EL PROBLEMA DEL CUERPO NEGRO Y EL CAMPO DE PUNTO CERO.

Alejandro Schmidt Ruiz del Moral

INDICE

CAPITULO I

INTRODUCCION HISTORICA AL PROBLEMA DEL CUERPO NEGRO.

El problema del cuerpo negro ha contribuido, desde su nacimiento, al desarrollo de diversas ramas en la física, algunas de las cuales son: el electromagnetismo, la mecánica estadística y principalmente la mecánica cuántica, siendo esta última con la que más se le asocia. Esto se debe a que fue dicho problema el que marcó el nacimiento de la mencionada teoría: pues, en el transcurso de las investigaciones realizadas para desarrollar una teoría que describiera la naturaleza de la radiación de un cuerpo negro ,se encontró que se necesitaban conceptos nuevos- no considerados por las teorías existentes hasta ese momento- para poder llegar a un resultado correcto.

El problema del cuerpo negro quedó planteado desde 1859 por Gustav Kirchhoff (1824-1887), quien a partir de estudios sobre las líneas espectrales del sol encontró que, si se considera un cuerpo en equilibrio térmico con la radiación que lo rodea, se puede proponer que la radiación que el cuerpo absorbe es convertida únicamente en energía térmica; y si, por otro lado, escribimos a la cantidad de energía emitida por el cuerpo por unidad de área y en el intervalo de frecuencia $d\nu$ como $E_{\nu}d\nu$ y al coeficiente de absorción a la frecuencia ν como A_{ν}, entonces, la cantidad E_{ν}/A_{ν} solamente depende de la temperatura T y de la frecuencia ν con la que el cuerpo intercambia energía térmica con la radiación y es independiente de todas las demás características del cuerpo (estructura, material, etc.). Esto se puede escribir como:

$$E_\nu / A_\nu = J(\nu, T).$$

De aquí se puede concluir que la función $J(\nu,T)$ introducida, al no depender de las caracteristicas del cuerpo, debe ser una función de caracter universal. Dichas ideas fuerom presentadas por Kirchhoff en un trabajo[1] expuesto ante la academia de Berlin ese mismo año.

Fue en un segundo trabajo[2] donde Kirchhoff introdujo la idea de cuerpo negro definiendolo como un cuerpo que absorbe toda la radiación que incide sobre él; o bien, como un cuerpo para el que se cumple que $A_\nu=1$; así, para un cuerpo de este tipo, la potencia de emisión E_ν debe ser equivalente en todo sentido a la función $J(\nu,T)$. El caracter universal que debía poseer esta función atrajo la atención de varios físicos de aquella época.

Por el lado de la física experimental se tuvieron que resolver principalmente tres problemas:

1. Construir cuerpos con propiedades de cuerpo negro que permitieran controlar las variaciones de frecuencia y de temperatura.

2. Idear detectores de radiación con la sensibilidad adecuada para el problema.

3. Encontrar la manera de extender las mediciones de frecuencia sobre intervalos más grandes que los medidos hasta ese momento.

Fueron necesarios cuarenta años de trabajo antes de que se pudieran encontrar los resultados correctos.

El siguiente avance teórico se dio hasta 1879, cuando Josef

Stefan (1835-1893) encontró[3], basándose en observaciones experimentales, que la energía total radiada por un cuerpo cualquiera varía con la cuarta potencia de la temperatura. Esta afirmación no es del todo cierta, tal como lo demostró en 1884 el físico austriaco Ludwig Boltzmann (1844-1906) en un trabajo[4] en el cual, además de dar una demostración termodinámica rigurosa, se dio cuenta de que esta ley sólo es válida para cuerpos negros. Para esto usó un resultado encontrado por Kirchhoff[2] que se puede escribir como[5]:

$$\rho(\nu,T)=\frac{8\pi}{c}J(\nu,T),$$

donde a $\rho(\nu,T)$, que es la densidad de energía por unidad de volumen y de frecuencia, a la frecuencia ν, de la radiación contenida dentro de una caja con paredes adiatérmicas y a temperatura T, se le llama la densidad espectral de energía. Este resultado se puede interpretar diciendo que la radiación descrita por $\rho(\nu,T)$ es de la misma naturaleza que la radiación de un cuerpo negro descrita por $J(\nu,T)$. Entonces, Boltzmann encontró, que para radiación homogenea, isotrópica y no polarizada, se cumple que:

$$u(T)=aT^4$$

donde $u(T)=\int_0^\infty \rho(\nu,T)d\nu$ es la densidad volumétrica de energía, y a una constante independiente de la frecuencia y la temperatura. A esta ecuación se le conoce como la ley de Stefan-Boltzmann.

Esta ley es de poca relevancia en la física; se limita a describir la variación de la densidad de energía con la temperatura;

sin embargo, las técnicas usadas para su obtención sí tuvieron su importancia; pues, alrededor de una década después, en 1894, fueron utilizadas por Wilhelm Wien (1864-1928) para derivar un resultado fundamental[6] concerniente a $\rho(\nu,T)$, cantidad que la ley de Stefan-Boltzmann no considera. Una de las técnicas empleadas por Boltzmann fue usar la radiación reflejada en un pistón en movimiento. Esto último implica que la radiación va a sufrir una redistribución en las frecuencias que la componen debida al efecto Doppler. Entonces, para calcular el cambio en la distribución espectral $\rho(\nu,T)$ debido a este efecto, Wien estudió la contracción adiabática de una esfera perfectamente reflectora, y mostró que se debía cumplir la ecuación:

$$\rho(\nu,T)=\nu^3\Phi(\nu/T); \tag{I.1a}$$

o bien, en términos de la longitud de onda:

$$\rho(\lambda,T)=\lambda^{-5}f(\lambda T), \tag{I.1b}$$

donde, tanto $\Phi(\nu/T)$, como $f(\lambda T)$, son funciones desconocidas.

Esta ley significó un paso importante en la búsqueda de la ley que gobierna la radiación de un cuerpo negro, pues reducía el trabajo de especificar una función de dos variables a encontrar otra de una sola variable. A este resultado se le conoció en la literatura como la ley de desplazamiento de Wien, ya que muestra cómo la curva de $\rho(\nu,T)$ se desplaza al cambiar la temperatura de la cavidad que se esté considerando. Otra consecuencia importante de esta ley es:

$$\lambda_{max} T = b \qquad b: cte$$

o bien, que la longitud de onda a la cual $\rho(\nu,T)$ tiene un máximo es inversamente proporcional a la temperatura.

Haciendo una recapitulación de los resultados que se habían obtenido hasta ese momento, vemos que el problema era encontrar una función para E_ν/A_ν; con la ley de Kirchhoff esto se redujo a tener que encontrar una sola función de dos variables, $J(\nu,T)$; y, con la ley de desplazamiento de Wien, el problema se simplifica de forma que ahora sólo había que buscar una función de una sola variable, $\Phi(\nu/T)$. Con esta ley se marca el punto más lejano al que se puede llegar usando física clásica. De aquí en adelante todos los intentos de derivar la ley de radiación de un cuerpo negro usando física del siglo XIX llevarán a resultados erróneos; o bien, a resultados que describen la realidad en forma parcial únicamente.

En 1886, el astrónomo norteamericano S.P.Langley (1834-1906) realizó los primeros experimentos concernientes a la medición de la densidad espectral de equilibrio de la radiación. Sus observaciones se encuentran en temperaturas menores a los 1000°C y a longitudes de onda de 5 μm. Como se verá más adelante, estos intervalos son muy cortos[7]; sin embargo,los resultados de Langley ayudaron a Wien en su trabajo para proponer una ley de radiación. Basándose en ideas estadísticas que el físico estadounidense W.A.Michelson (1860-1927) desarrolló para derivar su propia distribución[8]; Wien, en 1896[9], llegó a la ecuación:

$$\rho(\nu,T)=\alpha\nu^3\exp(-\beta\nu/T) \qquad \alpha,\beta\text{: ctes} \qquad \text{(I.2a)}$$

Para esto Wien argumentó que se puede usar un gas caliente como fuente de radiación de cuerpo negro. En este gas el número de moléculas con velocidades entre v y $v+dv$ es, usando la ley de distribución de Maxwell, proporcional a $v^2\exp(-v^2/\alpha^2)$, donde la constante α^2 es proporcional a la temperatura T. Si, además, se hace la suposición que tanto la longitud de onda como la densidad espectral de la radiación emitida por una molécula dada son funciones solamente de la velocidad de dicha molécula, entonces, la distribución de la radiación del gas debe tomar la forma $\rho(\lambda,T)=F(\lambda)\exp[-g(\lambda)/T]$ en analogía con la distribución de Maxwell. En esta ecuación, $F(\lambda)$ y $g(\lambda)$ son funciones desconocidas, pudiendose precisar un poco más su forma recurriendo a las leyes de Stefan-Boltzmann y de desplazamiento para obtener:

$$\rho(\lambda,T)=b\lambda^{-5}\exp(-a/\lambda T) \qquad a,b\text{: ctes} \qquad \text{(I.2b)}$$

que es la ley de distribución de Wien.

Al siguiente año, en 1897, Friedrich Paschen (1865-1947) se dedicó a comparar esta ecuación con los resultados obtenidos en sus trabajos experimentales. Las mediciones que llevó a cabo fueron dentro de los intervalos de 1-8μm para la longitud de onda, y de 400-1600$^\circ K$ para la temperatura;con esto, llegó a la conclusión de que la ecuación propuesta por Wien era correcta para los intervalos mencionados.

En esa época los dispositivos experimentales conocidos aun no estaban muy desarrollados, por lo cual, el rango medido por Paschen era el natural para hacer mediciones. Fue una gran coincidencia que la ley de Wien concordara con este intervalo, y así que llevara, desde ese año y hasta 1900, a la creencia de que el resultado de Wien era el definitivo. Además; en 1899, Max Planck (1858-1947) presentó, en una serie de artículos[10], una demostración rigurosa de la ley de Wien partiendo de primeros principios.

El campo de especialización de Planck dentro de la física era la termodinámica. El trabajo que presentó como tesis doctoral[11], entre otras cosas, introduce la interpretación de la segunda ley de la termodinámica que dice que la entropía de un sistema aislado siempre aumenta ó, en el caso límite, se queda igual, definiendo así una dirección para los procesos naturales. El problema del cuerpo negro lo atrajo fuertemente al conocer las mediciones hechas por Lummer y Pringsheim, a las cuales nos referiremos más abajo, y especialmente, debido al carácter universal que poseía.

Planck había sido invitado, en 1889, a la universidad de Berlín como sucesor de Kirchhoff. En esta universidad trabajaban, entre otros, Wien, Lummer, Pringsheim, Rubens y Kurlbaum, y esto lo puso en contacto directo con los trabajos y las ideas en materia de radiación. A principios de 1900, Otto Lummer (1860-1925) y Ernst Pringsheim (1859-1917) por un lado[12], y Heinrich Rubens (1862-1922) y Ferdinand Kurlbaum (1857-1927) por otro[13], lograron mediciones para longitudes de onda mayores que las usadas hasta ese entonces. Los primeros trabajaron en un intervalo de 12-18μm y de 300-1650°K, y los otros fueron más alla todavia, trabajaron en los intervalos de

30-60μm, y 200-1500°K. Al comparar la ley de Wien con sus resultados, ambos equipos se dieron cuenta que había discrepancias en la región de frecuencias bajas. Fue Rubens el que comentó con Planck esta situación al explicarle que Kurlbaum y él habían encontrado que el comportamiento de $\rho(\nu,T)$ es proporcional a la temperatura para estos valores de la frecuencia. Con esto en mente, Planck retomó el trabajo sobre el comportamiento de la radiación de un cuerpo negro basándose, entre otras cosas, en parte de los resultados que había obtenido a lo largo de su derivación de la ley de Wien. Para esto había usado algunas de las ideas de Kirchhoff; por ejemplo, consideró una caja en equilibrio con la radiación contenida dentro de ella, y para modelar la caja se aprovechó de la ley de Kirchhoff usando la suposición más simple que tenía a la mano: pensó en los radiadores de la cavidad como osciladores armónicos que radían a frecuencia ν. Después, igualando la velocidad con la que estos resonadores absorben y emiten la radiación y usando solamente principios de la electrodinámica clásica encontró para la condición de equilibrio[14], la ecuación:

$$\rho(\nu,T)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}U(\nu,T) \qquad \text{(I.3)}$$

donde $U(\nu,T)$ denota la energía promedio de los osciladores armónicos que se encuentran a temperatura T. Al igualar esta ecuación con la ley de Wien (ec. I.2a), llegó a que U debe satisfacer:

$$U(\nu,T)=C\,\nu\,\exp(-\beta\nu/T) \qquad C\text{: cte}$$

Entonces; despejando T^{-1} y usando la ecuación termodinámica:

$$\frac{1}{T}=\frac{\partial S}{\partial U}$$

llegó a que la entropía de un sistema formado por radiación que cumple con la ley de Wien, en equilibrio con los resonadores de una caja, está dada por la ecuación:

$$S=\frac{U}{a\nu}\left[ln\left(\frac{U}{b\nu}\right)-1\right] \qquad a,b\text{: ctes.}$$

Calculando la segunda derivada de esta ecuación, se llega a que:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}=\frac{cte}{U} \qquad (I.4)$$

Esta cantidad era importante para Planck pues, a volumen constante, es la que nos dice si existe un máximo local para la entropía, o no; por lo tanto, está íntimamente relacionada con la interpretación que Planck le daba a la segunda ley de la termodinámica.

Resumiendo ahora los resultados que Planck conocía hasta este momento de su trabajo, tenemos: por un lado, una ecuación válida para frecuencias altas y temperaturas bajas, la ley de Wien (ec. I.2), con la cual se cumple la ecuación (I.4). Por otro lado, sabía que para frecuencias bajas y temperaturas altas, se tenía que cumplir que $\rho(\nu,T)$ fuera proporcional a la temperatura, pero no conocía cuál era la forma de la segunda derivada parcial de la entropía. Para resolver esto usó nuevamente la ecuación (I.3), ya que ella nos dice que $U(\nu,T)$, para este caso, también es proporcional a la temperatura y, tomando en cuenta que $\partial S/\partial U=T^{-1}$, vemos, integrando ésta ecuación que se debe obtener que:

$$S \propto \ln U,$$

o bien, que:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}=\frac{\mathrm{cte.}}{U^2} \qquad \text{(I.5)}$$

Ahora bien, Planck tenía dos soluciones (ecs. I.4 y I.5) para un mismo problema, sólo que una solución es válida en la región de frecuencias bajas y temperaturas altas y la otra en la de frecuencias grandes y temperaturas bajas. Es interesante escribir las expresiones de las energías internas para ambos casos. Para el primero, al combinar la ecuación (I.3) y la ecuación $\rho(\nu,T)=A\nu^2T$, se llega a:

$$U=\frac{c^3}{8\pi}AT \;;$$

para el segundo, de la ecuación (I.3) y de la ley de Wien, se obtiene:

$$U=\frac{c^3}{8\pi}\alpha\nu\,\exp\left[-\frac{\beta\nu}{kT}\right]$$

Analizando cada una de las últimas expresiones en sus respectivas regiones de validez, vemos que la primera tiene un valor grande y la segunda un valor pequeño. Planck se dio cuenta de esto e hizo la siguiente interpolación para la segunda derivada de la entropía:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}=\frac{a}{U(U+b)}. \qquad (I.6)$$

Esta expresión se reduce a las ecuaciones (I.4) y (I.5) para valores pequeños y grandes de U, respectivamente y puede considerarse, por lo tanto, como un candidato natural para representar la ley que describe a la radiación para todo valor de U. Esto es claramente compatible con el análisis expuesto en las últimas líneas.

Integrando la ecuación (I.6), se obtiene:

$$\frac{\partial S}{\partial U}=-\frac{a}{b}\ln\left(\frac{U+b}{U}\right)=\frac{1}{T}\ ,$$

y despejando U se llega a:

$$U=\frac{b}{\exp(-a/bT)-1}.$$

Para encontrar como dependen a y b de la frecuencia, Planck se refirió a la ley de Wien y encontró que:

$$U = \frac{\text{cte}\ \nu}{\exp(c\nu/T) - 1}; \qquad \text{(I.7)}$$

y finalmente, substituyendo en (I.3):

$$\rho(\nu, T) = \frac{A\nu^3}{\exp(c\nu/T) - 1}. \qquad \text{(I.8)}$$

Al comparar Rubens esta ecuación con los datos experimentales, se dio cuenta que eran compatibles; sin embargo, este resultado era meramente empírico, ya que la ecuación (I.6) no tenía una justificación teórica rigurosa. Este fue el siguiente punto que atacó Planck. Para esto se vio forzado a abandonar su punto de vista termodinámico y usar las ideas probabilísticas de Boltzmann respecto a la entropía. Estas ideas se pueden resumir en la siguiente ecuación[15]:

$$S = k \ln W,$$

que nos da la entropía del sistema en consideración, en términos del número W de distribuciones microscópicos compatibles con la energía de este sistema. En el caso particular del problema que estudiaba Planck, el sistema estaba formado por N osciladores de frecuencia ν; entonces, para poder calcular W tuvo que suponer[17] que la energía total de los N osciladores $U_N = NU$ consiste en un número entero P de "elementos de energía" ϵ tal que se cumple que $U_N = P\epsilon$, pues la concepción tradicional de U_N como magnitud continua no habría admitido un análisis combinatorio para determinar W. De hecho, si U

fuera continua sería una cantidad que se podría dividir infinitamente, lo cual nos daría, también, un valor infinito para la entropía.

