Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Filosofía y Letras

LAS MATEMATICAS Y LAS CIENCIAS EMPIRICAS: ¿QUE PODRIAN SER LOS NUMEROS?

T E S I S

que para obtener el grado de

Doctor en Filosofía

p r e s e n t a

Alfonso Carlos Avila del Palacio

México, D. F. 1989

INDICE

	Páginas
Prólogo.	5
1. La Definición de Número en Gottlob Frege.	11
1.1. El programa fregeano.	12
1.2. Definición fregeana de número.	15
1.3. Aclaración del vocabulario fregeano.	18
1.3.1.-Los términos 'Begriff' y 'Funktion'.	18
1.3.2.-Los términos 'Werthverlauf' y 'Umfang'.	27
1.3.3.-La tesis de los pares ordenados.	31
1.4. ¿Qué es un número para Frege?	38
2. Algunas Objeciones y Soluciones a la Definición Fregeana de Número.	48
2.1. Dificultades de la definición fregeana de número.	49
2.2. ¿Un número está siempre asociado a ciertos conceptos?	52
2.3. ¿Todo concepto tiene siempre un número asociado?	59
2.4. ¿Un número es un conjunto?	66
2.5. ¿El número del concepto F es específicamente el "conjunto" asociado al concepto "equinumérico con respecto a F"?	79
2.6. ¿Qué prueba una reconstrucción lógica del número?	87

Páginas

3. Ideas Empiristas Postfregeanas sobre las Matemáticas y los Números. 98

3.1. El problema de si los números son o no algo puramente estructural o puramente matemático. 99

3.2. La teoría figurativa de Wittgenstein. 102

3.3. Reflexión filosófica del matemático Maurice Frechet. 112

3.4. La matemática y la filosofía de la ciencia en Imre Lakatos. 118

3.5. La concepción histórica de Philip Kitcher. 121

4. ¿Qué podrían ser los números? 133

4.1. En consecuencia, ¿qué podemos decir de las matemáticas y los números? 134

4.2. ¿Qué método han seguido algunos trabajos pioneros que han dado un tratamiento matemático de lo empírico? 137

4.3. Así pues, ¿qué podemos entender por 'matemáticas'? 151

4.4. En ese contexto, ¿qué podrían ser los números? 161

Conclusiones. 174

Bibliografía. 179

PROLOGO

La aportación que pretende el presente trabajo es la presentación de una nueva visión de lo que sean los números basada en una distinción conceptual que permite ubicar gran parte de lo que los especialistas han estado diciendo sobre ellos. En ese sentido, es una elucidación de los usos del lenguaje que intenta desbaratar los problemas que surgen del uso indiscriminado del término 'número'. Todo esto, como diría Wittgenstein, deja las matemáticas como están; pero, si la tesis que aquí propongo está en lo correcto, considero que, mientras no sea refutada, no podrá ignorarse esta distinción conceptual cuando se quiera hablar filosóficamente sobre los números.

En múltiples ocasiones no es completamente claro el significado de los términos conceptuales a pesar de que en algunos casos los usemos acertádamente. Un término es un símbolo que está en lugar de algo que no siempre podemos precisar completamente. Si el término es un nombre propio que apunta a un objeto particular podemos saber, creo que sin demasiada dificultad, cuál es el referente del término en cuestión; pero si se trata de un término conceptual, esto es, para decirlo con Frege, de un modo de agrupar objetos, por tener cierto carácter intencional, creo que para aclararlo no nos queda sino recurrir a otros términos conceptuales y así sucesivamente. De esa forma, para aclarar uno de esos términos podemos, por ejemplo, definirlo en base a términos conocidos fijando así su significado; pero también podemos aclararlo de otras formas: podemos indagar cómo se ha usado, como lo sugiere el segundo Wittgenstein, o, podemos, a la manera de los diálogos de Platón, establecer sólo ciertas relaciones conceptuales que, sin llegar a fijar más o menos arbitrariamente el significado del término en cuestión, nos ayudan a entenderlo, al menos en algún aspecto que consideramos relevante. Pues bien, estas formas no definicionales de esclarecimiento son las que he adoptado en el presente trabajo con respecto al término 'número'.

A la pregunta de qué son los números, los matemáticos, los reconstructores de la aritmética y los que aplican los números a las cosas que conforman los hechos del mundo han respondido con ideas aparentemente irreconciliables. Aparentemente todos hablan de los mismos números y sólo difieren en lo que opinan de ellos. Los matemáticos no van más allá de enunciar sus propiedades aritméticas; en todo caso, como Peano, aceptarían que número es todo aquello que cumple con las leyes aritméticas de los números. Los reconstructivistas, como Frege, Russell y Dedekind afirman que los números son ciertos "conjuntos" o ciertas "cortaduras". Por último, los que aplican los números a las cosas sostienen que, por ejemplo el 4 que manejan los aritméticos, tiene una vinculación directa con algo empírico como cuatro manzanas o cuatro peras. Sin embargo, en base al análisis que presento aquí, sostengo que el término 'número' se ha aplicado a cosas de tres niveles distintos aunque vinculados: 1) los números del primer nivel entendidos como "conceptos" que reclasifican las cosas que conforman los hechos del mundo; 2) los números del segundo nivel, o números aritméticos, que pueden verse como figuras, en términos de Wittgenstein, de los números del primer nivel; y 3) los números del tercer nivel que serían figuras de los números aritméticos, es decir, figuras de los números del segundo nivel.

Para apoyar lo anterior, en el primer capítulo examino la definición fregeana de número aportando una clarificación conceptual que arroja una interpretación hasta cierto punto novedosa de los términos fregeanos usados en su definición de número y, por consiguiente, del número fregeano mismo. En el segundo capítulo examino algunos límites y alcances de la definición fregeana de número deteniéndome, sobre todo, en los aspectos que pueden determinar las propiedades matemáticas y no matemáticas de los números: en el apartado 2.2, a partir de la definición de número dada por Dedekind, muestro que no es suficiente una caracterización puramente estructural como la de Dedekind, o como la de Peano, para caraterizar los números y que, más bien, tenemos que admitir con Frege que los números tienen también propiedades no estructurales como, por ejemplo, la propiedad de todo número de poderse ver siempre como el número de un concepto; en el apartado 2.3, a partir de las ideas russellianas, examino la conclusión que se desprende de la contradicción de que no todo concepto, entendido éste a la manera fregeana, tiene una extensión y por consiguiente un número asociado; en el apartado 2.4, a la luz de los trabajos de Cantor, examino la noción de "conjunto" para poder aclarar en qué sentido podemos decir como Frege que los números son determinados "conjuntos"; en el apartado 2.5, delimito la pertinencia de las importantes críticas de Benacerraf a la definición fregeana de número reforzando, también, la idea apuntada en 2.2 de que no basta una definición puramente estructural de los números; y, por último, en el apartado 2.6, a partir del análisis de los trabajos de Hilbert y otros, doy los primeros elementos para desarrollar una interpretación del trabajo axiomático que lo vincula estrechamente con las reconstrucciones en general y con ciertos trabajos matemáticos en particular, concluyendo de ahí el sentido que podemos dar a una reconstrucción de la aritmética como la de Frege. En el tercer capítulo examino algunas versiones empiristas de las matemáticas y los números con la idea de fijar un criterio para trazar los límites entre los aspectos matemáticos y no matemáticos de los números: en el inciso 3.2, examino los trabajos de Wittgenstein por ser en cierto sentido un continuador de la línea fregeana-russelliana, y, en otro sentido, un fuerte crítico de algunos de sus postulados básicos que los apartan de empirismo; en los siguientes incisos examino a tres pensadores empiristas representativos de puntos de vista muy importantes y sugestivos para la investigación sobre los números: 1) el matemático de Maurice Frechet (3.3); 2) el de la filosofía de la ciencia de I. Lakatos (3.4); y 3) el histórico de P. Kitcher (3.5). Por último, dentro del cuarto capítulo que reúne las conclusiones generales, en el inciso 4.1 retomo la argumentación general de la tesis resaltando las ideas a las que se ha llegado, así como explicando el sentido de los diferentes análisis efectuados y por efectuar; en el inciso 4.2, con el propósito de avanzar, a partir de los autores considerados, en el análisis sobre la naturaleza empírica o *a priori* de las matemáticas, examino directamente algunos trabajos paradigmáticos en los cuales la matemática ha estado muy ligada al estudio de fenómenos empíricos: el estudio matemático del equilibrio de los planos de Arquímedes, los estudios matemáticos del movimiento realizados por Galileo, los principios matemáticos de la teoría de la riqueza de Cournot, y otros como las teorías matemáticas de probabilidades y de juegos; en el inciso 4.3, en base a los análisis y autores examinados, aclaro y defiendo en alguna medida lo que estoy entendiando por 'matemático' para poder ubicar la naturaleza matemática o no matemática de los números; y en el apartado 4.4 presento mi propuesta de que gran parte de la confusión acerca de los números se debe a que se ha estado hablando básicamente de tres clases de números: los de primer, segundo o tercer nivel al que hacíamos referencia al principio de este prólogo.

De acuerdo a eso, no intento definir aquí los números de primer nivel, ya que la aritmética se encarga de ello; tampoco intento definir los números del segundo nivel, ya que eso sería hacer matemática de la matemática y con ello sólo estaría creando números del tercer nivel como lo hacen las reconstrucciones de la aritmética; lo único que pretendo aquí es apuntar algunas ideas que nos ayuden a esclarecer y precisar el uso actual del término 'número'.

Debo aclarar que entiendo la filosofía como el diálogo de una comunidad cultural que se desarrolla a través de la historia y mediante el cual se pretende aclarar y precisar el sentido de los términos con los cuales se maneja dicha comunidad. Eso me ha llevado a discutir mis ideas en forma individual con filósofos y matemáticos preocupados por estos temas, así como también en forma colectiva en foros en los que he tenido la oportunidad de presentarlas. De hecho, el trabajo que aquí presento no hubiera llegado ni siquiera a la mínima claridad que pueda poseer si no fuera porque las ideas fueron aclarandose para mi mismo como resultado de ese diálogo. Por ello, lo que se haya podido lograr se debe en gran parte a los comentarios siempre pertinentes sobre todo el texto de parte de Raúl Orayen (director de tesis), Alejandro Garciadiego y León Olivé (revisores de tesis), Carlos Alvarez, Mark Platts y José Antonio Robles a quienes guardo profunda gratitud. Además, algunas de las ideas del capítulo 1 las discutí con Asunción Preiser y Lourdes Valdivia, y presenté resultados parciales en el seminario de León Olivé correspondiente a la Facultad de Filosofía y Letras de la UNAM y en el seminario de Filosofía de la Ciencia dirigido por Ana Rosa Perez en el Instituto de Investigaciones Filosóficas de la UNAM. Los seminarios de Raúl Orayen y Alejandro Garciadiego en la Facultad de Filosofía y Letras y la Facultad de Ciencias de la UNAM respectivamente me ayudaron, sobre todo, para la elaboración del capítulo 2, del cual presenté una versión preliminar del inciso 2.5 en el IV Congreso de la Asociación Filosófica Mexicana realizado en Toluca en noviembre de 1987; y la concepción que presento de los sistemas formales en el inciso 2.6 se debe, en gran parte, a la asesoría que recibí de Ulises Moulines para realizar una reconstrucción axiomática de la *Teoría General* de J. M. Keynes, así como a los sugerentes comentarios sobre ese trabajo de parte de Adolfo García de la Sienra. Con respecto al capitulo 3, agradezco las atinadas críticas que me hizo Mark Platts sobre mi interpretación de Wittgenstein, parte de la cual había presentado como replica al trabajo de Alejandro Tomasini en el VII Simposio Internacional de Filosofía del Instituto de Investigaciones Filosóficas en agosto de 1987. Con respecto al capítulo 4, presenté antecedentes de las ideas expuestas en el inciso 4.2 en el seminario de Elia Nathan de la Facultad de Filosofía y Letras; y las ideas sobre la naturaleza de las matemáticas que aparecen incorporadas en el inciso 4.3, las discutí principalmente en el seminario de matemáticas aplicadas que imparto en la facultad de economía y en el curso de teoría del conocimiento que imparto en la facultad de filosofía y letras de la UNAM, así como en un seminario exprofeso en el centro de matemáticas del Instituto Tecnológico de Durango. Sin embargo, la casi totalidad del material que presento aquí es inédito, ya que sólo he publicado una versión preliminar del inciso 1.3 en Análisis Filosófico VIII (1988) No. 1, pp. 19 a 35.

En todo este trabajo, como es habitual, uso el doble entrecomillado para encerrar títulos de artículos, citas textuales no sangradas y para indicar un sentido peculiar del término entrecomillado, así como también, al igual que Frege, para expresar y resaltar el referente único de una expresión compleja de naturaleza funcional. Uso el entrecomillado sencillo, como Frege, para referirme a la expresión misma que queda entrecomillada. Uso las letras cursivas para escribir títulos de libros, palabras en algún idioma diferente al español y, como es habitual en varios de los autores trabajados, para resaltar el término escrito de ese modo. He reservado las barras para intercalar mis propias palabras en el interior de alguna cita textual de otro autor.

Por otro lado, con respecto a la bibliografía, las obras mencionadas al final son las que principalmente he utilizado; la traducción que cito de textos en otros idiomas es de mi entera responsabilidad, aun cuando haya utilizado también versiones españolas de la misma obra. Dado que existen inumerables versiones de los trabajos de varios de los autores manejados, he preferido, cuando las obras se prestaban para ello, dar las referencias de éstos en base a capítulos, incisos y versículos de uso universal, más bien que en base a páginas de alguna versión en particular.

Agradezco el apoyo moral, bibliográfico y el uso de las computadoras al Instituto de Investigaciones Filosóficas de la UNAM, donde principalmente realizé la presente investigación, así como también al Instituto Tecnológico de Durango que, por intermediación de los ingenieros Jesús y Francisco Rubalcaba así como a los miembros del Laboratorio de Quimica, me facilitaron el ambiente y la infraestructura que requerí durante mi estancia en Durango, donde redacté la mayor parte de este trabajo. Agradezco también a las facultades de economía y filosofía y letras de la UNAM el permiso con goce de sueldo que me concedieron durante el semestre 88-1 para dedicar todo mi tiempo y esfurzo a la conclusión de esta investigación. Y, por último, debo gran parte de mi tranquilidad, entusiasmo y apoyo bibliográfico en Durango al invaluable apoyo que desde México me brindaron Myriam Rudoy y Mayahuel Serratos a quienes guardo profunda gratitud. Agradezco también a Myriam Rudoy la revisión final de mi incorregible estilo.

CAPITULO 1

LA DEFINICION DE NUMERO EN GOTTLOB FREGE

1.1. El programa fregeano.

Hoy día se conocen múltiples cosas acerca de los números: los matemáticos han ido descubriendo desde la antigüedad sus múltiples propiedades y relaciones; y hoy se aceptan varias clases de números como los primos, los irracionales, los imaginarios, los transfinitos, etcétera, y se sabe cómo usarlos para muy variados propósitos prácticos, cómo mandar hombres a la luna o construir puentes. Sin embargo, hasta donde conozco, nunca antes de los *Fundamentos de la Aritmética* de Gottlob Frege se había detenido alguien de una forma tan seria y sistemática a tratar de contestar la pregunta ¿qué son al fin de cuentas los números? Es por eso, justamente, que nuestro estudio comienza por el análisis de la respuesta dada por Frege en la obra mencionada.

Habrá que aclarar que no me detendré a examinar con el mismo cuidado todo lo que Frege dice sobre los números en ésa u otras obras; particularmente, no diré nada nuevo sobre su forma particular de reconstruir la aritmética; en cambio, dedicaré un buen espacio a discutir las distinciones conceptuales que le sirven de base para su definición de número. De hecho, Frege mismo no obtiene su noción de número a partir de su reconstrucción de la aritmética; sino, más bien, "intentemos ver –dice– si las propiedades conocidas de los números se derivan de nuestra definición de número"(Frege [1884], inc. 70). Para él, deducir lógicamente las leyes de la aritmética a partir de su definición, si ésta no puede omitirse, es una prueba de que dicha definición da en el blanco; pero, previamente a ese trabajo que intentó en sus *Leyes Básicas de la Aritmética*, discutió con bastante amplitud el aparato conceptual que utilizó en todo su trabajo. Así pues, trataré de mostrar en lo que sigue que un análisis que clarifique sus distinciones conceptuales nos ayudará a entender de manera más apropiada que hasta ahora lo que encierra su definición de número. De hecho, nos valdremos de ese análisis para presentar una interpretación hasta cierto punto novedosa de la noción fregeana de número, así como para estudiar, en el capítulo siguiente, sus límites y alcances.

Ahora bien, para no sacar de contexto la definición fregeana, recordemos que Frege se hace la pregunta por el número al interior de un propósito más amplio: fundamentar la aritmética[1]; es decir,

> demostrar con rigor, trazar con precisión los límites de valides –de la aritmética– y, para poder hacer todo esto, comprender exactamente los conceptos... Si proseguimos por este camino deberá conducirnos al concepto de número y a los enunciados más simples válidos para los números enteros positivos, que constituyen la base de toda la aritmética (Frege [1884], incs. 1 y 2).

De esa forma, Frege espera dirimir también la cuestión filosófica acerca de la naturaleza *a priori* o *a posteriori*, sintética o analítica de las verdades aritméticas; habiendo aclarado previamente que debemos tomar por analíticos los juicios que pueden reducirse, en última instancia, a definiciones y leyes lógicas generales. Para lograr estos propósitos, Frege se vió en la necesidad de desarrollar básicamente dos líneas de investigación: 1) ampliar la lógica clásica en los puntos que consideró pertinentes para servir de base a la fundamentación de la aritmética; y 2) hacer un análisis del lenguaje que le permitiera crear un aparato conceptual suficientemente rico y preciso como para poder albergar la aritmética.

La primera investigación culminó en su *Conceptografía*, que es la primera exposición axiomática, completamente formalizada, consistente y completa del cálculo proposicional, y en donde introduciendo los cuantificadores contiene también un sistema completo del cálculo de predicados de primer orden. Ahí mismo, y en otros artículos sobre el tema, Frege hace también importantes aclaraciones sobre el sentido mismo de la lógica. Según él, la lógica dicta leyes generales que conectan enunciados de todo tipo; y, en tanto que los enunciados expresan pensamientos, la lógica es la ciencia de las leyes generales del

[1] Esto se había hecho sentir como una tarea impostergable a raíz de críticas como las que, por ejemplo, Berkeley le hace al cálculo de Newton en *The Analyst* (1738), y que habían impulsado la llamada aritmetización del análisis iniciada sobre todo con los trabajos de Cauchy y Weierstrass; los cuales, tratando de evitar las intuiciones geométricas y la inclusión de elementos dinámicos (en la versión newtoniana de las funciones), buscaban regresar al rigor definiendo con toda precisión nociones como la de función apelando, para ello, sólo a nociones numéricas.

pensamiento; y son generales, en tanto que no se refieren a ningún campo específico del conocimiento. En esos términos, el concepto de analiticidad adquiere en Frege el siguiente significado: un enunciado es analítico si es un enunciado de la lógica o se desprende de definiciones y enunciados de la lógica y, por consiguiente, no exprese ningún conocimiento de un campo particular. Vistas así las cosas, si los juicios de la aritmética son analíticos, eso significa que la aritmética es únicamente una rama de la lógica, que se puede obtener a partir de ésta y ciertas definiciones. Esto es, por cierto, lo que se denomina la tesis logicista de la aritmética que contiene dos subtesis: 1) los conceptos aritméticos se pueden definir a partir de conceptos puramente lógicos; y 2) las afirmaciones aritméticas se pueden inferir de tales definiciones y puras leyes lógicas.

La segunda línea de investigación se ve expresada en una serie de artículos como "Función y concepto", "Sentido y referencia", "Concepto y objeto", etcétera. En ellos aclara que, en primer lugar, le parece insuficiente la caracterización clásica de los juicios mediante expresiones compuestas de términos que designan sujetos y predicados. Estos términos le parecen engañosos y prefiere identificar los juicios mediante expresiones compuesta de términos para designar objetos y conceptos, ya que de esa forma es posible distinguir juicios que con la anterior caracterización serían indistinguibles. Por ejemplo, los juicios "Fido es un perro" y "el perro es un animal" están expresados igualmente mediante un sujeto y un predicado; pero, mientras en el primero se afirma que un objeto cae bajo un concepto, en el segundo se afirma que un concepto está subordinado a otro concepto más amplio. Como lo mostró Frege, la relación de un objeto que cae bajo un concepto es muy diferente a la relación de subordinación entre conceptos (Frege [1892b]): esta última es transitiva, mientras que la primera no lo es. Así pues, le parece más importante distinguir entre objetos y conceptos, y no tanto entre sujetos y predicados. Por otra parte, también considera importante distinguir entre el sentido y la referencia de un término ya que podemos referirnos a un mismo objeto mediante símbolos que tengan diferente valor cognoscitivo; es decir, mediante los cuales se expresen conocimientos diferentes sobre el objeto en cuestión. Por ejemplo, podemos referirnos al planeta Venus mediante las expresiones 'lucero de la mañana' y 'lucero de la tarde' que nos transmiten diferentes conocimientos sobre el mismo objeto Venus. La referencia de esas expresiones es el objeto al que apuntan, es decir, el planeta Venus; mientras que el sentido de cada una de ellas es algún atributo que nos permite identificar dicho objeto. En consecuencia, cuando Frege se propone definir los números en *Los Fundamentos de la Aritmética* es muy importante aclarar si los juicios sobre números están afirmando algo sobre objetos, o sobre conceptos; e, igualmente, es necesario distinguir el referente de los términos usados para designar números, de los sentidos que pueden estar asociados con ellos.

Ahora bien, para Frege, con las definiciones no creamos conocimiento, sólo damos reglas acerca del significado de símbolos. Dado que lo más importante que podemos definir dentro del sistema fregeano son objetos y conceptos, bastará con aclarar las definiciones para unos y otros. "Una definición de un concepto –dice Frege– debe ser completa, debe determinar sin ambigüedad para cualquier objeto si cae o no bajo el concepto" (*Leyes Básicas* vol. II, inciso 56 en Frege [1980a]). Y con respecto a los objetos dice: "introducimos un nuevo nombre –de objeto– por medio de una definición estipulando que tiene el mismo sentido y la misma denotación que algún nombre compuesto de signos familiares" (Frege [1893], inc. 27). De modo que para Frege las definiciones son siempre explícitas e incluso se presentan generalmente en la forma de una igualdad con el *definiens* de un lado y el *definiendum* del otro.

1.2. Definición fregeana de número.

En *Los Fundamentos de la Aritmética* Frege comienza por revisar algunas ideas sobre el número que se encontraban dispersas en las obras de autores como Euclides, Mill, Berkeley, Leibniz, Kant, Jevons, etcétera, a la luz de lo que le parece incuestionable con respecto a la naturaleza de los números. En primer lugar considera que, en general, los conceptos y objetos matemáticos poseen una fuerte determinación y solidez que contrasta con las imágenes mentales que surgen confusamente de impresiones internas y sensoriales. Eso descalifica, para Frege, cualquier intento subjetivista de apoyar la noción de número en las percepciones sensoriales como lo hace Mill, o incluso en las intuiciones kantianas.

En segundo lugar, considera que hay una confusión en las ideas de Euclides, apoyadas en las de Aristóteles cuando éste afirma que "un número es una multitud compuesta de unidades... –donde– la unidad es aquello en virtud de lo cual cada cosa que existe se llama uno" (Euclides [s III ac] defs. lib. VII); o, en palabras de Aristóteles, "la unidad es el principio del número en tanto que número... –y– el número es una multitud de mónadas" (Aristóteles [s IV ac] lib. X, cap. 1). En efecto mediante las unidades se individualiza cada cosa que existe, y en ese caso, afirma Frege, el número 5, por ejemplo, sería la suma de cinco unidades o mónadas diferentes, de tal suerte que tendríamos que expresarlo de la siguiente forma : $5 = 1a + 1b + 1c + 1d + 1e$, donde $1a \neq 1b \neq 1c$, etcétera. Sin embargo, matemáticamente $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, donde $1 = 1$. Por lo tanto, concluye Frege, hay que distinguir el número 1, de las unidades; el número 1 es único, mientras que las unidades pueden ser muchas. En ese sentido, el 1 es un objeto; mientras que *unidad* es una propiedad de los objetos tomados individualmente.

En tercer lugar, en contra de la teoría empirista de J.S.Mill, Frege observa que:

> El número no se abstrae de las cosas a la manera del color, el peso, la dureza; no es en el sentido de éstos, una propiedad de las cosas... ya que si examino uno y el mismo fenómeno externo, puedo decir con igual verdad: aquí están 5 compañías y aquí están 500 hombres; con ello no se altera ni el individuo ni el agregado, sino mi denominación –como, por cierto, ya lo había observado Berkeley–; y eso sugiere, que el contenido de un enunciado de números es una afirmación, no sobre un objeto, sino sobre un concepto (Frege [1884], inc. 46).

Así pues, de acuerdo a lo anterior, Frege propone la siguiente definición de número[2]:

> por consiguiente defino:
>
> el número que corresponde al concepto F, es la extensión –alcance, tamaño o amplitud– del concepto "equinumérico –o de igual cifra– en comparación al concepto F" (Frege [1884], inc. 68);

[2] En alemán: ich definire demnach: die Anzahl, Welche dem Begriffe F zukommt, ist der Umfang des Begriffes, "gleichzahlig dem Begriff F".

que no resulta del todo clara debido a que los términos empleados tienen un significado especial dado a través de la obra fregeana.

Los intérpretes de Frege, entre los que destacan Dummett [1963] y [1981] y Sluga [1980], han estado discutiendo hasta la fecha lo que Frege quiso expresar con tales términos. En particular, la expresión que ha recibido interpretaciones más diversas es, tal vez, la de "extensión de un concepto" que Frege usó múltiples veces, pero que evadió clarificar explícitamente. Por un lado, define el número como la extensión de un concepto. Pero, por otro, en la nota correspondiente a dicha definición, presupone que se sabe lo que es la extensión de un concepto, y afirma que incluso podría evitarse el término 'extensión'; lo cual es reafirmado al final de sus *Fundamentos* diciendo que "en todo esto suponemos conocido el sentido de la expresión "extensión de un concepto", –pero insiste– no doy una importancia decisiva a la utilización de la extensión de un concepto" (Frege [1884] inc. 107). Estos comentarios han llevado a algunos intérpretes como Imbert a sostener que, "si en rigor se podrían dejar de mencionar explícitamente las extensiones, puesto que están estrechamente ligadas a los conceptos,... se infiere que el concepto es a la vez pensado y definido extensionalmente por Frege (Imbert [1972], cap. 9, inc. 2, en Frege [1972b], p. 179); que contrasta con los comentarios de Russell de que Frege tiene una "teoría intensional de clases –o extensiones–, y considera el número como una propiedad del concepto-clase, no de la clase en extensión" (Russell [1903] inc. 494).

Lo cierto es que Frege definió el número como la extensión de un concepto; y, aunque él mismo sugirió que podría evitarse lo de extensión, realmente nunca desarrolló esa posibilidad. Ciertamente podemos aceptar que las mismas cosas puedan decirse de forma diferente; pero eso nos obligaría, casi siempre, sobre todo en sistemas tan interrelacionados como el de Frege, a redefinir los términos empleados. Así pues, tomando las cosas tal como fueron dichas por Frege, considero que es apremiante una clarificación de la definición fregeana en términos de la extensión de un concepto. Misma que desarrollo a continuación.

1.3. Aclaración del vocabulario fregeano.

Así pues, intentaré aclarar lo que Frege entiende por 'extensión de un concepto', para lo cual defenderé una interpretación particular de los términos fregeanos 'concepto' y 'extensión', así como de otros dos estrechamente vinculados: 'función' y 'curso de valores'. Frege dió ciertas definiciones intuitivas de 'concepto' y 'extensión' en términos de funciones y cursos de valores. Sin embargo, esto acarrea complicaciones en el sistema fregeano ya que, al parecer, Frege definió 'concepto' al decir: "llamé concepto a una función cuyos valores son siempre valores de verdad, y ésta –dice– podría ser tomada como una definición" (Frege [1979] p. 89); pero, por otro lado, Frege especificó que las definiciones se expresan mediante igualdades, y "a un lado del signo de igualdad no puede estar nunca la designación de un concepto,... sino que siempre habrá que designar o aludir a un objeto" (Frege [1895b], p. 120 de Frege [1979]); de tal suerte que, tomando esto en cuenta, no podríamos definir el término 'concepto' si por él queremos aludir al concepto fregeano. En consecuencia, con el propósito de esclarecer todos esos términos no me apoyaré únicamente en esas "definiciones", sino que las tomaré, al igual que otras afirmaciones de Frege sobre esos términos, sólo como "indicaciones que nos hacen entender las palabras como se pretende" (Frege [1892b], p. 43 de Frege [1980a]).

1.3.1. Los términos 'Funktion' y 'Begriff'.

Veamos, en primer lugar, en qué sentido usa Frege la expresión *'Funktion'* o 'función'. Frege aclaró lo que él entendía por 'función' desde *La Conceptografía* en los siguientes términos:

> Si pensamos la circunstancia de que el hidrógeno es más liviano que el anhídrido carbónico, entonces en el lugar del símbolo del hidrógeno podemos poner el símbolo del oxígeno o del nitrógeno. Al hacer esto, se cambia el sentido de manera que oxígeno o nitrógeno aparecen en la vinculación en la que antes estaba hidrógeno. Al pensar de esta manera la expresión como variable, se descompone la misma en un componente estable, que representa la totalidad de las vinculaciones, y el símbolo, considerado como reemplazable por otros, que significa el objeto que se encuentra en estas vinculaciones. Al primer componente lo llamo función, y al último su argumento (Frege [1879] inc. 9).

Posteriormente, en "Función y concepto", dice:

> Reconocemos la función en una expresión en virtud de que la pensamos separada; y se insinúa por su estructura una posible separación de este tipo. Las dos partes en que se separa la expresión, el símbolo del argumento y la expresión de la función, no son de la misma especie; pues el argumento es un todo cerrado en sí, mientras que la función no lo es.... Y llamamos valor de la función para un argumento, a lo que resulta de completar la función con ese argumento. De esa manera, por ejemplo, 3 es el valor de la función "$2x^2 + x$" para el argumento 1, ya que tenemos $2(1)^2 + (1) = 3$ (Frege [1891], pp. 24 y 25 de Frege [1980a]).

Una función es el referente de una expresión con espacios vacíos que es él mismo una entidad con huecos, es decir, incompleta. Los objetos, en cambio, son los referentes de espresiones saturadas que son ellos mismos entidades completas. En el sistema fregeano, las categorías de "función" y "objeto" son mutuamente excluyentes ya que mientras una función es algo incompleto, un objeto es algo completo. Frege también habla de funciones de segundo nivel, es decir, funciones que toman como argumentos otras funciones. Sin embargo, estrictamente hablando, una entidad incompleta no puede completarse con entidades también incompletas porque subsistirían los huecos de estas últimas; de tal manera que, al fin de cuentas, no obtendríamos un valor que es un todo cerrado. Así pues, para que pueda completarse una entidad que tenga huecos, se requiere llenar éstos con entidades completas, es decir, con objetos[3]. A partir de una función, ciertos argumentos se vinculan con determinados valores; pero, en general, sería fácil mostrar que una misma vinculación podría lograrse de diferentes *modos*. Por ejemplo, la vinculación del 1 con el 2, del 2 con el 4, del 3 con el 6, etc. se puede obtener a partir de diferentes funciones tales como "$2x$", "$4x/2$", "$2x^2/x$", etcétera; es decir, que para vincular esas parejas de números, puedo obtener el segundo número multiplicando el primero por 2, o multiplicándolo por 4 y dividiendo el resultado entre 2, etcétera. En Frege, las funciones no son exclusivamente matemáticas ya que encontró que gran parte de las expresiones del lenguaje ordinario tienen una estructura similar a las expresiones que se usan en matemáticas para hablar de

[3] Esta dificultad la trataremos más ampliamente al explicar los conceptos que son un tipo especial de funciones, ya que Frege mismo se explayó más con respecto a ellos en este asunto. Sin embargo, lo que digamos respecto a los conceptos de segundo orden valdrá también para las funciones de segundo orden.

las vinculaciones entre los objetos matemáticos. Sin embargo, él usa el término 'función', no como los matemáticos para referirse a la vinculación misma entre objetos, sino para referirse a la idea más primitiva de un *modo* a partir del cual puede construirse dicha vinculación. Según eso, una función es sólo un *modo*, entre otros posibles, a partir del cual puede obtenerse cierta vinculación entre objetos cualesquiera. En resumen, podemos decir que una función se expresa mediante un esqueleto que permite vincular nombres de objetos y es una *forma* o un *modo* como pueden vincularse. Esta forma de ver las funciones fregeanas como *modos* de vincular objetos es, hasta donde he podido investigar, una interpretación novedosa; debido a eso, me permitiré ilustrar los diferentes tipos de funciones mediante una serie de diagramas que pretenden aclarar esta interpretación.

