

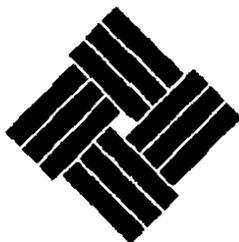
881201

UNIVERSIDAD ANAHUAC

5  
207

ESCUELA DE ACTUARIA

Con Estudios Incorporados a la  
Universidad Nacional Autónoma de México



**GRAFOS BORBOSOS: UNA APLICACION**

**T E S I S**

Que Para Obtener el Título de  
A C T U A R I O  
P r e s e n t a :  
MARIA DEL ROCIO GARCIA LOPEZ

México, D.F.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

1988



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **INDICE**

	<b>Página</b>
<b>INTRODUCCION.</b>	<b>1</b>
<b>CAPITULO I. SUBCONJUNTOS BORROSOS.</b>	
Definiciones.	5
Operaciones Algebraicas.	6
Leyes del Algebra de los Subconjuntos Borrosos.	8
Subconjuntos Clasicos de Nivel $\alpha$ .	10
<b>CAPITULO II. RELACIONES BORROSAS Y GRAFOS BORROSOS.</b>	
Relaciones Borrosas.	13
Definiciones.	13
Operaciones Algebraicas de las Relaciones Borrosas.	16
Propiedades de las Relaciones Borrosas.	19
Grafos Borrosos Dirigidos y no Dirigidos.	24
Subgrafos, Cortes y Grafos de Nivel $\alpha$ .	26
Propiedades de los Grafos Borrosos.	31
Caminos, Circuitos, Lazos, Cadenas, Ciclos y Arboles en los Grafos Borrosos. Grafos Borrosos Conexos.	32
<b>CAPITULO III. CIERRE TRANSITIVO Y REBANANTES.</b>	
Cierre Transitivo.	38
Rebanantes.	42
- Algoritmo para la Obtención de un Rebanante Estrecho.	49

**CAPITULO IV. APLICACION DE LOS GRAFOS BORROSOS AL ANALISIS DE CONGLOMERADOS.**

El Problema del Análisis de Conglomerados.	54
Procedimiento de $\epsilon$ -Conectividad.	
- Bases Teóricas.	55
- Algoritmo.	58
- Comparación con el Procedimiento Clásico de Enlace Simple.	61
Procedimiento de $\tau$ -Grados de Conectividad.	
- Bases Teóricas.	65
- Algoritmo.	66
- Comparación con el Procedimiento Clásico de k-Enlaces.	70
Procedimiento de $\tau$ -Aristas de Conectividad.	
- Bases Teóricas.	71
- Algoritmo.	75
- Comparación con el Procedimiento Clásico de k-Aristas.	77

**CAPITULO V. UN EJEMPLO: ADMINISTRACION DE GRUPOS.**

Administración de Grupos.	80
Planteamiento.	82
Procedimiento de $\epsilon$ -Conectividad.	85
- Comparación con el Procedimiento de Enlace Simple.	85
Procedimiento de $\tau$ -Grados de Conectividad.	88
- Comparación con el Procedimiento de k-Enlaces de Conectividad.	90
Procedimiento de $\tau$ -Aristas de Conectividad.	96
- Comparación con el Procedimiento de k-Aristas de Conectividad.	100

	Página
CONCLUSIONES.	101
APENDICE I. OBTENCION DEL CORTE DE PESO MINIMO DE UN GRAFO BORROSO SIMETRICO POR EL METODO DE FLUJO MAXIMO.	
Introducción.	103
Problema de Flujo Máximo.	103
- Algoritmo de Ford-Fulkerson.	104
Problema de Flujo Máximo Multiterminal.	105
APENDICE II. PROGRAMA EN PASCAL DE LOS TRES PROCEDIMIENTOS BORROSOS PARA EL ANALISIS DE CONGLOMERADOS.	121
BIBLIOGRAFIA.	131

## INTRODUCCION

Es más frecuente encontrar muchas clases de objetos, las cuales no tienen un criterio de membresía preciso. Por ejemplo, el conjunto de los rascacielos claramente incluye el Empire State, el Madison Building y la Torre Latinoamericana entre otros, y excluye edificios de 5, 10 y 15 pisos; pero existen edificios que no sabemos si incluir o no dentro de este conjunto.

Este mismo tipo de ambigüedad existe en el conjunto de los números mucho más grandes que 1, en el conjunto de personas altas, gordas, inteligentes o bonitas, en los cuales la transición de membresía es más bien gradual que brusca, por lo cual no constituyen una clase o conjunto en el sentido matemático usual. Este tipo de clases definidas de una manera imprecisa juegan un papel importante en el pensamiento humano, particularmente en el campo del reconocimiento de congionerados, comunicación de información y abstracción.

Este hecho no fué considerado en las matemáticas hasta 1965 por el profesor Zadeh<sup>1</sup> quien generaliza el concepto de conjunto clásico como la clase de elementos con continuidad en los grados de membresía, denominándolo conjunto borroso. En base a este concepto se ha ido desarrollando una nueva estructura conceptual paralela a la desarrollada en el caso de los conjuntos clásicos, pero generalizada.

Entre los diferentes autores que tratan sobre este tema, existe cierta discrepancia en el término correcto de referirse a estos conjuntos; algunos los denominan conjuntos borrosos mientras que otros los denominan *subconjuntos borrosos*, basándose en que el conjunto de referencia, es decir, el universo, es siempre un conjunto clásico y sus subconjuntos los que son borrosos. Aquí utilizaremos el término de

1. L. A. Zadeh. Department of electrical Engineering and Electronics. Research Laboratory, University of California, Berkeley, California.

*subconjuntos borrosos.*

El objetivo de esta tesis es generalizar los conceptos clásicos de *grafo* y *relación* a partir de la noción de *subconjuntos borrosos* para aplicarlos al *análisis de conglomerados*.

El propósito del análisis de conglomerados consiste en determinar conglomerados (agrupaciones) de objetos semejantes partiendo de una medida de semejanza entre cada par de objetos. Este problema concierne a varias disciplinas, sin embargo es tratado con diferente nombre según la disciplina a que se refiera. Esto ha dado lugar a un sin fin de procedimientos que atacan el problema de conglomerados. En la siguiente tabla se dan 3 ejemplos de procedimientos que se usan en psicología, biología y bibliología respectivamente, explicando cada uno de los problemas a continuación.

DISCIPLINA	OBJETOS	BASE DE LA SEMEJANZA	INTERPRETACION DEL CONGLOLOM.	PROCEDIMIENTO USADO.
a)Psicología	Pruebas	Correlación	Componentes de inteligencia	Análisis factorial
b)Biología	Especies de plantas	Propiedades	Familias de plantas	Taxonomía
c)Biblioteca (Ciencia)	Documentos	Material	Subclasificaciones de biblioteca	Clasificación

a) Existen un conjunto de pruebas psicológicas que miden la capacidad mental de las personas. Se ha visto que algunos pares de pruebas están fuertemente correlacionadas mientras que otras tienen una correlación cercana a cero. Un psicólogo desea hacer agrupaciones de estas pruebas donde las pruebas de cada conglomerado estén altamente correlacionadas entre sí. De esta manera se puede identificar a cada conglomerado como medida de un factor particular de inteligencia.

b) Un biólogo ha reunido diferentes plantas de un área aislada. Mide las propiedades de cada especie de planta y advierte que algunos pares de plantas poseen una semejanza considerable mientras que otras son bastante diferentes. Desea agrupar las plantas en varias familias ajenas, de tal manera que las plantas colocadas en la misma familia deben ser muy semejantes.

c) Un bibliotecario ha reunido una colección de documentos de una disciplina nueva. Ha asignado el grado de material común entre cada par de documentos ya que desea facilitar subclasificaciones de esta disciplina por medio de agrupaciones de libros que contengan material común.

Para que un modelo formal de análisis de conglomerados sea aceptable es necesario que pueda incorporarse información relevante al modelo y que se defina una función apropiada que mida la semejanza entre los objetos. Por otro lado, los resultados obtenidos podrían contradecir las teorías generalmente aceptadas por los investigadores involucrados de la disciplina que se trate, por lo cual el modelo solo es aceptable si los investigadores aprueban el resultado.

El asignar valores numéricos al grado de semejanza entre dos objetos es un problema con cierto grado de dificultad que debe obtenerse según cada una de las disciplinas en las que se utilice el análisis de conglomerados.

La mayoría de los procedimientos clásicos para el análisis de conglomerados están basados en la teoría de relaciones y grafos. Estos consisten en que dado un grafo o matriz de datos, hay que obtener grafos de nivel de algún valor  $\alpha$  y aplicar varias propiedades de conectividad de los mismos para formar conglomerados. Estos procedimientos tienen el problema de que no tratan con los pesos reales de los arcos en los grafos, ya que cualquier peso mayor o igual (menor) que  $\alpha$  es considerado como 1 (0).

En el primer y segundo capítulos de esta tesis se da una introducción<sup>2</sup> a los conceptos básicos y propiedades de la teoría de *subconjuntos borrosos* y a la teoría de *grafos y relaciones borrosas* respectivamente. El tercer capítulo desarrolla las bases para el cuarto capítulo donde se aplica la teoría de grafos y relaciones borrosas al *análisis de conglomerados*, presentándose 3 procedimientos. Primeramente se define en que consiste el problema; posteriormente se extienden varios conceptos de conectividad de los grafos clásicos a los grafos borrosos para explicar los procedimientos:

- procedimiento de  $\epsilon$ -conectividad,
- procedimiento de  $\tau$ -grados de conectividad,
- procedimiento de  $\tau$ -aristas de conectividad,

los cuales son una extensión de los respectivos procedimientos clásicos para el análisis de conglomerados:

- procedimiento de enlace simple,
- procedimiento de k-enlaces,
- procedimiento de k-aristas de conectividad;

concluyendo que es más efectivo el uso de grafos borrosos en la construcción de conglomerados que el uso de la teoría clásica de grafos.

En el quinto capítulo se da un ejemplo teórico resuelto por todos los procedimientos, tanto clásicos como borrosos, dando los resultados gráficamente para poder compararlos fácilmente.

En el Apéndice I se presenta un método para obtener el corte mínimo de un grafo borroso o clásico, necesario para el tercer procedimiento. Este método está basado en la teoría de flujo máximo. Para terminar, en el Apéndice II se proporciona un programa en lenguaje Pascal que resuelve problemas de conglomerados por los tres procedimientos borrosos que se estudian aquí.

2. Si el lector está interesado en mayor información, consúltese la referencia [4].

## CAPITULO I

## SUBCONJUNTOS BORROSOS

## DEFINICIONES

El *subconjunto borroso*  $\underline{A}$  en  $E$  está definido por:

$$\underline{A} = \{ (x, \mu_{\underline{A}}(x)) \mid x \in E \wedge \mu_{\underline{A}}(x) \in [0, 1] \},$$

donde  $\mu_{\underline{A}}$  es llamada *función de membresía* del subconjunto borroso  $\underline{A}$ , la cual asocia cada punto  $x$  del conjunto de referencia  $E$  con un número real del intervalo  $[0, 1]$ , e indica el grado de membresía de  $x$  en  $\underline{A}$ . Esto es, mientras más cerca esté  $\mu_{\underline{A}}(x)$  a la unidad, mayor será el grado de membresía de  $x$  en  $\underline{A}$ .

En el caso de un subconjunto clásico  $B$ , el rango de la función  $\mu_B$  es  $\{0, 1\}$ :  $\mu_B(x)=0$  indica que  $x \notin B$  y  $\mu_B(x)=1$  indica que  $x \in B$ .

Denotaremos a los subconjuntos borrosos por  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$ , etc., y aunque los subconjuntos clásicos son un caso particular de estos, se denotarán por  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , etc., para indicar su condición peculiar.

A continuación se dan varias definiciones de la teoría de conjuntos borrosos que son una extensión obvia de la teoría de conjuntos clásica:

El *conjunto universal*  $E$ , es aquel que su función de membresía es idéntica a 1:

$$E = \{ (x, \mu_E(x)) \mid x \in E \wedge \mu_E(x) = 1, \forall x \in E \};$$

indica el conjunto de referencia.

Un *subconjunto borroso* es *vacío*,  $\underline{B}$ , si y solo si su función de membresía es idéntica a 0:

$$\underline{B} = \{ (x, \mu_{\underline{B}}(x)) \mid x \in E \wedge \mu_{\underline{B}}(x) = 0, \forall x \in E \};$$

es el conjunto que no contiene ningún elemento del conjunto de referencia.

Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos borrosos de un conjunto  $E$ :

Se dirá que  $A$  y  $B$  son *iguales*,  $A=B$ , si y solo si tienen la misma función de membresía:

$$\mu_A(x) = \mu_B(x), \quad \forall x \in E.$$

Se dirá que el subconjunto borroso  $A$  está *incluido* en  $B$ , o equivalentemente que  $A$  es *subconjunto* de  $B$ ,  $A \subset B$ , si y solo si:

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \quad \forall x \in E;$$

intuitivamente se puede interpretar como que cada  $x \in E$  pertenece más al subconjunto borroso  $B$  que al  $A$ .

### OPERACIONES ALGEBRAICAS

Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos borrosos de un conjunto  $E$ :

El *complemento* del subconjunto borroso  $A$ , denotado por  $\bar{A}$  se define como el subconjunto borroso con función de membresía

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in E.$$

La *unión* de  $A$  y  $B$  se define como el subconjunto borroso de  $E$ , denotado por  $A \cup B$  con función de membresía

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad \forall x \in E;$$

y es el subconjunto borroso menor que contiene a  $A$  y a  $B$ .

La *intersección* de  $A$  y  $B$  se define como el subconjunto borroso de  $E$ , denotado por  $A \cap B$ , con función de membresía

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad \forall x \in E;$$

y es el subconjunto borroso mayor que está contenido tanto en  $A$  como en  $B$ .

Se dice que  $A$  y  $B$  son *disjuntos* si  $A \cap B = \emptyset$ .

Se define la *diferencia* de  $A$  y  $B$ ,  $A-B$ , como el subconjunto borroso de  $E$  con función de membresía

$$\mu_{A-B}(x) = \mu_A \cap \bar{\mu}_B(x), \quad \forall x \in E;$$

Nótese que en general  $A-B \neq B-A$ .

EJEMPLO 1:

Sea  $E$  el conjunto universal o de referencia definido por:

$$E = \{ (a,1), (b,1), (c,1), (d,1), (e,1), (f,1) \};$$

el conjunto vacío es:

$$\emptyset = \{ (a,0), (b,0), (c,0), (d,0), (e,0), (f,0) \}.$$

Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  los siguientes subconjuntos borrosos de  $E$ :

$$A = \{ (a,0), (b,0.2), (c,0.4), (d,0.6), (e,0.8), (f,1) \},$$

$$B = \{ (a,1), (b,0.8), (c,0.6), (d,0.4), (e,0.2), (f,0) \},$$

$$C = \{ (a,0), (b,0.1), (c,0.2), (d,0.3), (e,0.4), (f,0.5) \};$$

entonces

$$A = \bar{B} \quad \text{y}$$

$$C \subset A.$$

$$A \cup B = \{ (a,1), (b,0.8), (c,0.6), (d,0.6), (e,0.8), (f,1) \}$$

$$A \cap B = \{ (a,0), (b,0.2), (c,0.4), (d,0.4), (e,0.2), (f,0) \}$$

podemos observar que en este caso tenemos

$$A \cup B = \overline{(A \cap B)}$$

además

$$C-A = C \cap \bar{A} = C \cap B = \{ (a,0), (b,0.1), (c,0.2), (d,0.3), (e,0.2), (f,0) \} \blacksquare$$

## LEYES DEL ALGEBRA DE LOS SUBCONJUNTOS BORROSOS

Las operaciones de unión, intersección y complemento entre subconjuntos borrosos cumplen con algunas leyes del álgebra de conjuntos clásicos; sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  subconjuntos borrosos en  $E$ . En esta sección se da una extensión de estas identidades a los subconjuntos borrosos, y pueden fácilmente demostrarse mostrando que las funciones de membresía correspondientes son idénticas.

1. *Leyes de idempotencia:*

a)  $A \cup A = A$ .

b)  $A \cap A = A$ .

Demostración:

a)  $\mu_{A \cup A}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_A(x)\} = \mu_A(x) \quad \forall x \in E$ ,

b)  $\mu_{A \cap A}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_A(x)\} = \mu_A(x) \quad \forall x \in E$ .

Q.E.D.

2. *Leyes asociativas:*

a)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ .

b)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ .

Demostración:  $\forall x \in E$ 

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \mu_{A \cup (B \cap C)}(x) &= \max\{\mu_A(x), \max\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\} \\
 &= \max\{\mu_A(x), \mu_B(x), \mu_C(x)\} \\
 &= \max\{\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \mu_C(x)\} \\
 &= \max\{\mu_{A \cup B}(x), \mu_C(x)\} \\
 &= \mu_{(A \cup B) \cap C}(x).
 \end{aligned}$$

b) Similar.

Q.E.D.

3. *Leyes conmutativas:*

a)  $A \cup B = B \cup A$ .

b)  $A \cap B = B \cap A$ .

La demostración es obvia.

4. *Leyes distributivas:*

a)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

**Demostración:**

Tenemos 6 posibilidades:

$$\begin{array}{lll} \mu_A(x) \geq \mu_B(x) \geq \mu_C(x); & \mu_B(x) \geq \mu_A(x) \geq \mu_C(x); & \mu_C(x) \geq \mu_A(x) \geq \mu_B(x); \\ \mu_A(x) \geq \mu_C(x) \geq \mu_B(x); & \mu_B(x) \geq \mu_C(x) \geq \mu_A(x); & \mu_C(x) \geq \mu_B(x) \geq \mu_A(x). \end{array}$$

Puede verificarse fácilmente que para todos los casos se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \text{a) } \mu_{A \cup (B \cap C)}(x) &= \max \{ \mu_A(x), \min \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \} \\ &= \min \{ \max \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \max \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \} \\ &= \mu_{(A \cup B) \cap (A \cup C)}(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \mu_{A \cap (B \cup C)}(x) &= \min \{ \mu_A(x), \max \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \} \\ &= \max \{ \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \min \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \} \\ &= \mu_{(A \cap B) \cup (A \cap C)}(x). \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

**5. Leyes de identidad:**

$$\begin{array}{ll} \text{a) } A \cup B = A, & \text{b) } A \cap E = A, \\ \text{c) } A \cup E = E, & \text{d) } A \cap B = B. \end{array}$$

**Demostración:**

Dado que  $\mu_E(x) = 1$ ;  $\mu_B(x) = 0$ ;  $\mu_A(x) \in [0, 1]$ ,  $\forall x \in E$ , se tiene que:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \mu_{A \cup B}(x) = \max \{ \mu_A(x), 0 \} = \mu_A(x); \\ \text{b) } \mu_{A \cap E}(x) = \min \{ \mu_A(x), 1 \} = \mu_A(x); \\ \text{c) } \mu_{A \cup E}(x) = \max \{ \mu_A(x), 1 \} = 1 = \mu_E(x); \\ \text{d) } \mu_{A \cap B}(x) = \min \{ \mu_A(x), 0 \} = 0 = \mu_B(x). \end{array}$$

*Q.E.D.*

**6. Leyes de complemento:**

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \overline{\overline{A}} = A, & \text{b) } \overline{\overline{E}} = E; \quad \overline{\overline{B}} = B. \end{array}$$

**Demostración:**

$$\text{a) } \mu_{\overline{\overline{A}}}(x) = 1 - \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - (1 - \mu_A(x)) = 1 - 1 + \mu_A(x) = \mu_A(x);$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \mu_{\bar{E}}(x) &= 1 - \mu_E(x) = 1 - 1 = 0 = \mu_{\emptyset}(x); \\ \mu_{\bar{B}}(x) &= 1 - \mu_B(x) = 1 - 0 = 1 = \mu_E(x). \end{aligned}$$

Q.E.D.

7. *Leyes de Morgan:*

a)  $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B};$

b)  $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}.$

Demostración:

Puede verificarse fácilmente que para cualesquiera de las 2 posibilidades, ya sea  $\mu_A(x) \geq \mu_B(x)$  o bien  $\mu_A(x) < \mu_B(x)$ , se cumple con:

a)  $\mu_{\overline{(A \cup B)}}(x) = 1 - \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \min(1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)) = \mu_{\bar{A} \cap \bar{B}}(x);$

b)  $\mu_{\overline{(A \cap B)}}(x) = 1 - \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \max(1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)) = \mu_{\bar{A} \cup \bar{B}}(x).$

Q.E.D.

Es decir, los subconjuntos borrosos cumplen todas las leyes del álgebra de los conjuntos clásicos excepto:

$$A \cup \bar{A} = E;$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset,$$

las cuales únicamente se cumplen cuando  $A = E$  ó  $A = \emptyset$ .

### SUBCONJUNTOS CLÁSICOS DE NIVEL $\alpha$ .

Una de las ventajas que tiene trabajar con conjuntos clásicos es la exactitud con la que se hace. Como se mencionó anteriormente la teoría de los subconjuntos borrosos da un acercamiento mayor a la realidad. Existe un punto intermedio entre subconjuntos borrosos y clásicos, lo cual se hace ver a continuación.

Sea  $\alpha \in [0, 1]$ , se llama *subconjunto clásico de nivel  $\alpha$*  de un subconjunto borroso  $A$ , al conjunto clásico

$$A_\alpha = \{ x \mid \mu_A(x) \geq \alpha \}.$$

Este conjunto clásico exige que todos sus elementos tengan un grado de pertenencia en  $\underline{A}$  de al menos  $\alpha$ .

PROPIEDAD.

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \Rightarrow A_{\alpha_1} \subset A_{\alpha_2}$$

Demostración:

P.D. Dadas  $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ , se cumple  $\forall x \in A_{\alpha_1} \Rightarrow x \in A_{\alpha_2}$ .

$$\text{Sea } x \in A_{\alpha_1} \Rightarrow \mu_{\underline{A}}(x) \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \Rightarrow x \in A_{\alpha_2}$$

*Q.E.D.*

TEOREMA DE DESCOMPOSICION.

*Todo subconjunto borroso  $\underline{A}$  puede descomponerse en la siguiente forma:*

$$\underline{A} = \bigcup_{\alpha} (\alpha A_{\alpha}); \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

donde para  $\forall x$ ,  $\alpha A_{\alpha}$  está definido por  $\mu_{\alpha A_{\alpha}}(x) = \alpha [\mu_{\underline{A}}(x)]$ .

Demostración:

$$\mu_{A_{\alpha}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_{\underline{A}}(x) \geq \alpha \\ 0 & \text{si } \mu_{\underline{A}}(x) < \alpha \end{cases}$$

$$\mu_{\bigcup_{\alpha} (\alpha A_{\alpha})}(x) = \max_{\alpha} [\alpha \mu_{A_{\alpha}}(x)] = \max_{\alpha \leq \mu_{\underline{A}}(x)} [\alpha] = \mu_{\underline{A}}(x).$$

*Q.E.D.*

EJEMPLO 2:

Sea  $\underline{A}$  el siguiente subconjunto borroso:

$$\underline{A} = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0), (x_3, 0.5), (x_4, 1), (x_5, 0.7)\}$$

Tenemos entonces los siguientes subconjuntos clásico de nivel  $\alpha$ :

$$A_{0.1} = A_{0.2} = \{(x_1, 1), (x_2, 0), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 1)\},$$

$$A_{0.3} = A_{0.4} = A_{0.5} = \{(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 1)\},$$

$$A_{0.6} = A_{0.7} = \{(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0), (x_4, 1), (x_5, 1)\},$$

$$A_{0.6} = A_{0.9} = A_1 = \{(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0), (x_4, 1), (x_5, 0)\}.$$

Por el teorema de descomposición,  $\underline{A}$  puede descomponerse en los subconjuntos borrosos  $\alpha A_\alpha$  cuya unión nos da  $\underline{A}$ :

$$\begin{aligned} \bigcup_{\alpha} (\alpha A_{\alpha}) &= (0.2A_{0.2}) \cup (0.5A_{0.5}) \cup (0.7A_{0.7}) \cup (1A_1) \\ &= \{(x_1, 0.2), (x_2, 0), (x_3, 0.2), (x_4, 0.2), (x_5, 0.2)\} \cup \\ &\quad \{(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0.5), (x_4, 0.5), (x_5, 0.5)\} \cup \\ &\quad \{(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0), (x_4, 0.7), (x_5, 0.7)\} \cup \\ &\quad \{(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0), (x_4, 1), (x_5, 0)\} \\ &= \{(x_1, 0.2), (x_2, 0), (x_3, 0.5), (x_4, 1), (x_5, 0.7)\} \\ &= \underline{A} \blacksquare \end{aligned}$$

## CAPÍTULO II

### RELACIONES BORROSAS Y GRAFOS BORROSOS

#### RELACIONES BORROSAS

En la teoría de conjuntos clásica, una relación se define como un conjunto de pares ordenados; por ejemplo, el conjunto de todos los pares ordenados de números reales  $x$  y  $y$ , tales que  $x \geq y$ . Esta relación  $R$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ :

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq y\}.$$

En el contexto de los subconjuntos borrosos, podemos definir *relaciones borrosas* tales como: "el número  $x$  es mucho mayor (o mucho menor) que el número  $y$ ", "la persona  $x$  es más inteligente que la persona  $y$ ", "el objeto  $x$  se parece al objeto  $y$ ", etc., en las cuales los elementos del conjunto de referencia - números, personas u objetos - pueden estar totalmente relacionados, más o menos relacionados o no relacionados. Las relaciones borrosas representan situaciones menos precisas pero que se encuentran con más frecuencia.

#### DEFINICIONES

Una *relación borrosa binaria*  $\underline{R}$  en  $X \times Y$  es un subconjunto borroso del espacio producto  $X \times Y$  caracterizado por la función de membresía  $\mu_{\underline{R}}: X \times Y \rightarrow [0,1]$ ; es decir:

$$\underline{R} = \{ ((x,y), \mu_{\underline{R}}(x,y)) \mid x \in X, y \in Y, \mu_{\underline{R}}(x,y) \in [0,1] \}.$$

Para cada  $x \in X$  y  $y \in Y$ ,  $\mu_{\underline{R}}(x,y)$  se puede interpretar como la fuerza de la relación existente entre  $x$  y  $y$ .

En el caso en que  $X=Y$ , se dice que  $\underline{R}$  es una *relación borrosa binaria en  $X$* .

## EJEMPLO 3:

Sean  $X=Y=\mathbb{R}^+$ , donde  $\mathbb{R}^+$  representa a los números reales no negativos, y sean  $x, y \in \mathbb{R}^+$ . Consideremos la relación borrosa  $R$  "x es mucho más grande que y",  $x \gg y$ . Supongamos la siguiente función de membresía:

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < y, \\ 1 - e^{-x/y} & \text{si } x \geq y. \end{cases}$$

tenemos entonces que si

$$\begin{array}{ll} x < y & \mu_R(x, y) = 0, \\ x = y & \mu_R(x, y) = 1 - e^0 = 0, \\ x = 2y & \mu_R(x, y) = 1 - e^{-1} = 0.6321, \\ x = 3y & \mu_R(x, y) = 1 - e^{-2} = 0.86456, \\ x = 6y & \mu_R(x, y) = 1 - e^{-5} = 0.993 \end{array}$$

y solamente cuando  $x$  es infinitamente mayor que  $y$ , es decir cuando  $x/y \rightarrow \infty$ , se tendrá que  $\mu_R(x, y) \rightarrow 1$ .

Vemos que es una función de membresía adecuada, ya que cuando  $x < y$ , nos indica que  $x$  y  $y$  no están relacionados y que conforme  $x$  crece con respecto a  $y$ , va aumentando la fuerza de la relación borrosa  $R$  existente entre estos. Además vemos que cumple con el requisito de que  $\mu_R(x, y) \in [0, 1]$ :

Cuando  $x < y$  es obvio que se cumple; para el caso de  $x \geq y$  tenemos que

$$0 \leq 1 - e^{-x/y} \leq 1 \iff -1 \leq e^{-x/y} \leq 0 \iff 1 \geq e^{-x/y} \geq 0.$$

La desigualdad de la derecha es obvia, y en el caso de la desigualdad izquierda, tenemos que para  $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ :

$$x \geq y \iff x/y \geq 1 \iff 1 - x/y \leq 0 \iff 1 \geq e^{-x/y}.$$

Lógicamente esta no es la única manera de definir la función de membresía para esta relación borrosa, pueden existir muchas otras tales como:

$$\mu_{\underline{R}}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \geq x, \\ \frac{1}{1 + \frac{1}{(x-y)^2}} & \text{si } y < x. \end{cases}$$

ya que son expresiones subjetivas, es decir apreciaciones que dependen de la estimación de cada uno ■

Más generalmente, se define una *relación borrosa n-aria en X* como un subconjunto borroso del espacio producto  $X * X * \dots * X = X^n$ . Para tales relaciones la función de membresía es de la forma  $\mu_{\underline{R}}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , donde  $x_i \in X$ , para  $i=1, 2, \dots, n$ . Por ejemplo, la relación " $x+y < z$ " es una relación borrosa 3-aria.

En lo sucesivo, se tratará exclusivamente de relaciones borrosas binarias, por lo cual se utilizará únicamente el término de relaciones borrosas para designarlas.

Se puede representar una relación borrosa  $\underline{R}$  matricialmente, donde el componente  $(i,j)$  de la matriz borrosa  $\underline{R}$  es  $\mu_{\underline{R}}(x_i, y_j)$ .

EJEMPLO 4:

Sean  $X=\{a,b,c,d\}$ ,  $Y=\{1,2,3\}$  y

$$\underline{R} = \left\{ \begin{array}{l} ((a,1),0.2), ((a,2),0.7), ((a,3),0) \\ ((b,1),0.5), ((b,2),0.1), ((b,3),0) \\ ((c,1),0), ((c,2),0.4), ((c,3),1) \\ ((d,1),0), ((d,2),0.9), ((d,3),0.3) \end{array} \right\}$$

Matricialmente puede representarse  $\underline{R}$  de la siguiente manera:

$$\underline{R} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0.2 & 0.7 & 0 \\ 0.5 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 1 \\ 0 & 0.9 & 0.3 \end{array} \right] \end{array} \end{array} \blacksquare$$

Dado que una relación borrosa es un subconjunto borroso del espacio producto  $X \times Y$ , se definen también sus subconjuntos clásicos de nivel, los cuales son relaciones clásicas:

Sea  $R$  una relación borrosa de  $X$  a  $Y$ . Llamaremos *relación clásica de nivel*  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0,1]$ , a la relación  $R_\alpha$  dada por:

$$R_\alpha = \{ (x,y) \mid \mu_R(x,y) \geq \alpha \}.$$

### OPERACIONES ALGEBRAICAS DE RELACIONES BORROSAS.

Como subconjuntos borrosos, en las relaciones borrosas se definen además de las operaciones descritas en el capítulo anterior, las siguientes:

*Inversa* Dada una relación borrosa  $R$  en  $X \times Y$ , su *relación borrosa inversa* es en  $Y \times X$ , se denota por  $R^{-1}$  y tiene como función de membresía  $\mu_{R^{-1}}(y,x) = \mu_R(x,y)$ ,  $\forall (x,y) \in X \times Y$ . Es decir, la relación borrosa inversa  $R^{-1}$  es la misma relación borrosa  $R$  pero vista al revés: en lugar de ser en  $X \times Y$  es en  $Y \times X$ . Por ejemplo, si  $R$  es la relación borrosa en  $\mathbb{R}^2$  " $x > y$ ", entonces  $R^{-1}$  también es una relación borrosa en  $\mathbb{R}^2$  y esta dada por la proposición " $y < x$ " que se basa en  $R$ .

*Composición* Existen varias formas de definir la composición de relaciones borrosas, pero la siguiente es la más usual:

Sean  $R$  y  $S$  dos relaciones borrosas en  $X \times Y$  y en  $Y \times Z$  respectivamente, entonces la composición de  $R$  y  $S$ , denotada por  $S \circ R$ , es la relación borrosa en  $X \times Z$  con función de membresía

$$\mu_{S \circ R}(x,z) = \max_{y \in Y} \{ \min(\mu_R(x,y), \mu_S(y,z)) \} \quad \forall (x,z) \in X \times Z.$$

Dadas las representaciones matriciales de  $R$  y  $S$  se puede obtener la de  $S \circ R$  por medio de una operación análoga a la multiplicación usual de matrices: en lugar de multiplicar los componentes de las matrices se

escoge el mínimo de estos y en lugar de sumar estos resultados, se escoge el máximo.

