son de género al menos uno.

# CAPITULO DOS

## CLASIFICACION DE LOS DIAGRAMAS DE CAYLEY PLANOS

**E**n este capítulo daremos la clasificación de los grupos planos, rellenando los detalles de la demostración original de Maschke [Ma] (es del siglo pasado, 1896). A lo largo de esta segunda parte aparecen varias presentaciones de los grupos poliedrales; para mayor información sobre las presentaciones usadas puede consultarse [CoMo] y el apéndice uno. La operación de elementos de un grupo la efectuaremos de izquierda a derecha.

Nuestro teorema de clasificación es el siguiente:

**TEOREMA 2.1** Si  $\Gamma$  es un grupo plano (es decir, si existe un conjunto de generadores  $\Delta$  tal que  $C_\Delta(\Gamma) \hookrightarrow S^2$ ) entonces  $\Gamma$  es alguno de los siguientes grupos:

$Z_n$	$Z_n \times Z_2$
$D_n$	$D_n \times Z_2$
$A_4$	$A_4 \times Z_2$
$S_4$	$S_4 \times Z_2$
$A_5$	$A_5 \times Z_2$

**Demostración:** Vamos a demostrar en realidad mucho más, obtendremos la clasificación de los todos los diagramas de Cayley planos, como un grupo queda definido por sus presentaciones sabremos entonces a qué grupos corresponden los diagramas (un diagrama es un dibujo de la presentación del grupo). Sabemos que una gráfica plana tiene valencia mínima a lo más cinco (vea [Ha]), de modo que los diagramas de Cayley planos tienen una presentación con a lo más cinco generadores. La demostración es por casos, que se siguen de las proposiciones 2.3, 2.7, 2.11 y 2.18. Los casos por analizar son pocos, los presentamos en la tabla siguiente:

casos posibles en cuanto a la valencia  
para un diagrama de Cayley plano

valencia	1	2	2	3	4	5	3	4	5	4	5
no involutivos	0	1	0	1	2	2	0	1	1	0	0
involutivos	1	0	2	1	0	1	3	2	3	4	5
Num. de generadores	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5

Los casos los puede ir siguiendo de la siguiente forma: Si la presentación  $\Delta$  tiene generadores involutivos pertenece a las proposiciones 2.11 y 2.18 y en a las proposiciones 2.3 y 2.7 en caso contrario.

No se pueden presentar otros casos por el número límite de valencia, y vamos a descartar los dos últimos casos presentados, lo haremos con ayuda del lema 2.2.

Este resultado nos permite descartar el caso de diagramas construidos con 4 o 5 generadores involutivos, pues de ser plano, el diagrama contiene triángulos, que ocupan

3 de los colores (generadores) en sus aristas, por lo que un generador es expresable en términos de los otros dos, así que con un subconjunto de los generadores se tiene un diagrama de Cayley que cae en otro caso.

Si  $C_{\Delta}(\Gamma)$  un diagrama de Cayley plano, podemos suponer que el conjunto  $\Delta$  de generadores es mínimo, en el sentido de que cualquier generador no puede expresarse en términos de los restantes.

Tomaremos la convención de usar dos colores para distinguir a los generadores, en particular el verde siempre denotará un generador no involutivo. Cuando digamos que una relación del grupo induce un camino en el diagrama, nos referiremos a que a partir de un vértice dado (elemento del grupo), aplicaremos la relación siguiendo la sucesión de aristas (generadores) que marca; así mismo, cada camino cerrado en el diagrama induce una relación de manera natural obtenida de las aristas (generadores) del camino, compuestas en el orden marcado por el camino.

Los ciclos en la gráfica realizan o representan una relación del grupo, que se obtiene al leer en algún sentido los generadores que forman el ciclo. Por último llamaremos indistintamente líneas o aristas a las aristas dirigidas, cuando en el contexto no importe su dirección. 

**LEMA 2.2** Toda gráfica plana con valencia mínima al menos cuatro tiene triángulos.

**Demostración:** Sean  $V$ ,  $A$ ,  $C$  son el número de vértices, aristas y caras de la gráfica; por hipótesis  $A \geq 2V$  y si no hubiera triángulos  $A \geq 2C$  por tanto  $A \geq V + C$  pero al ser plana de la característica de Euler se tiene  $V + C \geq A$  que es una contradicción. 

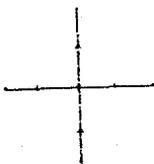
**PROPOSICION 2.3** Los grupos cíclicos son planos.

**Demostración:** Los grupos cíclicos tienen una presentación en un sólo generador, que en su representación gráfica son polígonos dirigidos. Obviamente poseen un encaje en el plano. 

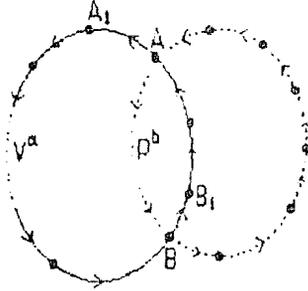
Los lemas 2.4, 2.5, 2.6 vamos a utilizarlos varias veces, son resultados útiles para las proposiciones que demuestran el teorema de clasificación.

**LEMA 2.4** Si un diagrama de Cayley con dos generadores no involutivos tiene un encaje en el plano, las líneas coloreadas que concurren en un punto son tales que dos líneas de un mismo color no están separadas por una línea de otro color.

**Demostración:** Observe la figura que muestra la situación prohibida



La demostración es por contradicción. Si se cruzan de la manera anterior dos caminos de color distinto, existe un segundo vértice en el que se cruzan igual (vea la figura siguiente).

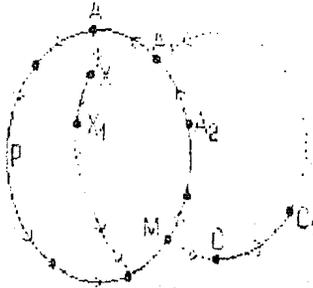


Asignemos los colores rojo y verde a los generadores del grupo  $R$  y  $V$ ; supongamos que dos polígonos, uno verde y uno rojo, se cruzan en dos vértices  $A$  y  $B$ ; esto implica que el grupo satisface una relación  $V^a R^{-b} = 1$  (que es un cierto camino cerrado). Apliquemos la relación al elemento  $A_1 = AV$ , llamemos  $B_1$  a  $A_1 V^a$ . Obsérvese que  $B_1 \neq A$  pues de otra forma  $V = R^k$ , lo que es una contradicción pues  $R$  y  $V$  son generadores independientes.

Como de aplicar la relación al vértice  $A_1$  encontramos un camino cerrado que parte de él y regresa a él,  $B_1 R^{-b}$  es  $A_1$ , pero eso es un absurdo;  $R^{-b}$  es un camino rojo que parte de  $B_1$  y que no puede cruzar el polígono rojo, pues entonces cuatro aristas rojas tocarían un punto, lo cual no es posible.

**LEMA 2.5** *Cualquier polígono monocromático contiene en su interior todos los elementos del diagrama o bien ninguno, por tanto los polígonos monocromáticos son caras*

**Demostración:** Para la demostración nos apoyaremos en la figura que sigue:

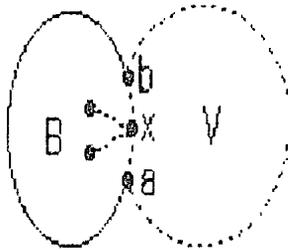


Supongamos que en el interior de un polígono verde  $P$  hay puntos del diagrama. Obligado por la conexidad del diagrama, de algún vértice  $A$  del polígono sale, hacia el interior, una línea roja que une  $A$  con  $x$ . Sea  $\lambda$  el orden del elemento  $RV$ , existe una trayectoria cerrada  $T$  asociada a  $(RV)^\lambda = 1$ , que parte de  $A$ . Supongamos que esta trayectoria tiene una porción exterior a  $P$  (vea la figura); la parte interior de  $T$  está representada por la relación  $(RV)^{\lambda-\mu}$ , sea  $M$  el último punto de  $P$ , que interseca  $T$  al salir. Podemos desde  $M$  regresar a  $A$  usando sólo aristas verdes, ya que  $A$  es igual a  $MV^k$ . De esta manera  $(RV)^{\lambda-\mu}V^k = 1$ . Esta relación induce una trayectoria cerrada que parte de cualquier punto. Sea  $x_1 = xV$ , en particular de  $x_1$  sale una trayectoria  $(RV)^{\lambda-\mu}V^k$  que regresa a  $x_1$ , pero si  $(RV)^{\lambda-\mu}x_1 = c_1$  (véase figura) y la trayectoria  $V^k$  tiene que llegar a  $x_1$ , entonces algún vértice de  $P$  recibe cuatro aristas verdes, lo cual es imposible sin cruzar al polígono  $P$ .

En conclusión, la trayectoria  $(RV)^\lambda$ , partiendo de  $A$ , está totalmente contenida en  $P$ . Esto explica que la arista roja que llega a  $A_1$  es interior y por el lema anterior también la que sale (si es involutivo el generador rojo la prueba es más directa). Aplicando el razonamiento anterior a  $A_1$  se concluye lo mismo para  $A_2$  y sucesivamente para todos los puntos del polígono  $P$ . Con esto se tiene el lema. 

**LEMA 2.6** *Los lados de cualquier cara bicromática son alternadas en los colores (generadores) por lo que son de longitud par.*

**Demostración:** Véase figura siguiente.

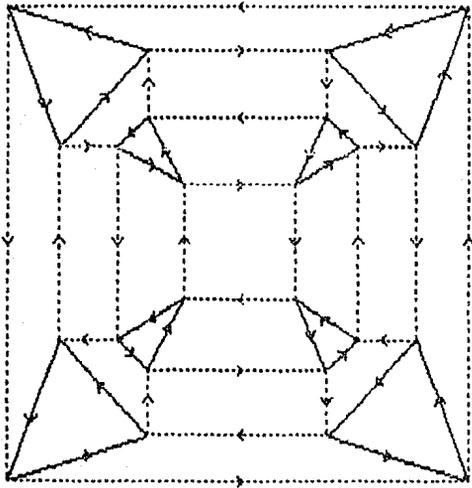
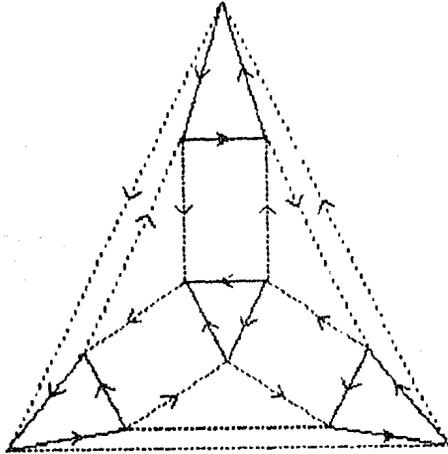


Consideremos una cara bicromática  $B$  sin alternación de colores. Sean  $a$  y  $b$  dos aristas consecutivas de color verde, y  $V$  la cara verde que bordean, si  $x$  es el punto común entre  $a$  y  $b$ , las aristas de color rojo (posiblemente una), que salen de  $x$ , no están en el interior, de  $V$  por el lema anterior, pero tampoco de  $B$  por hipótesis, lo que es una contradicción. 

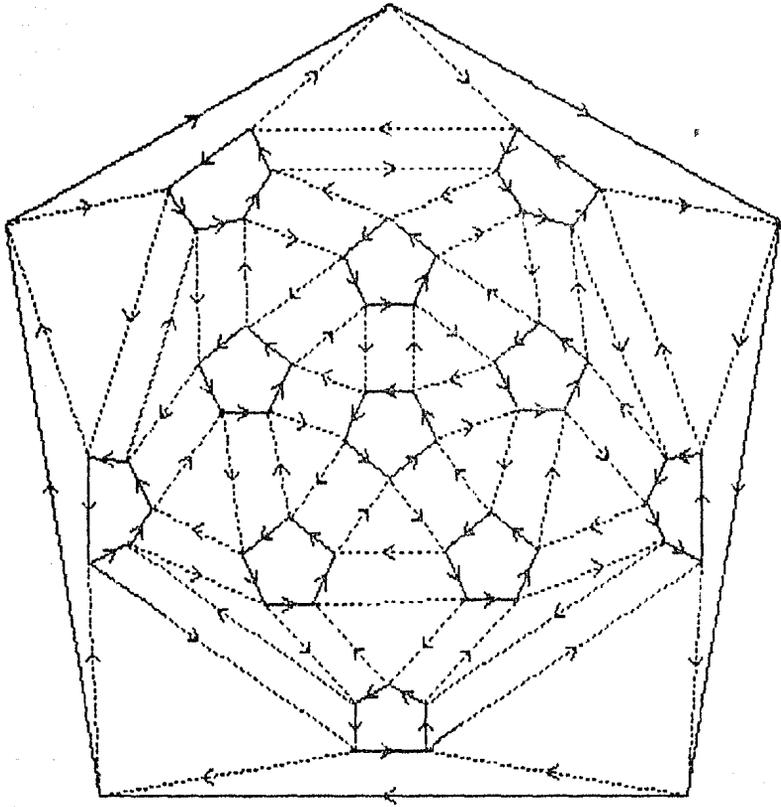
**PROPOSICION 2.7** *Supongamos que  $C_\Delta(\Gamma)$  es plano con  $\Delta = \{R, V\}$ ,  $R$  y  $V$  no involutivos, entonces  $\Gamma$  es uno de los siguientes grupos:*

- (1)  $\Gamma = \langle R, V \mid V^3 = 1, (RV)^2 = 1, R^5 = 1 \rangle = A_4$
- (2)  $\Gamma = \langle R, V \mid V^3 = 1, (RV)^2 = 1, R^4 = 1 \rangle = S_4$
- (3)  $\Gamma = \langle R, V \mid V^3 = 1, (RV)^2 = 1, R^5 = 1 \rangle = A_5$

Y los diagramas de Cayley asociados son los siguientes:



Las figuras aparecen en el orden de sus presentaciones



Para la demostración de la proposición 2.7 necesitamos unos lemas previos:

**LEMA 2.8** Uno de los generadores, digamos  $V$ , es de orden tres.

**Demostración:** Sea  $N$  el orden del grupo, sabemos que el número de aristas del diagrama es  $2N$  ( $\sum_{v \in V(G)} \text{val}(v) = 2A = 4N$ ), por lo tanto sabemos que el número de caras  $C$  es  $N + 2$ . Tenemos pues, si  $C_i$  es el número de caras de longitud  $i$ :

$$1) \sum_{i=3}^s C_i = N + 2$$

$$2) \sum_{i=3}^s iC_i = 4N$$

(Con  $s$  la longitud más grande en una cara del diagrama)

De 1) obtenemos:  $3) 4(\sum_{i=3}^s C_i) = 4N + 8$ , si consideramos la resta de 3) menos 2) obtenemos:

$$C_3 = 8 + \sum_{i=4}^s (i-4)C_i$$

Por lo que  $C_3$  es positivo, de modo que hay caras en el diagrama de longitud 3, pero eso asegura que alguno de los generadores es de orden tres, ya que las caras bicromáticas son de longitud par (lema 2.6). Digamos entonces que las caras verdes son triángulos. 

**LEMA 2.9** En un diagrama de Cayley plano con dos generadores no involutivos  $V, R$  si existe una cara bicromática de longitud 4, todas las caras bicromáticas son de esa misma longitud y representan la relación  $(VR)^2 = 1$ .