Frege clasifica las funciones, en primer lugar, de acuerdo con el número de objetos o argumentos que requieren para producir su valor correspondiente: hay funciones de uno, dos o más argumentos. En segundo lugar, clasifica las funciones de acuerdo a si sus valores son objetos cualesquiera o si únicamente tienen valores de verdad: a las primeras las llama funciones no proposicionales y a las segundas, funciones proposicionales. De acuerdo con ésto, una función no proposicional de un argumento podría estar representada de la manera siguiente:

$$\begin{array}{c} (\ ) \longrightarrow (\ ) \\ \Updownarrow \\ (\ ) \longrightarrow (\ ) \\ \Updownarrow \\ (\ ) \longrightarrow (\ ) \\ \Updownarrow \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

donde los espacios vacíos de la izquierda representan huecos en la función correspondiente que pueden se llenados por diversos objetos; los espacios vacíos de la derecha representan los huecos de la función que son llenados por objetos llamados valores; donde las flechas horizontales representan la vinculación de cada argumento con el valor correspondiente de la función; las flechas verticales intentan expresar que se trata de una misma función que permite vincular diversos argumentos con diversos valores; y los puntos suspensivos verticales indican que esa función permite vincular no sólo tres argumentos con tres valores (de acuerdo a las tres flechas horizontales), sino, teóricamente, infinitos argumentos con infinitos valores.

Una función no proposicional de dos argumentos quedaría representada por el siguiente diagrama:

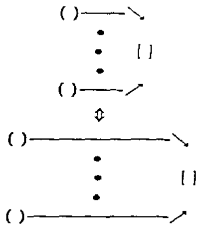
$$\begin{array}{c}
(\ )\text{—}(\ )\longrightarrow(\ ) \\
\Updownarrow \\
(\ )\text{—}(\ )\longrightarrow(\ ) \\
\Updownarrow \\
(\ )\text{—}(\ )\longrightarrow(\ ) \\
\Updownarrow \\
\vdots
\end{array}$$

donde los dos huecos de la izquierda tendrían que ser llenados con argumentos para poder obtener el valor correspondiente de la función.

Ahora bien, por otro lado, ¿qué entiende Frege por *'Begriff'* o 'concepto'? Antes de *Los Fundamentos de la Aritmética* había sostenido que "al dar el mismo símbolo a cosas diferentes aunque similares, propiamente ya no designamos la cosa individual sino lo que tienen en común: el concepto" (Frege [1882], p. 210 de Frege [1972a]). Según esta idea, el concepto sería algo que puede ser común a varias cosas individuales. Aquello que comparten varias cosas individuales puede ser una propiedad como ser rojo o frío, también puede ser una relación que los vincule, o tal vez, incluso, algún objeto o circunstancia comunes. Como podemos notar esta caracterización de concepto es todavía muy vaga. En su obra posterior Frege precisa su idea, y da algunos criterios para distinguir los conceptos de los objetos, y de las relaciones. Sobre éstas afirma que tanto los conceptos como las relaciones son funciones proposicionales; pero mientras que los conceptos requieren de un solo argumento para generar un valor de verdad, las relaciones requieren de dos o más argumentos. Por otro lado, los conceptos, al ser un tipo especial de funciones, son algo incompleto diferente a cualquier objeto. Con respecto a esta última distinción afirma:

> el concepto, como yo entiendo la palabra es predicativo (es la referencia de un predicado gramatical)... Decimos que algo cae bajo un concepto en 'esta hoja es verde';... Yo mismo he señalado –también– que un concepto puede caer bajo uno superior ... –Sin embargo, con eso no se borra la diferencia entre concepto y objeto;– ya que un nombre de objeto, un nombre propio, es totalmente incapaz de ser utilizado como predicado gramatical (Frege [1892b], pp. 43 y 44 de Frege [1980a]).

En la terminología de funciones, los conceptos son funciones proposicionales de un sólo argumento que generan el valor "verdad" cuando toman como argumentos los objetos que caen bajo el concepto, y producen el valor "falso" cuando toman como argumentos objetos que no caen bajo el concepto. Así, por ejemplo, "x es hombre" es una función-concepto en tanto que es una manera de vincular "Juan" con la verdad, "Felipe" con la verdad, "la luna" con lo falso, etcétera; en tanto que la verdad es lo que se obtiene al completar la función "x es hombre" con los argumentos "Juan" y "Felipe", y lo falso es lo que se obtiene al completarla con argumentos como "la luna". En esos términos, un concepto o función proposicional de un argumento se podría representar de la siguiente manera:



donde las líneas más cortas generan la verdad para los argumentos correspondientes y las líneas más largas generan lo falso, tratando de expresar que los argumentos que generan la verdad tienen una vinculación más estrecha con la función puesto que son los objetos que caen bajo la función–concepto.

Para no abusar de los diagramas, creo que con los anteriores bastará para aclarar de qué forma se pueden expresar con ellos las diferentes clases de funciones. Sólo quisiera añadir que para representar diferentes funciones que permitan vincular los mismos objetos se podría usar diagramas que tuvieran la misma figura, pero mientras uno estuviera formado por líneas sencillas, otro estaría formado por líneas onduladas, otro por líneas punteadas, etcétera, tratando de expresar que las diferentes formas de vincular los mismos objetos, por tener, según el mismo Frege, un carácter intensional, pueden tener diferencias muy sutiles.

La terminología (y, paralelamente, la ontología) fregeana no está exenta de dificultades, como ya lo mencionamos de pasada, sobre todo cuando se quiere, o se necesita, hablar de algún concepto. Este es, justamente, el caso nada menos que de la definición de número que enuncia una propiedad de los conceptos. Frege adopta un punto de vista lingüístico mediante el cual distingue en su ontología los conceptos de los objetos. Los nombres propios, como 'Julio César' o las expresiones que comienzan con un artículo determinado singular como 'el concepto *caballo*', designan un objeto singular y son incapaces de ponerse en plural. En efecto, no podemos decir con sentido 'los Julio César' o 'los conceptos *caballo*'. Los nombres propios no pueden atribuirse a varios individuos, ya que son una forma de señalar un objeto singular; mientras que, por otra parte, los predicados gramaticales como '– es *caballo*', que se distinguen porque pueden ponerse en plural diciendo '– son *caballos*', e igualmente pueden usarse con los artículos indeterminados diciendo '– es un *caballo*', no designan un objeto singular, sino un concepto. En ese sentido, un concepto, en tanto que es el significado de un predicado gramatical, es algo diferente de cualquier objeto singular. Así pues, con respecto a este punto, hay en la ontología fregeana, por un lado, objetos y, por otro, lo que se predica de los objetos.

Esta dificultad ha llevado a algunos a sostener que dentro del sistema fregeano "no podemos nombrar los conceptos para hacer afirmaciones sobre ellos" (Valdivia [1984], p.

308 de Alvarez, Broncano y Quintanilla [1984]). No obstante, Frege afirmó que "en investigaciones lógicas, no pocas veces es necesario enunciar algo sobre un concepto" (Frege [1892b], p. 46 de Frege [1980a]); e, incluso, cosas muy importantes para el programa fregeano: "He dicho en los *Fundamentos* –precisa Frege– que la asignación de un número dice algo acerca de un concepto; hablo de propiedades que pueden decirse de un concepto, y admito que un concepto caiga bajo uno superior" (Frege [1892b], p. 48 de Frege [1980a]). Aunque, por otro lado, para marcar tanto la diferencia como la semejanza dice más adelante: "un objeto cae *bajo* un concepto de primer orden, y un concepto cae *en* un concepto de segundo orden. La diferencia entre concepto y objeto –recalca– sigue siendo, pues, completamente tajante" (Frege [1892b], p. 51 de Frege [1980a]). No obstante, Frege mismo vió con bastante claridad la dificultad en la que estaba metido al decir estas cosas:

> La naturaleza predicativa del concepto –dice– es un gran obstáculo para la expresión adecuada y para la comprensión. Cuando quiero hablar de un concepto, el lenguaje me fuerza con violencia casi insoslayable a una expresión inadecuada, con lo cual el pensamiento queda obscurecido, casi diría falseado (Frege [1895b], p. 119 de Frege [1979]).

Benno Kerry, al que contesta Frege en su artículo "Sobre concepto y objeto", había sugerido que objeto y concepto eran relaciones relativas como las de padre e hijo. De esa manera, cierta entidad x podría ser concepto (o padre) con respecto a otra entidad y, y también podría ser objeto (o hijo) con respecto a otra entidad z. Frege rechazó esta interpretación porque para él las entidades de su ontología son objetos o conceptos no de acuerdo con el papel que puedan jugar unas respecto a otras, ni de acuerdo al uso que pueda hacerse de ellas, sino debido a su propia naturalez completa o incompleta. Frege mismo propone otra solución al problema referido sugiriendo que cuando queremos predicar algo de un concepto,

> el concepto no puede por su naturaleza predicativa, aparecer sin más así, sino que primero tiene que ser transformado en un objeto, o dicho más exactamente, debe ser representado por un objeto que designamos mediante las palabras antepuestas 'el concepto' (Frege [1892b], pp. 46 y 47 de Frege [1980a]).

Por ejemplo, en la expresión 'el concepto caballo es claro', "el concepto caballo" sería el objeto que representa al concepto "– es un caballo". En ese sentido, al parecer, la ontología fregeana tendría categorías mutuamente excluyentes como las de objetos y conceptos; y, sin embargo, dichas categorías, tendrían también ciertos vínculos entre sí. Un concepto, en tanto que es predicativo, es decir no saturado, no puede ser un objeto; pero, al parecer, un objeto, que llamaremos *objeto-conceptual*, podría representar al concepto. Sin embargo, cuando nos referimos al objeto (entidad completa) que representa un concepto (entidad incompleta), en realidad nos queremos referir al concepto mismo (es decir, a una entidad incompleta); de tal suerte que, al parecer, de todas formas el concepto en cuanto tal se nos escapa.

> Por una cierta necesidad lingüística –afirmó Frege–, mi expresión, tomada literalmente, no corresponde a veces al pensamiento, al nombrar un objeto cuando se quiere significar un concepto. Me hago plenamente consciente de apelar en estos casos a la comprensión bienintencionada del lector" (Frege [1892b], p. 54 de Frege [1980a]).

De hecho, esto es sobre todo porque el objeto, en tanto que es completo, no es capaz de representar cabalmente algo incompleto; es decir, no puede ser una imagen idónea de algo que es contrario a ella misma. Un representante idóneo, como afirma Wittgenstein en el *Tractatus*, debe tener algo en común con su representado. Pero, si al predicar de un concepto no predicamos de éste ¿entonces de qué estaríamos predicando? Así pues, todo esto sugiere que Frege ha quedado atrapado en sus propias redes, y que, como dice Valdivia, dentro del sistema fregeano, no puede decirse nada sobre los conceptos.

Terence Parsons (Parsons [1984]) ha propuesto otra solución que consiste en divorciar la sintaxis superficial del lenguaje natural, de su sintaxis lógica preservando, por supuesto, una mínima relación entre ellas. Para ello sostiene que Frege, "cuando explica su punto de vista, prácticamente siempre habla informal o metafóricamente o de una manera indirecta" (Parsons [1984], inc. IV). Me parece que esta es una vía interesante, y Frege mismo da pie para ella cuando apela a la "comprensión bienintencionada del lector" (Frege [1892b], p. 54 de Frege [1980a]); pero creo que este terreno es muy resbaladizo ya que no siempre es claro en qué momentos Frege está hablando metafóricamente, y podríamos fácilmente caer en la tentación de acomodar las afirmaciones fregeanas a nuestra conveninencia. Así pues, en vez de profundizar en esta posible solución, propondré en seguida una solución más sencilla y más cercana a la propuesta del mismo Frege que nos permite hablar, dentro de un sistema fregeano ligeramente ampliado, al menos de la parte de los conceptos que se necesitan para la definición fregeana del número.

Ahora bien, si por un lado, los conceptos y los objetos son categorías mutuamente excluyentes, y, por otro, Frege se permite hablar de los conceptos mediante objetos representativos y debe apelar a la comprensión bienintencionada del lector, pienso que el sistema fregeano podría corregirse sin forzarlo excesivamente proponiendo la existencia de ciertas "entidades conceptuales" expresadas, por ejemplo, mediante el término *caballo*; que no serían ni conceptos ni objetos, sino algo lógicamente más simple; es decir, aquello que comparten los referentes de las expresiones '– es *caballo*' y 'el concepto *caballo*'. Recordemos que Frege defiende frente a Kerry (Frege [1892b] que pueden sugerirse distinciones ontológicas a partir de distinciones lingüísticas. Tomando eso en cuenta, estas "entidades conceptuales", al parecer, no se darían en forma aislada, sino siempre como parte de un concepto o de un objeto-conceptual. De hecho, Frege mismo deja abierta una posibilidad así al afirmar que,

> lo lógicamente simple, al igual que la mayoría de los elementos químicos, no está dado de antemano, sino que sólo se alcanza después de una labor científica. Si se descubre algo que es simple, o que al menos hasta el momento debe ser considerado como simple, habrá que acuñar para ello una denominación (Frege [1892b], p. 43 de Frege [1980a]).

Así pues, considero que proponer estas entidades no violenta el sistema fregeano y, en cambio, lo hacen más inteligible. De acuerdo a eso, cuando predicamos de un concepto tendríamos que aclarar que en realidad predicamos de la "entidad conceptual" que comparte con el objeto que lo representa; y, al parecer, eso es suficiente. El concepto, en tanto que es predicativo, es decir incompleto, se nos escapa; pero, eso no interesa con respecto a la definición fregeana de 'número', como trataremos de mostrarlo en 1.4 . Por supuesto, lo mismo valdría, *mutatis mutandi*, para las funciones en general: el aspecto de ellas sobre el que no podríamos hablar es su naturaleza no saturada. Siguiendo los diagramas que propuse para expresar gráficamente las funciones, un objeto que represente una función podríamos expresarlo mediante un cuadrado que encierre el diagrama de la función correspondiente (como, de hecho, lo haremos en el diagrama de la definición fregeana de 'número' en 1.4). De esa forma, quedaría expresado que dicho objeto es un todo cerrado que, sin embargo, comparte algo con la función que representa, a saber, el referente de la figura que comparten el diagrama de la función y lo que encierra el cuadrado que expresa al objeto correspondiente; es decir, la "entidad funcional" correspondiente.

1.3.2. Los términos 'Werthverlauf' y 'Umfang'.

Ahora bien, entendiendo así el término 'concepto', ¿qué debe entenderse por *'Umfang'* o 'extensión de un concepto'? Frege sostiene que "podemos designar como extensión de un concepto al curso de valores de una función de un argumento cuyo valor para cada argumento es un valor de verdad" (Frege [1891], p. 31 de Frege [1980a]). En consecuencia, veamos primero lo que Frege entiende por la expresión *'Werthverlauf'* o 'curso de valores'.

Acerca de los *Werthverlaufe* o cursos de valores Frege afirmó lo siguiente:

> El método de la Geometría Análitica ofrece un medio para hacer intuitivos los valores de una función para diferentes argumentos. A saber, considerando el argumento como valor numérico de una abscisa y al correspondiente valor de la función como valor numérico de la ordenada de un punto, obtenemos un complejo de puntos que se muestran a la intuición como una curva en los casos habituales. Cada punto de la curva corresponde a un argumento con el valor correspondiente de la función... Por ejemplo,la función "$x^2 - 4x$" produce una parábola; y dado que la función "$x(x - 4)$"produce la misma parábola, decimos que ambas funciones tienen el mismo curso de valores (Frege [1891], pp. 25 y 26 de Frege [1980a]).

Frege no define lo que es un curso de valores, pero da sus condiciones de identidad en su famosa ley *V* de *Las Leyes Básicas*. En su simbología, ligeramente modernizada, la ley es como sigue:"$\vdash$ [$\acute{e}$ f(e) = $\acute{a}$ g(a)] = (x)[f(x) = g(x)]"(Frege [1893] inc. 20), donde las letras aspiradas que anteceden a la expresión funcional correspondiente convierten la expresión de la función en una expresión del curso de valores de dicha función. Así pues, la ley afirma que decir que dos cursos de valores son iguales es lo mismo que decir que las funciones correspondientes arrojan los mismos valores para los mismos argumentos.

De acuerdo con eso, y teniendo en cuenta la interpretación que hemos dado para las funciones, el curso de valores sería la *vinculación* misma entre objetos. Las funciones son diferentes *modos* de vincular objetos, mientras que los cursos de valores serían las *vinculaciones* mismas tomadas como objetos fregeanos, es decir como referentes de expresiones saturadas. En palabras de Sluga:

> la función ella misma, no es una entidad; su naturaleza es correlacionar argumentos con valores. Pero a través de la función se establece una correlación, y esa correlación puede considerarse una entidad con sus propios criterios de identidad. Esa entidad se llama curso de valores (Sluga [1980] p. 145).

Ahora bien, así como representamos las funciones mediante diagramas, los cursos de valores podrían expresarse de la siguiente manera[4]:

$$
\begin{array}{c}
a \dashrightarrow b \\
\updownarrow \\
c \dashrightarrow d \\
\updownarrow \\
e \dashrightarrow f \\
\updownarrow \\
\circ \\
\circ \\
\circ
\end{array}
$$

donde las letras representan objetos ; las flechas entrecortadas representan la conexión entre parejas de objetos si se trata de una función de un argumento; las flechas dobles verticales representan la unidad entre todas las parejas de objetos que pueden aparearse mediante las funciones cuyo curso de valores esté expresado en el diagrama de arriba; y los círculos sucesivos verticalmente indican que las parejas de objetos vinculados no son sólo tres, sino, teóricamente, infinitas parejas de objetos. En este diagrama he usado flechas horizontales entrecortadas y flechas dobles sencillas para expresar la vinculación misma entre objetos, independientemente de las diferentes formas mediante las cuales se puede lograr la vinculación.

---

[4] Esta representación de los cursos de valores se me ocurrió a partir de algunas sugerencias de Asunción Preisser y Raúl Orayen.

Por otro lado, 'Umfang' o 'extensión', al ser para Frege el curso de valores de una función proposicional sería la vinculación entre objetos cualesquiera y los valores de verdad; es decir, entre objetos y el caer o no bajo la función proposicional. El curso de valores de una función proposicional sería la vinculación entre algunos objetos y la verdad, y otros objetos y lo falso. Lo cual significa para los conceptos, o funciones proposicionales de un argumento, que no sólo se están vinculando parejas de objetos, sino que se está agrupando a los objetos que caen por un lado, y a los objetos que no caen, por otro. Así pues, podemos decir que la extensión de un concepto es un conjunto de objetos que queda definido a partir de una cierta manera de vincular únivocamente objetos singulares con valores de verdad; de tal suerte que los objetos del "conjunto" están asociados con la verdad, y los que quedan fuera con lo falso.

Frege se refirió a las extensiones de conceptos, también, en los siguientes términos:

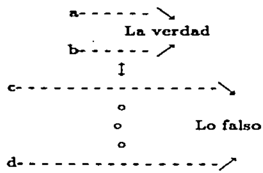
> En "o sub a" debemos reconocer o y a como extensiones de conceptos... De acuerdo con eso o tiene que ser visto como una clase de objetos que tienen cierta propiedad... Pero la extensión de un concepto está constituida esencialmente, no por los individuos, sino por el concepto mismo... Si o es la clase de objetos que son b y a es la clase de objetos que son c, 'o sub a' significa: todos los bs son c.... Ahora bién, si hay una cosa singular v que es un b, "v subter o" implica "v subter a"... Por consiguiente, se debe separar 1) la relación de un objeto (un individuo) a la extensión de un concepto cuando él cae bajo el concepto (la relación subter); y, 2) la relación entre la extensión de un concepto y la de otro cuando el primer concepto está subordinado al segundo (la relación sub) (Frege [1895], pp. 101 y 102 de Frege [1980a]).

Según esto, las extensiones de conceptos se comportan con respecto a las relaciones de *subter* y *sub*, en términos generales, tal como los conjuntos cantorianos se comportan con respecto a las relaciones de $\in$ y $\subseteq$ respectivamente[5]. Para Frege sus "conjuntos" son siempre extensiones de conceptos; no están constituídos por objetos como un bosque está constituído por árboles, sino que están definidos a partir del concepto.

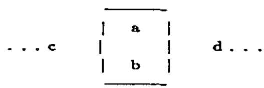
---

[5] Orayen ha mostrado recientemente (Orayen [1988]) que en efecto, las extensiones de los conceptos fregeanos, en el sentido que les hemos dado arriba, cumplen los axiomas de extensionalidad y comprensión con los que comúnmente se recoge la teoría cantoriana de conjuntos y que mencionaremos brevemente en el inciso 2.4 .

Ahora bien, para ilustrar en mis términos la idea de que las extensiones de los conceptos fregeanos pueden cumplir, en términos generales, las mismas funciones que los conjuntos cantorianos, me auxiliaré del diagrama que presenté para las funciones proposicionales de un argumento. Según ese diagrama, todos los objetos que caen bajo el concepto están unidos con la verdad, y de esa forma quedan agrupados. De tal suerte que el curso de valores de una función proposicional de un argumento, es un conjunto fregeano en tanto que agrupa a los objetos que caen bajo el concepto. Esto lo podríamos ilustrar con el siguiente diagrama:



que sería análogo a la representación ordinaria de conjuntos:



donde se encierran los objetos del conjunto, separándolos así de todos los demás.

En conclusión, la extensión de un concepto es una vinculación. Dado que se vinculan ciertos objetos con la verdad y otros con lo falso, se separan los objetos que caen bajo el concepto de los que no caen. Considero que esta interpretación es la más cercana a las ideas del propio Frege en tanto que permite conciliar varias de sus tesis al respecto: por ejemplo, permite entender a) que las diferentes funciones que comparten un mismo curso de valores sean diferentes formas de obtener una misma vinculación entre argumentos y valores; y b) que los "conjuntos" asociados a las funciones proposicionales de un argumento, es decir las extensiones de los conceptos, se identifiquen con sus cursos de valores.

1.3.3. La tesis de los pares ordenados.

Sin embargo, como mi sugerencia de ver los cursos de valores de las funciones de un argumento como *"vinculaciones* entre parejas de objetos", es cercana a lo que han expuesto varios autores bajo la tesis de que el curso de valores es un "conjunto de pares ordenados", a continuación analizaré en qué sentido dicha tesis coincide con la mía, en qué sentido ha sido generalmente mal formulada originando dificultades en la interpretación del sistema fregeano y, por último, cómo pienso que podría reformularse para salvar esas dificultades.

Furth, por ejemplo, enuncia dicha tesis en los siguientes términos:

> La noción de curso de valores se expresa fácil y cómodamente por las nociones más recientes como aproximadamente una función en extensión. Así, expresiones de la forma '$\acute{\epsilon}(\ldots\epsilon\ldots)$' encontradas en Frege pueden leerse como significando lo mismo que expresiones de la forma '$\hat{y}\hat{x}(\ y = \ldots x\ldots)$' , es decir, como denotando la clase de pares ordenados (x,y), tales que y es el valor de la función $\ldots\xi\ldots$ para el argumento x . Y así, el nombre '$\acute{\epsilon}(\ \epsilon + 7)$' denotaría una clase conteniendo pares ordenados tales como (0,7), (1,8), (2,9), etc. (Frege [1893], p. xxxvii).

De acuerdo con esta interpretación el curso de valores de un función monádica sería el conjunto de los pares ordenados (x, y), tales que el segundo miembro del par es el valor de la función cuando se toma como argumento de la misma el primer miembro del par; es decir, $y = f(x)$. Por ejemplo, pertenecen al curso de valores de x^2 los pares (1, 1), (2, 4), (3, 9), etcétera. En el caso de los conceptos (funciones monádicas que sólo dan valores de verdad para cualquier argumento), Frege identifica las extensiones de éstos con sus cursos de valores. Así pues, aplicando a los conceptos la interpretación del párrafo anterior, la extensión de un concepto estaría formada por un conjunto de pares, tales que los objetos que caen bajo el concepto serían los primeros miembros de los pares cuyo segundo miembro sería la verdad. Completarían la colección de pares todos los de la forma (a, la falsedad), donde a es un objeto cualquiera que no cae bajo el concepto. De manera que, según esa interpretación, la tesis de los pares ordenados estaría dando una "receta" sencilla para construir la extensión de un concepto. Por ejemplo, pertenecerían al curso de valores de "x es hombre" los pares ordenados (Juán, la verdad), (Felipe, la verdad), (Francia, la falsedad), etcétera; pero afirmar esto crea confusión, como trataré de mostrarlo en este inciso.

Otro de los expositores de la tesis de los pares ordenados es, por ejemplo, Birjukov que dice que "el curso de valores de una función dada es lo que usualmente se llama la gráfica de la función, es decir, cierto conjunto de pares ordenados" (Birjukov [1964] p. 19). Pero si no se aclara en qué sentido se está usando el término 'conjunto', como lo veremos en este inciso, se puede incurrir en complicaciones a la hora de interpretar el sistema fregeano.

Wells es un caso clásico de los cambios que requeriría el sistema fregeano si entendemos literalmente la tesis de los pares ordenados y mezclamos diferentes usos del término 'conjunto': por ejemplo, el fregeano y el russelliano, como lo hace Wells.

> La moderna concepción de la relación diádica tomada extensionalmente, como una clase de pares ordenados, nos permite pensar la curva definida por la función "x^2" como una relación diádica... –Y así,– todos los cursos de valores de funciones pueden ser clases de pares, tríos o n-adas, es decir, relaciones tomadas en extensión –Pero como– el curso de valores de la función "$x^2 = 4$" consiste en un infinito número de pares ordenados;... y la clase en el moderno sentido (russelliano) determinado por la función "$x^2 = 4$"... contiene, no un infinito número de elementos, sino únicamente dos: 2 y -2; ninguno de los cuales es un par ordenado; –tendremos que concluir que– el curso de valores de la función "$x^2 = 4$" es muy diferente a la clase determinada por ella; –y por lo cual– la identificación que hace Frege de clases y extensiones necesita no ser tomada literalmente (Wells [1951], pp. 15 y 16 de Klemke [1968]).

Citamos por último a Rosado en su reciente libro sobre Frege en el que, al igual que Wells, tiene que contradecir ciertas afirmaciones expresas de Frege por entender literalmente la tesis de los pares ordenados y no hacer un uso exclusivamente fregeano del término 'conjunto'.

> ¿En qué consiste el curso de valores de funciones de un argumento cuyo valor es siempre un valor veritativo ?... dicho curso de valores es el conjunto de pares ordenados (a, b), donde a es un objeto cualquiera y b es uno de los valores veritativos... –Pero,– la extensión de un concepto es una suerte de conjunto determinado por dicho concepto, al cual pertenecen todos y solo aquellos objetos que caen bajo dicho concepto... –Así pues– si comparamos el curso de valores de un concepto con la extensión del concepto, encontramos que... el curso de valores es un conjunto de pares ordenados, mientras que la extensión del concepto no es ningún conjunto de pares... –Y, por lo tanto,– la extensión de un concepto – a pesar de ciertas afirmaciones expresas de

Frege– no es ningún caso especial del curso de valores de una función (Rosado [1985], pp. 119 y 120).

Como puede apreciarse en los textos de estos autores, defender la tesis de los pares ordenados ha acarreado complicaciones en la interpretación del sistema fregeano. Considero que la confusión ha radicado básicamente en no haber aclarado, en primer lugar, si se quiere decir que el curso de valores *es* un conjunto de pares ordenados (que llamaremos la tesis I), o decir que el curso de valores *puede expresarse* mediante un conjunto de pares ordenados, esto es, que los pares ordenados sean sólo, como dice Dummett, "un esqueleto que sirve para una adecuada representación" (Dummett [1981] p. 172) (que llamaremos la tesis II); y, en segundo lugar, en no haber aclarado tampoco en qué sentido se está usando el término 'conjunto': 1) en sentido clásico, que Frege le atribuye a Dedekind y Schröder (Frege [1893] inc. 0), en el cual un conjunto se identifica con los elementos que lo forman de igual manera que un bosque se identifica con los árboles que lo constituyen; 2) en sentido fregeano, es decir, entendido como la extensión de un concepto; o 3) en algún otro sentido que habría que especificar. Así pues, eso nos deja seis posibilidades de entender la tesis de los pares ordenados que analizaremos en seguida.

La tesis I del término 'conjunto' en el sentido clásico (1), al decir que la extensión *es* un conjunto de pares ordenados, estaría diciendo que la extensión consiste en los pares ordenados mismos; esto es, que la extensión son los pares ordenados. Ese, por ejemplo, parece ser el sentido que le da Wells al término 'conjunto' al sostener que "el curso de valores de "$x^2 = 4$" consiste en un infinito número de pares ordenados"; e, inmediatamente después, rechazar que el curso de valores se identifique con el conjunto determinado por esa función, ya que dicho conjunto "contiene, no un infinito número de elementos, sino únicamente dos: 2 y -2"; de tal manera que 'consiste en' es equivalente para Wells a 'contiene'. Sin embargo, independientemente de la versión de Wells, esta tesis resulta inadmisible porque entra en conflicto con afirmaciones expresas del propio Frege en su polémica con Dedekind y Schröder (Frege [1893], inc. 0 y Frege [1895a]); ya que para Frege la extensión de un concepto está conformada, no a partir de los individuos, sino a partir del concepto mismo. Así pues, la extensión no puede ser un grupo de individuos, sean éstos pares ordenados u otra cosa. En los términos que usé arriba en 1.3.2, la extensión es siempre la extensión de un concepto, y la extensión de un concepto es una cierta *vinculación* entre determinados objetos.

Con respecto a la tesis I, si el término 'conjunto' lo entendemos en sentido fregeano (2), Orayen (Orayen [1980], vol. 4, pp. 5 y 6) ha mostrado que no puede identificarse el curso de valores con un conjunto de pares ordenados. Así pues, en este punto seguiremos la prueba de Orayen, añadiéndole sólo algunos elementos que, a nuestro parecer, la hacen más clara y contundente.

a.- Para las funciones no proposicionales, si decimos que su curso de valores *es* un conjunto de pares ordenados se incurre en una contradicción. Los conjuntos, según Frege, son extensiones de conceptos; es decir, cursos de valores de funciones proposicionales monádicas. De tal suerte que el curso de valores de una función no proposicional como "x^2", si fuera un conjunto fregeano de pares ordenados, al ser una extensión, sería al mismo tiempo el curso de valores de una función proposicional ya que sólo estas tiene extensión. Según la ley *V*, si dos funciones tienen el mismo curso de valores, darán siempre el mismo valor para el mismo argumento; y por consiguiente "x^2", que no es una función proposicional, tendrá que dar siempre valores de verdad como la función proposicional con la que supuestamente comparte el curso de valores. Lo cual es contrario a la suposición inicial de que era una función no proposicional y, por consiguiente, no puede generar únicamente valores de verdad para todo argumento. De ahí se desprende que de ninguna función no proposicional se puede decir que su curso de valores *es* un conjunto (en sentido fregeano) de pares ordenados, o de lo que sea.

b.- Para las funciones proposicionales, si decimos que su curso de valores *es* un conjunto de pares ordenados, también se incurre en una contradicción[6]. Si, por ejemplo, decimos que el curso de valores de la función proposicional "*x* es hombre", bajo la cual caen los objetos Juan, Felipe, etcétera, es el conjunto de los pares ordenados: (Juan, lo verdadero), (Felipe, lo verdadero), (La Luna, lo falso), etcétera; este conjunto de pares será, como todo conjunto fregeano, la extensión de un concepto F(x); en este caso particular, bajo el concepto F(x) caerían pares ordenados. Pero la extensión de F(x) es un curso de valores y, aplicando nuevamente la tesis de que el curso de valores *es* un conjunto de pares ordenados, será el conjunto de los pares ordenados [(Juan, lo verdadero), lo verdadero], [(Felipe, lo verdadero), lo verdadero], [(La Luna, lo falso), lo verdadero], [Felipe, lo falso], etcétera. Este conjunto será, a su vez, la extensión de un concepto G(x) bajo el cual caen esos mismos pares ordenados: [(Juan, lo verdadero), lo verdadero],... [Felipe, lo falso], etcétera. Y, así, indefinidamente. Además, de acuerdo a la ley V, si el curso de valores de la función "*x* es hombre" es igual a la extensión del concepto F(x) bajo el cual caen pares ordenados, bajo el concepto "*x* es un hombre" también caerán pares ordenados, porque si dos conceptos tienen la misma extensión, según la ley V, bajo ellos caeran los mismos objetos. Por consiguiente, suponer que el curso de valores de una función proposicional *es* un conjunto (en sentido fregeano) de pares ordenados nos lleva también a conclusiones contradictorias; como la de nuestro ejemplo que el objeto Felipe, por ejemplo, cae bajo un concepto que tiene la misma extensión que otros conceptos bajo los cuales no cae; lo cual puede mostrarse advirtiendo que mientras el par (Felipe, lo verdadero) es parte del curso de valores del primer concepto, el par (Felipe, lo falso) es parte de los cursos de valores de los otros conceptos.

En la tesis I, de igual forma que en la tesis II, si entendemos el término 'conjunto' en cualquier otro sentido ajeno a Frege (3), su uso tendría que aclararse y justificarse para la

[6] Para comprender sin dificultad el argumento que sigue, el lector debe recordar la doble "receta" para obtener conjuntos de pares a partir de funciones o conceptos. Ver los dos párrafos que siguen a la cita de Furth al comienso de este inciso.

exposición de las ideas fregeanas y, hasta donde sé, ninguno de los defensores de la tesis ha hecho algo semejante[7]. Podría pensarse que el término 'conjunto' se está usando en sentido moderno. Pero actualmente no hay sólo una teoría de conjuntos; y en cada teoría los axiomas delimitan el comportamiento de los "conjuntos" como lo veremos brevemente en 2.4. Así pues, no dudo que en alguno de esos sentidos pueda ser correcta la tesis de que los cursos de valores *son* conjuntos de pares ordenados, o *pueden ser expresados* mediante un conjunto de pares ordenados, pero no consideraré este caso.