**EJEMPLO 5:**

Sean  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$  y  $Z = \{z_1, z_2\}$ . Sean también  $R$  y  $S$  las relaciones borrosas en  $X * Y$  y en  $Y * Z$  respectivamente, cuyas representaciones matriciales son:

$$R = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.4 & 0.9 & 0.9 & 1 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad S = \begin{matrix} & z_1 & z_2 \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 1 & 0.9 \\ 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\underline{S \circ R}(x, z) = \max_{y_i} \{ \min(\mu_R(x, y_i), \mu_S(y_i, z)) \}.$$

A continuación se calcula el valor de  $\mu_{\underline{S \circ R}}(x_1, z_1)$ :

$$\begin{aligned} \text{para } y_1: & \min(\mu_R(x_1, y_1), \mu_S(y_1, z_1)) = \min\{0.4, 0.2\} = 0.2 \\ y_2: & \min(\mu_R(x_1, y_2), \mu_S(y_2, z_1)) = \min\{0.9, 1\} = 0.9 \\ y_3: & \min(\mu_R(x_1, y_3), \mu_S(y_3, z_1)) = \min\{0.9, 0.3\} = 0.3 \\ y_4: & \min(\mu_R(x_1, y_4), \mu_S(y_4, z_1)) = \min\{1, 0.5\} = 0.5 \end{aligned}$$

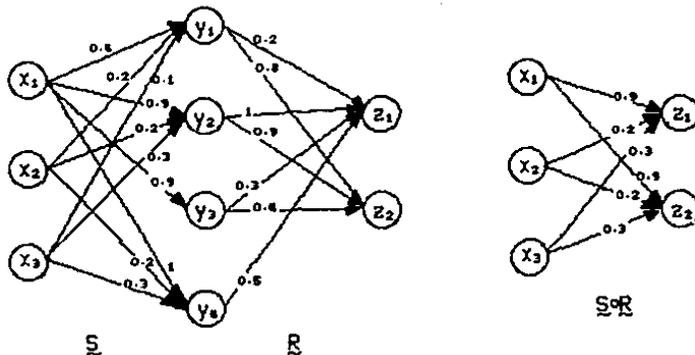
$$\therefore \mu_{\underline{S \circ R}}(x_1, z_1) = \max\{0.2, 0.9, 0.3, 0.5\} = 0.9$$

De igual manera se obtienen los valores de  $\mu_{\underline{S \circ R}}(x, z)$  para los demás valores de  $x$  y de  $z$ , obteniéndose la siguiente representación matricial para  $\underline{S \circ R}$ :

$$\underline{S \circ R} = \begin{matrix} & z_1 & z_2 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 \\ 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix} \end{matrix} \blacksquare$$

La relación borrosa compuesta  $\underline{S \circ R}$  busca la máxima relación posible entre los elementos de  $X$  y de  $Z$  basándose en los datos que proporcionan

$\underline{R}$  y  $\underline{S}$ , usando como intermediario a un elemento de  $Y$ . La forma como hace esto es, dadas una  $x \in X$  y una  $z \in Z$ , toma como intermediario a  $y_i \in Y$ . Puede ser que  $x$  esté muy relacionada con  $y_1$ , pero si  $y_1$  no está muy relacionada con  $z$  entonces  $x$  no puede estar muy relacionada con  $z$  utilizando como intermediario a  $y_1$ ; es por esto por lo que la relación que existe entre  $x$  y  $z$  a través de  $y_i$  es el mínimo entre  $\mu_{\underline{R}}(x, y_i)$  y  $\mu_{\underline{S}}(y_i, z)$ . De esta manera busca la relación que existe entre  $x$  y  $z$  utilizando como intermediario a cada  $y \in Y$  y se escoge la relación máxima entre  $x$  y  $z$ . Se hace lo mismo para cada  $x$  con cada  $z$ .



En estas gráficas del ejemplo anterior, supongamos que  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  son conjuntos de ciudades; y que además existen puentes que unen a las ciudades de  $X$  con las de  $Y$ , y las de  $Y$  con las de  $Z$ . Cada puente tiene cierta resistencia al peso, la cual está dada por las relaciones  $\underline{R}$  y  $\underline{S}$ . Entonces  $\underline{S} \circ \underline{R}$  da el máximo peso posible que se puede pasar de las ciudades de  $X$  a las de  $Z$  utilizando como intermediario cualquier ciudad de  $Y$ .

La operación composición es *asociativa*; es decir:  $(\underline{Q} \circ \underline{R}) \circ \underline{S} = \underline{Q} \circ (\underline{R} \circ \underline{S})$ . También es *distributiva con la unión*: para cualesquier relaciones  $\underline{R}$  de  $X$  a  $Y$  y  $\underline{Q}$ ,  $\underline{S}$  de  $Y$  a  $Z$  se cumple

$$\underline{R} \circ (\underline{Q} \cup \underline{S}) = (\underline{R} \circ \underline{Q}) \cup (\underline{R} \circ \underline{S}).$$

Demostración:  $\forall x \in X, \forall z \in Z$ :

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{R} \circ (\underline{Q} \cup \underline{S})}(x,z) &= \max_{y \in Y} \{ \min \{ \mu_{\underline{R}}(x,y), \mu_{\underline{Q} \cup \underline{S}}(y,z) \} \} \\ &= \max_{y \in Y} \{ \min \{ \mu_{\underline{R}}(x,y), \max \{ \mu_{\underline{Q}}(y,z), \mu_{\underline{S}}(y,z) \} \} \} \end{aligned}$$

por distributividad se tiene:

$$\begin{aligned} &= \max_{y \in Y} \left[ \max \left\{ \min \{ \mu_{\underline{R}}(x,y), \mu_{\underline{Q}}(y,z) \}, \min \{ \mu_{\underline{R}}(x,y), \mu_{\underline{S}}(y,z) \} \right\} \right] \\ &= \max_{y \in Y} \left[ \min \{ \mu_{\underline{R}}(x,y), \mu_{\underline{Q}}(y,z) \} \right] \\ &\quad \left[ \min \{ \mu_{\underline{R}}(x,y), \mu_{\underline{S}}(y,z) \} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{(\underline{R} \circ \underline{Q}) \cup (\underline{R} \circ \underline{S})}(x,z) &= \max \{ \mu_{\underline{R} \circ \underline{Q}}(x,z), \mu_{\underline{R} \circ \underline{S}}(x,z) \} \\ &= \max \left[ \max_{y \in Y} \{ \min \{ \mu_{\underline{R}}(x,y), \mu_{\underline{Q}}(y,z) \} \}, \max_{y \in Y} \{ \min \{ \mu_{\underline{R}}(x,y), \mu_{\underline{S}}(y,z) \} \} \right] \\ &= \max_{y \in Y} \left[ \min \{ \mu_{\underline{R}}(x,y), \mu_{\underline{Q}}(y,z) \} \right] \\ &\quad \left[ \min \{ \mu_{\underline{R}}(x,y), \mu_{\underline{S}}(y,z) \} \right] \end{aligned}$$

Q.E.D.

Si  $\underline{R}$  es una relación borrosa definida en  $X$ , entonces la composición de  $\underline{R}$  consigo misma,  $\underline{R} \circ \underline{R}$ , se denota por  $\underline{R}^2$ ; en general se tiene:  $\underline{R} \circ \underline{R} \circ \dots \circ \underline{R} (n \text{ veces}) = \underline{R}^n$ .

### PROPIEDADES DE LAS RELACIONES BORROSAS.

Consideremos el caso de  $X=Y$ . Vamos a examinar las principales propiedades de las relaciones borrosas  $\underline{R}$  en  $X$ .

*Reflexividad.* Se dice que  $\underline{R}$  es reflexiva si y solo si

$$\forall x \in X \quad \mu_{\underline{R}}(x,x) = 1;$$

la reflexividad indica que la relación de cada elemento consigo misma definida por  $R$  es perfecta. La relación borrosa reflexiva se identifica fácilmente en su representación matricial, ya que tiene 1's en toda su diagonal principal.

*Simetría.*  $R$  en  $X$  es simétrica si y solo si

$$\forall x, y \in X \quad \mu_R(x, y) = \mu_R(y, x);$$

es decir, una relación borrosa  $R$  es simétrica cuando es igual a su relación inversa  $R^{-1}$ , y su representación matricial es una matriz simétrica.

*Transitividad.* Una relación borrosa  $R$  es transitiva si y solo si

$$\forall x, z \in X \quad \mu_R(x, z) \geq \max_{y \in X} (\min (\mu_R(x, y), \mu_R(y, z))) = \mu_{R^2}(x, z);$$

que es equivalente a  $R \supset R^2$ , lo que indica que  $R$  es transitiva si la fuerza de relación directa existente entre cualquier par de elementos es mayor o igual que la existente utilizando algún intermedio.

Algunas relaciones borrosas poseen dos o las tres de estas propiedades, como son las siguientes:

Una *relación de semejanza*  $R$  en  $X$  es una relación borrosa en  $X$ , la cual es reflexiva y simétrica.

La relación borrosa  $R$  en  $X$  es una *relación de similitud* si y solo si es reflexiva, simétrica y transitiva.

El concepto de relación de similitud es análogo a la de relación de equivalencia en los conjuntos clásicos, pero es más apta para situaciones menos precisas.

TEOREMA DE DESCOMPOSICION DE UNA RELACION DE SIMILITUD.

$\mathbb{R}$  es una relación de similitud en  $X$  si y solo si  $\mathbb{R}$  puede descomponerse bajo la forma:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{\alpha} (\alpha R_{\alpha}) \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

con  $\alpha_1 > \alpha_2 \Rightarrow R_{\alpha_1} \subset R_{\alpha_2}$ ; donde las  $R_{\alpha}$  son relaciones de equivalencia y  $\alpha R_{\alpha}$  significa que el grado de membresía de todos los elementos de la relación clásica  $R_{\alpha}$  es multiplicado por  $\alpha$ .

Demostración.

Dado que  $\mathbb{R}$  es también subconjunto borroso de  $X \times X$ , tenemos por el teorema de descomposición de subconjuntos borrosos que se puede descomponer de esta manera, solo hay que demostrar que las  $R_{\alpha}$  son relaciones de equivalencia.

$\Rightarrow$  P.D. Si  $\mathbb{R}$  es una relación de similitud, entonces  $\forall \alpha \in [0,1]$ ,  $R_{\alpha}$  es una relación de equivalencia:

a)  $R_{\alpha}$  es reflexiva.

$$\forall x \in X \quad \mu_{\mathbb{R}}(x,x) = 1, \text{ por lo cual } \forall \alpha \in [0,1] \quad (x,x) \in R_{\alpha}.$$

b)  $R_{\alpha}$  es simétrica.

$$(x,y) \in R_{\alpha} \Rightarrow \mu_{\mathbb{R}}(x,y) \geq \alpha,$$

y por simetría de  $\mathbb{R}$ :

$$\mu_{\mathbb{R}}(y,x) \geq \alpha \Rightarrow (y,x) \in R_{\alpha}.$$

c)  $R_{\alpha}$  es transitiva.

$$\text{Sean } (x,y), (y,z) \in R_{\alpha} \Rightarrow \mu_{\mathbb{R}}(x,y) \geq \alpha \text{ y } \mu_{\mathbb{R}}(y,z) \geq \alpha;$$

por transitividad de  $\mathbb{R}$  tenemos que:

$$\mu_{\mathbb{R}}(x,z) \geq \alpha \Rightarrow (x,z) \in R_{\alpha}.$$

$\therefore R_{\alpha}$  es una relación de equivalencia.

$\Leftarrow$  P.D. Si  $R_{\alpha}$  son relaciones de equivalencia, entonces  $\mathbb{R} = \max_{\alpha} (\alpha R_{\alpha})$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , es una relación de similitud:

a)  $\underline{R}$  es reflexiva.

$$\forall x \in X, (x,x) \in R_1 \quad \text{ya que } R_1 \text{ es reflexiva} \\ \Rightarrow \mu_{\underline{R}}(x,x) = 1.$$

b)  $\underline{R}$  es simétrica.

$$\forall \alpha \in [0,1], (x,y) \in R_\alpha \Leftrightarrow (y,x) \in R_\alpha \\ \text{por lo cual } \mu_{\underline{R}}(x,y) = \max_{(x,y) \in R_\alpha} \alpha = \max_{(y,x) \in R_\alpha} \alpha = \mu_{\underline{R}}(y,x).$$

c)  $\underline{R}$  es transitiva.

Supongamos que  $\mu_{\underline{R}}(x,y) = \alpha_1$  y  $\mu_{\underline{R}}(y,z) = \alpha_2$ , y sea  $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ .  
Entonces  $(x,y) \in R_\alpha$  y  $(y,z) \in R_\alpha$ . Por transitividad de  $R_\alpha$  se tiene  
 $(x,z) \in R_\alpha \Rightarrow \mu_{\underline{R}}(x,z) \geq \alpha = \min\{\mu_{\underline{R}}(x,y), \mu_{\underline{R}}(y,z)\} \quad \forall y \in Y$   
 $\mu_{\underline{R}}(x,z) \geq \max_{y \in Y} \{\min\{\mu_{\underline{R}}(x,y), \mu_{\underline{R}}(y,z)\}\}.$

$\therefore \underline{R}$  es una relación de similitud.

*Q.E.D.*

#### EJEMPLO 6:

Sea  $\underline{R}$  la siguiente relación borrosa:

$$\underline{R} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 0.8 & 0.7 & 1 & 0.9 \\ 0.8 & 1 & 0.7 & 0.8 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.7 \\ 1 & 0.8 & 0.7 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.9 & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

En su representación matricial se puede observar que  $\underline{R}$  es reflexiva, ya que en toda su diagonal aparecen 1's; además  $\underline{R}$  es simétrica ya que es una matriz simétrica. También se tiene  $\underline{R}^2 = \underline{R}$ , lo que muestra que  $\underline{R}$  es transitiva. Por todo esto  $\underline{R}$  es una relación de similitud, y por el teorema anterior puede descomponerse de la siguiente forma:

$$R = \max \left\{ \begin{array}{ll} 0.7 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, & 0.8 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ \\ 0.9 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, & 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\}$$

donde todas las  $R_\alpha$  son relaciones de equivalencia ■

LEMA 1.

Sea  $R$  reflexiva. Entonces para cualquier  $k$ ,  $R^k$  es reflexiva.

Demostración por inducción sobre  $n$ .

Para  $k=1$  es obvio. Supongamos que se cumple para  $k=n$ . Entonces para  $\forall x \in V$

$$\begin{aligned} \mu_{R^{n+1}}(x,x) &= \max_{y \in V} \{ \min \{ \mu_{R^n}(x,y), \mu_{R^n}(y,x) \} \} \\ &= \min \{ \mu_{R^n}(x,y), \mu_{R^n}(y,x) \} = \min \{ 1, 1 \} = 1 \end{aligned}$$

Q.E.D.

LEMA 2.

Sea  $R$  simétrica. Entonces para cualquier  $k$ ,  $R^k$  es simétrica.

Demostración por inducción sobre  $n$ .

Para  $k=1$  es obvio. Supongamos que para  $k=n$ ,  $R^n$  es simétrica.

$$\begin{aligned} \mu_{R^{n+1}}(x,y) &= \max_{z \in V} \{ \min \{ \mu_{R^n}(x,z), \mu_{R^n}(z,y) \} \} \\ &= \max_{z \in V} \{ \min \{ \mu_{R^n}(z,x), \mu_{R^n}(y,z) \} \} \\ &= \max_{z \in V} \{ \min \{ \mu_{R^n}(y,z), \mu_{R^n}(z,x) \} \} \\ &= \mu_{R^{n+1}}(y,x) \quad \text{para } \forall x, y \in V. \end{aligned}$$

Q.E.D.

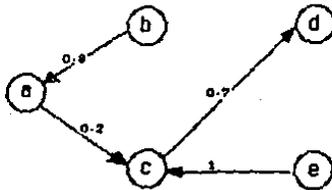
## GRAFOS BORROSOS DIRIGIDOS Y NO DIRIGIDOS.

Un *grafo borroso dirigido*  $\underline{G}$  es un par  $\{V, \underline{R}\}$ ; donde  $V$  es un conjunto de vértices y la relación borrosa  $\underline{R}$  en  $V$  define un conjunto de *arcos dirigidos*, el cual para cada par de vértices  $v_i, v_j \in V$  con  $\mu_{\underline{R}}(v_i, v_j) > 0$  contiene el arco dirigido  $(v_i, v_j)$  que une el vértice  $v_i$  con el vértice  $v_j$  y tiene un peso asociado de  $\mu_{\underline{R}}(v_i, v_j)$ .

Nótese que solamente se define el arco  $(v_i, v_j)$  si y solo si  $\mu_{\underline{R}}(v_i, v_j) > 0$ . Un grafo borroso dirigido se representa por medio de un diagrama en donde los vértices están representados por puntos y cada arco  $(v_i, v_j)$  está representado por una flecha que sale del punto  $v_i$  y llega al punto que representa  $v_j$ , indicando su peso sobre la flecha. Por ejemplo, si tenemos  $V = \{a, b, c, d, e\}$  y la relación de  $\underline{R}$  en  $V$ :

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \left[ \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

entonces el grafo borroso dirigido  $\underline{G} = \{V, \underline{R}\}$  está dado por:



El arco  $(v_i, v_j)$  se dice que es *incidente* con los vértices  $v_i$  y  $v_j$ , y que está *dirigido* del vértice  $v_i$  al vértice  $v_j$ , llamándose  $v_i$  *vértice*

inicial y  $v_j$  vértice terminal de dicho arco.

Los elementos de un grafo borroso dirigido  $\underline{G}$  son los vértices y los arcos dirigidos de  $\underline{G}$ .

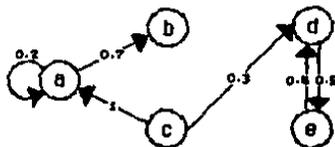
Decimos que existe una *arista* entre dos vértices  $v_i$  y  $v_j$ , denotada por  $\langle v_i, v_j \rangle$  si existe el arco  $(v_i, v_j)$  y/o el arco  $(v_j, v_i)$  y su peso está dado por  $\max(\mu_{\underline{R}}(v_i, v_j), \mu_{\underline{R}}(v_j, v_i))$ . Una arista  $\langle v_i, v_j \rangle$  se representa por medio de una línea sin dirección que une el vértice  $v_i$  con el vértice  $v_j$  indicando igualmente su peso sobre esta línea. Nótese que el peso de una arista es siempre mayor que cero.

Un *grafo borroso no dirigido*  $\underline{G}$  es un par  $[V, \underline{R}]$  donde  $V$  es un conjunto de vértices y la relación borrosa  $\underline{R}$  define un conjunto de aristas, el cual para cada par de vértices  $v_i, v_j \in V$  con  $\mu_{\underline{R}}(v_i, v_j) > 0$  y/o  $\mu_{\underline{R}}(v_j, v_i) > 0$  contiene la arista  $\langle v_i, v_j \rangle$  que une el vértice  $v_i$  con el vértice  $v_j$  y tiene un peso asociado de  $\max(\mu_{\underline{R}}(v_i, v_j), \mu_{\underline{R}}(v_j, v_i))$ .

Por ejemplo, si tenemos  $V = \{a, b, c, d, e\}$  y la relación borrosa  $\underline{R}$  en  $V$  está dada por:

$$\underline{R} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

entonces el grafo borroso dirigido  $\underline{G} = [V, \underline{R}]$  está dado por:



y su correspondiente grafo borroso dirigido  $\underline{G}'=[V,\underline{R}]$  contiene las siguientes aristas:

$\langle a,a \rangle$  con peso:  $\max\{\mu_{\underline{R}}(a,a), \mu_{\underline{R}}(a,a)\}=\max\{0.2,0.2\}=0.2$ ;

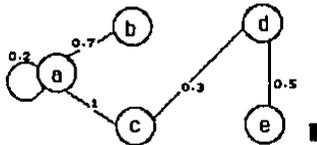
$\langle a,b \rangle=\langle b,a \rangle$  con peso:  $\max\{\mu_{\underline{R}}(a,b), \mu_{\underline{R}}(b,a)\}=\max\{0.7,0\}=0.7$ ;

$\langle a,c \rangle=\langle c,a \rangle$  con peso:  $\max\{\mu_{\underline{R}}(a,c), \mu_{\underline{R}}(c,a)\}=\max\{0,1\}=1$ ;

$\langle c,d \rangle=\langle d,c \rangle$  con peso:  $\max\{\mu_{\underline{R}}(c,d), \mu_{\underline{R}}(d,c)\}=\max\{0.3,0\}=0.3$  y

$\langle d,e \rangle=\langle e,d \rangle$  con peso:  $\max\{\mu_{\underline{R}}(d,e), \mu_{\underline{R}}(e,d)\}=\max\{0.5,0.4\}=0.5$ .

por lo tanto  $\underline{G}'$  es:



La arista  $\langle v_i, v_j \rangle$  se dice que es *incidente* con los vértices  $v_i$  y  $v_j$ . Los *elementos* de un grafo borroso no dirigido  $\underline{G}$  son los vértices y las aristas de  $\underline{G}$ .

El *orden* del grafo borroso  $\underline{G}$  (dirigido o no dirigido) es la cardinalidad de  $V$ :  $|V|$ .

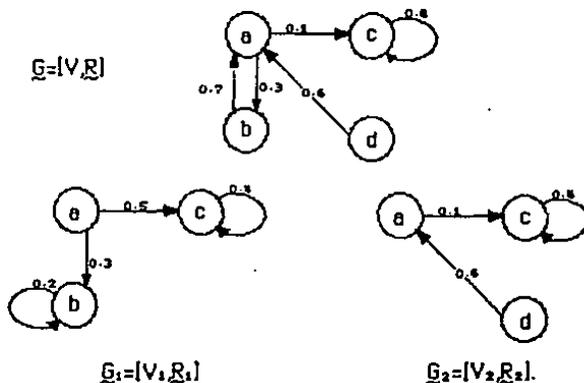
Un *grafo borroso trivial* es aquel que contiene únicamente un vértice. Un vértice que no está unido (relacionado) a ningún otro vértice es un *vértice aislado*.

### SUBGRAFOS, CORTES Y GRAFOS DE NIVEL $\alpha$ .

Sea  $\underline{G}=[V,\underline{R}]$  un grafo borroso dirigido (no dirigido).  $\underline{G}_1=[V_1,\underline{R}_1]$  es un *subgrafo* de  $\underline{G}$  si  $V_1 \subseteq V$  y contiene -únicamente- todos los arcos dirigidos (aristas) de  $\underline{G}$  cuyos vértices incidentes están en  $V_1$  con los mismos pesos asociados, es decir,  $\underline{R}_1$  es  $\underline{R}$  restringido a  $V_1$ .

## EJEMPLO 7:

Sean  $\underline{G}$ ,  $\underline{G}_1$  y  $\underline{G}_2$  los siguientes grafos borrosos:



- Aunque  $V_1 \subset V$ , claramente  $\underline{G}_1$  no es un subgrafo de  $\underline{G}$  por 3 razones:
- 1) El peso del arco dirigido (a,c) de  $\underline{G}_1$  es 0.5, que no es el mismo que el peso de (a,c) de  $\underline{G}$  y
  - 2)  $\underline{G}_1$  contiene el arco (b,b), mientras que  $\underline{G}$  no lo contiene.
  - 3)  $\underline{G}_1$  no contiene el arco (b,a) de peso 0.7 que está en  $\underline{G}$ .

En cambio  $\underline{G}_2$  sí es un subgrafo de  $\underline{G}$ , ya que  $V_2 \subset V$  y  $\underline{G}_2$  contiene únicamente los arcos de  $\underline{G}$  que son incidentes con los vértices de  $V_2$  y con los mismos pesos ■

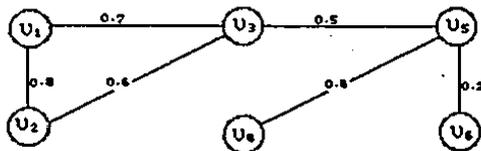
Para  $V_1 \subset V$ ,  $\langle V_1 \rangle$  es el subgrafo de  $\underline{G} = \{V, \underline{R}\}$  inducido por  $V_1$  el cual tiene el conjunto de vértices de  $V_1$  y cuyos arcos dirigidos (o aristas) son todos los arcos dirigidos (o aristas) de  $\underline{G}$  incidentes a los vértices de  $V_1$  con los mismos pesos asociados.

Sean  $\underline{G}_1 = \{V_1, \underline{R}_1\}$  y  $\underline{G}_2 = \{V_2, \underline{R}_2\}$  dos grafos borrosos. La *unión* de  $\underline{G}_1$  y  $\underline{G}_2$  denotada por  $\underline{G}_1 \cup \underline{G}_2$  es un grafo borroso  $\{V, \underline{R}\}$  donde  $V = V_1 \cup V_2$  y  $\forall u_1, u_2 \in V$ :

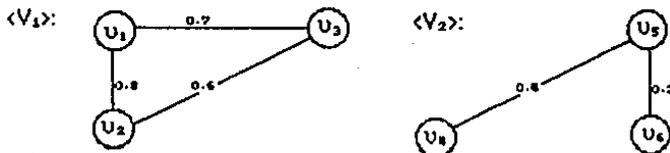
$$\mu_{\underline{R}}(u_1, u_2) = \begin{cases} \max\{\mu_{\underline{R}_1}(u_1, u_2), \mu_{\underline{R}_2}(u_1, u_2)\} & \text{si } u_1, u_2 \in V_1 \cap V_2 \\ \mu_{\underline{R}_1}(u_1, u_2) & \text{si } u_1, u_2 \in V_1 \\ \mu_{\underline{R}_2}(u_1, u_2) & \text{si } u_1, u_2 \in V_2 \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

EJEMPLO 8:

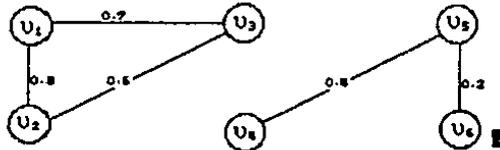
Sea  $\underline{G} = [V, \underline{R}]$ :



Entonces si  $V_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$  y  $V_2 = \{u_4, u_5, u_6\}$  tenemos:



y  $\langle V_1, V_2 \rangle = \langle V \rangle = \underline{G}$ . Además  $\langle V_1 \rangle \cup \langle V_2 \rangle$  está dado por:



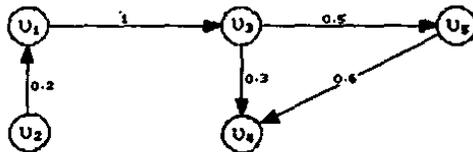
Es importante notar que si  $\underline{G}_1$  y  $\underline{G}_2$  son subgrafos de  $\underline{G}$ ,  $\underline{G}_1 \cup \underline{G}_2$  no es necesariamente un subgrafo de  $\underline{G}$ ; esto se ve claramente en el ejemplo 8,

ya que  $\langle V_1 \rangle$  y  $\langle V_2 \rangle$  son subgrafos de  $\underline{G}$  mientras que  $\langle V_1 \rangle \cup \langle V_2 \rangle$  no lo es debido a que no aparecen las aristas de  $\underline{G}$  que unen los vértices de  $V_1$  con los de  $V_2$ . Tenemos, pues que en general  $\langle V_1 \rangle \cup \langle V_2 \rangle \neq \langle V_1 \cup V_2 \rangle$ .

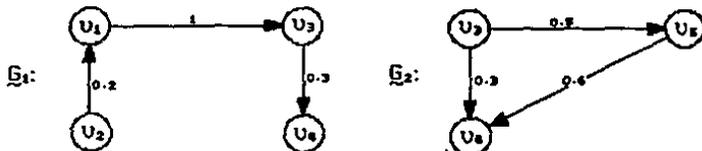
Sea  $\underline{G} = \langle V, R \rangle$  un grafo borroso. Si  $\underline{G}_1 = \langle V_1, R_1 \rangle$  y  $\underline{G}_2 = \langle V_2, R_2 \rangle$  son subgrafos de  $\underline{G}$ , con  $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ , entonces la *intersección* de  $\underline{G}_1$  y  $\underline{G}_2$ , denotado por  $\underline{G}_1 \cap \underline{G}_2$  contiene los vértices de  $V_1 \cap V_2$  y los arcos dirigidos (o aristas) cuyos vértices incidentes están en  $V_1 \cap V_2$ .

EJEMPLO 9:

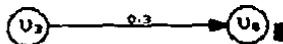
Sea  $\underline{G} = \langle V, R \rangle$  el grafo borroso:



y  $\underline{G}_1 = \langle V_1, R_1 \rangle$ ,  $\underline{G}_2 = \langle V_2, R_2 \rangle$  subgrafos de  $\underline{G}$ :



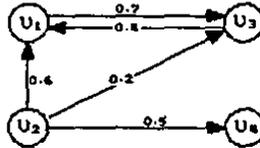
$V_1 \cap V_2 = \{U_3, U_4\}$ , entonces  $\underline{G}_1 \cap \underline{G}_2$  es:



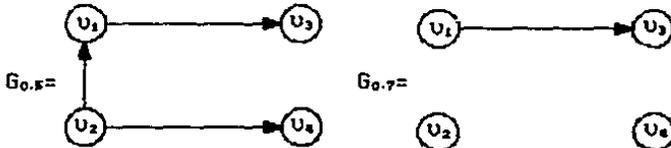
Nótese que en este caso  $\underline{G}_1 \cap \underline{G}_2$  siempre es un subgrafo de  $\underline{G}$ . Además si  $V_1, V_2 \subset V$  se tendría siempre  $\langle V_1 \rangle \cap \langle V_2 \rangle = \langle V_1 \cap V_2 \rangle$ .

Sea el grafo borroso  $\underline{G}=[V, \underline{R}]$ , entonces su *grafo de nivel*  $\alpha$  ( $\alpha \in [0, 1]$ ),  $G_\alpha=[V, R_\alpha]$  es un grafo clásico que contiene los vértices de  $\underline{G}$  y los arcos (o aristas) de  $G_\alpha$  son los arcos (o aristas) de  $\underline{G}$  con peso mayor o igual que el valor de nivel  $\alpha$ , a los cuales se les asigna un peso de 1. Dado que todos los arcos (o aristas) de  $G_\alpha$  tienen un peso de 1, no es necesario indicarlo.

EJEMPLO 10: Sea  $\underline{G}=[V, \underline{R}]$



entonces para  $\alpha=0.5$  y  $\alpha=0.7$



Nótese que a medida que  $\alpha$  crece,  $G_\alpha$  contiene cada vez menos arcos ■

Un *corte*  $C=(A, \bar{A})$  del grafo borroso  $\underline{G}=[V, \underline{R}]$  es el conjunto de aristas de  $\underline{G}$  que tienen un vértice incidente en  $A \subset V$ ,  $A \neq \emptyset$  y el otro vértice incidente en  $\bar{A}=V-A \neq \emptyset$ .

El corte  $(A, \bar{A})$  se dice que *separa* los vértices de  $A$  de los vértices de  $\bar{A}$  y claramente tenemos:

$$\underline{G}-(A, \bar{A}) = \langle A \rangle \cup \langle \bar{A} \rangle.$$

El *peso del corte*  $C=(A,\bar{A})$  es definido por  $|C|=\sum_{\{u \in A; v \in \bar{A}\}} \mu_R(u,v)$ .

### PROPIEDADES DE LOS GRAFOS BORROSOS.

Sea  $G=[V,R]$  un grafo borroso. Se dice que:

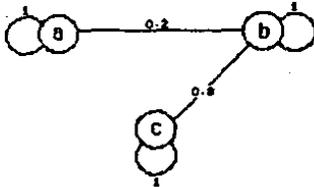
a)  $G$  es *reflexivo* si y solo si  $R$  es una relación borrosa reflexiva. Un grafo borroso reflexivo se detecta fácilmente, ya que para cada vértice debe existir un arco (o arista) de peso igual a 1 que lo conecta consigo mismo.

b)  $G$  es *simétrico* si y solo si  $R$  es una relación borrosa simétrica. Un grafo borroso simétrico suele representarse por aristas en lugar de arcos dirigidos ya que como el peso del arco  $(u_i, v_j)$  es igual al peso del arco  $(v_j, u_i)$ , se pueden representar ambos por la arista  $\langle u_i, v_j \rangle$  sin perder información.