Interpretando W como el número de maneras diferentes de poder distribuir los P elementos de energía ϵ entre los N osciladores, Planck obtuvo que:

$$W=\frac{(N+P-1)!}{(N-1)!P!}, \qquad \text{(I.9)}$$

así, usando la aproximación de Stirling, se obtiene para la entropía la ecuación:

$$S_N=k[(N+P)\ln(N+P)-N\ln N-P\ln P],$$

o bien, como $NU=P\epsilon$,

$$S_N=kN\left[\left(1+\frac{U}{\epsilon}\right)\ln\left(1+\frac{U}{\epsilon}\right)-\frac{U}{\epsilon}\ln\frac{U}{\epsilon}\right];$$

es fácil ver que $S=S_N/N$ satisface la ecuación (I.6), por lo que usando nuevamente $T^{-1}=\partial S/\partial U$, se llega a:

$$U=\frac{\epsilon}{\exp(\epsilon/kT)-1},$$

la cual sólo es compatible con (I.8) si se cumple que:

$$\epsilon=h\nu, \qquad \text{(I.10)}$$

donde h es una constante independiente de ν y de T. Finalmente, usando otra vez la ecuación (I.3), llegó a que:

$$\rho(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,\frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT)-1}\,, \qquad \text{(I.11)}$$

que al integrarla sobre todas las frecuencias nos da la ley de Stefan-Boltzmann y, además, cumple con todas las propiedades que se sabía que $\rho(\nu,T)$ tiene que cumplir.

En éste último cálculo encontramos dos ideas nuevas: primero, el hecho de atribuirle un significado físico a los *elementos de energía* finitos y, segundo, el método de conteo dado por la ecuación (I.9). A pesar de que Planck se inspiró fuertemente en los métodos probabilísticos de Boltzmann, el método de conteo usado por él no es estrictamente igual al que Boltzmann propuso. Para este último, lo importante era determinar la forma *más probable* en la que un número dado de moléculas *distinguibles* de un gas con energía total fija, se distribuye sobre celdas en el espacio fase. Lo que Planck calculó fue el *número total* de maneras en las que se pueden distribuir P elementos *indistinguibles* sobre N lugares. Esta forma de conteo se asemeja más al método usado, años más tarde, por Sayantra Nath Bose (1894-1972) y Albert Einstein[17] (1879-1955), al trabajar con la estadística de los ahora conocidos como bosones; pues éstos se pueden entender como partículas indistinguibles y además, dos o más de ellos pueden ocupar el mismo estado de energía. La única justificación que se podía encontrar en ese entonces al método usado por Planck, es que lo llevó al resultado correcto. Esto muestra que, a pesar del éxito de dichos métodos para derivar la ley de radiación, no se entendía a fondo el significado de los mismos. De hecho, entre 1900 y 1905, la ecuación obtenida por Planck se consideraba tan sólo como una representación exitosa de los datos experimentales y no fue sino hasta este año que se empezó a entender, y sólo por unos cuantos, que se avecinaba una crisis en la física. El mismo Planck buscó con afan, pero sin éxito, métodos alternos para encontrar una explicación más satisfactoria.

En este año, 1905, Einstein publicó[18] un artículo en el que se analizaba el trabajo de Planck. En ese artículo se comenta sobre ciertas limitaciones en la derivación de la ley de radiación. Un comentario se refiere tanto a la ecuación (I.3) como al teorema de equipartición de la energía de la mecánica estadística clásica, de acuerdo con el cual se cumple[19] que $U(\nu,T)=kT$. Combinando estas dos ecuaciones se llega a:

$$\rho(\nu,T)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT \qquad \text{(I.12)}$$

la cual ya había sido derivada, aunque no por este método, por Lord Rayleigh[20] (1842-1919) en junio de 1900 y luego James H. Jeans (1877-1946) en 1901[21] le hizo una corrección a la constante numérica del lado derecho, dejándola como aparece en la ecuación (I.12). A esta ecuación se le conoce como la ley de Rayleigh-Jeans, y es bien sabido que no se ajusta a los resultados experimentales; por ejemplo, si se integra sobre todas las frecuencias se obtiene que la densidad volumétrica de la energía es infinita. Al obtener la ecuación (I.12), Einstein concluyó que los principios clásicos *necesariamente* conducen a esta ecuación. Por otro lado, Planck había derivado su ecuación (I.3) en 1897; para esa época el teorema de equipartición se conocía desde alrededor de treinta años, por lo cual Planck tenía todos los elementos para derivar la ecuación (I.12) y sin embargo no lo hizo. Este hecho se puede relacionar con la actitud negativa con la cual Planck veía, en esa época, las ideas de Boltzmann sobre la mecánica estadística. La derivación hecha por Einstein, así como la de Rayleigh, sólo utilizan elementos de la física clásica; por lo cual se podría concluir que la física clásica no es la adecuada para resolver éste problema. A Einstein no le parecía que estas demostraciones fueran lo suficientemente rigurosas para que llevaran inequívocamente a esta conclusión; él argumentaba que el uso del teorema de equipartición, en estos casos, no estaba plenamente justificado; así que presentó una nueva derivación de la ley de Rayleigh-Jeans que, para él, estaba libre de problemas y en la cual, una vez más, sólo hace uso de la física clásica. Con esto demuestra que la física conocida hasta ese momento no era capaz de explicar la ley de radiación obtenida por Planck: había que encontrar un nuevo elemento que ayudara a lograr esto. Planck encontró que este elemento era el incluir discontinuidades en la energía; sin embargo, éste no es el único elemento posible.

En 1906 Einstein[22] regresó al trabajo sobre la ley de Planck con nuevas ideas, las cuales fueron obtenidas a lo largo de 1905 con sus trabajos sobre el efecto fotoeléctrico y los cuantos de luz; de hecho, él se da cuenta de que Planck hace uso implícito de esta última idea en su derivación; y, además, llega a la conclusión de que la ecuación (I.3) debe ser válida tanto en el régimen clásico como en el cuántico. Por otro lado, argumenta que la base de la teoría de radiación de Planck es el hecho de que, en la emisión y la absorción de radiación, la energía de un oscilador sólo puede cambiar en saltos que son múltiplos enteros de una unidad de energía con valor $h\nu$, con ν la frecuencia del oscilador. Así, ya en 1906, Einstein había adivinado las propiedades de un oscilador mecánico cuántico y su comportamiento en transiciones radiativas.

[1]Gustav Robert Kirchhoff, *Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1859* (diciembre), pp. 783-787. Cit. en M. Jammer, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, McGraw-Hill Book Company, 1966, pag 2, ref. 2.

[2]G. R. Kirchhoff, *Poggendorffs Annalen der Physik 109*, 275-301 (1860). Cit. en M. Jammer, op. cit., pag 3, ref 5.

[3]Josef Stefan, *Wiener Berichte* 79, 391-428 (1879). Cit. en M. Jammer, op. cit., pag 6, ref 21.

[4]L. Boltzmann, *Wiedemannsche Annalen der Physik 22*, 291-294 (1884). Cit. en M. Jammer, op. cit., pag 7, ref 28.

[5]A. Pais, *Reviews of Modern Physics*, vol. 51, no. 4, octubre 1979, pp. 863-914. Ver la ecuación (2) de la pag. 867.

[6]**W. Wien, *Wiedemannsche Annalen der Physik 52*, 132-165 (1894). Cit. en M. Jammer, op. cit., pag. 8, ref. 31.**

[7]El infrarrojo va de 300μm a 0.7μm.

[8]Esta distribución no nos interesa aquí. Ver por ejemplo el libro de T. S. Kuhn, *Black-body theory and the quantum discontinuity, 1894-1912*, Clarendon Press Oxford, Oxford University Press, 1978.

[9]W. Wien, *Wiedemannsche Annalen der Physik 52*, 132-165 (1894). Cit en M. Jammer, op. cit., pag. 8, ref. 31.

[10]M. Planck, *Berliner Berichte*: 1ª comunicacion, feb. 4, 1897, pp. 57-68; 2ª comunicación, jul. 8, 1897, pp. 715-717; 3ª comunicación, dic. 16, 1897, pp. 1121-1145; 4ª comunicación, jul 7, 1898, pp. 449-476; 5ª comunicación, mayo 18, 1899, pp. 440-480. Cit. en M. Jammer, op. cit., pag 10, ref 42.

[11]M. Planck, *Ueber den zweiten Hauptsatz der mechanischen Waermetheorie*, (Munich, 1879). Cit. en T. S. Kuhn, op. cit., pag 16,

ref 27.

[12] O. Lummer y E. Pringsheim, *Verh. Dtsch. Phys. Ges.*, 2, 163, 1900. Cit. en A. Pais, op. cit.

[13] H. Rubens y F. Kurlbaum, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl.*, p. 929, 1900. Cit. en A. Pais, op. cit.

[14] Ver referencia 10, 1ª comunicación.

[15] Ver p. ej. R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*, Pergamon Press, 1972, pag 14.

[16] M. Planck, *Verh. Dtsch. Phys. Ges.*, 2, 237 (1900). Cit. en, A. Pais, op. cit.

[17] R. K. Pathria, op. cit., sección 6.1.

[18] A. Einstein, *Ann. Phys.*, 17, 132, 1905. Cit. en la referencia 5.

[19] R. K. Pathria, op. cit., sección 2.6.

[20] Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, 49 (1900), 539-540. Cit. en T. S. Kuhn, op. cit., pag 144, ref 1.

[21] J. H. Jeans, *Phil. Mag.*, 10, 91-98. Cit. en T. S. Kuhn, op. cit., pag 145, ref 3.

[22] A. Einstein, *Ann. Phys.*, 20, 199 (1906). Cit. en la referencia 5.

CAPITULO II

LA LEY DE PLANCK

2.1. INTRODUCCION.

En este capítulo se presentan los trabajos realizados por Einstein, en la década 1920, en relación con el problema del cuerpo negro. El primero de ellos[1], en el cual Einstein trabajó junto con Ludwig Hopf, concierne a una derivación de la distribución de Rayleigh-Jeans usando, exclusivamente, principios de la física clásica y que, desde el punto de vista de sus autores, es una demostración de esta ley formal y libre de problemas. Es por esto que se puede concluir que la física clásica no es suficiente para encontrar la solución correcta a este problema, poniendo así de manifiesto la necesidad de introducir un agente extraño a la física del siglo XIX para poder explicar la ley de radiación encontrada por Planck. En el segundo de los artículos[2], trabajando con Otto Stern (1888-1969), demuestran que la discontinuidad no es el único agente capaz de llevar a una derivación correcta de la ley de radiación, sino que, siguiendo las ideas de la segunda derivación de Planck de esta ley[3], proponen que la existencia de una energía que subsista en el cero absoluto de temperatura, también permite hacer una derivación correcta de la distribución de cuerpo negro. Además, como hacen notar S.Bergia, P.Lugli y N.Zamboni[4,5], estos trabajos se pueden entender como precursores a la electrodinámica estocástica, tanto por el tratamiento que hacen Einstein y sus colaboradores del campo electromagnético, al cual suponen como ondas cuyas fases estan distribuidas al azar, como por la inclusión del campo de punto cero.

En el último de los trabajos que se presentarán en este capítulo, Einstein[6] abandona este tipo de ideas para usar argumentos estadísticos y hacer otra derivación diferente de la ley de radiación, con la cual muestra después que el fotón debe viajar en una dirección bien definida y con una cantidad de movimiento perfectamente determinada.

2.2. DERIVACION DE LA DISTRIBUCION DE RAYLEIGH-JEANS.

Después de que las ideas de Planck de 1900 salieron a la luz, el problema se transladó a interpretar los métodos usados por él en la obtención de la ley de radiación. Esto provocó la aparición de una serie de objeciones sobre diferentes aspectos de la derivación, como es el hecho que si se usaba la física conocida hasta ese momento, se llega a la ley de Rayleigh-Jeans, la cual no se ajusta a los resultados experimentales. Todas las derivaciones de esta ley hacían uso del teorema de equipartición, que, aunque conocido desde varios años antes, no dejaba de presentar problemas en su aplicación a ciertas situaciones. De hecho hubo gente que se dedicó a proponer casos en los que el teorema no se aplica[7]. Al analizar estos "casos prueba" se llegó a la conclusión que, aunque éstos no representaban ninguna violación al teorema de equipartición, no se podía estar seguro de que este teorema fuera siempre válido para sistemas con un número finito de partículas[7]. Estos comentarios ilustran la desconfianza que se le tenía al teorema de equipartición. Además se tenía el problema de los calores específicos pues, aunque al aplicar dicho teorema en este caso se obtenían valores cercanos a los medidos, eran lo suficientemente diferentes como para levantar sospechas. Maxwell y Clausius concluyeron que esta discrepancia mostraba que la teoría cinética no era aplicable a propiedades de los gases que trataran con la estructura interna de las moléculas que los formaban, pero que no habría ningún problema al aplicarlo a otras propiedades del gas tales como la viscosidad y la difusión, que, al parecer, no estaban determinadas por la estructura interna de las moléculas[7].

Einstein compartía las ideas de estas gentes respecto al teorema de equipartición por lo que, junto con su alumno L.Hopf, presentó una derivación de la ley de Rayleigh-Jeans que no presentaba problemas en este sentido. En sus propias palabras:

Ya se ha demostrado en varias formas, y es hoy generalmente aceptado, que nuestras ideas actuales sobre la distribución y emisión de energía electromagnética por un lado, y sobre la distribución estadística por el otro, no pueden llevarnos a otra cosa que no sea la ley de Rayleigh-Jeans para la radiación. Como esta ley está en completa contradicción con el experimento, es necesario llevar a cabo una alteración en los fundamentos de las teorías que han sido aplicadas en su derivación. La gente ha supuesto repetidas veces que la aplicación de la ley de distribución estadística de la energía [teorema de equipartición] a la radiación, o bien, a movimientos oscilatorios rápidos (resonadores), puede no *estar desprovista de objeciones. ...no hay necesidad para un uso dudoso de este tipo,...[pues, como se verá,] es suficiente con usar el principio para movimientos translacionales de las moléculas y de los osciladores para llegar a la ley de Rayleigh-Jeans de radiación. La aplicación del principio al movimiento translacional está suficientemente demostrada a través de los logros de la teoría cinética de los gases. Podemos entonces concluir que sólo un cambio más fundamental en nuestros puntos de vista nos pueden llevar a una ley de radiación que corresponda mejor con el experimento.*[4]

Parece ser que en esta época Einstein interpretaba este *cambio más fundamental* como la hipótesis de cuantización hecha por Planck[4], lo que es seguro es que Einstein estaba convencido, y muy pocos con él, de la necesidad de introducir una hipótesis extra para explicar la ley de radiación (y también para el comportamiento de los calores específicos que, para estas épocas y con los trabajos de Einstein[12], ya se estaba completamente seguro de que no era posible explicarlos con física clásica[9]).

2.2.1. CALCULO DE LA CONDICION DE EQUILIBRIO DINAMICO.

Para demostrar la ley de Raleigh-Jeans, Einstein y Hopf consideran[10] una partícula con masa m que contiene un oscilador dipolar electromagnético no relativista que oscila con frecuencia angular natural ω_o. El oscilador se introduce para simular los grados internos de la partícula y su interacción con el campo de radiación. Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que el movimiento translacional de la partícula se realiza en la dirección

x únicamente, y la oscilación del dipolo a lo largo del eje z. Este sistema se va a poner en interacción con la radiación electromagnética que inunda el espacio alrededor de él, esperando, para poder describir dicha interacción, a que se alcance el estado de equilibrio. Una vez alcanzado este estado nos interesa estudiar las consecuencias que nos trae el imponer un balance de momento. El intercambio de cantidad de movimiento que se origina entre la radiación y las partículas, produce una distribución de velocidades para éstas que debe ser igual a la distribución originada por las colisiones entre ellas únicamente; esto es, debe coincidir con la distribución de Maxwell. Esto se puede ilustrar pensando en una caja dividida en dos partes por una pared ideal. Una de las partes contiene radiación térmica y la otra un gas de partículas, ambas a la misma temperatura T y cada una en equilibrio con un oscilador como el descrito anteriormente. Si se quita la pared, permitiendo que la radiación y las partículas se mezclen, el equilibrio no se verá alterado[11].

Durante un intervalo corto de tiempo τ, la partícula experimenta dos fuerzas que son provocadas por su interacción con la radiación electromagnética. El hecho de que la partícula esté en movimiento hará aparecer una de ellas, cuyo efecto será el de frenarla; sin embargo, esta fuerza desaparece cuando la partícula se encuentra en reposo respecto a la radiación, pues, en este caso, ésta es isotrópica. Aquí Einstein y Hopf hacen la suposición que si la masa m de la partícula es lo suficientemente grande como para poder despreciar términos mayores que $v/c=\beta$, se puede escribir esta fuerza como proporcional a la velocidad: Rv, donde R es una constante que llamaremos coeficiente de fricción. Esta fuerza llevaría a la partícula al reposo si no fuera por la irregularidad de las interacciones de la radiación con la partícula que le transmiten, a esta última, un momento Δ. Este momento cambia de dirección y magnitud en cada interacción provocando un efecto completamente azaroso sobre la partícula y manteniéndola, así, en movimiento; sin embargo, este efecto es totalmente independiente de la velocidad de la partícula en la aproximación de velocidades pequeñas.