La tesis II en el sentido (1) de 'conjunto', que identifica el conjunto con sus elementos, afirmaría que la extensión *puede expresarse* directamente mediante pares ordenados. Ahora bien, si ese es el sentido del término 'conjunto', la tesis de los pares ordenados estaría diciendo lo siguiente:

a.- Para las funciones no proposicionales, si adoptamos la versión de Dummett, decir que su curso de valores puede expresarse mediante ciertos pares ordenados, implicaría que el curso de valores es aquello que expresan los pares ordenados al igual que las gráficas de las funciones matemáticas: es decir, cierta vinculación o conexión entre argumentos y valores. Siendo así, decir, por ejemplo, que el curso de valores de la función "$2x$" se expresa mediante el conjunto de los pares ordenados (1, 2), (2, 4), (3, 6), etcétera sería análogo a decir que es aquello que puede representarse por una recta que en el eje cartesiano pasa por los puntos (1, 2), (2, 4), etcétera, es decir, la vinculación que aparea el 1 con el 2, el 2 con el 4, etcétera. En ese sentido, la tesis de los pares ordenados estaría diciendo, en otro código, lo mismo que intenté expresar con el diagrama que presenté antes en el inciso 1.3.2 .

b.- Para las funciones proposicionales, si decimos, por ejemplo, que el curso de valores

[7] De los textos examinados, sólo Wells aclara que usa 'conjunto' en "sentido moderno (russelliano)"; pero, por lo visto, usó categorías también del sistema fregeano y por eso llegó a la confusión que comentamos arriba en la tesis I-1.

de "$x^2 = 4$" se expresa mediante los pares ordenados (-2, lo verdadero), (-1, lo falso), (0, lo falso), (1, lo falso), (2, lo verdadero), etcétera, y que su conjunto asociado es el referente de 'el conjunto de 2 y -2', entonces podemos decir que ambas expresiones se pueden ver como dos maneras de separar el 2 y el -2 de todos los demás objetos posibles. De hecho, los pares ordenados son una forma de expresar la vinculación o conexión que se da entre ciertos objetos y los valores de verdad, es decir, entre esos objetos y el caer o no bajo el concepto. Al hacer eso, podemos decir que están delimitando un conjunto al especificar exhaustivamente lo que entra y lo que no, es decir lo que satisface la función proposicional y lo que no la satisface; al igual que, por otro lado, 'el conjunto de únicamente 2 y -2' es una forma de expresar la vinculación o conexión entre esos objetos y el sí, y todos los que quedan fuera y el no; y, en este sentido, la tesis de los pares ordenados estaría expresando, en un código diferente, lo mismo que intenté expresar con los diagramas que presenté anteriormente.

Por último, la tesis II que toma en sentido fregeano el término 'conjunto' (2) estaría afirmando que la extensión de un concepto F *podría estar representada* por la extensión de un concepto bajo el cual caen pares ordenados. Pero la extensión de un concepto bajo el cual caen pares ordenados agruparía pares ordenados; mientras que la extensión de F, siendo F cualquier concepto, no necesariamente agrupa pares ordenados. Así pues, esta versión de la tesis de los pares ordenados representa una extensión mediante otra más compleja, o un curso de valores mediante otro; de tal suerte que no aclara qué es, finalemente, la extensión de un concepto o, en general, el curso de valores de una función.

En resumen, decir que el curso de valores de una función *es* un conjunto de pares ordenados resulta confuso o, incluso, acarrea contradicciones o alteraciones del sistema fregeano. Para sostener esta identificación debería aclararse el significado de 'conjunto'; y, al parecer, sólo la tercera alternativa, de las examinadas arriba, podría proporcionar un sentido adecuado. En cambio, decir que el curso de valores de una función *puede* *expresarse* mediante un conjunto de pares ordenados resulta aclarador en el primer sentido de 'conjunto' y quizás, como señalé, en el tercero.

En mis términos, considero que una forma adecuada de enunciar la tesis de los pares ordenados podría ser como sigue: el curso de valores de una función es la vinculación entre argumentos y valores que puede *expresarse* mediante cierto conjunto de pares ordenados; donde 'conjunto' debe usarse en algún sentido apropiado, por ejemplo, alguno de la primera o tercera alternativa antes mencionadas al analizar los sentidos de 'conjunto'[8]. Al parecer, esto es, justamente, lo que intentan decir varios de los expositores de la tesis; pero, por lo visto, lo impreciso de su formulación ha llevado a oscurecer aún más la ya de por sí confusa idea fregeana sobre los cursos de valores. No obstante, en la formulación que propongo considero que tanto el curso de valores como la idea asociada de extensión quedan esclarecidas en alguna medida, y coincide además con la interpretación que presenté a partir de los diagramas.

1.4. ¿Qué es un número para Frege?

Ahora bien, una vez aclarados en el sentido precedente los términos más problemáticos que usa Frege en su definición de número, ¿qué afirma según eso dicha definición? En primer lugar, afirma que el número es siempre el número de un concepto; lo cual significa que corresponde a las funciones proposicionales monádicas, o al significado de un predicado gramatical, bajo el cual pueden caer algunas entidades. El número es, según eso, algo que tiene que ver con aquello que permite agrupar entidades, es decir, con un *modo de agrupar*. Sin embargo, para Frege, el número es un objeto no una propiedad, según vimos en 1.2; de tal suerte que no puede ser algo que se predique de los conceptos, sino que sólo puede ser parte de la predicación que se hace sobre ellos. De acuerdo con eso, Frege sostiene

[8] Aunque no desarrollé la gama de posibilidades que podrían darse en la tercera alternativa, concedí que también podría ser plausible la identificación del curso de valores con un "conjunto" de pares en alguno de los posibles sentidos de "conjunto" de la tercera categoría.

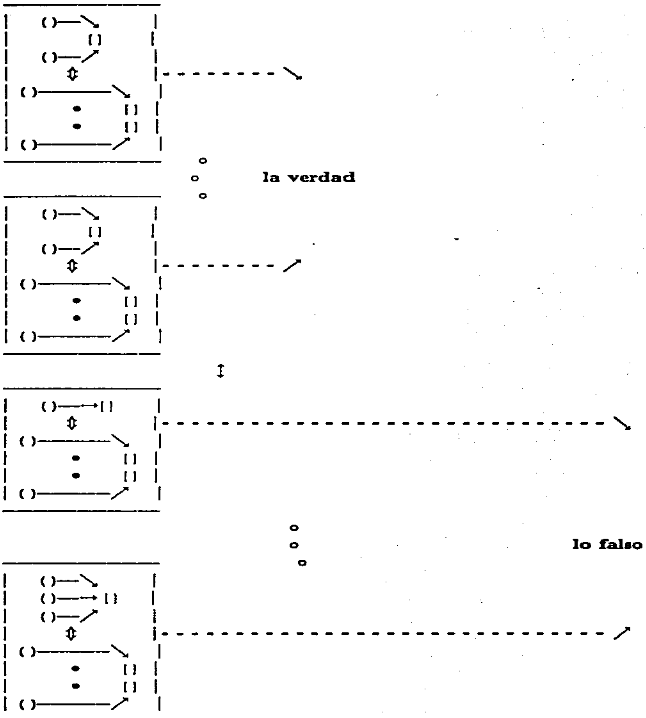
que el número es una extensión, lo cual significa que es un conjunto fregeano asociado a un concepto; o, en otras palabras, que es cierta *vinculación* entre entidades y la verdad o lo falso dependiendo si las entidades caen o no bajo el concepto. El número es, según esto, cierta vinculación, una vinculación, que agrupa entidades. Por último, la definición fregeana afirma que el número del concepto F es la extensión del concepto "equinumérico con respecto a F"; donde Frege aclara que:

> la expresión 'el concepto F es equinumérico respecto al concepto G' significa lo mismo que la expresión 'hay una relación R que coordina biunívocamente a los objetos que caen bajo el concepto F con los objetos que caen bajo G' (Frege [1884] inc. 72);

lo cual significa que el número del concepto F es la vinculación que agrupa los conceptos equinuméricos con F; ya que lo que cae bajo el concepto "equinumérico con respecto a F" es F mismo que es un concepto y cualquier otro concepto que tenga la propiedad de que los objetos que caigan bajo él puedan ponerse en correspondencia biunívoca con los objetos que caen bajo F. El número es, pues, una agrupación de conceptos[9], es decir, una agrupación de modos de agrupar: es una agrupación que agrupa conceptos de acuerdo a la coordinabilidad de sus extensiones; o, en mis términos, es una agrupación que agrupa modos de agrupar de acuerdo a la coordinabilidad de los objetos que pueden agruparse mediante esos modos de agrupar. En ese sentido, todo concepto está agrupado en algún número de acuerdo a la coordinabilidad de los objetos que permite agrupar. Ahora bien, expresando esto mediante un diagrama, el número que corresponde al concepto *ojos de mi cara* sería el siguiente:

---

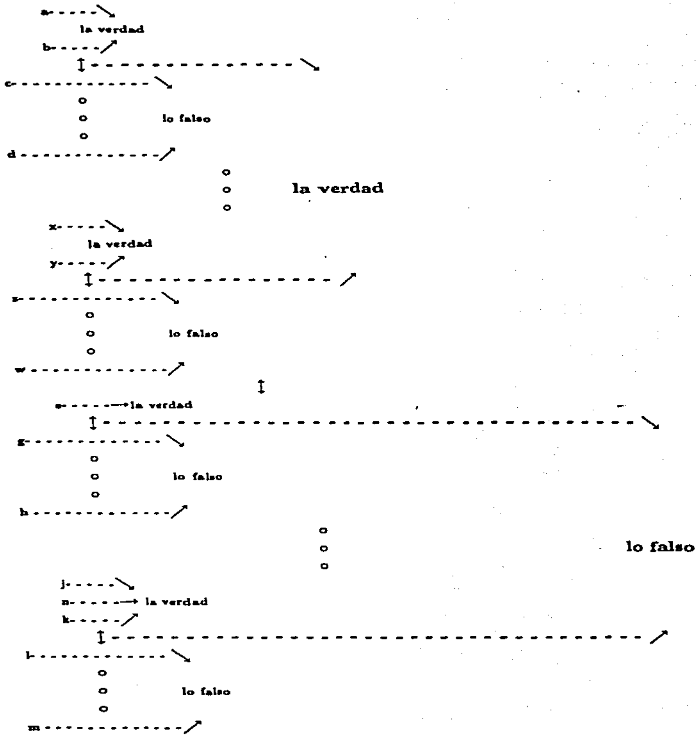
[9] Bajo los conceptos de primer orden caen objetos y bajo los de segundo orden caen conceptos, aunque esto trae complicaciones en el sistema fregeano como lo mostramos en 1.3.1 . No obstante, la definición de número habla claramente de un concepto de segundo orden, puesto que la relación de equinumerosidad Frege la define entre conceptos en Frege [1884], inc. 71 y en Frege [1893], inc. 38. De tal suerte que si quisiéramos salvar esas dificultades, los conceptos que en la definición de número se han tomado como "objetos" o entidades que caen bajo conceptos, deberán entenderse, más bien, como *objetos-conceptuales* en el sentido que le di a esta expresión en el inciso 1.3.1 .


la verdad
lo falso

donde se representan dos argumentos que están vinculados con *la verdad*, por ejemplo, "el concepto *ojos de mi cara*" que representa a un concepto que puede agrupar dos objetos, a saber, mi ojo derecho y mi ojo izquierdo; lo cual está representado por el primer diagrama de objeto-conceptual que tiene dentro del cuadrado dos entradas de argumentos vinculadas con flechas cortas; y "el concepto *piernas de mi cuerpo*", que representa un concepto que también puede agrupar dos objetos, a saber, mi pierna derecha y mi pierna izquierda, y está representado por el segundo diagrama de objeto-conceptual que también tiene dentro del cuadrado dos entradas de argumentos vinculadas con flechas cortas. Como puede mostrarse, ambos conceptos son equinuméricos ya que podemos construir una relación biunívoca que vincule, por ejemplo, mi ojo derecho con mi pierna derecha y mi ojo izquierdo con mi pierna izquierda. Ciertamente, el diagrama debería representar también todos los otros conceptos equinuméricos con esos dos; pero por razones obvias de simplicidad los he omitido. El tercer objeto-conceptual está representado por el diagrama que dentro del cuadrado sólo tiene una entrada de argumento vinculada con una flecha corta y que puede ser, por ejemplo, "el concepto *nariz de mi cara*", ya que bajo el concepto correspondiente sólo cae un objeto, a saber, la única nariz que tengo en la cara. Este objeto-conceptual está vinculado con *lo falso* puesto que no puede aparearse el único objeto que permite agrupar el concepto correspondiente con los dos objetos que permite agrupar el concepto *ojos de mi cara*. Por último, el cuadrado que encierra un diagrama que puede vincular tres nombres de objetos con la verdad representa un objeto-conceptual como, por ejemplo, "el concepto *rey mago*"; ya que bajo el concepto correspondiente caen sólo tres objetos, a saber, Melchor, Gaspar y Baltazar. Este objeto-conceptual está vinculado también con *lo falso*; ya que los tres objetos que caen bajo el concepto correspondiente no pueden aparearse con los que caen bajo *ojos de mi cara*. De la misma forma, también estarán vinculados con *lo falso* todos los objetos-conceptuales para los cuales no pueda construirse una relación biunívoca entre los objetos que caigan bajo los conceptos correspondientes y los que caen bajo el concepto *ojos de mi cara*.

Si eliminamos el término 'extensión', como lo sugiere Frege en la nota a su definición, el número sería un concepto de conceptos, es decir, un modo de agrupar modos de agrupar. No obstante, como dijimos en 1.2, Frege nunca desarrolló esa idea y lo que dijéramos al respecto sería pura especulación. Lo cierto es que, para Frege, la extensión, que es un objeto fregeano, es siempre la extensión de un concepto; y eso nos deja ver que para él ese objeto está siempre asociada a un concepto, y se da sólo a partir de éste. Frege definió el número como una extensión porque para él el número es un objeto, donde objeto y concepto son categorías excluyentes. No obstante, Frege definió el número como una agrupación de conceptos y, por las dificultades que vimos en 1.3.1, lo que puede agruparse en el sistema fregeano son más bien objetos. Ciertamente, los conceptos que agrupa un número están agrupados, no por alguno de sus rasgos intensionales o de cualquier otro tipo, sino por una de sus propiedades de carácter extensional, es decir, por una característica de sus respectivas extensiones. Todo esto ha llevado a varios de los comentadores y seguidores de la línea fregeana como Russell y Quine a definir el número, no como una extensión que agrupa conceptos, sino como una extensión que agrupa extensiones: justo, las extensiones de los conceptos que agrupa la definición fregeana. De esa forma, el número se define como una extensión que agrupa extensiones o, si se prefiere, como un conjunto de conjuntos[10]. Ahora bien si, para observar mejor las similitudes y diferencias en ambas definiciones, representamos también esta segunda versión con un diagrama similar al anterior, el mismo número 2 quedaría expresado de la siguiente manera:

[10] En 2.3 veremos con más detalle la definición de número propuesta por Russell. Ahí analizaremos también con mayor precisión las similitudes y diferencias entre la versión fregeana y la russelliana de número.


a
la verdad
b
c
lo falso
d
la verdad
x
la verdad
y
w
lo falso
la verdad
g
lo falso
h
lo falso
j
la verdad
k
l
lo falso
m

donde están representadas primero las extensiones de los conceptos "ojos de mi cara" y "piernas de mi cuerpo" vinculadas con la verdad, ya que se pueden poner en correspondencia biunívoca los objetos que caen bajo ellos apareando, por ejemplo, el objeto *a* con el objeto *x*, y *b* con *y*; mientras que, por otro lado, no podemos aparear [a, b] con [e] ni con [j, n, k], que son los objetos que caen bajo los conceptos "nariz de mi cara" y "rey mago" respectivamente, cuyas extensiones están expresadas, por consiguiente, vinculadas con *lo falso*. Así pues, en esta versión, el número de la extensión del concepto "ojos de mi cara" sería el "conjunto" o agrupación a la que pertenece esa extensión en tanto que pueda ponerse en correspondencia biunívoca los objetos que agrupa con los que agrupan otras extensiones. En resumen, el número, según esta versión, es el número de una extensión, es decir, de una agrupación, digamos A; y el número de esa agrupación de objetos es la agrupación de agrupaciones que puede lograrse a partir de un concepto, digamos G, que podría expresarse con el predicado "ser extensión que agrupa objetos que puedan ponerse en correspondencia biunívoca con los objetos que agrupa la extensión A" .

Mientras que en la versión fregeana un número es una agrupación de conceptos, en la otra versión, el número es una agrupación de extensiones. Sin embargo, en cierto sentido ambas versiones son equivalentes ya que, finalmente, en las dos un número "atrapa" directa o indirectamente los mismos conceptos y las mismas extensiones. En la versión fregeana, el número del concepto F agrupa determinados conceptos dependiendo de si sus respectivas extensiones tienen o no cierta característica; y así, quedan "atrapadas" también las extensiones que tengan esa característica. Por otro lado, en la otra versión, el número de la extensión del concepto F agrupa determinadas extensiones, justo aquellas que quedan "atrapadas" en la versión fregeana; pero en Frege, la extensión es siempre la extensión de un concepto; así pues, de esa forma quedan también "atrapados" los conceptos asociados con esas extensiones, y éstos son justamente los que agrupa la versión fregeana. En consecuencia, en ambas versiones, el número, del concepto F agrupa o "atrapa" los mismos conceptos y las mismas extensiones, y por ello podrían manejarse como equivalentes haciendo los ajustes requeridos en el sistema fregeano. De hecho, la similitud estructural que puede observarse sin dificultad en los dos diagramas que presentamos del número 2, así como con un tercero que representara la versión del número como un concepto de conceptos sugerida de pasada por el mismo Frege, nos sugiere que podríamos usar cualquiera de ellas haciendo los ajustes necesarios. No obstante, Frege usó claramente sólo la primera versión.

Ahora bien, entendidos de esa forma los números, Frege pretendió confirmar su idea "viendo si se pueden deducir propiedades conocidas de los números a partir de esa definición" (Frege [1884] inc. 70). Y así, al final de los *Fundamentos* y en las *Leyes Básicas de la Aritmética*, de acuerdo a sus distinciones conceptuales y las leyes de inferencia desarrolladas a partir de su *Conceptografía*, Frege obtiene varias de las principales proposiciones acerca de los números naturales, y para lo cual, incluyó como parte de la lógica su ley de la igualdad de las extensiones que hoy se sitúa dentro de la teoría matemática de conjuntos. Al respecto dice:

> sólo puede haber discusión, por lo que alcanzo a ver, respecto de mi ley fundamental de los cursos de valores (V), que quizás los lógicos todavía no consideran como cosa propia, aunque se piensa en ella cuando se habla, por ejemplo, de extensiones de concepto (Frege [1893], int.);

lo cual es explicable porque para Frege las extensiones están siempre formadas a partir de los conceptos; y si la lógica se encarga de los conceptos, al parecer, no ve por qué las extensiones no sean también asunto de la lógica.

Su método para reconstruir la aritmética consiste en mostrar que las agrupaciones de conceptos que define como números tienen en primer lugar las mismas propiedades que los tradicionales números naturales. Para ello, definió cada número individual eligiendo un concepto al que le corresponda ese número. Por ejemplo, 0 lo define como el número que corresponde al concepto "desigual consigo mismo"; 1, como el número que corresponde al concepto "igual a cero"; y 'sucesor' lo define diciendo:

> Existe un concepto F y un objeto x que cae bajo él, de tal tipo que el número que corresponde al concepto F es n, y que el número que corresponde al concepto "que cae bajo F, pero no es igual a x" es m; –o, con otras palabras,– que n sigue inmediatamente a m en la serie de los números naturales (Frege [1884], inc. 76);

y a partir de ahí, deduce para los números así definidos las propiedades aritméticas más conocidas. Esto lo hace en los incisos 74 a 77 de los *Fundamentos* y 41 a 43 de las *Leyes Básicas* como lo ejemplificaremos con un poco más de detalle en el inciso 2.6 .

En resumen, Frege proporciona una definición de los números que los vincula estrechamente con los conceptos; y además, lo definido así se comporta, al parecer, como los tradicionales números naturales. Lo primero, permite ubicar los números en el panorama general de los conceptos; y lo segundo, refuerza la hipótesis de que los ubicados sean realmente los números que se han usado durante siglos. Por todo ello, y por el entusiasta apoyo de pensadores relevantes como Russell, la definición fregeana ha sido generalmente aceptada, aunque no por ello ha estado completamente libre de objeciones.

En primer lugar, se encuentra, por ejemplo, la gran objeción del mismo Russell cuando le comunica a Frege que ha encontrado una contradicción en el inciso 9 de su *Conceptografía* cuando éste considera que las funciones son también elementos indeterminados sin que se estipule ninguna restricción a su indeterminación, ya que, siendo así, se podrían formar predicados contradictorios como, por ejemplo, "– es un predicado que no puede predicarse con verdad de sí mismo", del cual no puede decidirse si cae o no bajo la predicación que expresa. A lo cual, Frege contestó: "Su descubrimiento de la contradicción me causó una gran sorpresa. Parece entonces que una igualdad de cursos de valores no está siempre permitida, que mi ley *V* es falsa... y que mi combinación de signos no tiene significado en todos los casos"(Frege [1902], p. 124 de Heijenoort [1967]). Lo cual significa que no siempre podemos pasar de un concepto a su extensión sin caer en contradicciones; o, en nuestros términos, que no todos los conceptos pueden pensarse como *modos* en los que se pueden agrupar objetos; lo cual resulta realmente grave porque tendríamos que redefinir lo que se entiende por 'concepto' alterando todo el sistema.

Frege propuso una solución en un apéndice al volumen II de sus *Leyes Básicas* que consiste en restringir la ley V diciendo que las extensiones de dos conceptos son iguales, si y sólo si, para todo argumento, si éste no es igual a ninguna de las dos extensiones, los conceptos arrojarán los mismos valores. Esta solución, como lo aclara el mismo Frege, no es una definición de extensión, sino que sólo establece ciertas propiedades de las funciones de segundo nivel. Sin embargo, Lesniewski en 1938 (ver Resnik [1980] p. 215), posteriormente Quine [1955], Geach [1956] y recientemente Resnik [1980] han mostrado que la solución de Frege no es del todo satisfactoria. Lo cual, al cuestionar la caracterización que da Frege para los conceptos, nos deja con un sistema en el cual no está claro, finalmente, qué sería en general un concepto si no es una forma de agrupar objetos; y qué sería en general una extensión si no es una agrupación que se logra a partir de una forma de agrupar objetos. Esto último lo trataremos más ampliamente en los incisos 2.3 y 2.4 .

Además, quisiera mencionar que la definición fregeana de los números supone una idea previa de los mismos. Frege conocía las leyes básicas de los números dadas en la aritmética, y conocía que el 1 sigue al 0 en la serie de los números naturales. Una definición puede generar un sentido completamente nuevo para un término con base en una combinación nueva de términos conocidos; o bien, puede precisar el sentido más o menos conocido de un término con base en una combinación más o menos conocida. Creo que esto último es el caso de la definición fregeana de 'número' como trataré de argumentar a partir de ciertas consideraciones que desarrollaré en el inciso 2.6 .

Por último, la definición de Frege ha sido atacada también en cuanto a si sus agrupaciones de conceptos son realmente los tradicionales números, y no únicamente algo que se comporta como éstos. En ese sentido se encuentra, por ejemplo, el artículo de Benacerraf "Qué podrían no ser los números", que analizaremos en el inciso 2.5 estrechamente vinculado con el inciso 2.2 .

CAPITULO 2

ALGUNAS OBJECIONES Y SOLUCIONES A LA DEFINICION FREGEANA DE NUMERO

2.1. Dificultades de la definición fregeana de número

La definición de número dada por Frege en los *Fundamentos de la Aritmética* ha sido en general mal comprendida, y esto ha originado serias objeciones que parecen nulificar por completo el intento fregeano. En el capítulo anterior presenté una clarificación de dicha definición que será de la que me valdré aquí para analizar qué es lo que no ha quedado descartado del intento fregeano, así como algunas soluciones que se han propuesto para ciertas objeciones.

La presente investigación sobre los números intenta indagar no sólo qué dice Frege sobre ellos, sino también hasta qué punto da en el blanco. Frege habla sobre los números, cualquier cosa que éstos sean, y sostiene sobre ellos que poseen ciertas características. Nos proporciona una definición que, en sus términos, *refiere* a ciertos objetos, y sobre ellos expresa un determinado conocimiento que nos es transmitido mediante el *sentido* de la definición. Pero, ¿cuál es ese referente, para que podamos juzgar sobre la pertinencia de las caracteristicas que se le atribuyen en dicha definición? Según vimos en 1.2, Frege sostiene que esos referentes son *objetivos* ya que "las entidades matemáticas poseen una fuerte determinación y solidez", y que los números de los que habla son *objetos* porque "el número 1 –como cada uno de los números de la aritmética– es único"; por otro lado, una vez dada la definición de número, Frege pretendió confirmarla deduciendo de ella, al menos, las propiedades aritméticas de los números naturales. Así pues, podemos decir que la piedra de toque frente a la cual Frege pretende contrastar su definición es la aritmética misma y, en ese sentido, los referentes aludidos serían ni más ni menos que los números matemáticos. No obstante, Frege sostuvo también, que los enunciados del lenguaje natural que mencionan algún número, tales como "aquí hay 5 compañías" y "aquí hay 500 hombres" afirman algo sobre los conceptos. Por ello, para él, los referentes de los numerales, tales como '5' y '500', son objetos que forma parte de la predicación que puede hacerse de los conceptos "– es una compañía" y "– es un hombre" respectivamente. Lo que se afirma de tales conceptos es que bajo el primero caen 5 objetos y bajo el segundo caen 500 objetos. Lo cual, al parecer, rebasa las propiedades puramente aritméticas de los números, y nos sugiere que el referente de la definición fregeana de número no son sólo los números de la aritmética pura, sino también esos mismos números en tanto que se usan en el lenguaje ordinario asociados a conceptos. Así pues, con base en ello, podemos decir que los referentes de la definición fregeana de número son, con mayor exactitud, los números de la aritmética pura y aplicada.

Por otra parte, para entender con precisión el sentido de la definición fregeana de número (es decir, las características que Frege afirma sobre los referentes mencionados) recordemos que dicha definición es sólo parte de la reconstrucción axiomática que hace Frege de la aritmética y para la cual define los términos que emplea. En ese sentido, Frege se refiere a ciertos referentes y lo hace mediante un sistema axiomático, donde éste está dado en términos tales que los números se definen como extensiones de ciertos conceptos.

Ahora bien, a la definición fregeana de los números se le pueden presentar, al menos, las siguientes objeciones: 1) ¿hasta qué punto es valido y hasta qué punto es necesario tomar como un solo referente los números de la aritmética pura y aplicada? De hecho, hay pensadores, como Dedekind y Peano, que sostienen que basta, e incluso es más conveniente, tomar como únicos referentes los números de la aritmética pura. Así pues, discutiremos en 2.2 esta custión tomando el pensamiento de Dedekind como reprsentativo de esa vía alternativa a la fregeana. 2) Russell custionó la noción de "concepto" usada en la definición fregeana de número mostrando que de ella se podía generar una contradicción. Así pues, en el inciso 2.3 discutiremos a la luz del trabajo de Russell mediante el cual pretende "componer" la definición fregeana de número, qué se sostiene de la versión fregeana y qué requiere un cambio de acuerdo con la objeción de Russell. 3) Frege define el número como un conjunto previamente a la teoría matemática de conjuntos creada básicamente por Cantor y sus seguidores. A ese respecto, habría que preguntarse ¿qué sentido le han dado al término 'conjunto' los trabajos de Cantor y sus seguidores? y si dicho sentido implica algún cambio o precisión en la definición fregeana de número. Así pues, en el inciso 2.4 analizaremos el trabajo de Cantor sobre los conjuntos y sobre los números en términos de conjuntos, así como algunas ideas modernas sobre los conjuntos y sobre la definición cantoriana en relación con la definición fregeana de número. 4) Otra objeción que se le ha formulado a la definición fregeana, sobre todo a partir del trabajo de Benacerraf, es que en realidad podrían darse multiples definiciones de los números en términos de conjuntos. De ahí concluye Benacerraf, que al no ser cada número un conjunto específico como Frege sugiere, los números podrían no ser conjuntos en absoluto o, aún más, podrían no ser ni siquiera objetos específicos. Así pues, en el inciso 2.5 analizaremos el trabajo de Benacerraf que presenta dicha objeción, y trataremos de evaluar hasta qué punto y en qué sentido se afecta el intento fregeano de definir los números. 5) Por último, el hecho de que la definición fregeana de número sea parte de una reconstrucción axiomática nos plantea la cuestión de qué es lo que realmente prueba que de dicha definición se obtengan lógicamente las propiedades aritméticas de los números, y eso nos obliga a precisar en qué consiste un trabajo axiomático. Así pues, en el inciso 2.6 trataremos de analizar esta custión, sobre todo, a partir de los trabajos de Hilbert y los problemas a los que se enfrenta la axiomática moderna.

En resumen, Frege elige ciertos referentes, al parecer, más amplios que los que eligen Dedekind y Peano, y sobre ellos sostiene que siempre están vinculados a los conceptos (aunque su noción de "concepto" es defectuosa), sostiene además que son determinados conjuntos (aunque Benacerraf muestra que podrían ser otros conjuntos diferentes), y todo ello lo dice mediante un sistema axiomático (lo cual nos obliga a indagar lo que esto implica). Nuestra tarea en el presente capítulo consistirá, pues, en indagar, hasta donde nos sea posible, la pertinencia del referente al que se enfoca Frege, y en juzgar, a la luz de los trabajos de algunos de los pensadores más relevantes en estos asuntos, así como de las consideraciones que aquí mismo hagamos, qué es lo que podemos decir que aún se sostiene de la noción fregeana de número; o, con otras palabras, tomando los números de la aritmética pura y aplicada como los referentes de la definición fregeana, qué tan acertado es decir de forma axiomática que dichos referentes son ciertos conjuntos asociados a determinados conceptos.

2.2. ¿Un número está siempre asociado a ciertos conceptos?

Para intentar contestar esta pregunta hay que aclarar primero a qué nos referimos con el término 'número'. A primera vista el asunto parece muy simple, ya que hoy día todos aceptan que 5, 1/3, π y $\aleph_0$ son ejemplos de números matemáticos, y puede decirse que es a ellos justamente a los que queremos referirnos con la expresión 'número'. Sin embargo, si queremos ir un poco más lejos e intentamos definir los números, tendremos que precisar lo específico de ellos; tendremos que aclarar qué cosas caen bajo el predicado "– es número", y qué cosas no caen. En otras palabras, necesitamos decir qué es un número (o, al menos, qué es un número matemático en el supuesto de que pudiera haber otros números); y, dado que al menos los números conocidos en la matemática son infinitos, no podemos enumerarlos uno por uno y requerimos forzosamente de alguna caracterización general.

Aristóteles había definido el número en los siguientes términos que también citamos en 1.2: "La unidad es el principio del número en tanto que número,... la unidad es indivisible... –y– el número es una multitud de mónadas"(Aristóteles [s IVb ac] lib. X, cap. 1). Sin embargo, el uso admitido de los números matemáticos en relación a los hoy llamados números racionales entró en conflicto con esa caracterización e hizo surgir primero la teoría de las proporciones de Eudoxo con la idea de fijar el comportamiento de esas relaciones entre los números que hoy llamaríamos quebrados. Posteriormente, la solución consistó en ampliar la caracterización de número, de tal manera que incluyera como tales no sólo los enteros, sino también las fracciones como 4/3, 2/5, etétera. Por otra parte, en el siglo XVI, Simon Stevin refutó y modificó la definición de número dada por Aristóteles. Según Stevin, el 1 también es un número ya que la parte está hecha de lo mismo que el todo y si la multitud de unidades es un número, también lo será la unidad que es parte de ella (ver, por ejemplo, Jones [1978], p. 233). Posteriormente, en 1872, Dedekind propusó una caracterización general de los números entendiendolos sólo como lugares en una serie con la intención de incluir tanto a los racionales como a los irracionales (según lo veremos en este mismo inciso). Por último, Frege, por un lado, al tratar de probar que los juicios de la aritmética eran analíticos (según lo vimos en los incisos 1.1 y 1.2) y Cantor, por otro lado, al introducir los números trasfinitos (según lo veremos en 2.4), volvieron a modificar la noción de número. No obstante, actualmente no hay una aceptación universal de las últimas caracterizaciones que se han propuesto sobre los números; y es por eso que nuestro estudio sobre ellos ha comenzado por revisar estas últimas caracterizaciones a partir de la dada por Frege que es, en cierto sentido, la más completa.

Al parecer, los números (al menos los números con los que trabaja la aritmética) se resisten, como otras entidades matemáticas, a una caracterización general. De hecho, ésta ha sido en gran parte la historia de las matemáticas; y, como consecuencia, algunos pensadores han abandonado todo intento por caracterizar de una manera fija los números o cualquier otra entidad matemática:

> A través de los tiempos –dicen, por ejemplo, Courant y Robbins– los matemáticos consideraron sus objetos, tales como el número, el punto, etc. como cosas sustanciales en sí. Pero en vista de que estos entes desafiaban siempre los intentos para una descripción adecuada, los matemáticos del siglo pasado llegaron paulativamente a la convicción de que el problema de la significación de dichos objetos como cosas sustanciales no tenía, en modo alguno, sentido dentro de las matemáticas. Lo que *realmente* son los puntos, las rectas y los números ni se puede ni es necesario discutirlo en matemáticas...Lo que interesa, y lo que corresponde a hechos *comprobables* es su estructura y relación" (Courant y Robbins [1971] pp. 6 y 7).