EJEMPLO 11: Sea  $V=(a,b,c)$  y

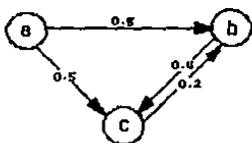
$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.8 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

entonces el grafo borroso  $G=[V,R]$  es reflexivo y simétrico, como y se representa:



c)  $G$  es *transitivo* si y solo si  $R$  es una relación borrosa transitiva. Un

grafo es transitivo si el peso del arco  $(u_i, u_j)$  es mayor o igual que el peso menor de los arcos  $(u_i, u_k)$ ,  $(u_k, u_j)$  para cualquier  $u_i, u_j, u_k$ . Por ejemplo:



es transitivo, ya que:

$$\mu_R(a,b) = 0.5 \geq \min(\mu_R(a,c), \mu_R(c,b)) = (0.5, 0.2) = 0.2.$$

$$\mu_R(a,c) = 0.5 \geq \min(\mu_R(a,b), \mu_R(b,c)) = (0.5, 0.4) = 0.4.$$

$$\mu_R(b,c) = 0.4 \geq \min(\mu_R(b,a), \mu_R(a,c)) = (0, 0.5) = 0.$$

$$\mu_R(c,b) = 0.2 \geq \min(\mu_R(c,a), \mu_R(a,b)) = (0, 0.5) = 0.$$

Se puede verificar también chequeando que  $R^2 \subseteq R$ .

## CAMINOS, CIRCUITOS, LAZOS, CADENAS, CICLOS Y ARBOLES EN LOS GRAFOS BORROSOS. GRAFOS BORROSOS CONEXOS.

Considérese el grafo borroso  $\underline{G} = [V, \underline{R}]$  de orden finito.

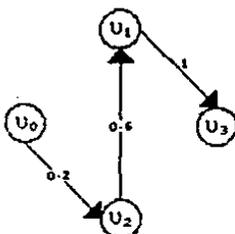
Un camino del vértice  $x$  al  $y$  de longitud  $r$ , denotado por  $C_r(x,y)$  es una sucesión de  $r$  arcos:  $C_r(x,y) = \{(x=u_0, u_1), (u_1, u_2), \dots, (u_{r-1}, u_r=y)\}$ , en los que el vértice inicial de cada arco es el mismo que el vértice terminal del arco que le precede en la sucesión. Así pues, cada arco en el camino está dirigido "hacia"  $y$  y "hacia afuera" de  $x$ . En otras palabras, un camino es una sucesión de arcos adyacentes que permite pasar de un vértice a otro siguiendo los arcos.

La fuerza del camino  $C_r(x,y)$  está dada por

$$\begin{aligned} g[C_r(x,y)] &= g[(x=u_0, u_1), (u_1, u_2), \dots, (u_{r-1}, u_r=y)] \\ &= \min(\mu_R(x, u_1), \mu_R(u_1, u_2), \dots, \mu_R(u_{r-1}, u_r=y)) \end{aligned}$$

es decir, es el peso mínimo de todos los arcos involucrados en el camino.

A continuación se ilustra un camino de  $v_0$  a  $v_3$  de longitud 3:

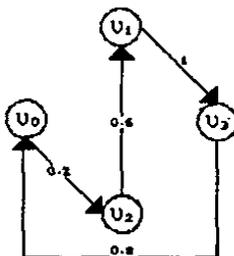


La fuerza de este camino es:

$$g[C_3(x,y)] = \min \{ \mu_R(v_0, v_2), \mu_R(v_2, v_1), \mu_R(v_1, v_3) \} \\ = \min \{ 0.2, 0.6, 1 \} = 0.2.$$

Los vértices  $v_1, v_2, \dots, v_{r-1}$  se llaman *intermediarios*; el vértice  $x=v_0$  se llama *vértice inicial* del camino y el vértice  $y=v_r$  se llama *vértice final* del camino.

Un *círculo* es un camino en el que el vértice inicial coincide con el vértice final, es decir  $x=y$ . Por ejemplo:



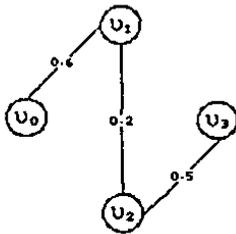
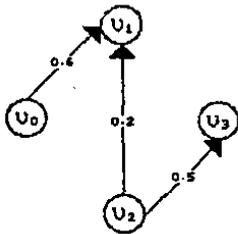
es un círculo de longitud 4 (ya que intervienen 4 arcos) y tiene una fuerza de  $\min \{ 0.2, 0.6, 1, 0.8 \} = 0.2$ .

Un *lazo* es un círculo de longitud 1. A continuación se ilustra un

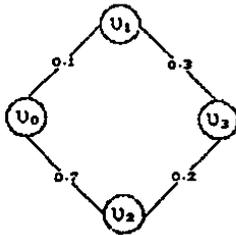
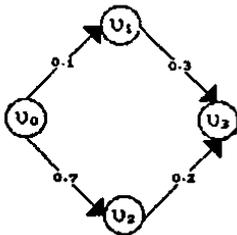
lazo con fuerza de 0.5:



Una *cadena* es una estructura similar a un camino, excepto que no todos los arcos están necesariamente dirigidos hacia el vértice y. También puede definirse como una sucesión de aristas consecutivas. Por ejemplo, el siguiente grafo borroso dirigido y su correspondiente grafo borroso no dirigido son la misma cadena.



Un *ciclo* es una cadena cerrada. En los siguientes grafos borrosos se muestra el mismo ciclo:

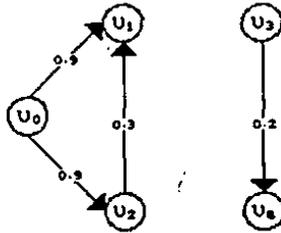


Nótese que todo camino es una cadena, pero no recíprocamente;

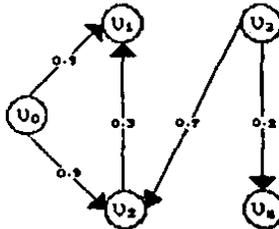
además cada circuito es un ciclo pero no inversamente.

Un grafo borroso  $\underline{G}$  es *conexo* si existe una cadena de cualquier vértice de  $\underline{G}$  a cada otro vértice de  $\underline{G}$ .

Intuitivamente,  $\underline{G}$  es conexo si no tiene vértices aislados, o grupos de vértices que no estén conectados entre sí; en otras palabras, si es un grafo borroso en el que cualquier corte  $(A, \bar{A})$  de  $\underline{G}$  contiene al menos una arista. El grafo borroso:



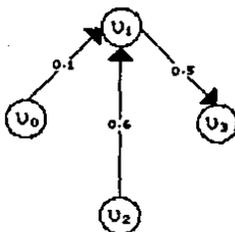
no es conexo ya que el conjunto de vértices  $A=\{u_0, u_1, u_2\}$  no está conectado con  $\bar{A}=\{u_3, u_4\}$ , es decir el corte  $(A, \bar{A})$  es vacío, por lo que no existe ninguna cadena de algún vértice de  $A$  a algún vértice de  $\bar{A}$ . En cambio, el siguiente grafo borroso si es conexo:



*Componentes* son los subgrafos conexos maximales, es decir, son los subgrafos conexos que no están propiamente contenidos en otros subgrafos

conexos. Un vértice aislado es un *componente trivial*.

Un *árbol* es un componente que no contiene ciclos. Un *árbol de expansión* es un grafo borroso conexo que no contiene ciclos, es decir, un árbol de expansión es simplemente un árbol que incluye todos los vértices. El *valor de un árbol* es la suma de las  $\mu_R(u_i, v_j)$  de los arcos del árbol. Por ejemplo:



es un árbol de expansión de valor 1.2.

PROPIEDADES. Sea  $\underline{G}=(V,R)$  un grafo borroso conexo. Entonces:

- $\underline{G}$  contiene al menos un árbol de expansión.
- Un árbol de expansión en  $\underline{G}$  con  $|V|=n$ , contiene  $n-1$  arcos.

Demostración.

a) Dado que  $\underline{G}$  es conexo:

- si  $\underline{G}$  no contiene ciclos  $\Rightarrow \underline{G}$  es un árbol de expansión.
- si  $\underline{G}$  contiene al menos un ciclo, se elimina un arco cualquiera del ciclo.

El grafo resultante sigue siendo conexo, ya que existe una cadena que une los 2 vértices que unía el arco eliminado (esta cadena está dada por el ciclo que había al eliminar el arco). Si este grafo resultante aún contiene ciclos repetimos el procedimiento hasta obtener un grafo conexo  $\underline{G}'$  sin ciclos.  $\underline{G}'$  es un árbol de expansión contenido en  $\underline{G}$ .

b) Se demostrará por inducción.

- si  $n=1$  vértice, entonces no contiene arcos ya que cualquier arco crearía un ciclo.

- si  $n=2$  vértices, entonces basta una arco para conectarlos. Si tuvieramos 2 arcos o más se crearía un ciclo.
- Supongamos que para  $n-1$  vértices se necesitan  $n-2$  arcos.
- si tenemos  $n$  vértices, entonces construyamos un árbol para  $n-1$  vértices con  $n-2$  arcos. Por tanto tendremos un vértice sin conectar, tomamos este vértice y lo conectamos con un arco a cualquier otro y de esta manera obtenemos un grafo borroso conexo con  $n$  vértices y sin ciclos, es decir un árbol de expansión.

*Q.E.D.*

Por la propiedad (a) vemos que todo grafo borroso  $\underline{G}$  contiene al menos un árbol de expansión. Entre estos hay uno o más cuyo valor es maximal. Este es un *árbol de expansión maximal* el cual puede ser construido fácilmente por el método de Kruskal:

Sea  $\underline{G}=(V, \underline{R})$  donde  $|V|=n$ :

- Tomar el arco de peso máximo, es decir  $(u_m, v_n)$  si  $\max_{u_i, v_j} \{\mu_{\underline{R}}(u_i, v_j)\} = \mu_{\underline{R}}(u_m, v_n)$ .
- En cada iteración agregar al árbol el arco máximo, cuyo aumento no cree un ciclo.
- Parar cuando tengamos  $n-1$  arcos.

Cualquier árbol de expansión tiene la siguiente propiedad: Sean  $v_i$  y  $v_p$  dos vértices tales que  $(v_i, v_p)$  no está en el árbol, entonces  $\mu_{\underline{R}}(v_i, v_p) \leq \min\{\mu_{\underline{R}}(v_i, v_j), \dots, \mu_{\underline{R}}(v_o, v_p)\}$  donde  $(v_i, v_j), \dots, (v_o, v_p)$  son los arcos de la única cadena que une  $v_i$  y  $v_p$  en el árbol. Si la desigualdad no se cumpliera entonces el arco de peso menor de la cadena se removería y el arco  $(v_i, v_p)$  lo sustituiría para formar un árbol con un valor mayor que el máximo.

## CAPITULO III

## CIERRE TRANSITIVO Y REBANANTES

## CIERRE TRANSITIVO.

Antes de dar la definición, se da un teorema que ayuda a entender su significado. Este teorema interpreta a la relación borrosa  $R^n$  como la máxima relación posible entre  $x$  y  $y$  utilizando exactamente  $n-1$  intermediarios. Para el caso de  $n=2$  ya se había analizado anteriormente (pág. 17 y 18).

TEOREMA 1.

$$\mu_{R^n}(x,y) = \begin{cases} \text{máx}_{C_n(x,y)} g[C_n(x,y)] & \text{si existe al menos} \\ & \text{un } C_n(x,y) \\ 0 & \text{si no existe} \end{cases}$$

Demostración.

Se hará por inducción sobre  $n$ . Para el caso de  $n=1$  es obvio: Para  $\forall x,y \in V$  con  $\mu_R(x,y) \neq 0$ ,  $\text{máx}_{C_1(x,y)} (g[C_1(x,y)]) = g[C_1(x,y)] = \min(\mu_R(x,y)) = \mu_R(x,y)$ .

Para  $n=2$  se tiene para cualquier  $x,y \in V$  con  $\mu_{R^2}(x,y) \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \mu_{R^2}(x,y) &= \text{máx}_{u_1 \in V} (\min(\mu_R(x,u_1), \mu_R(u_1,y))) \\ &= \text{máx}_{u_1 \in V} g[(x,u_1), (u_1,y)] \\ &= \text{máx}_{C_2(x,y)} g[C_2(x,y)]. \end{aligned}$$

Supóngase que se cumple la hipótesis para  $n=i$ . Tenemos entonces que  $\forall x,y \in V$  con  $\mu_{R^{i+1}}(x,y) \neq 0$ :

$$\min \begin{Bmatrix} \mu_{R^i}(x,u_1) \\ \mu_R(u_1,y) \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} \text{máx}_{u_1, \dots, u_{i-1} \in V} g[(x,u_1), (u_1,u_2), \dots, (u_{i-1},u_i)] \\ \mu_R(u_1,y) \end{Bmatrix}$$

por distributividad tenemos

$$\begin{aligned}
 &= \max_{u_1, \dots, u_{i-1} \in V} \left\{ \min \left\{ g[(x, u_1), (u_1, u_2), \dots, (u_{i-1}, u_i)] \right\} \right. \\
 &\quad \left. \mu_{\mathbb{R}}(u_i, y) \right\} \\
 &= \max_{u_1, \dots, u_{i-1} \in V} \left\{ \min \left\{ \mu_{\mathbb{R}}(x, u_1), \mu_{\mathbb{R}}(u_1, u_2), \dots, \mu_{\mathbb{R}}(u_{i-1}, u_i) \right\} \right. \\
 &\quad \left. \mu_{\mathbb{R}}(u_i, y) \right\}
 \end{aligned}$$

por asociatividad tenemos

$$\begin{aligned}
 &= \max_{u_1, \dots, u_{i-1} \in V} \{ \min \{ \mu_{\mathbb{R}}(x, u_1), \mu_{\mathbb{R}}(u_1, u_2), \dots, \mu_{\mathbb{R}}(u_{i-1}, u_i), \mu_{\mathbb{R}}(u_i, y) \} \} \\
 &= \max_{u_1, \dots, u_{i-1} \in V} g[(x, u_1), (u_1, u_2), \dots, (u_{i-1}, u_i), (u_i, y)],
 \end{aligned}$$

por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned}
 \mu_{\mathbb{R}^{i+1}}(x, y) &= \max_{u_n \in V} \{ \min \{ \mu_{\mathbb{R}^i}(x, u_n), \mu_{\mathbb{R}}(u_n, y) \} \} \\
 &= \max_{u_i \in V} \{ \max_{u_1, \dots, u_{i-1} \in V} g[(x, u_1), (u_1, u_2), \dots, (u_i, y)] \},
 \end{aligned}$$

y por asociatividad

$$= \max_{u_1, \dots, u_i \in V} g[(x, u_1), (u_1, u_2), \dots, (u_i, y)].$$

*Q.E.D.*

El *cierre transitivo* de una relación borrosa  $\mathbb{R}$  en  $V$  está dado por la relación borrosa  $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}^3 \cup \dots$

En otras palabras,  $\hat{\mathbb{R}}$  compara para cada par de elementos  $x, y$  en  $V$  el peso de su relación directa, de su máxima relación a través de un intermediario, dos intermediarios, etc. y escoge el máximo valor obteniendo la máxima relación posible entre  $x$  y  $y$ .

LEMA 3.

$\hat{\mathbb{R}}$  es una relación borrosa transitiva.

Demostración.

$$\hat{\mathbb{R}}^2 = \hat{\mathbb{R}} \circ \hat{\mathbb{R}} = (\mathbb{R} \cup \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}^3 \cup \dots) \circ (\mathbb{R} \cup \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}^3 \cup \dots)$$

y por distributividad de la composición con la unión

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}^3 \cup \mathbb{R}^4 \cup \dots \\
 &\subset \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}^3 \cup \dots = \hat{\mathbb{R}}
 \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

## TEOREMA 2.

Sea  $G=[V,R]$  un grafo borroso reflexivo de orden  $n$ . Entonces

$$R^l \subset R^{l+1} \quad \text{para toda } l \in \mathbb{N}.$$

Demostración.

Para  $\forall x, y \in V$  se tiene

$$\begin{aligned} \mu_{R^{l+1}}(x,y) &= \mu_{R^l \circ R}(x,y) \\ &= \max_{u \in V} \{ \min(\mu_{R^l}(x,u), \mu_R(u,y)) \} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{l} \min \{ \mu_{R^l}(x,u_1), \mu_R(u_1,y) \} \\ \min \{ \mu_{R^l}(x,u_2), \mu_R(u_2,y) \} \\ \vdots \\ \min \{ \mu_{R^l}(x,u_n), \mu_R(u_n,y) \} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Dado que  $y \in V$  para alguna  $i$  se tiene  $y = u_i$ . Sin perder la generalidad supóngase que  $y = u_1$ , y como  $R$  es reflexiva,  $\mu_R(y,y) = 1$ :

$$\mu_{R^{l+1}}(x,y) = \max \left\{ \begin{array}{l} \min \{ \mu_{R^l}(x,u_1), 1 \} \\ \min \{ \mu_{R^l}(x,u_2), \mu_R(u_2,y) \} \\ \vdots \\ \min \{ \mu_{R^l}(x,u_n), \mu_R(u_n,y) \} \end{array} \right\}$$

$$\mu_{R^{l+1}}(x,y) = \max \left\{ \begin{array}{l} \mu_{R^l}(x,u_1) \\ \min \{ \mu_{R^l}(x,u_2), \mu_R(u_2,y) \} \\ \vdots \\ \min \{ \mu_{R^l}(x,u_n), \mu_R(u_n,y) \} \end{array} \right\}$$

$$\therefore R^l \subset R^{l+1} \quad \geq \mu_{R^l}(x,y)$$

*Q.E.D.*

## TEOREMA 3.

Sea  $G=[V,R]$  un grafo borroso de orden  $n$ . Sea  $m > n$ . Entonces existe

ksn tal que  $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^k$ .

Demostración.

Por el teorema 1, para  $\forall x, y \in V$ ,

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{R}^m}(x, y) &= \max_{\hat{C}_m(x, y)} g[\hat{C}_m(x, y)] = g[\hat{C}_m(x, y)] \\ &= g[(x = \hat{v}_0, \hat{v}_1), (\hat{v}_1, \hat{v}_2), \dots, (\hat{v}_{m-1}, \hat{v}_m = y)] \end{aligned}$$

Dado que  $m$  es mayor que el número de elementos de  $V$ , no todos los elementos del camino  $\hat{C}_m(x, y)$  son únicos, por lo cual  $\hat{C}_m(x, y)$  contiene al menos un circuito. Supóngase que solamente contiene el circuito  $\{(\hat{v}_i, \hat{v}_{i+1}), (\hat{v}_{i+1}, \hat{v}_{i+2}), \dots, (\hat{v}_{j-1}, \hat{v}_j)\}$ , es decir  $\hat{v}_i = \hat{v}_j$ . Entonces para  $k = m - (j - i) \leq n$ :

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{R}^m}(x, y) &= \min\{\mu_{\mathbb{R}}(x, \hat{v}_1), \dots, \mu_{\mathbb{R}}(\hat{v}_1, \hat{v}_{i+1}), \dots, \mu_{\mathbb{R}}(\hat{v}_{j-1}, \hat{v}_j), \dots, \mu_{\mathbb{R}}(\hat{v}_{m-1}, y)\} \\ &\leq \min\{\mu_{\mathbb{R}}(x, \hat{v}_1), \dots, \mu_{\mathbb{R}}(\hat{v}_1, \hat{v}_{j+1}), \dots, \mu_{\mathbb{R}}(\hat{v}_{m-1}, y)\} \\ &= g[(x = \hat{v}_0, \hat{v}_1), (\hat{v}_1, \hat{v}_2), \dots, (\hat{v}_i, \hat{v}_{j+1}), \dots, (\hat{v}_{m-1}, \hat{v}_m = y)] \\ &\leq \max_{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{k-1} \in V} g[(x = \hat{v}_0, \hat{v}_1), \dots, (\hat{v}_{k-1}, \hat{v}_k = y)] \\ &= \mu_{\mathbb{R}^k}(x, y). \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

Los teoremas 2 y 3 dan como consecuencia el siguiente corolario que nos proporciona una forma de calcular el cierre transitivo  $\hat{\mathbb{R}}$ .

COROLARIO 1.

Sea  $\mathbb{G} = [V, \mathbb{R}]$  un grafo borroso reflexivo de orden  $n$ . Existe ksn tal que  $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{k+1}$ .

Demostración.

Consideremos una  $m > n$ , el teorema 3 garantiza la existencia de ksn con  $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^k$  y por el teorema 2 tenemos  $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{k+1} \subset \dots \subset \mathbb{R}^m$ , por lo tanto existe una  $k$  tal que  $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{k+1} = \dots = \mathbb{R}^m = \dots$ , luego entonces  $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^2 \cup \dots \cup \mathbb{R}^k$  y volviéndose a aplicar el teorema 2,  $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^k$ .

*Q.E.D.*

TEOREMA 4.

Sea  $\mathbb{G} = [V, \mathbb{R}]$ . Si  $\mathbb{R}$  es reflexiva,  $\hat{\mathbb{R}}$  es reflexiva. Si  $\mathbb{R}$  es simétrica,  $\hat{\mathbb{R}}$

es simétrica.

Demostración.

Es consecuencia obvia de los lemas 1 y 2 del capítulo anterior.

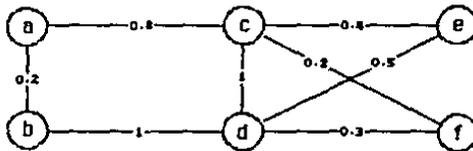
*Q.E.D.*

### REBANANTES.

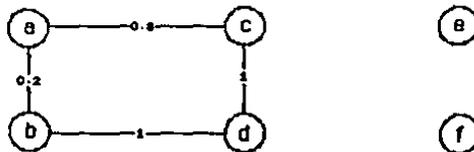
Una partición ordenada de las aristas del grafo borroso  $\underline{G}$ ,  $Z=(C_1, C_2, \dots, C_m)$  es un *rebanante* de  $\underline{G}$  si cada miembro  $C_i$  es un corte  $(A_i, \bar{A}_i)_i$  de  $\underline{G}-U_{\{i_1, \dots, i-1\}}$   $C_i$  para  $1 \leq i \leq m$ . (Sea  $\underline{G}-U_{\{i_1, \dots, i_0\}}$   $C_i \in \underline{G}$ ).

Un miembro  $C_i$  del rebanante  $Z$  se llamará *corte del rebanante*. La *longitud*  $l(Z)$  de un rebanante  $Z$  de  $\underline{G}$  es el número de cortes del rebanante, es decir, el número de miembros de la partición de aristas  $Z$ .

EJEMPLO 12: Sea  $\underline{G}=[V, R]$  el grafo borroso simétrico

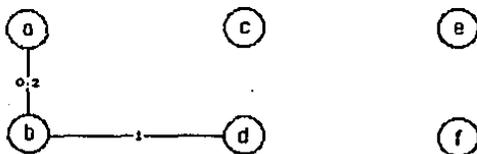


Consideremos el corte  $C_1 = ((a,b,c,d), (e,f))_1$  en  $\underline{G}$ , el cual contiene las aristas  $\langle c,e \rangle$ ,  $\langle c,f \rangle$ ,  $\langle d,e \rangle$ ,  $\langle d,f \rangle$ . Entonces, el grafo borroso  $\underline{G}-C_1$  resultante es:

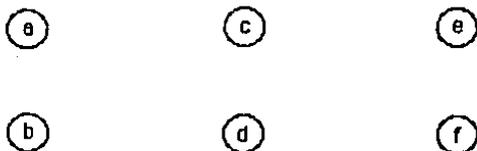


Ahora si  $C_2$  es el corte  $((a,b,d), (c,e,f))_2$  de  $\underline{G}-C_1$ , contiene las

aristas  $\langle a,c \rangle$  y  $\langle c,d \rangle$ . (Nótese que el mismo corte en  $\underline{G}$  contiene más aristas:  $\langle a,c \rangle$ ,  $\langle c,d \rangle$ ,  $\langle d,e \rangle$ ,  $\langle d,f \rangle$ ). Así el grafo borroso  $\underline{G} - U_{i=1,2} C_i$  es:

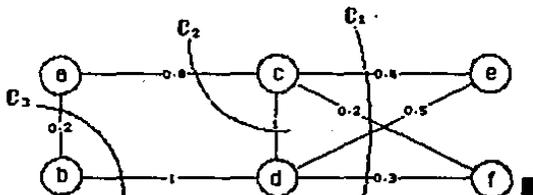


Sea ahora  $C_3 = \{(b), (a,c,d,e,f)\}$ , un corte en  $\underline{G} - U_{i=1,2} C_i$ ; entonces  $C_3$  contiene los arcos  $\langle a,b \rangle$  y  $\langle b,d \rangle$ . Obteniendo el grafo  $\underline{G} - U_{i=1,3} C_i$ :



el cual consta de vértices aislados.

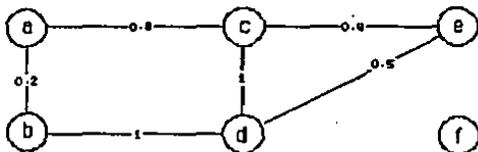
De esta manera  $Z = (C_1, C_2, C_3)$  es un rebanante de  $\underline{G}$ . Podemos representar gráficamente el rebanante de la siguiente manera



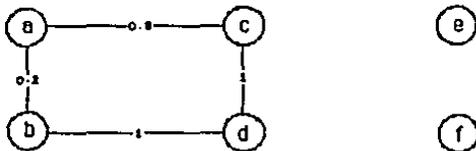
Un rebanante  $Z = (C_1, C_2, \dots, C_m)$  de  $\underline{G}$  que no contiene una subpartición propia que también sea rebanante de  $\underline{G}$  es un *rebanante minimal* de  $\underline{G}$ , y  $C_1, C_2, \dots, C_m$  son *cortes minimales*.

## EJEMPLO 13:

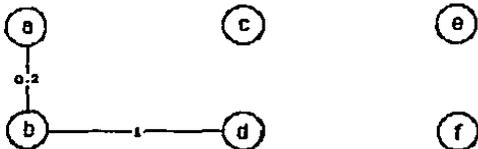
En el ejemplo 12,  $C_1 = (\{a,b,c,d\}, \{e,f\})_1$  de  $\underline{G}$  (el cual consta de 1 solo componente) puede dividirse en 2 cortes:  $C'_1 = (\{a,b,c,d,e\}, \{f\})_1$  de  $\underline{G}$  que consta de las aristas  $\langle c,f \rangle$  y  $\langle d,f \rangle$ , entonces  $\underline{G} - C'_1$  (de 2 componentes) es:



y el corte  $C'_2 = (\{a,b,c,d\}, \{e,f\})_2$  consta de las aristas  $\langle c,e \rangle$ ,  $\langle d,e \rangle$ , entonces  $\underline{G} - U_{i=1, \dots, 2} C'_i = \underline{G} - C_1$  (con 3 componentes) es

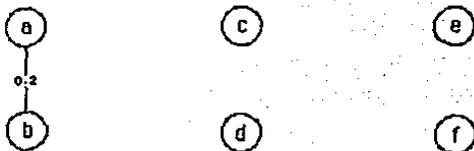


El corte  $C_2$  no puede ser dividido, entonces sea  $C'_3 = C_2 = (\{a,b,d\}, \{c,e,f\})_3$  de  $\underline{G} - U_{i=1, \dots, 2} C'_i$  que consta de las aristas  $\langle a,c \rangle$ ,  $\langle c,d \rangle$ . Así el grafo borroso  $\underline{G} - U_{i=1, \dots, 3} C'_i$  (con 4 componentes) es:

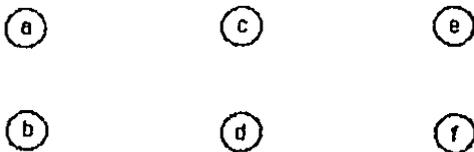


El corte  $C_3$  puede dividirse también en 2 cortes:  $C'_4 = (\{a,b\}, \{c,d,e,f\})_4$  en  $\underline{G} - U_{i=1, \dots, 3} C'_i$  que consta de la arista  $\langle b,d \rangle$ . Entonces el grafo borroso

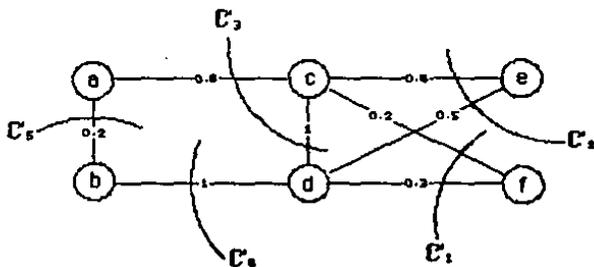
$G-U_{\{1,2,3,4,5\}} C'_i$  (con 5 componentes) es:



y el corte  $C'_5 = ((b), (a, c, d, e, f))_5$  en  $G-U_{\{1,2,3,4,5\}} C'_i$  que consta de la arista  $\langle a, b \rangle$ , obteniendo el grafo borroso  $G-U_{\{1,2,3,4,5\}} C'_i$  (con 6 componentes):



Vemos que el rebanante  $Z = (C_1, C_2, C_3)$  del ejemplo 12 no es un rebanante minimal. Dado que los cortes  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  no pueden dividirse, entonces  $Z = (C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)$  sí es un rebanante minimal.



Además en este ejemplo podemos observar que un corte minimal  $C_i$  aumenta en una unidad el número de componentes del grafo borroso  $\underline{G}-U_{i=1, \dots, j-1} C_i$  ■

Al interpretar a un rebanante como una secuencia de cortes en un grafo, es evidente que cada corte aumenta sucesivamente el número de componentes en el grafo resultante. Dado que un corte minimal implica un corte de un solo componente, el cual no puede ser dividido en otros cortes, el número de componentes aumenta precisamente en uno, lo que prueba el siguiente

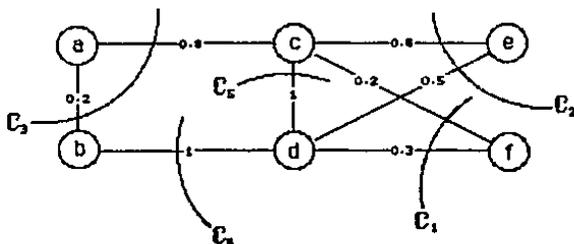
#### TEOREMA 5.

*Para cualquier grafo borroso con al menos una arista:  
 $\max \{ \nu(Z) \mid Z \text{ es un rebanante de } \underline{G} \} = |\underline{V}|$  - el número de componentes de  $\underline{G}$ ,  
 y este máximo es alcanzado si y solo si  $Z$  es un rebanante minimal de  $\underline{G}$ .*

Finalmente,  $Z$  es un *rebanante estrecho* de  $\underline{G}$  si cada corte  $C_i$  es un corte de peso mínimo de algún componente de  $\underline{G}-U_{i=1, \dots, j-1} C_i$ .

#### EJEMPLO 14:

El rebanante  $Z=(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)$  en el grafo borroso  $\underline{G}$  de los 2 ejemplos anteriores dado por:



es un rebanante estrecho de  $\underline{G}$  ■

Nótese que la noción de rebanante pertenece solo a grafos que

contengan al menos una arista.

Un rebanante de  $\underline{G}$  se puede interpretar como una secuencia de cortes no vacíos que separan a  $\underline{G}$  en vértices aislados; y un rebanante minimal (estrecho) efectúa esta separación usando únicamente cortes minimales (de peso mínimo) en cada paso. Nótese que un rebanante estrecho es siempre un rebanante minimal pero no viceversa.

Es importante considerar un rebanante en términos de sus particiones sucesivas de los vértices. Sea el rebanante  $Z=(C_1, \dots, C_m)$  de  $\underline{G}=[V, \bar{R}]$ . Consideremos el  $i$ -ésimo corte  $C_i=(A_i, \bar{A}_i)_i$ . Dado que  $V$  es el conjunto de vértices tanto de  $\underline{G}$  como de  $\underline{G}-U_{j=1, \dots, i-1} C_j$ , para  $\forall j \in \{1, m\}$ ,  $(A_i, \bar{A}_i)_i$ , efectúa la misma partición de vértices de  $\underline{G}$  que el corte  $(A_i, \bar{A}_i)_{j \neq i}$ ; sin embargo:  $(A_i, \bar{A}_i)_i = (A_i, \bar{A}_i) - U_{j=1, \dots, i-1} C_j$ , por lo cual  $(A_i, \bar{A}_i)_i$ ,  $i > 1$ , (como se vió en el ejemplo 12) no necesariamente contiene todas las aristas del corte  $(A_i, \bar{A}_i)$  de  $\underline{G}$ . Así, el conjunto de aristas  $(A_i, \bar{A}_i)$  depende únicamente de  $\underline{G}$ , mientras que  $(A_i, \bar{A}_i)_i$  depende tanto de  $\underline{G}$  como de  $Z$ , aunque la partición de vértices es la misma para los dos casos.