**Demostración:** La cara cuadrilátero define una relación en el grupo de longitud cuatro:  $R^{a_1}V^{a_2}R^{a_3}V^{a_4} = 1$  con  $a_i = \pm 1$ , pues por el lema 2.6 los colores se alternan. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que los primeros factores tienen exponente uno, pues sino tomamos a  $R^{-1}$  o a  $V^{-1}$  como generadores. Por otra parte todas las permutaciones cíclicas de una misma relación se cumplen en la misma cara, basta leer la relación, empezando de un vértice distinto en la cara.

Podemos entonces definir una relación de equivalencia entre las relaciones, tal que dos relaciones son equivalentes si y sólo si una es permutación cíclica de la otra, podemos entonces suponer que el primer factor es siempre el generador rojo por lo que las relaciones de longitud cuatro, que puede satisfacer una cara, son:

$$RVR^{-1}V^{-1} = 1$$

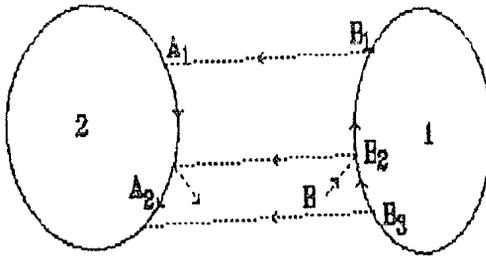
$$RVR^{-1}V = 1$$

$$RVRV^{-1} = 1$$

$$RVRV = 1$$

Sean  $B_1, A_1, A_2, B_2$  los vértices de la cara cuadrilátero. Los puntos  $B_1, B_2$  son puntos de una cara de color rojo y los puntos  $A_1, A_2$  son los puntos de otra cara roja (no son la misma, porque si no uno de los generadores se puede expresar en términos del otro); vea la figura siguiente. Vamos a descartar las primeras tres relaciones y demostraremos que todas las caras bicromáticas satisfacen la última relación.

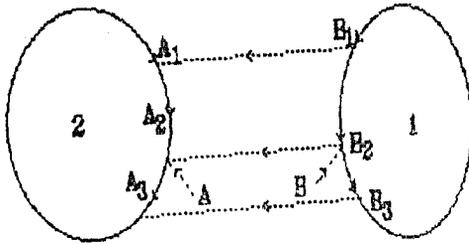
Empecemos por descartar la relación  $RVR^{-1}V^{-1} = 1$ . Aplicándola a los puntos  $B_2, B_3, B_4, \dots$  estos puntos quedan unidos por una arista verde con sus correspondientes  $A_1, A_2, A_3, \dots$  (vea la figura).



Además de  $B_2A_2$  otra línea verde incide en  $A_2$ , si  $A$  es su otro extremo,  $A$  no puede estar en el interior de la cara cuadrangular ni tampoco en el interior de una cara verde, tiene que estar en el interior del cuadrángulo  $B_2A_2A_3B_3$ ; de la relación  $RVR^{-1}V^{-1} = 1$  obtenemos su permutación cíclica  $R^{-1}V^{-1}RV = 1$  (representada por  $A_2B_2B_1A_1$ ), pero al aplicar esta relación partiendo del vértice  $A$ ,  $R^{-1}V^{-1}$  nos lleva al vértice  $A_1$  y a partir de ese vértice no hay posibilidad de regresar a  $A$  por medio de  $RV$ . De modo que debemos descartar a la relación  $RVR^{-1}V^{-1} = 1$ , así como a todas sus permutaciones cíclicas.

Por una argumentación similar podemos demostrar lo mismo para  $RVR^{-1}V = 1$  (vea la figura que sigue).

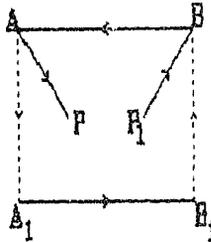
Supongamos que  $B_1A_1A_2B_2$  realiza a  $RVR^{-1}V = 1$  como cara. Aplicando la relación a los puntos  $B_2, B_3, B_4, \dots$  estos quedan unidos con sus correspondientes  $A_2, A_3, \dots$ . De nuevo, además de la línea verde  $B_2A_2$  incide en  $B_2$  la línea  $BB_2$ ,  $B$



no puede estar en el interior del cuadrilátero  $B_1A_1A_2B_2$  ni en el interior del ciclo rojo formado por las  $B_i$ . Aplicando la relación  $RV R^{-1}V = 1$  al punto B tendremos que RV lleva al punto  $B_1$  pero no podemos regresar a B por el resto de la relación. También tendremos que descartarla. Queda por verificar la relación  $RV RV^{-1} = 1$ .

$RV RV^{-1} = 1$  es equivalente a la relación  $V RV^{-1}R = 1$  (por ser su permutación cíclica). La demostración de que esta relación tampoco se presenta en una cara es igual a la demostración de que  $RV R^{-1}V = 1$  es imposible, intercambiando los papeles que juegan los generadores.

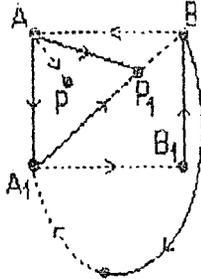
La relación que debe satisfacer la cara es entonces  $RV RV = 1$ . Pensemos ahora en cualquier otro cuadrilátero definido por esta relación. (figura siguiente).



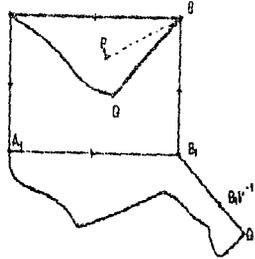
Deseamos demostrar que también es una cara en el encaje del diagrama. Supongamos que contiene algún punto interior P, alguna línea, digamos roja, lo une con alguno de los vértices que forman el cuadrilátero:  $ABB_1A_1$ . Sea AP esta línea, se sigue que también  $P_1B$  es arista interior, pues pertenece a la misma cara roja que AB y PA (de otro modo la arista  $BB_1$  queda encerrada dentro de esa cara roja).

Aplicando la relación a  $P_1$ , RV no nos puede llevar a un punto exterior; pues en ese caso para regresar a  $P_1$  desde ese punto exterior, la trayectoria RV lleva primero al

vértice  $A_1$  y de ahí a  $P_1$ , pero eso crea la relación  $RV R^{-1}V^{-1} = 1$ . Esto implica que un generador se puede expresar en términos del otro (vea figura), pues el generador verde es de orden tres (lema 2.8).



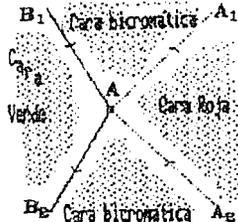
De acuerdo con esto existe una línea verde  $BQ$  en el interior, ( $BQ$  esta en el interior y necesariamente  $B_1V^{-1}$  también, si no  $A_1B_1$  queda encerrada en una cara verde); vea la figura que sigue:



Podemos ahora aplicar el mismo argumento a  $Q_1$ , y por tanto, las líneas rojas que inciden en  $A$  y en  $B_1$  son interiores, y aplicarlo una vez más para garantizar que todas las líneas son interiores al cuadrilátero y entonces es una cara.

En conclusión, cualquier cuadrilátero definido por la relación  $RV RV = 1$  es una cara bicromática. Por último, si consideramos cualquier vértice  $A$  con cuatro líneas incidentes en el  $AA_1, AA_2, B_1A, B_2A$ , tenemos que:

$B_1AA_1, A_2AB_2$  son tres de los lados de una cara de longitud cuatro correspondiente a la relación  $RV RV = 1$ . Esto sucede en cada punto del diagrama de Cayley, es decir, cada punto del diagrama está en dos caras cuadradas bicromáticas, una verde y otra roja (ver figura que sigue). De modo que cualquier otro polígono bicromático de longitud mayor o igual a seis no puede ser cara.



**LEMA 2.10** En un diagrama de Cayley con dos generadores no involutivos existe al menos una cara bicromática de longitud cuatro.

**Demostración:** Como demostramos anteriormente uno de los generadores es de orden tres, por lo que:

$$(1) \quad \sum_{i=4}^4 C_i = N + 2 - C_3 = N - \frac{N}{3} + 2 = \frac{2N}{3} + 2$$

$$(2) \quad \sum_{i=4}^4 iC_i = 4N - 3C_3 = 3N$$

Multiplicando (1) por 5 y quitándole (2)

$$C_4 - \sum_{i=6}^n (i-5)C_i = \frac{10N}{3} - 3N + 10 = \frac{N}{3} + 10$$

En conclusión:  $C_4$ , el número de caras de longitud cuatro, es mayor que cero; asegurando la existencia de alguna cara de esa longitud.  $\square$

A continuación presentamos la demostración de la proposición 2.7:

**Demostración: Lema 2.7** La demostración es esencialmente establecer las estructuras posibles de un diagrama plano con dos generadores no involutivos que satisface las hipótesis.

Por el lema 2.8 el generador verde es de orden tres, cada triángulo verde es una cara, por lo cual el número de caras de color rojo está dado por  $\frac{N}{3}$  (las caras parten a los  $N$  vértices en conjuntos de tres elementos) y  $\Gamma$  cumple la relación  $V^3 = 1$ .

Por otra parte, como se deduce de los lemas 2.9 y 2.10, todas las caras bicromáticas son cuadrados y tenemos que  $(RV)^2 = 1$ . De la demostración de 2.10 existen  $\frac{N}{2}$  de esas caras bicromáticas, además si  $x$  es el orden del generador rojo, existen  $\frac{N}{x}$  caras de ese color (parte a los  $N$  vértices en conjuntos de  $x$  elementos). se tiene entonces la relación  $R^x = 1$ .

Con las tres relaciones obtenidas queda determinado el grupo  $\Gamma$ , pues definen las caras en cada uno de los vértices y por tanto el del encaje  $\mathcal{C}_\Delta(\Gamma) \hookrightarrow S^2$ . Así que cualquier otra relación de  $\Gamma$  vista como camino cerrado en la esfera se puede expresar en términos de estas tres relaciones, (pues  $S^2$  es simplemente conexa).

Falta determinar las posibilidades de  $x$  y esto lo deducimos de la característica de Euler:

$$C = \frac{N}{3} + \frac{N}{2} + \frac{N}{x} = N + 2 \text{ de donde}$$

$$\frac{2xN + 3xN + 6N}{6x} = N + 2 \text{ por lo tanto}$$

$$2xN + 3xN + 6N = 6xN + 12x$$

$$6N - xN = 12x \quad \text{obteniendo}$$

$$N(6 - x) = 12x$$

Pero  $x \geq 3$  pues  $R$  es no involutivo, y  $6 - x$  tiene que ser positivo,  $x$  puede tomar sólo los valores 3, 4 o 5. Teniendo los siguientes casos:

$$1) x = 3, \quad N = 12$$

$$2) x = 4, \quad N = 24$$

$$3) x = 5, \quad N = 60$$

Las presentaciones para grupos finitos con dos generadores no involutivos y los de diagramas planos son entonces los de la proposición. 

**PROPOSICION 2.11** *Supongamos que  $C_{\Delta}(\Gamma)$  es plano con  $\Delta = \{R, V\}$  y al menos uno de los generadores es involutivo, entonces  $\Gamma$  es uno de los siguientes grupos:*

$$(1) \quad \Gamma = \langle R, V \mid R^2 = 1, V^2 = 1, (RV)^k = 1 \rangle = D_k$$

$$(2) \quad \Gamma = \langle R, V \mid R^2 = 1, V^k = 1, (VR)^2 = 1 \rangle = D_k$$

$$(3) \quad \Gamma = \langle R, V \mid R^2 = 1, V^k = 1, (VRV^{-1}R) = 1 \rangle = Z_2 \times Z_n$$

$$(4) \quad \Gamma = \langle R, V \mid V^5 = 1, R^2 = 1, (VR)^3 = 1 \rangle = A_5$$

$$(5) \quad \Gamma = \langle R, V \mid V^4 = 1, R^2 = 1, (VR)^3 = 1 \rangle = S_4$$

$$(6) \quad \Gamma = \langle R, V \mid R^2 = 1, V^3 = 1, (VR)^3 = 1 \rangle = A_4$$

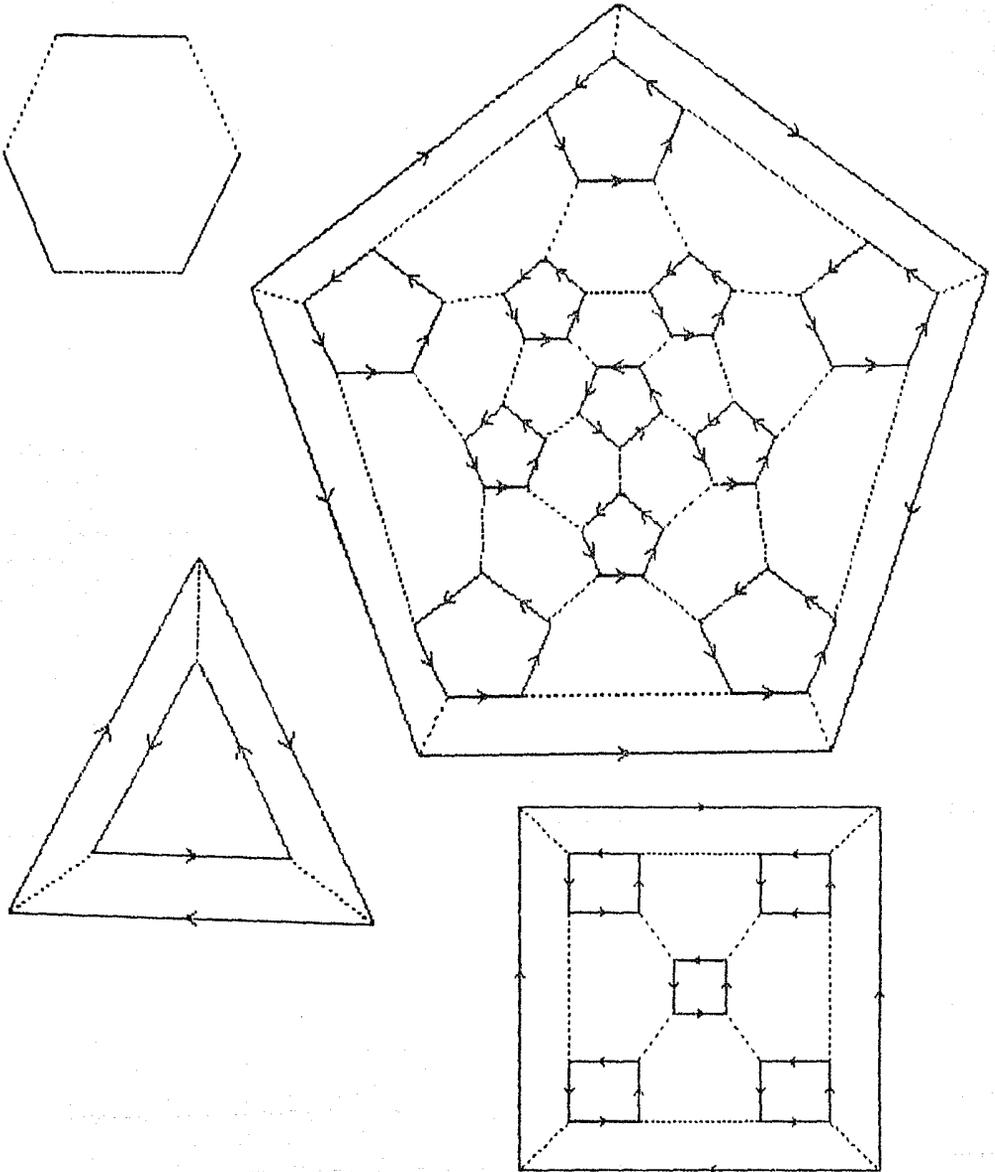
$$(7) \quad \Gamma = \langle R, V \mid V^3 = 1, R^2 = 1, (VR)^4 = 1 \rangle = S_4$$