Sin embargo, aun cuando no fuera asunto de las matemáticas, ciertamente sí es asunto de la filosofía buscar un esclarecimiento de aquello, como los números, de lo que hablan los matemáticos.

Ahora bien, la aritmética, entendida como el estudio matemático de los números, los clasifica en diferentes grupos y ha fijado las leyes que rigen el comportamiento de los números entre sí. Sin embargo, para algunos eso no era suficiente, y a fines del siglo pasado se sintió, como dice Dedekind, "la falta de un fundamento realmente científico de la aritmética" (Dedekind [1872] inc. 1) originando así la búsqueda de sus fundamentos (ver nota 1 del capítulo 1). El propio Dedekind, por ejemplo, al buscar una caracterización general que sirviera tanto para los números racionales como para los irracionales propone el siguiente axioma:

> Si todos los puntos de la recta se dividen en dos sistemas de manera que todo punto del primer sistema se encuentra a la izquierda de todo punto del segundo, entonces existe un punto y sólo uno que produce este reparto de todos los puntos en dos sistemas (Dedekind [1872] inc. III);

donde se afirma, en otras palabras, que a cada reparto le corresponde un número real y sólo uno. Y, como puede mostrarse que lo inverso es también cierto, de hecho hay una correspondencia biunívoca entre los números reales de la recta numérica, y los repartos que Dedekind llama *cortaduras*. Siendo así, pueden definirse los números en términos de *cortaduras* diciendo, por ejemplo, que un número es todo aquello que produce una *cortadura*, ya que "los números son distintos siempre que correspondan a cortaduras esencialmente distintas, y sólo en ese caso" (Dedekind [1872] inc. IV): todo lo que sea un número, produce una *cortadura*; y si algo produce una *cortadura*, es un número. Naturalmente esto obliga a Dedekind a precisar la naturaleza de las así llamadas *cortaduras*; y, por otro lado, a comprobar que, en efecto, de sus definiciones pueden desprenderse las leyes conocidas de los reales, o con otras palabras, que no sólo hay una correspondencia biunívoca entre reales y *cortaduras*, sino que también los reales entre sí tienen relaciones análogas a las cortaduras entre sí. En este último caso, diríamos que hemos encontrado dos estructuras isomorfas y podemos definir los elementos de una en términos de la otra. Qué tanto logra Dedekind de todo esto, y qué tan provechoso es si lo logra, intentaremos verlo en seguida.

En "La naturaleza y el sentido de los números", Dedekind procede sistemáticamente a definir los números naturales empezando por definir lo que él entiende por 'sistema simplemente infinito'. "Un sistema (agregado, conjunto o totalidad) S, tomado como un objeto de nuestro pensamiento, está totalmente determinado cuando con respecto a cualquier cosa está definido si es un elemento de S o no" (Dedekind [1893] inc. I). Para expresar la relación de "pertenecer a" ($\in$), así como las relaciones de "ser parte de" o "ser parte propia de" ($\subseteq$ y $\subset$, respectivamente) Dedekind emplea, erróneamente, como bien lo critica Frege (ver Frege [1893] intr.), el único símbolo '$\ni$'. Por otro lado, "por una transformación ϕ de un sistema S entendemos –dice Dedekind– una ley de acuerdo con la cual a cada elemento determinado s de S corresponde una cosa determinada que se llama la transformación de s y se denota por $\phi(s)$" (Dedekind [1893] inc. II), o S'; donde la tranformación se llama *similar* cuando es una relación funcional. En esos términos, un sistema simplemente infinito S es un sistema para el cual pueda encontrarse una transformación similar ϕ en ambos sentidos, es decir biunívoca, que vincule todos los elementos de S con una parte propia A de los elementos de S. Si además ϕ permite ordenar el sistema, estamos en posesión del sistema N de los números naturales (donde ϕ será una transformación ordenadora si permite vincular entre sí todos los elementos de un sistema S, de tal manera que exista un único elemento en S que no esté contenido en S', es decir, en el contradominio de la función). Dedekind simboliza con '1_0' la intersección de todos los sistemas simplemente infinitos que estén ordenados a partir de un primer elemento simbolizado con '1'. De tal suerte que, en palabras de Dedekind:

> La esencia de un sistema simplemente infinito N consiste en la existencia de una transformación ϕ de N y un elemento 1 que satisfagan las siguientes condiciones: a) N' $\ni$ N; b) N $= 1_0$; c) el elemento 1 no está contenido en N', y d) la transformación ϕ es similar" (Dedekind [1893], def. 71).

Posteriormente, Dedekind muestra que las leyes de los números naturales se desprenden de esta definición. Por ejemplo, para probar que en todo número n se cumple que $n \neq n'$, procede por inducción en dos pasos: 1) para $n = 1$ se cumple puesto que 1 por definición no está en ϕ(N); y 2) si se cumple que $n \neq n'$, se cumplirá que $n' \neq (n')'$ puesto que la transformación ϕ, al ser biunívoca en N, determina para cada elemento n una y sólo una transformación n', y a cada transformación n' uno y sólo un elemento n. Pero si n' = (n')', entonces n' sería su propia transformación y, al mismo tiempo, la transformación de n; lo cual no es posible porque n' sería la tranformación de dos elementos diferentes.

Ahora bien, si observamos detenidamente la táctica de Dedekind, prescindiendo de las correcciones técnicas que le han hecho Frege y otros, nos daremos cuenta que en efecto define los números naturales en términos de *sistemas* y *transformaciones*; que esos *sistemas simplemente infinitos* tienen propiedades análogas al conjunto de los números naturales, como la de poderse poner en correspondencia biunívoca con algunos de sus subconjuntos propios; y que la transformación ϕ se comporta como la relación $\prec$. De hecho, no importa qué objetos específicos tengan esas propiedades y cumplan con esas relaciones: si algo tiene esas propiedades y relaciones, Dedekind le llama *número natural.* En sus propias palabras:

> si en la consideración de un sistema simplemente infinito N ordenado por la transformación ϕ, olvidamos completamente el carácter especial de los elementos, y simplemente retenemos su distinguibilidad y tomamos en cuenta sólo la relación de unos con otros en la cual están colocados por la relación ordenadora ϕ, entonces los elementos se llaman números naturales o números ordinales o simplemente números (Dedekind [1893] *def.* 73);

lo cual es criticado por Russell porque de esa forma, en todo caso, sólo se está definiendo una progresión cualquiera, y "una progresión puede estar formada por puntos o instantes, o por ordinales transfinitos, o por cardinales, en las que, –como puede mostrarse– los ordinales no son elementos" (Russell [1903] inc. 242). Para Dedekind un número es sólo un lugar en una serie; y esto se debe a que de ellos sólo ha tomado sus interconexiones. Así pues, a partir de eso, podemos decir que lo que ha encontrado Dedekind es la estructura de los números. Como sabemos, una estructura abstracta puede ser interpretada de múltiples formas: pueden darse teóricamente infinidad de grupos de cosas que compartan las mismas interconexiones. Por ejemplo, el sistema planetario y el sistema atómico (según el modelo de Bohr) comparten las mismas relaciones entre sus centros y las "partículas" que giran alrededor de ellos. Sin embargo, eso no identifica a una estrella con el núcleo de un átomo. De la misma forma que, compartir la misma estructura, no identifica los *números naturales* con los *sistemas ordenados simplemente infinitos* a menos que no encontremos otra cosa que nos permita diferenciarlos. Por cierto, la misma crítica puede hacerse también a la caracterización que hace Peano de los *naturales* mediante sus cinco axiomas. De hecho, el mismo Russell le hace comentarios análogos en Russell [1903], cap. 14, y en Russell

[1919], cap. 1. En ellos muestra básicamente que los axiomas de Peano no caracterizan a los *naturales* sino a cualquier *progresión*; ya que dichos axiomas pueden interpretarse como refiriéndose a cualquiera de ellas, y no designan unívocamante a los números naturales[1].

Por supuesto, la cuestión estriba en qué queremos entender por 'número natural'. Dedekind no encuentra ninguna diferencia entre las estructuras aludidas; ya que él entendía

> la aritmética en su totalidad como consecuencia necesaria, o al menos natural, del acto aritmético más simple, el de contar. Y, el contar mismo, no es otra cosa que la creación sucesiva de series infinitas de enteros positivos en la que cada elemento está definido por medio del inmediato anterior; el paso más simple es el paso de un elemento ya formado, al siguiente (Dedekind [1872] inc. 1).

Sin embargo, si de los números sólo retenemos su estructura, tendríamos que refutar a Frege cuando dice que "ha quedado establecido definitivamente que la asignación de número contiene una afirmación sobre un concepto"(Frege [1893] intr.); es decir, que un número es siempre el número de un concepto. Para Frege el número es una extensión y toda extensión es siempre la extensión de un concepto. Como lo ha mostrado recientemente Alvarez en un trabajo en el que explora las similitudes entre las definiciones de Frege y Dedekind, la diferencia fundamental radica en que "Frege sostiene –en oposición a Dedekind– que los números al poseer una existencia objetiva no surgen de ninguna *ordenación* que de ellos se pueda dar; existen en la medida en que a ellos se asocia un concepto"(Alvarez [1987] p. 358). Podría pensarse que la diferencia entre las definiciones de Frege y Dedekind se debe a que sus referentes mismos son diferentes: mientras que los referentes de la definición de Frege son, al parecer, los números de la aritmética pura y aplicada; los referentes de la definición de Dedekind parecerían ser sólo los números de la aritmética pura. Sin embargo, los números a los que se refiere Dedekind también pretenden servir para

[1] Dado que los sistemas de Peano y Dedekind son análogos en los aspectos que nos interesan aquí, no me detendré a examinar la propuesta de Peano, aun cuando tiene ciertas ventajas resaltadas por varios autores. "Existe en el método de Peano –dice, por ejemplo, Russell– una ventaja notoria de simplicidad y una separación más clara entre las proposiciones de la aritmética; pero desde el punto de vista puramente lógico los dos métodos son igualmente correctos" (Russell [1903], inc. 241)

contar las cosas del mundo. Según los estructuralistas, como Dedekind, contar es aparear objetos del mundo con series matemáticas; pero, aun aceptando eso, al lugar x de la serie matemática le correspondería algo extramatemático que permitiría identificar ese lugar independientemente de su relación con los otros miembros de la serie. Cuando decimos, por ejemplo, "aquí hay cuatro caballos" estamos vinculando un número específico, el cuatro, con el concepto "– es caballo que está aquí"; y el 4 de "4 caballos", si no es el mismo 4 de la aritmética porque, al parecer, refiere a algo estrechamente vinculado con lo empírico, al menos está estrechamente asociado con él ya que se comporta aproximadamente como éste. Por supuesto, podríamos tener un sistema númerico en el que el 4 ordinario fuera 100, el 5 fuera 200 y así sucesivamente; pero, en todo caso, esto sería sólo un cambio de símbolos, ya que el 100 se comportaría tal como el 4 ordinario y estaría igualmente asociado al concepto "– es caballo que está aquí"[2]. De tal suerte que, aun cuando tomemos como referentes sólo los números de la aritmética pura, no podemos olvidar que éstos pueden vincularse a los objetos del mundo a través de los conceptos. Si los números fueran sólo elementos de estructuras abstractas, no tendrían propiedades que no fueran estructurales; y, el poder ser siempre parte de la predicación que se hace de un concepto al decir que bajo él caen x objetos no es una propiedad estructural, ya que relaciona números individuales con conceptos individuales independientemente de lo que pase con otros números y otros conceptos.

En apoyo a esto, mostraré en seguida que si aceptamos las propiedades estructurales que han encontrado los estudiosos de la aritmética, en efecto, de todo número podemos decir que es el número de un concepto. Para ello, utilizaré una sencilla reducción al absurdo: sea z un número del cual no podemos decir con sentido 'hay z cosas que son P'; no obstante, siempre podemos encontrar múltiples números, digamos x, y, w, tales que $x + y + w = z$, de los cuales podemos decir con sentido 'hay x cosas que son Q', 'y cosas

[2] Este argumento se me ocurrió conversando con Carlos Alvarez al presionarme éste a mostrar que los números aritméticos tienen propiedades no estructurales.

que son R' y 'w cosas que son S', siedo Q, R y S propiedades disyuntas entre sí; así pues, si las leyes estructurales de los números nos aseguran que siempre podemos expresar un número en términos de otros, se sigue de ahí que siempre podremos decir con sentido que hay $x + y + w$ cosas que son Q o R o S, donde P significaría ser Q o R o S. Así pues, de todo número podemos decir que es el número de un concepto y eso confirma el hecho, como dice Russell, de que:

> necesitamos los números, no sólo para verificar las fórmulas matemáticas, sino también para aplicarlos adecuadamente a los objetos comunes. Debemos tener diez dedos, dos ojos y una nariz. Un sistema en el cual '1' signifique 100, '2' represente a 101 y así sucesivamente; puede ser completamente adecuado para la matemática pura, pero no se aplicaría a los hechos de la vida diaria... Necesitamos números que podamos emplear para contar los objetos comunes; y esto requiere que los números tengan un significado preciso, y no sólo que tengan algunas propiedades formales (Russell [1919] cap. 1, pp. 9 y 10).

De tal suerte que, por lo visto, aun cuando los referentes sean sólo los números de la aritmética pura, no basta una definición en términos puramente estructurales como la de Dedekind, ya que un número tiene también la propiedad no estructual de ser siempre el número de un concepto. Esta crítica va en contra también de la propuesta de Peano, Benacerraf (que analizaremos en 2.5) y de todos aquellos estructuralistas que pretenden reducir las matemáticas y los números en particular a un conjunto de estructuras abstractas. Ciertamente, en las matemáticas se dan estructuras, y los números mismos tienen una estructura. Pero si reducimos los números a su estructura, nos quedaríamos sin una caracterización unívoca de los mismos y perderíamos la estrecha vinculación de los números con los conceptos (que desarrollaremos aun más en 2.5) manifestada en expresiones como 'cuatro caballos' '$\aleph_0$ naturales', etcétera. En estas expresiones, 'cuatro' y '$\aleph_0$' no refieren a algo puramente estructural, ya que $\aleph_0$ y sólo $\aleph_0$ es el número asociado al concepto "– es un número natural".

2.3. ¿Todo concepto tiene siempre un número asociado?

Esta pregunta nos enfrenta directamente con la contradicción que Russell le plantea a Frege. Según la interpretación que presenté en el capítulo anterior, Frege sostiene que un concepto es un modo de agrupar objetos. Sin embargo, esta caracterización no es completamente general, de lo cual se lamenta Frege en su respuesta a Russell, ya que, según la contradicción mencionada, del concepto "– es un predicado que no puede predicarse con verdad de sí mismo" no se sabe si se agrupa él mismo bajo la verdad o bajo la falsedad. Sin embargo, ese concepto, al parecer, cumple la caracterización fregeana de lo que es un concepto, en tanto que es una función de un argumento que toma como valores sólo valores de verdad; pero, por otro lado, no cumple lo que eso implica, a saber, que de esa forma se pueden agrupar objetos, es decir, que tiene una extensión o "conjunto" asociado. Y, si un concepto no genera un "conjunto", entonces tampoco tiene un número asociado, ya que no hay forma de saber cuántas cosas caen bajo ese concepto, es decir, cuántas cosas pueden agruparse con ese concepto. Lo más delicado del asunto es que si no todo concepto es un modo de agrupar objetos, entonces ¿qué serían los conceptos en general? Para Frege, todo concepto, al ser un modo de agrupar objetos, tiene una agrupación asociada: justo, la agrupación (aun cuando esta sea vacía) que puede lograrse con ese modo de agrupar objetos; por otra parte, los números agrupan conceptos de acuerdo a la coordinabilidad de los objetos que permiten agrupar esos conceptos; y, por consiguiente, todo concepto está agrupado an algún número. En ese sentido, todo número es el número de algunos conceptos; es decir, es la agrupación a la que pertenecen de acuerdo a la coordinabilidad de sus agrupaciones asociadas. Sin embargo, dado que la contradicción se genera a partir de la noción fregeana de concepto, esta noción debe modificarse; y, al hacerlo, habrá que preguntarse si todo concepto (en la versión modificada de concepto) tiene una extensión y, por consiguiente, un número al que pertenece.

Por otra parte, la contradicción, como lo sostiene Frege y como trataremos de aclararlo en 2.4, afecta en general a las teorías de conjuntos. En ese terreno Cantor "soluciona" la cuestión diciendo que las multiplicidades que no lleven a una contradicción serán llamadas consistentes o conjuntos; y, en caso contrario, no serán conjuntos, y se llamarán multiplicidades inconsistentes[3]. Sin embargo, como lo había sostenido Hilbert (Hilbert [1904]) y lo ha mostrado detenidamente Orayen en un trabajo que está por publicarse (Orayen [1987]), esta "solución" es inadmisible ya que pone la carreta delante de los bueyes; es decir, que dada una caracterización de ciertas entidades, ella misma no permite aclarar cuáles son esas entidades previamente al uso que hagamos de ellas; y, por ello, a dicha caracterización se le añade la claúsula de que cualquiera de esas entidades que lleve a una contradicción debe descartarse. Pero "sucede simplemente que, en ocasiones, son varios conjuntos trabajando en colaboración, y no uno solo aisladamente, los que conducen a una contradicción" (Orayen [1987] p. 20); de tal suerte que la "solución" de Cantor es, en todo caso insuficiente.

Russell y varios otros, que mencionaremos más adelante en el inciso 2.4, han propuesto diferentes alternativas que tratando de evitar toda contradicción salvan, aun cuando no haya sido su motivación primaria, a veces el logicismo fregeano o, al menos, la teoría cantoriana de conjuntos. No obstante, para los propósitos del presente inciso nos interesa analizar por el momento la postura de Russell, ya que es logicista como la de Frege, aporta una versión interesante sobre la noción de número y, además, porque Russell mismo estudió detenidamente la naturaleza de las paradojas. De hecho, del estudio de paradojas como la suya, Russell llegó a la conclusión de que en todas ellas se forma un circulo vicioso debido a una autorreferencia y, con base en eso, Russell formuló un principio que le garantiza no incurrir en una contradicción insoluble como las de Frege y Cantor. Dicho principio establece que "ninguna totalidad puede contener miembros definidos en términos de sí misma"(Russell [1908] inc. IV; ver también Russell y Whitehead [1910] cap. 2, inc. 1).

En *Los Principios de la Matemática*, después en *Principia Mathematica* y por último en *Introducción a la Filosofía Matemática*, Russell aborda ampliamente el análisis de la

---

[3] Para esto puede verse sobre todo su "Carta a Dedekind" del 28 de julio de 1899 incluída en Heijenoort [1967].

noción de número. En todas esas obras hizo importantes precisiones que serán de las que trataremos de auxiliarnos para estudiar la definición russelliana de número. *Los Principios,* que fué su primer gran obra en este campo, estań dirigidos a un público preponderantemente filosófico; *Principia* es la más precisa y técnica porque está dirigida a los matemáticos principalmente; y la menos sistemática, pero más clara en algunos puntos, es la *Introducción* que está dirigida a los estudiantes. Así pues, con esta perspectiva, veremos en seguida las ideas de Russell sobre el número.

Para él "un número es todo aquello que es el número de una clase... y el número de una clase es la clase de todas las clases que le son coordinables"(Russell [1919] cap. 2, pp. 19 y 18). Russell afirma que esta definición es exactamente la misma de Frege, si se identifican sus clases con las extensiones de éste; aunque confiesa que no está seguro de haber entendido completamente la teoría de las extensiones de Frege (Russell [1903] incs.484 y 494). No obstante, sostiene que la pregunta "¿qué es el número? ha sido formulada frecuentemente, pero sólo fue correctamente contestada en nuestros días. La respuesta fue dada por Frege en 1884 en sus *Fundamentos de la Aritmética*" (Russell [1919] cao. 2, p. 11). Por ello, examinemos la reformulación russelliana para ver la coincidencia con la definición de Frege, así como la forma de evitar la contradicción que él mismo descubrió.

Para Russell, como para Frege, definir es dar una regla para la manipulación de símbolos, y puede hacerse siempre de una manera explícita. Así pues, la definición de Russell nos está diciendo que el término 'número' tiene el mismo significado que una expresión en términos de clases. Pero, según *Principia* "estas clases, tal como las hemos introducido, son sólo símbolos, o convenciones linguísticas, no objetos genuinos como lo son sus miembros si éstos son individuos"(Russell y Whitehead [1910] cap. 3, inc.1, p. 72); mientras que, si recordamos, para Frege los números son objetos. Así pues, hay que aclarar de qué forma es explícita la definición de Russell, y cómo usa el término 'clase'.

Al dar una sola definición que sirva para varias cosas como pueden ser los números queremos prescindir de sus caracteres diferenciales y considerar solamente aquello que es común a todas ellas para verlas como iguales. A esto lo llama Russell 'definición por abstracción' y se usa, por ejemplo, en el libro *V* de Euclides para caracterizar la razón de dos cantidades. Alessandro Padoa de la escuela de Peano encontró cómo dar forma explícita a las definiciones por abstracción al observar que el *quid* común a todos los entes ligados por una relación de igualdad consiste en que cada uno de ellos tiene el mismo conjunto de entes iguales a él. Si vemos que todos los números tienen en común el ser los números de un conjunto o clase de individuos, en el sentido que defendí en el inciso 2.2, podemos decir, prescindiendo de los caracteres diferenciales, que un número es todo aquello que es el número de una clase. Dado que el número de la clase formada por tres hombres es el mismo que el de la clase formada por tres árboles, y estas clases tiene en común ser coordinables entre sí, podemos decir, siguiendo según Russell el método de Padoa, que el número de una de esas clases es la clase de todas las clases coordinables con ella. De hecho,

> siempre que los matemáticos deducen una propiedad común de una relación de igualdad, todos los propósitos matemáticos de la supuesta propiedad común se cumplen completamente cuando se haya reemplazada por la clase de términos que guardan la relación dada... y éste es el caso que presentan los números cardinales (Russell [1903] inc. 111).

Sin embargo, al decir que todo número es una clase hay que precisar qué sentido tiene el término 'clase' y qué clase específica es un número.

Para Russell "una clase son todos los objetos que satisfacen alguna función proposicional" (Russell y Whitehead [1910] cap. 1, p. 23). Pero, también afirma que "los símbolos para clases, como aquellos para descripciones, son en nuestro sistema símbolos incompletos; su uso está definido, pero ellos mismos no se asume que refieran a algo" (Russell y Whitehead [1910] cap. 3, inc. 1, p. 71); es decir, como él mismo había dicho en una cita anterior, "las clases son meros símbolos o convenciones lingüísticas". Sin embargo, dice Quine:

> La frase 'función proposicional' está usada ambiguamente en los *Principia Mathematica;* unas veces significa enunciado abierto, y otras veces significa propiedad.

La teoría sin clases de Russell utiliza las funciones proposicionales en este segundo sentido como valores de variables ligadas; por lo tanto lo único que puede decirse de la teoría es que reduce unos universales a otros, es decir, en concreto, clases a propiedades (Quine [1953] cap. 6, inc. 5).

A partir de esto, puede desprenderse que para Russell, las clases no son objetos sino propiedades; ya que las clases son aquello que pueden tener en común varios objetos, es decir, lo que los caracteriza, como "el 3 caracteriza a todos los tríos que tienen algo común que los distingue de los otros conjuntos" (Russell [1919] cap. 2, p. 12). De esa forma, en este punto, al parecer, Russell se aparta de Frege, para el cual las extensiones y los números son objetos y de ninguna forma funciones proposicionales que se expresen con símbolos incompletos. Sin embargo, veamos si ésta es una diferencia de fondo.

Cuando Russell habla de clases, al parecer, está hablando de lo que Frege llama funciones proposicionales. En ese sentido los números russellianos serían propiedades; de hecho, propiedades de propiedades, ya que un número lo define como una clase de clases. Por otro lado, las funciones proposicionales de Frege no tienen criterios de identidad por tener un carácter intensional (es decir, cuyas diferencias son muy sutiles y no fáciles de precisar) y no extensional; mientras que las clases russellianas tienen un criterio preciso en el inciso 20.15 de *Principia* en los siguientes términos: "dos clases son idénticas cuando y sólo cuando sus funciones definitorias son formalmente equivalentes" (Russell y Whitehead [1910] inc. 20.15, p. 189). Así pues, de ahí se desprende que Russell no entiende las clases como algo intensional. De hecho, él había dicho incluso que con respecto a las clases "Frege adopta un punto de vista más intensional que el mío" (Russell [1903] inc. 484). Al respecto, Quine sostuvo que "la fundamentación proporcionada por los *Principia* está obscurecida por la noción de función proposicional, pero –podemos– suprimir esas funciones en favor de las clases y relaciones que son paralelas de ellas" (Quine [1953] cap. 5, p. 126).

En resumen, lo que podemos sacar de todo esto es que definitivamente no podemos comparar términos aislados en Russell y Frege: las *clases russellianas* expresables mediante símbolos incompletos no son lo mismo que las *funciones proposicionales fregeanas* expresables mediante símbolos incompletos. Se trata de dos sistemas en los cuales los diferentes términos adquieren un significado peculiar. De hecho, hasta donde alcanzo a ver, la definición de Russell no difiere sustancialmente de la de Frege; únicamente está inscrita en un sistema conceptual diferente. Habíamos dicho en el capítulo anterior que para Frege un número es una agrupación de conceptos; y, para Russell, "concebir el número es una manera de agrupar determinados conjuntos, a saber, aquellos que tienen un mismo número de elementos" (Russell [1919] cap. 2, p. 14); lo cual, como puede verse, es muy cercano a lo de Frege por lo que dijimos en 1.4 . Así pues, al parecer, como Russell mismo lo sostuvo, su aportación al concepto de número radica básicamente en introducir la definición fregeana dentro de un sistema que evita la contradicción.

La solución de Russell, aunque para algunos resulta muy artificial y poco satisfactoria, consiste en su teoría de tipos. En ella se prohiben las mezclas entre diferentes estratos conceptuales; lo cual, para nuestros propósitos actuales, significa que no todo lo que Frege llamaba 'concepto' está permitido en el sistema russelliano. En Frege un concepto es una forma de agrupar objetos de cualquier clase; mientras que la teoría de tipos no acepta algunas formas que agrupan objetos de diferente nivel conceptual. En Frege, 'función proposicional' es una expresión genérica aplicable a cualquier forma de agrupar objetos fregeanos, aun cuando éstos sean de cualquier nivel conceptual en el sistema russelliano como individuos, clases de individuos, clases de clases de individuos, etcétera. Para Russell, en cambio, existen funciones proposicionales de diferente nivel: las que agrupan individuos, las que agrupan clases de individuos, etcétera. Pero aun cuando no aceptemos del todo la solución de Russell, de cualquier forma para nuestros propósitos actuales, resulta análoga a las otras teorías de conjuntos: todas ellas, al igual que el sistema de Russell, como lo veremos brevemente en el inciso 2.4, estipulan de antemano lo que permite agrupar y lo que no; y de esa forma, no permiten que ciertas expresiones como '— es un predicado que no puede predicarse con verdad de sí mismo' refieran a modos de agrupar objetos.

En conclusión, podemos decir que el número está asociado (es decir agrupa) a una forma de agrupar objetos, siempre y cuando los modos de agrupar no sean irrestrictos. O, con otras palabras, un concepto en sentido fregeano, no siempre es agrupado por algún número; de tal suerte que un concepto tiene un número asociado (o es agrupado por algún número) sólo cuando damos a 'concepto' un sentido más restringido que el fregeano.

2.4. ¿Un número es un "conjunto"?

Como hemos visto, al parecer de todo número puede decirse que es el número de un concepto; aunque no todo concepto en sentido fregeano tiene un número asociado. Veamos ahora hasta qué punto es aceptable que el número sea un conjunto o agrupación. A las agrupaciones Frege las llama extensiones; y para él, las extensiones son siempre extensiones de conceptos y, según su ontología, objetos. Russell, en cambio, las llama clases; y se desprende de lo que dice que para él las clases son propiedades que caracterizan a grupos de individuos; aunque sus "propiedades", como las extensiones fregeanas, siempre están asociadas a funciones proposicionales, no tienen un carácter intensional y poseen criterios de identidad, comportándose, por consiguiente, como los objetos de la ontología fregeana. En fin, como lo reconoce Frege en los comentarios finales de sus *Leyes Básicas*, algunos otros hablan también de las agrupaciones a las que él se refiere, denominándolas conjuntos, sistemas, totalidades, etcétera. Ahora bien, ¿qué son finalmente esas agrupaciones, extensiones, clases o conjuntos para que podamos decir que los números son algo así?

Se busca, como lo vió claramente Russell, una caracterización general que sirva para todos los números y, en la línea fregeana, se les ha caracterizado como "conjuntos"; sin embargo, esa tarea se había visto obstaculizada desde la antigüedad debido al surgimiento de nuevas clases de números. Por ello, el trabajo de Georg Cantor es central en esta discusión; ya que, por un lado, él inició la teoría matemática de los conjuntos; y, por otro, fué el descubridor de una nueva clase de números que llamó transfinitos. Así pues, empecemos a ver la cuestión que nos ocupa a partir del trabajo de Cantor.

Cantor principió su trabajo a partir las series de Fourier mediante las cuales se pueden representar curvas continuas o con un número finito de puntos de discontinuidad mediante series trigonométricas; y él mismo probó la unicidad de tal representación. Posteriormente, buscando una generalización para su teorema de unicidad en curvas con infinitos puntos de discontinuidad, siempre y cuando esos puntos estuvieran localizados claramente, se vió precisado a "ver las diferentes maneras en que pueden comportarse las magnitudes numéricas en número finito o infinito" (Cantor [1871] inc, 1). Para eso, tomó diferentes clases de números como los racionales, los algebraicos reales, etc. como totalidades que pueden compararse mediante una correspondencia biunívoca. Por cierto, lo mismo había hecho Galileo para mostrar que no es legítimo considerar ciertos grupos de números como totalidades; ya que de ser así, tendríamos que aceptar el absurdo de, por ejemplo, que los enteros fueran tantos como los enteros pares, que son una parte de aquéllos. Para solucionar esto, Cantor inició el estudio matemático de los agregados, multiplicidades o totalidades[4]. Eso lo condujo al descubrimiento o, si se quiere, a la postulación de los números que él mismo llamó transfinitos. "La presentación tan lejos de mi investigación en la teoría de las multiplicidades –dice– ha alcanzado un punto donde su continuación ha llegado a depender de una extensión del concepto de la totalidad de los números reales más allá de los límites presentes" (Cantor [1883], intr.).

De las multiplicidades, agregados, o conjuntos se ha hablado desde la antigüedad y en muy variados contextos; en general, siempre que por alguna razón a varias cosas se les toma como semejantes en algún sentido, o simplemente se les quiere considerar formando

[4] Mientras no se especifique lo contrario, los términos 'agregado', 'multiplicidad', 'totalidad', 'conjunto' y 'clase' los usaremos aquí como sinónimos. Más adelante (como se vió precisado ha hacerlo Cantor mismo en sus últimos escritos) distinguiremos entre multiplicidades consistentes o conjuntos, y otro tipo de multiplicidades que, por cierto, también caen bajo la definición intuitiva de Cantor que citaremos más adelante. El "arregla" su definición de conjunto con algunas aclaraciones *a posteriori*; lo cual es incorrecto como mostró Orayen en el trabajo que comentamos en el inciso 2.3 .

un grupo. Estos grupos o conjuntos pueden, a su vez, ser tomados como objetos de estudio de diferentes disciplinas como la lógica, la filosofía, las matemáticas, etcétera. Ahora bien, para iniciar el estudio matemático de las multiplicidades, Cantor da la siguiente definición:

> Por una multiplicidad (menge) entendemos cualquier colección M, dentro de un todo, de objetos m determinados y bien distintos de nuestra percepción o nuestro pensamiento. Estos elementos son llamados los elementos de M (Cantor [1895], inc. 1).

Lo cual puede interpretarse como afirmando las dos proposiciones siguientes: a) con objetos cualesquiera puede formarse un conjunto o agregado; y b) dos conjuntos o agregados son iguales si tienen los mismos elementos. Es decir, que mientras podamos especificar ciertos objetos, con ellos podemos formar un conjunto. Aunque, como lo aclaró independientemente Frege y de hecho como los usó Cantor, los elementos no forman, como podría entenderse con su definición intuitiva, un conjunto, a la manera como los árboles forman un bosque, siendo partes de un todo; ya que la relación parte-todo es transitiva y la relación $\in$ no es transitiva. Como una interpretación plausible se suele expresar la proposición (a) mediante el llamado axioma de comprensión: "si y sólo toma conjuntos como valores, $(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow Px)$", que está expuesto a la misma paradoja que Russell encontró en el sistema de Frege por permitir toda clase de multiplicidades, incluyendo la multiplicidad S de todas las multiplicidades concebibles que el mismo Cantor mostró que no puede ser un conjunto (Cantor [1955]); aunque no recoje toda la idea de Cantor, de tener conjuntos aun cuando no tengamos un predicado para ellos. De igual forma, la proposición (b) se suele expresar mediante el llamado axioma de extensionalidad: "si x y y sólo toman conjuntos como valores, $(x)(y)[(z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y]$", que da las condiciones de identidad para conjuntos. Cantor mismo no trabajó la relación de igualdad entre conjuntos y se concentró, más bien, en las relaciones de equivalencia y similaridad; pero, de su definición intuitiva de conjunto y del manejo que hace de ella, se desprende que si un conjunto es *cualquier* colección de ciertos objetos m, no pueden darse conjuntos diferentes de los mismos objetos m a menos que se hable, como Cantor posteriormente lo hace, de conjuntos ordenados.