Cualquier grafo borroso  $\underline{G}=[V, \bar{R}]$  puede ser escrito de la forma  $\underline{G} = \langle P_1 \rangle \cup \langle P_2 \rangle \cup \dots \cup \langle P_n \rangle$  donde cada  $\langle P_i \rangle$  es un componente de  $\underline{G}$ . Sea  $\{P_1, \dots, P_n\}$  la partición de los vértices de  $\underline{G}$  por componentes.

TEOREMA 6.

Sea  $\underline{G}$  un grafo borroso. Sean  $\{P_1, \dots, P_n\}$  su partición de vértices por componentes y  $C=(A, \bar{A})$  un corte minimal en  $\underline{G}$ . Entonces  $\underline{G}-C$  tiene la partición de vértices por componentes:

$$\underline{G}-C = U_{k=1, \dots, n} (\langle P_k \cap A \rangle \cup \langle P_k \cap \bar{A} \rangle).$$

Demostración.

Se había visto anteriormente que  $\underline{G}-C = \langle A \rangle \cup \langle \bar{A} \rangle$  (pág. 30). Si  $C$  es minimal, entonces  $\forall x, y \in A$  (o  $\bar{A}$ ), si  $x, y \in P_i$ , donde  $P_i$  es un componente de  $\underline{G}$ ,  $x$  y  $y$  deben estar también en un mismo componente de  $\underline{G}-C$ . Entonces, la partición de vértices por componentes de  $\underline{G}-C$  es :

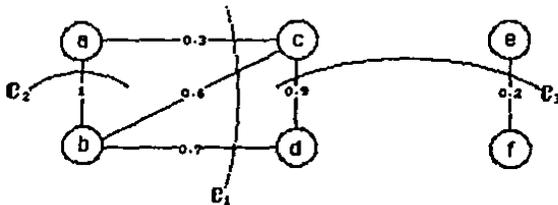


Un corte  $C_i$  del rebanante  $Z=(C_1, \dots, C_m)$  puede dejar intacto algún componente de  $G - U_{(i_1, \dots, i_{j-1})} C_j$  y es útil especificar cuales componentes son realmente cortados por  $C_i$ .

Los subgrafos  $G_1, \dots, G_m$  de  $G$  son los *subgrafos cortados* por el rebanante  $Z=(C_1, \dots, C_m)$  si cada  $G_i$  contiene exactamente los componentes de  $G - U_{(i_1, \dots, i_{j-1})} C_j$  cuyos vértices son separados por  $C_i$ .

#### EJEMPLO 16.

Consideremos el grafo borroso  $G$  y el rebanante  $Z=(C_1, C_2, C_3)$  dados por:



Como  $C_1$  únicamente separa los vértices del componente  $\langle \{a, b, c, d\} \rangle$  de  $G$ ,  $G_1 = \langle \{a, b, c, d\} \rangle$  es el subgrafo cortado por  $C_1$ . De igual manera  $G_2 = \langle \{a, b\} \rangle$  es cortado por  $C_2$  y  $G_3 = \langle \{c, d, e, f\} \rangle$  es el subgrafo cortado por  $C_3$ . ■

#### ALGORITMO PARA LA OBTENCION DE UN REBANANTE ESTRECHO.

Supongamos el grafo borroso simétrico  $G=(V, E)$  con  $N$  componentes y al menos una arista.

1) Representétese  $G$  como la unión de sus componentes

$$G = \bigcup_{j=1, \dots, N} \langle P_j \rangle$$

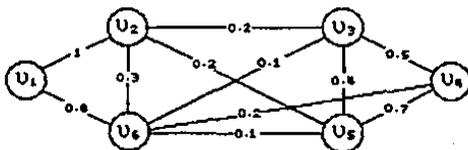
2) Sea  $i=1$ .

3) Escoger  $G_i = \langle P_k \rangle$  para alguna  $k$  tal que  $|P_k| \geq 2$

- 4) Encontrar un corte de peso mínimo  $C_i=(A, \bar{A})$  de  $G_i$ . Nótese que  $A \cup \bar{A} = P_k$ .
- 5) Sean  $\langle P_k \rangle = \langle A \rangle$  y  $\langle P_{N+1} \rangle = \langle \bar{A} \rangle$  entonces  $G = \bigcup_{n=1, \dots, l} C_n = \bigcup_{j=1, \dots, N+1} \langle P_j \rangle$
- 6) Si  $l = |V| - N$  vaya al paso 7, de otro modo incremente  $l$  en 1, i.e.,  $l+1 \rightarrow l$  y vuelva al paso 3.
- 7) Ahora  $G = \bigcup_{n=1, \dots, |V|-N} C_n$  consiste únicamente de vértices aislados y  $Z = \{C_1, C_2, \dots, C_{|V|-N}\}$  es un rebanante estrecho de  $G$  con  $G_1, G_2, \dots, G_{|V|-N}$  los subgrafos cortados por el rebanante  $Z$ .

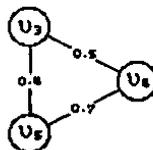
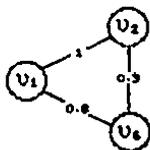
## EJEMPLO 17.

Consideremos el grafo borroso simétrico  $G=(V, E)$ :



el cual consta de un componente, i.e.,  $N=1$ .

- 1) Sea  $V=P_1$ , entonces  $G_1=\langle P_1 \rangle$ .
- 2)  $l=1$ .
- 3)  $G_1=P_1$ ,  $k=1$  y  $|P_1|=6 \geq 2$ .
- 4) El corte de peso mínimo de  $G_1$  es  $C_1=\{(U_1, U_2, U_6), (U_3, U_4, U_5)\}$  que contiene las aristas  $\langle U_2, U_3 \rangle$ ,  $\langle U_2, U_4 \rangle$ ,  $\langle U_6, U_3 \rangle$ ,  $\langle U_6, U_4 \rangle$  y el peso de  $C_1$ ,  $|C_1|=0.8$ . (Se tiene  $(U_1, U_2, U_6) \cup (U_3, U_4, U_5) = P_1$ ).
- 5)  $\langle P_k \rangle = \langle P_1 \rangle = \langle (U_1, U_2, U_6) \rangle$  y  $\langle P_{N+1} \rangle = \langle P_2 \rangle = \langle (U_3, U_4, U_5) \rangle$ . Se tiene  $G = C_1 = \bigcup_{j=1, \dots, 2} \langle P_j \rangle$ :



3. Existen varios métodos para encontrar el corte de peso mínimo, algunos están basados en el teorema de flujo máximo-mínimo corte de la teoría de flujo en redes, como el que se explica en el Apéndice I; sin embargo cualquier alternativa puede ser utilizada.

6)  $i=2 \mid V \mid - N = 5$  entonces  $i=2$  y volvemos al paso 3.

3) Sea  $\underline{G}_2 = \langle P_1 \rangle$ , es decir  $k=1$  con  $|P_1|=3 \geq 2$ .

4) El corte de peso mínimo de  $\underline{G}_2$  es  $C_2 = (\{u_1, u_2\}, \{u_6\})$  que contiene las aristas  $\langle u_1, u_6 \rangle$ ,  $\langle u_2, u_6 \rangle$  y  $|C_2|=1.1$ . (Se tiene  $\{u_1, u_2\} \cup \{u_6\} = P_1$ ).

5)  $\langle P_k \rangle = \langle P_1 \rangle = \langle \{u_1, u_2\} \rangle$  y  $\langle P_{N+1} \rangle = \langle P_3 \rangle = \langle \{u_6\} \rangle$ . Se tiene  $\underline{G} - \bigcup_{n=1, \dots, 2} C_n = \bigcup_{j=1, \dots, 3} \langle P_j \rangle$ :



6)  $i=2 \mid V \mid - N = 5$  entonces  $i=3$  y volvemos al paso 3.

3) Sea  $\underline{G}_3 = \langle P_1 \rangle$ , es decir  $k=1$  con  $|P_1|=2 \geq 2$ .

4) El corte de peso mínimo de  $\underline{G}_3$  (y único corte) es  $C_3 = (\{u_1\}, \{u_2\})$  que contiene la arista  $\langle u_1, u_2 \rangle$  y  $|C_3|=1$  (Se tiene  $\{u_1\} \cup \{u_2\} = P_1$ ).

5)  $\langle P_k \rangle = \langle P_1 \rangle = \langle \{u_1\} \rangle$  y  $\langle P_{N+1} \rangle = \langle P_6 \rangle = \langle \{u_2\} \rangle$ . Se tiene  $\underline{G} - \bigcup_{n=1, \dots, 2} C_n = \bigcup_{j=1, \dots, 6} \langle P_j \rangle$ :



6)  $i=3 \mid V \mid - N = 5$  entonces  $i=4$  y volvemos al paso 3.

3) Como  $|P_1| = |\{u_1\}| = 1$ ,  $|P_2| = |\{u_3, u_4, u_5\}| = 3$ ,  $|P_3| = |\{u_6\}| = 1$  y  $|P_4| = |\{u_2\}| = 1$ , solo puede darse  $\underline{G}_4 = \langle P_2 \rangle$ , es decir  $k=2$ .

4) El corte de peso mínimo de  $\underline{G}_4$  es  $C_4 = (\{u_3\}, \{u_4, u_5\})$  que contiene las aristas  $\langle u_3, u_4 \rangle$ ,  $\langle u_3, u_5 \rangle$  y  $|C_4|=0.9$

5)  $\langle P_k \rangle = \langle P_2 \rangle = \langle \{u_3\} \rangle$  y  $\langle P_{N+1} \rangle = \langle P_5 \rangle = \langle \{u_4, u_5\} \rangle$ . Se tiene  $\underline{G} - \bigcup_{n=1, \dots, 4} C_n = \bigcup_{j=1, \dots, 5} \langle P_j \rangle$ :



6)  $l=4 \neq |V|-N=5$  entonces  $l=5$  y volvemos al paso 3.

3) Como solo para  $k=5$  se cumple  $|P_k|=|P_5|=2 \geq 2$ , entonces se tiene  $\underline{G}_5 = \langle P_5 \rangle$ .

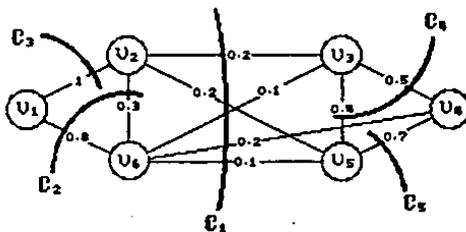
4) El corte de peso mínimo (y único corte) de  $\underline{G}_5$  es  $C_5 = \{(U_4), (U_5)\}$  que contiene la arista  $\langle U_4, U_5 \rangle$  y  $|C_5|=0.7$

5)  $\langle P_k \rangle = \langle P_5 \rangle = \langle (U_4) \rangle$  y  $\langle P_{N+1} \rangle = \langle P_6 \rangle = \langle (U_5) \rangle$ . Se tiene  $\underline{G} - U_{n+1, \dots, 5} C_1 = U_{j=1, \dots, 6} \langle P_j \rangle$ :

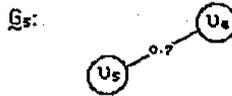
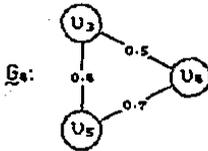
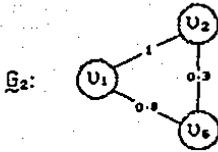


6)  $l=5=|V|-N$  continuamos.

7)  $Z = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$  es un rebanante estrecho de  $\underline{G}$



donde  $|C_1|=0.6$ ,  $|C_2|=1.1$ ,  $|C_3|=1$ ,  $|C_4|=0.9$  y  $|C_5|=0.7$  y  $\underline{G}_1 = \underline{G}$ .



son los subgrafos cortados por el rebanante  $Z$  ■

## CAPÍTULO IV

**APLICACION DE LOS GRAFOS BORROSOS AL  
ANÁLISIS DE CONGLOMERADOS.**

**EL PROBLEMA DEL ANÁLISIS DE CONGLOMERADOS.**

El problema del análisis de conglomerados consiste en:

Dada una colección de objetos  $V$  e información sobre la semejanza entre cada par de estos objetos, encontrar agrupaciones de objetos altamente semejantes entre sí y considerablemente diferentes a los objetos de otras. A estas agrupaciones llamamos *conglomerados*.

En el desarrollo de este capítulo se supondrá que la información sobre la semejanza entre los objetos está dada por una relación borrosa  $\underline{R}$  en  $V$ , asumiendo que conforme aumenta el grado de semejanza entre cada par de objetos, aumenta el valor de  $\mu_{\underline{R}}$ .

Ovviamente la semejanza de un objeto consigo mismo es perfecta, por lo que se tiene para  $\forall x \in V$ ,  $\mu_{\underline{R}}(x,x)=1$ , es decir  $\underline{R}$  es reflexiva; además, dado que un objeto  $x$  se asemeja al objeto  $y$  y tanto como  $y$  se asemeja a  $x$ , se tiene que para  $\forall x,y \in V$ ,  $\mu_{\underline{R}}(x,y)=\mu_{\underline{R}}(y,x)$ , o bien  $\underline{R}$  es simétrica. Tenemos pues que la estructura de datos para el análisis de conglomerados es un grafo borroso  $\underline{G}=[V,\underline{R}]$ , el cual tiene las propiedades de ser *reflexivo* y *simétrico*.

En las aplicaciones donde el grado de semejanza esté dado por una función con codominio diferente a  $[0,1]$ , se podrá ajustar mediante una función conveniente. Por ejemplo, supongamos que el grado de semejanza entre cada par de objetos de  $V$  está dado por una función  $f: V \times V \rightarrow [-10,30]$ , entonces  $\mu_{\underline{R}}$  podría estar dada por:

$$\mu_{\underline{R}}(x,y) = \frac{f(x,y)+10}{40} \quad \text{para } \forall x,y \in V$$

También puede darse el caso de que la medida más natural de semejanza es menor para objetos de mayor semejanza, como la medida de la distancia Euclideana entre puntos en el espacio. En esos casos lo indicado es, una vez ajustada la función  $\mu_{\mathcal{R}}$ , trabajar con la relación complementaria  $\bar{\mathcal{R}}$ .

## PROCEDIMIENTO DE $\epsilon$ -CONECTIVIDAD.

### BASES TEORICAS

Sea  $\mathcal{G}=(V, \mathcal{R})$  un grafo borroso. Un vértice  $v$  se dice que es  $\epsilon$ -alcanzable desde otro vértice  $u$ , para alguna  $0 < \epsilon \leq 1$ , si y solo si existe un camino de  $u$  a  $v$  de cualquier longitud  $k$ , tal que  $g[C_k(u, v)] \geq \epsilon$ .

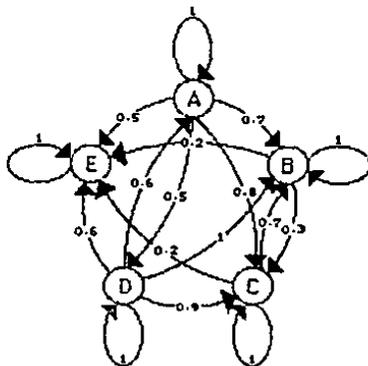
Por el teorema 1 del capítulo anterior, podemos decir que un vértice  $v$  es  $\epsilon$ -alcanzable desde  $u$  si y solo si existe una  $k$  tal que  $\mu_{\mathcal{R}^k}(u, v) \geq \epsilon$  lo que es equivalente a  $\mu_{\hat{\mathcal{R}}}(u, v) \geq \epsilon$ . Por esto, la matriz que representa  $\hat{\mathcal{R}}$  es llamada también *matriz de alcanzabilidad*.

Si  $\mathcal{R}$  es una relación borrosa reflexiva, el corolario 1 del capítulo anterior garantiza que la matriz de alcanzabilidad  $\hat{\mathcal{R}}$  puede ser obtenida con un máximo de  $(n-1)$  multiplicaciones de la matriz que representa  $\mathcal{R}$ .

Sea  $\mathcal{G}=(V, \mathcal{R})$  un grafo borroso. La *conectividad* de un par de vértices  $u$  y  $v$ , denotada por  $c(u, v)$ , es definida como el  $\min(\mu_{\hat{\mathcal{R}}}(u, v), \mu_{\hat{\mathcal{R}}}(v, u))$ , es decir, es la alcanzabilidad mutua entre estos dos vértices. Entonces la matriz de conectividad está dada por  $C = \min(\hat{\mathcal{R}}, \hat{\mathcal{R}}^T)$  donde  $\hat{\mathcal{R}}^T$  es la matriz transpuesta de  $\hat{\mathcal{R}}$ .

Si  $\mathcal{G}$  es reflexivo de orden  $n$ ,  $\exists k \in \mathbb{N}$  con  $k \leq n$ , tal que  $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R}^k$  (corolario 1) y por el lema 2 podemos asegurar que si  $\mathcal{G}$  es simétrico  $C = \hat{\mathcal{R}}$ .

EJEMPLO 18:

Sea  $\mathcal{G} = (V, \mathcal{R})$  el grafo borroso reflexivo

$$\mathcal{R} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0.8 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.7 & 1 & 0 & 0.2 \\ 0.6 & 1 & 0.9 & 1 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \mathcal{R}^2 = \mathcal{R}^k = \mathcal{R}$$

entonces la matriz traspuesta de  $\hat{\mathcal{R}}$  es

$$\hat{\mathcal{R}}^T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0.7 & 1 & 0.7 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0.3 & 1 & 0.9 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0.2 & 0.6 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \text{ y } C = \min(\hat{\mathcal{R}}, \hat{\mathcal{R}}^T) = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Un grafo borroso  $\mathcal{G}$  es llamado  $\epsilon$ -conectado fuertemente si y solo si

cada par de vértices son mutuamente  $\epsilon$ -alcanzables.

**TEOREMA 7.**

*Un grafo borroso  $\underline{G}=[V, \underline{R}]$  es  $\epsilon$ -conectado fuertemente si y solo si existe un vértice  $u$  tal que para cualquier otro vértice  $v$  en  $\underline{G}$ ,  $\mu_{\underline{R}}(u,v) \geq \epsilon$  y  $\mu_{\underline{R}}(v,u) \geq \epsilon$ .*

**Demostración.**

$\Rightarrow$ ) Obvio.

$\Leftarrow$ ) Supóngase que existe un vértice  $u$  tal que para cualesquier  $v_1, v_2 \in V$ ,  $\mu_{\underline{R}}(v_1, u) \geq \epsilon$  y  $\mu_{\underline{R}}(u, v_2) \geq \epsilon$ . Dado que  $\underline{R}$  es transitiva (lema 3) tenemos:

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{R}}(v_1, v_2) &\geq \max_{v \in V} \{ \min( \mu_{\underline{R}}(v_1, v), \mu_{\underline{R}}(v, v_2) ) \\ &\geq \min \{ \mu_{\underline{R}}(v_1, u), \mu_{\underline{R}}(u, v_2) \} \\ &\geq \min \{ \epsilon, \epsilon \} = \epsilon. \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

Este teorema es muy útil ya que facilita la determinación de los subgrafos  $\epsilon$ -conectados fuertemente maximales (Se-CFM) de  $\underline{G}$ , es decir los subgrafos  $\epsilon$ -conectados fuertemente que no están propiamente contenidos en algún otro. El número de Se-CFM en  $\underline{G}$  está dado por el número de renglones distintos de la matriz  $C_{\epsilon}$ . Cada vector renglón diferente corresponde a un Se-CFM, el cual contiene los vértices correspondientes a los elementos distintos de cero.

**EJEMPLO 19:** Sea  $\underline{G}=[V, \underline{R}]$  reflexivo:

$$\underline{R} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.2 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0.8 & 1 & 0 & 0.9 \\ 0.2 & 0.7 & 0.3 & 1 & 0.2 \\ 0.4 & 0 & 0.5 & 0.3 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Si queremos obtener todos los Se-CFM para  $\epsilon=0.5$  necesitamos

obtener  $C_{0.5}$ :

$$C_{0.5} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} = \\ = \\ = \\ = \end{matrix}$$

Dado que  $C_{0.5}$  tiene 3 vectores renglón diferentes,  $\underline{G}$  contiene 3 S0.5-CFM, cuyos conjuntos de vértices son:  $\{v_1\}$ ,  $\{v_2, v_4\}$ ,  $\{v_3, v_5\}$  ■

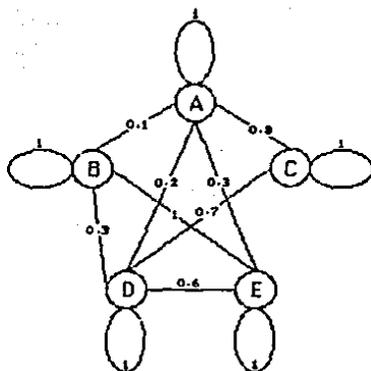
Los resultados anteriores son ahora aplicados al análisis de conglomerados. Suponemos que el grafo borroso  $\underline{G}=[V, \underline{R}]$  de datos es dado, el cual es reflexivo y simétrico.

Para  $0 < \epsilon \leq 1$ , un  $\epsilon$ -componente en  $V$  es un subconjunto maximal  $W$  de  $V$  tal que cada par de elementos de  $W$  es mutuamente  $\epsilon$ -alcanzable. En otras palabras, construir los  $\epsilon$ -componentes de  $V$  es equivalente a encontrar todos los subgrafos maximales  $\epsilon$ -conectados fuertemente de  $\underline{G}$ .

#### ALGORITMO.

- 1) Obtener las representaciones matriciales de  $\underline{R}$ ,  $\underline{R}^2, \dots, \underline{R}^k$  donde  $k$  es el entero más pequeño para el cual  $\underline{R}^k = \underline{R}^{k+1}$ .
- 2) Nótese que  $\hat{\underline{R}} = \underline{R}^k$ . Obtuvimos la matriz de alcanzabilidad.
- 3) Obtener la matriz de relación clásica de nivel  $\epsilon$  de  $\hat{\underline{R}}$ , a saber  $\hat{\underline{R}}_\epsilon$ .
- 4) El número de  $\epsilon$ -componentes está dado por el número de rengiones distintos de  $\hat{\underline{R}}_\epsilon$ . Para cada vector renglón  $\alpha$  en  $\hat{\underline{R}}_\epsilon$ , los vértices contenidos en el correspondiente  $\epsilon$ -componente son los elementos diferentes de cero de las correspondientes columnas de  $\alpha$ .

EJEMPLO 20: Sea  $\underline{G}=[V, \underline{R}]$  el siguiente grafo borroso:



es una relación de semejanza. Deseamos obtener todos los  $\epsilon$ -componentes para todos los valores diferentes de  $\epsilon$ . Siguiendo los pasos del algoritmo:

1)

$$R = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & A & B & C & D & E \\ A & \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0.1 & 0.8 & 0.2 & 0.3 \end{array} \right] \\ B & \left[ \begin{array}{cccccc} 0.1 & 1 & 0 & 0.3 & 1 \end{array} \right] \\ C & \left[ \begin{array}{cccccc} 0.8 & 0 & 1 & 0.7 & 0 \end{array} \right] \\ D & \left[ \begin{array}{cccccc} 0.2 & 0.3 & 0.7 & 1 & 0.6 \end{array} \right] \\ E & \left[ \begin{array}{cccccc} 0.3 & 1 & 0 & 0.6 & 1 \end{array} \right] \end{array} \end{array}$$

$$R^\epsilon = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & A & B & C & D & E \\ A & \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0.3 & 0.8 & 0.7 & 0.3 \end{array} \right] \\ B & \left[ \begin{array}{cccccc} 0.3 & 1 & 0.3 & 0.6 & 1 \end{array} \right] \\ C & \left[ \begin{array}{cccccc} 0.8 & 0.3 & 1 & 0.7 & 0.6 \end{array} \right] \\ D & \left[ \begin{array}{cccccc} 0.7 & 0.6 & 0.7 & 1 & 0.6 \end{array} \right] \\ E & \left[ \begin{array}{cccccc} 0.3 & 1 & 0.6 & 0.6 & 1 \end{array} \right] \end{array} \end{array}$$

$$R^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & A & B & C & D & E \\ A & \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0.3 & 0.8 & 0.7 & 0.6 \end{array} \right] \\ B & \left[ \begin{array}{cccccc} 0.3 & 1 & 0.6 & 0.6 & 1 \end{array} \right] \\ C & \left[ \begin{array}{cccccc} 0.8 & 0.6 & 1 & 0.7 & 0.6 \end{array} \right] \\ D & \left[ \begin{array}{cccccc} 0.7 & 0.6 & 0.7 & 1 & 0.6 \end{array} \right] \\ E & \left[ \begin{array}{cccccc} 0.6 & 1 & 0.6 & 0.6 & 1 \end{array} \right] \end{array} \end{array}$$

$$R^3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & A & B & C & D & E \\ A & \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0.6 & 0.8 & 0.7 & 0.6 \end{array} \right] \\ B & \left[ \begin{array}{cccccc} 0.6 & 1 & 0.6 & 0.6 & 1 \end{array} \right] \\ C & \left[ \begin{array}{cccccc} 0.8 & 0.6 & 1 & 0.7 & 0.6 \end{array} \right] \\ D & \left[ \begin{array}{cccccc} 0.7 & 0.6 & 0.7 & 1 & 0.6 \end{array} \right] \\ E & \left[ \begin{array}{cccccc} 0.6 & 1 & 0.6 & 0.6 & 1 \end{array} \right] \end{array} = R^\epsilon$$

2) Sea  $\hat{R} = R^4$ .

3) Las relaciones clásicas de nivel  $\epsilon$ , para  $\epsilon = 0.6, 0.7, 0.8$  y  $1$  son:

$$\hat{R}_{0.6} = \begin{matrix} & A & B & C & D & E \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

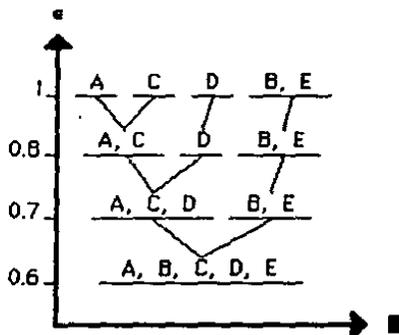
$$\hat{R}_{0.7} = \begin{matrix} & A & B & C & D & E \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\hat{R}_{0.8} = \begin{matrix} & A & B & C & D & E \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\hat{R}_1 = \begin{matrix} & A & B & C & D & E \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

4)	$\epsilon$	Número de $\epsilon$ -componentes	$\epsilon$ -componentes
	0.6	1	{A,B,C,D,E}
	0.7	2	{A,C,D}, {B,E}
	0.8	3	{A,C}, {B,E}, {D}
	1	4	{A}, {B,E}, {C}, {D}

Los resultados obtenidos pueden representarse mediante la siguiente arborescencia:



El procedimiento de  $\epsilon$ -conectividad es útil solo cuando  $\epsilon$  es

relativamente alto; como se puede ver en el ejemplo anterior, para  $\epsilon \leq 0.6$ , solamente había un conglomerado, que coincidía con el conjunto de objetos a conglomerar.

Obviamente, tiene el defecto de tener un *alto grado de encadenamiento*, es decir, puede agrupar en un mismo conglomerado a 2 objetos poco semejantes entre sí pero semejantes a través de terceros.

#### TEOREMA 8.

Para  $\epsilon > 0$ , los  $\epsilon$ -componentes de un grafo borroso  $\underline{G}$  son ajenos.

#### Demostración.

Sean  $\underline{G}_1$  y  $\underline{G}_2$  dos  $\epsilon$ -componentes de  $\underline{G}$  tales que sus conjuntos de vértices tienen al menos un elemento en común. Entonces  $\exists x_0 \in V_1, y_0 \in V_2$  tales que  $\mu_{\underline{R}}(x_0, y_0) \geq \epsilon$ , y por transitividad de  $\underline{R}$ , para  $\forall x \in V_1, y \in V_2$

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{R}}(x, y) &\geq \max_{u_1 \in V_1} \{ \min( \mu_{\underline{R}}(x, u_1), \mu_{\underline{R}}(u_1, y) ) \} \\ &\geq \min( \mu_{\underline{R}}(x, x_0), \mu_{\underline{R}}(x_0, y) ) \\ &\geq \min( \mu_{\underline{R}}(x, x_0), \max_{u_2 \in V_2} \{ \min( \mu_{\underline{R}}(x, u_2), \mu_{\underline{R}}(u_2, y) ) \} ) \\ &\geq \min( \mu_{\underline{R}}(x, x_0), \min( \mu_{\underline{R}}(x_0, y_0), \mu_{\underline{R}}(y_0, y) ) ) \\ &= \min( \mu_{\underline{R}}(x, x_0), \mu_{\underline{R}}(x_0, y_0), \mu_{\underline{R}}(y_0, y) ) \\ &\geq \epsilon \end{aligned}$$

$\therefore \langle V_1, UV_2 \rangle$  es  $\epsilon$ -conectado

Dado que  $\langle V_1 \rangle = \underline{G}_1$  y  $\langle V_2 \rangle = \underline{G}_2$  son  $\text{Se-CFM}$ , se concluye que  $\underline{G}_1 = \underline{G}_2$ .

*Q.E.D.*

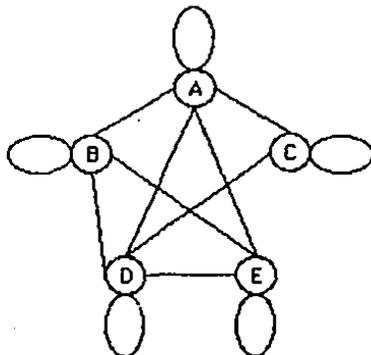
#### COMPARACION CON EL PROCEDIMIENTO CLASICO DE ENLACE SIMPLE.

El procedimiento clásico para la obtención de conglomerados denominado *enlace simple* determina un conglomerado con el requisito de que cada objeto tenga una relación mayor o igual a  $\alpha$  con al menos otro objeto del conglomerado.

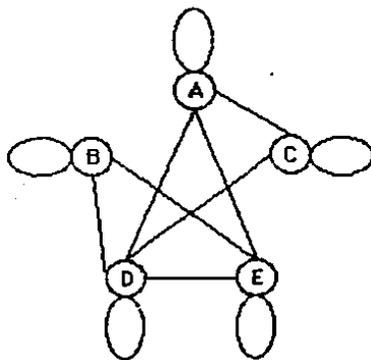
Todos los conglomerados obtenidos por este procedimiento pueden ser obtenidos por el de  $\epsilon$ -conectividad (para  $\alpha = \epsilon$ ). La diferencia es que

los subgrafos máximos  $\varepsilon$ -conectados fuertemente pueden ser obtenidos directamente de  $\underline{R}$ , con un máximo de  $n-1$  multiplicaciones de matrices (donde  $n$  es el orden de  $\underline{G}=(V,\underline{R})$ ), mientras que en el procedimiento de enlace simple, es necesario obtener tantos grafos de nivel  $\alpha$  como el número de pesos distintos de las aristas de  $\underline{G}$ .

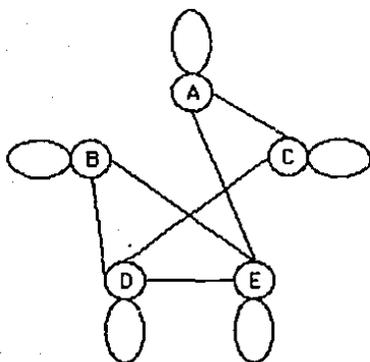
SOLUCION POR PROCEDIMIENTO DE ENLACE SIMPLE.