Un sistema con cantidad de movimiento mv_t al tiempo t, después de un intervalo de tiempo τ tendrá un valor $mv_{t+\tau}$ producido por la influencia de los impulsos debidos a las fuerzas anteriores y dado por:

$$mv_{t+\tau}=mv_t+\Delta-Rv\tau.$$

Como estamos en una situación de equilibrio, la distribución de velocidades permanecerá constante en el tiempo, por lo que el promedio de $mv_{t+\tau}$ debe ser igual al promedio de mv_t, o bien:

$$\langle(mv_{t+\tau})^2\rangle=\langle(mv_t)^2\rangle=\langle(mv_t+\Delta-Rv\tau)^2\rangle.$$

Así, desarrollando el término del lado derecho, se obtiene:

$$0=\langle\Delta^2\rangle+2m\langle v_t\Delta\rangle-2R\tau\langle v_t\Delta\rangle-2mR\tau\langle v_t^2\rangle+R^2\tau^2\langle v_t^2\rangle.$$

Ahora, la masa de la partícula la consideramos lo suficientemente grande como para que el penúltimo término sea mucho mayor que el último, de manera que lo podamos despreciar. Además, como υ_t y Δ pueden tomar valores positivos y negativos independientemente y con la misma probabilidad, vemos que los términos que contienen al factor $\langle \upsilon_t \Delta \rangle$ son cero. Usando estas hipótesis en la última ecuación, se llega a:

$$\langle \Delta^2 \rangle = 2mR\tau \langle \upsilon^2 \rangle. \qquad \text{(II.1)}$$

El valor de $\langle \upsilon^2 \rangle$ que adquiere la partícula por interactuar con el campo de radiación a temperatura T, debe ser igual al que se obtendría de la interacción con un gas de moléculas a la misma temperatura, descrito por la teoría cinética. De no ser así, la presencia del sistema destruiría el equilibrio térmico entre la radiación y algún gas arbitrario que estén a la misma temperatura. Esto nos permite usar el teorema de equipartición para el movimiento translacional de la partícula, esto es:

$$\tfrac{1}{2} m \langle \upsilon_t^2 \rangle = \tfrac{1}{2} kT,$$

por lo que, la ecuación (II.1) toma la forma:

$$\frac{\langle \Delta^2 \rangle}{\tau} = 2RkT, \qquad \text{(II.2)}$$

esta es la condición de equilibrio dinámico que estamos buscando. Ahora sólo resta evaluar $\langle \Delta^2 \rangle$ y R, y para esto se usará física clásica exclusivamente.

2.2.2. CALCULO DEL COEFICIENTE R.

Para calcular la fuerza que la radiación ejerce sobre un oscilador en movimiento, haremos primero el cálculo de la fuerza sobre un oscilador en reposo, y luego se hará una transformación de Lorentz. Si $\mathbb{E}(\mathbf{x},t)$ y $\mathbb{B}(\mathbf{x},t)$ representan el campo electromagnético externo, entonces el momento dipolar eléctrico f del oscilador obedece la ecuación diferencial[12]:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} - \Gamma \frac{d^3 f}{dt^3} + \omega_o f = \frac{3}{2}\Gamma c^3 E_z \ , \qquad \text{(II.3)}$$

donde Γ está dada por:

$$\Gamma = \frac{2e^2}{3mc^3} \quad .$$

Ahora haremos la suposición de que los campos eléctrico $\mathbb{E}(\mathbf{x},t)$ y magnético $\mathbb{B}(\mathbf{x},t)$ se pueden escribir como un desarrollo de ondas planas transversales, de la siguiente manera:

$$\mathbb{E}(\mathbf{x},t) = \sum_{\lambda=1}^{2} \int d^3k\, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k},\lambda)\, h(\omega_k,T) \cos[\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \theta(\mathbf{k},\lambda)] ; \qquad \text{(II.4a)}$$

$$\mathbb{B}(\mathbf{x},t) = \sum_{\lambda=1}^{2} \int d^3k\, \frac{\mathbf{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k},\lambda)}{k}\, h(\omega_k,T) \cos[\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \theta(\mathbf{k},\lambda)] , \qquad \text{(II.4b)}$$

donde, se cumple que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k},\lambda)\cdot\mathbf{k}=0 \quad ; \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k},\lambda')=\delta_{\lambda,\lambda'} .$$

Además $h(\omega,T)$, que sólo depende de $\omega=ck$ debido a la isotropía de la radiación, se puede relacionar con la densidad espectral $\rho(\omega_k,T)$ usando $u=\frac{1}{8\pi}\langle\mathbb{E}^2+\mathbb{B}^2\rangle=\int_0^\infty\rho(\omega,T)d\omega$ para obtener[19]:

$$\rho(\omega,T)=\frac{\omega^2}{c^3}h^2(\omega,T). \tag{II.5}$$

La variable λ se introduce para representar los dos estados de polarización de las ondas, y $\theta(\mathbf{k},\lambda)$, que es una variable estocástica, para implementar el caracter fluctuante de la radiación en su interacción con la materia. Esta última es una de las hipótesis fundamentales de la teoría conocida como electrodinámica estocástica, la cual, además, postula al campo de radiación de punto cero como el responsable del comportamiento cuántico de la materia.

La ecuación (II.3), como está escrita, es válida cuando la partícula está en reposo respecto al campo de radiación. En este caso la partícula verá un campo isotrópico a su alrededor, pero si se encuentra en movimiento respecto a él, ésta isotropía se rompe y aparece una fuerza que depende de la velocidad. Para transformar la ecuación (II.3) al sistema de la partícula en movimiento, sólo es necesario escribir t', el tiempo propio en este sistema, en lugar de t, el del sistema en reposo, y además, el campo electromagnético, en este nuevo sistema, está dado por:

$$\mathbb{E}'(\mathbf{x}',t')=\sum_{\lambda=1}^{2}\int d^3k\left[\hat{\imath}\varepsilon_x+\hat{\jmath}\gamma\left(\varepsilon_y-\beta\frac{(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\varepsilon})_z}{k}\right)+\hat{k}\gamma\left(\varepsilon_z+\beta\frac{(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\varepsilon})_y}{k}\right)\right]\times$$

$$\times\, h(\omega_k,T)\,\cos[\omega_k' t'-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'-\theta(\mathbf{k},\lambda)]; \quad \text{(II.6a)}$$

$$\mathbb{B}'(\mathbf{x}',t')=\sum_{\lambda=1}^{2}\int d^3k\left[\hat{\imath}\varepsilon_x+\hat{\jmath}\gamma\left(\frac{(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\varepsilon})_y}{k}+\beta\varepsilon_z\right)-\hat{k}\gamma\left(\frac{(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\varepsilon})_z}{k}-\beta\varepsilon_x\right)\right]\times$$

$$\times\, h(\omega_k,T)\,\cos[\omega_k' t'-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'-\theta(\mathbf{k},\lambda)], \quad \text{(II.6b)}$$

con $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k},\lambda)$, y donde se han usado las transformaciones relativistas entre los campos:

$$E'_x=E_x\ ;$$
$$E'_y=\gamma\ (E_y-\beta B_z);$$
$$E'_z=\gamma\ (E_z+\beta B_y),$$

y la conexión entre las cantidades primadas y las no primadas está dada por:

$$k'_x=\gamma\ (k_x-\frac{\beta}{c}\,\omega_k);$$
$$k'_y=k_y\ ;$$
$$k'_z=k_z\ ;$$
$$\omega'_k=\gamma\ (\omega_k-\beta c k_x).$$

Finalmente, escribiendo la frecuencia natural del oscilador como ω'_o

y resolviendo la ecuación (II.3) ya con la componente z del campo (II.6a) substituida, se obtiene la siguiente expresión para el momento dipolar:

$$f' = \sum_{\lambda=1}^{2} \int d^3k \; \frac{3c^3}{2\omega'^3} \gamma \left[\varepsilon_z + \frac{v}{c} \; \frac{(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\varepsilon})_y}{k} \right] h(\omega_k', T) \; \operatorname{sen}\alpha(\omega') \times$$

$$\times \cos[\omega' t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \alpha(\omega') - \vartheta(\mathbf{k},\lambda)], \qquad \text{(II.7)}$$

donde se ha definido:

$$\cot\alpha(\omega') = \frac{\omega_o'^2 - \omega'^2}{\Gamma\omega'^3}.$$

Por otro lado, la expresión para la fuerza que el campo electromagnético ejerce sobre el dipolo la podemos escribir como:

$$\mathcal{F}_x' = \frac{\partial E_x'}{\partial z'} f' - \frac{1}{c} B_y' \frac{df'}{dt'},$$

si se usa que $f' = ez'$. Ahora, substituyendo las expresiones de E_x', B_y' y f' en esta ecuación, promediando sobre las fases y haciendo algunas manipulaciones algebráicas, obtenemos (ver apéndice **A**):

$$\langle \mathcal{F}_x' \rangle = -\frac{6\pi^2 \Gamma c v}{5} \left[\rho(\omega_o', T) - \frac{1}{3}\omega_o' \frac{\partial \rho(\omega o', T)}{\partial \omega_o'} \right],$$

donde, para relacionar $\hbar$ con ρ se usó[19] la ecuación (II.5).

Finalmente, la expresión para R está dada por:

$$R=\frac{6\pi^2\Gamma c}{5}\left[\rho(\omega_o^{\prime},T)-\frac{1}{3}\,\omega_o^{\prime}\,\frac{\partial\rho(\omega_o^{\prime},T)}{\partial\omega_o^{\prime}}\right]. \qquad \text{(II.8)}$$

2.2.3. CALCULO DE LAS FLUCTUACIONES $<\Delta^2>$.

El impulso fluctuante impreso en la partícula se puede calcular en el sistema en reposo de ésta, ya que este efecto es independiente de la velocidad con la que la partícula se mueve. El impulso transmitido a la partícula en un tiempo τ en la dirección x, se puede escribir como:

$$\Delta=\int_0^\tau \mathcal{F}_x dt=\int_0^\tau\left[\frac{\partial E_x}{\partial z}\, f-\frac{1}{c}\, B_y\,\frac{df}{dt}\right]dt.$$

La primera igualdad viene de reconocer que $\mathcal{F}_x$ es la fuerza que le transmitirá el impulso al sistema y la segunda, de la fuerza de Lorentz. Integrando por partes el segundo término, se obtiene el siguiente resultado:

$$\int_0^\tau B_y\,\frac{df}{dt}\;dt=\Big[B_y f\Big]_0^\tau-\int_0^\tau\frac{\partial B_y}{\partial t}\, f dt.$$

Si se escogen los límites de integración apropiados[4], el primer término se puede despreciar; además, usando la ley de Faraday:

$$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t},$$

se llega finalmente a:

$$\Delta = \int \frac{\partial E_z}{\partial x} f\, dt. \qquad \text{(II.9)}$$

Como hemos visto, esta cantidad representa el momento que el campo de radiación le transfiere a la partícula en cada interacción; sin embargo, como dicho campo tiene un gran número de interacciones con la partícula a lo largo del tiempo τ, el efecto que se produce sobre ésta es altamente azaroso, por lo que es de esperarse que el promedio de Δ se anule. Es el promedio del cuadrado de Δ el que va a ser diferente de cero, siendo así la cantidad que nos interesa calcular. Para esto necesitamos substituir en la ecuación (II.9) las expresiones apropiadas para $\partial E_z/\partial x$ y f, que se obtienen de las ecuaciones (II.4) y (II.3) respectivamente; luego se necesita elevar al cuadrado y, finalmente, promediar sobre las fases para obtener la ecuación (ver apéndice B):

$$\langle \Delta^2 \rangle = \frac{4\pi^4 c^4 \Gamma \tau}{5\omega_o^2}\, \rho^2(\omega_o, T). \qquad \text{(II.10)}$$

para las fluctuaciones del momento transferido a la partícula.

22.4. LA LEY DE RAYLEIGH-JEANS.

Substituyendo (II.8) y (II.10) en la ecuación de balance de momento (II.2), obtenemos la ecuación diferencial:

$$\frac{\pi^2 c^3}{3\omega_o^2 kT}\rho^2(\omega_o,T) = \rho(\omega_o,T) - \frac{1}{3}\ \omega_o \frac{\partial\rho(\omega_o,T)}{\partial\omega_o},$$

que al resolverla nos da la ley de Rayleigh-Jeans:

$$\rho(\omega,T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT.$$

Esta derivación se encuentra completamente dentro del marco de la física clásica. Respecto al hecho de que se haya obtenido esta ley y no la de Planck, Einstein y Hopf comentan: "en los fundamentos de nuestra derivación debe haber escondida una afirmación que no se encuentra en armonía con el fenómeno real concerniente a la radiación térmica"[4]. Más adelante, intentando explicar la naturaleza de la afirmación mencionada, agregan: "los fenómenos reales se distinguen de los resultados inferidos...en que en los primeros deben hacerse perceptibles, también, fluctuaciones en el impulso de algún otro tipo, tal que, para radiación de onda corta y a bajas densidades, estas fluctuaciones prevalezcan ampliamente sobre las dadas por la teoría."[4]

2.3. DERIVACION DE LA LEY DE PLANCK USANDO EL CAMPO DE PUNTO CERO.

En 1912, Planck publicó un artículo[14] en el cual, suponiendo que la absorción es un proceso continuo, pero que "la emisión de energía por un oscilador ocurre por medio de saltos, de acuerdo con cuantos de energía y las leyes del azar"[15], encontró una expresión para la energía media de los osciladores ligeramente distinta a la ya conocida, esto es:

$$U=\frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT)-1}+\tfrac{1}{2}\hbar\omega \qquad \text{(II.11)}$$

(comparar con la ecuación I.7); y de aquí, derivando respecto de la temperatura, la ley de distribución de un cuerpo negro ya conocida (ecuación I.11). Este nuevo término predice que U es diferente de cero para T=0 contrariamente a lo que se pensaba en aquel entonces. Este resultado fue verificado varias veces, y en 1913 Arnold Eucken (1884-1950), habiendo trabajado en este campo, afirmó: "con completa certeza que, de las fórmulas existentes [para la energía translacional a bajas temperaturas], aquéllas que no contienen la energía de punto cero, no son, ciertamente, satisfactorias; mientras que aquéllas que incluyen una energía de punto cero al menos no llevan a contradicciones."[16] Einstein también conoció esta segunda teoría de Planck, y en 1913 publicó[5], junto con Stern, un trabajo en el que se dan pruebas de que esta interpretación es válida, primero dando argumentos de plausibilidad que demuestran, basándose en resultados experimentales obtenidos por Eucken[17] en 1912, que la aplicación del término de punto cero, con energía por modo normal igual a $\frac{1}{2}\hbar\omega$, al calor específico del hidrógeno es válida. Más adelante, aprovechan los cálculos hechos por Einstein y Hopf, presentados anteriormente, para derivar, incluyendo en ellos el término proveniente del punto cero de energía, la ley de Planck, sólo que ahora usan una energía por modo normal para el oscilador de $\hbar\omega$. Este término entra en el cálculo al incluir las fluctuaciones de momento, que se inducen en la partícula en su interacción con el campo de punto cero, dentro del marco de las ecuaciones (II.2), (II.8) y (II.10).