Una vez que Cantor definió los conjuntos o agregados, encontró que entre ellos podían definirse ciertas operaciones como la unión ($\cup$), y ciertas relaciones como "ser parte de" ($\subseteq$); y que la unión era, por ejemplo, conmutativa, y "ser parte de" era transitiva. "Si M_2 es una parte de M_1 –dice– y M_1 es una parte de M, entonces M_2 es una parte de M" (Cantor [1895] inc. 1).

Ahora bien, para Cantor dos aspectos centrales en el estudio de los conjuntos que, por cierto, fueron los que lo llevaron al descubrimiento de los números transfinitos, son lo que él denominó *el ordinal* y *el cardinal de un conjunto.* A continuación, sin pretender seguir un orden histórico sino más bien tratando de hacer una reconstrucción lógica, veamos qué entiende Cantor por ambos conceptos.

> Llamamos un agregado M *simplemente ordenado* –dice Cantor– si se da una regla definida de *orden de precedencia* sobre sus elementos m, tal que, de cada dos elementos m_1 y m_2, uno toma el *menor* y el otro el *mayor* rango, y tal que, –esta relación es transitiva. Y aunque– ... obviamente un mismo conjunto puede ordenarse de acuerdo a reglas muy diferentes,... cada agregado ordenado M tiene un *tipo ordinal* definido $\bar{M}$. Y por esto entendemos –aclara Cantor– el concepto general que resulta de M si nos abstraemos solamente de la naturaleza de los elementos m, y retenemos el orden de precedencia entre ellos" (Cantor [1895] inc. 7).

En la memoria del 97, Cantor define también los agregados *bien ordenados.* Un agregado es *bien ordenado*, diría en términos modernos, si es *simplemente ordenado* y, además, si cualquiera de sus partes o subconjuntos tiene un primer elemento. Al *tipo de orden* de un conjunto *bien ordenado*, le llama *número ordinal* o simplemente *ordinal.* Para Cantor es crucial que todo conjunto pueda bien ordenarse; ya que "el concepto de *agregado bien ordenado* proporciona un fundamento para la teoría de las multiplicidades como un todo" (Cantor [1883] inc. 3); y, por otra parte, "forma la materia natural para una definición exacta de los números cardinales transfinitos" (Cantor [1897], inc. 1). Este concepto, sin embargo, resultó muy problemático. Cantor, según el artículo del 83, pensaba que si un conjunto puede bien ordenarse eso ayudará a la aceptación de que podemos pensarlo como un todo. Es decir, tal vez, que no sería difícil para la razón pensar un conjunto como teniendo a todos sus elementos reunidos, si de hecho podemos ordenar todos esos elementos. O, visto de otra forma, si tenemos a ciertos elementos reunidos en una real "existencia simultanea" (según la expresión del mismo Cantor, por ejemplo, en la carta a Dedekind del 31 de agosto de 1899 en Cantor [1962]), tarde o temprano podemos ordenarlos. A la formulación explícita de Cantor de que todo conjunto puede bien ordenarse se le ha llamado el *principio de buena ordenación*; pero él mismo nunca llegó a probarlo.

Por otro lado, él afirmó que "los números ordinales forman cuando se arreglan en orden de magnitud un conjunto simplemente ordenado" (Cantor [1897] inc. 14). Lo cual implica que para dos números ordinales cualesquiera $\bar{A}$ y $\bar{B}$, se cumple que $\bar{A} \prec \bar{B}$, o bien $\bar{B} \prec \bar{A}$, o bien $\bar{A} = \bar{B}$; es decir, que se cumple la ley de la tricotomía para esos números; lo cual parece natural de pensarse porque los números ordinales son los representantes del orden creado por "$\prec$", ya que "los números ordinales quedan definidos por el orden o posición que ocupan en una lista"(Dauben [1983] p. 89).

El número ordinal del conjunto que contiene un número cualquiera, digamos el uno o el cinco, es 1; el ordinal del conjunto que contiene dos números naturales es 2; y así sucesivamente, los números ordinales de conjuntos finitos, ya sea de números o de cualquier cosa, son los mismos números naturales. Por consiguiente, para Cantor los naturales, vistos como ordinales, son números que siempre están asociados a conjuntos. Ahora bien, si los naturales están simplemente ordenados por la relación $\prec$, e incluso, como puede mostrarse, están bien ordenados, entonces podemos decir que forman un conjunto y tienen un ordinal. Como este ordinal no corresponde a un conjunto finito, no debe ser igual a ningún número natural, y Cantor lo llama el primer ordinal transfinito que simbolizó con la letra ω. El siguiente ordinal será $\omega + 1$, luego $\omega + 2$, etcétera; y como esta sucesión carece de elemento último, queda definido un nuevo ordinal transfinito que es el primero mayor que todos los otros y simbolizado por $\omega + \omega$ o 2ω; a partir de éste, se le vuelven a sumar unidades para construir una nueva lista infinita; y de ese modo por aplicación alternada de estos dos principios se generan todos los ordinales transfinitos. Una vez definidos así los ordinales transfinitos, Cantor trabajó en la aritmética de estos nuevos números estudiando sus operaciones y leyes. La relación básica es la igualdad entre ordinales. Dos ordinales son iguales, si corresponden a conjuntos *similares*. A su vez, dos conjuntos M y N son *similares*, en símbolos $M \simeq N$, si pueden ponerse en correspondencia biunívoca los elementos de M con los elementos de N. Entre sus leyes, mencionaré únicamente como ejemplo, que la suma de ordinales transfinitos no es conmutativa como la de los ordinales finitos ($\omega + 1 \neq 1 + \omega$). Si anteponemos 1 a la lista infinita de naturales, igualmente puede ponerse en correspondencia biunívoca esta nueva lista con la lista de los naturales; ya que haríamos corresponder el nuevo 1 con el 1, el siguiente 1 con el 2, el 2 con el 3, y así sucesivamente puesto que ninguna de ellas tiene un último elemento; de tal suerte que $1 + \omega = \omega$. Mientras que, $\omega + 1 \neq \omega$, ya que después de aparear ω con ω, todavía queda el 1 que añadimos al primer ω: después de hacer corresponder el 1 con el 1, el 2 con el 2, etcétera, faltará de aparear el 1 que pospusimos al primer ω, ya que $\omega + 1$ tiene un último elemento, mientras que ω solo no tiene un último elemento. Todo lo cual puede parecer extraño; pero es explicable en tanto que, a pesar de que $\omega + 1$ tenga los mismos infinitos números que $1 + \omega$, ambos agregados tiene un ordinal diferente porque uno tiene un último elemento y el otro no lo tiene, y el ordinal tiene que ver no sólo con el número de elementos sino también con el orden de los mismos.

No obstante, lo que resultó más problemático de aceptar fué la idea cantoriana básica de que todo conjunto puede bien ordenarse. En 1897, Burali-Forti publicó su famoso artículo (Heijenoort [1963]) que ha sido ampliamente comentado y muy diversamente interpretado. Russell, por ejemplo, lo leyó como el descubrimiento de una contradicción en la teoría cantoriana. Sin embargo, de acuerdo a las investigaciones de Copi, Moore y recientemente Garciadiego (ver Copi [1958], Garciadiego y Moore [1981] y sobre todo Garciadiego [1988]), Russell fue el primero en ver una paradoja en la teoría cantoriana y fregena de conjuntos. Según eso, lo que en realidad intentaba Burali-Forti en dicho artículo era probar mediante una reducción al absurdo, en contra de las afirmaciones de Cantor, que la ley de la tricotomía no vale para los ordinales transfinitos; y así, suponiendo que vale, llega a una contradicción. Por otro lado, Cantor argumentó en su carta a Dedekind de 1899 (Heijenoort [1967]), también por una reducción al absurdo y por análogas razones a las de Burali-Forti, que la multiplicidad de todos los ordinales es inconsistente y, por lo tanto, no es un conjunto o totalidad que pueda pensarse teniendo una real "existencia simultanea" de todos sus elementos. Brevemente, la prueba puede enunciarse como sigue: si la serie de todos los ordinales tiene un número ordinal Ω, al ser Ω un ordinal, debe estar también en la serie de todos los ordinales al igual que $\Omega + 1$ y, para todo ordinal, $\Omega \prec \Omega + 1$; pero, por otro lado, al ser Ω el ordinal de la serie, será el mayor de la serie; y, entonces, se llega a la contradicción de que simultaneámente $\Omega \prec \Omega + 1$ y $\Omega \geq \Omega + 1$. De ahí, Burali-Forti concluye que no vale la tricotomía para los ordinales; mientras que Cantor concluye que los ordinales no forman un conjunto, ya que negar la tricotomía implicaría que los ordinales no pueden ordenarse y, en ese caso, los ordinales no serían los representantes de un orden. Además, "no sólo se sigue la comparabilidad –o tricotomía– del principio de buena ordenación sino, a la inversa, al asumir la comparabilidad, podemos probar el principio de buena ordenación" (Fraenkel [1976] p. 122). De tal suerte que, en ese sentido, Burali-Forti estaría argumentando también en contra del prinicipio de buena ordenación. No obstante, en 1904, Zermelo presentó la primera prueba de dicho principio utilizando el llamado *principio de elección* que Cantor había utilizado sólo implícitamente y que también ha sido ampliamente debatido. Este principio puede enunciarse como sigue: dado un sistema de M conjuntos no vacíos en el que tomados de dos en dos no tienen elementos en común, entonces hay un conjunto que tiene exactamente un elemento común con cada uno de los M conjuntos. Y como puede probarse, el principio de elección y el principio de buena ordenación son equivalentes; y por consiguiente, "elección, buena ordenación y comparabilidad resultan ser equivalentes" (Fraenkel [1976] p. 122): aceptando uno, tendremos que aceptar los otros dos. Por otro lado, en 1938, Gödel probó que el principio de elección es compatible con los axiomas de la teoría de conjuntos *Zermelo-Fraenkel*, de la que hablaremos más adelante; y, para condiciones análogas, en 1963 Paul Cohen probó la independencia relativa de ese principio. Es decir, que el principio de elección juega en esa teoría de conjuntos el mismo papel que el axioma de las paralelas juega en la geometría euclidiana; es decir, que si se modifica, podrían generarse otras teorías de conjuntos, como de hecho se generaron las geometrías no euclideanas modificando el axioma de las paralelas que también es independiente de los otros axiomas de la geometría euclideana.

Ahora bien, si sobre un conjunto bien ordenado realizamos una nueva abstracción, obtenemos un nuevo concepto que Cantor llamó *número cardinal*[5]:

> Llamaremos –dice– con el nombre de 'potencia' o 'número cardinal' de M el concepto general que, con ayuda de la actividad de nuestra inteligencia, surge del agregado M cuando hacemos abstracción de la naturaleza de sus elementos m y del orden en el cual están dados. Y denotamos el resultado de este doble acto de abstracción, el número cardinal o potencia de M, por $\tilde{M}$ (Cantor [1895] inc. 1).

Dos cardinales son iguales si sus conjuntos correspondientes son *equivalentes*; y, a su vez, dos conjuntos M y N son *equivalentes* (en símbolos, $M \sim N$) si es posible mediante alguna regla poner los elementos de M en correspondencia biunívoca con los elementos de N. El cardinal de un conjunto finito es el número de elementos que tiene ese conjunto, y coincide con su ordinal y con alguno de los bien conocidos números naturales. Por otro lado, al cardinal de los conjuntos infinitos más pequeños Cantor lo llamó $\aleph_0$. El mismo mostró que dichos conjuntos son, por ejemplo, el formado por todos los números naturales, el conjunto de los enteros pares y el conjunto de los racionales. Todos ellos tienen el mismo número de elementos ya que pueden ponerse en correspondencia biunívoca. Por cierto, esto último lo había mostrado Galileo, como lo mencionamos arriba, intentando probar la imposibilidad de comparar conjuntos infinitos ya que todos resultan iguales. Posteriormente, Cantor probó que el cardinal del conjunto de todos los reales es mayor que $\aleph_0$; y, en general, que siempre podemos encontrar conjuntos más grandes a partir de uno dado, incluso infinito,

[5] Cantor sobrepone dos barras sobre la letra mayuscula que representa un conjunto para simbolizar el número cardinal de ese conjunto; pero por dificultades tipográficas utilizaré aquí la barra ondulada para distinguirla de la barra lisa que se utiliza para representar el ordinal de un conjunto

formando el conjunto potencia del primero, es decir el conjunto de todos sus subconjuntos. El pensaba que $\aleph_1$ (es decir, el número transfinito que sigue inmediatamente a $\aleph_0$) era el cardinal del conjunto de los reales, y también era el cardinal del conjunto potencia del conjunto de los naturales; que el cardinal del conjunto potencia del conjunto de los reales era $\aleph_2$ (es decir, el transfinito que sigue inmediatamente a $\aleph_1$); y así, sucesivamente. A esto se le llamó la *hipótesis del continuo*, que inquietó grandemente a Cantor quien trató infructuosamente de probarla. En 1938 Gödel probó, en las mismas condiciones que mencionamos arriba para el principio de buena ordenación, que la hipótesis del continuo era consistente con los otros axiomas de la teoría de conjuntos Zermelo-Fraenkel; y en 1963, Paul Cohen probó que era independiente, incluso añadiendo el principio de elección: "es decir –como lo senñaló Fraenkel–, que el problema que tanto preocupó a Cantor en realidad era insoluble con los recursos matemáticos disponibles" (Fraenkel [1976] p. 66). Por lo tanto, podemos decir que la hipótesis del continuo juega en una teoría cantoriana axiomatizada de los números transfinitos un papel análogo al que juegan el principio de elección en la teoría de conjuntos Zermelo-Fraenkel y el axioma de las paralelas en la geometría euclidiana; es decir, que modificándolo, podríamos generar otras teorías no cantorianas de los números transfinitos. Ahora bien, la serie de los $\aleph^*$:

> se trata –dice Cantor– de una continuación de la secuencia de la totalidad de los números reales más alla del infinito...–formando a su vez–...una secuencia infinita de tales números que son plenamente distinguibles uno del otro, y están en relaciones legítimas de la teoría de números unos con otros y con la totalidad de los números finitos (Cantor [1883] intr.);

es decir, básicamente, que pueden ser ordenados por la relación "$\prec$", y que entre ellos rigen operaciones que siguen ciertas leyes de conmutatividad, asociatividad, etcétera. Naturalmente que la totalidad de dichas relaciones no son reducibles, en principio, a las relaciones entre los números finitos; y, además, para los conjuntos transfinitos no coinciden el ordinal y el cardinal de un mismo conjunto, ya que al conjunto de los naturales corresponden infinidad de ordinales (ω, $\omega + 1$, 2ω, etc.), y un solo cardinal ($\aleph_0$). Sin embargo, esto no prueba que no son números, sino sólo que se trata de números diferentes. El cero, por ejemplo, tiene un comportamiento muy peculiar, pero no por eso deja de considerársele hoy día como número.

La teoría cantoriana de conjuntos, como hemos visto brevemente, presenta una nueva visión muy atractiva de los números, pero impregnada de algunos aspectos intuitivos imprecisos e, incluso, problemáticos. A partir de ahí, han surgido diversas teorías matemáticas de conjuntos que de una o de otra forma han precisado en algún sentido particular esas intuiciones e intentado evitar los aspectos problemáticos. En primer lugar, Ernst Zermelo presentó en 1908 una versión axiomatizada; aunque, al parecer, ése no era su principal propósito. De acuerdo a las conclusiones de Moore (Moore [1978]), lo que le interesaba a Zermelo era defender el axioma de elección que había explicitado en su prueba del teorema del buen orden. Sin embargo, lo cierto es que tanto Zermelo (cuya teoría sería modificada luego por Fraenkel dando lugar a la llamada teoría Zermelo-Fraenkel), Russell con su teoría de tipos, Brouwer con su constructivismo intuicionista, John von Neumann en 1920, Paul Bernays conjugando las posturas de Zermelo y von Neumann en 1937, 1954 y 1958, y últimamente Quine en 1963 (ver, por ejemplo, Fraenkel [1973]) han presentado teorías matemáticas de conjuntos que básicamente aceptan de Cantor el axioma de extensionalidad y sustituyen su axioma de comprensión, o bien, por otros axiomas que aseguran la existencia sólo de ciertos conjuntos no problemáticos, o bien, por una combinación de axiomas y reglas lógicas que aseguran eso mismo. Esto puede verse con detalle, por ejemplo, en Fraenkel [1973]. Sin embargo, lo importante para nuestros propósitos actuales es observar que todas esas teorías precisan *a priori* cuáles son las multiplicidades que deben llamarse conjuntos y, mediante sus axiomas y reglas lógicas, definen el comportamiento de lo que cada una entiende con el término 'conjunto'.

En resumen, al tratar Cantor de analizar cómo se comportan magnitudes finitas e infinitas encontró que ambas podían definirse en términos de conjuntos; pero, al hacer esto, surgieron problemas con la legitimidad de tratar con magnitudes infinitas, y con la caracterización matemática de los conjuntos. Varios filósofos y matemáticos muy destacados como Aristóteles, Sto. Tomás, Galileo, Descartes y Spinoza se habían pronunciado en contra de tratar las magnitudes infinitas como algo acabado, puesto que al tratar con ese tipo de magnitudes, como lo mostró Galileo según lo mencionamos, resulta que la parte es igual al todo, lo cual va en contra del principio aristotélico básico de que eso no es posible. Por todo ello, Cantor tuvo que enfrentarse al rechazo de gran parte de sus contemporáneos y especialmente el ataque directo de su profesor Kronecker que era uno de los más influyentes matemáticos de su época. Sin embargo, no todo fué rechazo: por ejemplo Frege y Dedekind aceptaron su teoría de los números transfinitos, e incluso Dedekind y otros intercambiaron con él numerosas reflexiones al respecto. En relación a la aceptación de los números transfinitos, Cantor se expresó en los siguientes términos:

> Los matemáticos son enteramente libres en su desarrollo guiados sólo por la autoevidencia concerniente a que sus nuevos conceptos no tengan contradicciones internas y establezcan relaciones definidas, organizadas por medio de definiciones, con los conceptos existentes previamente formados. En particular, introduciendo nuevos números los matemáticos están obligados sólo a dar definiciones de ellos mediante las cuales queden definidos y, bajo circunstancias permitidas, se les confiera una relación con los viejos números y, para casos dados, puedan definitivamente distinguirse uno del otro. Si un número satisface todas esas condiciones debe vérsele como existente y real en matemáticas. Así concibo la razón por la cual fueron vistos los racionales, irracionales y complejos como realmente existentes tal como los enteros positivos finitos (Cantor [1883] inc. 8).

O, con otras palabras, según Cantor en matemáticas puede aceptarse la existencia de algo siempre y cuando lo definamos con precisión, y sin alterar las circunstancias permitidas, el comportamiento de ese algo con respecto a otras entidades ya definidas de antemano implícita o explícitamente. De hecho, finalmente, los matemáticos, por esas u otras razones, terminaron por aceptar los números transfinitos cantorianos.

Ahora bien, con relación a la definición de los conjuntos mediante los cuales pueden caracterizarse los números, se han hecho varios trabajos importantes. Cantor inició el estudio matemático de los conjuntos y advirtió que no toda multiplicidad es un conjunto, de forma análoga a como le mostró Russell a Frege que no todo concepto tiene una extensión. Sus continuadores han construído teorías matemáticas de conjuntos más precisas y explícitas que permitan ver con mayor claridad de qué conjuntos se está hablando en cada caso. Previamente a estos trabajos, Georg Boole en sus *Leyes del pensamiento* de 1854, intentando hacer un álgebra de la lógica aristotélica, había recurrido también a conjuntos, ya que advirtió que esta lógica trata de un aspecto de los conceptos que hoy llamaríamos extensional y que puede definirse exactamente en términos de conjuntos. Así pues, advirtiendo que el uso del término 'conjunto' es anterior y más amplio al conferido por alguna teoría matemática particular, podemos decir, sin embargo, que los conjuntos, al parecer, son algo que siempre tiene que ver con los conceptos entendidos a la manera fregeana como modos de agrupar objetos y que, como muchas otras entidades, es también susceptible de un tratamiento matemático. Así pues, únicamente me gustaría destacar aquí que cuando se habla de conjuntos hay que especificar qué se está entendiendo por ello; ya que hoy día hay varias teorías matemáticas que definen con algunas variantes lo que debe entenderse por el término 'conjunto' e, incluso, puede pensarse en teorías o contextos no matemáticos que le den algún sentido al término 'conjunto'.

En resumen, para Cantor, un número natural puede verse como el ordinal o el cardinal de un "conjunto". De hecho, él va más lejos aún: considera que el número mismo, es decir el ordinal o el cardinal de un "conjunto", es también un "conjunto". "El tipo ordinal $\bar{M}$ –dice– es él mismo un agregado-ordenado cuyos elementos son unidades las cuales tienen el mismo orden de precedencia entre cada una de ellas como los elementos correspondientes de M" (Cantor [1895] inc. 7). Afirma también que "entre los elementos de M y las diferentes unidades de su número cardinal $\bar{\bar{M}}$ subsiste una relación biunívoca... y así, podemos decir que $M \sim \bar{\bar{M}}$" (Cantor [1895] inc.1). Pero si el cardinal de A es un conjunto coordinable con A, por la transitividad de la coordinabilidad, el cardinal de A es aquel conjunto que es coordinable con todos los coordinables con A; en la notación de Russell, $\tilde{A} = \hat{x}(x \sim A)$. Por otro lado, según Cantor, el cardinal de A es el concepto que se obtiene abstrayendo de A el orden y la naturaleza de sus elementos. Pero ¿qué podemos decir que cae bajo ese concepto? justamente, como lo vimos con Russell en 2.3, aquello que comparte A con sus conjuntos coordinables; lo cual, según el método de Padoa al que se refiere ahí el mismo Russell, podría expresarse diciendo que es el conjunto de los conjuntos coordinables con A. Esto también lo expresa Tarski, siguiendo a Russell, en los siguientes términos:

> Si consideramos una clase A, existe sin duda una propiedad poseída por todas las clases coordinables con A y con ninguna otra clase (a saber, la propiedad de ser coordinable con A); y esta propiedad es llamada número cardinal o número de elementos o potencia de A...O, en términos más abstractos, el cardinal de A es el conjunto de todos los conjuntos coordinables con A"(Tarski [1941] inc. 26).

Así pues, sintetizando, podemos decir que en este campo Cantor aporta lo siguiente: a) da una definición de $\bar{A}$ en términos de abstracciones; b) su definición de $\bar{A}$ sugiere que un conjunto está formado a partir de los elementos; y c) enuncia la ley que dice que $\bar{N} = \bar{M} \leftrightarrow N \sim M$. El punto (a) fué duramente criticado por Frege y otros por el sicologismo que implica. El punto (b) fué atacado también por Frege y, como lo vimos al principio de este inciso, es inadecuado incluso de acuerdo al uso que Cantor mismo le dió a $\bar{M}$. Con el punto (c) no ha habido mayor problema; de hecho del punto (c) y las ideas de Padoa referidas se puede obtener la definición de Russell, de tal suerte que modernamente, por ejemplo en Fraenkel [1973], se define $\bar{M}$ buscando que verifique el punto (c). De acuerdo con eso, y tomando en cuenta sobre todo el punto (c) que fué el que desarrolló más Cantor mismo, podemos decir que el número cardinal cantoriano puede expresarse (como de hecho se hace en las obras de Russell y Quine) en términos equivalentes a la definición de número dada por Frege.

En conclusión, con respecto a la pregunta de si el número es un conjunto, debemos reformularla y preguntarnos, más bien, si los números pueden caracterizarse en términos de conjuntos en algún sentido de 'conjunto', y si podemos decir que los números son algunos de esos "conjuntos". Vistas así las cosas, de acuerdo a los trabajos de Frege, Russell, Dedekind y Cantor que hemos examinado, podemos sostener, al menos, que el término 'conjunto' tiene varios sentidos que al interior de un sistema conceptual conveniente permite caracterizar los números con sus características mátematicas e, incluso, en su relación con los conceptos en sentido fregeano restringido.

2.5. ¿El número del concepto F es específicamente el "conjunto" asociado al concepto "equinumérico con respecto a F"?

En su artículo "Qué podrían no ser los números", Benacerraf afirma en contra de la definición fregeana de número:

> A través de este artículo he discutido lo que fue sustancialmente el punto de vista de Frege, en un esfuerzo por encontrar alguna luz sobre el sentido de los términos numéricos... El análisis que hemos considerado contiene la condición de que los números son conjuntos, y que por eso cada número individual es algún conjunto individual... –Sin embargo,– los números podrían no ser conjuntos (Benacerraf [1965], pp. 289 y 290 de Benacerraf y Putnam [1983]).

El apoya lo anterior mostrando que puede darse una definición conjuntista de, por ejemplo, el número 3, para la cual se cumplan las leyes de la aritmética y que, sin embargo, sea diferente de otra definición conjuntista del número 3 para la cual también se cumplan las leyes de la aritmética, pero que sea incompatible con la primera. De ahí, concluye Benacerraf que no hay razones de peso para preferir una de esas dos definiciones, y que si eso pasa con el número 3, pasará del mismo modo para cualquier otro número.

Benacerraf inventa dos pupilos: Ernie y Johnny, que han sido educados bajo los principios de la escuela logicista y para los cuales los números son conjuntos, aunque conjuntos diferentes para cada uno. Ernie construye la serie de los números naturales como sigue: $1 = (\emptyset)$, $2 = (\emptyset, (\emptyset))$, $3 = (\emptyset, (\emptyset), (\emptyset, (\emptyset)))$, etcétera; mientras que Johnny los construye así: $1 = (\emptyset)$, $2 = ((\emptyset))$, $3 = (((\emptyset)))$, etcétera. Como puede mostrarse, para ambas progresiones se cumplen las leyes de los números naturales. Por ejemplo, si definimos la suma en alguna de las formas habituales de modo tal que como casos particulares se obtenga que tanto $x + 1$, como $1 + x$ den por resultado el sucesor del número x, en ese caso, para ambos pupilos $x + 1 = 1 + x$. Por ejemplo, si $x = 2$, para Ernie $(\emptyset, (\emptyset)) + (\emptyset) = (\emptyset, (\emptyset), (\emptyset, (\emptyset))) = (\emptyset) + (\emptyset, (\emptyset))$; y para Johnny, $((\emptyset)) + (\emptyset) = (((\emptyset))) = (\emptyset) + ((\emptyset))$. Sin embargo, por otro lado, ambas posturas son incompatibles en sus consecuencias definicionales. Mientras que con Ernie,

> para dos números cualesquiera x y y, x es menor que y si y sólo si x pertenece a y y x es subconjunto de y; y así, si admitimos que 3 es menor que 17, se sigue que

> 3 pertenece a 17. –Mientras que para Johnny– x pertenece a y si y sólo si y es el sucesor de x –y, en ese caso, 3 no pertenece a 17– (Benacerraf [1965], p. 278 de Benacerraf y Putnam [1983]).

No obstante, dado que cada pupilo puede reconstruir toda la aritmética a partir de sus definiciones, no hay razones de peso para preferir una de esas dos versiones. Es decir, que para cualquier propósito aritmético, es igual que usemos una u otra progresión. De tal suerte que si en una versión 3 = (ø, (ø), (ø, (ø))), y en la otra 3 = (((ø))), en realidad es superflua cualquiera de esas dos identidades, y el 3 no es esencialmente ni uno ni otro conjunto. Y si un número no es un conjunto en particular, Benacerraf concluye que los números podrían no ser conjuntos en absoluto.

Al parecer una razón poderosa para identificar los números con conjuntos es justamente el hecho de que la aritmética puede reconstruírse lógicamente a partir de definiciones conjuntistas y la teoría de conjuntos. Pero, frente a eso Benacerraf argumenta que si bien es cierto que dicha reconstrucción se ha llevado a cabo desde diferentes teorías de conjuntos, por otro lado, "Gaisi Takeuti ha mostrado que la teoría de conjuntos Von Neumann-Bernays es, en un sentido fuerte, reducible a la teoría de los números ordinales... –y, en ese caso, pregunta Benacerraf– ¿qué es en realidad qué?" (Benacerraf [1965], p. 290 de Benacerraf y Putnam [1983]).

Benacerraf termina su artículo con la afirmación de que los números no sólo podrían no ser conjuntos, sino que "podrían no ser objetos en absoluto; ya que no hay más razones para identificar cualquier número individual con un objeto particular que con cualquier otro" (Benacerraf [1965], p. 290 de Benacerraf y Putnam [1983]). Si los números fueran objetos particulares, dice, tendrían propiedades necesarias y suficientes que permitirían identificarlos independientemente de sus relaciones con otros objetos; pero sucede que,

> en cualquier secuencia recursiva –como las de Ernie y Johnny– lo que es importante no es la individualidad de cada elemento, sino la estructura que ellos presentan juntos... Para los propósitos aritméticos las propiedades de los números, que no contradicen las relaciones de unos con otros en virtud de estar ordenados en una progresión no tienen consecuencias (Benacerraf [1965], pp. 290 y 291).

De tal suerte que si una estructura es un sistema de relaciones, la aritmética conforma sólo una estructura abstracta en la que los "elementos" no tienen otras propiedades que aquellas que los relacionan de cierta forma con los otros "elementos" de la misma estructura. En ese sentido, la aritmética

> no es una ciencia a la que le conciernen objetos particulares: los números... –y, por consiguiente,– la investigación de cuáles objetos particulares se identifican con los números (¿conjuntos? ¿Julios Cesar?) induce al error (Benacerraf [1965], p. 291 de Benacerraf y Putnam [1983]),

porque los términos numéricos no tienen referentes únicos. Por cierto, en esto también estarían de acuerdo Dedekind, Peano y la escuela estructuralista surgida a partir de trabajos como los del grupo Bourbaki y compartida por autores como Courant y Robbins que citamos arriba al principio del inciso 2.2 .

Ahora bien, si queremos ver qué tan justas son las críticas de Benacerraf, recordemos la definición fregeana alternativa de número sin olvidar que para Frege estamos en posesión de una buena definición de número viendo si se pueden deducir propiedades conocidas de los números a partir de esa definición, y "aquellas definiciones que puedan omitirse sin dejar lagunas en la demostración, hay que rechazarlas como completamente sin valor" (Frege [1884] inc.70). En los *Fundamentos de la Aritmética*, Frege define el número en los siguientes términos: "El número que corresponde al concepto F es la extensión del concepto "equinumérico en comparación al concepto F" " (Frege [1884] inc. 68). De acuerdo a la interpretación de los términos fregeanos que propuse en el capítulo 1, con esta definición Frege estaría diciendo lo siguiente: en primer lugar, que el número es un *objeto fregeano* que está asociado a un *modo* de agrupar entidades, lo cual implica que tiene criterios de identidad y puede fungir como argumento o como valor de una función; en segundo lugar, que al ser el número la extensión de un concepto, es la *vinculación* o "conjunto" que agrupa lo que cae bajo ese concepto; y, en tercer lugar, que si el número que corresponde al concepto F es la extensión del concepto "equinumérico con respecto a F", dicho número será la *agrupación* a la que pertenece todo concepto, incluído F, tal que las entidades que caen bajo él puedan ponerse en correspondencia biunívoca con las entidades que caen bajo el concepto F. En resumen, para Frege, el número es un *objeto fregeano* asociado a un *modo* de agrupar y que es él mismo una *agrupación* de conceptos. Esto puede verse de una forma gráfica con el diagrama que propuse en el inciso 1.4 .

Así pues, según lo anterior, para Frege un número es un "conjunto", aunque no cualquier conjunto. Actualmente no hay solamente una teoría de conjuntos, y en cada una de ellas los axiomas delimitan el comportamiento de los "conjuntos", al igual que lo hace el propio Frege. Además, aun cuando Benacerraf esté pensando en una teoría de conjuntos compatible con la fregeana, para Frege el número 3, por ejemplo, no es cualquier conjunto para el cual se cumplan las leyes de la aritmética; sino, específicamente el conjunto al que pertenecen los conceptos bajo los cuales caen tres objetos; es decir, la *agrupación* de esos *modos* de agrupar. Para Frege el número del concepto F es el "conjunto" al que pertenece todo concepto, incluído F, tal que los objetos que caen bajo él puedan ponerse en correspondencia biunívoca con los objetos que caen bajo F. Haciendo algunos arreglos al sistema fregeano, como lo sugerimos con el segundo diagrama de 1.4, podríamos decir con Russell que el número de la clase A es la clase a la que pertenece toda clase, incluída A, tal que los objetos que le pertenecen pueden ponerse en correspondencia biunívoca con los objetos que pertenecen a A; esto sería análogo a lo que dice Frege, si las clases russellianas las entendemos como extensiones fregeanas, es decir como extensiones de conceptos.