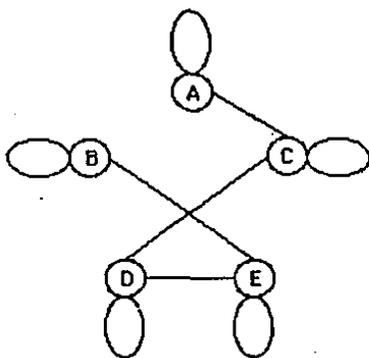
para  $\alpha=0.1$



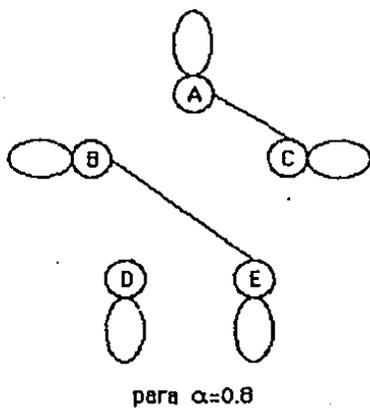
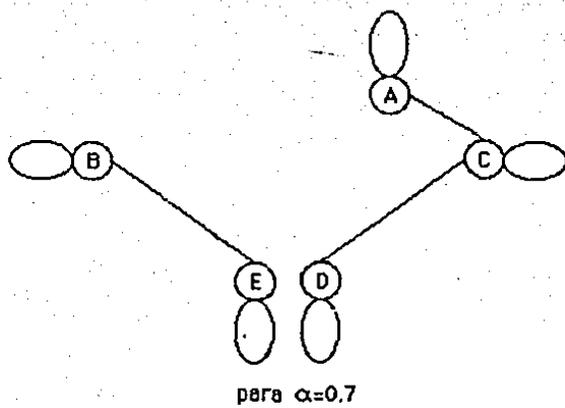
para  $\alpha=0.2$

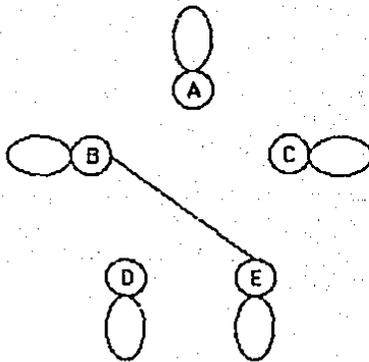


para  $\alpha=0.3$



para  $\alpha=0.6$





para  $\alpha=1$

## PROCEDIMIENTO DE $\tau$ -GRADOS DE CONECTIVIDAD

### BASES TEÓRICAS.

Consideremos el grafo borroso simétrico  $\underline{G}=[V, \underline{R}]$ . El *grado* de un vértice  $u \in V$  está dado por

$$d(u) = \sum_{u \neq v} \mu_{\underline{R}}(u, v).$$

es decir, es el peso del corte  $(\{u\}, V - \{u\})$ :  $d(u) = |(\{u\}, V - \{u\})|$ .

El *mínimo grado* de  $\underline{G}$  es  $\delta(\underline{G}) = \min_{u \in V} \{d(u)\}$  y el *máximo grado* de  $\underline{G}$  es  $\Delta(\underline{G}) = \max_{u \in V} \{d(u)\}$ .

### LEMA 4.

Sea  $\underline{G}=[V, \underline{R}]$  un grafo borroso simétrico y  $\langle V_i \rangle$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , subgrafos de  $\underline{G}$  (con  $V_i \subset V$  para toda  $i$ ), tales que  $\langle \bigcup_i V_i \rangle$  es conexo. Entonces:

- i)  $\delta(\bigcup_i V_i) \geq \min_i \{\delta(V_i)\}$
- ii)  $\Delta(\bigcup_i V_i) \geq \max_i \{\Delta(V_i)\}$

**Demostración.**

Para  $\forall u \in V_i$ , para alguna  $i$ , sea  $d_i(u)$  su grado en  $\langle V_i \rangle$  y  $d(u)$  su grado en  $\langle U_i V_i \rangle$ . Dado que  $u$  está conectada en  $U_i V_i$  con los mismos vértices que en  $V_i$ , para alguna  $i$ , más aparte puede estar conectada con otros vértices de  $U_i V_i$ , tenemos que  $d(u) \geq d_i(u)$ .

i) Sea  $\delta \langle U_i V_i \rangle = d(u_k)$ ,  $u_k \in V_j$ .

$$\delta \langle U_i V_i \rangle = d(u_k) \geq d_j(u_k) \geq \delta \langle V_j \rangle \geq \min_i \{ \delta \langle V_i \rangle \}.$$

ii) Además si

$$\max_i \{ \Delta \langle V_i \rangle \} = \Delta \langle V_j \rangle = d(u_k) \leq d(u_k) \leq \Delta \langle U_i V_i \rangle.$$

*D.E.D.*

$\underline{G}$  se dice que es  $\tau$ -grados conectado, para algún  $\tau \geq 0$  si  $\delta(\underline{G}) \geq \tau$  y  $\underline{G}$  es conexo. Un *componente de  $\tau$ -grados* de  $\underline{G}$  es un subgrafo  $\tau$ -grados conectado maximal de  $\underline{G}$ .

**TEOREMA 9.**

*Para cualquier  $\tau \geq 0$ , los componentes de  $\tau$ -grados de un grafo borroso simétrico son ajenos.*

**Demostración.**

Sean  $\langle V_1 \rangle$  y  $\langle V_2 \rangle$  dos componentes de  $\tau$ -grados de  $\underline{G}$  tales que  $V_1$  y  $V_2$  tienen al menos un componente en común. Por el lema 4 tenemos

$$\delta \langle V_1 U V_2 \rangle \geq \min \{ \delta \langle V_1 \rangle, \delta \langle V_2 \rangle \} \geq \tau$$

Dado que  $\langle V_1 \rangle$  y  $\langle V_2 \rangle$  son maximales con respecto a  $\tau$ -grados de conectividad, concluimos que  $\langle V_1 \rangle = \langle V_2 \rangle$ .

*D.E.D.*

### ALGORITMO.

Determinación de los componentes de  $\tau$ -grados de un grafo borroso simétrico finito  $\underline{G} = [V, R]$ .

1) Obtener la matriz  $M$  sustituyendo los valores de la diagonal de la

matriz  $R$  por ceros.

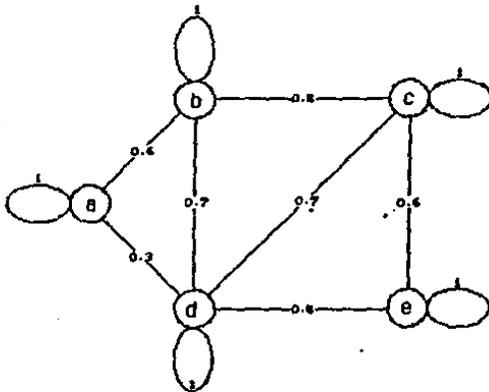
2) Calcular las sumas de los renglones.

3) Si hay renglones con suma menor que  $\tau$ , obtener una nueva matriz reducida eliminando esos vértices y volver al paso 2.

4) Si no hay tal renglón, alto.

5) Cada componente del grafo inducido por los vértices de la última matriz, así como cada vértice eliminado es un subgrafo  $\tau$ -grados conectado maximal.

EJEMPLO 21(a): Sea  $G = (V, R)$



$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.6 & 1 & 0.4 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0.4 & 1 & 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 & 0.7 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Para  $\tau=1.1$

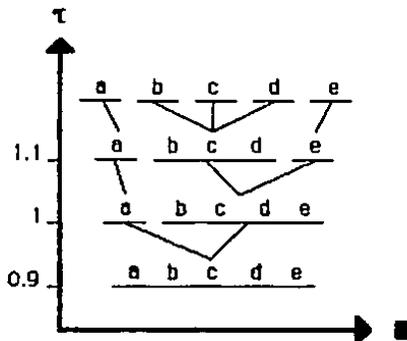
	a	b	c	d	e	Sumas
a	0.7	0.4	0.7	0	0	1.8
b	0.7	0	0.4	0.7	0	1.7
c	0.4	0	0.7	0.6	0	1.7
d	0.7	0.7	0	0.4	0	2.1
e	0	0.6	0.4	0	0	1.0

	b	c	d	e	Sumas
b	0	0.4	0.7	0	1.1
c	0.4	0	0.7	0	1.7
d	0.7	0.7	0	0.4	1.8
e	0	0.6	0.4	0	1.0

	b	c	d	Sumas
b	0	0.4	0.7	1.1
c	0.4	0	0.7	1.1
d	0.7	0.7	0	1.4

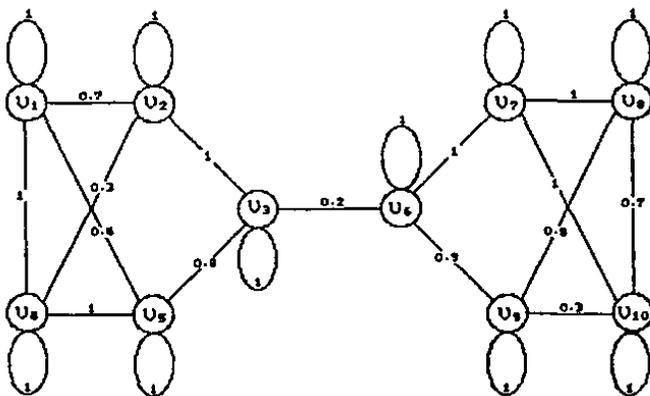
- Para  $\tau=0.9$  solo se necesita la matriz M y el único componente maximal de 0.9-grados es {a,b,c,d,e}.
- Para  $\tau=1$ , se necesitan M y M'. Los componentes de 1-grados son {a} y {b,c,d,e}.
- Para  $\tau=1.1$  obtenemos hasta M'' y los componentes maximales de 1.1-grados son {a}, {b,c,d} y {e}.
- Para  $\tau>1.1$  los componentes maximales de  $\tau$ -grados son {a}, {b}, {c}, {d} y {e}.

La arborescencia es entonces



Como se vió en el teorema 7, los conglomerados determinados por el análisis de  $\tau$ -grados son ajenos; sin embargo el efecto de encadenamiento todavía es posible, como se ve en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 22. El siguiente grafo borroso simétrico



forma un componente de  $\tau$ -grados, para  $\tau_2$ , como se ve en los sumos por renglones de la matriz asociada:

	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$	$U_5$	$U_6$	$U_7$	$U_8$	$U_9$	$U_{10}$	Sumas
$U_1$	0	0.7	0	1	0.4	0	0	0	0	0	2.1
$U_2$	0.7	0	1	0.3	0	0	0	0	0	0	2.0
$U_3$	0	1	0	0	0.6	0.2	0	0	0	0	2.0
$U_4$	1	0.3	0	0	1	0	0	0	0	0	2.3
$U_5$	0.4	0	0.6	1	0	0	0	0	0	0	2.2
$U_6$	0	0	0.2	0	0	0	1	0	0.9	0	2.1
$U_7$	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	3.0
$U_8$	0	0	0	0	0	0	1	0	0.8	0.7	2.5
$U_9$	0	0	0	0	0	0.9	0	0.8	0	0.3	2.0
$U_{10}$	0	0	0	0	0	0	1	0.7	0.3	0	2.0

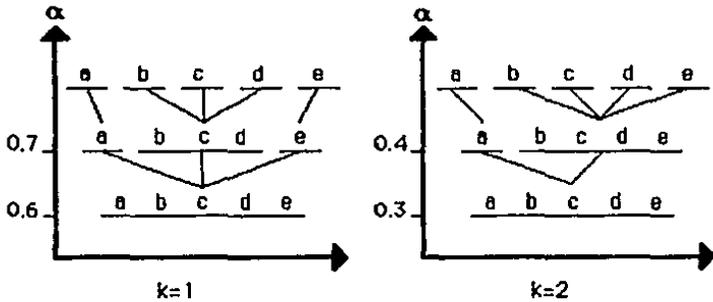
Entre los vértices ( $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ ) y los vértices ( $v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}$ ) solo existe una arista de peso 0.2; sin embargo aún el análisis de 2-grados considera el grafo como un solo conglomerado, encadenando lo que lógicamente debería de ser considerado como 2 conglomerados ■

COMPARACION CON EL PROCEDIMIENTO CLASICO DE k-ENLACES.

En el análisis clásico de conglomerados por el procedimiento de k-enlaces, cada objeto de un conglomerado debe estar conectado con al menos otros k objetos del conglomerado por aristas con peso mayor o igual que  $\alpha$ .

En el ejemplo 21 se puede observar que no todos los conglomerados obtenibles por el procedimiento de  $\tau$ -grados de conectividad lo son por el procedimiento de k-enlaces, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 21(b).SOLUCION POR PROCEDIMIENTO DE k-ENLACES.



TEOREMA 10.

*El procedimiento de  $\tau$ -grados de conectividad para la construcción de conglomerados es más efectivo que el uso del procedimiento de k-enlaces.*

### Demostración.

Como se vió, en el ejemplo anterior, no todos los conglomerados obtenibles por el procedimiento de  $\tau$ -grados de conectividad los son por el de  $k$ -enlaces. Entonces es suficiente demostrar que todos los conglomerados obtenibles por el procedimiento de  $k$ -enlaces lo son por el de  $\tau$ -grados de conectividad para alguna  $\tau$ .

Sea  $\underline{G} = [V, \underline{g}]$  un grafo borroso simétrico. Para  $0 < \alpha \leq 1$ , sea  $G'$  el grafo obtenido de  $\underline{G}$  al sustituir los pesos de  $\underline{G}$  menores que  $\alpha$  por 0. Para cualquier  $k$  usada en el procedimiento de  $k$ -enlaces, sea  $\tau = k\alpha$ . Fácilmente podemos observar que un subconjunto de  $V$  es un conglomerado de  $k$ -enlaces de  $G'$  si y solo si es un conglomerado obtenido al aplicar el procedimiento de  $\tau$ -grados de conectividad a  $\underline{G}$ .

*Q.E.D.*

## PROCEDIMIENTO DE $\tau$ -ARISTAS DE CONECTIVIDAD.

### BASES TEORICAS.

En el procedimiento de  $\tau$ -grados de conectividad de la sección precedente, un elemento  $v$  esté contenido en un conglomerado  $U \subseteq V$  solo si el peso del corte  $(\{v\}, U - \{v\})$  es mayor o igual a  $\tau$ . Como se vió en el ejemplo 22, la posibilidad de encadenamiento prevalece en el análisis de  $\tau$ -grados de conectividad. El problema en este ejemplo es que  $|C| = |(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\})| = 0.2$  a pesar de que  $|(\{v_i\}, V - \{v_i\})| \geq 2$  para toda  $i$ . Entonces un procedimiento que mejoraría la noción de  $\tau$ -grados de conectividad sería determinar los conjuntos  $U \subseteq V$  donde  $|(\{W, \bar{W}\})| \geq \tau$  para todas las particiones  $W, \bar{W}$  de  $U$ . Esto nos conduce a la noción de *conectividad de aristas* de un grafo.

La *conectividad de aristas*,  $\lambda(\underline{G})$  es el peso mínimo de cualquier

corte que separa los vértices de un grafo borroso no trivial. Un grafo borroso simétrico  $\underline{G}=(V, R)$ , no trivial, es  $\tau$ -aristas conectado si cada corte que separa los vértices de  $\underline{G}$  tiene un peso de al menos  $\tau$ , es decir,  $\lambda(\underline{G}) \geq \tau$ . Un *componente de  $\tau$ -aristas* es un subgrafo maximal de  $\underline{G}$  con respecto a la conectividad de  $\tau$ -aristas. Un grafo borroso trivial, así como un grafo borroso no conexo tienen cero aristas de conectividad, y son  $\tau$ -aristas conectado solo para  $\tau=0$ .

Cualquier corte de un grafo conexo no trivial contiene al menos una arista, por lo cual  $\lambda(\underline{G}) > 0$ . Sabemos que los subgrafos conexos maximales, así como los subgrafos triviales son los componentes de  $\underline{G}$ . Anteriormente se señaló que los componentes y los subgrafos borrosos  $\tau$ -grados conectados son ajenos entre sí, por lo cual un análisis de conglomerados basado en cualquiera de estos criterios conduce a conglomerados ajenos. Esta propiedad se obtiene para los componentes de  $\tau$ -aristas. Para mostrarlo necesitamos primero el

LEMA 5.

Sean  $\underline{G}_1, \underline{G}_2, \dots, \underline{G}_n, \underline{G}_i=(V_i, R_i)$ , subgrafos de  $\underline{G}$  tales que  $U_{i=1, \dots, n} \underline{G}_i$  es conexa. Entonces:

$$\lambda(\langle U_{i=1, \dots, n} V_i \rangle) \geq \lambda(U_{i=1, \dots, n} \underline{G}_i) \geq \min_{i=1, \dots, n} \{\lambda(\underline{G}_i)\}.$$

Demostración.

Si  $U_{i=1, \dots, n} \underline{G}_i$  consta de un solo vértice; el resultado es inmediato. Por otro lado, sea  $C=(A, \bar{A})$  el mínimo corte de  $U_{i=1, \dots, n} \underline{G}_i$  el cual debe contener al menos una arista dado que es conexo y no trivial. Si  $C$  contiene una arista de  $\underline{G}_j=(V_j, R_j)$ , tanto  $A$  como  $\bar{A}$  contienen vértices de  $V_j$ , por lo cual  $C$  contiene un corte de  $\underline{G}_j$ . Luego  $\lambda(U_{i=1, \dots, n} \underline{G}_i) \geq \lambda(\underline{G}_j)$  para al menos una  $\underline{G}_j, 1 \leq j \leq n$ , concluyendo  $\lambda(U_{i=1, \dots, n} \underline{G}_i) \geq \min_i \lambda(\underline{G}_i)$ .

Además, cualquier corte de  $\langle U_{i=1, \dots, n} V_i \rangle$  debe contener un corte de  $U_{i=1, \dots, n} \underline{G}_i$ , entonces  $\lambda(\langle U_{i=1, \dots, n} V_i \rangle) \geq \lambda(U_{i=1, \dots, n} \underline{G}_i)$ .

Q.E.D.

## TEOREMA 11.

Para  $\tau > 0$ , los componentes de  $\tau$ -aristas de un grafo borroso simétrico son ajenos.

Demostración.

Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos componentes de  $\tau$ -aristas de  $G$ , tales que sus conjuntos de vértices tienen al menos un elemento en común. Como

$$\begin{aligned} \lambda(\langle V_1 \cup V_2 \rangle) &\geq \min \{ \lambda(\langle V_1 \rangle), \lambda(\langle V_2 \rangle) \} \\ &= \min \{ \lambda(G_1), \lambda(G_2) \} \geq \tau \end{aligned}$$

por el lema 5, tenemos que  $\langle V_1 \cup V_2 \rangle$  es  $\tau$ -aristas conectado. Dado que  $G_1$  y  $G_2$  son maximales con respecto a la conectividad de  $\tau$ -aristas, concluimos que  $G_1 = G_2$ .

*Q.E.D.*

Así, el determinar los componentes de  $\tau$ -aristas de  $G$  para un valor considerablemente pequeño  $\tau$  es un procedimiento de análisis de conglomerados que evita el encadenamiento al mismo tiempo que preserva la propiedad de determinar conglomerados ajenos.

Conforme crece el valor de  $\tau$ , más vértices salen del componente de  $\tau$ -aristas; así se establece una jerarquía natural en base a la intensidad de la conectividad de los vértices.

Sea  $x$  un elemento (vértice o arista) del grafo borroso simétrico  $G$ . La *cohesividad* de  $x$ ,  $h(x)$ , es el máximo valor de la conectividad de aristas de todos los posibles subgrafos de  $G$  que contienen a  $x$ :

$$h(x) = \max \{ \lambda(G') \mid x \in G' \text{ y } G' \text{ es un subgrafo de } G \}.$$

La función de cohesividad puede ser representada por la matriz de cohesividad (simétrica)  $H$ , cuyas columnas y renglones son los vértices de  $G$  y la entrada en la posición  $v_i, v_j$  es la cohesividad de la arista  $\langle v_i, v_j \rangle$  o cero si no existe tal arista en  $G$ . Tenemos entonces que la cohesividad de un vértice  $v_i$  es el valor máximo del renglón correspondiente a  $v_i$ .

## TEOREMA 12.

Sean  $\langle A_1 \rangle, \langle A_2 \rangle, \dots, \langle A_m \rangle$  los subgrafos cortados por el rebanante estrecho  $Z = (C_1, C_2, \dots, C_m)$  de  $\underline{G}$ . Entonces todo componente de  $\tau$ -aristas es igual a  $\langle A_i \rangle$  para alguna  $i \leq m$ . Además, para  $\forall i, i \leq m$ ,  $\langle A_i \rangle$  es un componente de  $\tau$ -aristas ( $\tau = |C_i|$ ) si y solo si

$$A_j \supset A_i \text{ para } j < i \Rightarrow |C_j| < |C_i|$$

Demostración.

i) Si  $\langle A_1 \rangle, \langle A_2 \rangle, \dots, \langle A_m \rangle$  son los subgrafos cortados por el rebanante estrecho  $Z = (C_1, C_2, \dots, C_m)$  de  $\underline{G}$  y como para  $\forall i, C_i$  es el corte de peso mínimo de  $\langle A_i \rangle$  entonces  $\lambda(\langle A_i \rangle) = |C_i|$ .

Sea  $H$  un componente de  $\tau$ -aristas para cualquier  $\tau > 0$ . Sea también  $C_n$  el primer corte de  $Z$  que separa los vértices de  $H$ . Se sigue entonces que  $H$  es un subgrafo de  $\langle A_n \rangle$  y el peso de  $C_n$  debe ser al menos el peso del mínimo corte de  $H$ , es decir

$$|C_n| = \lambda(\langle A_n \rangle) \geq \lambda(H).$$

Por consiguiente  $\langle A_n \rangle$  es un subgrafo de  $\lambda(H)$ -aristas de conectividad y como  $H$  es un subgrafo  $\lambda(H)$ -aristas conectado maximal de  $\underline{G}$ , así como subgrafo de  $\langle A_n \rangle$  se concluye que  $H = \langle A_n \rangle$ .

(i) Para  $i \leq m$ , dado que  $\langle A_i \rangle$  es un subgrafo  $\lambda(\langle A_i \rangle)$ -aristas conectado, debe estar contenido en algún componente de  $\lambda(\langle A_i \rangle)$ -aristas  $H$ , de  $\underline{G}$  y por el inciso (i),  $H = \langle A_j \rangle$  para  $j \leq i$ . Así,  $\langle A_i \rangle$  es un  $\lambda(\langle A_i \rangle)$ -componente de  $\underline{G}$  si y solo si  $A_j \supset A_i$  para  $j < i \Rightarrow |C_j| < |C_i|$  (i.e.  $\lambda(\langle A_j \rangle) < \lambda(\langle A_i \rangle)$ ).

*Q.E.D.*

Tenemos entonces que los subgrafos cortados por cualquier rebanante estrecho incluye todos los componentes de  $\tau$ -aristas de  $\underline{G}$ . Esta información es suficiente para determinar la función de cohesividad, resumiéndose en el

## TEOREMA 13.

Sean  $\langle A_1 \rangle, \langle A_2 \rangle, \dots, \langle A_m \rangle$  los subgrafos cortados por un rebanante

estrecho  $Z=(C_1, C_2, \dots, C_m)$  de  $\underline{G}$ . Entonces para cualquier elemento  $x$  de  $\underline{G}$ :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es v\u00e9rtice aislada de } \underline{G} \\ \text{m\u00e1x}_i \{ |C_i| / x \in C_i \} & \text{otra cosa.} \end{cases}$$

### ALGORITMO.

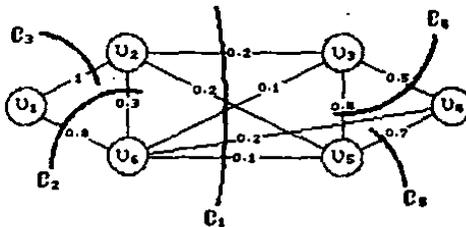
Supongamos el grafo borroso sim\u00e9trico  $\underline{G}=(V, R)$  con  $N$  componentes y al menos 1 arista.

- 1) Obtengase un rebanante estrecho  $Z$  de  $\underline{G}$ .
- 2) Construyase la matriz de cohesividad  $H$  de la siguiente manera: para cada arista  $\langle v_i, v_j \rangle$  de  $\underline{G}$ :  
 $h(\langle v_i, v_j \rangle) = \text{m\u00e1x}_{1 \leq i \leq N} \{ |C_i| / \langle v_i, v_j \rangle \text{ es elemento de } C_i \}$ ;  
 en la entrada  $v_i, v_j$  de la matriz  $H$  col\u00f3quese  $h(\langle v_i, v_j \rangle)$  si  $v_i \neq v_j$  y existe la arista  $\langle v_i, v_j \rangle$ , si no, col\u00f3quese 0.
- 3)<sup>a</sup> Obt\u00e9ngase el grafo de nivel  $\tau$  de  $H$ .
- 4)<sup>a</sup> Cada componente del subgrafo de  $\tau$ -aristas de conectividad es maximal.

### EJEMPLO 23.

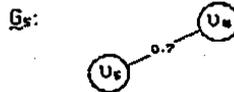
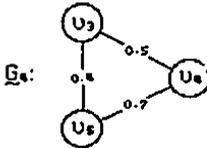
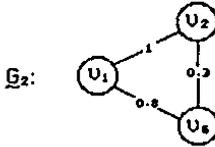
Consideremos el grafo borroso sim\u00e9trico  $\underline{G}=(V, R)$  del ejemplo 17 del cap\u00edtulo anterior.

- 1) Tenemos el rebanante estrecho  $Z=(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)$ :



4. En lugar de hacer los pasos 3 y 4, se puede hacer  $h(v, v)=n$ , donde  $n$ =orden de  $V$ , y buscar los  $\epsilon$ -componentes de esta relaci\u00f3n borrosa reflexiva, la cual tiene una funci\u00f3n de membres\u00eda con rango en  $[0, n]$ , para  $\epsilon=\tau$ .

donde  $|E_1|=0.8$ ,  $|E_2|=1.1$ ,  $|E_3|=1$ ,  $|E_4|=0.9$  y  $|E_5|=0.7$  y  $E_i \cap E_j = \emptyset$ .

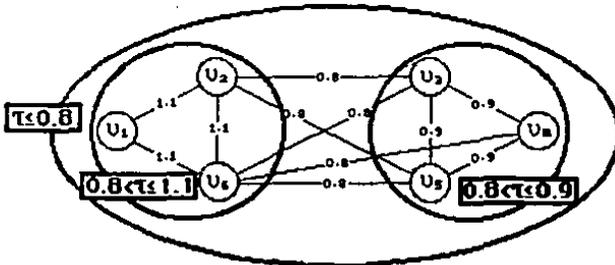


son los subgrafos cortados por el rebanante  $Z$ .

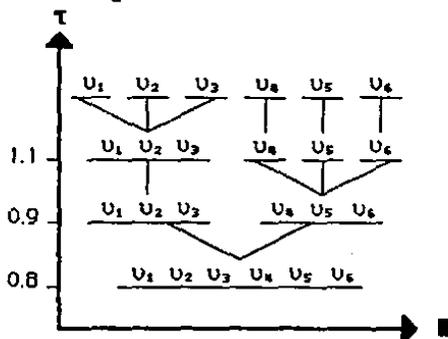
2) La matriz de cohesividad está dada por:

$$H = \begin{matrix} & \begin{matrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1.1 & 0 & 0 & 0 & 1.1 \\ 1.1 & 0 & 0.8 & 0 & 0.8 & 1.1 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0.9 & 0.9 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0.9 & 0.8 \\ 0 & 0.8 & 0.9 & 0.9 & 0 & 0.8 \\ 1.1 & 1.1 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

3) y 4)



entonces obtenemos la siguiente arborescencia:



Para resumir las propiedades del procedimiento de  $\tau$ -aristas de conectividad, nótese que no es sujeto de encadenamiento como lo son el procedimiento de  $\epsilon$ -conectividad y el procedimiento de  $\tau$ -grados de conectividad, aunque conserva la propiedad de determinar conglomerados ajenos. Además, la jerarquía natural (dada por los contornos de cohesividad) permite la asignación simultánea de los conglomerados de mayor fuerza y una medida del mejor grupo al cual un objeto en particular puede permanecer.

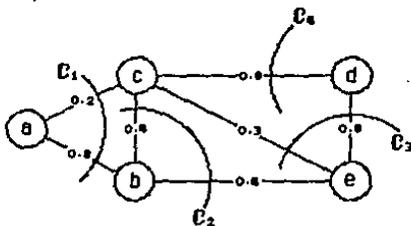
Intuitivamente, el procedimiento de  $\tau$ -aristas de conectividad mide la fuerza de un conglomerado en términos de su resistencia a ser dividido.

#### COMPARACION CON EL PROCEDIMIENTO CLASICO DE K-ARISTAS.

En el análisis clásico de conglomerados por el procedimiento de  $k$ -aristas, cada corte del conglomerado debe contener al menos  $k$  aristas con un peso mayor o igual que  $\alpha$ . En el ejemplo que se da a continuación, podrá observarse que no todos los conglomerados obtenibles por el procedimiento de  $\tau$ -aristas de conectividad lo son por el análisis clásico de  $k$ -aristas.

## EJEMPLO 24:

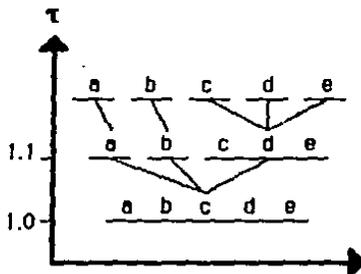
Sean  $\underline{G}$  el grafo borroso simétrico y  $Z=(C_1, \dots, C_4)$  el rebanante estrecho de  $\underline{G}$  dados por:



entonces la matriz de cohesividad está dada por:

$$H = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1.1 & 1.1 \\ 0 & 0 & 1.1 & 0 & 1.1 \\ 0 & 1 & 1.1 & 1.1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

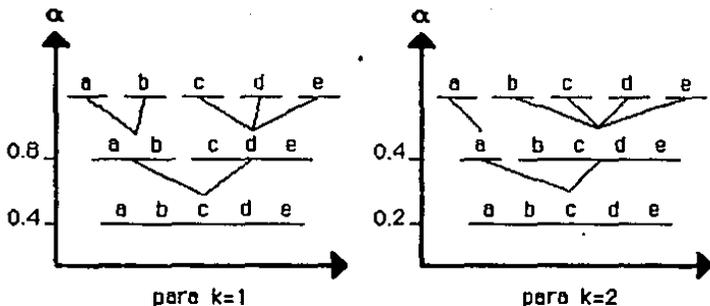
La arborescencia que indica los conglomerados obtenibles por este procedimiento es:



De los grafos de nivel  $\alpha$  de  $\underline{G}$ , la misma arborescencia no puede

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

obtenerse por el procedimiento de  $k$ -aristas, como se puede ver a continuación:



Por este ejemplo y una demostración similar a la del teorema 10 de la sección precedente, tenemos el siguiente resultado:

#### TEOREMA 14.

*El procedimiento de  $\tau$ -aristas de conectividad para la construcción de conglomerados es más eficiente que el procedimiento de  $k$ -aristas de conectividad.*

## CAPITULO V

### UN EJEMPLO: ADMINISTRACION DE GRUPOS

#### ADMINISTRACION DE GRUPOS

El componente común de todas las organizaciones son las personas y la técnica más común para realizar el trabajo a través de estas personas consiste en dividirlos en grupos. La *administración de grupos de trabajo* requiere guiar el comportamiento de los miembros de la organización en una forma tal que se eleve la probabilidad de que la organización logre sus objetivos.

Tal como se usa en los estudios relacionados con la administración, un *grupo* no es tan sólo una reunión de personas, sino un número de personas que interactúan entre sí, estén psicológicamente conscientes una de otra y se perciban a sí mismas como grupo. Este grupo se caracteriza por la capacidad de cada miembro del grupo de comunicarse con todos los demás miembros personalmente, para lo cual el grupo debe ser suficientemente pequeño. Como resultado de esta comunicación, cada miembro influye y se ve influido por todos los demás miembros.

Existen dos tipos de grupos de trabajo:

- Los *grupos de mando* que se determinan por la cadena de mando de un organigrama, i.e., de la estructura de una organización. En general, los grupos de mando manejan las actividades organizacionales más rutinarias.
- Los *grupos de tareas* están formados por miembros de la organización que interactúan entre sí para efectuar la mayoría de las tareas organizacionales. Un ejemplo de estos grupos son los *comités*, los cuales pueden formarse para mejorar la calidad de la toma de decisiones. Gene-

ralmente, a medida que más personas participan en la toma de una decisión, los puntos fuertes y débiles de esa decisión se analizan con mayor detalle y la calidad de la decisión tiende a aumentar.