2.3.1. CONTRIBUCIONES DEL CAMPO DE PUNTO CERO A LAS FLUCTUACIONES DE MOMENTO.

Este cálculo es muy similar al expuesto para las fluctuaciones del campo térmico en el apéndice *B*. Se comienza calculando el momento transmitido al oscilador durante un tiempo τ en la dirección z, según la ecuación (II.9). A este respecto, Einstein y Stern comentan que, en este caso, nos interesa la situación en que la energía de las oscilaciones excitadas por la radiación sea despreciable respecto a *la energía de punto cero del oscilador*, lo cual es permitido para temperaturas suficientemente bajas. Así podemos aproximar a la ecuación (II.3) con la ecuación:

$$\frac{d^2 f}{dt^2}+\omega_o^2 f=0,$$

cuya solución está dada por:

$$f = f_o \cos(\omega_o t),$$

donde f_o es el momento dipolar máximo del oscilador y ω_o su frecuencia natural de oscilación. Por otro lado, el campo eléctrico lo podemos expresar como un desarrollo de ondas planas, así:

$$\mathbb{E}(\mathbf{x},t) = \sum_{\lambda=1}^{2} \int d^3k \; \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k},\lambda) \, h(\omega_k, T) \cos[\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \vartheta(\mathbf{k},\lambda)];$$

y, para la derivada, se tiene:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \sum_{\lambda=1}^{2} \int d^3k \; \varepsilon_z(\mathbf{k},\lambda) \, h(\omega_k, T) \, k_x \cos[\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \xi(\mathbf{k},\lambda)],$$

en la que se ha usado el mismo argumento que se usó en el apéndice *B* para cambiar la fase. Substituyendo estas expresiones en la ecuación (II.9) para el momento, tenemos:

$$\Delta_o = \int_0^{\tau} dt \sum_{\lambda=1}^{2} \int d^3k \; f_o \cos(\omega_o t) \; \varepsilon_z(\mathbf{k},\lambda) \, h(\omega_k, T) \, k_x \cos[\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \xi(\mathbf{k},\lambda)]$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{2} \int d^3k \; f_o \;\; \varepsilon_z(\mathbf{k},\lambda) \;\; h(\omega_k, T) \;\; k_x \;\times$$

$$\times \; \frac{1}{\omega_k - \omega_o} \; \mathrm{sen}\left(\frac{\omega_k - \omega_o}{2} \; \tau\right) \cos\left(\frac{\omega_k - \omega_o}{2} \; \tau - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \xi(\mathbf{k},\lambda)\right),$$

donde ya se ha realizado la integral sobre el tiempo, y el subíndice cero en la delta indica que se trata del momento debido a la interacción con el campo de punto cero. La integral sobre el tiempo nos debería haber dado dos términos, uno con $\omega_k-\omega_o$ y el otro con $\omega_k+\omega_o$ (ver la ecuación (B.1)); sin embargo, como las frecuencias pueden alcanzar valores grandes, el último de ellos es despreciable respecto al primero. Luego, elevando al cuadrado, tomando el promedio sobre ξ y sumando sobre las polarizaciones, obtenemos para las fluctuaciones, la expresión:

$$\langle \Delta_o^2 \rangle = \frac{2\pi}{15c^5} \int d\omega\ \omega^4 f_o^2 h^2(\omega,T)\ \frac{\mathrm{sen}^2\left[\frac{\omega-\omega_o}{2}\tau\right]}{\left[\frac{\omega-\omega_o}{2}\right]^2},$$

para llegar a esta expresión se usó la ecuación $k=\omega_k/c$ y se evaluó la expresión en el origen; además, por comodidad, se escribió ω en lugar de ω_k.

Como el último factor tiene un comportamiento del tipo delta, podemos poner $\omega=\omega_o$ y luego usar la integral (B.1) del apéndice *B* para llegar a:

$$\langle \Delta_o^2 \rangle = \frac{4\pi^2}{15c^2} f_o^2\ \omega_o^2\ \rho(\omega_o,T)\tau, \qquad \text{(II.12)}$$

donde, además, se usó la ecuación (II.5) para escribir las fluctuaciones en términos de la densidad de energía. Para encontrar un valor para f_o en términos de la frecuencia, Einstein y Stern argumentan que "si *el resonador posee* la energía de punto cero $\hbar\omega$"[5], se tiene que:

$$\frac{1}{2}Kf_o^2 = \hbar\omega, \qquad \text{(II.13)}$$

con $K = {}^{2\omega^2}/_{3\Gamma c^3}$. Esta ecuación viene de igualar la energía media $\frac{1}{2}m\omega_o^2\mathcal{A}^2$ del resonador (donde $\mathcal{A}$ es la amplitud del movimiento) con la energía $\hbar\omega$ atribuída al punto cero de éste, y luego manipular la expresión para ponerla como aparece. Además argumentan que solamente un cálculo más riguroso mostrará si la discrepancia entre la energía por modo normal usada aquí ($\hbar\omega$) y la obtenida de los experimentos con el hidrógeno ($\frac{1}{2}\hbar\omega$) desaparece. Entonces, al depejar f_o^2, se llega a:

$$f_o^2 = \frac{3\hbar c^3\Gamma}{\omega_o},$$

y substituyendo en la ecuación para las fluctuaciones, se obtiene finalmente:

$$\langle \Delta_o^2 \rangle = \frac{4\pi^2}{5}\, c\hbar\omega_o\Gamma\rho(\omega_o,T)\tau. \qquad \text{(II.14)}$$

Una vez hecho esto comentan que, si se piensan estas fluctuaciones como las únicas que contribuyen a la ecuación (II.2), tal que se tenga la ecuación:

$$\frac{\langle \Delta_o^2 \rangle}{\tau} = 2kTR,$$

se llega, al substituir la ecuación (II.14), a la ley de Wien, ecuación (I.2)[5]. A este respecto comentan que "aquí queremos dejar de lado la suposición de que las oscilaciones excitadas por la radiación son despreciables. Si ahora pensamos que la energía de las oscilaciones, impartida por la radiación al resonador, genera oscilaciones de momento que son independientes de las correspondientes al punto cero de energía, entonces podemos sumar los valores cudráticos medios de los dos tipos de oscilaciones de momento"[5], y además agregan una nota a pie de página diciendo que "este tipo de procedimiento sólo se puede justificar por nuestra ignorancia de la ley verdadera para el resonador".[5]

2.3.2. DERIVACION DE LA LEY DE PLANCK.

Así, sumando del lado izquierdo de la última ecuación el valor para las fluctuaciones encontrado por Einstein y Hopf, ecuación (II.10), escriben la ecuación (II.2) como:

$$\langle \Delta^2 \rangle = \frac{4\Gamma\pi^4 c^4}{5\omega_o^2}\tau\rho^2(\omega_o,T) + \frac{4\pi^2}{5}c\hbar\omega_o\Gamma\rho(\omega_o,T)\tau = 2kTR,$$

que al substituir el valor para R, nos da la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\pi^2 c^3}{3\omega_o^2 kT}\left[\rho^2(\omega_o,T) + \frac{\hbar\omega_o^3}{\pi^2 c^3}\rho(\omega_o,T)\right] = \rho(\omega_o,T) - \frac{1}{3}\omega_o\frac{\partial\rho(\omega_o,T)}{\partial\omega_o},$$

que tiene como solución a la ley de radiación de Planck, esto es:

$$\rho(\omega,T)=\frac{\hbar\omega^3/\pi^2c^3}{\exp(\hbar\omega/kT)-1}\;;$$

y para encontrar la energía media de los osciladores usan la siguiente ecuación:

$$U=\left(\frac{\pi^2c^3}{\omega^3}\rho+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega,$$

que fue derivada por Planck en sus trabajos sobre su segunda teoría[3], y que da como resultado la ecuación (II.11).

Todos estos resultados concuerdan con los de la segunda teoría de Planck, y representan una derivación de la ley de radiación que no incluye discontinuidades "extrañas" a la física clásica. De hecho, todo el cálculo está basado en conceptos clásicos, salvo la idea de energía de punto cero que, sin embargo, no entra en contradicción con estos conceptos. Es a través de asociarle una energía de punto cero a la partícula, por medio de la ecuación (II.13), que entra la constante de Planck a la teoría, representando una medida de la intensidad de la energía asociada a la radiación por medio de la ecuación $E=\hbar\omega$. Esta última ecuación no ha sido derivada por la teoría misma y, por lo tanto, representa una hipótesis extra.

2.4. DERIVACION DE LA LEY DE PLANCK USANDO METODOS PROBABILISTICOS.

No obstante el éxito de Einstein y Stern para obtener la ley de Planck usando la hipótesis de la energía de punto cero, terminaron por abandonar esta idea. Sin embargo, Einstein, ya sin la ayuda de Stern, continuó sus estudios sobre la radiación publicando[18] así, en 1916, una nueva derivación que hacía uso de ideas probabilísticas. Es en este trabajo en el que introduce los coeficientes A y B que representan las probabilidades de transición por unidad de tiempo de un estado energético a otro. Un año después, en un nuevo artículo[6], reproduce estos resultados y luego los usa para demostrar que, tanto la emisión como la absorción de radiación son procesos direccionales, esto es, que en cada proceso elemental de este tipo hay una transferencia de momento de la radiación a la partícula con una dirección bien definida. En este trabajo hace uso de las mismas hipótesis que utilizó en sus trabajos con Hopf y Stern acerca de la distribución de velocidades que se obtiene en el estado de equilibrio entre la radiación y la materia; esto es, se cumple la ley de Maxwell. El sistema que utiliza se trata de una partícula con un número infinito de estados discretos internos; sin embargo, él se concentra solamente en dos de los posibles estados de energía, ϵ_m y ϵ_n, en los que se puede encontrar la partícula. Las energías de estos estados deben cumplir con la relación $\epsilon_m > \epsilon_n$ y con la restricción de que en una transición de un estado al otro la radiación involucrada tenga una frecuencia ω. El movimiento de la partícula se toma, por simplicidad, a lo largo del eje z.

Einstein distinguió entre dos tipos distintos de procesos elementales, uno se refiere a la emisión y absorción de energía estimuladas por el campo de radiación circundante, y el otro a la emisión de energía producida sin excitación por *causas externas*. A los primeros se les asocia los coeficientes B, ya sea B^n_m o B^m_n si el proceso es de emisión o de absorción respectivamente, y al segundo se le asocia el coeficiente A^n_m.

En esa época no se dudaba que los procesos estimulados fueran direccionales, pero la física clásica predecía que una emisión sin causa externa debía producir una onda esférica[6], la cual, debido a la simetría, no le imparte ningún momento a la partícula. Fue por esto que Einstein se avocó a demostrar que, en un proceso cuántico, una emisión de este tipo sí es direccional, transfiriéndole, así, una cantidad de movimiento a la partícula; y en consecuencia, que esta es la única forma en la que se puede establecer un equilibrio dinámico entre radiación y materia que sea consistente con la ley de distribución de energías de Planck para la radiación y con la distribución para las velocidades de Maxwell para las partículas.

2.4.1. DERIVACION DE LA LEY DE PLANCK USANDO BALANCE DE ENERGIAS.

Si la partícula en consideración forma parte de un gas a temperatura T y puede tener un conjunto de estados internos de energía $\mathcal{Z}_i$, con $i \in \mathbb{N}$, la frecuencia relativa W_n del estado $\mathcal{Z}_n$ está dada por la distribución de Boltzmann, esto es:

$$W_n = p_n \exp(-\epsilon_n / kT),$$

donde el factor ρ_n es el peso estadístico del estado $\mathscr{Z}_n$ y es independiente de la temperatura.

Si una partícula pasa de un estado $\mathscr{Z}_m$ a otro $\mathscr{Z}_n$ sin excitación externa y emite radiación con energía $\epsilon_m - \epsilon_n$ y frecuencia ω, podemos escribir a la probabilidad de que esto suceda en un intervalo de tiempo dt, como:

$$dW = A_m^n \, dt. \tag{II.15}$$

Además, si el sistema se coloca en un campo de radiación con densidad de energía ρ de frecuencia ω, se puede tener una transición del estado $\mathscr{Z}_n$ al $\mathscr{Z}_m$ absorbiendo radiación de energía $\epsilon_m - \epsilon_n$. La probabilidad de que esto ocurra en un tiempo dt, será:

$$dW = B_n^m \rho dt, \tag{II.16}$$

y si el proceso es, en lugar de una absorción una emisión con la misma energía, la probabilidad será:

$$dW = B_m^n \rho dt. \tag{II.17}$$

Ahora, para que el intercambio de energía entre la radiación y las partículas, descrito por estas tres ecuaciones, no altere la distribución de Boltzmann, válida en equilibrio, es suficiente y necesario[6] que el número de absorciones por unidad de tiempo y a la frecuencia ω, descritas por (II.16), sea igual, en promedio, al número de emisiones por unidad de tiempo y a la misma frecuencia, descritas por (II.15) y por (II.17) juntas. Esto nos impone una condición sobre la densidad de energía ρ, que es:

$$\mathcal{N}_n \exp(-\epsilon_n/kT)\, B_n^m \rho = \mathcal{N}_m \exp(-\epsilon_m/kT)\,(B_m^n \rho + A_m^n), \qquad (II.18)$$

que se cumple a cada frecuencia, o bien, dicho de otra forma, se tiene balance detallado. De esta ecuación se encuentra que, si ρ tiende a infinito junto con T, se tiene la siguiente relación:

$$\mathcal{N}_n B_n^m = \mathcal{N}_m B_m^n.$$

Así, despejando de (II.18) la densidad de radiación, se llega, usando esta relación, finalmente a:

$$\rho = \frac{A_m^n / B_m^n}{\exp[(\epsilon_m - \epsilon_n)/kT] - 1}, \qquad (II.19)$$

obteniendo así la distribución de frecuencias para la radiación, que se debe cumplir para tener equilibrio térmico. De la ley de desplazamiento de Wien, ecuación (I.1), se sigue que:

$$\frac{A_m^n}{B_m^n} = \alpha\omega^3, \qquad (II.20)$$

y que:

$$\epsilon_m - \epsilon_n = \hbar\omega, \qquad (II.21)$$

donde α y $\hbar$ son constantes universales. Para calcular α se usa el caso límite de altas temperaturas donde se obtiene la ley de Rayleigh-Jeans. Cabe agregar que la ecuación (II.21) es un resultado de esta teoría, por lo cual, no es necesario agregarsela para llegar a un resultado correcto. Introduciendo estos resultados, (II.20) y (II.21), en la ecuación (II.19), se llega a la ley de Planck.

2.4.2. UN METODO PARA CALCULAR EL MOVIMIENTO DE MOLECULAS EN UN CAMPO DE RADIACION.[19]

En seguida, Einstein hace uso del mismo método que usó para derivar la ecuación (II.2) y de la ley de Planck, para demostrar que la emisión y la absorción de energía son direccionales.

Según Einstein, para calcular el coeficiente de fricción R que aparece en esta ecuación, se tiene que describir a la radiación en un sistema de coordenadas S' que esté en reposo respecto a la partícula, pues las hipótesis hechas sobre la absorción y la emisión de radiación han sido formuladas para el caso de partículas estacionarias. Para esto, encuentra primero el número N de procesos de absorción por unidad de tiempo, debidos a la radiación asociada con el ángulo sólido $d\Omega'$ como[6]:

$$N = B_n^m \, \rho'(\omega', \theta') \, \frac{d\Omega'}{4\pi} ,$$

donde las cantidades primadas son las correspondientes al sistema de referencia S'. En lo que sigue vamos a escribir $\rho(\omega)$ en lugar de $\rho(\omega,T)$ pues la temperatura no cambia de un sistema a otro. Esta ecuación para N, es válida cuando el sistema se regresa a su estado original $\mathcal{Z}_n$ inmediatamente después de que el proceso elemental ha ocurrido; sin embargo, el tiempo T que el sistema permanece en este estado es igual a:

$$T=\frac{1}{\mathcal{T}}\rho_n \exp(-\epsilon_n/kT),$$

donde $\mathcal{T}=\rho_n \exp(-\epsilon_n/kT)+\rho_m \exp(-\epsilon_m/kT)$ representa al tiempo total en que el sistema se encuentra en los estados $\mathcal{Z}_m$ y $\mathcal{Z}_n$. A la cantidad T la podemos interpretar como la probabilidad de encontrar al sistema en el estado $\mathcal{Z}_n$. Así, la cantidad que nos interesa es realmente:

$$N_a=\frac{1}{\mathcal{T}}\rho_n \exp(-\epsilon_n/kT)\, B_n^m\, \rho'(\omega',\theta')\,\frac{d\Omega'}{4\pi}\ .$$

Si cada interacción de la partícula con el campo de radiación le transfiere a aquella una cantidad de movimiento $\hbar\omega/c$, su proyección a lo largo del eje z' será igual a $\hbar\omega/c\cdot\cos\theta'$.

Tomando ahora los procesos de emisión en lugar de los de absorción, vemos que el número N_e de procesos elementales, en este caso, es:

$$N_e=\frac{1}{\mathcal{T}}\rho_m \exp(-\epsilon_m/kT)\, B_m^n\, \rho'(\omega',\theta')\,\frac{d\Omega'}{4\pi}\ ,$$

y el momento transmitido a la partícula por cada proceso elemental de este tipo, en la dirección z', es $-\hbar\omega/c\ \cos\theta'$. Finalmente, el momento total transmitido a la partícula por unidad de tiempo, será:

$$M=\frac{\hbar\omega}{c\mathcal{J}}\rho_n B_n^m \left[\exp(-\epsilon_n/kT)-\exp(-\epsilon_m/kT)\right]\int\rho'(\omega',\theta')\cos\theta'\frac{d\Omega'}{4\pi}, \qquad (II.22)$$

en la cual se ha integrado sobre el ángulo sólido para así incluir las contribuciones provenientes de todas las direcciones posibles. La contribución del coeficiente A_m^n no se incluye, pues, por su carácter azaroso, no le imparte momento a la partícula. Ahora sólo resta encontrar una expresión para la densidad de energía en el sistema de referencia de la partícula S', en términos de la densidad en el sistema de referencia S, en reposo con la radiación. En este sistema la radiación es isotrópica, por lo que, la radiación contenida en un rango de frecuencias $d\omega$, por unidad de volumen, asociada con un ángulo sólido $d\boldsymbol{\Omega}$ orientado a lo largo de su dirección de propagación, es $\rho(\omega)d\omega\, d\boldsymbol{\Omega}/4\pi$. A esta radiación le corresponde otra en el sistema S' que está igualmente caracterizada por un rango de frecuencia $d\omega'$ y un ángulo sólido $d\boldsymbol{\Omega}'$. La densidad de volumen de esta radiación está dada por $\rho'(\omega',\theta')d\omega' d\boldsymbol{\Omega}'/4\pi$. Esta cantidad sí depende de la dirección, pues en el sistema S' la radiación pierde la isotropía debido al movimiento de la partícula respecto a ella. En esta ecuación el ángulo θ' es el ángulo polar definido por la dirección de movimiento de la partícula, el eje z, y la dirección de propagación de la luz incidente.