Sin embargo, si definimos un número, no como una clase de clases específica, sino como cualquier clase mediante la cual podamos representar la clase específica de clases, a la manera que ejemplifica Benacerraf, ciertamente, como él y otros lo han mostrado, se cumplen para los números así definidos las leyes estructurales de la aritmética; pero, cabría preguntarnos aquí, si eso es todo lo importante que podemos decir sobre los números. Para Frege, los números no son cualesquiera clases de clases que cumplan ciertas propiedades, sino que cada número es específicamente una y sólo una clase de clases, a saber, aquella que agrupa determinados conceptos, o clases si se quiere. Benacerraf pretende recoger las mismas propiedades de los números que Frege mediante definiciones alternativas, mostrando, así, que la definición fregeana es superflua ya que siguiendo incluso los mismos cánones de Frege puede omitirse en la obtención de las propiedades de los números. Sin embargo, lo central aquí es qué tanto queremos recoger de los números en cada definición; y, en ese sentido, lo discutible es la ventaja de definir los números como *objetos específicos* a la manera de Frege. Aquí mismo, en 2.2 defendí la idea de que en efecto la versión fregeana es más completa aun cuando sólo pretendamos enfocarnos a los números de la aritmética pura. Incluso, adoptando los cánones de Benacerraf, si seguimos la propuesta fregeana, podríamos definir al menos un número de manera no estructural mediante los conceptos o clases que agrupa (lo cual nos daría las "propiedades necesarias y suficientes que permitirían identificarlos independientemente de sus relaciones con otros objetos") y, en relación a él, podríamos caracterizar el resto de los números que quedarían definidos no sólo por sus relaciones entre sí sino también de manera no estructural a través del primero. Eso nos indica que si pueden ser caracterizados individualmente, de hecho, son algo más que elementos de estructuras abstractas ya que con éstos no es posible hacer tal cosa.

De la misma forma, con respecto a la objeción de Benacerraf de que los números podrían no ser objetos, en tanto que los números no tienen propiedades que no sean las de sus relaciones con otros números, habrá que aclarar lo siguiente: a) si para probar que hay más de una definición viable de número, se toma como criterio de definición viable que la definición reproduzca las leyes estructurales de la aritmética, se está usando ya como premisa que los números son únicamente algo estructural; y b) si, por otro lado, a los términos numéricos les reconocemos también usos no matemáticos, o valdría decir no estructurales, entonces podemos decir que es posible mostrar (como pienso que lo hemos hecho tratando de reforzar la postura fregeana) que los números tienen propiedades que los individualizan como objetos independientemente de sus relaciones con otros números; y, si esto es así, los números (incluso los números de la aritmética pura) serían algo más que elementos de estructuras abstractas y, por consiguiente, eso debería expresarse en una buena definición de ellos.

Finalmente, podemos decir que tanto la versión estructural como la fregeana dan cuenta del comportamiento estructural de los números y la cuestión estriba en si hay algo más para que tenga sentido la propuesta fregeana. En 2.2 defendimos la idea de que los números tienen la propiedad no estructural de poder ser siempre parte de la predicación que se hace de los conceptos en expresiones como '2 niños', '4 caballos', etcétera. Intentemos reforzar aun más esta idea mediante un ejemplo. Partamos, en primer lugar, de la circunstancia de que los mismos estructuralistas explican las aplicaciones de los números a lo extramatemático haciendo ver que pueden ponerse en correspondencia biunívoca los conjuntos numéricos con los conjuntos extramatemáticos. Sin embargo, lo que, al parecer, no han visto es que, justo al hacer eso, están aplicando la propiedad no estructural de los números de estar ligados a determinados conceptos, clases o conjuntos. Los conceptos, independientemente de lo que pase en las matemáticas, permiten agrupar ciertos objetos. Los objetos que permite agrupar un concepto F pueden aparearse, también independientemente de las matemáticas, con los objetos que permiten agrupar otros conceptos G, H y J. A partir de ese ejercicio, puede constatarse que, por ejemplo, se pueden aparear, por un lado, los objetos que caen bajo G con los que caen bajo J; y, por otro lado, los objetos que caen bajo F con los que caen bajo H. Con base en eso, sin ninguna dificultad, se pueden agrupar, por un lado, los conceptos G y J; y, por otra, los conceptos F y H. Cada una de estas agrupaciones sería un objeto individual. Ahora bien, si aplicar los números matemáticos a los objetos del mundo (por ejemplo, el 5 a los objetos que caen bajo G es aparear conjuntos de objetos no matemáticos con conjuntos de entidades matemáticos (por ejemplo, un objeto con el 1, dos objetos con $1 + 1 = 2$, etc.), se está suponiendo que los números matemáticos son de tal forma que cada número (el 1, el 2, etc.) tiene tantas unidades como objetos tenga el conjunto con el que pueda aparearse; en ese sentido, el concepto "– es una unidad del 5" sería un concepto que también debe pertenecer a la agrupación que se había hecho de los conceptos G y J en base a la coordinabilidad de los objetos que caen bajo ellos; y, siendo así, el número 5, a través de sus unidades, está vinculado a los conceptos G y J, y no lo está a los conceptos F y H. Si la relación de los números matemáticos con los conceptos fuera arbitraria, en efecto podríamos usar cualquier número para cualquier conjuntos de objetos; pero, el ejemplo que acabo de ilustrar muestra que los números, independientemente de su relación entre ellos, tienen la propiedad de estar vinculados a ciertos conceptos específicos. Por consiguiente, podemos decir que en efecto hay algo importante en los números, a saber su relación con los conceptos, que no es puramente estructural.

Sin embargo, el gran mérito del trabajo de Benacerraf que discutimos aquí es, a mi juicio, el haber mostrado que pueden darse diferentes definiciones de número que cumplan los mismos propósitos, de tal suerte que no podemos privilegiar una sola. De hecho, tanto la propuesta estructural como la fregeana pueden verse (como lo precisaré más a partir de 2.6) como imágenes o pinturas de los números aritméticos; y la diferencia estriba, por lo visto, en qué tantos aspectos de los números recoge cada una. En ese sentido la "imagen" que propone Frege es más completa que las que ejemplifica Benacerraf ya que además de las relaciones de los números entre sí, recoge también la estrecha relación que tienen con los conceptos. Por otro lado, no es difícil pensar que puedan darse también dos o más "imagenes" que recojan los mismos aspectos, como creo que de hecho, según lo expuse en 1.4 y 2.3, es el caso de las propuestas de Frege y Russell; y, en ese sentido, serían equivalentes como dos retratos de una misma persona, concediéndole en eso la razón a Benacerraf cuando sostiene que la definición fregeana no es única. Por lo cual, en realidad, no podríamos decir, como Frege lo hace, que los números *son* extensiones que agrupan conceptos, ya que siguiendo a Russell también podríamos decir, basados en argumentos análogos a los que usa Frege, que los números *son* clases de clases; más bien, lo único que podríamos decir es que los números *pueden verse* como extensiones que agrupan conceptos o como clases de clases, ya que de esa forma recogemos de ellos, al menos, sus propiedades estructurales y su estrecha relación con los conceptos.

Ahora bien, en cuanto al argumento de Benacerraf de que los números podrían no ser conjuntos en tanto que se han reconstruido teorías de conjuntos a partir de la aritmética y ciertas definiciones de los conjuntos en términos numéricos, habría que analizar los dos lados de la reconstrucción, es decir, ¿qué se reconstruye a partir de qué? ya que dichas reconstrucciones cruzadas plantean cuestiones sumamente interesantes. En términos de la imágenes o pinturas que he mencionado, podemos decir que Frege construye una imagen de los números aritméticos en base a ciertos "conjuntos"; mientras que Takeuti estaría construyendo una imagen de los conjuntos de la teoría von Neumann-Bernays en base a ciertos números, concretamente los ordinales. Esto presenta ciertas dificultades a la pretención fundasionista de Frege y otros, según la cual, los conjuntos son entidades teóricas más generales o fundamentales que los números; pero no altera la propuesta fregeana expresada en términos de que los números *pueden verse* como ciertos conjuntos que agrupan conceptos. En ese mismo sentido, Takeuti, por su parte, podría seguir sosteniendo que los conjuntos de la teoría von Neumann-Bernays *pueden verse* como ciertas entidades expresadas en términos de números ordinales. Viendo las cosas de esa forma, se evita privilegiar alguna de esas entidades, y se acepta únicamente la idea de que una reconstrucción de cierto cuerpo teórico es una imagen del mismo y nada más. Eso no implica, por supuesto, que los términos usados en la imagen tengan que ser más generales o fundamentales en algún sentido que los del cuerpo teórico en cuestión; de forma análoga a como las pinturas usadas en un lienzo que retrata a una persona no tienen por que ser más generales o fundamentales en algún sentido a los componentes de dicha persona.

En conclusión, considero que las objeciones de Benacerraf, aunque sumamente interesantes y atinadas en cierto sentido, no refutan del todo los intentos fregeanos de definir los números; lo cual, por supuesto, no quiere decir que dicha definición no tenga otras dificultades como las ya apuntadas. No obstante, por lo que respecta sólo a las objeciones de Benacerraf, creo que aún podría sostenerse que hay una ventaja sobre la versión puramente estructural en decir que los números pueden verse como agrupaciones de conceptos. Así pues, con respecto a la pregunta que nos planteamos en este inciso, podemos decir lo siguiente: por lo visto, un número puede ser visto siempre como el número de un concepto, y el decir específicamente que el número del concepto F es la extensión del concepto "equinumérico en relación con F" es una forma de ver los números que recoge de estos tanto las propiedades estructurales de los números aritméticos, como el uso de esos números en el lenguaje ordinario que los presenta asociados a los conceptos.

2.6. ¿Qué prueba una reconstrucción lógica del número?

Una vez que Frege definió los números, pretendió confirmar su definición mostrando que es imprescindible para la obtención lógica de las propiedades más conocidas de los números. Ese trabajo lo presentó en las *Leyes Básicas* y consiste en una reconstrucción lógica del número; es decir, en la deducción de las leyes de la aritmética a partir de la lógica y de algunas definiciones sobre el número en términos lógicos. Su método particular para reconstruir la aritmética consiste en mostrar que las agrupaciones de conceptos que definió como números tienen, en primer lugar, las mismas propiedades que los tradicionales números naturales. Para ello, definió cada número individual eligiendo un concepto al que le corresponda ese número: por ejemplo, "0" lo define como el número que corresponde al concepto "desigual consigo mismo"; "1" lo define como el número que corresponde al concepto "igual a cero"; y 'sucesor' lo define diciendo:

> Existe un concepto F y un objeto x que cae bajo él, de tal tipo que el número que corresponde al concepto F es n, y que el número que corresponde al concepto "que cae bajo F, pero no es igual a x" es m; n sigue inmediatamente a m en la serie de los números naturales (Frege [1884] inc. 76).

A partir de ahí, deduce varias propiedades aritméticas para los números así definidos, por ejemplo, para mostrar que el 1 es el número que sigue inmediatamente al 0 en la serie de los números naturales procede de la siguiente forma: a) en la definición de sucesor, previamente dada, toma como el concepto F el concepto "igual a cero" bajo el cual cae un objeto x, a saber, el 0; es decir, que el número n que corresponde al concepto F es 1; b) continuando con la definición de sucesor, toma el concepto "igual a cero, pero no igual a cero" como el concepto que le corresponde al número m que antecede inmediatamente al número n; siendo $m = 0$, ya que bajo el concepto contradictorio "igual a cero, pero no igual a cero" no cae ningún objeto; y c) concluye que de esa forma queda demostrado que el 1 es el sucesor inmediato del 0 en la serie de los números naturales, ya que en la definición de 'sucesor' podemos instanciar m y n con 0 y 1 respectivamente. Todo esto lo hace en los incisos 74 a 77 de los *Fundamentos* y 41 a 43 de las *Leyes Básicas*.

Ahora bien, para entender con cierto detalle este tipo de "confirmación" de la definición de número, a continuación analizaremos brevemente en qué consiste una reconstrucción como la de Frege; en general, en qué consiste hacer un trabajo axiomático; y qué papel juega en todo ello la lógica.

Para empezar, creo que podemos ver la concepción axiomática del conocimiento descansando básicamente en dos ideas explicitadas, al parecer por primera vez, en *El Organon* de Aristóteles: 1) "Todo conocimiento racional se deriva siempre de nociones anteriores" (Aristóteles [s IVa ac] "Segundos analíticos" lib. 1, cap. 1); las cuales, o son también derivadas, o son "aquellos principios comunes que llamamos axiomas de donde salen primitivamente las demostraciones" (Aristóteles [s IVa ac] "Segundos analíticos, lib. 1, cap. 10), ya que no es posible hacer un *regresus* al infinito en una demostración; y 2) toda demostración o deducción racional se hace a base de silogismos, donde "el silogismo es una enunciación, en la que, una vez sentadas ciertas proposiciones, se concluye necesariamente en otra proposición diferente, sólo por el hecho de haber sido aquéllas asentadas" (Aristóteles [s IVa ac] "Primeros analíticos", lib. 1, cap. 1). Es decir, que todo conocimiento que no sea inmediato o intuitivo, sino que sea el resultado de razonar en el sentido de buscar o dar razones, es un conocimiento que en el fondo está construído deductivamente a partir de ciertos axiomas. De tal suerte que las ciencias, en tanto que son conocimientos racionales, o bien, de hecho se presentan de una forma ordenada a partir de sus axiomas, o bien, pueden ordenarse, es decir axiomatizarse. Por otro lado, la disciplina que trata de los silogismos o principios de la deducción es la lógica que como se sabe fue inagurada formalmente por el mismo Aristóteles; aunque, por supuesto, antes de él ya se trabajaba en algunas áreas en forma axiomática. Platón piensa que esto último era el caso, por ejemplo, de las matemáticas:

> Los que se ocupan de geometría, aritmética y otros estudios similares dan por supuestos los números, las figuras... y otras cosas emparentadas; las adoptan como hipótesis, procediendo como si las conocieran, y no se creen en el deber de dar ninguna explicación ni a sí mismos ni a los demás con respecto a lo que consideran como evidente para todos, y de ahí es de donde parten las sucesivas y consecuentes deducciones que los llevan finalmente a aquello que quieren demostrar (Platón [s IV ac] lib. VI, cap. XX).

O, con otras palabras, tal como lo expusieron Platón y Aristóteles, los primeros principios o axiomas de los que se parte para demostrar cualquier cosa en matemáticas y ciencias afines no es algo que esté en discusión al interior de esas disciplinas.

Inspirado, según Proclo, por las ideas platónicas, pero según indagaciones recientes de Jones (Jones [1985]), más bien inspirado por la obra aristotélica, Euclides realizó la primera gran obra de axiomatización."En la composición de sus *Elementos*, Euclides coordinó –nos dice Proclo– muchos trabajos de Eudoxo, perfeccionó los de Teeteto y demostró irrefutablemente los que sus predecesores habían presentado de una manera difusa" (Proclo [s V] p. 1157). Según Proclo, el teorema de Pitágoras, por ejemplo, ya era conocido por los egipcios para algunos casos particulares; y el mérito de Pitágoras mismo consistió en probarlo universalmente "de un modo inmaterial e intelectual" (Proclo [s V] p. 1154), es decir, según entiendo, derivandolo de principios comunes o conocimientos generales anteriores. Y como, hasta donde puede saberse con la escasa información existente, de igual forma trabajaron los grandes geómetras griegos como Eudoxo y Teeteto, el mérito de Euclides consistió basicamente en explicitar todos aquellos "conocimientos generales" que los geómetras como Pitágoras, Eudoxo y Teeteto habían usado o podían haber usado en sus demostraciones.

Euclides llevó a cabo dicho trabajo definiendo con cierta precisión entidades, como el punto, la línea y el ángulo recto, sobre las cuales explicitó determinados axiomas por encima de los cuales, como dice Platón, no puede elevarse el matemático, como es el caso de la igualdad de todos los ángulos rectos:

> 1) punto es lo que no tiene partes, 2) línea es la longitud sin anchura,... 10) si una recta trazada sobre otra forma con ella dos ángulos contiguos iguales, a cada uno de ellos lo llamamos recto;... –después, da algunos postulados o axiomas como:– 4) todos los ángulos rectos son iguales;... –posteriormente, enumera algunas nociones comunes o leyes lógicas como:– 1) cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí (Euclides [s III ac] lib. I, pp. 1 y 2);

y, finalmente, desprende de ahí una serie de proposiciones, la mayoría de las cuales ya se conocían como válidas en geometría, como es el caso de la proposición 47 del libro I que comúnmente se llama teorema de Pitágoras. Así pues, lo importante del trabajo de Euclides, como bien lo resalta Proclo, no es el hecho de descubrir algunas leyes de la geometría, sino el de desprender las ya existentes de una cuantas definiciones, axiomas y leyes lógicas, confiriéndole así, unidad y orden a toda la geometría. Por ejemplo, si examinamos la demostración de Euclides del teorema de Pitágoras, podemos observar que llega a él con razonamientos como el siguiente: si A y B son entidades que cumplen la definición de lo que es un ángulo recto, entonces A será igual a B por el axioma 4; y si por otro lado, A es igual a C, entonces B será igual a C por la ley lógica 1, etcétera. En resumen, podemos decir que el trabajo de Euclides es una reconstrucción de la geometría en el sentido que la vuelve a construir; y una reconstrucción no aspira a copiar todas las pruebas, sino más bien, aspira sólo a probar lo mismo a partir de un conjunto mínimo de principios o conocimientos generales. De hecho, por ejemplo, la prueba euclideana del teorema de Pitágoras, basada en axiomas sobre equivalencias, no reproduce, hasta donde es posible constatarlo, la de Pitágoras mismo.

Inspirados directa o indirectamente en el trabajo de Euclides (como veremos con más detalle en 3.4), Arquímedes construyó axiomáticamente la ciencia de los cuerpos pesados (Arquímedes [s III ac]), Galileo la ciencia del movimiento uniforme y acelerado (Galileo

[1638]), Newton la ciencia de la mecánica clásica (Newton [1687]); y, de igual forma, Frege y Dedekind pretendían reconstruir la aritmética a partir de ciertas definiciones de los números naturales. Sin embargo, con todo y ser sumamente meritorios esos trabajos, contenían algunas imprecisiones e, incluso, en el caso de Frege, contenían, como vimos, una contradicción. En tiempos de Frege y Dedekind, el trabajo de Hilbert sentó las bases de la axiomática moderna pretendiendo corregir los errores que se habían detectado en las axiomatizaciones que habían seguido el modelo de Euclides.

> Es mi opinión que todas las dificultades apuntadas –dice Hilbert con relación a los trabajos reconstructivos de la aritmética– pueden ser superadas y podemos dar un fundamento riguroso y completamente satisfactorio de la noción de número, y de hecho por el método que yo llamaría axiomático...
>
> La aritmética se considera parte de la lógica y las nociones lógicas tradicionales están usualmente presupuestas cuando se trata de fundamentar la aritmética... pero en la exposición de las leyes de la lógica siempre se usan ciertas nociones aritméticas fundamentales como, por ejemplo, la noción de conjunto..; y entonces nos encontramos dando vueltas en círculos, y por eso es necesario desarrollar simultáneamente las leyes de la lógica y de la aritmética (Hilbert [1904], pp. 131 y 132 de Heijenoort [1967]).

De hecho, como bien apunta Hilbert, hay nociones (por ejemplo, particularmente la de conjunto) que se han ubicado a veces del lado de la lógica, y a veces del lado de la matemática. La confusión surge, creo yo, cuando se olvida que el término 'conjunto' se ha usado, como Frege, para referirse a entidades que pueden tener leyes lógicas ya que se las concibe ligadas indisolublemente a los conceptos; y, por otra parte, también se ha usado, como Cantor, para referirse a entidades puramente matemáticas. De cualquier forma, Hilbert propone una metodología en la que se explicitan no sólo los axiomas de los que se parte, sino también todas las leyes lógicas que se usan en la deducción, como de hecho ya lo había pretendido hacer el mismo Euclides. Para empezar, Hilbert piensa que no pueden definirse explícitamente todos los términos técnicos, y propone que sobre los símbolos primitivos empleados sólo se admita lo que se dice sobre ellos en los axiomas; y, además, para él los axiomas no tienen que ser nociones comunes o evidentes, como sí tenían que serlo para la axiomática aristotélica. Para Hilbert, todas las proposiciones que constituyen la matemática pueden traducirse a un lenguaje lógico reconstruyéndose las pruebas matemáticas como simples inferencias lógicas que tienen la forma de un *modus ponens* (ver Hilbert [1925], p. 381 de Heijenoort [1967]); aunque, por supuesto, utilizando también todo lo que modernamente se denominan las leyes de la lógica proposicional y cuantificacional. De esa forma se dice que la matemática se ha formalizado, constituyendo un sistema formal. En resumen, según Hilbert, un sistema formal está compuesto de lo siguiente: a) un conjunto de símbolos; b) ciertas reglas para formar oraciones con ellos; c) determinados axiomas; y d) las reglas lógicas de transformación de oraciones, es decir, las que sirven para deducir ciertas oraciones a partir de otras.

Podemos decir que un sistema formalizado, por ejemplo el de la aritmética, es una reconstrucción de ella a partir de ciertos axiomas; aunque, teóricamente, esos axiomas podrían intercambiar su lugar por algunos teoremas convenientes de la misma aritmética; de tal suerte que los axiomas, en la versión hilbertiana, no sólo no son nociones evidentes como antiguamente se creía y exigía, sino que ni siquiera son insustituibles; además, sobre los símbolos de un sistema formal, los axiomas sólo enuncian ciertas propiedades sintácticas y, no teniendo una semántica definida, de hecho, pueden interpretarse teóricamente en múltiples dominios, coincidiendo en ese punto con las teorías matemáticas vistas a la manera de Dedekind, Benacerraf y los estructuralistas en general. De esa forma, Peano había propuesto en su *Formulario* cinco axiomas que definían implícitamente los números naturales; pero, como muestra Russell por medio de ejemplos (ver Russell [1919] cap. 1, pp. 5 a 10 y, aquí mismo, los incisos 2.2 y 2.5), esos axiomas pueden interpretarse de múltiples formas; y, de ese modo, cuando se pretende definir el cero, en realidad se define sólo el primer elemento de cualquier progresión.

No obstante, Hilbert esperaba que una ventaja de formalizar una teoría, ya que se habrían explicitado los axiomas y las reglas de inferencia con toda precisión, era que así podríamos examinar su consistencia y su completud, es decir que no contuviera una contradicción y que de todos los enunciados que pudieran expresarse en el lenguaje de la teoría pudiera decirse si son o bien verdaderos o bien falsos. Justamente Hilbert, en su famosa ponencia sobre los problemas futuros de la matemática (Hilbert [1900] prob. II), había propuesto el de la prueba de la no contradicción de los axiomas de la aritmética como uno de los problemas más apremiantes y que él mismo intentó atacar con su propuesta de los sistemas formales. El programa hilbertiano parecía ser útil sobre todo en ese sentido, pero a partir de los trabajos de Gödel y Church se empiezan a conocer las limitaciones de los sistemas formales. Gödel lo expresa con las siguientes palabras:

> Un sistema formal se llama completo si cada sentencia expresable con sus signos es formalmente decidible a partir de sus axiomas, es decir, si para cada tal sentencia α existe una secuencia finita de inferencias acordes con las reglas del cálculo lógico que empieza con algunos axiomas y termina con α o con la sentencia no α. He mostrado que no hay ningún sistema formal con un número finito de axiomas que sea completo ni siquiera con respecto a las sentencias aritméticas... De lo dicho se sigue en especial que hay sentencias aritméticas indecidibles en todos los sistemas formales conocidos de la matemática, por ejemplo, en *Principia Mathematica*..., en la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel y en la de von Neumann, y en los sistemas formales de la escuela de Hilbert... Y para los sistemas formales anteriormente mencionados el enunciado de la consistencia del sistema es una sentencia indecidible en ese sistema (Gödel [1931], pp. 99 y 100 de Gödel [1981]).

Posteriormente se han hecho algunas precisiones y ampliaciones al trabajo de Gödel por parte de Church, Rosser y otros, pero para nuestros propósitos actuales básicamente queda en pie que hay una limitación inherente al método formal para sistematizar toda la aritmética y que, como dicen Nagel y Newman,

> esas conclusiones muestran también que hay un número infinito de enunciados aritméticos verdaderos que no pueden deducirse formalmente de ningún conjunto determinado de axiomas de acuerdo con un conjunto cerrado de reglas de inferencia; de lo que se sigue que un planteamiento axiomático de la teoría de los números no puede agotar el dominio de la verdad aritmética, y que la demostración matemática no coincide con la explotación de un método axiomático formalizado (Nagel y Newman [1931] p. 114).

Ahora bien, como lo he sugerido, el trabajo de abordar axiomáticamente un área, por ejemplo la de los cuerpos extensos mediante la geometría, creo que puede verse, como lo precisaré más en en inciso 4.3, también como una reconstrucción de esa área. Según eso, podemos decir que a partir de los triángulos empíricos, el geómetra los aborda axiomáticamente aislando algunos elementos de los que supone están compuestos como el punto y la linea, los define a la manera, por ejemplo, de Euclides, y a partir de esos y otros elementos definidos vuelve a contruir los triángulos de una manera ideal. Naturalmente, los triángulos empíricos se asemejan sólo aproximadamente, como dice Platón, a los triángulos ideales o matemáticos. De hecho, otro tanto hacen con sus respectivas áreas Arquímedes, Galileo y Newton como lo ejemplificaremos en el inciso 3.4; todos ellos comienzan aislando ciertos elementos como el peso, el movimiento uniforme, etcétera; definiéndolos en términos conocidos; y volviendo a construir después idealmente los dominios empíricos de los que partieron. Pues bien, al parecer, de forma análoga, un sistema formal de la aritmética vuelve a construir la aritmética misma; de tal suerte que, la aritmética se asemeja sólo aproximadamente al sistema formal que viene siendo, en ese sentido, una idealización de la aritmética. De hecho, la formalización de la aritmética consiste también en aislar algunos elementos que suponemos la constituyen, en definirlos con precisión, y en tratar de volver a construir la aritmética a partir de los elementos definidos. Y así como los triángulos empíricos son siempre muchas otras cosas que los triángulos matemáticos no recogen; de forma similar, el resultado de Gödel parece indicar que la aritmética es algo más que su formalización no recoge.

En todo sistema axiomático, una vez que se han dado las definiciones y los axiomas, las reglas de inferencia indican lo que está permitido hacer con los axiomas y las definiciones para construir dicho sistema. Las reglas de inferencia constituyen la lógica que se maneja y no siempre es la misma. Aristóteles fue el primer gran sistematizador de algunas reglas de inferencia que hoy se encuentran dentro del cálculo de predicados. La lógica permaneció casi intacta hasta 1847 cuando George Boole publicó sus *Leyes del pensamiento* en las cuales sistematizó la lógica aristotélica mediante relaciones entre conjuntos, construyendo así un sistema equivalente a la lógica de predicados con relaciones. Por esa misma época, De Morgan, Jevons, Peirce y sobre todo Frege en su *Conceptografía*, sentaron las bases de lo que hoy se denomina "lógica matemática". Dentro de ella, la lógica llamada estándar que reúne todos esos trabajos está basada en el manejo de una cuantas conectivas: $\downarrow$, $\forall$ y $\exists$. Para construir la aritmética se incluyen también $=$ y $\in$; aunque se discute si éstas deben estar en la lógica o no. Lo cierto es que dentro de la lógica matemática estándar la mayoría de las leyes de inferencia se pueden obtener a partir de ciertas reglas primitivas y las definiciones de estas conectivas o sus equivalentes; y si se cambian lar reglas primitivas o las definiciones de esas conectivas se pueden generar lógicas no estandar: por ejemplo, se puede definir '$\neg$' como lo hacen los intuicionistas de tal manera que no signifique que necesariamente $P \vee \neg P$; algo análogo puede hacerse para las otras conectivas; e, incluso, se pueden definir nuevas conectivas aún con 3 o más valores veritativos como lo han hecho, por ejemplo, Lukasiewicz, Peirce y Destouches, entre otros. En resumen, la lógica usada en un sistema formal es algo así como el "andamiaje" que se ha elegido para construir el sistema formal. Hoy día se conocen "andamiajes" más o menos confiables para ciertos propósitos y por ello se eligen. El caso del sistema formal de la aritmética de Frege es muy peculiar porque el autor, no encontrando ningún "andamiaje" apropiado para sus propósitos, construyó el suyo propio en la *Conceptografía*.

De acuerdo con todo lo anterior, un sistema axiomático que usa determinada lógica, podemos verlo como una construcción o reconstrucción ideal de algún dominio, que podría interpretarse también en muchos otros dominios idealizando así esos dominios en sus rasgos que se consideran relevantes. Por supuesto, podemos estar equivocados en interpretar un dominio mediante cierto sistema axiomático. Por ejemplo, la lógica estándar pretende ser una reconstrucción de la lógica que usan los matemáticos, y esto puede ser más o menos exacto. Es en ese sentido, que Quine sostiene que:

> La lógica está tan expuesta a revisión como la mecánica o la teoría de la relatividad. Tanto cuando se hace lógica cuanto cuando se hace física –de una manera axiomática, diría yo– el objetivo es siempre el mismo: obtener (dicho con palabras de Newton) un sistema del mundo lo más liso y lo más sencillo que sea posible y que encaje limpiamente por sus bordes con las observaciones (Quine [1970] cap. 7, p. 100).

Debido en parte a las limitaciones de los sistemas formales, algunos filósofos de la matemática han sostenido que para comprender realmente la matemática, o alguna de sus partes como los números, se requiere de un trabajo diferente a las reconstrucciones. Por ejemplo, Putnam ha sostenido que:

> El trabajo que se necesita en la filosofía de las matemáticas es filosófico y no técnico: investigaciones en la fundamentación filosófica del intuicionismo, en historia de las matemáticas que arroje luz en los procesos por los cuales las matemáticas surgen y se desarrollan, en los razonamientos plausibles en matemáticas, y para toda la filosofía de la ciencia y de las matemáticas debe revisarse la filosofía del lenguaje, la discusión del realismo y la teoría de la referencia (Putnam [1979] p. 395).

Por supuesto, todas estas tareas son sumamente importantes y, por cierto, Frege mismo, por ejemplo, abordó algunas de ellas. Sin embargo, no creo que el trabajo técnico de reconstrucción, o fundamentación como le llama Putnam, carezca de utilidad para los problemas filosóficos. Según lo he sugerido, al hacer un trabajo reconstructivo de la matemática se está creando una imagen idealizada de ella que nos sugiere verla de cierta forma. Ciertamente la simplifica, pero de hecho, creo que es innegable que eso hace cualquier teoría sobre cualquier cosa. La filosofía entendida, a la manera de Wittgenstein, como un trabajo elucidatorio del lenguaje puede y, de hecho, ha utilizado varios métodos; uno de los cuales, creo yo, puede ser el axiomático. Claro está, que podría discutirse la conveniencia de un método para determinado objetivo. Pero esto no debe hacerse *a priori*; más bien, como decía Ulises Moulines a este respecto, aprovechando un pasaje bíblico, "por sus frutos los conoceréis" (Moulines [1982] p. 40); y, en efecto, creo que es irrefutable que el trabajo reconstructivo ha generado un conocimiento más preciso de algunos aspectos de las matemáticas. Lo ideal sería, tal vez, una complementación de los diferentes métodos entendidos como puntos de vista a partir de los cuales se puede examinar la matemática. Justamente, inspirado por ideas como las de Putnam, en el siguiente capítulo revisaré algunos enfoques no reconstructivos sobre las matemáticas y el número.

Volvamos a la pregunta que nos hicimos en este inciso, ¿qué prueba sobre el número una reconstrucción como la fregeana? Por lo visto, prueba que la definición dada bajo los supuestos expresados en los axiomas implica, de acuerdo a la lógica que se maneja, ciertas propiedades y relaciones para lo así definido que reproducen de una manera ideal las propiedades estructurales de los números, así como su estrecha relación con los conceptos en general. Por ejemplo, en la prueba que presentamos al inicio de este inciso, Frege muestra que los números 0 y 1, definidos tal como él lo hace, se comportan como los números con los que trabaja la aritmética siendo el 1 el sucesor inmediato del 0 en la serie de los números naturales, pero además muestra que sus números pueden verse asociados a ciertos conceptos específicos al valerse de estos conceptos para realizar la prueba de las propiedades aritméticas.

CAPITULO 3

IDEAS EMPIRISTAS POSTFREGEANAS SOBRE LAS MATEMATICAS Y LOS NUMEROS

3.1 El problema de si los números son o no algo puramente estructural o puramente matemático.

Las definiciones de los números de Frege, Russell y Cantor, al igual que las de Peano y Dedekind, tienen como referente los números de la aritmética: pretenden dar una caracterización necesaria y suficiente para englobar a todos los números de la aritmética y sólo a ellos. Pero, qué podemos decir que son dichos números. Frege los define como "conjuntos" de conceptos; Russell, como clases de clases; Cantor, como conceptos (o, más bien evitando su sicologismo, como conjuntos) obtenidos a partir de conjuntos; Dedekind los define como "cortaduras"; y Peano, los presenta mediante sus axiomas, al igual que Dedekind, como lugares en una serie. Sin importar las diferencias, todos ellos presentan pinturas o imágenes axiomatizadas (según lo expusimos en 2.6 y lo desarrollaremos más en 4.3) de un mismo referente. En ese sentido, no podríamos decir que los números aritméticos *son* lo que ellos construyen axiomáticamante; sino, en todo caso, que los números de la aritmética *pueden verse* como ellos los presentan. De tal suerte que, habría que distinguir entre los números de la aritmética, que son a los que quieren referirse las autores mencionados, y las pinturas de esos números en términos de "conjuntos de conceptos", "cortaduras", etcétera. Sobre esto hablaremos más ampliamente en 4.4; pero, por el momento, será suficiente con marcar la distinción mencionada.