Principalmente son cuatro los factores que influyen en la efectividad de los grupos de trabajo:

1) *Cohesión del grupo de trabajo.* El grado de cohesión interna del grupo es la atracción que sienten los miembros del grupo entre sí en términos del deseo de ser miembros de éste y la resistencia a abandonarlo. Entre mayor sea este deseo, mayor será la cohesión interna del grupo. Este factor es extremadamente importante, puesto que entre mayor sea la cohesión que exista dentro de un grupo, mayor será la probabilidad de que ese grupo logre sus objetivos. Además, los grupos cuyos miembros tienen sentimientos positivos entre sí tienden a ser más productivos que los grupos cuyos miembros tienen sentimientos negativos entre sí.

2) *Tamaño del grupo de trabajo.* A medida que el tamaño del grupo de trabajo o el número de sus miembros aumentan, generalmente se crean las fuerzas dentro de ese grupo las cuales pueden incrementar o reducir su efectividad. El número ideal de los miembros de trabajo depende principalmente del propósito del grupo. Por ejemplo, el tamaño máximo para un grupo de trabajo de resolución de problemas es de aproximadamente siete miembros.

3) *Status de los miembros del grupo de trabajo.* El status es la posición de un miembro del grupo de trabajo respecto a los otros miembros del grupo. En general, el status de un individuo es determinado por el nombre del puesto, horario de trabajo y nivel de sueldo, así como también por el nivel de educación, raza, edad y sexo. Para maximizar la efectividad de un grupo de trabajo, los administradores deben considerar el status de los miembros del grupo. Por ejemplo, los líderes de los grupos deben tener un status más alto dentro de un grupo que otros miembros del grupo.

4) *Normas del grupo de trabajo.* Pueden definirse como el comportamiento estándar o apropiado que se requiere por parte de los miembros del grupo. Por tanto, estas normas tienen una influencia significativa en el comportamiento que presentan los miembros como miembros de un grupo de trabajo. Estas normas suelen dividirse en dos tipos: las *normas negativas* que son el resultado del comportamiento demandado por los miembros que limitan la productividad organizacional y las *normas positivas* que son el resultado del comportamiento demandado por los miembros que contribuyen a la productividad organizacional. Algunos administradores consideran las normas de grupo tan importantes que desarrollan perfiles de las normas de grupo para evaluar su impacto en la organización. Una vez descubiertas estas normas, la administración da los pesos necesarios para hacer la situación más ventajosa para la organización.

## PLANTEAMIENTO

Supóngase una empresa en la cual se quieren formar grupos de trabajo.

Como se vió en la sección precedente un factor importante a considerar es la atracción que sienten los miembros del grupo entre sí. Esta atracción estará dada si existe compatibilidad de caracteres entre los miembros. Entonces, supóngase también, que se aplicaron tests psicológicos a los 23 empleados de esta empresa para determinar los diferentes aspectos de sus caracteres y se compararon los resultados obtenidos entre cada par de empleados obteniéndose así una medida de compatibilidad de caracteres entre estos.

Las medidas de compatibilidad entre cada par de empleados se muestran en la matriz  $R$  de la siguiente página, donde "1" indica la compatibilidad de caracteres perfecta, "0" indica que la compatibilidad es

### RELACION BORROSA R.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23		
1	1.0																								
2	0.6	1.0																							
3	0.0	0.0	1.0																						
4	0.0	0.0	0.7	1.0																					
5	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0																				
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.7	1.0																			
7	0.8	0.8	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0																		
8	0.0	0.0	0.1	0.2	0.2	0.2	0.0	1.0																	
9	0.5	0.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.7	0.0	1.0																
10	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.1	1.0															
11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.4	0.7	0.0	0.1	0.0	0.0	1.0														
12	0.0	0.0	0.9	0.7	0.0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	1.0													
13	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.8	0.0	0.1	0.0	0.0	0.5	0.0	1.0												
14	0.5	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.7	0.0	0.4	0.1	0.0	0.0	0.0	1.0											
15	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	1.0										
16	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.2	0.0	0.2	0.0	0.0	1.0									
17	0.3	0.2	0.2	0.2	0.0	0.2	0.3	0.0	0.2	0.0	0.2	0.2	0.2	0.3	0.0	0.0	1.0								
18	0.0	0.0	0.6	0.6	0.0	0.0	0.0	0.2	0.0	0.0	0.0	0.7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	1.0							
19	0.0	0.0	0.0	0.0	0.6	0.8	0.0	0.2	0.0	0.0	0.6	0.0	0.6	0.0	0.0	0.2	0.1	0.0	1.0						
20	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.8	0.0	0.2	0.0	0.0	0.7	0.0	0.6	0.0	0.0	0.2	0.2	0.0	0.8	1.0					
21	0.3	0.1	0.0	0.0	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1	0.0	0.2	0.0	0.1	0.2	0.0	0.0	0.3	0.0	0.2	0.2	1.0				
22	0.5	0.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.7	0.0	0.5	0.1	0.0	0.0	0.0	0.5	0.0	0.0	0.2	0.0	0.0	0.1	0.0	1.0			
23	0.0	0.0	0.8	0.9	0.0	0.0	0.0	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.8	0.0	0.0	0.0	0.2	0.7	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0		

nula y los valores intermedios indican los diferentes grados de compatibilidad. Únicamente se proporcionan los datos de la diagonal principal hacia abajo, debido a que la compatibilidad de caracteres es simétrica, i.e.,  $x$  es compatible con  $y$  tanto como  $y$  es compatible con  $x$ . Obviamente se tiene que la compatibilidad de un empleado consigo mismo es perfecta, por lo cual todos los elementos de la diagonal principal de  $\mathcal{R}$  son 1's. En otras palabras,  $\mathcal{R}$  es una relación borrosa reflexiva y simétrica.

Nos enfrentamos entonces con un problema del análisis de conglomerados, donde la base de la semejanza está dada por la compatibilidad de caracteres y los conglomerados son interpretados como grupos de trabajo. El procedimiento a usar dependerá del propósito de formar estos grupos: si éste es formar grupos de mando, un procedimiento adecuado es el de  $\epsilon$ -conectividad, mientras que si el propósito es formar grupos de tareas, como comités, lo aconsejable es utilizar ya sea el procedimiento de  $\tau$ -grados de conectividad o el procedimiento de  $\tau$ -aristas de conectividad, como se verá en las siguientes secciones.

Una vez determinados los posibles grupos de trabajo, se deben elegir aquellos que tengan la mayor cohesión posible, (es decir, la mayor  $\epsilon$  ó  $\tau$  posible), pero que a la vez, dependiendo del propósito de su formación, tengan el tamaño adecuado y se consideren los status de los miembros de estos. Una vez elegidos, el administrador puede desarrollar perfiles de las normas de los grupos periódicamente y así evaluar su impacto en la empresa, para poder dar los pasos necesarios para hacer la situación más ventajosa para la empresa.

En las siguientes secciones se resuelve el problema por los tres procedimientos borrosos estudiados en esta tesis comparando los resultados con los obtenibles por su correspondiente procedimiento clásico y explicando en que se basa cada procedimiento, para así saber en que casos se debe aplicar cada uno.

### PROCEDIMIENTO DE $\epsilon$ -CONECTIVIDAD.

En la matriz  $\hat{R}$  de la siguiente página se muestra el cierre transitivo de la matriz  $R$ , con  $\hat{R} = R^n$ . A partir de esta se obtiene la arborescencia de la pág. 87, en la cual los valores de  $\epsilon$  que se encuentran en el eje vertical, indican el máximo valor de  $\epsilon$  que mantiene a los miembros de un conglomerado como tal, es decir, el conjunto  $\{3,4,12,18,23\}$  es un  $\epsilon$ -componente para  $0.3 \leq \epsilon \leq 0.7$ . Obviamente no nos interesan los grupos de trabajo que se obtienen para  $\epsilon \leq 0.5$  ya que la compatibilidad de caracteres sería muy baja. Para  $\epsilon = 0.7$  tendríamos 6 empleados aislados y 3 grupos de trabajo: 2 con 6 miembros y 1 con 5. Si se desea una compatibilidad más alta se obtendrían grupos más pequeños.

El problema de este procedimiento es el alto grado de encadenamiento, i.e., el que dos empleados se encuentren en un mismo  $\epsilon$ -componente no indica que la medida de su compatibilidad de caracteres directo sea de al menos  $\epsilon$ . Por ejemplo, el empleado 5 y el 11 pertenecen al mismo 0.7-componente, mientras que su relación de compatibilidad directa es de solo 0.4 (ver  $R$ ); lo mismo sucede con el 9 y el 14. Lo que sucede es que no es necesario que dos elementos de un  $\epsilon$ -componente estén relacionados directamente para pertenecer a éste, sino que exista una cadena con fuerza mayor o igual a  $\epsilon$  que los una, es decir, que haya una relación indirecta de al menos  $\epsilon$ . Por tanto, este procedimiento es útil cuando se desean formar grupos de trabajo conocidos como grupos de mando, cuando los miembros de los grupos deben trabajar en cadena, en secuencia.

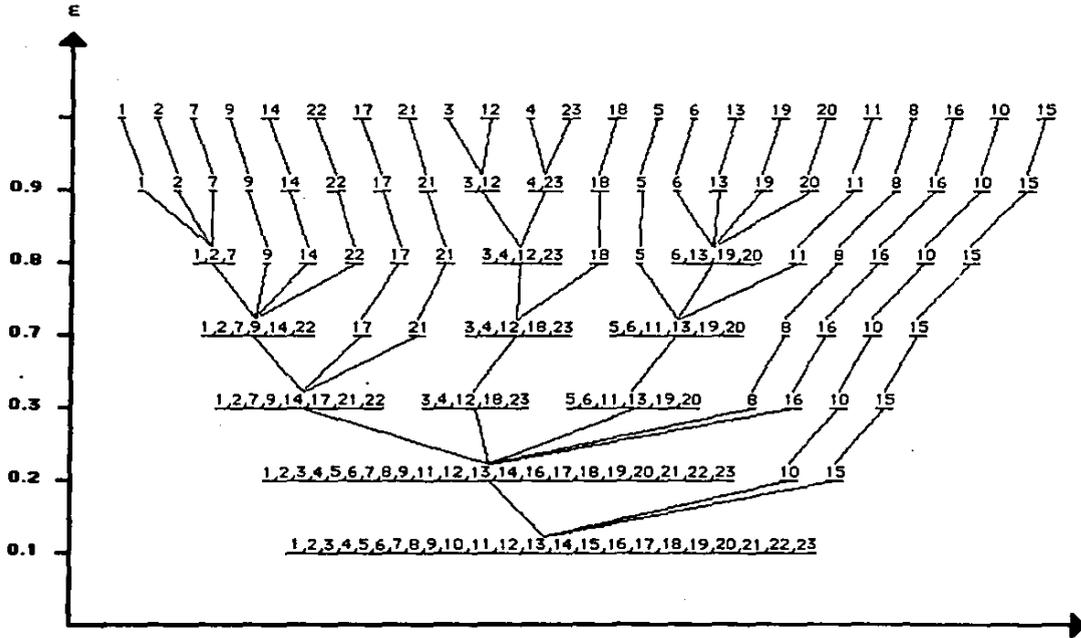
### COMPARACION CON EL PROCEDIMIENTO DE ENLACE SIMPLE.

Por el procedimiento de enlace simple se obtiene la misma arborescencia que por el procedimiento de  $\epsilon$ -conectividad. La diferencia está en que este debe resolverse a través de grafos de nivel  $\alpha$ , lo cual es muy complicado cuando tenemos tantos elementos. Además se tienen que obtener tantos grafos de nivel como valores diferentes de la

CIERRE TRANSITIVO  $\hat{R} = R^*$ .

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
1	1.0																							
2	0.8	1.0																						
3	0.2	0.2	1.0																					
4	0.2	0.2	0.8	1.0																				
5	0.2	0.2	0.2	0.2	1.0																			
6	0.2	0.2	0.2	0.2	0.7	1.0																		
7	0.8	0.8	0.2	0.2	0.2	0.2	1.0																	
8	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1.0																
9	0.7	0.7	0.2	0.2	0.2	0.2	0.7	0.2	1.0															
10	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	1.0														
11	0.2	0.2	0.2	0.2	0.7	0.7	0.2	0.2	0.2	0.1	1.0													
12	0.2	0.2	0.9	0.8	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1	0.2	1.0												
13	0.2	0.2	0.2	0.2	0.7	0.8	0.2	0.2	0.2	0.1	0.7	0.2	1.0											
14	0.7	0.7	0.2	0.2	0.2	0.2	0.7	0.2	0.7	0.1	0.2	0.2	0.2	1.0										
15	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	1.0									
16	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1	1.0								
17	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2	0.2	0.3	0.2	0.3	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3	0.7	0.2	1.0							
18	0.2	0.2	0.7	0.7	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1	0.2	0.2	0.8	0.2	0.1	0.2	0.2	1.0						
19	0.2	0.2	0.2	0.2	0.7	0.8	0.2	0.2	0.2	0.1	0.7	0.2	0.8	0.2	0.1	0.2	0.2	0.8	1.0					
20	0.2	0.2	0.2	0.2	0.7	0.8	0.2	0.2	0.2	0.1	0.7	0.2	0.8	0.2	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2	1.0				
21	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2	0.2	0.3	0.2	0.3	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2	0.2	1.0			
22	0.7	0.7	0.2	0.2	0.2	0.2	0.7	0.2	0.7	0.1	0.2	0.2	0.2	0.7	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2	0.2	0.3	1.0		
23	0.2	0.2	0.8	0.9	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1	0.2	0.8	0.2	0.2	0.1	0.2	0.2	0.7	0.2	0.2	0.2	0.2	1.0	

PROCEDIMIENTO  $\epsilon$ -CONECTIVIDAD.

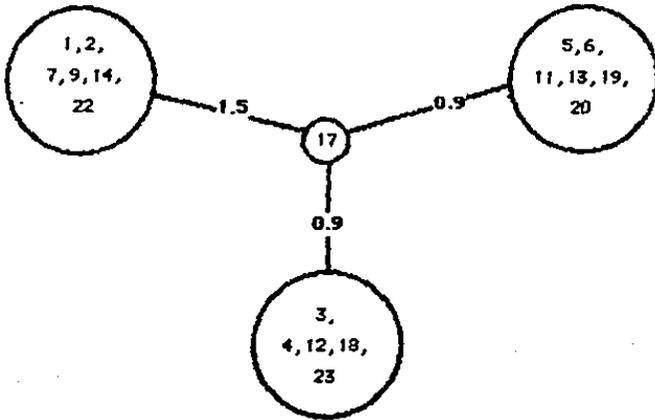


relación de semejanza. En este ejemplo se necesitarían los valores de  $\alpha=0.1,0.2,\dots,1.0$ , mientras que por el procedimiento de  $\epsilon$ -conectividad fue solo necesario hacer 4 multiplicaciones de matrices para obtener  $\hat{R}=\hat{R}^2=\hat{R}^3$ , es decir, el procedimiento borroso es más rápido.

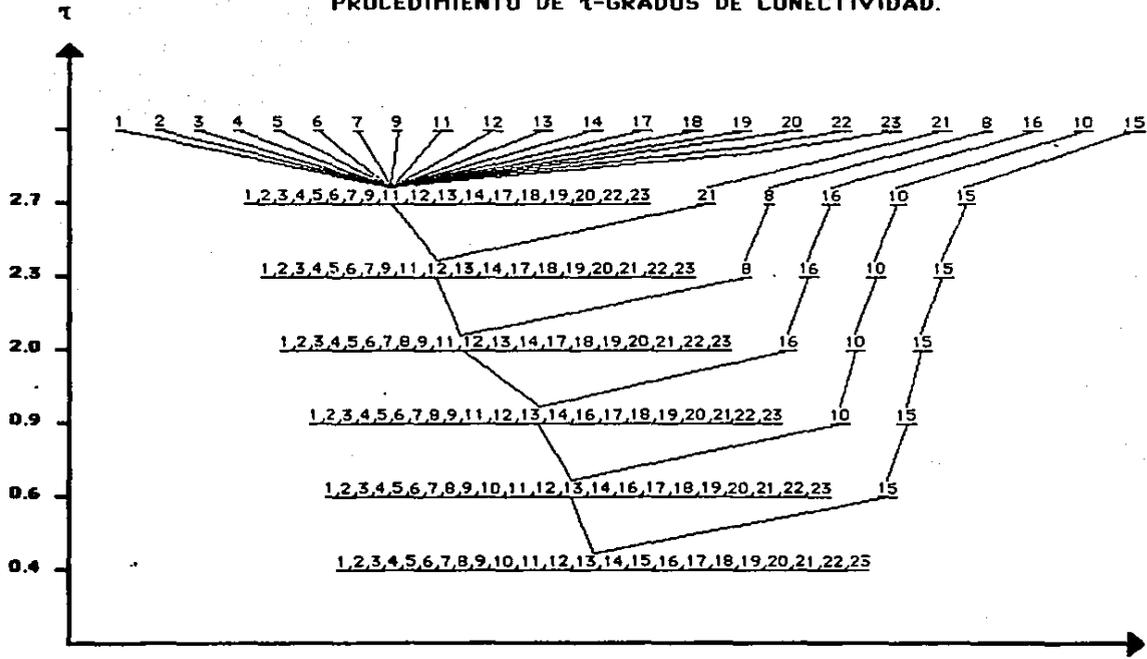
### PROCEDIMIENTO DE $\tau$ -GRADOS DE CONECTIVIDAD

En la arborescencia de la siguiente página se encuentran los componentes de  $\tau$ -grados, donde  $\tau$  nos da el máximo valor de la conectividad de grados que mantiene a los miembros del componente como tal.  $\tau$  indica la suma de la compatibilidad de caracteres con los demás miembros de un grupo requerida para pertenecer a éste; es decir, cual sería la compatibilidad de caracteres total mínima que se perdería al separar un miembro de dicho grupo.

Este procedimiento es útil cuando cuando queremos formar grupos de tareas, como comités, relativamente grandes, ya que tiene un grado de encadenamiento moderado. El siguiente grafo:



PROCEDIMIENTO DE  $\tau$ -GRADOS DE CONECTIVIDAD.



representa el componente de 2.7-grados de conectividad compuesto de 16 elementos, a través de nodos generalizados, es decir, cada nodo representa un conjunto de individuos los cuales tienen una compatibilidad de caracteres alta entre sí; las aristas indican la suma de las compatibilidades de los empleados de los nodos adyacentes. Por ejemplo, el peso de la arista que une el nodo {17} con el nodo {1,2,7,9,14,22} está dado por  $0.3+0.2+0.3+0.2+0.3+0.2 = 1.5$ . Podemos ver que el empleado 17 es muy poco compatible con el resto de los trabajadores, pero, como es compatible por poco que sea con casi todos, su compatibilidad total es de  $1.5+0.9+0.9=3.3$ . Si ese trabajador no existiera, para  $\tau=2.6$  se tendrían 5 empleados independientes: 8,15,16,21,10 y 3 grupos: {1,2,7,9,14,22}, {3,4,12,18,23}, {5,6,11,13,19, 20}. Sin embargo, si nos conviene tener grupos de tareas grandes, el trabajador 17 nos es muy útil, ya que nos sirve de unión para los tres grupos.

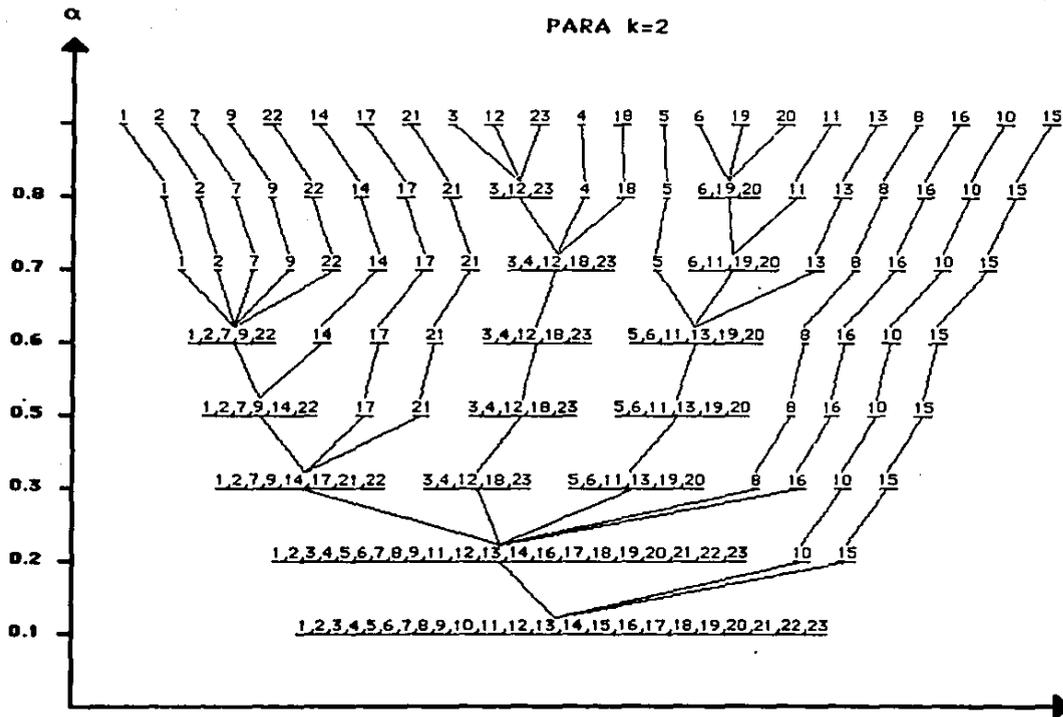
#### COMPARACION CON EL PROCEDIMIENTO DE K-ENLACES DE CONECTIVIDAD.

Obviamente, para  $k=1$  se obtiene la misma arborescencia que por el procedimiento de enlace simple. Para los demás valores de  $k$ , las arborescencias se ilustran en las págs 91-95, (en este ejemplo, las arborescencias de  $k$ -enlaces de conectividad, para  $k=1, \dots, 6$  coinciden con las arborescencias que se obtienen por el procedimiento de  $k$ -aristas de conectividad).

Los conglomerados que se obtienen por el procedimiento de  $\tau$ -grados de conectividad para  $\tau=2.3$  y para  $\tau=2.7$  no se obtienen por el procedimiento de  $k$ -enlaces para ningún grafo de nivel  $\alpha$  para ninguna  $k$ . Además, los conglomerados que se obtienen por el procedimiento clásico si se obtienen por el procedimiento borroso para  $\tau=k\alpha$ , solo que los de este último pueden contener más elementos. Esto es debido a que al no considerar cierta información al trabajar con los grafos de nivel  $\alpha$  en el procedimiento clásico, un componente de  $\tau$ -grados puede ser separado en varios conglomerados, cuando en realidad debería de ser un solo conglomerado.

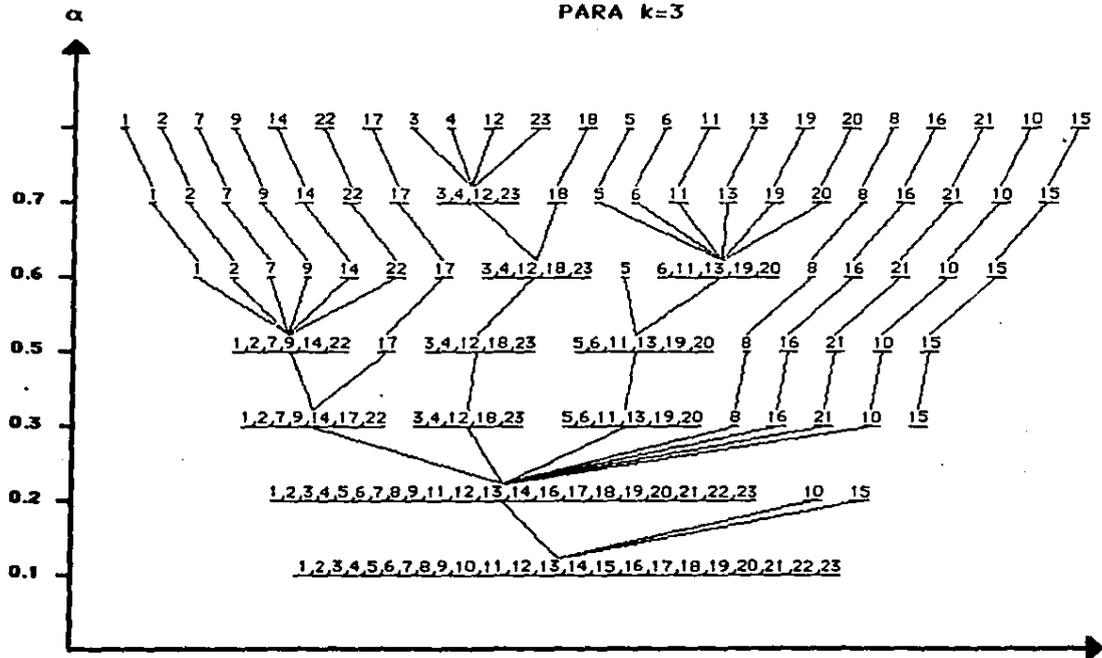
PROCEDIMIENTO DE K-ENLACES Y DE K-ARISTAS DE CONECTIVIDAD.

PARA  $k=2$



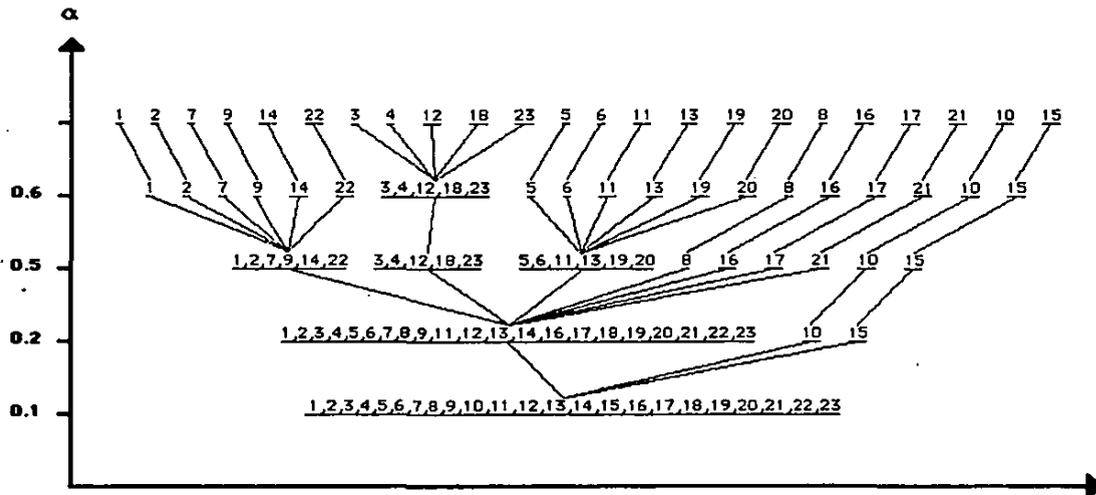
PROCEDIMIENTO DE k-ENLACES Y DE K-ARISTAS DE CONECTIVIDAD.

PARA  $k=3$



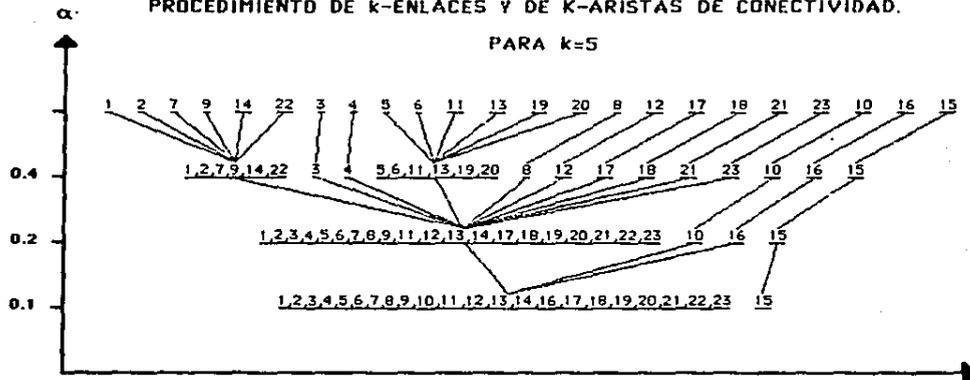
PROCEDIMIENTO DE K-ENLACES Y DE K-ARISTAS DE CONECTIVIDAD.

PARA  $k=4$

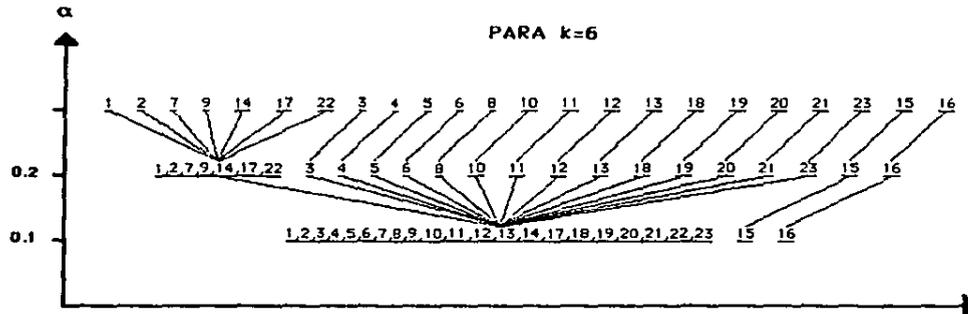


PROCEDIMIENTO DE k-ENLACES Y DE K-ARISTAS DE CONECTIVIDAD.

PARA k=5

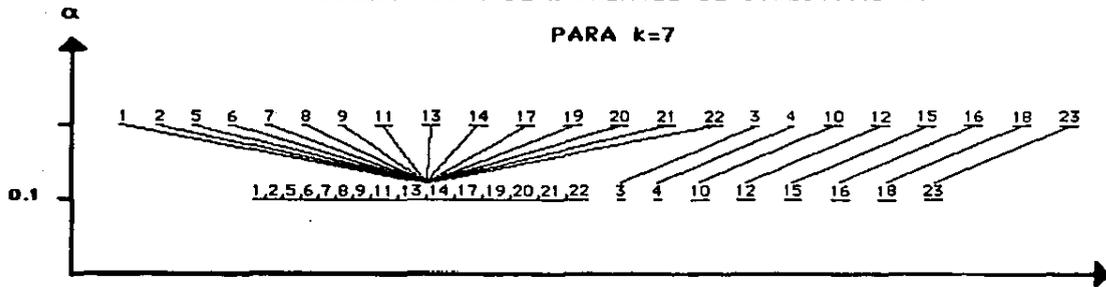


PARA k=6



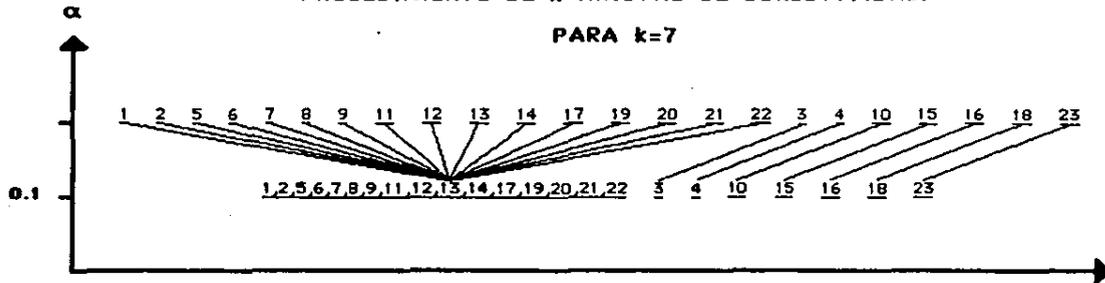
PROCEDIMIENTO DE k-ENLACES DE CONECTIVIDAD.

PARA  $k=7$



PROCEDIMIENTO DE k-ARISTAS DE CONECTIVIDAD.