La ecuación de transformación entre estas dos cantidades es:

$$\rho'(\omega',\theta')d\omega' d\boldsymbol{\Omega}' = \rho(\omega)d\omega d\boldsymbol{\Omega}\left[\text{[illegible]}\right]. \qquad (II.23)$$

a primer orden en β. Las cantidades primadas y las no primadas se transforman, a este mismo orden de aproximación, como:

$$\omega' = \omega \left[1 - \beta\cos\theta\right];$$
$$\cos\theta' = \cos\theta - \beta + \beta\cos^2\theta;$$
$$\phi' = \phi;$$

y, para relacionar la densidad de radiación en función de la frecuencia en S con la que depende de la frecuencia en S', hacemos una serie de Taylor en la ecuación:

$$\rho(\omega) = \rho\,(\omega' + \beta\omega'\cos\theta'),$$

para obtener:

$$\rho(\omega) = \rho\,(\omega') + \frac{\partial\rho(\omega')}{\partial\omega}\beta\omega'\cos\theta'.$$

Esto es necesario pues, aunque nos interesa usar la frecuencia de la radiación que ve la partícula, la densidad de energía que queremos conocer es la medida en el sistema en reposo respecto a la radiación.

Por otro lado, de las ecuaciones de transformación para los ángulos, se obtiene:

$$\frac{d\omega}{d\omega'} = 1 + \beta\cos\theta',$$

y;

$$\frac{d\Omega}{d\Omega'} = 1 - 2\beta \cos\theta'.$$

Substituyendo esto en la ecuación (II.23) encontramos, para la densidad de energía en S', la ecuación:

$$\rho'(\omega',\theta') = \left[\rho(\omega') + \beta\omega' \cos\theta' \frac{\partial\rho(\omega')}{\partial\omega}\right] \times$$

$$\times\ (1-2\beta\cos\theta)(1+\beta\cos\theta')(1-2\beta\cos\theta'),$$

donde los términos penúltimo y último vienen de la transformación de $d\omega$ y $d\Omega$ respectivamente. Finalmente, escribiendo esta ecuación a primer orden en β, se llega a:

$$\rho'(\omega',\theta') = \left[\rho(\omega') + \beta\omega' \cos\theta' \frac{\partial\rho(\omega')}{\partial\omega}\right](1-3\beta\cos\theta').$$

Este es el resultado que se necesita en la ecuación (II.22); entonces, al substituir, queda:

$$H = -\frac{\hbar\omega}{c^2 \mathcal{J}} \left[\rho - \frac{1}{3}\,\omega\,\frac{\partial\rho}{\partial\omega}\right] \rho_n B_n^m\,[\exp(-\epsilon_n/kT) - \exp(\epsilon_m/kT)]\,\upsilon,$$

en la cual ya se ha efectuado la integral sobre Ω'. Aquí Einstein comenta[6] que como es claro que los procesos de emisión y absorción que suceden sin interacción con el campo de radiación, en el sistema

S', no tienen una dirección preferente, entonces no pueden transmitirle, en promedio, cantidad de movimiento a la partícula, y así esta expresión representa el momento medio total transferido, por unidad de tiempo, a la partícula que se mueve con velocidad v. El coeficiente R es:

$$R= \frac{\hbar\omega}{c^2\mathcal{T}} \left[\rho - \frac{1}{3}\,\omega\,\frac{\partial\rho}{\partial\omega}\right] n_n B_n^m \exp(-\epsilon_n/kT)[1-\exp(-\hbar\omega/kT)], \quad \text{(II.24)}$$

donde se ha usado la ecuación (II.21) y se ha escrito ω en lugar de ω'.

2.4.3. CALCULO DE LAS FLUCTUACIONES $\langle\Delta^2\rangle$.

Como ya se dijo antes, las fluctuaciones de momento transmitidas a la partícula no dependen del sistema de referencia en el que ésta se encuentra; así que, al calcularlas, no es necesario realizar una transformación de Lorentz; entonces, Einstein, para calcular estas fluctuaciones, considera un evento arbitrario en el sistema de la partícula, el cual le transmite una cantidad de movimiento P en la dirección z. Este momento se puede suponer, en general, como variable en magnitud y sentido; sin embargo, su promedio $\langle P\rangle$ debe anularse. Ahora, si llamamos a los momentos transmitidos al sistema por una serie de causas mutuamente independientes como P_1, P_2, ... tal que la transferencia total de momento Δ esté dada por:

$$\Delta=\sum_i P_i,$$

entonces, se debe cumplir que:

$$\langle \Delta^2 \rangle = \langle \sum_i P_i^2 \rangle,$$

puesto que los momentos P_i son independientes entre sí y sus promedios $\langle P_i \rangle$ se anulan. Haremos la hipótesis adicional de que el valor cuadrático medio de los momentos individuales sean iguales entre sí, esto es, $\langle P_i^2 \rangle = \langle P^2 \rangle$, y además, si ℓ es el número total de eventos que producen estos momentos, se cumple:

$$\langle \Delta^2 \rangle = \ell \langle P^2 \rangle.$$

Como cada evento le transfiere un momento $\hbar\omega/c \cos\theta$ a la partícula, podemos hacer la identificación $P=\hbar\omega/c \cos\theta$, para cada proceso de absorción y emisión. Calculando el valor cuadrático medio de P, se obtiene $\langle P^2 \rangle = \frac{1}{3}(\hbar\omega/c)^2$ al promediar sobre θ, y en consecuencia:

$$\langle \Delta^2 \rangle = \frac{1}{3} \ell (\hbar\omega/c)^2. \qquad \text{(II.25)}$$

Como ℓ es el número de eventos que ocurren en un tiempo τ, y como este número es igual a dos veces el número de procesos de absorción del tipo $\mathcal{Z}_n \rightarrow \mathcal{Z}_m$ que tienen lugar en el tiempo τ (esto último debido a la ecuación (II.18), que nos dice que el número de procesos de este tipo es, en equilibrio, igual a los del tipo $\mathcal{Z}_m \rightarrow \mathcal{Z}_n$), se tiene, de la ecuación (II.18), que el número total de eventos lo podemos expresar como:

$$\ell = 2\left[\frac{p_n}{\mathcal{J}} \exp(-\epsilon_n/kT) \right](B_n^m \rho\tau), \tag{II.26}$$

donde el primer paréntesis representa la probabilidad de que el sistema esté en el estado $\mathcal{Z}_n$ y el segundo representa al número de procesos del tipo $\mathcal{Z}_n \rightarrow \mathcal{Z}_m$ que suceden en el tiempo τ. El factor dos viene de la igualdad ya mencionada en el número de procesos de absorción y de emisión. Substituyendo en (II.25) se obtiene, para las fluctuaciones:

$$\langle \Delta^2 \rangle = \frac{2}{3\mathcal{J}} \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 p_n B_n^m \exp(-\epsilon_n/kT)\rho\tau. \tag{II.27}$$

2.4.4. ANALISIS DE LOS RESULTADOS.

Una vez obtenido este resultado, Einstein demuestra que los momentos transferidos a la partícula por el campo de radiación, de acuerdo con las hipótesis hechas, no alteran el equilibrio termodinámico entre estos dos. Para lograr esto, substituye los valores obtenidos para R y $\langle \Delta^2 \rangle$, determinados por (II.24) y (II.27) respectivamente, en la ecuación (II.2), una vez habiendo hecho el cambio:

$$\left(\rho - \frac{1}{3}\,\omega\,\frac{\partial\rho}{\partial\omega}\right)[1 - \exp(-\hbar\omega/kT)] = \rho\,\frac{\hbar\omega}{3kT},$$

en la expresión para R, que viene de substituir la ley de Planck en el lado izquierdo de esta última ecuación. Con esto se comprueba que ambos lados de la ecuación (II.2) son iguales, y por lo tanto, que se satisface sólo bajo las hipótesis utilizadas. Para terminar su artículo Einstein comenta que "con esto se completan los argumentos que fundamentan las hipótesis hechas respecto a la interacción entre materia y radiación por medio de procesos de absorción y emisión....De estas hipótesis se siguen, de una manera natural, el segundo postulado de Bohr, ecuación [(II.21)], y la fórmula para la radiación de Planck. Sin embargo, me parece a mi más importante el resultado acerca de la transferencia de momento a la partícula debida a la absorción y emisión de radiación. Si se cambiara alguna de las suposiciones hechas sobre el momento, se violaría la ecuación [(II.2)]; parece casi imposible mantener una concordancia con esta relación, impuesta por la teoría del calor, si no es en la base de nuestras suposiciones."[6] luego, añade que "se pueden considerar las siguientes afirmaciones como suficientemente demostradas:

– Si una 'aguja' de radiación tiene el efecto de que al interaccionar con una molécula, ésta absorbe ó emite una energía $\hbar\omega$ en forma de radiación, entonces siempre se le transfiere a la molécula un momento $\hbar\omega/c$.

– Si sobre la molécula actúan varias 'agujas' de radiación, sólo una de ellas es la que participa en el proceso elemental de interacción; y así, es esta aguja la que determina la dirección del momento transferido.

– Si la molécula sufre una pérdida de energía $\hbar\omega$ sin excitación externa al emitir esta energía en forma de radiación, entonces, este proceso también es direccional y, por lo tanto, la molécula sufrirá un retroceso de magnitud $\hbar\omega/c$ en una dirección determinada solamente por el 'azar', de acuerdo con el estado presente de la teoría."[6]

Además añade que "la debilidad de la teoría es, por un lado, el hecho de que no nos acerca más hacia una conección con la teoría ondulatoria; y, por el otro, que deja que la duración y la dirección del proceso elemental sean determinadas por el 'azar'."[6]

Si en esta segunda parte del artículo, se hubiera usado como elemento conocido al momento transmitido a la partícula por medio de la radiación emitida sin causas externas, en lugar de la ley de Planck, se podría derivar dicha ley usando el mismo balance de momento, substituyendo R y $\langle\Delta^2\rangle$ directamente en la ecuación (II.2) y resolviendo para ρ.

Aquí retomaremos la hipótesis acerca de la discontinuidad de los estados $\mathscr{Z}_n$ que hace Einstein en el artículo de la referencia 6. La cuestión es si esta hipótesis es necesaria para describir la interacción de la radiación con la materia y, así, poder llegar a la ley de Planck. Einstein fue criticado por introducir esta suposición, pues él lo que intentaba era demostrar que la existencia de un proceso discontinuo no era fundamental para obtener una derivación correcta de la ley de radiación. El respondió a estas críticas con un artículo publicado junto con Ehrenfest[20] en el cual demuestran, sin dejar lugar a dudas, que no es necesaria la hipótesis de estados discontinuos. En este trabajo, Einstein y Ehrenfest, proponen que, en general, se puede tener un número arbitrario N de procesos en los que se emite radiación a frecuencias ω_1, ω_2, ..., ω_N, y un número M en los que se absorbe radiación con frecuencias ω'_1, ω'_2, ..., ω'_M y tal que nos llevan de un estado de energía ϵ_I a otro ϵ_F. Así, la generalización de la probabilidad de transición, ecuaciones ([I.14)-(II.15), es:

$$dW_{IF} = \prod_{i}^{N} [B_i \rho(\omega_i)] \prod_{j}^{M} [A_j + B_j \rho(\omega'_j)]\, dt.$$

El primer factor representa las absorciones y el segundo las emisiones. El proceso inverso, que nos lleva de ϵ_F a ϵ_N, se expresa, entonces, como:

$$dW_{FI} = \prod_{i}^{N} [A_i + B_i \rho(\omega_i)] \prod_{j}^{M} [B_j \rho(\omega'_j)]\, dt.$$

Si se supone que la ley de Boltzmann vale en equilibrio y se impone la condición de balance detallado, se obtiene:

$$\prod_{i}^{N} \left[\frac{B_i \rho(\omega_i)}{A_i + B_i \rho(\omega_i)} \exp(\hbar\omega_i / kT) \right] = \prod_{j}^{M} \left[\frac{B_j \rho(\omega'_j)}{A_j + B_j \rho(\omega'_j)} \exp(\hbar\omega'_j / kT) \right].$$

Como esta expresión debe ser válida para cualquier N y M y también para cualquier conjunto de ω_i y ω_j, entonces cada término entre paréntesis debe ser igual a uno. Al tomar cualquiera de las dos expresiones y resolver para ρ se obtiene la ley de Planck. En este sentido es la demostración de Einstein y Ehrenfest de que la hipótesis de estados discontinuos no es necesaria. Sin embargo, si se toman las mismas condiciones de la derivación de Einstein de 1917, sólo que, en lugar de suponer una serie de estados discontinuos, trabajamos con un continuo y nos fijamos en dos de los posibles estados ϵ_I y ϵ_F. Únicamente, la derivación se hace exactamente igual que la de la sección 2.4.1. Es el hecho de imponer un balance detellado, esto es, que el intercambio de energía se haga a cada frecuencia, el que nos permite trabajar con dos estados solamente y, además, nos impone la condición de que sólo haya transiciones entre estados que esten separados por una energía igual a $\hbar\omega$.

[1]A.Einstein y L.Hopf, *Annalen der Physik*, **33**, 1105 (1910).

[2]A.Einstein y O.Stern, *Ann. der Phys.*, **40**, 551 (1913).

[3]M.Planck, *Ann. der Phys.*, **37**, 602 (1912). Cit en la referencia 5.

[4]S.Bergia, P.Lugli y N.Zamboni, *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, **4**, num. 4, 295-318 (1979). En este artículo se puede encontrar una traducción al inglés del artículo de la referencia 1.

[5]S.Bergia, P.Lugli y N.Zamboni, *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, **5**, num. 1, 39-62 (1980). En este artículo se puede encontrar una traducción al inglés del artículo de la referencia 2.

[6]A.Einstein, *Phys. Z.*, **18**, 121 (1917). ver traducción al inglés en B.L.van der Waerden, *Sources of Quantum Mechanics*, Classics of Science vol. 5, Dover, 1968, U.S.A.

[7]Para esto vease por ejemplo: Stephen G.Brush, *Archives for the History of Exact Sciences* **4**, 145-183 (1967).

[8]A.Einstein, *Ann. d. Phys.*, **22**, 180 (1907). Cit. en A.Pais, *Rev. Mod. Phys.*, **51**, no. 4, oct. 1979.

[9]No nos ocuparemos de este tema aquí, para esto ver, por ejemplo: A.Pais, op. cit.

[10]Los cálculos aquí presentados siguen a los cálculos expuestos por T.H.Boyer en *Phys. Rev.*, **182**, no. 5, 1374-1383 (1969), y por lo tanto, usaremos la frecuencia angular $\omega=2\pi\nu$.

[11]Ver referencia 4, cita 14.

[12]Ver, por ejemplo: W.K.H.Panofsky y M.Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley Publishing Company, Cambridge (1955), pag. 322.

[13]T.H.Boyer, op. cit.

[14]M.Planck, *Ann. d. Phys.*, **37**, 642-656 (1912); II, 287-301. Cit. en T.S.Kuhn, *Black-body theory and the quantum discontinuity, 1894-1912*, Clarendon Press Oxford, Oxford University Press, 1978.[15]Cit. en T.S.Kuhn, op. cit., pag. 236.

[16]T.S.Kuhn, op. cit., pag. 247.

[17]A.Eucken, *Sitzungsberichte d. Preuss. Akad. d. Wissenschaften*, pag. 141 (1912). Cit. en la referencia 4.

[18]A.Einstein, *Verh. d. Deutschen Physical Geselschaft*, **18**, no. 13/14, pag. 318 (1916). Cit en la referencia 6.

[19]El nombre de esta sección está tomado del nombre que usa Einstein en la referencia 6 para la sección correspondiente a estas ideas.

[20]A.Einstein y P.Ehrenfest, *Z. Phys.*, **19**, 301 (1923). Cit. en: J.L.Jiménez, L.de la Peña y T.A.Brody, *Am. J. Phys.*, **48**(10), oct. 1980. Para una exposición más amplia de estas ideas ver, por ejemplo: H.R.Lewis, *Am. J. Phys.*, **41**, pag. 38, ene. 1973; o bien: A.V.Barranco y H.França, preprint.

CAPITULO III

LA ENERGIA DE PUNTO CERO

3.1. INTRODUCCION.

En el capítulo anterior se expusieron dos derivaciones hechas por Einstein y sus colaboradores, de la ley de radiación de Planck; sin embargo, en estas derivaciones existe una imprecisión en lo que al concepto de energía de punto cero se refiere. Es la intención de este capítulo corregir tal situación, para lograr, así, un enfoque más general en la descripción de la distribución de energía para la radiación que se cumple cuando ésta se encuentra en equilibrio con la materia. Se comenzará por analizar la derivación hecha por Einstein y Stern[1] que está basada en un enfoque esencialmente electromagnético; enseguida se procederá a comentar la derivación de Einstein[2], de 1917, hecha con argumentos estadísticos. Finalmente se mostrará cómo estas dos derivaciones se pueden relacionar entre sí.