Por otro lado, las definiciones de Frege, Russell y Cantor dicen (como traté de mostrarlo en 1.4 y 2.4) básicamante lo mismo sobre dichos referentes; aunque lo dicen con diferentes términos. Todos ellos se refieren a los números de la aritmética no sólo en su aspecto estructural, sino también en tanto que pueden vincularse a determinados conceptos; y, sobre ellos sostienen que son objetos específicos definibles en términos de conjuntos y conceptos. En ese sentido, sus definiciones tienen el mismo *sentido*, en tanto que tiene el mismo valor cognoscitivo; pero se presentan como pinturas realizadas con diferentes materiales. Mientras que Peano y Dedekind definen los números de la aritmética únicamante en términos estructurales. Ambos grupos pretenden hablar sólo de los números de la aritmética; pero, el segundo grupo sostiene que dichos números son sólo elementos de estructuras abstractas, y el primer grupo sostiene que son algo *más*. Lo cual implica que Dedekind y Peano piensan que los números aritméticos son explicables sólo por las relaciones que tienen unos con otros; mientras que Frege, Russell y Cantor piensan que los números aritméticos no son explicables sólo por las relaciones que tienen entre sí, sino también por las relaciones que tienen con algo extramatemático como pueden ser los conceptos. Estos últimos estarían diciendo algo análogo a decir, por ejemplo, que el retrato de una persona no es explicable sólo por la combinación de formas y colores, sino que para entenderlo cabalmente debemos tomar en cuenta que pretende reflejar algo diferente de él mismo, es decir, la persona en cuestión.

Al observar la diferencia entre los dos *sentidos* de esas definiciones nos damos cuenta que gira alrededor de hasta qué punto por 'número aritmético' entendemos algo exclusivamente estructural, o algo que rebase las estructuras; y ésto nos enfrenta a la cuestión de ¿qué es lo estructural, y qué es lo matemático? Por supuesto, la pregunta por lo matemático o por las matemáticas en sí rebasa la presente investigación; y por ello no pretendo caracterizarlo aquí de una forma exhaustiva, ni mucho menos. No obstante, ya me he visto precisado antes, sobre todo en el inciso 2.6, a dar algunas ideas de lo qué estoy entendiendo aquí por 'matemáticas', y para poder proseguir esta indagación sobre el número considero conveniente precisar aún más mi postura en este asunto.

La pregunta por las matemáticas ha sido contestada desde diferentes ángulos; pero, para la cuestión que nos ocupa, considero relevante examinar ahora algunas respuestas de corte empirista por representar una postura que puede arrojar luz desde fuera de las matemáticas, y por detenerse particularmente en las relaciones entre lo matemático y lo no matemático. Por supuesto, nos interesa sobre todo esa parte de las matemáticas que llamamos aritmética; pero al tratar de caracterizar ésta como una parte de las matemáticas, nos vemos obligados a dar también una caracterización de las matemáticas en general. Esta caracterización debería al menos poder responder a la pregunta acerca de qué tipo de conocimiento son las matemáticas, si tiene o no objetos específicos, y si los tiene, si el matemático los descubre, los inventa o los postula, y si sus métodos son lógicos, intuitivos, experimentales o una combinación de ellos. Al parecer, las respuestas dadas a estas preguntas permiten obtener una caracterización más o menos aceptable; ya que de hecho, las diferencias en las respuestas a ellas nos dan varios elementos que nos ayudarán a tener un panorama general de las más famosas escuelas que se han dado en la filosofía de las matemáticas: platonismo, intuicionismo, formalismo, logicismo, convencionalismo y empirismo. No es mi intención detenerme ahora a examinar estas escuelas, ya que esto se escapa de los límites que nos hemos propuesto. Sin embargo, en los capítulos anteriores me he referido ya, aunque sea de forma lateral, al platonismo, al formalismo y al logicismo; y en lo que sigue me detendré un poco en algunas posturas convencionalistas y empiristas, dejando sólo de lado la ciertamente interesante postura intuicionista. Claro está, que esta clasificación de posturas sobre la matemática tiene los vicios de toda clasificación: olvida las diferencias al interior de cada escuela, y es posible que haya posturas que pertenezcan a más de una escuela, o tal vez a ninguna de las nombradas; tal es el caso, por ejemplo, del *cuasi-empirismo* de Quine, y del *modalismo* de Putnam (para ambos ver, por ejemplo, Putnam [1979]). Así pues, debemos tomar con sumo cuidado esas etiquetas y aclarar en cada caso qué estamos entendiendo por cada una de ellas; por eso, he preferido referirme aquí más bien al pensamiento de tal o cual autor en particular.

Así pues, en el presente capítulo examinaré brevemente la visión sobre las matemáticas y los números de Wittgenstein por ser, en cierto sentido, una continuación de las teorías de Frege y Russell, y en otro sentido, ser un fuerte crítico de las mismas. Además, Wittgenstein propone una visión figurativa de las matemáticas y particularmente de los números que los presenta como figuras de algo más. Esta idea refuerza la postura de Frege, Russell y Cantor de que los números no son explicables por sí mismos y sin tomar en cuenta el papel que juegan en el mundo extrametemático. Examinaré, también, a tres autores que me parecen representativos de la postura empirista postfregeana y particularmente sugestivos como elementos de solución para definir lo matemático en relación con lo no matemático desde tres angulos diferentes: Frechet, por presentar el punto de vista de un matemático relevante como tal, que se ha detenido a reflexionar filosóficamente sobre su trabajo; Lakatos, por presentar el punto de vista de un filósofo de la ciencia que intenta aplicar algunos de los resultados actuales de su disciplina al examen de la ciencia matemática; y Kitcher, por haber desarrollado más sistemáticamente un análisis conceptual e histórico de los procesos por los cuales las matemáticas surgen y se desarrollan, como por cierto lo había propuesto Putnam (ver Putnam [1967]). Además, Frechet, de forma semejante a las figuras o pinturas de Wittgenstein, propone ver las matemáticas y los números como esquematizaciones ideales de algo más. Lakatos refuerza nuestra propuesta de ver los trabajos de reconstrucción de la aritmética como imágenes ideales de la aritmética misma; y sugiere que las reconstrucciones axiomáticas de la aritmética son construcciones teóricas que, en tanto que pretenden explicar la aritmética, son refutables por ésta. Kitcher, por su parte, habla de la aritmética, al igual que Frechet, como una idealización de lo empírico. Por todo ello, estos autores, aunados a los análisis que hemos hecho de los trabajos de Frege, Russell, Cantor y Dedekind, entre otros, aportan elementos que permiten distinguir varios usos del término 'número': a) para referirse a los números aritméticos, b) para referirse a imágenes o pinturas axiomáticas de los números aritméticos y c) para referirse a aquello extramatemático de lo cual los números aritméticos serían esquematizaciones ideales. Esto lo desarrollaré más apliamante en 4.4; pero baste, por el momento, sugerir la posibilidad de esta distinción.

3.2. La teoría figurativa de Wittgenstein.

El pensamiento sobre las matemáticas de Wittgentein tiene, como el resto de su trabajo, dos etapas más o menos definidas. La primera etapa está expresada en el *Tractatus* ; y la segunda, sobre todo en su obra *Remarks on the Foundation of Mathematics* publicada póstumamente. Wittgenstein comienza su obra filosófica influenciado sobre todo por la "gran obra de Frege –como lo aclaró él mismo– y los escritos de... Bertrand Russell" (Wittgenstein [1918] pról.). En el *Tractatus* expuso sus primeros pensamientos; y posteriormente, en lucha incluso con esos primeros pensamientos, y a veces bajo el aguijón de nuevas lecturas o discusiones, profundizó en varios campos filosóficos anotando sus ideas en libretas que corregía y ordenaba continuamente, y que a su muerte han sido editadas bajo los títulos de *Philosophical Investigations, Zettel* y *Remarks on the Foundations of Mathematics*, entre otros. Este aspecto del trabajo de Wittgenstein me parece importante destacarlo porque es un reflejo de su concepción de la filosofía como un trabajo esencialmente aclaratorio. "La filosofía –dice desde un principio, y lo sostiene, al parecer, a través de toda su obra– no es una teoría, sino una actividad. Una obra filosófica consiste esencialmente en elucidaciones" (Wittgenstein [1918] ver. 4.112). Al parecer, lo que fue modificando Wittgenstein a través de su obra, como trataré de exponerlo en seguida, fue la forma de realizar las elucidaciones. De una elucidación de la estructura lógica, pasó a una elucidación del papel que juegan las palabras en la actividad de las comunidades que las usan. Desde ese punto de vista, las etapas de su pensamiento pueden verse como momentos aclaratorios, o si se quiere, como aclaraciones desde diferentes ángulos. De hecho, es así como analizaremos el *Tractatus* y los *Remarks* acerca de lo que son las matemáticas y, particularmente, los números.

En el *Tractatus* Wittgentein sostuvo que:

> La matemática es un método lógico. Las proposiciones de la matemática son ecuaciones, y, por consiguiente, pseudo-proposiciones. Las proposiciones matemáticas no expresan ningún pensamiento...utilizamos las proposiciones matemáticas *sólo* para inferir de proposiciones que no pertenecen a la matemática, otras proposiciones, las cuales, igualmente, no pertenecen a las matemáticas (Wittgenstein [1918] vers. 6.2 a 6.211).

Lo cual está claramente influenciado por las tesis logicistas de Frege y Russell que Wittgenstein desarrolló, precisó y modificó en algunos puntos.

Para Wittgenstein una proposición es la pintura de un hecho de los que conforman el mundo; "los hechos atómicos –los concibe a la manera humeana como– independientes unos de otros" (Wittgenstein [1918] ver. 2.061); y el mundo, para él, son todos los hechos. "La lógica –dice, por otra parte,– trata de toda posibilidad, y todas las posibilidades son sus hechos" (Wittgenstein [1918] ver. 2.0121); es decir, la lógica muestra el espacio de posibilidades en el cual los hechos se dan. Así pues, al parecer, su lógica está fijada por su ontología general; ya que si el mundo está compuesto de hechos independientes, lo posible es que se dé un hecho o que no se dé, que se den dos hechos simultánea o subsecuentemente, etcétera. De ahí que, las proposiciones P y Q, al ser pinturas de los hechos, puedan combinarse también sólo de forma que o bien P, o bien *noP*, *P y Q*, *P si sólo si Q*, etcétera. De esa forma, inferir, o deducir lógicamente, significa aplicar a ciertas proposiciones particulares, o podríamos decir, a ciertos hechos particulares, lo que vale para todas; es decir, que o bien P, o bien *noP*, etcétera. En ese sentido, como dice Wittgenstein, la lógica no dice nada del mundo, sino que sólo muestra los límites de lo que puede ser.

Las matemáticas, para Wittgenstein, son un método lógico y por lo tanto no dicen nada del mundo y sólo muestran un espacio de posibilidades. Así como la lógica trabaja con tautologías, "lo esencial del método matemático consiste en trabajar con ecuaciones" (Wittgenstein [1918] ver. 6.2341). Las ecuaciones se expresan mediante igualdades, y las igualdades son definiciones a la manera de Frege y Russell, mediante las cuales se estipula un mismo significado para los símbolos que están de uno y otro lado del signo de igualdad y, por lo tanto, permiten que se pueda sustituir uno en lugar del otro.

> 'a = b' significa que el signo a es reemplazable por el signo b... Expresiones de la forma "a = b" son, pues, tan sólo recursos de la representación: no dicen nada sobre el significado de los signos a y b... El método por el cual la matemática obtiene sus ecuaciones es el método de sustitución. Pues las ecuaciones expresan la sustitutibidad de dos expresiones, y nosotros procedemos de un número dado de ecuaciones, a otras nuevas ecuaciones sustituyendo las expresiones por otras de acuerdo con las ecuaciones (Wittgenstein [1918] vers. 4.241, 4.242 y 6.24).

Pero, ¿de qué forma la matemática muestra un espacio de posibilidades? Lo que iguala el signo '=' no pueden ser hechos del mundo; ya que "el hecho atómico es una combinación de objetos (entidades, cosas)" (Wittgenstein [1918] ver. 2.01), "decir de dos cosas que son idénticas es un sinsentido, y decir de una que es idéntica consigo misma es no decir nada" (Wittgenstein [1918] ver. 5.5303). Así pues, lo que se está igualando con '=' es sólo el significado de dos expresiones. Wittgenstein afirmó que "la ecuación caracteriza sólo el punto de vista desde el cual considero las dos expresiones, es decir, el punto de vista de su igualdad de significado" (Wittgenstein [1918] ver. 6.2323).

Con respecto a los números, Wittgenstein afirmó que "en lógica no hay números. No hay números privilegiados,... no hay un estar uno al lado del otro, no puede darse ninguna clasificación... –Pero, por otro lado– en lógica todos los números deben ser susceptibles de justificación" (Wittgenstein [1918] vers. 5.453 y 5.454). La lógica nos dice que $\neg(P \land \neg P)$, $(P \land Q) \rightarrow P$, etcétera; pero nunca que $P + Q = R$, si P, Q y R son hechos atómicos. Los hechos que conforman el mundo son independientes; mientras que los números no lo son ya que, por ejemplo, $1 + 1 = 2$. Además, el 2, el 3, el 4, etc. pueden obtenerse a partir de hacer operaciones sólo con el 1; y, de esa forma, el 1 es un número privilegiado. Pero, según Wittgenstein, en los hechos no hay uno privilegiado a partir del cual podamos obtener los otros hechos que conforman el mundo. De tal suerte que los números no son, ni hechos porque no son independientes, ni tampoco forman parte de las posibilidades más generales en las que se dan los hechos. O, con otras palabras, los hechos, sólo en tanto que hechos independientes, no se dan numerados; aunque, podrían numerarse ya que, según Wittgesntein, podemos justificar los números a partir de la lógica.

Ahora bien, "el concepto de número no es sino aquello que es común a todos los números... El número es el exponente de una operación" (Wittgenstein [1918] vers. 6.021 y 6.022) y se expresa por una variable. A su vez, "la operación es aquello que hay que hacer con una proposición para obtener otra de ella" (Wittgenstein [1918] ver. 5.23). El exponente indica cuántas veces hay que hacer una misma operación: 2^3 significa $2 \times 2 \times 2$;

y $\phi^2(x)$ significa $\phi\ \phi\ (x)$. En ese sentido, el número es sólo un indicador de la repetición de cierta actividad efectuada sobre las proposiciones; es decir, de la aplicación sucesiva de una operación. Lo cual nos permite entender porqué en *Zettel* Wittgenstein afirmó que "los números no son fundamentales para la matemática" (Wittgenstein [1967] ver. 706), ya que en vez de $\phi^2(x)$, siempre podríamos trabajar con $\phi\phi(x)$. Además, cuando esa actividad es efectuada a su vez sobre un número, está basada también, como trataré de mostrarlo en el párrafo siguiente, en las operaciones con proposiciones.

Para el Wittgenstein del *Tractatus*, el mundo está compuesto de hechos atómicos independientes; unos de los cuales son proposiciones o pinturas de otros hechos, ya que también "la pintura es un hecho" (Wittgenstein [1918] ver. 2.141). Un mismo hecho, digamos a, puede tener varias pinturas o proposiciones, digamos P, P' y P''. La lógica presenta el campo de las posibilidades más generales que corresponden a todos los hechos, al parecer, sólo por la circunstancia de ser hechos independientes; es decir que o bien a, o bien no a, o bien P o bien $\neg P$, etcétera. La matemática, por su parte, presenta un subcampo de posibilidades que corresponde sólo a las proposiciones, y está basado, al parecer, en la posibilidad general de todos los hechos de tener varias pinturas de sí mismos; lo cual, se muestra en las matemáticas cuando ésta dice que si $P = P'$ y $P' = P''$, entonces $P = P''$. Los números, al ser exponentes de las operaciones con las proposiciones son, al parecer, parte de las posibilidades matemáticas en las que se dan las proposiciones. Si, por ejemplo, $\phi = \neg$, podemos tener ϕP, $\phi\phi P$, etcétera; y si $\phi^2 P = \phi\phi P$, entonces $2^2 = 2x2 = 4$ está basada también en las operaciones con proposiciones ya que $(\phi^2)^2 P = \phi^2\phi^2 P = \phi\phi\phi\phi P = \phi^4 P$ y por lo cual $2^2 = 2x2 = 4$.

En conclusión, para el llamado primer Wittgenstein, los números forman parte de las posibilidades de las proposiciones; y así como la lógica está fijada por la ontología general, la matemática lo está por la ontología de las proposiciones, es decir, por la circunstancia de que P y P' pueden representar al mismo hecho a. Con respecto a los números, "dada la forma general según la cual se construye una proposición, se da con ella también la forma general según la cual se puede obtener de una proposición otra proposición por medio de una operación" (Wittgenstein [1918] ver. 6.002). Pero ¿de qué forma se construye una proposición? según la teoría pictórica, ésta se construye de forma que represente efectivamente el hecho que pretende dibujar. Así pues, las leyes matemáticas de las operaciones con proposiciones que se expresan mediante números, como también todas las otras leyes matemáticas, están fijadas en última instancia por la ontología de los hechos no proposicionales. En ese sentido, los números, como las matemáticas en general, dependen sólo de los hechos en general. Esto nos permite entender por qué, al parecer, Wittgenstein afirmó que "la teoría de clases es superflua en matemáticas; la generalidad de la que tenemos necesidad en matemáticas no es la accidental" (Wittgenstein [1918] ver. 6.0031); es decir, según entiendo, que accidentalmente podamos agrupar en conjuntos los hechos y particularmente las proposiciones que esencialmente son independientes.

Ahora bien, en la "Introducción" que Russell escribió para el *Tractatus* dice:

> Hay algunos aspectos, según mi opinión, en los que la teoría de Wittgenstein necesita un mayor desarrollo teórico. Esto puede aplicarse, concretamente, a su teoría del número (6.02 ss), la cual, tal como está, sólo puede aplicarse a los números finitos. Ninguna lógica puede considerarse satisfecha hasta que se haya demostrado que es capaz de poder ser aplicada a los números transfinitos. Sin embargo, no creo que haya nada en el sistema de Wittgenstein que le impida llenar esta laguna (Russell [1918], p. 26 de Wittgenstein [1918]).

De hecho, aquí sólo he hablado de los números naturales a pesar de que el mismo Wittgenstein se refirió también a los números racionales, irracionales e, incluso, transfinitos (ver Wittgenstein [1967b] apen. II, incs. 6 a 9); no obstante, por ser los naturales los números básicos, por el momento será suficiente con referirnos a ellos únicamente.

Ciertamente la visión del primer Wittgenstein sobre las matemáticas es muy atractiva porque ofrece algo más que las teorías reconstructivas que presenté anteriormente; pero igualmente, a mi juicio, tiene ciertos problemas. En el *Tractatus* presenta una visión sistemática de las matemáticas, y las ubica al interior de una ontología general. Eso permite hablar de las matemáticas con algún grado de precisión; pero también expone esa visión a las críticas que se le hacen a toda división más o menos tajante. Por ejemplo, lo que dice Wittgenstein acerca de que las clases son superfluas en matemáticas está sujeto a las siguientes objeciones: a) hoy día la teoría de conjuntos es un área más de las matemáticas independientemente de su papel en los fundamentos, que es tal vez a lo que quería referirse Wittgenstein con lo de superflua; y b) si los hechos atómicos pueden agruparse formando conjuntos, tendría que ser, según el mismo Wittgenstein, porque en ellos ya está esa posibilidad; y esto desdibuja la división tajante que hace entre posibilidades generales de los hechos (o lógica), las posibilidades generales de los hechos proposicionales (o matemáticas), y otras posibilidades accidentales como puede ser la de agrupación. Al menos, a partir de lo dicho, no es clara esta división de posibilidades, ya que en última instancia todas las posibilidades están igualmente dadas en los hechos atómicos. Lo cierto es que, por esas u otras razones, Wittgenstein abandonó en su segunda época esas divisiones tajantes, y presentó una visión sobre las matemáticas menos precisa pero también menos problemática –sabiendo, quizás, que "son filosóficamente peligrosas, y frecuentemente perniciosas, las distinciones conceptuales tajantes que pretenden determinar supuestas diferencias absolutas en el objeto o dominio de estudio" (Moulines [1982] p. 32).

En los *Remarks on the Foundations of Mathematics*, Wittgenstein, en lucha con sus propios primeros pensamientos y en parte motivado por la lectura colectiva con los fundadores del círculo de Viena de *Foundations of Mathematics* de F. Ramsey, presenta un nuevo enfoque sobre las matemáticas. Igualmente, como en el *Tractatus*, hace un trabajo de elucidación del lenguaje matemático; pero ahora analizando, no la lógica del lenguaje, sino más bien su uso. "Nosotros –dice, por ejemplo,– usamos la expresión "los pasos son determinados por la fórmula..." –Y se pregunta:– ¿cómo la usamos?" (Wittgenstein [1967b] ver. I-1). Por otro lado, al parecer, sigue pensando que las matemáticas se componen de ecuaciones; pero a éstas, al igual que la lógica, ahora las ve como reglas. "La proposición matemática tiene la dignidad de una regla; y así, hay mucha verdad en decir que la matemática es lógica: sus movimientos están en el interior de las reglas de nuestro lenguaje" (Wittgenstein [1967b] ver. I-164). En el *Tractatus* había sostenido que la lógica, al igual que la matemática, permite inferir; y lo sigue afirmando en los *Remarks*; pero, ahora, en términos de reglas. "Debemos tener claro –dice– en qué consiste realmente inferir. Podríamos decir tal vez que consiste en el paso de una afirmación a otra, por mediación de una tercera... Pero en realidad consiste en el paso de una proposición a otra mediante una regla"(Wittgenstein [1967b] ver. I-6). Así pues, la visión sobre las matemáticas que presenta Wittgenstein en los *Remarks* difiere de la del *Tractatus*, al parecer, básicamente en que analizando el uso y no la lógica del lenguaje matemático, las igualdades, como las tautologías de la lógica, se ven como reglas del lenguaje que sirven para inferir.

Ahora bien, ¿en qué consisten esas reglas y cómo llegamos a ellas? Wittgenstein afirmó que "el matemático es un inventor, no un descubridor... El matemático está siempre inventando nuevas formas de descripción" (Wittgenstein [1967b] vers. I-166 y 167). Con respecto al lenguaje, sostuvo en esta segunda etapa que "lo que los seres humanos dicen es verdadero y falso; y ellos se ponen de acuerdo en el lenguaje que usan. Eso no es acuerdo en opiniones sino en forma de vida"(Wittgenstein [1974] ver. 241). Y, en otro lugar afirma: "este lenguaje se basa, como cualquier otro, en la convención" (Wittgenstein [1974], ver. 355). De tal suerte que, al parecer, el lenguaje sería, al menos en parte, un producto de la convención social; y la lógica y las matemáticas, formarían parte de las reglas convencionales del lenguaje.

Creo que esto podemos entenderlo mejor si observamos que las reglas de todos los juegos dicen lo que se puede hacer y lo que no, es decir, son indicaciones o descripciones de lo posible. En los juegos ordinarios, los seres humanos se ponen de acuerdo en las reglas que aceptan, es decir en el comportamiento permitido; y considero que es por eso que Wittgenstein afirma que los acuerdos son con respecto a la "forma de vida". Pues bién, al parecer, de forma análoga las ecuaciones describen los pasos que pueden seguirse para ciertas propósitos: "$y = x^2$" me dice, por ejemplo, que para encontrar un valor de la y, puedo multiplicar por sí mismo cualquier valor que le asigne a la x. Y, de hecho, creo que en verdad es así como utilizan en gran parte los matemáticos esa ecuación.

Eso ha llevado a Dummett a interpretar el segundo Wittgenstein como un convencionalista absoluto. "Para él -dice Dummett de Wittgenstein- la necesidad lógica es siempre la expresión directa de una convención lingüística" (Dummett [1959], p. 170 y en Pitcher [1966], p. 425). En esa misma línea de interpretación del segundo Wittgenstein se encuentra también Klenk en su *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*. En esta obra le atribuye a Wittgenstein el afirmar que la matemática provee una estructura lingüística y de inferencia en la que podemos expresar hechos acerca del mundo y derivar. Las proposiciones matemáticas son prescriptivas, es decir, constituyen un marco dentro del cual trabajamos y que debido a su utilidad no estamos dispuestos a cambiar (ver Klenk [1976]). Según eso, Wittgenstein estaría sosteniendo que las matemáticas son convenciones, al parecer, arbitrarias.

Sin embargo, como lo sostuvo Stroud, realmente se adopta una convención sólo "si hay alternativas que podríamos adoptar en su lugar" (Sroud [1965], p. 484 de Pitcher [1966]). Pero, como correctamante sostiene Putnam,

> debemos aceptar que al fin y al cabo hay un hecho matemático que no es simplemente nuestra estipulación (ni aún nuestra "forma de vida"). Por ejemplo, la consistencia de nuestras estipulaciones prácticas no es ella misma precisamente otra estipulación o práctica (Putnam [1979] p. 388).

No obstante, sostener, como Wittgenstein lo hizo, que la matemática son un sistema de reglas para la manipulación del lenguaje y que las reglas son acuerdos en forma de vida, no implica que sean arbitrarias. En primer lugar, las pinturas mediante las cuales se expresan las reglas deben ser pinturas idóneas que efectivamente transmitan lo que se quiere; y eso es controlado, según entiendo, por el uso mismo que se hace de ellas. En segundo lugar, las reglas, si las vemos como las de todo juego, tienen que sujetarse a las condiciones objetivas en las que se dan los juegos, es decir, por ejemplo, a que hay jugadores, metas, etcétera. Ciertamante podemos tener dos o más pinturas de un mismo hecho; pero no arbitrariamante, sino sólo cuando efectivamante retraten el hecho en cuestión. En ese sentido, el espacio de posibilidades que muestra la matemática es, al parecer, el conjunto de posibilidades del lenguaje por la circunstancia de que pueden darse dos o más pinturas diferentes de un mismo hecho, siempre y cuando dichas pinturas retraten efectivamente el mismo hecho. Ese es justamente el caso cuando podríamos escribir P = P'; donde P y P' son dos proposiciones o pinturas diferentes de un mismo hecho. En ese sentido, es hasta cierto punto convencional que usemos P o P' para representar el mismo hecho a; pero dicha convención, dada la teoría pictórica, no es una convención absoluta o arbitraria.

Por otro lado, el lenguaje es sólo un medio; "no juzgamos la pintura –refiriéndose a los números tomados como pinturas–, juzgamos por medio de la pintura; no la investigamos, la usamos para investigar algo más" (Wittgenstein [1967b] ver. III-12). Hasta donde alcanzo a ver, es por ese carácter mediador del lenguaje que Klenk afirmó, tratando de interpretar los *Remarks*, que un sistema matemático no queda definido mediante sus axiomas y reglas ya que depende igualmente de cómo se usan sus reglas (Klenk [1976]), es decir, depende de lo que está más allá de las pinturas mismas; o, con otras palabras, para comprender las matemáticas no basta entender las pinturas mismas, sino que habría que ver el papel que juegan en las actividades de las comunidades que las usan. Según esto, al parecer, otra vez como en el primer Wittgenstein, hay algo que no puede ser expresado en el lenguaje, es decir en las pinturas: "debemos, pues, por así decirlo, tirar la escalera después de haber subido" (Wittgestein [1918] ver. 6.54).

Ahora bien, con respecto a los números, Wittgenstein afirmó en los *Remarks*:

> Los números (no hablo de los numerales) son figuras (modelos) y la aritmética nos habla de las propiedades de esas figuras. Pero la dificultad aquí es que esas propiedades de las figuras son posibilidades...y esas posibilidades emergen como posibilidades físicas y sicológicas (de separación, arreglo, etc.). Pero el papel de las figuras es solamente como pinturas que son usadas en tal o cual sentido. Lo que damos no son propiedades de las figuras sino transformaciones de figuras presentadas como paradigmas de alguna clase u otra (Wittgenstein [1967b] ver. III-11).

Por lo cual podemos ver que la teoría pictórica del *Tractatus* abarca aquí también el terreno de las matemáticas; éstas, al igual que la lógica, siguen considerandose como posibilidades; y los números, como parte de esas posibilidades. Sin embargo, ahora las posibilidades se presentan por medio de pinturas que transmiten reglas de acción. Las matemáticas serían un sistema de reglas que permiten hacer inferencias y se presenta por medio de modelos; y los números serían figuras cuyas propiedades expresan posibilidades de arreglos, separaciones, ordenaciones y cosas semejantes.

En los *Remarks*, las matemáticas, como la lógica, Wittgenstein las presenta como sistemas de reglas para el manejo del lenguaje que se expresan mediante pinturas concebidas como modelos paradigmáticos que intentan transmitir acuerdos en formas de vida; siendo, los números, las pinturas con las que se intenta transmitir acuerdos sobre arreglos, ordenaciones y quién sabe qué más. Sin embargo, esta visión es sólo una guía que sugiere una forma de comprender las matemáticas, más bien que una visión acabada de los que son las matemáticas o los números. Esto me parece positivo, pero nos deja una enorme trabajo histórico y tal vez también sociológico casi diría yo imposible de cumplir cabalmente; ya que para comprender bien, por ejemplo, los números, tendríamos que indagar cúales son esos acuerdos en formas de vida que intentan transmitir y que, por cierto, han perdurado, al parecer, desde las primeras culturas que los utilizaron.

3.3. Reflexión filosófica del matemático Maurice Frechet.

Maurice Frechet, destacado matemático contemporáneo, dictó en 1925 en Berna una conferencia que llamó "La desaxiomatización de la ciencia". Las ideas ahí expuestas las desarrolla sobre todo, que yo sepa, en el capítulo II de la recopilación de algunos de sus trabajos titulada *Las Matemáticas y lo Concreto*. En este texto comienza por preguntarse si "la matemática se reduce a una ciencia deductiva" (Frechet [1958] p. 21). De hecho, gran parte del trabajo matemático consiste en deducir; y eso ha hecho pensar a múltiples matemáticos, incluso destacados, que no hay más que eso. Ciertamente ha habido en la matemática períodos históricos puramente deductivos; pero, si eso fuera todo, "la matemática no sería sino un juego del espíritu sin ningún alcance" (Frechet [1958] p. 22), y no podríamos explicar, argumenta Frechet, el origen de gran parte de las matemáticas en problemas técnicos y prácticos.

Así pues, frente a la concepción deductiva, o puramente axiomática como la llama, Frechet sostiene que las matemáticas en realidad se componen de cuatro pasos:

> La teoría deductiva es unicamente la parte central de las matemáticas; está precedida de una *síntesis inductiva*, según la venturosa expresión de Destouches, y luego de una etapa axiomática en la que de los resultados de esta *síntesis inductiva* se desprende el conjunto de definiciones y axiomas que sirven de punto de partida a la teoría deductiva. En fin, esta última será seguida de un conjunto de verificaciones experimentales;... -y, de esa forma, se conforman- representaciones esquemáticas cada ves más simplificadas del mundo sensible" (Frechet [1958] pp. 23 y 26).

Por ejemplo, al buscar originalmente la longitud de una circunferencia, podemos suponer que lo que se buscaba era algo así como determinar la longitud de una placa de hierro destinada a formar una rueda cuando esa placa todavía no había sido curvada, o bien, cualquier otro propósito análogo. De ahí que la noción experimental de la longitud de una circunferencia esté dada generalmente en términos de la longitud de un objeto deformable pero no elástico que se puede aplicar exactamente sobre el contorno de una circunferencia. Sin embargo, en los libros de geometría, dicha longitud se define en términos muy diferentes: se define como el límite de la longitud total de un polígono regular convexo inscrito en la circunferencia considerada, cuando la longitud de su lado tiende hacia cero.

> A una definición impuesta por la experiencia, se sustituye una definición lógica que es una combinación de nociones fundamentales... -producto de una *síntesis inductiva*- de observaciones experimentales almacenadas inconscientemente en el espíritu, -ya que, por ejemplo,- el geómetra sabía ya que cuando aplicaba una cuerda sobre ruedas ligeramente irregulares, pero del mismo diámetro, encontraba más o menos la misma longitud" (Frechet [1958] pp. 13 y 14).

De hecho, ambos resultados coinciden más o menos, si se usa la noción experimental o si se usa la definición matemática, y, en base a ello, los geómetras han llegado a su definición abstracta en busca de la precisión y la generalidad que les permitan ir conformando una representación esquemática del dominio en cuestión.

Otro ejemplo, en ese sentido, lo constituye la definición de la tangente a una curva. La definición matemática dice que la tangente a una curva es el límite de la recta que une a un punto fijo M de una curva con un punto M' de la misma curva, cuando M' tiende hacia M.

> Sin embargo, la noción de tangente no es en modo alguno una pura creación del espíritu. Son consideraciones de orden físico las que han llevado a introducirla: la cuerda enrollada previamente alrededor de una polea se aleja, cuando se le tiende, según la tangente. El suelo sobre el cual se desplaza un carruaje es tangente a las ruedas de éste (Frechet [1958] p. 15).

De hecho, la noción intuitiva podría introducirse diciendo que la tangente a un objeto sólido curvo en uno de sus puntos exteriores es la posición de una regla cuando toca con uno de sus costados dicho punto. Esta noción es directamente aplicable en la práctica, pero es inapropiada para un matemático, ya que habría que modificarla complicándola cuando la curva no fuera convexa. De ahí que para la matemática, al buscar precisión y generalidad, es más conveniente la definición abstracta en términos de límites

De igual forma, las nociones fundamentales del cálculo, el álgebra, la aritmética y la lógica misma deben su origen y gran parte de su desarrollo, afirma Frechet, a los problemas prácticos. Por ejemplo:

> Las dos nociones fundamentales del análisis matemático: las de integral y diferencial... nadie se habría interesado en ellas en un comienso, si no hubiera visto que la integral sirve para calcular el área y la diferencial para determinar la tangente (Frechet [1958], p. 27).