PARA  $k=7$



## PROCEDIMIENTO DE $\tau$ -ARISTAS DE CONECTIVIDAD

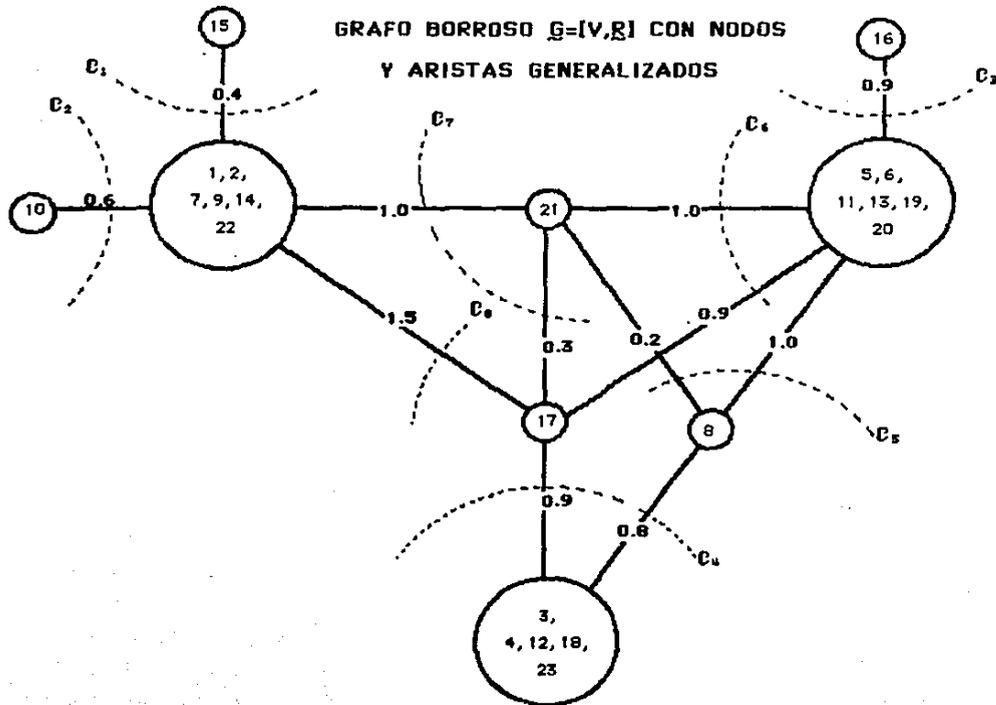
Este procedimiento es útil cuando se desean formar grupos de tareas pequeños, que pongan mucha resistencia a dividirse. Para formarlos, se busca el punto más frágil de un conglomerado donde se hace un corte, para ver si los conglomerados resultantes son más resistentes. Estos cortes y sus pesos están representados en el grafo de nodos generalizados de la siguiente página. Los 14 restantes son:

$C_9 = \{(1,2,7,9,22), \{14\}\}$	$ C_9  = 2.6$
$C_{10} = \{(1,2,7,22), \{9\}\}$	$ C_{10}  = 2.3$
$C_{11} = \{(1,2,7), \{22\}\}$	$ C_{11}  = 1.8$
$C_{12} = \{(1), \{2,7\}\}$	$ C_{12}  = 1.4$
$C_{13} = \{(2), \{7\}\}$	$ C_{13}  = 0.8$
$C_{14} = \{(3,4,12,23), \{18\}\}$	$ C_{14}  = 2.6$
$C_{15} = \{(3,12,23), \{4\}\}$	$ C_{15}  = 2.3$
$C_{16} = \{(3,12), \{23\}\}$	$ C_{16}  = 1.6$
$C_{17} = \{(3), \{12\}\}$	$ C_{17}  = 0.9$
$C_{18} = \{(5), \{6,11,13,19,20\}\}$	$ C_{18}  = 2.7$
$C_{19} = \{(6,13,19,20), \{11\}\}$	$ C_{19}  = 2.5$
$C_{20} = \{(6,19,20), \{13\}\}$	$ C_{20}  = 2.0$
$C_{21} = \{(6), \{19,20\}\}$	$ C_{21}  = 1.6$
$C_{22} = \{(19), \{20\}\}$	$ C_{22}  = 0.8$

Obteniéndose así la matriz de cohesividad  $H$  y la arborescencia de los componentes de  $\tau$ -aristas que se encuentran en las págs. 98 y 99. Nótese que los nodos generalizados del grafo representan los conglomerados más resistentes, ya que si desamos una  $\tau$  mayor, el componente de  $\tau$ -aristas se desintegraría dándonos solamente empleados que trabajen independientemente.

Tenemos pues, que para  $\tau=2.6$  se tendrían 6 empleados independientes y tres grupos de tareas, los cuales corresponden a los nodos generalizados del grafo; para  $\tau=1.9$  se tienen a los trabajadores 17 y 21 como intermediarios para unir a dos de estos tres grupos, sin embargo, se disminuye considerablemente la cohesión del grupo.

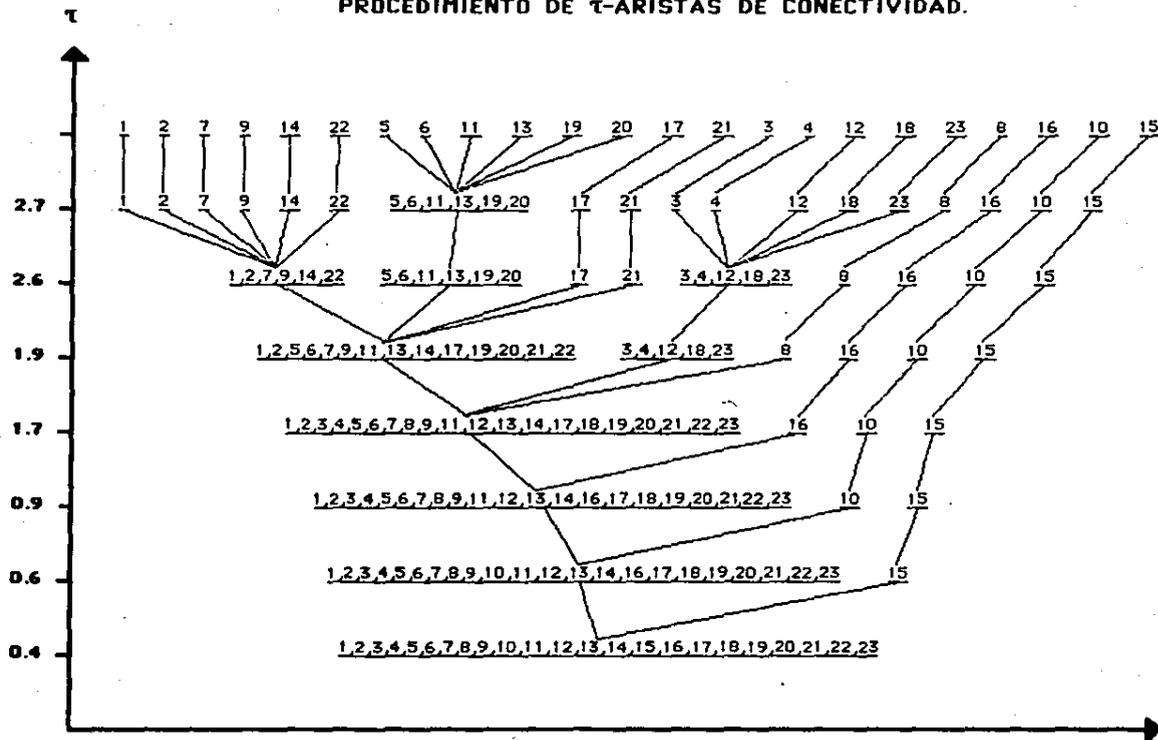
GRAFO BORROSO  $G=[V,E]$  CON NODOS  
Y ARISTAS GENERALIZADOS



### MATRIZ DE COHESIVIDAD H.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
1	0.0																							
2	2.6	0.0																						
3	0.0	0.0	0.0																					
4	0.0	0.0	2.6	0.0																				
5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0																			
6	0.0	0.0	0.0	0.0	2.7	0.0																		
7	2.6	2.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0																	
8	0.0	0.0	1.7	1.7	1.7	1.7	0.0	0.0																
9	2.6	2.6	0.0	0.0	0.0	0.0	2.6	0.0	0.0															
10	0.6	0.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.6	0.0	0.6	0.0														
11	0.0	0.0	0.0	0.0	2.7	2.7	0.0	1.7	0.0	0.0	0.0													
12	0.0	0.0	2.6	2.6	0.0	0.0	0.0	1.7	0.0	0.0	0.0	0.0												
13	0.0	0.0	0.0	0.0	2.7	2.7	0.0	1.7	0.0	0.0	2.7	0.0	0.0											
14	2.6	2.6	0.0	0.0	0.0	0.0	2.6	0.0	2.6	0.6	0.0	0.0	0.0	0.0										
15	0.4	0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.4	0.0									
16	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.9	0.0	0.9	0.0	0.0	0.0								
17	1.9	1.9	1.7	1.7	0.0	1.9	1.9	0.0	1.9	0.0	1.9	1.7	1.9	1.9	0.0	0.0	0.0							
18	0.0	0.0	2.6	2.6	0.0	0.0	0.0	1.7	0.0	0.0	0.0	2.6	0.0	0.0	0.0	0.0	1.7	0.0						
19	0.0	0.0	0.0	0.0	2.7	2.7	0.0	1.7	0.0	0.0	2.7	0.0	2.7	0.0	0.0	0.9	1.9	0.0	0.0					
20	0.0	0.0	0.0	0.0	2.7	2.7	0.0	1.7	0.0	0.0	2.7	0.0	2.7	0.0	0.0	0.9	1.9	0.0	2.7	0.0				
21	1.9	1.9	0.0	0.0	1.9	1.9	1.9	1.7	1.9	0.0	1.9	0.0	1.9	1.9	0.0	0.0	1.9	0.0	1.9	1.9	0.0			
22	2.6	2.6	0.0	0.0	0.0	0.0	2.6	0.0	2.6	0.6	0.0	0.0	2.6	0.0	0.0	1.9	0.0	0.0	0.0	1.9	0.0	0.0	1.9	0.0
23	0.0	0.0	2.6	2.6	0.0	0.0	0.0	1.7	0.0	0.0	0.0	2.6	0.0	0.0	0.0	1.7	2.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

PROCEDIMIENTO DE T-ARISTAS DE CONECTIVIDAD.



COMPARACION CON EL PROCEDIMIENTO DE k-ARISTAS DE CONECTIVIDAD.

Si deseamos obtener la arborescencia para  $k=1$ , obviamente obtendremos la misma arborescencia que se obtiene por el procedimiento de enlace simple. Como ya se dijo anteriormente, en este ejemplo, las arborescencias que se obtienen por el procedimiento de  $k$ -aristas de conectividad, para  $k=2, \dots, 6$ , coinciden con las del procedimiento de  $k$ -enlaces de conectividad. Estas arborescencias, junto con la de 7-aristas de conectividad se muestran en las págs. 91-95.

Los componentes de  $\tau$ -aristas de conectividad para  $\tau=1.9$  y para  $\tau=2.7$  no pueden ser obtenidos por el procedimiento clásico de  $k$ -aristas, para ningunas  $k$  y  $\alpha$ ; en cambio, todos los miembros de un conglomerado por el procedimiento de  $k$ -aristas para algún grafo de nivel  $\alpha$ , están contenidos en un mismo componente de  $\tau$ -aristas, con  $\tau=k\alpha$ , sólo que este último puede contener más miembros, debido a que la información no considerada por el procedimiento clásico los une a este.

Además, el no considerar esa información, hace que cada corte del procedimiento clásico separe siempre a un solo elemento, haciendo coincidir las arborescencias del procedimiento de  $k$ -aristas con el de  $k$ -grados de conectividad, para  $k=2, \dots, 6$ , mientras que al considerar toda la información en el procedimiento de  $\tau$ -aristas, se tiene que el punto frágil de un subgrafo es tal, que el corte mínimo puede separarlo en dos subgrafos no triviales.

## CONCLUSIONES

- Los tres procedimientos borrosos estudiados conducen a conglomerados ajenos.

- Se debe escoger el procedimiento adecuado según el objetivo de formar conglomerados :

- En el procedimiento de  $\epsilon$ -conectividad dos objetos pertenecen a un mismo conglomerado si y solo si hay una cadena de objetos en este de fuerza mayor o igual a  $\epsilon$  que los una, i.e., estos objetos pueden no asemejarse en absoluto entre sí pero si se asemejan a otros objetos del conglomerado que los encadena.

- En el procedimiento de  $\tau$ -grados de conectividad un objeto pertenece a un conglomerado si la suma de las relaciones de semejanza con el resto de los integrantes es de al menos  $\tau$ , i.e., si su resistencia a ser separado de este conglomerado es mayor o igual a  $\tau$ . El problema de encadenamiento es moderado.

- Se define un conglomerado por el procedimiento de  $\tau$ -aristas de conectividad como el conjunto de objetos que pone una resistencia a ser dividido de al menos  $\tau$ . No hay problema de encadenamiento.

- En los procedimientos clásicos, toda semejanza mayor o igual a  $\alpha$  es considerada igualmente importante, mientras que aquella menor que  $\alpha$  no es considerada, por lo cual se pierde información, trabajando con datos inexactos.

- Los conglomerados obtenibles por el procedimiento clásico de enlace simple son los mismos que los obtenibles por el de  $\epsilon$ -conectividad, con  $\epsilon = \alpha$ ; la diferencia radica en que en el primero se debe repetir el procedimiento para cada posible valor de  $\alpha$ , mientras que en el segundo

todos los conglomerados se obtienen al mismo tiempo, i.e., es más rápido.

- No todos los conglomerados obtenibles por los procedimientos de  $\tau$ -grados o  $\tau$ -aristas de conectividad lo son por sus respectivos procedimientos clásicos (de  $k$ -enlaces y  $k$ -aristas de conectividad), mientras lo contrario es posible para  $\tau=k\alpha$ . Esto es debido a la pérdida de información en los procedimientos clásicos.

## APENDICE I

### OBTENCION DEL CORTE DE PESO MINIMO DE UN GRAFO BORROSO SIMETRICO POR EL METODO DE FLUJO MAXIMO

#### INTRODUCCION

El problema de flujo en redes fué considerado por primera vez por Ford y Fulkerson quienes introdujeron los conceptos básicos de flujo, corte, etc. que se emplean aquí y desarrollaron la herramienta principal: el teorema de flujo máximo-corte mínimo. Ford y Fulkerson escribieron sobre el flujo entre dos puntos especiales, el nodo fuente y el nodo sumidero. Ahora en cambio, se desarrollará el problema multiterminal, donde los flujos son considerados entre todos los nodos de una red.

#### PROBLEMA DE FLUJO MAXIMO

Llamamos *red de transporte* a un grafo (clásico o borroso) sin lazos, el cual consiste de un conjunto de nodos  $V$  y arcos  $(v_i, v_j)$  para  $v_i, v_j \in V$ . Cada arco se asocia a un número no negativo  $c_{ij}$  (en el caso de grafos borrosos puede considerarse  $c_{ij} = \mu_{\mathbb{R}}(v_i, v_j)$ ) que es llamado *capacidad del arco* e indica la máxima cantidad de flujo que puede pasarse de  $v_i$  a  $v_j$  a través de este. Dado que para el objeto de esta tesis nos interesa el caso de una *red simétrica* se tendrá  $c_{ij} = c_{ji}$ .

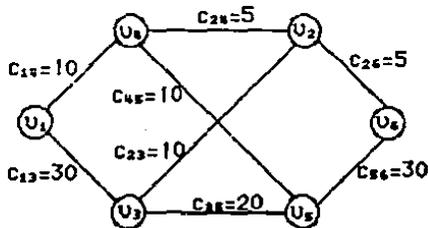
Sea  $F_{ij}$  con  $ij \in E$  el flujo que pasa de  $v_i$  a  $v_j$  a través de la arista  $\langle v_i, v_j \rangle$  de capacidad  $c_{ij}$ , y  $-F_{ij}$  el flujo que pasa de  $v_j$  a  $v_i$ , es decir, dado que el flujo siempre debe ser mayor que cero, si  $F_{ij} > 0$ , el flujo  $F_{ij}$  pasa de  $v_i$  a  $v_j$  y si  $F_{ij} < 0$ , el flujo  $-F_{ij}$  pasa de  $v_j$  a  $v_i$ , por tanto  $-c_{ij} \leq F_{ij} \leq c_{ij}$ . Una arista  $\langle v_i, v_j \rangle$  está saturada si  $|F_{ij}| = c_{ij}$ .

Dada esta red existe un flujo máximo posible del nodo fuente  $u_1$  al nodo sumidero  $u_n$ .

ALGORITMO DE FORD-FULKERSON. (Para grafos simétricos.)

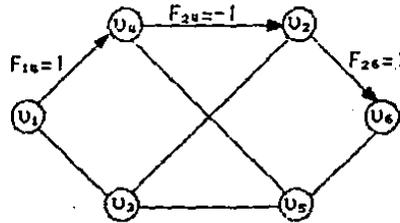
1. Pasar un flujo cualquiera de  $u_1$  a  $u_n$ .
2. Aumentar el flujo anterior hasta que se sature por lo menos una arista.
3. a) Marcar el nodo fuente  $u_1$  con "+".  
b) Marcar con "+ $u_j$ " todos los nodos  $u_j$  para los que:
  - el nodo  $u_i$  esté marcado,
  - exista la arista  $\langle u_i, u_j \rangle$  y
  - si  $i < j$ ,  $c_{ij} - f_{ij} > 0$  (i.e. el arco  $\langle u_i, u_j \rangle$  no está saturado)
  - si  $i > j$ ,  $c_{ji} + f_{ji} > 0$  (i.e. el arco  $\langle u_j, u_i \rangle$  no está saturado)
- c) Repetir (b) hasta marcar todos los nodos posibles. Si no logramos marcar el nodo sumidero  $u_n$  ir al paso 6.
4. Considerese la cadena que pasa por los nodos marcados desde el nodo fuente hasta el sumidero (indicada por las marcas, empezando por el sumidero hacia el nodo fuente). Aumentar el flujo total aumentando o disminuyendo el flujo de las aristas tal manera que se respeten:
  - la capacidad de las aristas, i.e.,  $|f_{ij}| \leq c_{ij}$ .
  - la ley de Kirchhoff, i.e., el flujo total que entra a un nodo es igual al flujo total que sale.
5. Ir al paso 3.
6. El flujo máximo está dado por  $\sum_{i: \langle u_1, u_i \rangle} |f_{i1}| = \sum_{j: \langle u_j, u_n \rangle} |f_{jn}|$ .

EJEMPLO 25: Consideremos la red simétrica:

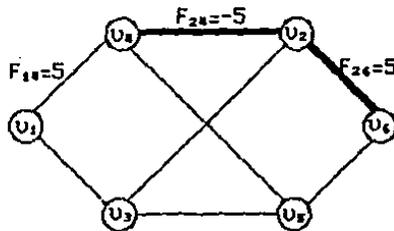


y sea  $u_1$  el nodo fuente y  $u_6$  el nodo sumidero.

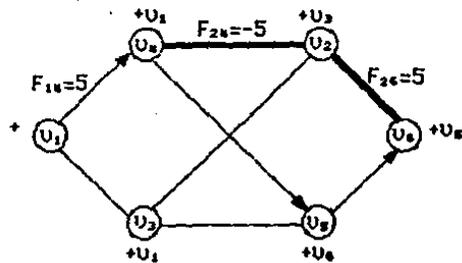
1)



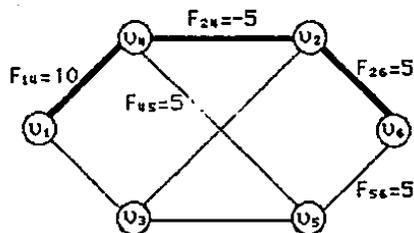
2)



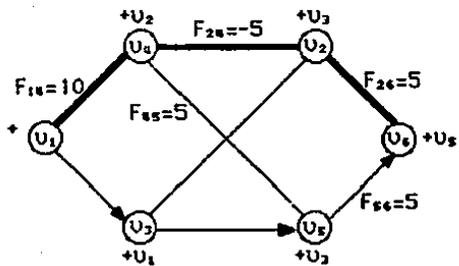
3)



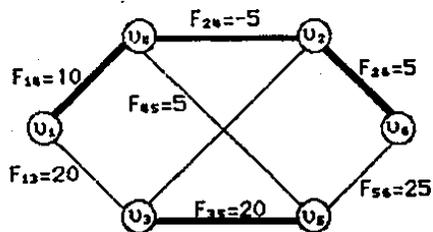
4)



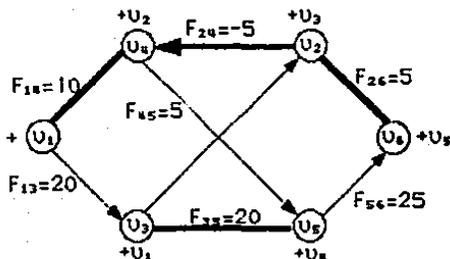
3)



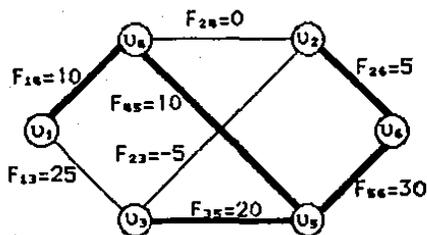
4)



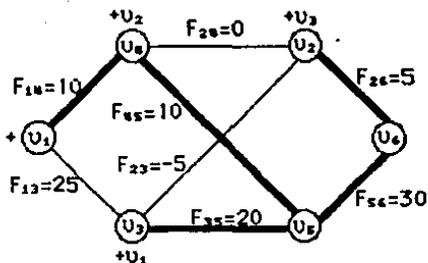
3)



4)



3)



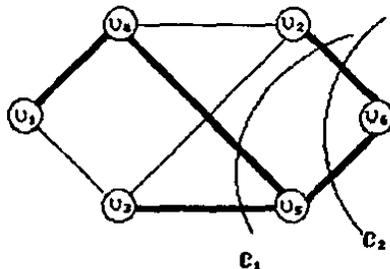
Como no se puede marcar el nodo sumidero ya hemos terminado y el flujo máximo es  $|F_{14}|+|F_{13}|=|F_{24}|+|F_{54}|=35$ ■

### TEOREMA DE FLUJO MÁXIMO-CORTE MÍNIMO<sup>5</sup>.

*El valor del flujo máximo en una red  $G$  es igual a la capacidad del corte de peso mínimo (o corte mínimo).*

Este corte mínimo está dado por cualquier corte que separe al nodo fuente del sumidero y que contenga únicamente aristas saturadas. Nótese que siempre existirá al menos un corte formado de aristas saturadas que separe a estos nodos, ya que si no se cumpliera existiría una cadena de aristas no saturadas del nodo fuente al sumidero por las cuales se podría aumentar el flujo total.

En el ejemplo anterior hay dos cortes mínimos:  $C_1 = ((v_1, v_2, v_3, v_4), (v_5, v_6))$  y  $C_2 = ((v_1, v, v_3, v_4, v_5), (v_6))$ . Se tiene  $|C_1| = |C_2| = 35$ .



### PROBLEMA DE FLUJO MÁXIMO MULTITERMINAL

Dada una red, existe para cada par de nodos un flujo máximo a través de estos. El valor de este flujo a través de los nodos  $v_i, v_j$  lo denotaremos  $f_{ij}$ . Por tanto para cada red existen 2 matrices simétricas asociadas: la matriz  $C$  de los  $c_{ij}$  y la matriz  $F$  de los flujos resultantes  $f_{ij}$ . Sin embargo, no cualquier matriz puede ser una matriz  $F$ , entonces

<sup>5</sup> Tomado de la referencia [1], pág. 455.

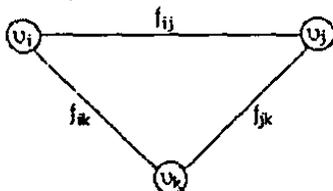
¿cuándo un conjunto de flujos  $f_{ij}$  dado puede ser realizado por una red? A continuación se da una condición necesaria y suficiente para que  $F$  sea realizable, la cual es una especie de "desigualdad del triángulo".

**TEOREMA 15.**

*Una matriz  $F$  es realizable si y solamente si  $\forall v_i, v_j, v_k \in V$ ,*

$$f_{ik} \geq \min \{f_{ij}, f_{jk}\}.$$

Geoméricamente esto significa simplemente que el flujo máximo de  $v_i$  a  $v_k$  debe ser al menos tan grande como el menor de los flujos máximos alrededor del nodo  $v_i$ .



**Demostración.**

$\Rightarrow$  Primero se demostrará la necesidad. Supongamos falso el teorema y que  $\exists v_i, v_j, v_k \in V$  tales que  $f_{ik} < \min \{f_{ij}, f_{jk}\}$ . Por tanto existe, por el teorema de flujo máximo-corte mínimo, un corte  $C=(A, \bar{A})$  con  $v_i \in A$  y  $v_k \in \bar{A}$  tal que la capacidad total de las aristas que conectan los nodos de  $A$  con los de  $\bar{A}$  es  $f_{ik}$ .  $v_j$  pertenece a  $A$  o a  $\bar{A}$ . Si  $v_j \in A$  entonces  $v_j$  es cortado de  $v_k$  por  $C$ ; dado que la capacidad del corte es menor que  $f_{jk}$ , es una contradicción. Similarmente  $v_j$  no puede estar en  $\bar{A}$  porque entonces  $v_j$  es cortado de  $v_i$ . Luego entonces  $f_{ik} \geq \min \{f_{ij}, f_{jk}\}$ .

$\Rightarrow$  Una vez establecida la relación  $f_{ik} \geq \min \{f_{ij}, f_{jk}\}$ , tenemos por inducción

$$f_{ip} \geq \min \{f_{ij}, f_{jk}, f_{kl}, \dots, f_{op}\},$$

donde  $v_i, v_j, v_k, v_l, \dots, v_o, v_p$  forman una cadena cualquiera de  $v_i$  a  $v_p$ . Ahora mostraremos la suficiencia. Consideremos un árbol de expansión maximal cualquiera en el que el peso de las aristas es  $f_{ij}$  (en lugar de  $\mu_{\mathbb{R}}(v_i, v_j)$ ). Sabemos que para cualesquier  $v_i, v_p$  cuya arista directa no esté

en el árbol, entonces el peso de dicha arista satisface

$$f_{ip} \leq \min \{f_{ij}, f_{jk}, f_{kl}, \dots, f_{op}\},$$

que es la desigualdad opuesta de la obtenida.

Entonces para cualquier arista que no esté en el árbol

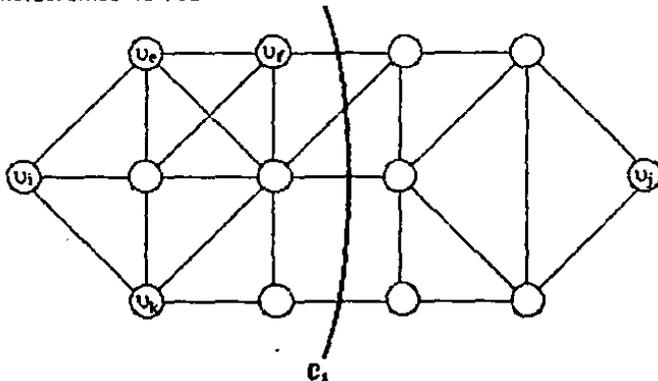
$$f_{ip} = \min \{f_{ij}, f_{jk}, f_{kl}, \dots, f_{op}\};$$

sin embargo este es precisamente el flujo que resulta si una red es construida con la capacidad de la arista  $\langle u_i, u_j \rangle$ ,  $c_{ij} = f_{ij}$  para las aristas del árbol y  $c_{ij} = 0$  para las demás. Luego entonces cualquier matriz  $F$  que satisfaga la condición es realizable.

*Q.E.D.*

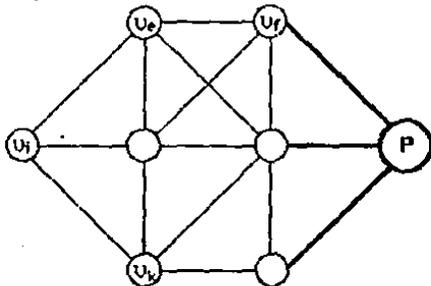
Podemos ver en la demostración que cualquier flujo máximo entre dos nodos es numéricamente igual a algún flujo en el árbol de expansión maximal (donde los  $f_{ij}$  son los pesos asociados a las aristas). Pero como solo hay  $n-1$  aristas en el árbol de expansión, con  $n$ =número de nodos, entonces solo hay  $n-1$  flujos numéricamente diferentes posibles. Esto nos hace pensar que los  $n(n-1)/2$  flujos  $f_{ij}$  pueden obtenerse por algo mejor que resolver  $n(n-1)/2$  problemas de flujo. De hecho se mostrará que todos los flujos se pueden deducir después de resolver  $n-1$  problemas.

Consideremos la red



donde  $C_1 = (A, \bar{A})$  es un corte mínimo que separa a  $u_i$  de  $u_j$ ,  $u_i \in A$ ,  $u_j \in \bar{A}$ .

Ahora construyamos una red un poco diferente, una en la cual todos los nodos de  $\bar{A}$  sean reemplazados por un único nodo especial P al cual llegan todas las aristas del corte (podemos reemplazar varias aristas que conecten los mismos dos nodos por una sola que tenga la capacidad total):



En esta red condensada consideremos el flujo máximo entre dos nodos ordinarios:  $u_s$  y  $u_x$ . Demostraremos que:

LEMA 6.

*El flujo entre dos nodos ordinarios  $u_s$  y  $u_x$  en una red condensada es numéricamente igual al flujo  $f_{s,x}$  de la red original.*

Demostración.

Sea  $C' = (B, \bar{B})$  un corte mínimo que separa a  $u_s$  de  $u_x$  en la red original y definamos los conjuntos de nodos:

$$\begin{aligned} X &= A \cap B & \bar{X} &= A \cap \bar{B} \\ Y &= \bar{A} \cap B & \bar{Y} &= \bar{A} \cap \bar{B} \end{aligned}$$

donde  $\bar{X} \cup X = A$  y  $Y \cup \bar{Y} = \bar{A}$ . Supongamos que  $u_i, u_s \in X$  y  $u_x \in \bar{X}$ . Sea  $|C_{X \bar{Y}}| = \sum c_{ij}$  donde  $u_i \in X$  y  $u_j \in \bar{Y}$ , entonces:

$$\begin{aligned} |C_{A \bar{A}}| &= |C_{X \bar{Y}}| + |C_{X \bar{Y}}| + |C_{\bar{X} \bar{Y}}| + |C_{\bar{X} \bar{Y}}| \\ |C_{B \bar{B}}| &= |C_{X \bar{X}}| + |C_{X \bar{Y}}| + |C_{\bar{X} \bar{Y}}| + |C_{\bar{Y} \bar{Y}}| \end{aligned}$$

Tenemos dos casos:

i)  $u_i \in Y$ .

Como  $(B, \bar{B})$  es un corte mínimo que separa  $u_s$  y  $u_k$  y como  $(XUYU\bar{Y}, \bar{X})$  los separa también, donde

$$|C_{XUYU\bar{Y}, \bar{X}}| = |C_{X\bar{X}}| + |C_{\bar{X}Y}| + |C_{\bar{X}\bar{Y}}|$$

tenemos:

$$|C_{B\bar{B}}| - |C_{XUYU\bar{Y}, \bar{X}}| = |C_{\bar{X}Y}| + |C_{Y\bar{Y}}| + |C_{\bar{X}\bar{Y}}| \leq 0 \quad (1)$$

Como  $(A, \bar{A})$  es un corte mínimo que separa  $u_i$  de  $u_j$  y como también los separa el corte  $(XU\bar{X}U\bar{Y}, Y)$  donde

$$|C_{XU\bar{X}U\bar{Y}, Y}| = |C_{X\bar{X}}| + |C_{\bar{X}Y}| + |C_{Y\bar{Y}}|$$

entonces

$$|C_{A\bar{A}}| - |C_{XU\bar{X}U\bar{Y}, Y}| = |C_{X\bar{X}}| + |C_{\bar{X}\bar{Y}}| + |C_{Y\bar{Y}}| \leq 0 \quad (2)$$

Sumando (1) y (2) tenemos que  $|C_{X\bar{X}}| \leq 0$ , lo que implica que  $|C_{X\bar{X}}| = 0$ . Se sigue entonces por (1) que  $|C_{Y\bar{Y}}| \leq |C_{\bar{X}\bar{Y}}|$  y por (2) que  $|C_{\bar{X}\bar{Y}}| \leq |C_{Y\bar{Y}}|$ , entonces  $|C_{\bar{X}\bar{Y}}| = |C_{Y\bar{Y}}|$ .