Aquí cabe hacer unas definiciones que nos ayudarán a clarificar ideas más adelante. En el capítulo anterior no se hizo ninguna diferenciación en la naturaleza de los campos térmico y total; sin embargo se sabe que existen tres tipos de campos[3] con sus densidades de energía diferentes: el campo electromagnético total circundante a cuya densidad nos referiremos como ρ; el campo 'térmico', esto es, el campo que contiene a la radiación con temperatura diferente de cero, a la densidad de energía de este campo la escribiremos como ρ_T y, finalmente, el campo que subsiste a temperatura cero y que su densidad la denotaremos como ρ_0. Es claro que estos tres campos se relacionan por:

$$\rho=\rho_T+\rho_o.$$

3.2. EL CAMPO DE PUNTO CERO.

Planck, al derivar la ley de radiación, abrió nuevas perspectivas para la física del siglo XIX, concretamente al introducir un nuevo concepto: la cuantización de la energía intercambiada entre la radiación y la materia. Durante los años que siguieron a dicha derivación la gente no comprendía su significado. Fue Einstein, en 1905 con su trabajo sobre el efecto fotoeléctrico, el que ayudó a esclarecer las ideas respecto a la discontinuidad, provocando, así, que se creyera que el introducir este nuevo elemento a la física era la única forma de explicar los fenómenos cuánticos. No obstante, Planck, siempre inconforme con las nuevas ideas que hablaban de discontinuidades, presentó[4] una derivación que incluye al término de punto cero como el responsable del comportamiento cuántico. Walther Hermann Nernst (1864-1941) le dio un importante apoyo a esta línea de investigación con sus trabajos relacionados con la tercera ley de la termodinámica[5]. También Einstein, como se vio en el capítulo anterior, trabajó junto con Stern en este concepto, abandonándolo tiempo después por motivos que discutiremos en su momento. Años más tarde la electrodinámica cuántica lo retomó al atribuirle el término de punto cero al campo electromagnético asociado con el campo subsistente a temperatura cero (y no al oscilador), logrando encontrar una expresión para la densidad de energía de este campo; sin embargo, este enfoque no nos interesa aquí por lo que lo dejaremos de lado. Solamente nos detendremos para hacer notar que en esta teoría se piensa al campo de punto cero como un campo virtual, esto es, como un campo que no existe pero, sin embargo, interactúa con la materia.

En 1949, Park y Epstein[6], propusieron considerar al campo de vacío como un campo real y fluctuante. Su argumento es como sigue: considerando las incertidumbres en los valores de las componentes de los campos $\Delta E_x,\ldots,\Delta H_x,\ldots$ medidos dentro de una región cuya dimensión lineal es $\delta\ell$, y suponiendo que el valor medio de los campos se anula, se cumple la desigualdad de Heisenberg:

$$\Delta E_x \Delta B_y \geq 2\pi\hbar c/(\delta\ell)^4.$$

Si se supone, además, que ΔH_y es, en promedio, numéricamente igual a ΔE_x, se puede escribir:

$$(\Delta E)^2 \geq 2\pi\hbar c/(\delta\ell)^4.$$

Por lo tanto, la energía debida a ΔE contenida en el volumen $(\delta\ell)^3$ será:

$$\Delta W = \frac{3}{4\pi}(\Delta E)^2(\delta\ell)^3 \geq \frac{3\hbar c}{2\delta\ell}.$$

Si se supone que existe una frecuencia dominante ω, la perturbación que ésta genera estará confinada a una región con tamaño del orden de c/ω, por lo que podemos hacer la aproximación $\delta\ell\sim c/\omega$; así, substituyendo en la ecuación para la energía, obtenemos para ésta:

$$\Delta W \geq \frac{3}{2}\hbar\omega.$$

Esta relación se puede interpretar diciendo que este valor residual de la energía permanece inclusive cuando no se tenga ningún campo externo, cuantos de luz ni cualquier otro efecto electromagnético. Sin embargo, como al integrar esta energía espectral sobre todas las frecuencias se obtiene una densidad de energía infinita, se debe concluir que aquélla no tiene ninguna consecuencia física directa, o bien, que las fluctuaciones del campo electromagnético del vacío no son directamente observables y sin embargo reales. Esto quiere decir que sus efectos sólo se van a poder medir indirectamente por medio de sus consecuencias físicas.

Park y Epstein se limitaron a proponer que el campo de punto cero es un campo real sin discutir su procedencia. En los años que siguieron esta idea se redescubrió varias veces y correspondió a una gran cantidad de autores refinar el concepto[7].

Por ejemplo, si se considera que en el dominio atómico un oscilador cargado también radía, se necesita una fuente para recobrar la estabilidad de la materia. Esto contrasta con las ideas de Bohr que postula que los niveles cuánticos existen por sí solos. Dicha fuente se puede encontrar en el resto de los osciladores (cargados) del universo, el cual actúa como un reservorio[8]. Entonces, vemos que se puede encontrar una fuente natural para un campo que requiere ser ubicuo, pues debe afectar a cada partícula, en el mismo universo. Por otra parte, debido a esta ubicuidad del campo es claro que éste debe cumplir la condición de ser invariante de

Lorentz, esto es, no debe ser posible detectar movimientos uniformes relativos respecto a él, evitando, así, caer en situaciones prerelativistas. Es este argumento el que nos proporciona una teoría para calcular la densidad de energía del campo de vacío, la cual está dada por[9]:

$$\rho_o(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} . \qquad \text{(III.1)}$$

Es natural suponer a este campo como homogéneo e isotrópico, tanto local como globalmente, pues esta condición debe imponerse para mantenerla la invariancia de Lorentz. Finalmente, el número de modos en un intervalo $d\omega$ para un campo electromagnético isotrópico es[10]:

$$2\int d^3k \; \frac{1}{(2\pi)^3} = 2\oint \frac{d\Omega}{8\pi^3} k^2 dk = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega \;,$$

donde el factor dos viene de tomar en cuenta las dos polarizaciones del campo. Usando este resultado junto con la ecuación (III.1) podemos encontrar la energía por modo del campo de vacío:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

Por último, es importante hacer notar, como un argumento en favor de la existencia real del campo de vacío, que cuando a principios de siglo la gente suponía que un sistema atómico debía ser inestable debido a la radiación que emite, estaban pensando erróneamente que el átomo es un sistema aislado[11]; sin embargo, como acabamos de ver, la presencia del resto de las cargas aceleradas del universo implica la existencia de un campo azaroso y complicado en cada punto del espacio. Este efecto es demasiado importante como para no tomarlo en cuenta a la hora de estudiar la estabilidad de los sistemas cuánticos.

Resumiendo, podemos decir que existe un campo clásico estacionario que es homogéneo, isotrópico, ubicuo, con fluctuaciones estocásticas, invariante de Lorentz, que es producido por un gran número de fuentes incoherentes y que al interaccionar con la materia le induce las propiedades cuánticas típicas de los sistemas atómicos.

3.3. DERIVACION DE LA LEY DE PLANCK COMPLETA I.

En el capítulo anterior vimos como Einstein y Stern le asociaban un valor de $\hbar\omega$ a la energía por modo de punto cero del oscilador cuando en la primera mitad de su artículo habían supuesto que el punto cero de energía debería ser $\frac{1}{2}\hbar\omega$; sin embargo, ellos incluyen una nota en la que explican este procedimiento diciendo que parecía que sólo atribuyendole una energía $\hbar\omega$ al punto cero del oscilador se podía llegar a la ley de Planck y que investigaciones posteriores más precisas deberian mostrar si esta discrepancia en los valores de la energía desaparecen o no[12]. Como hacen notar J.L. Jimenez, L. de la Peña y T.A. Brody el problema central parece haber sido que Einstein y Stern no se dieron cuenta que el aceptar un término de punto cero para las fluctuaciones de momento del oscilador, implica la presencia de un término de punto cero para el campo de radiación si se quiere tener equilibrio. Si esto no fuera así, las fluctuaciones descritas por (II.12) se irían a cero si la temperatura T se va a cero. Esto se debe a que la densidad de energía que allí aparece es la descrita por la ley de Planck. Entonces no es válido tomar estas fluctuaciones como las subyacentes en T=0; sin embargo, la derivación de Einstein y Hopf de la ecuación (II.10) no hace suposición alguna sobre la naturaleza de ρ, esto es, se está tomando en cuenta al campo electromagnético completo: $\rho=\rho_T+\rho_o$. Así pues, si ρ contiene un término independiente de la temperatura también $\langle\Delta^2\rangle$ debe tenerlo; por lo que, si a estas fluctuaciones le sumamos $\langle\Delta_o^2\rangle$, tal como se hizo en el capítulo anterior, estaremos considerando dos veces a la parte correspondiente a la temperatura cero. Esto explica la necesidad de Einstein y Stern de incluir un factor de dos en la expresión (II.13) para la energía de punto cero (esto es, la necesidad de usar $\hbar\omega$ en lugar de $\frac{1}{2}\hbar\omega$)[13]. Así, para corregir esta ecuación para que corresponda a una energía por modo de $\frac{1}{2}\hbar\omega$, hacemos:

$$\tfrac{1}{2} Kf^2 = \tfrac{1}{2}\hbar\omega,$$

con las mismas definiciones que en el capítulo II. Despejando el momento dipolar y substituyéndolo en la ecuación (II.12), se obtiene la expresión:

$$\langle\Delta_o^2\rangle=\frac{2\pi^2}{5}c\hbar\omega\Gamma\rho_o(\omega,0)\tau, \qquad \text{(III.2)}$$

donde al usar ρ_o se está pensando que es el campo de vacío el que genera estas fluctuaciones. Es probable que la diferencia entre las energías por modo del campo de punto cero que Einstein usara para los cálculos y la medida por el experimento, lo llevaran a abandonar este concepto en sus investigaciones posteriores.

Por otro lado, vemos que el coeficiente R dado por la ecuación (II.8) se anula para un espectro de la forma $\rho\sim\omega^3$, y en particular para un espectro como el dado por la ecuación (III.1). Con esto se demuestra que el campo de vacío no produce fuerzas de fricción sobre una partícula en movimiento. Es el campo térmico el único que puede generara fuerzas de este tipo y, por lo tanto, son las fluctuaciones de este campo las que debemos igualar con la fuerza de fricción, por lo que, el equivalente a la ecuación (II.2) es:

$$\langle \Delta_T^2 \rangle = 2kTR\tau, \tag{III.3}$$

y como el campo total está formado por el campo térmico y el de vacío y las fluctuaciones de estos dos últimos son estadísticamente independientes[13], se puede escribir: $\langle \Delta^2 \rangle = \langle \Delta_T^2 \rangle + \langle \Delta_o^2 \rangle$; por lo que, finalmente, tenemos para la ecuación que gobierna al equilibrio dinámico entre radiación y materia:

$$\langle \Delta^2 \rangle - \langle \Delta_o^2 \rangle = 2kTR\tau. \tag{III.4}$$

Si substituimos aquí las ecuaciones (II.8), (II.10) y (III.2), se llega a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\pi^2 c^3}{3\omega^2 kT}\left[\rho^2 - \rho_o^2\right] = \rho - \frac{1}{3}\omega\frac{\partial\rho}{\partial\omega}\ , \tag{III.5}$$

donde se ha usado la ecuación (III.1). La solución de esta ecuación diferencial es de la forma:

$$\rho = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\left[\frac{A\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT)-A}+\frac{1}{2}\hbar\omega\right],$$

donde A es una constante la cual se determina usando la ley de Wien encontrando que A=1. De esta forma se llega, finalmente a la ley de Planck de radiación:

$$\rho = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\left[\frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT)-1}+\frac{1}{2}\hbar\omega\right]. \qquad \text{(III.6)}$$

Cabe remarcar que la inclusión del campo de vacío ha contribuido de forma esencial en el cálculo y es gracias a esto que se ha podido llegar a un resultado que la física clásica no puede derivar. Son este argumento y el hecho de que el término de punto cero haya aparecido explícitamente en la distribución de energía de la radiación, los que nos dan, cada uno, otra justificación para considerar al campo de vacío como un campo real estocástico que al interaccionar con la materia la obliga a tener un comportamiento que podemos interpretar como cuántico.

3.4. DERIVACION DE LA LEY DE PLANCK COMPLETA II.

Aunque en su trabajo[2] de 1917, Einstein usa el balance dinámico para demostrar que la luz emitida por las moléculas tiene una cantidad de movimiento direccional bien definida, este método se puede usar para encontrar la ley de Planck usando como hipótesis el resultado que él obtiene y resolviendo la ecuación diferencial que queda al substituir las expresiones para R y $\langle \Delta^2 \rangle$ en la ecuación (II.2). Esto mismo es lo que haremos aquí incluyendo el campo de vacío en los cálculos.

La ecuación (II.18) se encontró haciendo un balance entre el número de absorciones y de emisiones; para esto se definieron las probabilidades de transición con las ecuaciones (II.15)-(II.17). Sin embargo, analizando estas ecuaciones con una perspectiva basada en los argumentos expuestos en las primeras secciones de este capítulo, tenemos que la probabilidad de transición para una emisión "sin causas externas" la podemos reescribir como:

$$dW = A_m^n \rho_o dt.$$

Hay que tener cuidado al interpretar esta ecuación, pues así como está escrita da la impresión de adjudicarle al campo de punto cero el papel de generador de este tipo de transiciones; sin embargo, calculos más precisos demuestran[14] que este término se debe, en la misma peoporción, tanto al campo de vacio como a la fuerza de reacción de radiación que sufre la partícula.

Las ecuaciones referentes a la emisión y la absorción inducidas las reescribimos como:

$$dW = B_m^n \rho_T dt;$$
$$dW = B_n^m \rho_T dt,$$

respectivamente, pues es el campo térmico el que las induce. Con esto se ha logrado poner a los tres tipos de transiciones al mismo nivel, esto es, ahora todas son transiciones inducidas. Así podemos reescribir la ecuación (II.18) como:

$$\rho_n \exp(-\epsilon_n/kT) B_n^m \rho_T = \rho_m \exp(-\epsilon_m/kT)(B_m^n \rho_T + A_m^n \rho_o), \tag{III.7}$$

y usando los mismos argumentos que en la sección 2.4.3, encontramos para las fluctuaciones, la siguiente expresión:

$$\langle \Delta_T^2 \rangle = \frac{2}{3\mathcal{T}} \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 \rho_n B_n^m \exp(-\epsilon_n/kT) \rho_T \tau. \tag{III.8}$$

Usando esta ecuación junto con la (II.24) para R en la (III.3) se llega a:

$$\frac{1}{3}\frac{\hbar\omega}{kT}(\rho-\rho_o) = \left[\rho - \frac{1}{3}\omega\frac{\partial\rho}{\partial\omega}\right][1-\exp(-\hbar\omega/kT)],$$

que tiene como solución a la ecuación (III.6). Entonces, también por este método se ha llegado a la ecuación de Planck, lo cual nos hace intuir que debe haber algúna relación entre estos cálculos, la que se discutirá en la siguiente sección.

Por otro lado, si despejamos ρ_T de la ecuación (III.7), obtenemos:

$$\rho_T = \frac{A_m^n/B_m^n \ \rho_o}{\exp[(\epsilon_m-\epsilon_n)/kT]-1},$$

que al compararla con la ley de desplazamiento de Wien, se encuentra que A_m^n/B_m^n es constante, ya que $\rho_o \propto \omega^3$, y también que $\epsilon_m-\epsilon_n=\hbar\omega$. Para encontrar el valor de la constante tomamos el límite de la ecuación anterior y la comparamos con la ley de Rayleigh-Jeans y se encuentra que A_m^n/B_m^n es igual a dos[15]. Usando todo esto junto con la ecuación (III.1) llegamos otra vez a la ecuación (III.6). Con esto se ha demostrado que la ley de Planck describe radiación en equilibrio térmico y dinámico con la materia.

3.5. COMPATIBILIDAD ENTRE LOS DOS ENFOQUES.

Hasta ahora se han presentado dos derivaciones de la ley de Planck, una basada en un enfoque esencialmente electromagnético y la otra en un enfoque estadístico; sin embargo, siempre cabe la pregunta referente a si estos dos caminos están relacionados. En lo que sigue se mostrará una forma de relacionarlos al derivar la ley de Planck combinando los resultados de ambos enfoques.