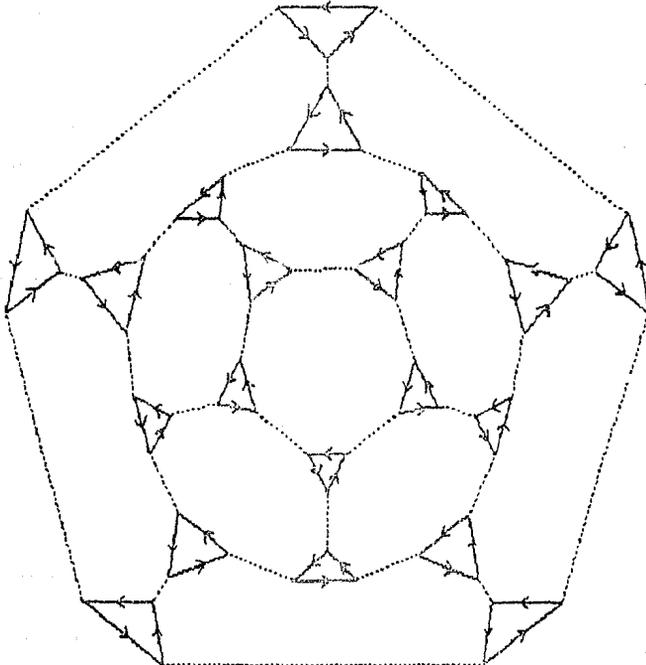
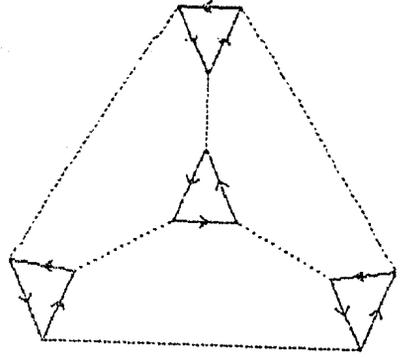
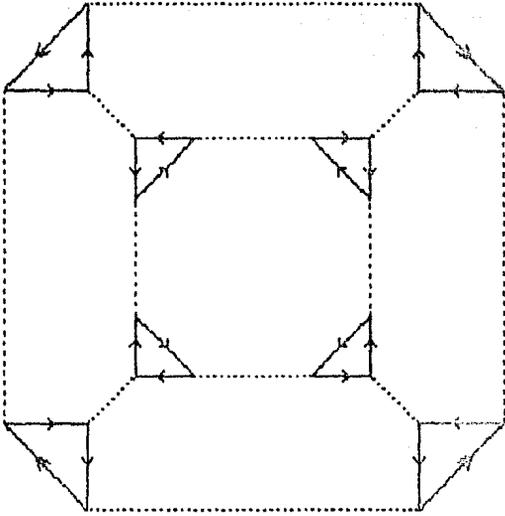
$$(8) \quad \Gamma = \langle R, V \mid V^3 = 1, R^2 = 1, RV^{-1}RV^{-1}R = 1 \rangle = Z_2 \times A_4$$

$$(9) \quad \Gamma = \langle R, V \mid V^3 = 1, R^2 = 1, (VR)^5 = 1 \rangle = A_5$$

Y los diagramas de Cayley asociados son los siguientes:

Las figuras en el orden marcado por las presentaciones.



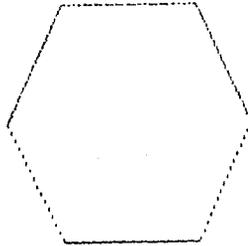


(Observe que algunos grupos aparecen varias veces)

**Demostración:** El lema 2.12 asegura que en caso de ser ambos generadores involutivos, el único grupo posible es el diédrico. Podemos suponer entonces que el generador verde es no involutivo y estudiar dos casos de acuerdo al número de líneas rojas que unen un par de caras verdes. Los lemas 2.13 y 2.14 aseguran que los diagramas planos que se obtienen bajo estas hipótesis son sacados de las presentaciones enunciadas en la proposición y que corresponden a los grupos  $A_5, S_4, A_4, Z_2 \times A_4, Z_2 \times Z_n$  y  $D_n$ .

**LEMA 2.12** Si  $C_\Delta(\Gamma)$  es plano con  $\Delta = \{R, V\}$ ,  $R$  y  $V$  involutivos, entonces  $\Gamma$  es el grupo diédrico.

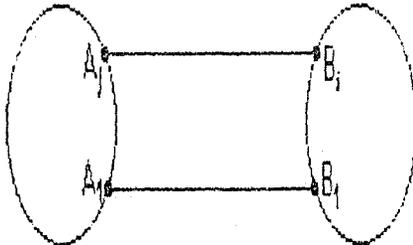
**Demostración:** Si los dos generadores,  $R$  y  $V$ , son de periodo dos, el diagrama de Cayley correspondiente es un polígono de  $2n$  lados, que tiene aristas rojas y verdes alternadas (véase la figura).



En este caso la presentación del grupo es justamente una de las presentaciones del grupo diédrico (3)  $\langle R, V \mid R^2 = 1, V^2 = 1, (RV)^k = 1 \rangle$ .

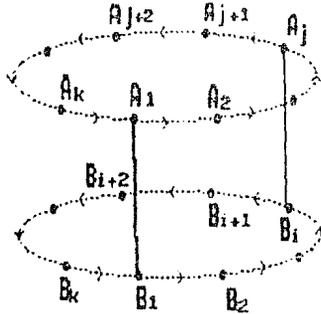
**LEMA 2.13** Si  $C_\Delta(\Gamma)$  es plano con  $\Delta = \{R, V\}$  con  $R$  involutivo,  $V$  de orden estrictamente mayor que dos, y tales que dos polígonos verdes estén conectados por al menos un par de líneas rojas, entonces  $\Gamma$  es el grupo diédrico o bien  $Z_2 \times Z_n$ .

**Demostración:** En caso de que existan dos aristas uniendo dos polígonos verdes  $A$  y  $B$ , digamos  $A_1B_1, A_2B_2$  (vea la figura):



Sabemos que una relación  $V^\alpha R V^\beta R = 1$  se cumple en el grupo (es la inducida por la trayectoria  $A_1, \dots, A_j B_i, \dots, B_1$ ). Si aplicamos la misma relación a  $A_2$ , vemos que  $A_2$  tiene que estar unido por una línea roja con algún punto de  $B_r(2)$  del otro polígono (pues  $A_2 V^\alpha R$  está en la región  $R$ ) y aún más, cada punto  $A$  del primer polígono tiene que estar unido a algún punto del segundo polígono verde. Por lo tanto concluimos:

Si dos polígonos verdes están unidos por más de una línea roja, entonces los puntos de los dos polígonos están conectados por líneas rojas.



En este caso todos los puntos de los dos polígonos están "saturados", forman entonces un diagrama de Cayley con un número par de puntos (elementos del grupo), (se puede pensar como un tambor con sus tapas verdes y lados rojos) las caras bicromáticas son cuadriláteros, que satisfacen la relación  $V R V R = 1$  o bien  $V R V^{-1} R = 1$ . De modo que en estos dos casos las presentaciones son:

- (1)  $\langle R, V \mid R^2 = 1, V^k = 1, (VR)^2 = 1 \rangle$
- (2)  $\langle R, V \mid R^2 = 1, V^k = 1, (VRV^{-1}R) = 1 \rangle$

Que son el grupo diédrico  $D_n$  y  $Z_2 \times Z_n$ .

**LEMA 2.14** Si  $C_\Delta(\Gamma)$  es plano con  $\Delta = \{R, V\}$  con  $R$  involutivo,  $V$  de orden estrictamente mayor que dos, y tales que cualesquiera dos polígonos verdes están conectados por a lo más una línea roja, entonces  $\Gamma$  es  $A_5, S_4, A_4$ , o bien  $Z_2 \times A_4$ .

La demostración de este lema, que a su vez concluye la de la proposición 2.11, depende de varios lemas (2.15, 2.16 y 2.17) que dan los casos posibles.

**LEMA 2.15** Con las hipótesis del lema 2.14, orden del generador verde para los diagramas de Cayley puede ser 5, 4 o 3.

**Demostración:** Estamos trabajando ahora con diagramas de  $N$  vértices, cada uno de ellos tiene valencia 3, por lo que el número de aristas es  $3N/2$ ; la característica de Euler, en términos del número de caras  $C$ , para un encaje del diagrama establece  $C = N/2 + 2$ . Por lo tanto

$$C = \sum_{i=3}^S C_i = \frac{N}{2} + 2 \quad (*)$$

$$\sum_{i=3}^S iC_i = 3N \quad (**)$$

con  $S$  la longitud máxima entre las caras del diagrama.

Multiplicando por 6 la ecuación (\*) y substrayéndole (\*\*) tenemos

$$\sum_{i=3}^S 6C_i - \sum_{i=3}^S iC_i = \sum_{i=3}^S (6-i)C_i = 3C_3 + 2C_4 + C_5 - \sum_{i=6}^S (i-6)C_i = 12$$

Por lo cual

$$3C_3 + 2C_4 + C_5 = 12 + \sum_{i=6}^S (i-6)C_i$$

Por lo tanto hemos asegurado la existencia de polígonos verdes de 5, 4 o bien 3 lados, ya que el número de lados de una cara bicromática es par, y la existencia de cuadriláteros fue excluida. 

**LEMA 2.16** Si un diagrama de Cayley plano con un sólo generador involutivo tiene una cara bicromática de longitud 6, entonces todas las caras bicromáticas son de esa misma longitud y satisfacen la misma relación  $(VR)^3 = 1$ .

**Demostración:** Para la demostración de este hecho consideremos primero que existe una cara de longitud seis. Esto implica que se satisface alguna de las siguientes relaciones:

$$VRVRV^{-1}R = 1 \quad (a)$$

$$V R V R V R = 1 \quad (b)$$

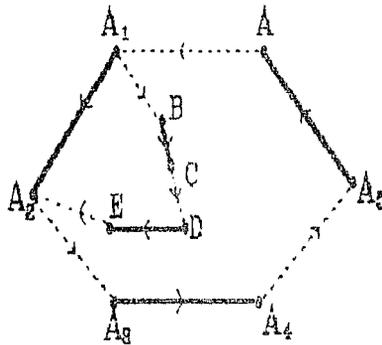
Dada cualquier relación podemos suponer que el primer término tiene exponente 1, además, como habíamos observado, podemos tomar como equivalentes una relación con todas sus permutaciones cíclicas.

De (a) deducimos  $R V R V^{-1} R V = 1$  como una de sus permutaciones, multiplicando (a) por esa relación obtenemos:

$$V^2 = V R V R V^{-1} R \cdot R V R V^{-1} R V = 1$$

Pero el periodo de  $V$  es por hipótesis mayor que 2, y por lo tanto (a) tiene que ser rechazada. Sólo nos queda la relación (b) como la relación que satisface la cara hexagonal.

Consideremos ahora cualquier polígono hexagonal  $P$ , con vértices  $A_1 A_2 \dots A_6 A$  (como se muestra en la figura siguiente), definido por la relación  $(V R)^3 = 1$ .



Si hubiera un punto  $B$  en el interior, unido por una línea verde, digamos  $A_1 B$ , al polígono  $P$ , entonces aplicamos la relación  $(V R)^3 = 1$  al punto  $A_1$ . El generador  $V$  nos lleva a  $B$ ,  $R$  a  $C$  (que también es un punto interior),  $V$  nos lleva de  $C$  a  $D$ , que no puede ser ninguno de los vértices del hexágono  $P$ , porque entonces dos polígonos verdes estarían unidos por dos líneas rojas (véase figura); de modo que el generador  $R$  lleva del punto  $D$  a otro punto interior  $E$  y finalmente  $V$  lleva a  $A_2$ , porque el generador  $R$  debe llevarnos de vuelta a  $A_1$ . Consecuentemente el polígono verde al que pertenece  $A_2 A_3$ , también está en el interior de  $P$ , de otro modo  $M$ , el polígono verde que pasa por  $A_2 A_3$ , no sería cara. Por razones similares podemos demostrar que son interiores todos los polígonos que pasan por las otras aristas verdes de  $P$ ; basta con

aplicar secuencialmente el argumento. Si una cara es interior, la que le sigue, en el sentido contrario de las manecillas del reloj, también es interior, de este modo todas lo son.

Por lo tanto, no hay conexión con ningún punto exterior, por lo que todos los polígonos, que satisfacen la relación  $(VR)^8 = 1$ , son caras bicromáticas.

Inversamente cada cara bicromática es un hexágono inducido por la relación  $(VR)^3 = 1$ ; cada uno de sus puntos es vértice de dos caras hexágonas inducidas por  $(VR)^3 = 1$  y de una cara verde (ver figura), y así las caras no pueden ser más que de esos tipos.

**LEMA 2.17** Sea  $C_{\Delta}(\Gamma)$  un diagrama plano con  $\Delta = \{R, V\}$   $R$  involutivo, y  $V$  de orden 3. Si existe una cara de longitud  $k = 6, 8$  ó  $10$ , entonces todas las caras bicromáticas son de esa misma longitud y están definidas por la misma relación en el grupo:

$$k = 6, \quad VRVVRV = 1$$

$$k = 8, \quad VRVVRVVR = 1, \quad VRV^{-1}RVVR^{-1}R = 1$$

$$k = 10, \quad VRVVRVVRVR = 1$$

**Demostración:** De nuevo la demostración es distinta de acuerdo al valor de  $k$ . Si  $k$  es 6, es consecuencia inmediata del teorema que demostramos en la primera parte. Si  $k$  es 8, la cara octágonal satisface alguna de las siguientes relaciones: (Recordamos al lector que una relación es equivalente a todas permutaciones cíclicas y que podemos suponer que el primer término de la relación es  $V$ )

$$(1) \quad VRVVRVVR = 1$$

$$(2) \quad VRV^{-1}RVVR^{-1}R = 1$$

$$(3) \quad VRVVRV^{-1}RV^{-1}R = 1$$

$$(4) \quad VRVVRVVR^{-1}R = 1$$

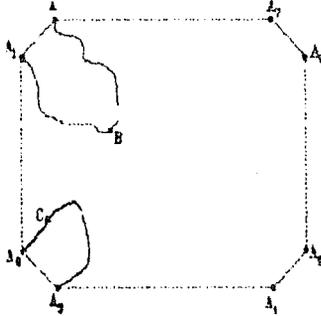
Cuatro tiene que ser rechazada, pues multiplicada por  $RVVR^{-1}RVVR = 1$  (que se obtiene como una de sus permutaciones cíclicas) obtenemos

$$VRVVRVVR^{-1}R \cdot RVVR^{-1}RVVR = 1$$

que se reduce a  $VRV^2RV = 1$ , por lo tanto  $RV^2R = (V^{-1})^2$  y lo que es lo mismo  $RV^2RV^2 = 1$

Pero esta relación implica que dos polígonos de color verde están unidos por dos líneas rojas, pero ese caso lo habíamos descartado de antemano.