Por lo tanto  $(XUYU\bar{Y}, \bar{X}) = (XU\bar{A}, \bar{X})$  es también un corte mínimo que separa  $u_s$  de  $u_k$ .

ii)  $u_j \in \bar{Y}$ .

En este caso una demostración similar nos muestra que  $(X, \bar{X}U\bar{A})$  es un corte mínimo que separa a  $u_s$  de  $u_k$ .

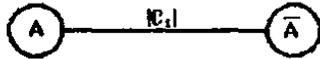
En otras palabras, siempre existe un corte mínimo que separa a  $u_s$  de  $u_k$  tal que el conjunto de nodos  $\bar{A}$  esté en un lado de este corte. Dado que el valor del flujo es determinado por el peso de este corte mínimo, el cual no varía por el proceso de condensamiento, condensar  $\bar{A}$  en un único nodo no afecta el valor del flujo máximo de  $u_s$  a  $u_k$ .

Por lo tanto cualquier flujo entre  $u_s$  y  $u_k$  en la red condensada da un flujo igual en la red original.

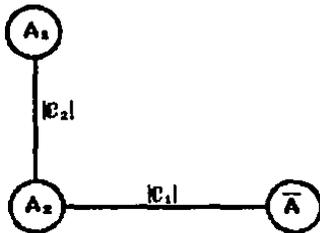
*Q.E.D.*

Dado que un corte en la red condensada nos da un corte en la original y los valores de flujo máximo son los mismos, un corte mínimo en la red condensada nos da, simplemente reemplazando  $P$  por  $\bar{A}$ , un corte mínimo en la original.

Un procedimiento para encontrar todos los flujos máximos en una red es simplemente este: tomamos dos nodos y calculamos el flujo máximo entre estos para encontrar el corte mínimo  $C_1=(A, \bar{A})$ . Representamos a éste con dos nodos generalizados conectados por una arista a la cual asignamos el valor del corte,  $|C_1|$ . En un nodo ponemos los nodos de  $A$  y en el otro los de  $\bar{A}$ .



Ahora repetimos el proceso: escogemos dos nodos en  $A$  (o en  $\bar{A}$ ) y resolvemos el problema de flujo en la red condensada donde  $\bar{A}$  (o  $A$ ) es un solo nodo. El corte resultante  $C_2$  es representado por una arista que conecta las dos partes de  $A$  divididas por  $C_2$ , digamos  $A_1$  y  $A_2$ .  $\bar{A}$  es conectado a  $A_1$  si  $C_2=(\bar{A}A_1, A_2)$  o a  $A_2$  si  $C_2=(A_1, \bar{A}A_2)$ :

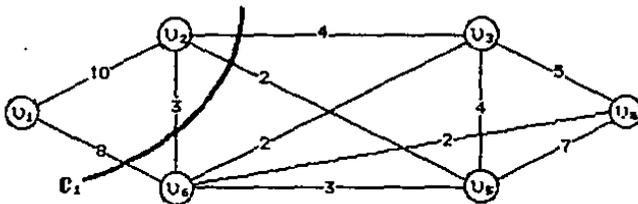


Este procedimiento se repite una y otra vez. En cada etapa tenemos ciertos nodos generalizados (que pueden o no representar varios nodos de la red original) y ciertas aristas que los conectan. Para continuar con el cálculo escogemos un nodo generalizado  $A_i$  que contenga al menos dos nodos  $v_a$  y  $v_b$ . Al eliminar las aristas que conectan a  $A_i$ , la red de nodos

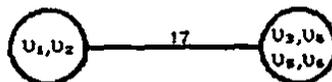
generalizados estará formada por un número de componentes desconectados. Condensamos cada uno de estos componentes, excepto  $A_i$ , en un solo nodo y resolvemos el problema de flujo en la red formada por estos nodos condensados y los nodos originales de  $A_i$ , usando  $v_a$  y  $v_b$  como fuente y sumidero. El corte mínimo obtenido divide a  $A_i$  en dos partes:  $A_{i1}$  y  $A_{i2}$ . Se representa en el digrama reemplazando a  $A_i$  por dos nodos generalizados  $A_{i1}$  y  $A_{i2}$  conectados por una arista que lleva el peso del corte. Todas las otras aristas y nodos generalizados del diagrama no cambian, excepto aquellas que anteriormente conectaban a  $A_i$ . Esta arista se conecta a  $A_{i1}$  si su componente estaba en el mismo lado del corte que  $A_{i1}$  y se conecta a  $A_{i2}$  si su componente cayó en el otro lado.

Este procedimiento se repite hasta que los nodos generalizados consistan de un solo nodo cada uno. Este punto es alcanzado después de  $n-1$  cortes exactamente, obteniendo siempre un árbol de expansión de  $n$  nodos y  $n-1$  aristas, obtenida cada una al resolver un problema de flujo en una red de tamaño igual o menor que la original.

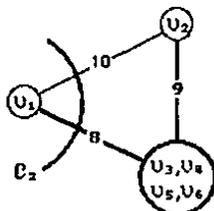
EJEMPLO 26: Sea la red:



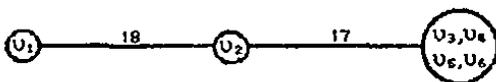
Escogemos arbitrariamente los nodos  $v_2$  y  $v_4$  y al resolver el problema de flujo máximo encontramos que el corte mínimo es  $C_1 = (\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4, v_5, v_6\})$  con capacidad (o peso) de  $|C_1| = 17$ . Esto es representado así:



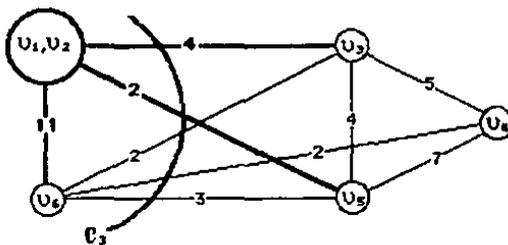
Para obtener  $f_{12}$  consideramos a  $u_3, u_4, u_5$  y  $u_6$  como un solo nodo, obteniendo:



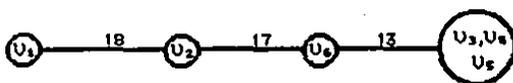
donde el mínimo corte que separa a  $u_1$  de  $u_2$  es  $C_2 = (\{u_1\}, \{u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\})$  con un peso de 18, entonces



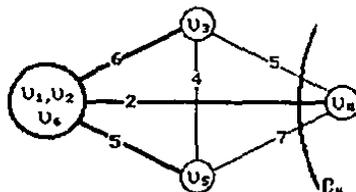
Ahora escogemos a  $u_3$  y  $u_6$ . Considerando a  $u_1$  y  $u_2$  como un solo nodo,



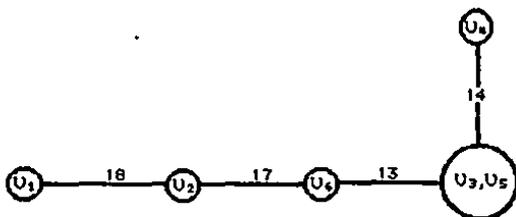
encontramos el corte mínimo  $C_3 = (\{u_1, u_2, u_4\}, \{u_3, u_5, u_6\})$  con  $|C_3| = 13$ , obteniendo el diagrama:



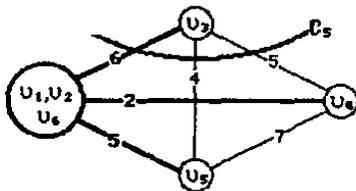
Ahora consideremos  $f_{35}$ , tomando a  $u_1, u_2$  y  $u_6$  como un solo nodo:



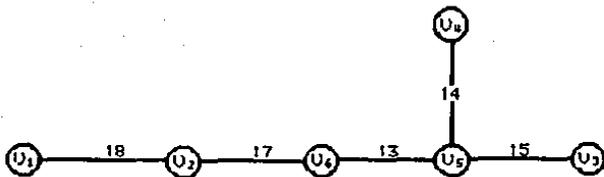
el corte mínimo resultante es  $C_4 = (\{u_4\}, \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_6\})$  con  $|E_{C_4}|=14$ , entonces:



Finalmente consideremos  $f_{35}$  tomando  $u_1, u_2$  y  $u_6$  como un nodo y  $u_4$  como otro, obteniendo la misma red anterior:



y el corte mínimo  $C_5 = (\{u_3\}, \{u_1, u_2, u_4, u_5, u_6\})$  con peso 15, dándonos el árbol final:



¿Podemos asegurar que el flujo máximo de  $u_1$  a  $u_3$  es 13, el flujo máximo de  $u_1$  a  $u_4$  es 17, etc., es decir:

LEMA 7.

*El flujo entre dos nodos cualquiera es simplemente*  
 $\min \{ |C_{i_1}|, |C_{i_2}|, \dots, |C_{i_r}| \}$ ,

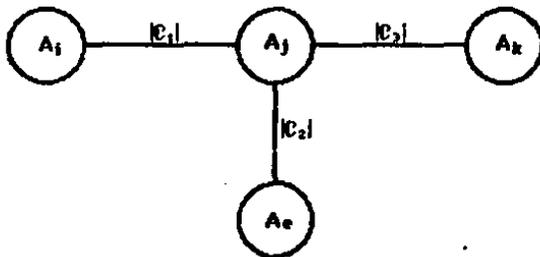
donde los  $|C_i|$  son los valores de la serie de aristas del árbol de expansión maximal que conectan los dos nodos.

Demostración.

Consideremos dos nodos:  $v_i$  y  $v_j$ , entonces

$$f_{ij} \leq \min \{ |C_{i_1}|, |C_{i_2}|, \dots, |C_{i_r}| \}$$

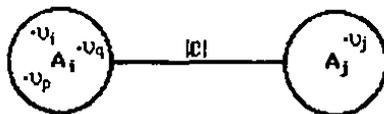
ya que cada  $|C_i|$  en la cadena que une a  $v_i$  y  $v_j$  corresponde a un corte que los separa. Demostrar la inecuación contraria es más difícil. Consideremos cualquier etapa de la construcción:



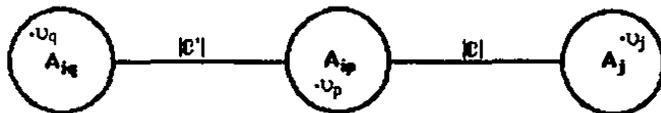
donde tenemos aristas que representan cortes y nodos que representan conjuntos. Sabemos que si un arco con valor  $|C|$  conecta a  $A_i$  y  $A_j$ ,

entonces existe un nodo  $v_i \in A_i$  y un nodo  $v_j \in A_j$  tales que  $f_{ij} = |C|$ . Esto es cierto después del primer corte. Se demostrará que esta propiedad se mantiene.

Consideremos a  $A_i$  a punto de ser cortado:



donde  $A_j$  representa el conjunto conectado a  $A_i$  por  $|C|$ . Tenemos entonces que  $\exists v_i \in A_i$  y  $v_j \in A_j$  con  $f_{ij} = |C|$ . Al cortar  $v_p$  de  $v_q$ ,  $A_i$  se divide en  $A_{ip}$  y  $A_{iq}$ . Supongamos que  $A_j$  es conectado a  $A_{ip}$ .



Tenemos por tanto que  $v_p$  y  $v_q$  nos dan el flujo buscado  $f_{pq} = |C|$  en la nueva arista. Ahora para el caso de la otra arista de valor  $|C|$  tenemos dos casos:

i)  $v_i \in A_{ip}$ .

Entonces el flujo  $f_{ij} = |C|$  todavía es aplicable.

ii)  $v_i \in A_{iq}$ .

Entonces hay que demostrar que en  $A_{ip}$  existe un nodo tal que su flujo máximo hacia algún elemento de  $A_j$  es  $|C|$ .

Consideremos los nodos  $v_j$ ,  $v_i$ ,  $v_q$  y  $v_p$ . Por el teorema 1

$$f_{jp} \geq \min \{ f_{ji}, f_{iq}, f_{qp} \}$$

dado que  $v_j$  y  $v_p$  están en el mismo lado del corte  $C'$  y  $v_i$  y  $v_q$  están en el otro, sabemos que el flujo  $f_{jp}$  no es afectado si  $A_{iq}$  se reemplaza por

un solo nodo, o lo que es lo mismo, si todas las aristas que están contenidas en  $A_{i_1}$  tienen una capacidad mucho mayor. En este caso tendríamos una  $f_{i_1}$  grande y como no afectaría se debe cumplir

$$f_{jp} \geq \min \{ f_{ji}, f_{qp} \} = \min \{ |C|, |C'| \}.$$

Como el mínimo corte que separa a  $v_i$  de  $v_j$  es  $C$ , se tiene que  $|C| = f_{ij} \leq |C'|$  y como consecuencia  $f_{jp} \geq |C|$ . Pero en el diagrama vemos que  $C$  es un corte que divide a  $v_j$  y  $v_p$ , por lo tanto  $f_{jp} = |C|$ . Luego entonces  $v_p \in A_p$  y  $v_j \in A_j$  son los dos nodos buscados.

Como ahora sabemos que en el árbol final los valores de las aristas en realidad representan los valores de flujo entre los puntos adyacentes, aplicando nuevamente el teorema 1

$$f_{ij} \geq \min \{ |C_{i_1}|, |C_{i_2}|, \dots, |C_{i_r}| \},$$

lo que nos da el resultado deseado.

$$f_{ij} = \min \{ |C_{i_1}|, |C_{i_2}|, \dots, |C_{i_r}| \}.$$

*Q.E.D.*

Entonces la matriz de flujos máximos para nuestro ejemplo es:

$$F = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{bmatrix} - & 18 & 13 & 13 & 13 & 17 \\ 18 & - & 13 & 13 & 13 & 17 \\ 13 & 13 & - & 14 & 15 & 13 \\ 13 & 13 & 14 & - & 14 & 13 \\ 13 & 13 & 15 & 14 & - & 13 \\ 17 & 17 & 13 & 13 & 13 & - \end{bmatrix} \end{array}$$

En un árbol cualquiera una arista de  $v_i$  a  $v_j$  puede considerarse como la representación de un corte de los nodos, ya que si se elimina, los nodos del árbol quedan divididos en dos conjuntos,  $A$  y  $\bar{A}$ . Si además cada corte así obtenido es un corte mínimo entre  $v_i$  y  $v_j$  en una red  $G$  y

el valor de la arista del árbol es la capacidad del corte en  $G$ , entonces el árbol es llamado *árbol cortado* de  $G$ .

Entonces acabamos de desarrollar la manera de obtener el árbol cortado de una red resolviendo  $n-1$  problemas de flujo máximo.

## APENDICE II.

### PROGRAMA EN PASCAL DE LOS TRES PROCEDIMIENTOS BORROSOS PARA EL ANALISIS DE CONGLOMERADOS

Este programa pide los grados de membresía diferentes de cero de la relación de semejanza  $R$  y proporciona:

- el cierre transitivo  $\hat{R}$ ,
- los componentes de  $\tau$ -grados de conectividad para  $\forall \tau$
- el rebanante estrecho, la matriz de cohesividad  $H$  y su cierre transitivo  $\hat{H}$ .

Este programa acepta un máximo de 50 objetos a conglomerar. Si se desea aumentar este número a  $n$ , basta cambiar los datos que aparecen en **datos**:

- 50        por  $n$ ,
- 49        por  $n-1$ ,
- 100      por  $2*n$ .

```

program CONGLOMERADOS (INPUT, OUTPUT);
var
  L, M, H, K, N, NC : INTEGER;
  PESO1, PESO2 : array[1..50] of REAL;
  O, VC2 : array[1..50] of INTEGER;
  B : array[1..50] of BOOLEAN;
  CORTE1, CORTE2 : array[1..49, 1..50] of INTEGER;
  C : array[1..50, 1..50] of INTEGER;
  R, COND : array[1..50, 1..50] of REAL;
procedure DATOS;
(*ESTE PROCEDURE PIDE Y GUARDA LOS VALORES DE LA RELACION*)
(*BORROSA DE SEMEJANZA ENTRE CADA PAR DE OBJETOS*)
var
  NUM1, I, K, L : INTEGER;
  P : REAL;
begin
  repeat
    WRITELN('CUANTOS OBJETOS TENEMOS? (<= 50)');
    READ(N);
    WRITELN(N);
  
```

```

until (N > 0) and (N <= 0);
repeat
  WRITELN('CUANTOS VALORES DISTINTOS DE CERO TENEMOS? (<=, TRUNC((N * (N - 1)) / 2) : 4, ')');
  READ(NUM);
  WRITELN(NUM);
until (NUM > 0) and (NUM <= (N * (N - 1)) / 2);
if (NUM <> 0) then
  begin
    WRITELN('DAME LOS PARES DE OBJETOS CON SEMEJANZA DISTINTA DE CERO');
    WRITELN;
    WRITELN(' 1er. OBJETO: 2o. OBJETO: SEMEJANZA:');
    WRITELN;
    for I := 1 to NUM do
      begin
        repeat
          repeat
            WRITE(I : 3, 'o. PAR:');
            READ(K);
            READ(L);
            if (K = L) then
              WRITELN(' DAR SOLO OBJETOS DIFERENTES');
            until (K <> L) and (K <= N) and (L > 0) and (L <= N);
            if (R[K, L] <> 0) then
              WRITELN(' EL SEMEJANZA PARA ESE PAR YA ESTA DADA:');
            until (R[K, L] = 0);
            READ(P);
            if (P <= 0) or (P > 1) then
              WRITELN(' LOS GRADOS DE SEMEJANZA DEBEN DE SER ENTRE 0 Y 1');
            if (P > 0) and (P <= 1) then
              R[K, L] := P;
              WRITELN('   K : 3,   ', L : 3,   ', R[K, L] : 1 : 1);
              R[L, K] := R[K, L];
              until (R[K, L] > 0) and (R[K, L] <= 1);
            end;
            WRITELN;
            WRITELN('LA RELACION BORROSA DE SEMEJANZA ES:');
            WRITELN;
            WRITE(' ');
            for I := 1 to N do
              WRITE(I : 4, ' ');
            WRITELN;
            for I := 1 to N do
              begin
                R[I, I] := 1;
                WRITE(I : 2, ' ');
                for K := 1 to I do
                  WRITE(R[I, K] : 1 : 1, ' ');
                WRITELN;
              end;
            WRITELN;
            end;
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;
end;

```

```

end;
procedure CIERRE-TRANSITIVO;
(*ESTE PROCEDURA CALCULA EL CIERRE TRANSITIVO*)
Var
  H, I, J, K : INTEGER;
  MAX, MIN : REAL;
  B : BOOLEAN;
  R1, R2 : array[1..60, 1..60] of REAL;
begin
  for H := 1 to N do
  begin
    R2[H, H] := R[H, H];
    for J := 1 to N do
      R1[H, J] := R[H, J];
    end;
    I := 1;
    while not B do
    begin
      B := TRUE;
      I := I + 1;
      if I mod 2 = 0 then
        for H := 1 to N do
          for J := 1 to H - 1 do
            begin
              MAX := 0;
              for K := 1 to N do
                begin
                  if R[H, K] >= R1[K, J] then
                    MIN := R1[K, J]
                  else
                    MIN := R[H, K];
                  if MIN > MAX then
                    MAX := MIN;
                end;
              R2[H, J] := MAX;
              R2[J, H] := MAX;
              if R1[H, J] < R2[H, J] then
                B := FALSE;
            end
          else
            for H := 1 to N do
              for J := 1 to H - 1 do
                begin
                  MAX := 0;
                  for K := 1 to N do
                    begin
                      if R[H, K] >= R2[K, J] then
                        MIN := R2[K, J]
                      else
                        MIN := R[H, K];
                      if MIN > MAX then
                        MAX := MIN;
                    end;
                  R2[H, J] := MAX;
                  R2[J, H] := MAX;
                end;
              if R1[H, J] < R2[H, J] then
                B := FALSE;
            end;
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;
end;

```

```

end;
R1[H, J] := MAX;
R1[J, H] := MAX;
if R1[H, J] <> R2[H, J] then
  B := FALSE;
end;
end;
WRITELN;
WRITELN('EL CIERRE TRANSITIVO ES  $\bar{R}$ , 1-1 : 1, ' =  $\bar{R}$ , 1 : 1, ' Y ESTA DADO POR:');
WRITE(' ');
for J := 1 to N do
  WRITE(J : 5, ' ');
WRITELN;
for J := 1 to N do
  begin
    WRITE(J : 2, ' ');
    for K := 1 to J do
      WRITE(R1[K, J] : 4 : 1, ' ');
    WRITELN;
  end;
end;
procedure NUMCOM;
(*ESTE PROCEDURE CALCULA EL NUMERO DE COMPONENTES DE UN SUBGRAFO*)
var
  T, K, J, H : INTEGER;
begin
  NC := 0;
  for J := 1 to N do
    begin
      O[J] := 0;
      C[1, J] := 0;
    end;
  repeat
    NC := NC + 1;
    K := 1;
    repeat
      while ((C[1, K] > 0) and (K < N)) do
        K := K + 1;
        C[1, K] := NC;
        H := H + 1;
        O[H] := K;
        if ((B[K]) and (H < N)) then
          NC := NC + 1;
        until ((not B[K]) or (H >= N));
        K := 0;
      repeat
        K := K + 1;
        if (O[K] <> 0) then
          if (C[1, O[K]] = NC) then
            for J := 1 to N do
              if (C[1, J] = 0) then

```

```

if (R[O[K], J] > 0) and not B[J] then
begin
C[1, J] := NC;
H := H + 1;
O[H] := J;
end;
until K = H - 1;
until (H = N);
WRITELN('HAY ', NC : 2, ' COMPONENTE(S):');
for J := 1 to HC do
begin
WRITE(' ');
for T := 1 to N do
if C[1, T] = J then
WRITE(T : 2, ', ');
WRITELN(' ');
end;
WRITELN;
end; procedure GRADOS;
var
C, I, J : INTEGER;
T, SM : REAL;
begin
C := N;
WRITELN;
WRITELN('LOS COMPONENTES DE T-GRADOS DE CONECTIVIDAD SON:');
WRITELN;
repeat
SM := 0;
for I := 1 to N do
PESO2[I] := 0;
for J := 1 to N do
if not B[I] then
begin
for J := 1 to N do
if I <> J then
if not B[J] then
PESO2[I] := PESO2[I] + R[I, J];
if SM > PESO2[I] then
SM := PESO2[I];
end;
end;
if SM > T then
begin
T := SM;
WRITE('PARA T = ', T : 2 : 1, ' ');
NUMCOM;
end;
for I := 1 to N do
if not B[I] then
if PESO2[I] <= T then
begin
B[I] := TRUE;

```

```

C := C - 1;
end;
until C = 1;
end;
procedure FORDFULK (I, NF, NS : INTEGER);
(* ESTE PROCEDIMIENTO BUSCA EL CORTE MINIMO QUE SEPARA DOS *)
(* NODOS: NF Y NS, PARTIENDO DE UNA RED CONDENSADA *)
var
FP : REAL;
T, J, K, L, MC : INTEGER;
O, M : array[1..NS] of INTEGER;
F : array[1..NS] of REAL;
FC : array[1..NS, 1..NS] of REAL;
begin
repeat
(*ESTE REPEAT CALCULA EL FLUJO MAXIMO POSIBLE DE NF A NS*)
for J := 1 to N do
begin
M[J] := 0;
O[J] := 0;
F[J] := 0;
end;
O[I] := NF;
M[NF] := 1;
MC := 1;
L := 0;
repeat
(*ESTE REPEAT BUSCA SI HAY FLUJO POSIBLE Y LA TRAYECTORIA DE ESTE*)
L := L + 1;
for J := 1 to N do
if (M[J] = 0) and (COND[O[L], J] > 0) then
begin
if (O[L] < J) and (COND[O[L], J] > FC[O[L], J]) then
begin
F[J] := COND[O[L], J] - FC[O[L], J];
MC := MC + 1;
M[J] := O[L];
O[MC] := J;
end;
if (O[L] > J) and (COND[O[L], J] > -FC[O[L], J]) then
begin
F[J] := COND[O[L], J] + FC[O[L], J];
MC := MC + 1;
M[J] := -O[L];
O[MC] := J;
end;
end;
until (M[NS] <> 0) or (L = MC);
if (M[NS] <> 0) then
(*ESTE IF ES EN CASO DE QUE HAYA FLUJO POSIBLE, LO HACE PASAR*)
begin
J := NS;

```

```

FP := 0;
repeat
(*ESTE REPEAT BUSCA A CUANTO ASCIENDE EL FLUJO POSIBLE POR ESA TRAYECTORIA*)
if (FP > F[J]) then
FP := F[J];
J := ABS(M[J]);
until (J = NF);
J := NS;
repeat
if (M[J] > 0) then
begin
FC[J, M[J]] := FC[J, M[J]] + FP;
FC[M[J], J] := FC[J, M[J]];
end
else
begin
FC[J, -M[J]] := FC[J, -M[J]] - FP;
FC[-M[J], J] := FC[J, -M[J]];
end;
J := ABS(M[J]);
until (J = NF);
end;
until (M[NS] = 0) and (L = MC);
PESO1[1] := 0;
for J := 1 to N do
CORTE1[1, J] := 0;
for J := 1 to N do
begin
for K := 1 to N do
if (VC2[K] = J) then
if (M[J] = 0) then
CORTE1[1, K] := 2
else
CORTE1[1, K] := 1;
if NF < J then
PESO1[1] := PESO1[1] + FC[NF, J]
else
PESO1[1] := PESO1[1] - FC[NF, J];
end;
end;
procedure MINCUT (H, K : INTEGER);
(*ESTE PROCEDURE CALCULA EL CORTE MINIMO DE UN COMPONENTE*)
var
T, NF, NS, I, J, V : INTEGER;
VC1 : array[1..N] of INTEGER;
begin
for J := 1 to N do
if C[H, J] = K then
begin
VC1[J] := 1;
V := V + 1;
end;

```

```

for I := 1 to V - 1 do
begin
NF := 0;
NS := 0;
repeat
NF := NF + 1;
while (VC1[NF] = 0) do
NF := NF + 1;
J := NF + 1;
T := VC1[NF];
while (J <= N) and (NS = 0) do
begin
if (T = VC1[J]) then
NS := J;
J := J + 1;
end;
until NS <> 0;
for J := 1 to N do
if VC1[J] = T then
VC2[J] := J
else
VC2[J] := VC1[J];
for J := 2 to N do
for K := 1 to J - 1 do
begin
COND[J, K] := 0;
COND[K, J] := 0;
end;
for J := 1 to N - 1 do
for K := J + 1 to N do
if (VC2[J] > 0) and (VC2[K] > 0) and (VC2[J] <> VC2[K]) then
begin
COND[VC2[J], VC2[K]] := COND[VC2[J], VC2[K]] + R[J, K];
COND[VC2[K], VC2[J]] := COND[VC2[J], VC2[K]];
end;
FORCFULK(1, NF, NS);
for J := 1 to N do
if VC1[J] = T then
case CORTE1[I, J] of
1 :
VC1[J] := NF;
2 :
VC1[J] := NS;
end;
end;
PES02[H] := PES01[I];
I := I + 1;
for J := 2 to V - 1 do
if PES01[J] < PES02[H] then
begin
PES02[H] := PES01[J];
I := J;

```

```

end;
for J := 1 to N do
CORTE2[H, J] := CORTE1[L, J];
WRITELN('EL CORTE MINIMO ES:');
WRITE(' ');
for J := 1 to N do
if CORTE2[H, J] = 1 then
WRITE(J : 3, ',');
WRITE(' ');
for J := 1 to N do
if CORTE2[H, J] = 2 then
WRITE(J : 3, ',');
WRITELN(' ');
WRITELN('CON PESO: ', PESO2[H] : 2 : 1);
WRITELN;
end;
procedure ARISTAS;
var
T, K, H, J : INTEGER;
begin
WRITELN;
WRITELN('PROCEDIMIENTO DE T-ARISTAS DE CONECTIVIDAD. ');
WRITELN;
for H := 1 to N do
B[H] := FALSE;
NUMCOM;
for H := 1 to N - NC do
begin
J := 0;
repeat
J := J + 1;
K := C[H, J];
L := J + 1;
while (K <> C[H, L]) and (L < N) do
L := L + 1;
until K = C[H, L];
WRITELN('EL SUBGRAFO A CORTAR EN EL PASO', H : 2, ' ES: ');
WRITE(' ');
for T := 1 to N do
if C[H, T] = K then
WRITE(T : 2, ', ');
WRITELN(' ');
MINCUT(H, K);
for J := 1 to N do
if CORTE2[H, J] = 2 then
C[H + 1, J] := NC + H
else
C[H + 1, J] := C[H, J];
end;
for J := 1 to N do
for K := 1 to J - 1 do
for H := 1 to N - NC do

```

```

if (CORTE2[H, J] > 0) and (CORTE2[H, K] > 0) and (R[J, K] > 0) then
if (R[J, K] < PESO2[H]) then
begin
R[J, K] := PESO2[H];
R[K, J] := PESO2[H];
end;
WRITELN('LA MATRIZ DE COHESIVIDAD ES:');
WRITELN;
WRITE(' ');
for J = 1 to N do
WRITE(J : 5, ' ');
WRITELN;
for J = 1 to N do
begin
WRITE(J : 2, ' ');
R[J, J] := 0;
for K = 1 to J - 1 do
WRITE(R[J, K] : 4 : 1, ' ');
WRITELN(' 0.0');
end;
CIERRE-TRANSITIVO;
end;
(*CUERPO DEL PROGRAMA*)
begin
DATOS;
CIERRE-TRANSITIVO;
GRADOS;
ARISTAS;
end.

```

## BIBLIOGRAFIA

1. Bezaraa, M. S. y Jarvis, J. J., Programación Lineal y Flujo en Redes, Ed. Limusa, México, 1984, p. 453-461.
2. Certo, S. C., Administración Moderna, Nueva Ed. Interamericana, 2ª edición, México, 1984, págs. 411-440.
3. Gomory, R. E. y Hu, T. C., "Multi-terminal Network Flows," J. Soc. Indust. Appl. Math., Vol. 9, Num. 4, E.U.A., Diciembre 1961, p. 459-479.
4. Kaufmann, A., Introducción a la Teoría de los Subconjuntos Borrosos, Tomo I, (Elementos Teóricos de Base), Ed. C.E.C.S.A., 1982, Cap. I y II.
5. Matula, D. W., "Cluster Analysis via Graph Theoretic Techniques," Proc. de la Conferencia en Louisiana sobre Combinatorics, Teoría de Grafos y Computación, ed. por Mullin, R. C., Reid, K. B. y Roselle, D. P., Universidad de Manitoba, Winnipeg, Marzo 1970, p. 199-212.
6. Matula, D. W., "Components, Clusters and Slicings in Graphs," SIAM J. Appl. Math., Vol. 22, Num. 3, Mayo 1972, p. 459-479.
7. Quirós Coballero, R., Conjuntos Borrosos: una Aplicación, Tesis, Universidad Anahuac, México, 1987.
8. Schneider, G. M., Weingart, S. W. y Perlman, D. M., An Introduction to Programming and Problem Solving with Pascal, Ed. John Wiley & Sons, E.U.A., 1978.
9. Tamura, S., Higuchi, S. y Tanaka, K., "Pattern Classification Based on Fuzzy Relations," IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Vol. SMC-1, Num. 1, Enero 1971, p. 61-66.

6. Esta bibliografía está basada en la teoría clásica del análisis de conglomerados.

10. Yeh, R. T. y Bang, S. Y., "Fuzzy Relations, Fuzzy Graphs and their Applications to Clustering Analysis," Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes, Ed. por Zadeh, L. A., Fu, K. S., Tenaka, K. y Shimura, M., Accademic Press-Inc, p. 125-149.

11. Zadeh, L. A., "Fuzzy Sets," Information and Control, Vol. 8, Num. 3, Junio 1965, p. 338-353.

#### **REFERENCIAS:**

CAPITULO I: [4], [11].  
CAPITULO II: [4], [7], [9], [10].  
CAPITULO III: [1], [6], [10].  
CAPITULO IV: [5], [6], [7], [9], [10].  
CAPITULO V: [2].  
APENDICE I: [1], [3].  
APENDICE II: [8].