Antes de continuar es necesario hacer algunas aclaraciones: Einstein y sus colaboradores en sus trabajos de 1910 y 1913, usaron la cantidad $\sigma=\omega\Gamma$, la cual tiene unidades de número y representa una sección eficaz relativa que podemos interpretar como la probabilidad de interacción entre la onda y la partícula, o bien, como el número relativo de interacciones en un ensemble de sistemas. Así, reescribiendo el coeficiente de fricción y los términos de fluctuaciones para la parte electromagnética en términos de σ, se tiene:

$$R=\frac{6\pi^2\sigma c}{5}\left(\rho-\frac{1}{3}\omega\frac{\partial\rho}{\partial\omega}\right);$$

$$\langle\Delta^2\rangle=\frac{4\pi^4c^4\sigma}{5\omega^3}\rho^2\tau;$$

$$\langle\Delta_o^2\rangle=\frac{2\pi^2}{5}c\hbar\sigma\rho_o\tau.$$

Las cantidades equivalentes para el caso estadístico son las dadas por las ecuaciones (II.24) y (III.8). Igualando los coeficientes de fricción obtenemos:

$$\frac{6\pi^2\sigma c}{5\omega}\left(\rho-\frac{1}{3}\omega\frac{\partial\rho}{\partial\omega}\right)=\frac{\ell\ \hbar\omega}{2c^2\mathcal{T}}\frac{1}{\rho}\left(\rho-\frac{1}{3}\omega\frac{\partial\rho}{\partial\omega}\right)[1-\exp(-\hbar\omega/kT)],$$

donde se ha usado (II.26) para poner el lado derecho de esta ecuación en términos de ℓ que representa al número total de eventos elementales. Como ℓ y σ tienen la misma naturaleza, ambos representan probabilidades, y como su valor dependerá de cada situación particular, no queremos que aparezcan en el resultado final, por lo tanto, despejando ℓ/σ:

$$\frac{\ell}{\sigma}=\frac{6}{5}\omega\frac{\rho}{\rho_o}[1-\exp(-\hbar\omega/kT)]^{-1}\tau,$$

donde se ha usado la ecuación (III.1); usando las ecuaciones que describen a las fluctuaciones podemos reescribir esta cantidad como:

$$\frac{\ell}{\sigma}=\frac{3}{5}\omega\frac{\rho}{\rho_o^2}(\rho+\rho_o)\tau,$$

igualando ahora estas dos ecuaciones, se obtiene una condición para ρ que al despejarla encontramos que es la ley de Planck. Este resultado demuestra la equivalencia entre ambos enfoques para tratar, a este nivel, el problema de la interacción entre radiación y materia.

Cabe hacer notar que en esta derivación no se usó en ningún momento la condición de equilibrio dinámico (II.2), sino sólo la idea de que los coeficientes de fricción por un lado y las fluctuaciones por otro, son iguales.

3.6. NATURALEZA DE LA INTERACCION ENTRE RADIACION Y MATERIA.

Hasta ahora se ha derivado exitosamente la ley de Planck suponiendo un espectro continuo de energías por medio de dos enfoques distintos. Esto nos podría llevar a concluir que la energía de un cuerpo negro no está cuantizada; sin embargo, Planck, en su derivación de la ley de radiación, utiliza explícitamente la hipótesis de discretez para llegar al resultado correcto. Esto nos pone ante una paradoja, por un lado se han usado energías continuas y por el otro energías discretas. Theimer incluye en un artículo[16] un argumento de Schrödinger que nos sugiere un camino para intentar resolver dicho problema: "aunque uno acepte la cuantización no es necesario hacer la suposición más incisiva que se hace normalmente, a saber, que cada oscilador de radiación [radiation oscillator] individual porta un número entero de cuantos $\hbar\omega$, o como se dice algunas veces, que siempre hay un número entero de fotones de esa clase particular en el estado indicado por ese oscilador de radiación individual"[17]; esto es, con estas consideraciones se puede cambiar de nivel el elemento discreto que existe en el proceso de interacción entre radiación y materia, librando a la primera del carácter discreto que se le ha asignado. Sin embargo, Theimer demuestra, en el mismo artículo, que, para mantener consistencia con el formalismo de ensemble canónico de la mecánica estadística, la hipótesis de discretez es necesaria y, por lo tanto, se debe tener "algún tipo de cuantización"[16] en la descripción del espectro de energías del cuerpo negro. El problema consiste ahora en encontrar una forma de explicar dicha cuantización. Para esto nos basaremos, principalmente, en las ideas expuestas en dos artículos: uno de ellos de Mandel, Sudarshan y Wolf[18] y principalmente en el artículo de A.M.Cetto y L.de la Peña de la referencia 14. En estos artículos se discuten una serie de conceptos acerca de las fluctuaciones en el número de cuentas de un proceso fotoeléctrico, los cuales nos servirán para nuestros propósitos y que pasaremos a describir a continuación.

Para un rayo de luz monocromática que incide sobre un fotodetector, suponemos que en cualquier instante la probabilidad $P(t)$ de tener una detección fotoeléctrica es proporcional a la intensidad $I(t)$ del rayo[19], la cual, a su vez, es proporcional a la energía $E(t)$. Podemos escribir, entonces, la probabilidad de detección en un intervalo corto de tiempo $(t, t+\Delta t)$ como:

$$\int_t^{t+\Delta t} P(t')dt' = \alpha \int_t^{t+\Delta t} I(t')dt',$$

donde α es una constante de proporcionalidad, y llamamos:

$$\int_{t}^{t+\Delta t} I(t')dt' = U(t,\Delta t).$$

La probabilidad de tener n fotodetecciones en el intervalo de tiempo $(t, t+\Delta t)$ si consideramos a las diferentes detecciones como eventos estadísticamente independientes, será una distribución de Poisson[18,19]:

$$p(n) = \frac{1}{n!}(\alpha U)^n e^{-\alpha U},$$

El promedio de $p(n)$ sobre el ensemble de campos electromagnéticos incidentes es la probabilidad que se obtendría normalmente de los experimentos de conteo[18], por lo que, la ecuación que nos interesa es:

$$\langle p(n) \rangle = \frac{1}{n!}\langle (\alpha U)^n e^{-\alpha U} \rangle, \qquad \text{(III.9)}$$

siendo U una variable estocástica. Esta ecuación va a ser, en general, diferente de la distribución de Poisson; sólo en el caso en que las fluctuaciones de U sean cero se reducirá a una distribución de este tipo.

Las expresiones para los dos primeros momentos de la distribución son:

$$\bar{n} = \alpha U \qquad \text{(III.10a)}$$

$$\langle n^2 \rangle = \alpha \bar{U} + \alpha^2 \langle U^2 \rangle, \qquad \text{(III.10b)}$$

lo cual nos da, para las fluctuaciones en el número de cuentas, la siguiente expresión:

$$\sigma_n^2=\bar{n}+\alpha^2\sigma_U^2, \qquad \text{(III.11)}$$

a la cual contribuyen dos términos: el primero debido a las fluctuaciones en el número de partículas, que es de la forma esperada para una distribución de Poisson, y el segundo es característico de las fluctuaciones de un campo de ondas clásico. Como hasta ahora no se ha hecho ninguna hipótesis acerca de la naturaleza de la luz, Mandel et al.[18] concluyen que esta ecuación para las fluctuaciones es válida para fluctuaciones de conteo sin importar la naturaleza de la luz involucrada, ya sea de origen térmico ó no y, además, aunque el resultado se refiere a las fluctuaciones en las cuentas de los procesos fotoeléctricos, se puede considerar como un reflejo de las propiedades de fluctuación de la luz misma. Por otro lado, para un campo de radiación producido por un gran número de fuentes incoherentes la distribución de probabilidad de la intensidad es Laplaciana[13,18], por lo que:

$$\sigma_U^2=\bar{U}^2,$$

y la ecuación (III.11) queda:

$$\sigma_n^2=\bar{n}+\bar{n}^2, \qquad \text{(III.12)}$$

donde se ha usado que $\bar{n}=\alpha\bar{U}$. En 1909, Einstein[20] encontró un resultado análogo referente a las fluctuaciones de energía existentes en una caja que contenga radiación de cuerpo negro en equilibrio térmico. Este resultado se puede escribir como[13]:

$$\sigma_T^2 = \overline{E}_T^{\,2} + \hbar\omega\, \overline{E}_T, \qquad \text{(III.13)}$$

donde $\overline{E}_T = \hbar\omega[\exp(\beta\hbar\omega)-1]^{-1}$.

Por otra parte, escribiendo la función de distribución para un cuerpo negro como[13,16]:

$$W(E_T) = Z_T^{-1} \sum_n \exp(-\beta E_T)\, \delta(E_T - n\hbar\omega), \qquad \text{(III.14)}$$

donde Z_T es la función de partición para un cuerpo negro, esto es: $Z_T = [1-\exp(-\beta\hbar\omega)]^{-1}$, vemos que se cumple la relación $E_T = n\hbar\omega$. Multiplicando (III.12) por $(\hbar\omega)^2$ y usando esta última relación, encontramos que (III.12) y (III.13) son equivalentes. Como hacen notar A.M.Cetto y L.de la Peña, esto demuestra que la variancia de E_T se debe entender como la variancia en el número de cuentas en el proceso de fotodetección que involucren una energía E_T[13].

Por otro lado, usando las ecuaciones (III.9), (III.10a) y $\bar{n} = [\exp(\beta\hbar\omega)-1]^{-1}$, la ecuación (III.14) se puede reescribir como:

$$W(E_T) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \rho_n \rangle \delta(E_T - n\hbar\omega),$$

que nos describe a la cuantización en la energía y se puede reinterpretar, según A.M.Cetto y L.de la Peña y recordando la definición de ρ_n, como "la distribución para las energías posibles involucradas en el proceso de fotodetección, más que como la probabilidad de que se realice el estado de energía E_T".[13]

Estas últimas conclusiones y los argumentos con los que se inicia esta sección, nos sugieren entender la cuantización como generada por la interacción entre radiación y materia ómás específicamente y según el formalismo expuesto, por como ve la materia a la radiación. Respecto a esto último A. M. Cetto y L. de la Peña hacen un análisis de la radiación de cuerpo negro usando la derivación de Einstein de la ley de Planck que involucra a los coeficientes A y B, pero siguiendo un sentido inverso, para poder encontrar, así, una expresión para el balance de energías que permite reinterpretar cada término involucrado en esta ecuación, esto es, como la ley de Planck se puede expresar en la forma:

$$\rho=2\rho_o[\exp(\beta\hbar\omega)-1]^{-1}+\rho_o, \qquad \text{(III.15)}$$

y si usamos $\hbar\omega=E_2-E_1$ e identificamos a los factores $\exp(-\beta E_2)$ y $\exp(-\beta E_1)$ con las poblaciones relativas en la situación de equilibrio para cada nivel N_2 y N_1, se encuentra que:

$$N_2(\rho+\rho_o)=N_1(\rho-\rho_o),$$

que al multiplicarla por los coeficientes B, con $B_{12}=B_{21}$, da la siguiente expresión:

$$N_2B_{21}(\rho+\rho_o)=N_1B_{12}(\rho-\rho_o).$$

En esta ecuación tenemos que la probabilidad de emisión es proporcional a $\rho+\rho_o$ y que la probabilidad de absorción es proporcional a $\rho-\rho_o$. Además, no se hace referencia alguna a transciones espontáneas ni al coeficiente A de Einstein. Es así como podemos interpretar esta ecuación diciendo que, los átomos que estén en el estado más bajo de energía 1 se quedarán allí si sólo existe el campo de punto cero, y sólamente existirá absorción si se tiene un campo externo ($\rho=\rho_T+\rho_o$). Por otro lado, las emisiones, o bien las transiciones al estado menor de energía, son generadas tanto por el campo total como por el campo de punto cero. Así, se puede pensar en dos tipos de densidades espectrales efectivas asociadas al campo de radiación de cuerpo negro: la densidad efectiva de absorción $\rho_a=\rho-\rho_o$ y la densidad efectiva de emisióm $\rho_e=\rho+\rho_o$, que al usar (III.15), se pueden reescribir como[13]:

$$\rho_a=2\rho_o\exp(-\beta\hbar\omega)[1-\exp(-\beta\hbar\omega)]^{-1};$$

$$\rho_e=2\rho_o[1-\exp(-\beta\hbar\omega)]^{-1},$$

a las cuales se les puede asociar las energías medias efectivas:

$$\overline{E}_a=\overline{E}-\overline{E}_o=\hbar\omega\exp(-\beta\hbar\omega)[1-\exp(-\beta\hbar\omega)]^{-1};$$

$$\overline{E}_e=\overline{E}+\overline{E}_o=\hbar\omega[1-\exp(-\beta\hbar\omega)]^{-1},$$

donde reconocemos que $\overline{E}_a$ coincide con $\overline{E}_T$.

Las densidades espectrales ρ_a y ρ_e representan a los campos tal y como los detecta la materia, mientras que ρ representa al campo mismo.

Con esto se ha logrado encontrar un mecanismo que nos ayuda a entender la naturaleza de la cuantización, la cual deja de ser una propiedad intrínseca de la luz pasando a formar parte del proceso de interacción entre ésta y la materia. Como concluyen A.M.Cetto y L.de la Peña "el elemento discreto del campo de radiación...se puede interpretar como resultado del conteo de fotodetecciones; a un nivel más profundo se puede asociar con la existencia de actos elementales e independientes de interacción que involucran un solo modo del campo"[13], y terminan diciendo que "en este esquema, el concepto de fotón como ente independiente es innecesario mientras se preserve la noción de acto elemental de interacción[21]. Lo que es seguro, sin embargo, es que se necesita una descripción física clara y fundamental de la interacción entre el campo de radiación y la materia para entender completamente los efectos asimétricos del campo y el intercambio de energía, momento, etc. en forma de paquetes durante la absorción y la emisión."

Finalmente, sería de esperar que otros problemas, como son los efectos Compton y fotoeléctrico, se pudieran explicar por medio del uso del campo de punto cero; sin embargo, hasta ahora esta situación no ha sido resuelta[22]. No obstante, se puden encontrar en la literatura intentos para corregir estos problemass[22,23], y completar, así, una teoría consistente que incluya al campo de punto cero. Este programa va más allá del presente trabajo por lo que no lo trataremos aquí.

[1]Ver S. Bergia, P. Lugli, y N. Zamboni, *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 5, num. 1, 39-62 (1980), en el cual se puede encontrar una traducción al inglés del artículo de Einstein y Stern de 1913.

[2]A. Einstein, *Phys. Z.*, 18, 121 (1917). Ver traducción al inglés en B.L. van der Waerden, *Sources of Quantum Mechanics*, Classics of Science vol. 5, Dover, 1968 U.S.A.

[3]Aunque estos tres campos no son independientes.

[4]M. Planck, *Verh. Deutsch. Phys. Ges.*, 13, 138 (1911) y M. Planck, *Ann. d. Phys.*, 37, 642-656 (1912); II, 287-301. Cit en L. de la Peña, *Stochastic electrodinamics: its development, present situation and perspectives*, Proc. of the Escuela Latinoamericana de Física 1982, Cali Colombia, World Scientific, Singapore 1983.

[5]W. H. Nernst, *Werk. Deutsch. Phys. Ges.*, 18, 83 (1916). Cit. en L. de la Peña, op. cit.

[6]D. Park y H. T. Epstein, *Am. Jour. Phys.*, 17, 301 (1949).

[7]Para esto ver L. de la Peña, op. cit., sección 2.2 y las referencias que allí se citan.

[8]Este argumento se debe a T. W. Marshall, ver en: T. W. Marshall, *Proc. Royal Soc.*, 276A, 475 (1963) y T. W. Marshall, *Proc. Camb. Phyl. Soc.*, 61, 537 (1965). Cit. en L. de la Peña, op. cit.

[9]Una derivación de ρ_o en este sentido se puede encontrar en T. H. Boyer, *Phys. Rev.*, 182, no. 5, 1374-1383 (1969). También se puede encontrar en L. de la Peña, op. cit., sección 3.1.

[10]L. de la Peña, op. cit.

[11]E. Santos, *Stochastic theory of physics as an alternative to quantum theory*, preprint, 1975. Cit. en L. de la Peña, op. cit.

[12]J. L. Jiménez, L. de la Peña y T. A. Brody, *Am. J. Phys.*, 48 (10), oct. 1980.

[13]A. M. Cetto y L. de la Peña, *Found. Phys.* 19, 419-437 (1989).

[14]Ver, por ejemplo: L. de la Peña y A. M. Cetto, preprint IFUNAM 87/3 y también P. W. Milonni, *Am. J. Phys.*, 52 (4), pag. 340, abril 1984.

[15]Este dos es una consecuencia del hecho de que el coeficiente A_m^n sea generado tanto por el campo de vacio como por la reacción de radiación.

[16]O. Theimer, *Am. J. Phys.*, **44**, no. 2, feb. 1967.

[17]E. Schrödinger, *Statistical Thermodynamics* (Cambridge at the University, Londres, 1952), segunda edición, p. 93. Cit. en O. Theimer, op. cit.

[18]L. Mandel, E. C. G. Sudarshan y E. Wolf, *Proc. Phys. Soc.*, **84**, p. 435, sección 3.

[19]Este resultado se demuestra en la referencia 18 usando la teoría semiclásica. Además se concluye que en las condiciones usuales en las que las fluctuaciones de la luz son medidas por medio de detectores fotoeléctricos, el tratamiento semiclásico se aplica por igual a luz tanto de origen térmico como de origen no térmico.

[20]A. Einstein, *Phys. Z.*, **10**, 185 (1909) y *Phys. Z.*, **10**, 817, (1909). Cit en la referencia 18.

[21]Ver L. de la Peña y A. M. Cetto, referencia 14.

[22]R. Kidd, J. Ardini, y A. Anton, *Am. J. Phys.*, 57 (1) p. 27, enero

1989.