En los tres casos restantes - (1), (2), (3) - supongámos que un octágono (véase figura)  $P = AA_1A_2A_3 \dots A^7A$ , definido por una de esas relaciones, contiene algún punto interior  $B$ ; al menos uno de los cuatro polígonos verdes, digamos el que pasa por  $AA_1$  está en el interior del octágono  $P$  y pasa por  $B$ .



Si aplicamos al punto  $A_1$  alguna de las relaciones, obtendremos una trayectoria cerrada (que parte y regresa a  $A_1$ ) pero que debe quedar totalmente contenida en el interior de  $P$ , pues de otro modo:

Sea  $VRV^{\alpha_1}RV^{\alpha_2}RV^{\alpha_3}R = 1$  la relación general, donde

- $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$  para la relación (1)
- $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1$  para la relación (2)
- $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = -1$  para la relación (3)

Si en algún caso una parte de la trayectoria quedara en el exterior, en la gráfica se formaría un hexágono o un cuadrado que cumpliría la relación  $V^{\alpha_1}RV^{\alpha_2}RV^{\alpha_3}R = 1$  o bien  $V^{\alpha_1}RV^{\alpha_2}R = 1$ ; pero el primero de los casos implicaría que  $V$  es una potencia de  $R$ , que no sucede pues son generadores diferentes. En el segundo caso dos polígonos verdes quedan unidos por dos líneas rojas, que también es imposible.

Al quedar interior, la trayectoria  $VRV^{\alpha_1}RV^{\alpha_2}R$  lleva de  $A_1$  a  $C$  en el interior, de donde pasamos a  $A_2$  por  $V^{\alpha_3}$  y de ahí a  $A_1$  por una arista roja. Si una de sus aristas está en el interior, el polígono verde es interior (recuerde que el generador verde es de orden 3, si una arista es interior, la otra también lo es). Hemos demostrado que si un polígono verde es interior, el polígono verde que le sigue también lo es, en conclusión todos son interiores, pues podemos aplicar el argumento tantas veces como vértices hay. Cualquiera de las tres relaciones puede entonces inducir una cara.

Pero las tres no son compatibles por parejas en el mismo grupo:

(1) y (2) implican que  $V$  es un generador involutivo, una contradicción. (1) y

(3) implican que  $V^2RV^2R = 1$  de modo que dos polígonos verdes están unidos por dos líneas rojas, pero eso lo habíamos prohibido, a lo más una línea roja une dos polígonos verdes. (2) y (3) implican también que  $V$  es involutivo.

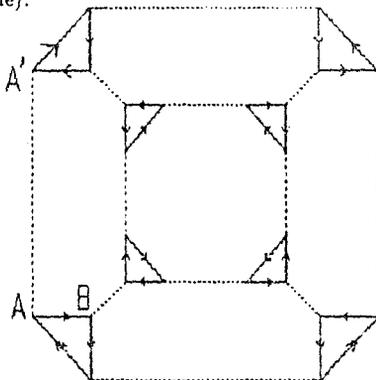
Sólo una de ellas puede ocurrir en el grupo, sin embargo debemos descartar todavía a (3). tenemos además que:

1) Una gráfica tiene un encaje en la esfera, si y sólo si puede encajarse en el plano.

Pero no sólo eso sino que:

2) Cuando  $G$  es una gráfica plana, podemos asegurar que  $\mathcal{G}$  tiene un encaje en el que la región que se desee, se convierte en la región exterior (denominamos exterior a la región no acotada).

De modo que al suponer que la relación (3) -  $VRV RV^{-1}RV^{-1}R = 1$  - se satisface en algún diagrama de Cayley plano, podemos encajar ese diagrama en el plano de modo que la región exterior sea la inducida por  $VRV RV^{-1}RV^{-1}R = 1$  (vea la figura que sigue):



En el interior del polígono bicromático encontramos todos los puntos del diagrama, en particular del vértice  $A$  sale una arista verde que llega hasta a  $B$ . Aplicando la relación  $VRV RV^{-1}RV^{-1}R$  desde  $A$  llegamos al punto  $A'$ , adyacente a  $A$ , por una arista roja. Al vértice  $A'$  llega una arista verde en sentido opuesto a la otra arista que sale por  $A'$ , esto es un absurdo, de modo que tenemos que rechazar la relación (3).

(1) y (2) se cumplen en un único grupo plano.

Veamos ahora el caso en que en el diagrama existe una cara bicromática de longitud 10. Se cumple entonces alguna de las siguientes relaciones:

- (1)  $V R V R V R V R V R = 1$
- (2)  $V R V R V R V R V^{-1} R = 1$
- (3)  $V R V R V R V^{-1} R V^{-1} R = 1$
- (4)  $V R V R V^{-1} R V R V^{-1} R = 1$

(Los demás son alguna permutación cíclica de ellas)

En el caso (2) tenemos  $V R V R V R = R V R V^{-1}$  y  $V R V R V R V^{-1} R V R = 1$ , combinando estas dos relaciones se sigue

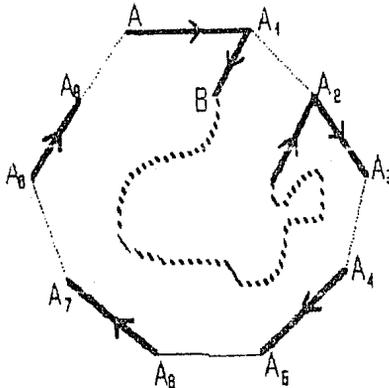
$$R V R V^{-1} \cdot V^{-1} R V R = 1 \text{ por lo cual } V R V^{-2} R V = 1$$

de donde  $R V^{-2} R V^2 = 1$ , relación que implica que existen dos polígonos verdes unidos por dos líneas rojas, por lo que este caso tiene que ser descartado.

En el caso (3) se sigue  $R V R V R V^{-1} R V^{-1} R V = 1$ , que al multiplicarse por la izquierda con (3) se reduce a  $V^2 = 1$ , que muestra que este caso es imposible también.

En el caso (4) tenemos la misma contradicción (el orden de  $V$  es dos), si multiplicamos (4) por la derecha con su permutación cíclica  $R V R V^{-1} R V R V^{-1} R V = 1$ .

De esta forma sólo (1) se puede cumplir en la cara decágono que aparece en nuestro diagrama de Cayley. Vea ahora la figura que sigue.



Consideremos ahora cualquier polígono  $P$  de 10 lados inducido por la relación:  $V R V R V R V R V R = 1$  de vértices  $A A_1 \dots A_9 A$ , supongamos que  $B$  es un punto en el interior de  $P$ , alguna arista verde sale de alguno de los vértices de  $P$ , sin pérdida de generalidad podemos suponer que ese vértice es  $A_1$ , aplicamos la relación (1) a  $A_1$ . Se

afirma que la trayectoria cerrada que resulta no tiene ninguna porción exterior a  $P$ , pues de otro modo aparece un cuadrilátero, hexágono u octágono, que satisface alguna de las relaciones  $V R V R V R V R = 1$ ,  $\bar{V} R V R V R = 1$ ,  $V R V R = 1$ , (respectivamente el octágono, hexágono y cuadrado).

En el primer caso  $V = R^{-1}$ , lo que es imposible, pues  $V$  y  $R$  son independientes; en el segundo  $V R V R = 1$ , por lo tanto hay dos polígonos verdes unidos por dos líneas rojas; en el tercero  $V R V R V R = 1$ , entonces tendría una cara hexagonal. 

**Demostración:** Lema 2.11 Suponemos ahora que dos polígonos verdes están unidos por a lo más una línea roja, por lo que el número más pequeño de lados para una cara bicromática es seis. Por el lema 2.15 los órdenes posibles para el generador verde (no involutivo) son 5, 4 y 3 analizaremos los tres casos. Por la fórmula de la característica de Euler, y como la valencia es 3 tenemos las ecuaciones (\*), (\*\*):

$$C = \sum_{i=3}^S C_i = \frac{N}{2} + 2 \quad (*)$$

$$\sum_{i=3}^S i C_i = 3N \quad (**)$$

1) Supongamos que  $V^5 = 1$ . En este caso  $N/5 = C_5$ ,  $C_3 = 0$ ,  $C_4 = 0$ , las ecuaciones (\*) y (\*\*) se transforman en

$$(a) \quad C_6 + C_8 + C_{10} + \dots = \frac{N}{2} + 2 - C_5 = \frac{N}{2} - \frac{N}{5} + 2$$

$$(b) \quad 6C_6 + 8C_8 + 10C_{10} + \dots = 3N - 5C_5 = 3N - N = 2N$$

por lo cual multiplicando (a) por 8 y substrayéndole (b)

$$2C_6 = \frac{2N}{5} + 2 + (2C_{10} + 4C_{12} + \dots)$$

En consecuencia deben existir caras bicromáticas de longitud 6, por lo que gracias al lema 2.16 todas son de esa misma longitud y satisfacen una misma relación  $(VR)^3 = 1$ .

Por lo que:

$$C_5 = \frac{N}{5}, C_6 = \frac{N}{3}, C_6 \text{ son sólo caras bicromáticas}$$

$$\text{de donde } \frac{N}{5} + \frac{N}{3} = \frac{N}{2} + 2$$

$$\frac{6N + 10N - 15N}{30} = 2, \quad N = 60$$

Entonces sabemos que el grupo es de orden 60 y tiene una presentación:

$$\langle V, R | V^5 = 1, R^2 = 1, (VR)^3 = 1 \rangle$$

que salvo isomorfismo es  $A_5$ .

2) Supongamos que  $V^4 = 1$ . En este caso  $N/4 = C_4$ ,  $C_3 = 0$ ,  $C_5 = 0$ , (\*) y (\*\*) se transforman en

$$(a') C_6 + C_8 + C_{10} + \dots = \frac{N}{2} + 2 - C_4$$

$$(b') 3C_6 + 4C_8 + 5C_{10} + \dots = N$$

por lo que substrayendo (b') de (a')

$$C_6 = 8 + (C_{10} + C_{12} + \dots)$$

Por el lema 2.16 también en este caso debe existir alguna cara bicromática de longitud 6, por lo que todas las caras bicromáticas son de esa longitud, satisfacen la relación  $(VR)^3 = 1$  por lo que:

$$C_4 = \frac{N}{4}, \quad C_6 = \frac{N}{3}$$

$$\text{de donde } \frac{N}{4} + \frac{N}{3} - \frac{N}{2} = 2$$

$$\frac{6N + 8N - 12N}{24} = 2, \quad N = 24$$

Entonces sabemos que el grupo es de orden 24 y tiene una presentación:

$$\langle V, R | V^4 = 1, R^2 = 1, (VR)^3 = 1 \rangle$$

que salvo isomorfismo es  $S_4$ .

3) En este caso  $V^3 = 1$ , teniendo entonces  $C_4 = 0$ ,  $C_5 = 0$ , (\*) y (\*\*) se transforman en:

$$C_6 + C_8 + C_{10} + \dots = \frac{N}{3} + 2$$

$$3C_6 + 4C_8 + 5C_{10} + \dots = N$$

por lo tanto

$$3C_6 + 2C_8 + C_{10} = 12 + (\dots)$$

de donde inferimos que deben existir caras bicromáticas de 6, 8 ó 10 lados, por lema 2.17 las caras bicromáticas son de uno de esos tres tamaños, y satisfacen una relación específica. Podemos obtener entonces las siguientes presentaciones:

a) Cuando todas las caras bicromáticas son hexágonos:

$$C_3 = \frac{N}{3}, C_6 = \frac{N}{3}$$

$$N = 12$$

con presentación  $\langle V, R | V^3 = 1, R^2 = 1, (VR)^3 = 1 \rangle$  que es  $A_4$

b) Cuando todas son octágonos.

$$C_3 = \frac{N}{3}, C_8 = \frac{N}{4}$$

$$N = 24$$

Tenemos dos presentaciones distintas en esta situación

$$\langle V, R | V^3 = 1, R^2 = 1, (VR)^4 = 1 \rangle$$

que es otra presentación de  $S_4$  y

$$\langle V, R | V^3 = 1, R^2 = 1, V R V^{-1} R V R V^{-1} R = 1 \rangle$$

que es una presentación del grupo  $Z_2 \times A_4$  (isometrías del octaedro).

c) Todas son decágonos:

$$C_3 = \frac{N}{3}, C_{10} = \frac{N}{5}$$

$$N = 60$$

$$\langle V, R | V^3 = 1, R^2 = 1, (VR)^5 = 1 \rangle$$

Es una presentación clásica del grupo  $A_5$ .

**PROPOSICION 2.18** Sea  $C_\Delta(\Gamma)$  un diagrama de Cayley plano en al menos tres generadores, entonces todos son involutivos y  $\Gamma$  tiene una presentación de la forma:

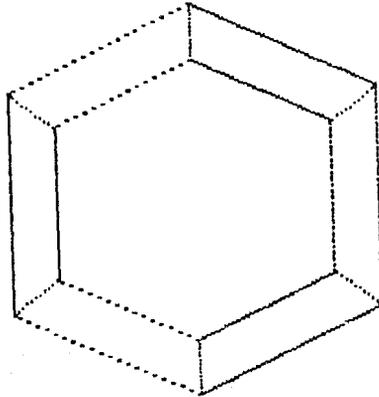
$$\langle X_1, X_2, X_3 | X_1^2 = X_2^2 = X_3^2 = (X_1 X_2)^2 = (X_1 X_3)^2 = (X_2 X_3)^q \rangle$$

$$\langle X_1, X_2, X_3 | X_1^2 = X_2^2 = X_3^2 = (X_1 X_2)^2 = (X_1 X_3)^3 = (X_2 X_3)^3 \rangle$$

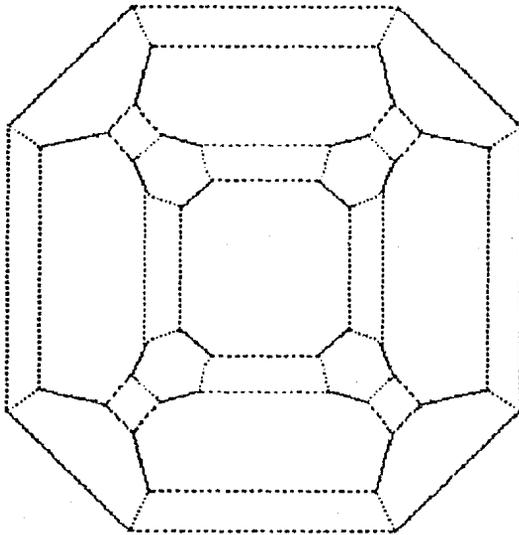
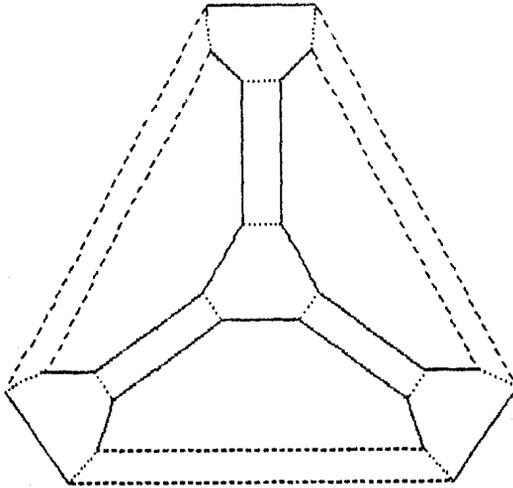
$$\langle X_1, X_2, X_3 | X_1^2 = X_2^2 = X_3^2 = (X_1 X_2)^2 = (X_1 X_3)^3 = (X_2 X_3)^4 \rangle$$

$$\langle X_1, X_2, X_3 | X_1^2 = X_2^2 = X_3^2 = (X_1 X_2)^2 = (X_1 X_3)^3 = (X_2 X_3)^5 \rangle$$

y los diagramas de Cayley asociados son los siguientes:



(Los diagramas aparecen siguiendo el orden de las presentaciones y se omite el último.)