[23] O. Thelmer, *Phys. Rev. D*, no. 6, p. 1597 (1971).

EPILOGO

A lo largo de este trabajo se han analizado una serie de resultados concernientes al campo de radiación de un cuerpo negro. Podemos citar entre los más importantes, por ejemplo, al que se refiere a la imposibilidad de describir correctamente dicho campo de radiación utilizando física clásica únicamente, se incluyen, además, una serie de argumentaciones sobre el hecho de que la existencia de un campo clásico de radiación asociado al punto cero de energía es fundamental para obtener la ecuación correcta asociada a la densidad espectral de un cuerpo negro sin recurrir a ningún elemento discreto, implicándose con esto que es innecesario tratar de explicar la naturaleza de la radiación basándose en conceptos de cuantización, esto es, como si estuviera formada por partículas. Este es el resultado más importante del presente trabajo. Un resultado paralelo es la demostración de la equivalencia entre los dos enfoques usados por Einstein en sus trabajos de 1910 y 1913, por un lado, y de 1917 por otro, para atacar el problema del cuerpo negro.

Concluyendo, se ha demostrado que la existencia de un campo de radiación clásico, estocástico, invariante de Lorentz y con una distribución de energías continua nos puede llevar, junto con el campo térmico, a una descripción correcta de la distribución espectral de la radiación de cuerpo negro. Además, se ha concluido que dicho campo térmico posee también la propiedad de tener una distribución continua de energías. Y, finalmente, se ha argumentado sobre la posibilidad de entender el elemento discreto del campo de radiación como un resultado del proceso de conteo de fotodetecciones.

Todo esto le da una visión realista al problema del cuerpo negro, que es, finalmente, con el que nace la teoría cuántica, la cual ha sido, a lo largo de su desarrollo, interpretada subjetivamente por una gran cantidad de autores.

APENDICE A. CALCULO DE LA ECUACION (II.8) DEL TEXTO.

Si en la ecuación:

$$\mathcal{F}'_x = \frac{\partial Ex'}{\partial z'} f' - \frac{1}{c} B'_y \frac{df'}{dt'}$$

substituimos la ecuación (II.6) para f' y su derivada respecto a t':

$$\frac{df'}{dt'} = -\sum_{\lambda=1}^{2} \int d^3k \; \frac{3c^3}{2\omega'^2} \, \gamma \left[\varepsilon_z + \beta \frac{(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\varepsilon})y}{k} \right] h(\omega_k, T) \operatorname{sen}\alpha(\omega') \; \times$$

$$\times \; \operatorname{sen}[\omega' t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \alpha(\omega') - \theta(\mathbf{k},\lambda)],$$

la componente y del campo magnético (II.5b) y, finalmente, la derivada de la componente x del campo eléctrico:

$$E'_x = -\sum_{\lambda=1}^{2} \int d^3k \, \varepsilon_x k'_x h(\omega_k, T) \operatorname{sen}[\omega'_k t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \theta(\mathbf{k},\lambda)],$$

[illegible], una vez promediando sobre ϑ, la siguiente expresión:

$$\langle \mathcal{F}'_x \rangle = \sum_{\lambda=1}^{2} \int d^3k\ \varepsilon_x k'_z \hbar\ \frac{3c^3}{2\omega'^3}\ \gamma \left[\varepsilon_z + \beta\ \frac{(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\varepsilon})y}{k} \right] \operatorname{sen}^2\alpha(\omega')\times\ \frac{1}{2} -$$

$$- \frac{1}{c}\sum_{\lambda=1}^{2} \int d^3k\ \gamma \left[\frac{(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\varepsilon})y}{k} + \beta\ \varepsilon_z \right]\ \hbar\ \frac{3c^3}{2\omega'^3}\gamma \left[\varepsilon_z + \beta\ \frac{(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\varepsilon})y}{k} \right]\omega'\times$$

$$\times \operatorname{sen}^2\alpha(\omega')\times\frac{1}{2},$$

donde se ha usado, para hacer los promedios, que:

$$\langle \operatorname{sen}[\omega'_1 t' - \mathbf{k}'_1\cdot\mathbf{x}' - \vartheta(\mathbf{k}_1,\lambda_1)]\cos[\omega'_2 t' - \mathbf{k}'_2\cdot\mathbf{x}' - \alpha(\omega'_2) - \vartheta(\mathbf{k}_2,\lambda_2)] \rangle =$$
$$= \frac{1}{2}\ \operatorname{sen}\alpha(\omega'_2)\,\delta^3(\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}'_2)\,\delta_{\lambda_1\lambda_2},$$

y que,

$$\langle \operatorname{sen}[\omega'_1 t' - \mathbf{k}'_1\cdot\mathbf{x}' - \alpha(\omega') - \vartheta(\mathbf{k}_1,\lambda_1)]\cos[\omega'_2 t' - \mathbf{k}'_2\cdot\mathbf{x}' - \vartheta(\mathbf{k}_2,\lambda_2)] \rangle =$$
$$= -\ \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha(\omega'_2)\,\delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\,\delta_{\lambda_1\lambda_2},$$

para poder hacer una suma sobre λ y una integral sobre $\mathbf{k}$. Para sumar sobre las polarizaciones se usa la siguiente propiedad:

$$\sum_{\lambda} \varepsilon_i(\mathbf{k},\lambda)\varepsilon_j(\mathbf{k},\lambda) = \delta_{ij} - \ \frac{k_i k_j}{k}\ ,$$

además, transformando todas las cantidades al sistema primado, se llega a:

$$\langle \mathcal{F}'_x \rangle = \int d^3k' \, \frac{3}{4} \, \frac{\Gamma^2 c^3 \omega'^3}{(\omega_o'^2 - \omega'^2)^2 + \Gamma^2 \omega'^6} \, \frac{c^3}{\omega'^2} \left[\rho(\omega', T) + \beta\omega' \frac{\partial \rho(\omega', T)}{\partial \omega'} \right] \times$$

$$\times \left[k'_x - \frac{k'_x k_z'^2}{k'^2} - 3\beta \, \frac{k_x'^2}{k'} + 3\beta \, \frac{k_x'^2 k_z'^2}{k'^3} \right].$$

En este resultado se ha usado la ecuación (II.7), y para cambiar $\rho(\omega,T)$ a que dependa de la frecuencia propia del oscilador ω', se hizo una expansión en serie de Taylor:

$$\rho(\omega,T) \simeq \rho(\omega',T) + \frac{\partial \rho(\omega',T)}{\partial \omega'} \, (\omega - \omega'),$$

o bien:

$$\rho(\omega,T) \simeq \rho(\omega',T) + \beta \, \frac{k'_x}{k'} \omega' \, \frac{\partial \rho(\omega',T)}{\partial \omega'}.$$

[illegible], una vez integrado [illegible] ángulos, [illegible]:

$$\langle \mathcal{F}'_x \rangle = \text{[illegible]} \int_0^\infty \frac{d\omega' \; \omega'^4}{(\omega_o'^2 - \omega'^2)^2 + \Gamma^2 \omega'^6} \left[\rho(\omega', T) - \frac{1}{3} \, \omega' \frac{\partial \rho(\omega', T)}{\partial \omega'} \right].$$

[illegible] que se cumple que $\Gamma\omega_o \ll 1$, la parte del [illegible] del término $\mathrm{sen}^2\alpha(\omega')$ tendrá un [illegible] muy parecido al de una función delta centrada en ω'_o. Usando esta propiedad, podemos substituir ω' por ω'_o en todos los términos que no contengan la diferencia de cuadrados entre las ω y, una vez hecho esto, cambiamos de variable por $x = (\omega'^2 - \omega_o'^2)/\Gamma\omega_o'^3$ para así obtener:

$$\langle \mathcal{F}'_x \rangle = -\frac{6\pi\Gamma c\upsilon}{5}\left[\rho(\omega'_o,T) - \frac{1}{3}\omega_o \frac{\partial\rho(\omega o',T)}{\partial\omega o'}\right]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1} ,$$

donde, además se ha extendido el límite inferior de la integral hasta $-\infty$. Esta última integral[1] sobre x es igual a π, entonces:

$$\langle \mathcal{F}'_x \rangle = -\frac{6\pi^2\Gamma c\upsilon}{5}\left[\rho(\omega_o',T) - \frac{1}{3}\omega'_o \frac{\partial\rho(\omega o',T)}{\partial\omega o'}\right],$$

de aquí, la expresión para R queda:

$$R = \frac{6\pi^2}{5}\Gamma c\left[\rho(\omega'_o,T) - \frac{1}{3}\omega'_o \frac{\partial\rho(\omega o,T)}{\partial\omega'_o}\right].$$

[1]T.H.Boyer, *Phys. Rev.*, 182, num. 5, 1374-1383 (1969), ecuaci^n (50).

APENDICE B. CALCULO DE LA ECUACION (II.10) DEL TEXTO.

Para hacer este cálculo necesitamos encontrar primero las expresiones de $\partial Ez/\partial x$ y de f, que aparecen en la ecuación (II.9).

Como estamos en el sistema en reposo de la partícula, podemos usar la ecuación (II.4a) para describir al campo eléctrico y, usando esto en la ecuación (II.3), encontramos la siguiente expresión para el momento dipolar:

$$f = \sum_{\lambda=1}^{2} \int d^3k \; \frac{3c^3}{2\omega^3} \; \varepsilon_z(\mathbf{k},\lambda) \, h(\omega_k,T) \, \operatorname{sen}\alpha(\omega) \; \cos[(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \alpha(\omega) - \theta(\mathbf{k},\lambda)],$$

con $\alpha(\omega)$ definida igual que antes sólo que ahora sin primas.

En su artículo de 1910, Einstein y Hopf[1], derivan, basándose en cálculos tomados de un artículo anterior[2], un resultado que muestra que $E_z(\mathbf{x},t)$ y $\partial E_z(\mathbf{x},t)/\partial x$ son independientes entre sí al integrar sobre el tiempo; aprovechando esto podemos escribir la segunda de estas cantidades con una fase diferente a $\theta(\mathbf{k},\lambda)$, esto es:

$$\frac{\partial Ez}{\partial x} = \sum_{\lambda=1}^{2} \int d^3k \; \varepsilon_z(\mathbf{k},\lambda) \, h(\omega_k,T) \, k_x \; \cos[\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \xi(\mathbf{k},\lambda)],$$

debido a que sólo las consideraremos dentro de una integral temporal. Entonces, substituyendo en la ecuación (II.9) para el momento, se obtiene:

$$\Delta=\int_0^{\tau} dt \sum_{\lambda_1=1}^{2} \sum_{\lambda_2=1}^{2} \int d^3k_1 \int d^3k_2 \, \varepsilon_z(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\, h(\omega_1,T)\, k_{1x} \times$$

$$\times \frac{3c^3}{2\omega^3}\, \varepsilon_z(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\, h(\omega_2,T) \operatorname{sen}\alpha(\omega_2) \times$$

$$\times \cos[\omega_1 t-\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}-\zeta(\mathbf{k}_1,\lambda_1)] \cos[\omega_2 t-\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{x}-\alpha(\omega_2)-\vartheta(\mathbf{k}_2,\lambda_2)].$$

Al escoger el origen de coordenadas en la partícula, se pueden eliminar los términos en $\mathbf{x}$; así, la integral sobre el tiempo da:

$$\int_0^{\tau} dt \cos(\omega_1 t-\zeta_1)\cos(\omega_2 t-\vartheta_2-\alpha_2)=$$

$$=\left[\frac{1}{\omega_1+\omega_2} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}\,\tau\right) \cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}\,\tau-\zeta_1-\vartheta_2-\alpha_2\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\omega_1-\omega_2} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\,\tau\right) \cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\,\tau+\zeta_1-\vartheta_2-\alpha_2\right)\right], \qquad (B.1)$$

donde se ha puesto $\zeta_1\equiv\zeta(\mathbf{k}_1,\lambda_1)$, $\vartheta_2\equiv\vartheta(\mathbf{k}_2,\lambda_2)$ y $\alpha_2\equiv\alpha(\omega_2)$. Substituyendo en la anterior, se obtiene:

$$\Delta=\sum_{\lambda_1=1}^{2} \sum_{\lambda_2=1}^{2} \int d^3k_1 \int d^3k_2 \; \varepsilon_z(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\, h(\omega_1,T)\, k_{1x} \times$$

$$\times \frac{3c^3}{2\omega^3}\, \varepsilon_z(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\, h(\omega_2,T) \operatorname{sen}\alpha(\omega_2) \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\omega_1+\omega_2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\tau\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\tau - \xi_1 - \theta_2 - \alpha_2\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\tau\right)\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\tau + \xi_1 - \theta_2 - \alpha_2\right)\right] ,$$

el factor dentro del paréntesis cuadrado es el único que depende de las fases. Gracias a que el campo de radiación sufre fluctuaciones al azar, esperamos que el promedio de Δ se anule; es el promedio del cuadrado de este momento el que es distinto de cero. Así que, elevando al cuadrado, promediando sobre las fases y sumando sobre las polarizaciones en la última expresión, se obtiene, para las fluctuaciones del momento:

$$\langle \Delta^2 \rangle = \int d^3k_1 \int d^3k_2 \left(1 - \frac{k_{1z}^2}{k_1^2}\right) h^2(\omega,T)\, k_{1x}^2\, \frac{9c^{\sigma}}{4\omega_2^{\sigma}} \left(1 - \frac{k_{2z}^2}{k_2^2}\right) h^2(\omega_2,T)\,\mathrm{sen}^2\alpha(\omega_2)$$

$$\times \left[\frac{1}{(\omega_2+\omega_1)^2}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}\tau\right) + \frac{1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\tau\right)\right] \times \frac{1}{2},$$

donde se ha usado, para los promedios sobre las fases, que:

$$\left\langle \cos\left[\frac{\omega_2 \pm \omega_1}{2}\tau \mp \xi(\mathbf{k}_1,\lambda_1) - \theta(\mathbf{k}_2,\lambda_2) - \alpha_2\right] \times \right.$$

$$\left. \times \cos\left[\frac{\omega_2' \pm \omega_1'}{2}\tau \pm \xi(\mathbf{k}_1',\lambda_1) - \theta(\mathbf{k}_2',\lambda_2') - \alpha_2\right]\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\,\delta^3(\mathbf{k}_1'-\mathbf{k}_1)\,\delta_{\lambda_1\lambda_1'}\,\delta^3(\mathbf{k}_2'-\mathbf{k}_2)\,\delta_{\lambda_2\lambda_2'};$$

y el promedio de los términos cruzados se anula; además, para sumar sobre las polarizaciones se usó:

$$\sum \varepsilon_i(\mathbf{k},\lambda)\varepsilon_j(\mathbf{k},\lambda) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2};$$

así, el factor $\frac{1}{2}$ del final proviene del promedio sobre las fases. En el último término de la ecuación para las fluctuaciones, podemos despreciar el sumando que contiene al factor $(\omega_2+\omega_1)^{-1}$ en comparación de $(\omega_2-\omega_1)^{-1}$; si, además cambiamos a coordenadas esféricas, integramos sobre la parte angular y usamos que $k=\omega/c$, se obtiene:

$$\langle\Delta^2\rangle = \int\!\!\int d\omega_1 \omega_1^2 d\omega_2 \omega_2^2 \frac{16\pi^2}{5\omega_2^6} \frac{\omega_1^2}{c^2} \mathcal{A}^2(\omega_1,T)\mathcal{A}^2(\omega_2,T)\, \mathrm{sen}^2\alpha(\omega_2) \times$$

$$\times \frac{1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\, \mathrm{sen}^2\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\tau\right).$$

El último factor se puede tomar como una función muy estrecha al considerarla dentro de la integral; así, nos lleva, al integrar sobre ω_2, a poner $\omega_1=\omega_2=\omega$ y luego, con la ayuda de la integral[9]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}^2\tau\zeta}{\zeta^2}\, d\zeta = \pi\tau, \qquad (B.2)$$

a obtener:

$$\langle \Delta^2 \rangle = \frac{4\pi^3}{5c^2}\, \tau \int_0^{\infty} d\omega\ \hbar^4(\omega,T)\ \mathrm{sen}^2\alpha(\omega).$$

Una vez hecho esto aprovechamos que $\mathrm{sen}^2\alpha(\omega)$ también se puede tomar como una función delta si $\Gamma\omega_o \ll 1$ que nos permite escribir $\omega=\omega_o$; así, haciendo un cambio de variable y usando la integral[9]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^2+1} = \pi,$$

y también la ecuación (II.7), se llega, finalmente, a:

$$\langle \Delta^2 \rangle = \frac{4\pi^4 c^4 \Gamma\tau}{5\omega_o^2}\, \rho^2(\omega_o,T). \qquad \text{(B.3)}$$

para las fluctuaciones del momento transferido a la partícula.

[1]S.Bergia, P.Lugli, N,Zamboni, *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, **4**, 295-318 (1979).

[2]A.Einstein y L.Hopf, *Ann. Phys.*, **33**, 1096 (1910). Cit. en T.H.Boyer, *Phys. Rev.*, **182**, no. 5, pag. 1374 (1969).

[3]T.H.Boyer, op. cit.