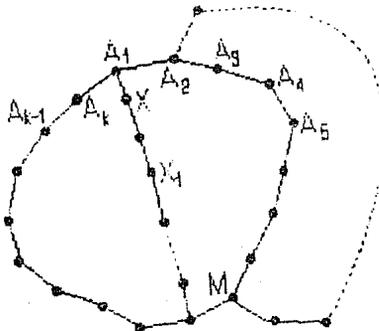
**Demostración:** Supongamos que uno de los generadores es no involutivo, para que el diagrama sea plano algún generador, digamos  $x$ , es involutivo. Retiremos del diagrama todas las aristas de color  $x$ . Cada componente del diagrama restante es un diagrama de Cayley plano en dos generadores, al menos uno no involutivo, cada componente es una copia de alguno de los diagramas en dos generadores que vimos anteriormente.



Sea  $K$  una de esas componentes. De la clasificación de los diagramas en dos generadores que se realizó en las proposiciones 2.7 y 2.14,  $K$  contiene un ciclo  $C$  tal que en su interior hay puntos de  $K$ . Considere  $P$  un punto del diagrama que esté en el interior del ciclo  $C$ . Existe una arista de color  $x$  que parte de  $P$ . Esa arista no puede unir dos puntos de  $K$ , porque en ese caso el generador  $x$  sería combinación de los otros dos, que no es posible. Necesariamente la arista une a  $K$  con otra componente  $K'$  que está contenida en el interior del ciclo  $C$ , en alguna de sus caras. Este proceso se repite para  $K'$  obteniendo una tercera componente y así sucesivamente. Se tiene entonces que el diagrama tiene una infinidad de puntos lo que es una contradicción.

Afirmamos ahora que los polígonos bicromáticos son caras, la demostración recuerda mucho la demostración del lema 2.5:

Considere un polígono bicromático (rojo-verde)  $P$  de vértices  $A_1, \dots, A_k$ , supongamos que en su interior hay un punto  $x$  unido al vértice  $A_1$  por la arista café  $C$ , desde  $A_1$  apliquemos la relación  $(RC)^\lambda$ , con  $\lambda$  el orden de  $RC$  (vea la figura).



La trayectoria inducida  $T$  por esa relación está totalmente contenida en el interior de  $P$ , pues si  $M = A_1(RC)^{\lambda-s}$  fuera el último punto de  $P$  que toca  $T$ , desde  $M$  podemos regresar a  $A_1$  por una trayectoria en rojo y verde que parte de  $M$ ; esta trayectoria induce una expresión  $W$  en los dos generadores  $R$  y  $V$ . Observe que tenemos entonces la relación  $(RC)^{\lambda-s}W = 1$ .

Si aplicamos la relación  $(RC)^{\lambda-s}W = 1$  al punto  $xRC = x_1$  en el interior de llegamos por  $(RC)^{\lambda-s}$  a un punto en el exterior de  $P$ , pero por  $W$  no podemos regresar a  $x_1$ , ya que tendríamos que cruzar el polígono  $P$ , y en los vértices de  $P$  llegan ya aristas rojas y verdes.

Las caras de cada uno de los vértices están entonces determinadas, en cada vértice comienzan tres caras bicromáticas; así que cualquier otra relación del grupo  $\Gamma$  vista como camino cerrado en la esfera se puede expresar en términos de estas tres relaciones (pues  $S^2$  es simplemente conexa).

Con esto podemos asegurar que los grupos planos en tres generadores tienen una presentación de la forma:

$$\langle X_1, X_2, X_3 | X_i^2 = 1, (X_i X_j)_{ij}^2 = 1 \rangle$$

Las caras del diagrama son de tres tipos solamente: rojas-verdes, rojas-cafés y verdes-cafés. las caras son de longitud  $2p$ ,  $2q$  y  $2r$  respectivamente. Si  $N$  es el orden del grupo hay  $\frac{N}{2p}$  caras rojo-verde,  $\frac{N}{2q}$  caras rojo-café y  $\frac{N}{2r}$  caras verde-café. Poniendo en términos de las caras la característica de Euler:

$$C = \frac{N}{2p} + \frac{1}{2q} + \frac{1}{2r} = \frac{N}{2} + 2$$

por tanto multiplicando por  $\frac{2}{N}$  la ecuación:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1 + \frac{4}{N}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$$

El más pequeño de los denominadores tiene que ser dos, pues  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$  y las otras dos,  $p$  y  $q$ , satisfacen:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$  lo que implica que  $(p-2)(q-2) < 4$  obteniendo de esta forma los siguientes casos para  $[p, q]$ :

[2, q], [3, 3], [3, 4], [3, 5]

Las presentaciones obtenidas son las siguientes:

$$\langle X_1, X_2, X_3 | X_1^2 = X_2^2 = X_3^2 = (X_1 X_2)^2 = (X_1 X_3)^2 = (X_2 X_3)^q \rangle$$

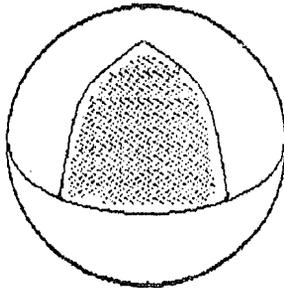
$$\langle X_1, X_2, X_3 | X_1^2 = X_2^2 = X_3^2 = (X_1 X_2)^2 = (X_1 X_3)^3 = (X_2 X_3)^3 \rangle$$

$$\langle X_1, X_2, X_3 | X_1^2 = X_2^2 = X_3^2 = (X_1 X_2)^2 = (X_1 X_3)^3 = (X_2 X_3)^4 \rangle$$

$$\langle X_1, X_2, X_3 | X_1^2 = X_2^2 = X_3^2 = (X_1 X_2)^2 = (X_1 X_3)^3 = (X_2 X_3)^5 \rangle$$

Que son los grupos de simetrías de los sólidos platónicos.

Es interesante notar que estos grupos admiten una representación por un grupo de transformaciones en el espacio generado por tres reflexiones, tal que sus planos de reflexión forman ángulos  $\frac{\pi}{\alpha_{ij}}$  (vea [Co]). En la esfera los planos de reflexión cortan un triángulo esférico, los planos de reflexión se cortan en un punto, que es el centro de la esfera (vea la figura que sigue).



La clasificación de los grupos planos es resultado de clasificar a los diagramas de Cayley planos que sean mínimos en el conjunto de generadores, todos ellos aparecen en las figuras de las proposiciones de este capítulo (casi todos, algunos son realmente difíciles de dibujar) pero hemos en realidad clasificado todos los diagramas planos, pues para los casos descartados no hay diagramas planos.

Con esto hemos terminado este capítulo. Como se habrá notado claramente, la técnica usada para clasificar a los grupos planos es simple y bonita, pero muy larga y llena de detalles. Es manifiesta, además, la relación entre los grupos planos y las

simetrías de los sólidos platónicos, lo que sugiere una forma más sencilla de hacerlo (el objeto del capítulo siguiente).

Es interesante hacer notar que aunque algunos grupos como  $A_5$  tienen varias presentaciones planas y aparecen en la clasificación más de una vez, no todas sus presentaciones lo son. En el primer apéndice haremos un análisis de los grupos finitos de isometrías y de las presentaciones que usamos en esta parte.

# CAPITULO TRES

LOS GRUPOS PLANOS  
SON GRUPOS FINITOS  
DE ISOMETRIAS

Ahora invitamos al lector a olvidar un poco lo hecho en el capítulo anterior. Vamos a estudiar algunos aspectos que relacionan la teoría de poliedros con la teoría de las Gráficas y volveremos a nuestro objetivo principal relacionado a los grupos de isometrías del espacio.

En 1934 Steinitz demostró que:

**PROPOSICION 3.1** *una gráfica es el esqueleto de un poliedro si y sólo si es una gráfica 3-conexa y plana*

**Demostración:** apéndice dos. 

más adelante Grünbaum conjeturó, en 1967, que:

**PROPOSICION 3.2** *Toda gráfica poliedral G tiene una realización como el esqueleto de un poliedro P tal que cada automorfismo de G está inducido por una simetría de P.*

Este poderoso teorema fue demostrado por P. Mani en 1972 perfeccionando algunas de las ideas originales de Steinitz. La demostración puede verse en "Automorphismen von Polyedrischen Graphen", 1972 Mathematischen Annalen.

Este resultado es importante para nuestro estudio de los grupos planos, nos va a permitir relacionarlos con los grupos de isometrías en el espacio.

A principios de este siglo, Klein, en su obra "Lectures on the Icosahedron" publicó una demostración popular de la clasificación de estos grupos (la original es de Hessel, 1830).

#### GRUPOS FINITOS DE ISOMETRIAS

##### EN EL ESPACIO

$C_n$	$C_n \times Z_2$
$D_n$	$D_n \times Z_2$
$A_4$	$A_4 \times Z_2$
$S_4$	$S_4 \times Z_2$
$A_5$	$A_5 \times Z_2$

Los detalles de la clasificación de las isometrías en el espacio los puede ver el lector en el apéndice uno. La lista de estos grupos es la misma que la lista de los grupos planos. Vamos a hacer ver el porqué de esta relación, demostrando el siguiente teorema:

**TEOREMA 3.3** Si  $C_{\Delta}(\Gamma) \hookrightarrow S^2$ , entonces  $\Gamma$  es un grupo finito de isometrías en el espacio

**Demostración:** La idea intuitiva de la demostración es que, la acción del grupo del que se obtiene el diagrama  $C_{\Delta}(\Gamma)$ , se extiende a las caras del encaje. Puede actuar por isometrías gracias a la simetría del diagrama ( el diagrama es el esqueleto de un poliedro).

Específicamente por la proposición 3.5  $C_{\Delta}(\Gamma)$  es un ciclo o bien una gráfica poliedral, en el primer caso  $\Gamma$  es un grupo cíclico y por tanto un grupo de isometrías. En el otro caso la proposición 3.2 garantiza que cada automorfismo de la gráfica subyacente al diagrama es inducido por una isometría, por el teorema 1.10 (que identifica a  $\Gamma$  con los automorfismos coloreados de  $C_{\Delta}(\Gamma)$ )  $\Gamma$  es subgrupo del grupo de simetrías de un poliedro (el de la proposición 3.2) y por tanto es un grupo finito de isometrías. 

Ahora estamos en posibilidad de clasificar directamente a los grupos planos:

**TEOREMA 3.4** Si  $\Gamma$  es un grupo plano (es decir, existe un conjunto de generadores  $\Delta$  tal que  $C_{\Delta}(\Gamma) \hookrightarrow S^2$ ) entonces  $\Gamma$  es alguno de los siguientes grupos:

$C_n$	$C_n \times \mathbb{Z}_2$
$D_n$	$D_n \times \mathbb{Z}_2$
$A_4$	$A_4 \times \mathbb{Z}_2$
$S_4$	$S_4 \times \mathbb{Z}_2$
$A_5$	$A_5 \times \mathbb{Z}_2$

**Demostración:** Nuestra demostración es directa, por el teorema 3.3 si  $\Gamma$  es plano es grupo finito de isometrías, basta exhibir para cada grupo finito de isometrías una presentación que de origen a un diagrama plano, pero esa es la parte sencilla pues se conocen bien las presentaciones de esos grupo (vease [CoMo]). De hecho ya se tienen todas las necesarias en el capítulo pasado (sobran) y no las repetimos. 

Ahora solo nos resta la parte técnica; demostrar la proposición 3.5

**PROPOSICION 3.5** Si  $C_{\Delta}(\Gamma) \hookrightarrow S^2$ , entonces es un ciclo o bien es una gráfica poliedral

**Demostración:** Es consecuencia inmediata del lema 3.6 pues los diagramas de Cayley tiene como gráfica subyacente una gráfica transitiva, en el diagrama actúa transitivamente el grupo que le dio origen; además por hipótesis el diagrama es plano, y por la proposición 3.1 es poliedral. 

En la demostración del lema 3.6 se utilizará un resultado de Víctor Neumann-

Lara en conexidad de gráficas y separadores.

**LEMA 3.6** Una gráfica  $G$  conexa y transitiva de valencia al menos 2 es tres conexa o bien es ciclo.

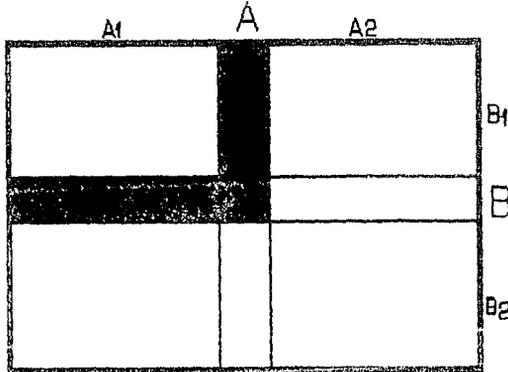
**DEFINICION** Un separador  $A$  de una gráfica  $G$  es un subconjunto de los vértices de  $G$  con la propiedad de que  $G - A = A_1 \cup A_2$  con  $A_i$  subgráfica no vacía de  $G$  y  $A_1 \cap A_2 = \phi$ .

Recuerde que una gráfica es  $n$ -conexa si no tiene separadores de cardinalidad  $n - 1$ .

**DEFINICION** Dados dos separadores  $A, B$  de la gráfica  $G$ , que la separan en  $A_1, A_2$  y  $B_1, B_2$  una Escuadra  $E_{ij}$  se define como:  $E_{ij} = (A \cap B) \cup (A_i \cap B) \cup (B_j \cap A)$  donde  $i, j \in \{1, 2\}$ .

**Lema (Neumann-Lara)** Consideremos dos separadores  $A$  y  $B$  de la gráfica  $G$ ,  $A$  parte a la gráfica en  $A_1, A_2$  y  $B$  la parte en  $B_1, B_2$ . Si  $A_k \cap B_m \neq \phi$  la escuadra  $E_{km}$  es un separador de  $G$ .

Este resultado tiene una presentación gráfica muy llamativa, vea la figura donde se señala la escuadra  $E_{11}$ :



En la figura las dos barras que se cruzan formando una cruz representan los separadores  $A$  y  $B$  las porciones a sus lados son las componentes que deja cada uno de sus separadores; una escuadra está azurada, el lema asegura que si la esquina  $A_1 \cap B_1$ , que encierra la escuadra, es no vacía, la escuadra la separa del conjunto  $A_2 \cup B_2$ . Por

esta imagen Neumann-Lara nombró a este lema como **Lema de la Cruz**.

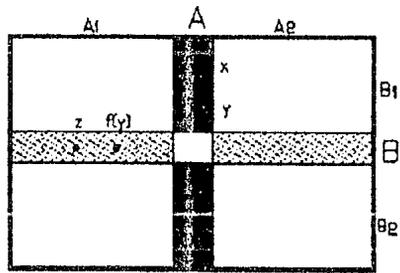
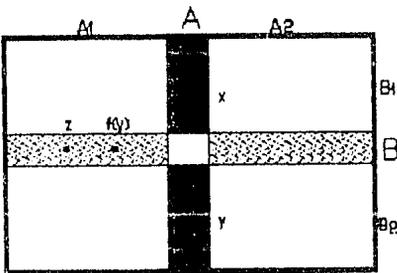
**Demostración:** Supongamos que  $F = A_1 \cap B_1 \neq \phi$  las aristas que salen de  $F$  no llegan a  $B_2$  pues  $B$  es separador, tampoco llegan a  $A_2$  pues  $A$  es separador, llegan entonces a la escuadra  $E_{11}$ , que es entonces un separador. 

**Demostración: (Lema 3.6)** Los automorfismos de una gráfica transforman separadores en separadores, observe además que toda gráfica transitiva es al menos dos conexa, pues toda gráfica tiene puntos que no son de corte (los puntos a mayor distancia en la gráfica) y por ser transitiva ninguno es punto de corte.

Supongamos que  $G$  no es tres conexa, entonces existe  $A = \{X, Y\}$  separador de cardinalidad dos en  $G$ , podemos suponer además que el tamaño de la componente  $A_1$  es el más pequeño posible en una componente, de entre todos los conjuntos separadores con dos elementos de  $G$ .  $A_1$  es no vacío, sea  $Z$  uno de sus vértices, existe un automorfismo de  $G$  que manda  $X$  en  $Z$ .

Afirmamos que la imagen de  $Y$  bajo el automorfismo pertenece a la componente  $A_2$ . Para demostrarlo aplicaremos en dos casos sucesivos el lema de la Cruz, observe que las imágenes de  $X$  y de  $Y$  forman otro separador que llamaremos  $B$  :

1) La imagen de  $Y$  es un vértice de  $A_1 \cap B$ . Vea las figuras siguientes:



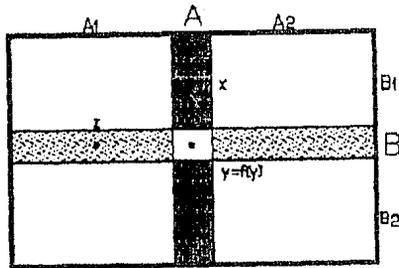
Si  $A_2 \cap B_2$  es no vacío, por el lema la escuadra  $E_{22}$  es un separador, pero la escuadra es a lo más de un sólo elemento y en las gráficas transitivas no hay puntos de corte; con esto llegamos a la contradicción, siendo en conclusión  $A_2 \cap B_2 = \phi$ . Por la hipótesis de que  $Y$  es un vértice de  $A_1 \cap B$ ,  $A \cap B = \phi$  y  $B \cap A_2 = \phi$ .

El punto  $Y$  está en  $A \cap B_2$  o bien en  $A \cap B_1$  (no puede estar en  $A \cap B$  pues

los separadores A y B son de cardinalidad dos), esas dos situaciones las mostramos en las figuras anteriores. Cuando  $Y \in A \cap B_1$ ,  $A_1 \cap B_2$  tiene que ser vacío pues sino el separador B deja como una de sus componentes a  $A_1 \cap B_2$  pero es una componente del separador B de menor cardinalidad que  $A_1$ ; como  $A_1 \cap B_2$  es vacío llegamos a una contradicción pues entonces B no es separador en consecuencia  $Y \notin A \cap B_1$ .

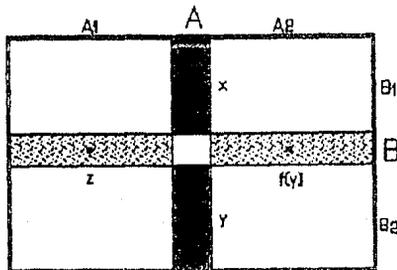
Y tiene que estar en  $A \cap B_2$  pero entonces podremos demostrar que A no es separador, porque la escuadra  $E_{21}$  no puede ser separador (consiste de un solo punto), entonces  $A_2 \cap B_1 = \phi$ , y por lo tanto  $A_2 = \phi$ . En conclusión Y no es un vértice de  $A_1 \cap B$ .

2) La imagen de Y es un vértice de  $A \cap B$ . Vea la figura siguiente:



Si  $A_2 \cap B_2$  es no vacío, por el lema de la cruz la escuadra  $E_{22}$  es un separador, pero la escuadra es de un sólo elemento y en las gráficas transitivas no hay puntos de corte. Con esto llegamos a una contradicción, de modo que  $A_2 \cap B_2$  es vacío, por hipótesis también  $A_2 \cap B$  lo es y podemos demostrar que  $A_1 \cap B_2 = \phi$ , ya que, de no ser vacío, el separador B tiene una componente ( $A_1 \cap B_2$ ) de menor tamaño que  $A_1$ .

Por lo que la única posibilidad es que la imagen de Y esté en  $A_2 \cap B$ , vea la figura que sigue:



Por último vamos a demostrar que el punto  $Z$ , imagen de  $X$  bajo el automorfismo, es el único punto en  $A_1$ . De nueva cuenta usaremos el lema de la Cruz:

Vamos a ver que no hay puntos de la gráfica en  $A_1 \cap B_1$  ni en  $A_1 \cap B_2$ . Como se presenta en la figura anterior, si  $A_1 \cap B_1$  es no vacío, la escuadra  $E_{11}$  es separador, pero entonces el tamaño de la componente  $A_1 \cap B_1$  es estrictamente menor que el de  $A_1$ , pues le falta el punto  $Z$ ; esto contradice la suposición que hicimos respecto a la minimalidad de  $A_1$ . En conclusión  $A_1 \cap B_1$  es vacío. De la misma manera se demuestra que  $A_1 \cap B_2$  es vacío, por lo que el único vértice en  $A_1$  es  $Z$ . Bajo la hipótesis de que  $X$  y  $Y$  forman un separador,  $Z$  es adyacente a  $X$  y a  $Y$ , entonces  $Z$  es un vértice de valencia dos, en conclusión todos los vértices de la gráfica son de valencia dos. Por la hipótesis de que la gráfica es conexa la gráfica es necesariamente un ciclo. 

# APENDICES

# GRUPOS FINITOS DE ISOMETRIAS EN EL ESPACIO

Los grupos finitos de isometrías en el espacio fueron enumerados por primera vez en 1830 por Hessel, pero su obra como la de muchos permaneció ignorada hasta que E. Hess la republicó en 1897. La primera demostración de libro de texto se puede encontrar en "Lectures on the Icosahedron" de Félix Klein. Las ideas esenciales de la clasificación son las siguientes:

Todo grupo finito de isometrías deja invariante al menos un punto, que geométricamente es el baricentro de todas las imágenes de un punto dado bajo la acción del grupo. El punto invariante nos permite pensar al grupo como actuando en una esfera. Por otra parte toda isometría que deja un punto fijo es la reflexión sobre un plano que pasa por el punto, o bien el producto de dos o tres reflexiones con esa característica. Se dice que una isometría, que se forma del producto de dos reflexiones con un punto fijo, es una rotación.

Se muestra entonces que:

Los únicos grupos finitos de rotaciones son los grupos de simetrías rotacionales de los siguientes poliedros:

- 1) La pirámide  $p$ -agonal
- 2) La dipirámide o diedro  $p$ -agonal
- 3) El Tetraedro
- 4) El Cubo o el Octaedro
- 5) El Dodecaedro, el Icosaedro

El grupo completo de simetrías de estas figuras contiene reflexiones, pero por el momento sólo nos interesan rotaciones.

A la pirámide  $p$ -agonal claramente corresponde el grupo cíclico de orden  $p$ . La dipirámide admite además una rotación de 180 grados, que permuta los puntos  $x$  y  $-x$ , corresponde al grupo diédrico  $D_p$ . El grupo de simetrías completo del Tetraedro se encarga de permutar los cuatro vértices de forma regular, es entonces el grupo simétrico  $S_4$ ; el subgrupo de simetrías rotacionales es de índice dos y corresponde al grupo  $A_4$ . Las rotaciones del Cubo permutan sus cuatro diagonales (uniendo pares opuestos de vértices), por tanto  $S_4$  es el grupo de simetrías rotacionales del Cubo (y por tanto de su dual, el Octaedro).

Los veinte vértices del Dodecaedro pueden distribuirse en 5 conjuntos de modo que sean los vértices de 5 Tetraedros inscritos. Cada rotación permuta estos cinco Tetraedros, y gracias a esto podemos establecer un isomorfismo entre las rotaciones y el grupo  $A_5$ .

Quando se tienen clasificados a los grupos rotacionales de isometrías, es más sencillo determinar cuales son todos los grupos isométricos:

Una *inversión central* es una transformación que a cada punto  $x$  lo transforma en su punto antípoda  $-x$ . Como se observó anteriormente, todo grupo finito de isometrías tiene un punto fijo. Es sencillo demostrar que las isometrías, que dejan fijo un punto, pueden expresarse como la composición de una rotación y una inversión central, donde el origen de coordenadas es el punto fijo. A la composición de una rotación con una inversión central la denominaremos una *inversión rotatoria*.

Si un grupo finito de isometrías  $\Gamma$  consiste solamente de rotaciones, es uno de los grupos considerados anteriormente. De no ser así,  $\Gamma$  contiene un grupo de rotaciones  $G$  como subgrupo de índice dos,  $\Gamma$  es un grupo de orden  $2n$ , que consiste de  $n$  rotaciones  $R_1, R_2, \dots, R_n$  (los elementos de  $G$ ) y del mismo número de inversiones rotatorias.

Esto se explica al considerar, que si el grupo consta de  $m$  inversiones rotatorias,  $T_1, T_2, \dots, T_m$ , podemos multiplicar por  $T_1$  cada elemento del grupo con el objeto de expresar las mismas  $n + m$  isometrías como:  $T_j T_1$  y  $R_i T_1$ . Las  $n$  isometrías  $R_i T_1$  son inversiones rotatorias, y las  $m$  isometrías  $T_j T_1$  son rotaciones por lo que  $m = n$ .

Si la inversión central  $Y$  pertenece al grupo de isometrías  $\Gamma$ ,  $\Gamma$  es en realidad el producto directo  $G \times \{Y\} \cong G \times Z_2$ . Esto se debe a que entonces las  $n$  inversiones rotatorias son simplemente  $R_i Y$ , o lo que es lo mismo,  $Y R_i$ .

Cuando  $Y$  no pertenece al grupo, las  $2n$  transformaciones  $R_i T_j Y$  forman un grupo de rotaciones de orden  $2n$  que tiene la misma tabla de multiplicación que el grupo  $\Gamma$ , pues tenemos que si  $R_i T_j = T_k$

$$S_i T_j Y = T_k Y, \quad \text{y si } T_i T_j = S_k$$

$$T_i Y T_j Y = T_i Y^2 T_j = T_i T_j = S_k$$

De esta forma  $\Gamma$  es isomorfo a un grupo de isometrías rotacionales de orden  $2n$ , que tiene como subgrupo normal al subgrupo  $G$  de orden  $n$ . En este caso llamaremos a  $\Gamma$  grupo *Mixto*.

Para terminar nuestra clasificación, tenemos que buscar pares de grupos rotacionales relacionados de la manera descrita. Estos pares son:

$$C_{2n} C_n, \quad D_n C_n, \quad D_n D_{\frac{1}{2}n} \quad (n \text{ par}), \quad S_4 A_4$$

Con esto podemos completar la tabla siguiente, donde se muestra a todos los grupos clasificados:

GRUPOS FINITOS DE ISOMETRIAS

EN EL ESPACIO

Grupos Rotacionales	Productos directos	Grupos Mixtos
$C_n$	$C_n \times Z_2$	$C_{2n}C_n$
$D_n$	$D_n \times Z_2$	$D_nC_n$
$A_4$	$A_4 \times Z_2$	$D_{2n}D_n$
$S_4$	$S_4 \times Z_2$	$S_4A_4$
$A_5$	$A_5 \times Z_2$	

Los grupos planos son esencialmente éstos; en la primera clasificación que ofrecemos, usamos varias presentaciones de estos grupos, sobre todo al clasificar aquéllos que tenían presentaciones en dos generadores; vamos a estudiar algunas de estas presentaciones como simetrías de los poliedros mencionados.

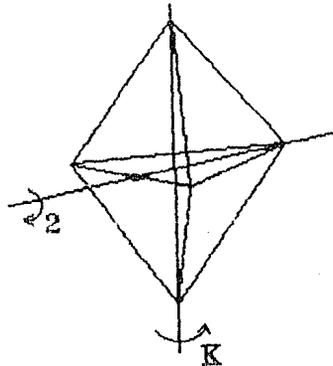
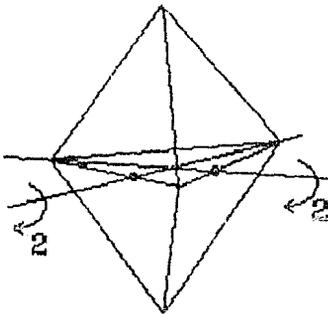
Queremos mostrar la geometría de cada una de las presentaciones usadas.

Para el grupo diédrico aparecen dos presentaciones:

$$\langle R, V \mid R^2 = 1, V^2 = 1, (RV)^k = 1 \rangle$$

$$\langle R, V \mid R^2 = 1, V^k = 1, (VR)^2 = 1 \rangle$$

En el primer caso tenemos que puede ser pensado como el grupo de rotaciones del diedro, que puede ser generado por dos de sus rotaciones, vea las figuras:

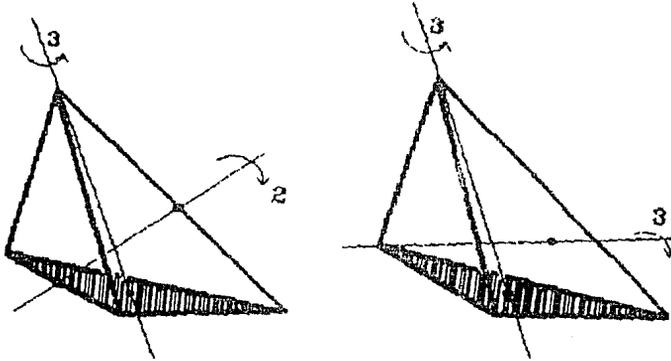


Del grupo  $A_4$  (las rotaciones del Tetraedro) aparecen las siguientes presentaciones:

$$\langle R, V \mid V^3 = 1, R^2 = 1, (VR)^3 = 1 \rangle$$

$$\langle R, V \mid R^3 = 1, V^3 = 1, (RV)^2 = 1 \rangle$$

que geoméricamente corresponden a las siguientes parejas de rotaciones en el Tetraedro (ambas parejas generan):

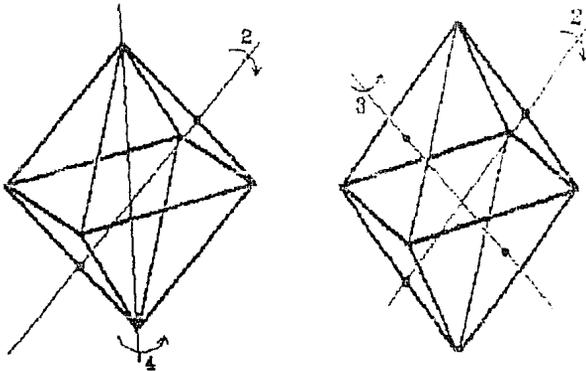


Del grupo  $S_4$  aparecen las siguientes presentaciones:

$$\langle R, V \mid V^4 = 1, R^2 = 1, (VR)^3 = 1 \rangle$$

$$\langle R, V \mid V^3 = 1, R^2 = 1, (VR)^4 = 1 \rangle$$

En el Octaedro podemos visualizar dos parejas de rotaciones que cumplen las mismas relaciones, En la figura se representa al Octaedro, y se marcan las rotaciones con sus ejes respectivos:



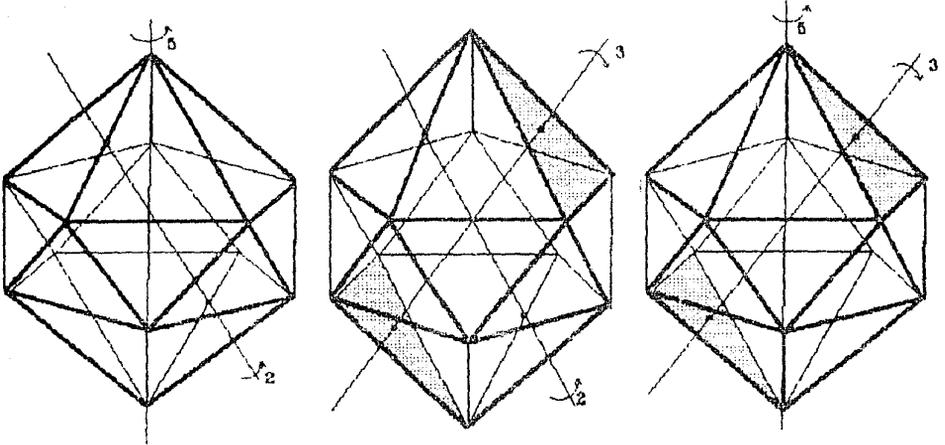
El grupo  $A_5$  aparece varias veces en la clasificación, tenemos las presentaciones siguientes:

$$\langle R, V | V^5 = 1, R^2 = 1, (VR)^3 = 1 \rangle$$

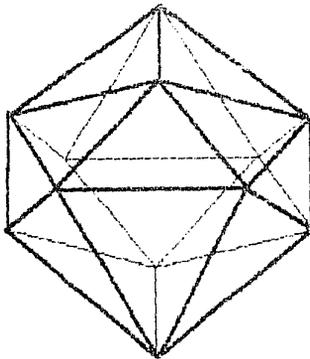
$$\langle R, V | R^5 = 1, V^3 = 1, (RV)^2 = 1 \rangle$$

$$\langle R, V | V^3 = 1, R^2 = 1, (VR)^5 = 1 \rangle$$

En las figuras que siguen, se muestra la realización geométrica, por simetrías rotacionales en el Icosaedro.



Es interesante notar que el grupo de rotaciones del Icosaedro también se puede representar geoméricamente como el grupo generado por las dos rotaciones de periodo tres, que mostramos en la figura que sigue; sin embargo esta presentación no produce un diagrama de Cayley plano.



Los grupos de simetrías de los sólidos platónicos tienen las siguientes presentaciones, que geoméricamente son grupos generados por tres reflexiones.

$$\langle X_1, X_2, X_3 | X_1^2 = X_2^2 = X_3^2 = (X_1 X_2)^2 = (X_1 X_3)^2 = (X_2 X_3)^2 \rangle$$

$$\langle X_1, X_2, X_3 | X_1^2 = X_2^2 = X_3^2 = (X_1 X_2)^2 = (X_1 X_3)^3 = (X_2 X_3)^3 \rangle$$

$$\langle X_1, X_2, X_3 | X_1^2 = X_2^2 = X_3^2 = (X_1 X_2)^2 = (X_1 X_3)^3 = (X_2 X_3)^4 \rangle$$

$$\langle X_1, X_2, X_3 | X_1^2 = X_2^2 = X_3^2 = (X_1 X_2)^2 = (X_1 X_3)^3 = (X_2 X_3)^5 \rangle$$

# GRAFICAS POLIEDRALES

**E**n este apéndice se pretende establecer la relación entre las gráficas planas, 3-conexas y los poliedros. Steinitz demostró el teorema siguiente considerado fundamental en la teoría de poliedros:

Una gráfica es el esqueleto de un poliedro si y sólo si es tres conexa y plana.

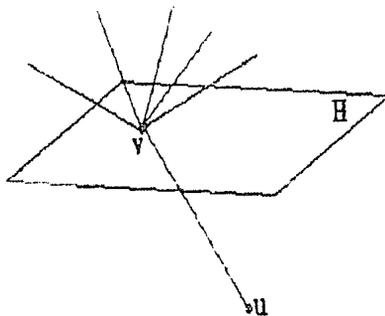
Vamos a presentar una demostración sencilla y bonita de Grünbaum, para lo cual vamos a necesitar las siguientes nociones: Un subconjunto de  $R^n$  definido por un conjunto finito de desigualdades lineales es claramente un conjunto convexo, que nosotros llamaremos un *poliedro*. Un poliedro  $X$  en  $R^3$  está acotado por planos, un subconjunto de  $X$  que esté contenido en uno de los planos se denomina cara del poliedro  $X$ , la intersección de dos caras de  $X$  es una arista y la intersección de dos aristas es un vértice. (Para que nuestra definición de poliedro coincida con la imagen sólida que tenemos de él, pediremos que su interior sea no vacío).

Un plano  $H \subseteq R^3$  es *soporte* del poliedro  $X$  si  $\partial X \cap H \neq \emptyset$  y  $X \subseteq H^+$  o bien  $H^-$  con  $H^+$  o  $H^-$  los medios espacios cerrados marcados por  $H$ .

Vamos a usar en la demostración del teorema el lema que sigue:

**LEMA B.1** Sea  $V$  un vértice de un poliedro  $M$  y  $H^+$  un medio espacio cerrado determinado por el plano  $H$ , tal que  $v \in H$  y tal que todas las aristas incidentes en  $v$  pertenecen a  $H^+$ .  $H$  es un plano de soporte para  $M$ .

**Demostración:** Supongamos que existiera un punto  $u$  de  $M$  en  $H^-$ , por la convexidad el segmento  $T = tu + (1-t)v$  está contenido en  $M$ ,  $T$  cruza el plano  $H$  y por tanto existe una arista que sale de  $v$  que cruza  $H$  y que no está contenida en  $H^+$ . 



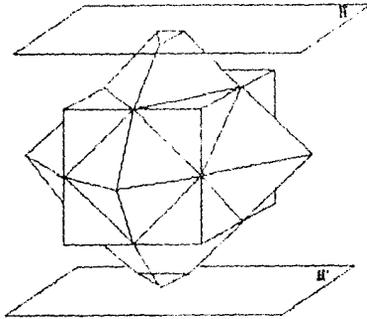
**TEOREMA B.2** Una gráfica es el esqueleto de un poliedro si y sólo si es tres conexa y plana.

**Demostración:** Con el lema B.1 podemos probar la necesidad de las condiciones del

teorema de Steinitz:

Consideremos  $M$  un poliedro, tal que su esqueleto es la gráfica  $G$  formada por las aristas y vértices de  $M$ . Es suficiente mostrar que  $G$  es tres conexa (plana, desde luego) y para ello es suficiente mostrar que quitar dos vértices cualesquiera no destruye la conexidad de la gráfica esqueleto.

Sean  $u, v$  dos vértices de  $G$  y llamemos  $Q$  a la recta que pasa por ellos. Sólo puede ocurrir que  $Q \cap \text{int}M = \emptyset$  o  $Q \cap \text{int}M \neq \emptyset$ . En el primer caso existe un plano  $H$  de soporte que contiene a  $Q$ ,  $u$  y  $v$  son vértices de una misma cara  $F$  de  $M$ . Sea  $H'$  el plano de soporte de  $M$  paralelo a  $H$ .  $H'$  intersecta a  $M$  en una cara, una arista o un vértice.

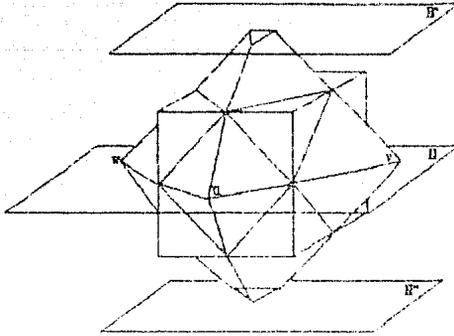


Observe que dado un vértice  $x$  de la gráfica  $G - \{u, v\}$  o está en  $H'$  o bien existe un vértice de  $x$  adyacente a  $x$  que está más cerca de  $H$  que  $x$ . (Esto es consecuencia del lema anterior, pues si no el plano que pasa por  $x$  paralelo a  $H$  sería de soporte, teniendo tres planos paralelos de soporte).

Por este hecho de cualquier vértice  $x \in G - \{u, v\}$  existe una trayectoria que lo conecta a un vértice  $y \in H' \cap M$ . Entonces  $G - \{u, v\}$  es conexas: para unir  $x$  y  $y$  en  $G - \{u, v\}$  se manda una trayectoria de  $x$  a  $x'$  en  $H'$  y de  $y$  a  $y'$  en  $H'$  y como  $H'$  corta en una cara, una arista o un vértice de  $M$ ,  $x'$  y  $y'$  pueden unirse a su vez.

En el caso que  $Q \cap \text{int}M \neq \emptyset$  considérese el plano  $H$  que pasa por  $u, v$  y algún otro vértice  $w$  de la gráfica  $G$ . Sean  $H'$  y  $H''$  los planos de soporte paralelos a  $H$ . Si  $x_1$  y  $x_2$  son dos vértices de  $G - \{u, v\}$ , hay dos posibilidades: que  $x, y$  pertenezca al mismo medio espacio generado por  $H$  o a distinto.

Si están en el mismo medio espacio, la demostración de que se pueden conectar por una trayectoria es igual a la del caso anterior. Si están en distinto, podemos, por el caso anterior, asegurar que hay una trayectoria de  $x$  a  $w$  y otra de  $w$  a  $y$ , por lo que se tiene la necesidad.



La suficiencia de las condiciones de Steinitz es más delicada y se basa en una inducción sobre el número de aristas de la gráfica plana 3-conexa. Dada una gráfica 3-conexa y plana  $G$  con vértices  $V$ , si denotamos como  $V_k$  y  $C_k$  al número de vértices de valencia  $k$  y caras de longitud  $k$  en  $G$  respectivamente, entonces:

$$V = \sum_{k \geq 3} V_k \quad , \quad C = \sum_{k \geq 3} C_k$$

Sabemos que  $2A = \sum_{k \geq 3} kC_k$  y similarmente  $2A = \sum_{k \geq 3} kV_k$ . Como  $G$  es plana  $V - A + C = 2$ , esto da

$$\sum_{k \geq 3} kC_k + \sum_{k \geq 3} kV_k = 4A = 4V + 4C - 8 = 4 \sum_{k \geq 3} V_k + 4 \sum_{k \geq 3} C_k - 8$$

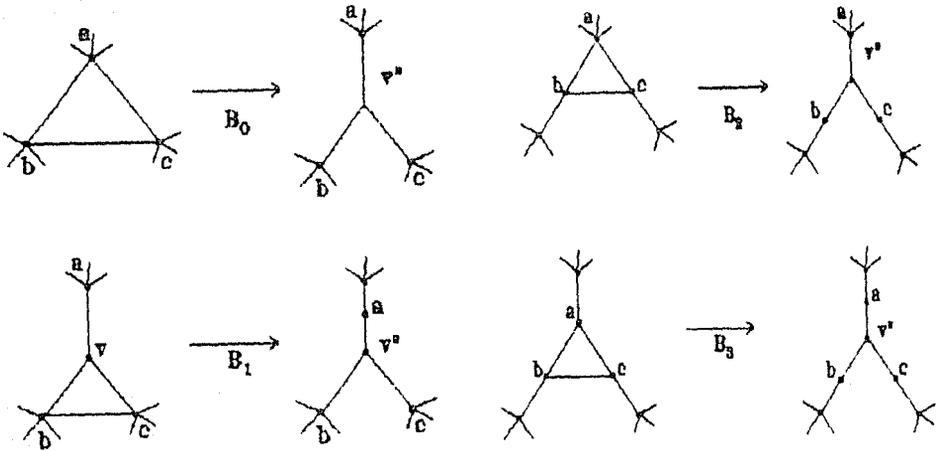
$$\Rightarrow V_3 + C_3 = 8 + \sum_{k \geq 5} (k-4)(V_k + C_k) \geq 8$$

Esto dice que toda gráfica tres conexa plana tiene al menos 8 elementos trivalentes: caras de longitud tres o vértices de valencia 3.

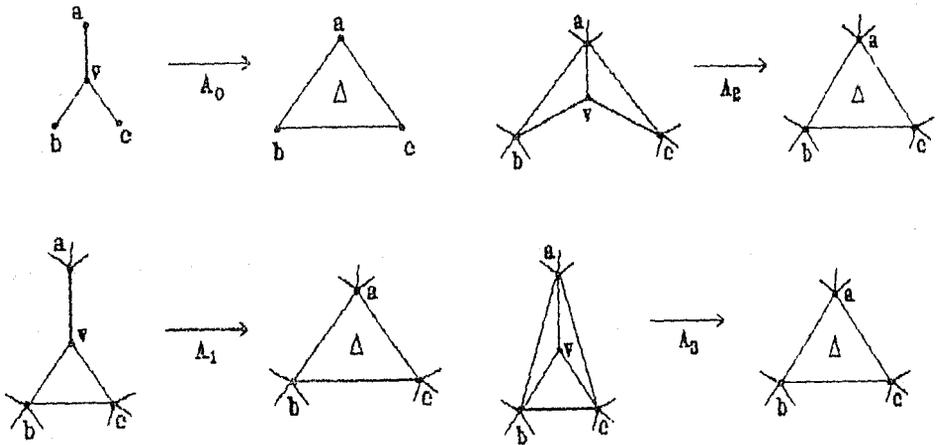
La *reducción de una gráfica  $G$*  es un procedimiento para obtener, a partir de una gráfica plana 3-conexa, otra gráfica  $G^*$  también plana y tres conexa.

En las siguientes figuras se muestra como reducir un elemento trivalente de la gráfica 3-conexa:

Primero el caso en que el elemento trivalente es un triángulo tenemos las cuatro transformaciones  $B_i$ .



las cuatro reducciones  $A_i$  se aplican a vértices de valencia tres.

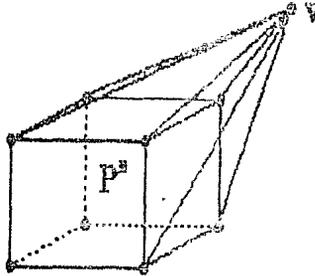


Cualquiera de las reducciones preserva conexidad (lema B.3):

Si  $G$  contiene un vértice de valencia tres que pertenece a la frontera de una cara triangular, la reducción de ese vértice reducirá el número de aristas de  $G$  en al menos una.

Si la gráfica original  $G$  no contiene un vértice con tales características el lema B.4 nos asegura que una sucesión finita de reducciones obliga a que aparezca un vértice con tales características.

Al aplicar la reducción y reducir el número de aristas en al menos uno, obtenemos una gráfica 3-conexa  $G^*$ . Por hipótesis de inducción existe un poliedro  $P^*$ , obtendremos un poliedro  $P$  de esqueleto  $G$ . Si obtuvimos a  $G^*$  al aplicar una reducción  $B$ ; a  $G$ ,  $P$  es obtenido de  $P^*$  cortando el vértice  $v^*$  con un plano que pasa por los puntos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (vea la gráfica correspondiente). Si obtuvimos a  $G^*$  al aplicar una reducción  $A$ ; a  $G$ ,  $P$  es el casco convexo de  $P^*$  y un punto  $v$  separado de  $P^*$ .



En el caso de la reducción  $A_0$ ,  $v$  tiene que ser el punto de intersección de los planos que contienen a las caras adyacentes al triángulo  $\Delta$ . (Si ese punto no existe explícitamente como en el caso de que 2 de esos planos son paralelos, aplicaremos una transformación proyectiva que realice la intersección de esos planos.)

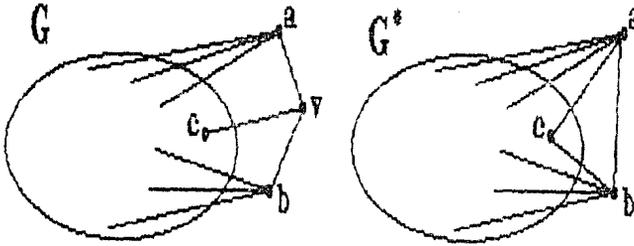
En el caso de la reducción  $A_1$ , el punto  $v$  debe pertenecer a la recta de intersección de dos de esos planos.

En el caso de la reducción  $A_2$ ,  $v$  sólo necesita estar en uno de esos planos, para la reducción  $A_3$  en ninguno.

Sólo nos resta demostrar (lema B.4) que, con el proceso de reducción, en algún momento si reducimos el número de aristas en la gráfica y así podremos aplicar la hipótesis inductiva. 

**LEMA B.3** Las reducciones preservan conexidad.

**Demostración:** vea la figura que sigue.



Llamemos  $G^*$  a la gráfica obtenida de  $G$  por una reducción. Veamos la demostración de por qué en la reducción  $A_0$  se preserva la conexidad. Al retirar de  $G^*$  los vértices  $\{u, w\}$  no involucrados en la reducción  $A_0$ ,  $G^* - \{u, v\}$  es conexa obviamente, porque en la gráfica original  $G - \{u, v\}$  es conexa. Los problemas pueden surgir al ser  $u$  o  $w$  vértices involucrados con la reducción  $A_0$  (vea la figura anterior), por ejemplo si  $u = a$ ,  $w$  es cualquier otro vértice distinto de  $b$  y  $c$ ,  $G^* - \{u, w\}$  es conexa, pues  $G - \{a, w\}$  es conexa, para encontrar un camino entre dos vértices cualesquiera de  $G^* - \{u, w\}$  se usa el camino que había entre ellos en  $G - \{u, w\}$  y sólo se cambian las aristas cuando se pasa por aristas removidas en la reducción.

Para las otras reducciones se demuestra igual la propiedad. 

**LEMA B.4** Dada una gráfica  $G$  tres conexa y plana, contiene una cara triangular uno de cuyos vértices es de valencia tres o bien se puede obtener  $G^*$  por aplicar un número finito de reducciones, que es una gráfica tres conexa, plana y que contiene una cara con esas características.

**Demostración:** Dada una gráfica  $G$  plana y 3-conexa se puede obtener una gráfica  $I(G)$  de la siguiente forma: Los vértices de  $I(G)$  son las aristas de  $G$  y uniremos dos de esos vértices, si y sólo si para algún encaje plano de  $G$  las aristas que representan son incidentes en un mismo vértice y son aristas de una misma cara.

Obsérvese, primero que nada, que  $I(G)$  es plana y 3-conexa (porque  $G$  lo es) y cada vértice es de valencia cuatro, porque cada arista está en 2 caras y en cada una de ellas tiene dos aristas vecinas.

Existe una biyección entre las caras de  $I(G)$  y la unión de vértices y caras de  $G$ , que establece

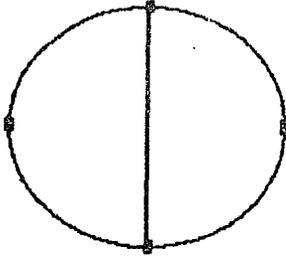
$$V(G) + C(G) = C(I(G))$$

Pero la relación que nos interesa es que dos caras  $A$  y  $B$  de  $I(G)$  tienen una

arista en común cuando

- a) a  $A$  le corresponde un vértice de  $G$  y a  $B$  una cara de  $G$ .
- b) el vértice y cara correspondientes son adyacentes en  $G$ .

Observe que una cara triangular en  $G$  con un vértice de valencia tres corresponde en  $I(G)$  a dos triángulos adyacentes por una arista.



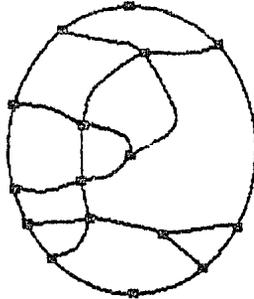
Vamos a demostrar que esta configuración efectivamente aparece en  $I(G)$  por aplicación sucesiva de reducciones en  $G$ . Esto se probará en lema B.11 requiriendo de las definiciones y los lemas anteriores a él. 

**DEFINICION B.5** Sea  $H$  una gráfica plana, 3-conexa y regular de grado 4. La arista  $(i, g) \in A(H)$  tiene continuación directa  $(j, k)$  si las aristas  $(i, j)$  y  $(j, k)$  en un encaje plano de  $H$  separan a las otras dos aristas que inciden en el vértice  $j$ .

**DEFINICION B.6** En la gráfica  $H$  mencionada, una trayectoria  $(j_0, j_1, j_2, \dots, j_n)$  en  $H$  es transversal si  $\forall k \in [1, n-1]$   $(j_k, j_{k+1})$  es continuación directa de  $(j_{k-1}, j_k)$ .

a)  $L$  consiste de un ciclo  $l$  llamado frontera del lente y los vértices y aristas que están en el interior de  $l$  en un encaje plano de  $H$ .

b) El ciclo consiste de dos trayectorias transversales:  $i_0, i_1, i_2, \dots, i_n, j_0$  y  $j_0, j_1, j_2, \dots, j_m, i_0$  tales que en  $L$  las únicas aristas que inciden en  $i_0$  son  $(i_0, i_1)$  y  $(i_0, j_m)$ , para  $j_0$  sólo inciden  $(i_0, i_1)$  y  $(i_0, j_m)$ .



**DEFINICION B.7** Una lente  $L$  en  $H$  es irreducible si  $L$  no contiene subgráficas propias que también sean lentes.

Un ejemplo de lente irreducible es justamente la configuración que nos interesa encontrar en  $I(G)$ . Con respecto a los lentes vamos a probar una sucesión de vistosos lemas:

**LEMA B.8** Toda gráfica  $H$  plana, tres conexa y cuatro regular contiene un lente irreducible

**Demostración:** Considérese el conjunto  $A$  de las subgráficas de  $H$ , que contienen un ciclo formado por a lo más dos trayectorias transversales. Este conjunto es no vacío, pues dado  $x \in H$  comience en él una trayectoria transversal  $T$ , prolongue  $T$  hasta que se cruce a sí misma formando un ciclo  $K$ .  $K$  es un ciclo formado por una trayectoria cerrada transversal.  $K$  pertenece entonces a nuestro conjunto, sea  $R$  un elemento mínimo en vértices del conjunto considerado. No puede estar formado por una sola trayectoria transversal  $B$ , pues se tomaría entonces cualquier vértice y en el ciclo y apartir de él se prolonga una trayectoria transversal (eso se puede hacer desde cualquier punto) hacia el interior de  $B$ . En algún momento toca de nuevo a  $B$  en otro vértice o se cruza a sí misma, en ambos casos aparece un elemento de  $A$  de menor número de vértices, contenido en  $R$ . 

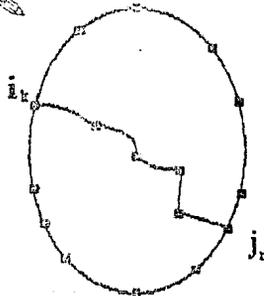
**LEMA B.9** Si  $L$  es lente irreducible, la longitud de las dos trayectorias que forman la frontera de  $L$  es la misma.

**Demostración:** Por ser elemento mínimo en el conjunto mencionado en la demostración anterior, dado un vértice en la frontera  $i_k$ , al comenzar en él una trayectoria transversal  $T$ ,  $T$  no se autointersecta, pues aparece un elemento de menor número de vértices; además  $T$  tiene que terminar en un vértice de la frontera también, pero en una trayectoria transversal opuesta (recuérdese que la frontera de un lente son dos trayectorias de este tipo), pues de terminar en la misma aparece un lente más chico contenido en  $L$ .

De este modo cada vértice  $i_k$  está unido a un vértice  $j_s$  por una trayectoria transversal. De cada  $i_k$  sale sólo una de esas trayectorias transversales, que llamaremos *secciones*, podemos producir entonces un apareamiento entre los vértices de los dos bordes del lente.

Con esto queda demostrado el lema. 

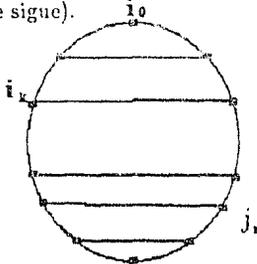
Una sección se visualiza así:



Observe además que por cada punto  $d_k$  en el interior del lente pasan dos secciones.

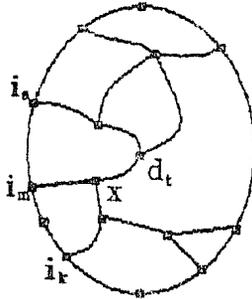
**LEMA B.10** *Todo lente irreducible contiene un triángulo adyacente a su frontera.*

**Demostración:** Si  $L$  no tiene puntos interiores, la cara de  $L$  incidente a  $i_0$  es un triángulo (vea la figura que sigue).



En el caso en que haya puntos interiores, sean éstos  $d_1, d_2, \dots, d_r$ . Sea  $h(d_j)$  el número de caras que están en la región, cuyas fronteras son las dos secciones  $l_k, l_s$  que pasan por  $d_j$  ( $l_s$  parte de  $i_s, l_k$  de  $i_k$ ) y la transversal frontera que va de  $i_k$  a  $i_s$ .

Sea  $t \in [1, r]$  tal que  $h(d_t) = \min\{h(d_1), h(d_2), \dots, h(d_r)\}$ . Se afirma que los vértices  $d_t, i_k, i_s$  ( $i_k, i_s$  son los vértices de donde parten las secciones que pasan por  $d_t$ ) forman un triángulo. Entonces tenemos una situación como la que sigue:



Si entre  $i_s$  y  $d_t$  hubiera puntos intermedios de la sección  $l_s$ , se considera cualquiera de ellos, digamos  $x$ , y la otra sección que pasa por  $x$  (además de  $l_s$ ) una a  $x$  con  $i_m$  en la transversal frontera. Esta transversal parte en dos a la región delimitada por  $d_t, i_k, i_s$ . Alguna de esas dos mitades tiene menos regiones, llegando a una contradicción con la construcción de  $d_t$ . De manera análoga en la sección  $l_k$  entre  $i_k$  y  $d_t$  no hay vértices. La región, que delimitan  $i_k, i_s$  y  $d_t$ , es cara y es un triángulo en el lente, que incide en la frontera.  $\blacksquare$

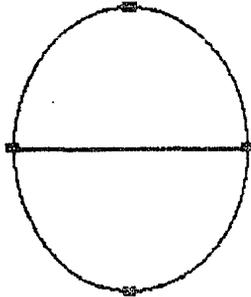
**LEMA B.11** La aplicación de un número finito de reducciones en  $G$  gráfica tres conexa y plana induce la aparición de un lente irreducible con sólo dos caras en su interior.

Sea  $K(I(G))$  el número mínimo de caras en un lente irreducible de  $I(G)$ . Tenemos  $2 \leq K(I(G)) \leq \frac{1}{2}C(I(G))$ , ( $C(I(G))$  es igual al número de caras de  $I(G)$ ). Para verificar la cota superior piense en la gráfica  $I(G)$  encajada en la esfera, la frontera de un lente es frontera realmente de dos lentes, tanto una parte de la esfera como la otra lo son y el número de caras en alguno de esos dos lentes es menor o igual a la mitad del total de caras.

Por la biyección que existe entre caras de  $I(G)$  y caras y vértices de  $G$

$$K(I(G)) \leq \frac{1}{2}(C(G) + V(G)) = \frac{A(G)}{2} + 1 < A(G)$$

Si  $K(I(G)) = 2$  entonces el lente irreducible correspondiente es el de la configuración que buscábamos:



De este modo las reducciones  $A_1, A_2, A_3$  y  $B_1, B_2, B_3$  efectivamente disminuyen el número de aristas en  $G$  con lo que terminamos la prueba.

Si  $K(I(G)) > 2$ , por el último lema demostrado, en cualquier lente  $L$  con  $K(I(G))$  caras en su interior existe un triángulo  $\Delta$ , incidente en su frontera de acuerdo a que  $\Delta$  corresponda a una cara triangular o a un vértice de valencia tres en  $G$ ; aplicaremos las reducciones  $A_0$  o bien  $B_0$ . En ambos casos  $K(I(G^*)) < K(I(G))$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [Ba1] Babai, László (1972)  
 "Automorphism Groups of Planar Graphs, I"  
*Discrete Mathematics*, 2:295-307
- [Ba3] Babai, László (1973)  
 "Groups of Graphs on Given Surfaces"  
*Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 24(1-2):215-221
- [BaIm] Babai, László y W. Imrich (1973)  
 "On Groups of Polyhedral Graphs"  
*Discrete Mathematics*, 5:101-103
- [Co] Coxeter, H.S.M. (1969)  
 "Introduction to Geometry"  
 Springer-Verlag, Nueva York, 2a ed.
- [CoMo] Coxeter, H.S.M. y W.O.J. Moser (1980)  
 "Generators and Relations for Discrete Groups"  
 Springer-Verlag, Alemania, 4a ed.
- [Ma] Maschke, H. (1986)  
 "The Representation of Finite Groups, especially of the Rotation Groups of the  
 Regular Bodies of three- and four- dimensional Space, by Cayley Color Diagrams"  
*American Journal of Mathematics*, 18:156-171
- [Man] Mani, P. (1971)  
 "Automorphismen von Poliedrischen Graphen"  
*Mathematischen Annalen*, 192:279-303
- [Mo] Massey, W.S. (1967)  
 "Algebraic Topology: an Introduction"  
 Harcourt, Brace, and World
- [GrHa] Gross, J. y F. Harary (1980)  
 "Some Problems in Topological Graph Theory"  
*Journal of Graph Theory*, 4:253-263
- [Ha] Harary, Frank (1972)  
 "Graph Theory"  
 Addison - Wesley Publishing Company, E.U.A., 3a ed.
- [Wh1] White, Arthur (1972)  
 "On the Genus of a Group"  
*Transactions of the American Mathematical Society*, 173:203-214
- [Wh2] White, Arthur (1973)  
 "Graphs, Groups and Surfaces"  
 North Holland/American Elsevier, Amsterdam

[YeKoKr] Yemelichev, V.A., M.M. Kovalev y M.K. Kravtsov (1984)  
traducido por G.H. Lawden  
"Polytopes, Graphs and Optimisation"  
Cambridge University Press, Cambridge

[Yo] Youngs, J.T.W. (1983)  
"Minimal Imbeddings and the Genus of a Graph"  
*Journal of Mathematics and Mechanics*, 12(2):303-315