Y con respecto a la aritmética, Frechet afirma:

> ¿Acaso un entero, por su representación en cifras, no es la expresión esquemática de una característica común a varias colecciones, exactamente como el peso (o mejor la masa), es una característica común a ciertos cuerpos, por lo demás muy diferentes?.. Y ¿la adición no es sino la traducción esquemática reducida al aspecto numérico, de la operación concreta que consiste en reunir dos colecciones? (Frechet [1958] p. 28).

Lo cual, traducido a los términos fregeanos, está diciendo que los números aritméticos son expresiones esquemáticas de ciertos conceptos que permiten agrupar extensiones ya que son una forma de agrupar colecciones. Sin tomar en cuenta lo de "expresión esquemática" y haciendo los ajustes conceptuales necesarios, eso sería equivalente (como lo sugerimos en 1.4) a decir, con Frege, que el número es una extensión que agrupa conceptos; y también sería equivalente a decir, con Russell, que el número es un conjunto de conjuntos. De hecho, los diagramas, como los que presenté en 1.4, serían iguales estructuralmente; de cualquier forma, en cualquiera de las tres versiones, cada número, por ejemplo el 2, "atraparía" o permitiría "atrapar" los mismos conjuntos, colecciones o extensiones de dos elementos. Sin embargo, para Frechet los números no son conceptos bajo los cuales caen extensiones, sino expresiones esquemáticas de éstos. Viendo así las cosas, habría algo fuera de los números aritméticos y de la matemática misma (los conceptos mencionados) que le darían su sentido pleno a dichos números y sin lo cual éstos no se entenderían cabalmente. En ese sentido, habría que distinguir entre los conceptos que permiten agrupar extensiones (que podríamos llamar, tal vez, "números naturales"), y las expresiones esquemáticas de ellos (que serían los números aritméticos).

Por último, en relación a la lógica, Frechet sostiene que también la aceptamos porque la experiencia nos ha mostrado que es correcta.

> No estamos lejos, por consiguiente, de concluir que la lógica misma es un producto de nuestra experiencia, que ha sido precedido por una síntesis inductiva y que si es absolutamente legítimo y, aún, muy útil establecer una axiomática, ésta, como las de las otras ciencias, no puede obtenerse sino como una esquematización esencialmente revisable de las reglas prácticas de razonamiento (Frechet [1958] p. 32).

En resumen, para Frechet,

> Las nociones fundamentales de todas las ramas de las matemáticas surgieron de la experiencia. Ellas constituyen una representación aproximada de ciertas observaciones, representación que largas meditaciones han hecho escoger bastante hábilmente para que, por medio del método deductivo, se llegue a una representación igualmente aproximada, pero que concierne a un número infinitamente más basto de observaciones (Frechet [1958] p. 31);

Aunque, por supuesto, esto no implica que Frechet niegue la existencia de nociones matemáticas con otros origenes; incluso, él mismo explícitamente enlista una serie de causas puramente internas a la matemática, como son la búsqueda de generalidad, la precisión, la simplicidad y la consistencia; sin olvidar, claro está, que estas causas son para Frechet complementarias y están siempre supeditadas a las causas de naturaleza empírica. Ahora bien, si las definiciones abstractas de la longitud de una circunferencia, o la de tangente a una curva, como muchas otras que se podrían ejemplificar, no tienen por objeto sino la previsión de la evaluación física de esa longitud, o esa tangente, deduciéndolas de ciertas hipótesis generales, "¿no debemos entonces –pregunta Frechet– verificar experimentalmente las consecuencias matemáticas de esas hipótesis?" (Frechet [1958] p. 14). Así pues, por todo ello, podemos decir que para Frechet las matemáticas buscan hacer representaciones esquemáticas del mundo: efectúan una inducción de cierto dominio empírico, a partir de la cual expresan ese dominio de una forma sintética y esquemática por medio de algunos axiomas y definiciones; y, si de esta forma idealizada, en efecto, lo expresan acertadamente, las deducciones matemáticas que se hagan a partir de esos axiomas y definiciones deberán corresponder igualmente con ese dominio, invalidándose la matemática, en caso contrario.

La postura empírista de Frechet es sumamente interesante para explicar por qué funcionan las matemáticas en el manejo del mundo empírico; también porque reflejan y afinan en algunos puntos las posturas empiristas clásicas de Aristóteles y J. S. Mill; porque presenta el punto de vista de alguien, como Frechet, que ha trabajado amplia y exitosamente en varios campos de la matemática pura; y, sobre todo, porque creo que algunas de sus ideas pueden rescatarse como veremos en el capítulo 4; aunque, en realidad, no se le ha dado, que yo sepa, la atención debida en los medios filosóficos y matemáticos. No obstante, de hecho, los "esquemas" de Frechet son en cierto sentido semejantes a las "pinturas" de Wittgenstein, en tanto que también pretenden ser reflejo de algo; en otro sentido, son semejantes a las "estructuras" de los estructuralistas como los Bourbaki, en tanto que los "esquemas" de Frechet también están formados deductivamente a partir de axiomas y definiciones; y, al menos con respecto a los números que nos interesan particularmente aquí, no hay, como lo apuntamos brevemente, una franca contradicicón con las versiónes no empiristas de Frege y Russell.

Por supuesto, lo dicho en el párrafo anterior no implica que la visión de Frechet no tenga problemas; algunos de los cuales, por cierto, fueron expuestos inmediatamente por Enriques, Bernays, Lukasiewicz y Gonseth en la discusión que siguió a la primera presentación de algunas de estas ideas por parte de Frechet en 1938. Al respecto, ciertamente, como dice Bernays, en todo caso la noción de experiencia que maneja Frechet tendría que precisarse y seguramente ampliarse para comprender no sólo la experiencia física, sino también la espiritual o mental. Enriques, a mi juicio, acertadamente está en contra de la verificación empírica que propone Frechet para las teorías matemáticas, ya que una verificación semejante haría intervenir a la vez concepciones matemáticas e hipótesis sobre lo real; de tal manera que si se fracasa, no podríamos atribuir el error exclusivamente a las concepciones matemáticas. En todo caso habría que precisar más dicho proceso de verificación como veremos a partir de la postura falsacionista más desarrollada de Lakatos en el inciso 3.4. Por su parte, Lukasiewicz, adoptado una postura al parecer fregeana, se niega a entrar en la discusión debido a que los problemas planteados por Frechet le parece que no son de orden lógico, sino sicológico, y se declara incompetente en esta área; además, no ve cómo se puede pasar válidamente del plano sicológico al de las matemáticas, o de la lógica. Sin embargo, habría que precisar lo que se está entendiendo por 'sicológico'; ya que, de entrada, me parece perfectamente legítima la línea de Frechet para explicar el uso de las matemáticas en la experiencia, como trataré de mostrarlo a partir de las ciencias empíricas en el inciso 4.2. No obstante, quisiera añadir un problema más a la postura empirista que presenta Frechet: se trata de la distinción entre matemáticas y ciencias empíricas matematizadas. Vistas las cosas como Frechet, al parecer, no habría ninguna distinción entre ambas disciplinas; ya que, al menos de acuerdo a los resultados de la concepción estructural en filosofía de la ciencia, "una teoría empírica es –en el fondo– una teoría matemática que surgió con la pretensión de reproducir idealmente cierto dominio empírico" (Avila [1987] p. 6); lo cual es exactamente lo que dice Frechet de las matemáticas. Pero creo que hay una diferencia más o menos clara, al menos en grado de abstracción, entre la estática de Arquímedes o la dinámica de Galileo y la aritmética cantoriana de los números transfinitos. Las dos primera teorías, aún cuando están explicitamente matematizadas por sus autores (como lo veremos con algún detalle en 4.2), hablan aunque sea indirectamante de fenómenos empíricos; mientras que la teoría cantoriana (como lo vimos en 2.4) hablan de conjuntos que definitivamente no tienen correlatos empíricos; ya que

¿a qué podrían corresponder dentro del campo de lo empírico $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, etcétera? Hay, ciertamante, similitudes (como aquí mismo lo defenderé a partir de 4.1) entre las ciencias empíricas matemátizadas y las matemáticas puras; pero también hay diferencias, como la mencionada, y esto debería ser explicado en una buena caracterización de las matemáticas. De cualquier forma, creo que podemos concluir el análisis de la postura de Frechet con las palabras de Gonseth, presidente de la mesa de discusión aludida: "para conciliar estas divergencias nos resta realizar todavía un esfuerzo metódico considerable" (Frechet [1958] p. 61), una mínima parte del cual, por cierto, he pretendido realizar con el presente trabajo sobre el número.

3.4. La matemática y la filosofía de la ciencia en Imre Lakatos.

Lakatos, en su artículo "¿Un renacimiento del empirismo en la reciente filosofía de las matemáticas?", comienza por subrayar que frente a la concepción ortodoxa de que las matemáticas son *a priori*, tautológicas e infalibles, varios de los principales expertos en estudios fundacionistas han expresado opiniones que recuerdan la postura radical de Mill de identificar las matemáticas con las ciencias empíricas. Tal es el caso de afirmaciones de lógicos tan importantes como Russell, Fraenkel, Carnap, Quine, Church, Gödel, etcétera. Por ejemplo, de Gödel [1947] reproduce las siguientes palabras:

> Sin embargo, es concebible un grado de verificación mucho mayor... Pueden existir axiomas tan abundantes en sus consecuencias verificables que proporcionen tanta luz a un amplio campo y que ofrezcan métodos tan poderosos para resolver problemas (e incluso, en la medida de lo posible, para resolverlos constructivamente) que, sin que importe que sean intrínsecamente necesarios, deberían ser aceptados en el mismo sentido que lo es cualquier teoría física bien establecida (Lakatos [1978] pp. 26 y 27).

Tomando eso en cuenta, Lakatos propone una distinción conceptual que divide las teorías en general en *euclídeas* y *cuasi-empíricas*. Las *euclídeas* son sistemas deductivos en los cuales hay una inyección de verdad desde los axiomas hacia todo el sistema: los enunciados singulares (o teoremas especiales ubicados en la base) prueban su verdad si pueden deducirse de los axiomas; mientras que, por otro lado,

> el flujo lógico importante en las teorías *cuasi-empíricas* no es la transmisión de la verdad, sino más bien la transmisión de la falsedad, desde los teoremas especiales

ubicados en la base (enunciados básicos) hacia arriba, hasta el conjunto de axiomas (Lakatos [1978] p. 28).

Una teoría *cuasi-empírica* en ese sentido puede ser empírica o no empírica en el sentido usual. En general, una teoría se considera empírica si sus enunciados básicos son afirmaciones singulares cuya verdad se decide mediante experimentos científicos espacio-temporalmente determinados; mientras que una teoría *cuasi-empírica* podría tener enunciados básicos que no se refieran a nada empírico. En ese sentido, la distinción de Lakatos es anterior y más general a la distinción de empíricas y no empíricas, ya que divide las teorías sin importar que lo que fluya en los canales lógicos tenga que ver con lo empírico o no: en unas fluye la verdad (siempre hacia abajo), y en otras fluye la falsedad (siempre hacia arriba). Podemos decir que la división que establece Lakatos está centrada en si una teoría es refutable o no. Esta visión falsacionista refleja, como es bien sabido, la postura popperiana dentro de la filosofía de la ciencia. Sin embargo, no quisiera discutir aquí si ésta es una buena caracterización general de las ciencias comunmente llamadas empíricas, sino tan sólo, si es un buen camino para caracterizar las matemáticas en particular.

Ahora bien, según Lakatos, las matemáticas son *cuasi-empíricas* a pesar de que por mucho tiempo fueron consideradas como paradigmas de certeza y verdad ya que se las concebía como ejemplo típico de las teorías *euclídeas*. Sin embargo, los estudios fundacionistas, que pretendían establecer de una vez por todas la certidumbre de los métodos matemáticos, arrojaron la conclusión (como vimos en 2.6) de que una total reorganización euclideana de las matemáticas es imposible y, por consiguiente, que las matemáticas son más ricas que cualquiera de sus reconstrucciones o formalizaciones.

Así pues, en relación a los axiomas lógicos o conjuntísticos "resultó –dice Lakatos– que la evidencia crucial a favor de ellos era que la matemática clásica podía ser *explicada*, pero ciertamente no *probada* por dichos axiomas" (Lakatos [1978] p. 30); puesto que dichos axiomas no fijan condiciones que deberían cumplir las teorías informales para que puedan ser jusgadas por ellos, sino que tan sólo pretenden recoger, siempre conjeturalmente, lo esencial de dichas teorías informales. Una teoría *euclídea,* por supuesto si está correctamente armada, no puede ser refutada aún cuando sus axiomas sean sumamente sofisticados, ya que los enuncidos básicos no pueden cuestionar nunca los axiomas de los que derivan su verdad o su falsedad. Por otro lado, las reconstrucciones de la aritmética de Frege, Russell, Quine, etc. podrían ser refutadas porque no son construcciones arbitrarias sino que pretenden que de sus axiomas se obtengan verdades análogas a todas las verdades aritméticas sobre los números.

Con relación a las teorías *cuasi-empíricas,* Lakatos propone dos tipos de falsadores: 1) lógicos, es decir, que garantizen la consistencia al no derivarse de los axiomas enunciados de la forma $P \wedge \neg P$; y 2) heurísticos, es decir, enunciados matemáticos básicos que puedan servir como contraejemplos de las teorías formales. Sobre estos últimos, Lakatos sostuvo que,

> si insistimos que una teoría formal debería ser la formalización de alguna teoría informal, entonces puede decirse que la teoría formal está *refutada* si uno de sus teoremas es negado por el teorema correspondiente de la teoría informal (Lakatos [1978] p. 36);

es decir, que, siendo P' el enunciado de la teoría formal correspondiente al enunciado P de la teoría informal, en la teoría formal se llegue deductivamente al enunciado P', y en la teoría informal se pueda probar que no$P$.

No obstante, Lakatos vió claramente que no resulta fácil definir cuáles podrían ser concretamente los falsadores de las diferentes teorías matemáticas y que, de hecho, no toda teoría matemática está en igual peligro de una refutación heurística. Por ejemplo, piensa que la teoría de grupos casi no tiene peligro, en tanto que la teoría informal original fué remplazada por la teoría axiomática; de tal manera que, desapareciendo la teoría informal, no habría de dónde obtener los falsadores potenciales. También considera que hay problemas para encontrar falsadores de las teorías axiomáticas de conjuntos una vez que la teoría primitiva de conjuntos fué destruída por falsadores lógicos; de tal suerte que, sería difícil hablar de hechos en la teoría de conjuntos. Esto, por supuesto, si pensamos que la teoría de conjuntos informal es, por ejemplo, la teoría de Cantor (ver arriba, inciso 2.4) o la de Frege; pero, no sería así, si concebimos la existencia de los conjuntos como previa a toda matematización o formalización, como lo sugerimos en el inciso 2.6. Por otro lado, para la matemática informal, que Lakatos concibe también como teoría *cuasi-empírica*, no ve claramente si los falsadores potenciales serían empíricos, ideales o de otro tipo.

La concepción *cuasi-empírica* de las matemáticas que propone Lakastos me parece muy sugestiva. De hecho, en 2.6 he propuesto una manera de ver la reconstrucción fregeana de la aritmética, al igual que cualquier otra, como una pintura o imagen (en el sentido de Wittgenstein) que idealizando (en el sentido de Frechet) la aritmética nos sugiere verla de cierta forma, es decir, que nos la explica (en términos de Lakatos). Lakatos no se pronuncia por los posibles falsadores de la matemática informal, pero tomando la sugerencia de Frechet de que una teoría matemática es una idealización de algún dominio (empírico o no), habría más elementos para una posible refutación. Sin embargo, la cosa no es tan simple, ya que una teoría formal o una matematización de algún dominio, no son refutables en sí mismos por algún dominio. Si un dominio no concuerda con un sistema formal o matemático, lo que queda refutado es la aplicación de ese sistema formal o matemático a ese dominio; pero nunca el sistema formal o matemático en sí mismo. Un sistema formal o matemático no habla de ningún dominio específico, sino de las propias entidades que él mismo define. Por supuesto, encontrar la no aplicación de un sistema formal, o de una teoría matemática, a un dominio específico es importante; aunque, de hecho, sólo es posible si se encuentran los falsadores adecuados. De cualquier forma, a partir de 4.2 desarrollaré más esta observación para delimitar en 4.3 al menos un sentido en el que las matemáticas pueden verse como *cuasi-empíricas* en los términos de Lakatos.

3.5. La concepción histórica de Philip Kitcher.

Después de analizar en diversos artículos varios temas que reflejan una investigación conceptual e histórica sobre el conocimiento matemático, Kitcher presentó en 1984 su obra

La Naturaleza del Conocimiento Matemático en la cual expone sus conclusiones generales que afinó recientemente en su artículo "Naturalismo matemático" (Kitcher [1988]). En su libro (Kitcher [1984]) señala que está en contra del apriorismo de Frege y Hilbert y a favor de un empirismo como el de J. S. Mill y más recientemente W. V. Quine, Hilary Putnam e Imre Lakatos; concuerda con la afirmación de Quine de que los enunciados matemáticos son vulnerables a la desconfirmación empírica, y con la idea de Putnam de las inferencias *cuasi-empíricas*; pero, considera que ninguno de ellos ha desarrollado suficientemente sus ideas como para ofrecer una versión sistemática de nuestro conocimiento matemático; así pues, lo que se propone es salvar esa laguna apoyado sobre todo en las ideas de Quine, Putnam y algunas sugerencias de Mill.

Kitcher adopta las siguientes ideas como guías de su investigación: en primer lugar, sostiene que los matemáticos forman comunidades epistémicas que se desarrollan históricamente, de tal suerte que el conocimiento de una generación de matemáticos se obtiene como una extensión del conocimiento de las generaciones precedentes:

> En resumen, mi teoría del conocimiento matemático delinea el conocimiento de un individuo contemporáneo a través del conocimiento de sus maestros a través de una cadena de maestros precedentes, hasta el conocimiento perceptual adquirido por nuestros antecesores remotos (Kitcher [1984] p. 7).

En segundo lugar, afirma que "para entender el orden epistemológico de las matemáticas uno debe entender el orden histórico" (Kitcher [1984] p. 5); rechazando, así, las propuestas de filósofos de la ciencia que piensan que el orden histórico es irrelevante epistemologicamente.

Ahora bien, para defender la postura empirista del conocimiento matemático en contra de gran parte de los filósofos de la matemática que lo consideran como el prototipo del conocimiento *a priori*, Kitcher empieza por definir el conocimiento en general con las siguientes palabras: "X sabe que p si y sólo si p, y X cree que p, y la creencia de X de que p ha sido producida por un proceso que la garantiza" (Kitcher [1984] p. 17). La variante con respecto a la forma usual de entender el conocimiento simplemente como una creencia verdadera y justificada radica en la peculiar manera de entender la noción de *garantía*. Esta noción, de naturaleza sicológica, como bien lo resalta Kitcher, permite caraterizar lo que puede entenderse por un verdadero conocimiento, entendido éste como un conocimiento correctamente fundado; y lo diferencía de un seudo-conocimiento en el que por coincidencia se dé *p* y la creencia erróneamente justificada de X en que *p*[1]. De hecho, a Kitcher le parece tan central la noción de garantía, que mediante ella distingue las diferentes clases de conocimientos. Por ejemplo, para él un conocimiento básico se diferencía de un conocimiento derivado, en tanto que la garantía del primero no se apoya en otras creencias, mientras que la del segundo sí; y, por otro lado, el conocimiento empírico y el conocimiento *a priori* se caracterizan en base a que sus respectivas garantías sean empíricas o *a priori*.

Kitcher advierte atinadamente que si aceptamos la definición kantiana del conocimiento *a priori* que lo caracteriza como un conocimiento absolutamente independiente de toda experiencia, habrá que aclarar qué se está entendiendo por 'experiencia' y por 'absolutamente independiente'. Admitiendo receptores sensibles internos y externos, Kitcher entiende la experiencia de una persona en un momento particular como su estado sensorial en ese momento; y la secuencia total de experiencias que ha tenido X hasta el momento *t* es la vida de X en *t*. En esos términos, el conocimiento *a priori* lo caracteriza de la siguiente forma:

> 1) X sabe *apriori* que *p* si y sólo si X sabe que *p* y la creencia de X en *p* fué producida por un proceso que es una garantía *a priori* de ella.

---

[1] Edmund Gettier en "Is justified belief knowledge?" (1963) presentó algunos ejemplos en los cuales se cumplían las tres condiciones tradicionales del conocimiento y, sin embargo, en ellos no se podría decir que se daba un conocimiento auténtico debido a que la creencia en que *p* estaba erróneamente justificada con respecto a la verdad de *p*. A partir de esto, se ha propuesto una nueva condición que debe complir todo conocimiento para que se le considere como auténtico. Ernest Sosa en 1964 propuso la noción de "justificación objetiva"; K. Lehrer y D. T. Paxson en 1969 propusieron la noción de "incontrovertibilidad"; y, al parecer, recogiendo estas ideas, Kitcher propone su noción de "garantía".

2) α es una garantía *a priori* para la creencia de X en p si y sólo si α es un proceso tal que, dada una vida suficiente e para que X llegue a la creencia de que p:

(a) algún proceso del mismo tipo pudo producir en X una creencia de que p;

(b) si un proceso del mismo tipo fuera capaz de producir en X la creencia de que p, entonces sería una garantía para que X creyera en p;

(c) si un proceso del mismo tipo fuera capaz de producir en X la creencia de que p, entonces p.

De esa forma, si una persona sabe *a priori* que p, ella podría saber que p sin importar qué experiencias haya tenido. Un aspecto interesante que quisiera resaltar es la condición (c) de la garantía *a priori*. Según ella, si hay un proceso que pueda producir la creencia en X de que p, entonces p sería verdadro. La verdad de p depende de un proceso que pueda producir en un sujeto la creencia de que p. Tomando en cuenta el hecho de que pueden darse creencias de algunos sujetos producidas por procesos que no serían suficientes para producir la misma creencia en otros sujetos (lo cual haría la aprioridad relativa a los sujetos o, en todo caso, a las comunidades epistémicas) cabría preguntarse si, en este sentido, existen conocimientos *a priori* que sean universales y necesarios. Tradicionalmente se asocia el conocimiento *a priori* con el conocimiento universal y necesario, y el empírico con el conocimiento contingente (ver por ejemplo, Miró Quesada [1987], p. 113); aunque ya Kripke había propuesto un rompimiento de esas vinculaciones sugiriendo que pueden darse conocimientos contingentes *a priori* y necesarios *a posteriori* (ver Kripke [1981]).

El tipo de proceso que podría ser una garantía *a priori* para el conocimiento matemático, de acuerdo a los mismos filósofos que están de acuerdo con el apriorismo, sería la demostración o prueba interna. Para ello, según Kitcher, es necesario suponer que contamos con axiomas que son conocimientos básicos *a priori* y con reglas de inferencia que preservan la aprioridad, y suponer que todo enunciado estándar de la matemática es un axioma o se desprende de ellos mediante las reglas de inferencia (ver Kitcher [1984], p. 39).

Ahora bien, definidos así los términos, Kitcher procede a presentar dos clases de objeciones al apriorismo matemático: 1) referente a una inquietud que a veces han tenido los filósofos acerca de los programas fundacionistas y que consiste en el hecho de que algunos teoremas matemáticos sólo admiten pruebas extremadamente largas compatibles con el supuesto de que pueden ser conocidos *a priori*; y 2) referentes a que los procesos que tradicionalmente se han visto como garantías de las afirmaciones básicas *a priori* no son del todo garantías *a priori*.

Según Kitcher, pueden mencionarse pruebas matemáticas extremadamente largas como para que ningún matemático pueda seguirlas sin ninguna duda. A ese respecto, Miró Quesada menciona el ejemplo de la demostración del teorema de los cuatro colores para la cual, incluso, se han tenido que utilizar de manera esencial computadoras (Miró Quesada [1987] p. 111). Esto puede hacernos pensar que en la demostración hay errores; y, "así, podemos concluir que nuestro conocimiento de ese teorema es inevitablemente incierto y, por lo tanto, no es *a priori*" (Kitcher [1984] p. 40). Kitcher, por un conocimiento *a priori* entiende un conocimiento indubitable en tanto que cuenta con una prueba que garantiza su verdad. Miró Quesada protestó por la subjetividad de tal garantía; pero, de acuerdo a la definición de aprioridad de Kitcher, para que un teorema sea *a priori*, se requiere que pueda probarse satisfactoriamente.

En contra de la aprioricidad de los axiomas matemáticos, Kitcher aclara que dicha aprioricidad supondría que tenemos o podemos tener un conocimiento *a priori* de dichas verdades matemáticas; y esto, por medio de cierta intuición intelectual que nos provee de conocimientos indudables. Sin embargo, hay personas que dudan de los conocimientos adquiridos mediante esa supuesta intuición[2] y, por lo tanto, no podemos admitir, concluye Kitcher, que exista dicha intuición indubitable.

Con respecto a la crítica de Kitcher al apriorismo matemático considero que, en efecto, la prueba de Gödel ha mostrado, como lo mencionamos en el inciso 2.6, que no todo

[2] Este podría ser el caso, por ejemplo, de las intuiciones de Cantor sobre los números transfinitos que, como lo mencionamos en 2.4, fueron duramente atacadas por varios matemáticos de su tiempo.

el conocimiento matemático puede ordenarse axiomáticamente, y, de hecho, no tenemos pruebas rigurosas para todo lo que se acepta como una verdad matemática (tal es el caso, por ejemplo, de la consistencia de la aritmética); no obstante, encuentro en las críticas de Kitcher básicamente tres problemas que me parecen relevantes: 1) si identificamos lo *a priori* con lo indudable, no creo que pueda mencionarse ni dentro ni fuera de las matemáticas un conocimiento que no esté expuesto a las dudas de alguna persona y, por consiguiente, resulta irrelevante la división del conocimiento en empírico y *a priori*; 2) si hacemos descanzar el conocimiento o la aceptación de un enunciado matemático en una garantía subjetiva (aunque sea compartida por toda una comunidad epistémica), tendría que explicarse la, al menos aparente, universalidad y necesidad de enunciados como la ley conmutativa de la suma aritmética; y 3) cuando se pregunta por el tipo de garantía que requiere una proposición como el teorema de pitágoras, debe explicarse previamente cómo se está entendiendo dicho teorema: a) como enunciando una propiedad de ciertas entidades que se han definido en la geometría euclideana; o b) como enunciando propiedades (aunque sea de forma idealizada como lo vimos con Frechet en 3.3) de ciertas figuras físicas. Si lo entendemos en el primer sentido, se convierte en un enunciado universal, necesario e irrefutable aunque alguien pueda dudar en parte de su prueba: lo que diríamos, si esto llega a pasar, es que dicha persona no aceptó (o no entendió, etc) las definiciones, axiomas y reglas de inferencia adoptadas en la geometría euclideana. Si, en cambio, lo entendemos en el segundo sentido, se convierte en un enunciado sujeto a la refutación en el sentido de Lakatos que vimos en 3.4. En esos términos, si aclaramos el sentido que le está adjudicando cada autor a las afirmaciones matemáticas, creo que se desbaratarían (en el sentido de Wittgenstein) gran parte de los problemas sobre la naturaleza *a priori* o empírica del conocimiento matemático. Algo análogo será justamente lo que sugeriré en el capítulo 4 para "desbaratar" una parte de los problemas acerca de la naturaleza de los números.

Ahora bien, para presentar su visión empírica del conocimiento matemático, Kitcher se basa en tres ideas obvias para él:

> Primero, adquirimos originalmente mucho de nuestro conocimiento matemático de nuestros maestros, por cuya autoridad aceptamos no sólo principios básicos, sino también concepciones sobre la naturaleza del rasonamiento matemático. Segundo, algunos de estos conocimientos son adquiridos con la ayuda de la percepción. Nuestra primera educación es ayudada con el uso de varas y cuentas; más tarde, apelamos a diagramas. Tercero, las matemáticas tienen una larga historia. El origen del conocimiento matemático está ligado a las actividades prácticas de los egipcios y babilonios (o, tal vez, pueblos historicamente más remotos). Los posteriores desarrollos de las matemáticas han estado vinculados no lejos de esas prácticas, y sólo en raros momentos las matemáticas también parecen mostrar un interés en las propiedades físicas de los objetos ordinarios... Respondiendo a los problemas prácticos y a los métodos de los babilonios, los griegos desarrollaron teorías que podían sistematizar las soluciones obtenidas siempre.

Esto lo lleva a proponer que podemos adquirir de la observación y la manipulación de las cosas ordinarias una pequeña porción del conocimiento matemático, y que a partir de eso construímos las poderosas teorías generales que integran la matemática actual. De esa forma, se sugiere que el orden hisórico, en el que los individuos y las culturas en general han adquirido el conocimiento matemático, nos puede informar sobre la naturaleza misma de dicho conocimiento. Cuando un individuo aprende matemáticas, las aprende en parte de sus maestros y en parte ayudado de la percepción. Los maestros, a su vez, la aprenden de la misma forma y así hasta llegar a ciertos individuos que no teniendo maestros tuvieron que apoyarse en la pura observación. Los griegos fueron, dice Kitcher, los que mostraron que el conocimiento matemático podría desarrollarse en forma independiente creando así la matemática pura.

Como lo sostiene Kitcher, si podemos afirmar que tenemos conocimiento matemático, algunas afirmaciones matemáticas (por ejemplo, $2 + 2 = 4$ o $2 + 3 = 3 + 2$) deben ser verdaderas en agún sentido; y, si aceptamos la versión tarskiana de la verdad, dichas afirmaciones deben referirse a algo. Sin embargo, al parecer, no pueden referir a los hechos espacio-temporales ni a las actividades mentales, ya que su verdad no depende de éstos. De hecho, la verdad de "$2 + 2 = 4$" no depende de qué hechos físicos o mentales se den en el mundo. Así pues, una tesis interesante en ese sentido es la platónica, ya que sostiene que las afirmaciones matemáticas no se refieren al mundo empírico, sino a un mundo de objetos abstractos. Las afirmaciones matemáticas estarían enunciando propiedades de esos objetos abstractos. No obstante lo sugestivo de esta tesis, Kitcher advierte atinadamente que "las matemáticas son útiles para explicar y predecir el comportamiento de las cosas físicas ordinarias"(Kitcher [1984] p. 105); y, por lo tanto, la tesis platónica es insuficiente. Por otro lado, se ha sugerido también la tesis de que las matemáticas describen el aspecto estructural del mundo que se manifiesta en el comportamiento de los objetos que lo componen. Dentro se esta tesis, "la percepción puede verse como un proceso en el cual nuestra interacción causal con los objetos ordinarios nos lleva a discernir la estructura que ellos ejemplifican" (Kitcher [1984], p. 107). Esta vía de solución permite explicar la utilidad empírica de la matemática, pero ha permanecido más bien como una vaga sugerencia; por ello, Kitcher, que la comparte, se propuso desarrollar una versión más sistemática de la misma.

Podemos pensar, sugiere Kitcher, que un niño pequeño, cuando todavía no tiene maestros, tiene un primer contacto con las matemáticas de forma similar a los primeros hombres que historicamente empezaron a tener contacto con la matemática. Cuando un niño juega con pequeños cubos, segrega algunos, digamos 3, de ahí segrega 2 y luego uno para inspeccionarlos; después, puede volverlos a juntar en grupos de 2 o 3 cubos e, incluso, correlacionar los diferentes grupos entre sí. Este evento despliega una pequeña parte de la estructura matemática de la realidad, y puede servir para una primera aprehensión de la estructura matemática. Según Kitcher, siguendo a Mill,

> la aritmética trata acerca de las "permanentes posibilidades de manipulación". Más directamente, la aritmética describe ese aspecto estructural del mundo en virtud del cual somos capaces de segregar y recombinar objetos (Kitcher [1984] p. 108).

La idea de que la matemática trata de estructuras coincide, en ese punto, con la matemática moderna iniciada sobre todo con los trabajos del grupo Bourbaki. Según esto, la matemática puede verse como un conjunto de estructuras y nada más. Por otro lado, la idea de que la aritmética y en general la matemática trata de posibilidades coincide, en ese aspecto, con las ideas de Wittgenstein que analizamos en 3.2 .

No obstante, dadas nuestras limitaciones biológicas, las operaciones que podemos realizar con los objetos son limitadas; mientras que la aritmética trata, según Kitcher, de las operaciones posibles de un agente ideal. "Yo entiendo la aritmética como una *teoría idealizante*. La relación de la aritmética con las operciones actuales del hombre es paralela a la que se da entre las leyes de los gases ideales y los gases tales como existen en nuestro mundo" (Kitcher [1984] p. 109). De esa forma, puede explicarse que podamos manipular múltiples objetos, pero nunca infinitos objetos; mientras que, la matemática, como vimos con Cantor en 2.4, puede incluso distinguir diferentes clases de números transfinitos. Esta idea de ver la aritmética como una teoría idealizante coincide, en ese punto, con la sugerencia de Frechet de ver la matemática en general como una representación esquemática del mundo (ver arriba inciso 3.3). En ese sentido, "las verdades matemáticas son verdaderas en virtud de estipulaciones que establecemos especificando determinadas condiciones... que sólo son parcialmente satisfechas por las operaciones que realizamos" (Kitcher [1984], p. 110). Lo cual, por cierto, recuerda la idea platónica de que las figuras empíricas sólo se asemejan imperfectamente a las figuras de la geometría.

A semejanza de Frege, que basa su reconstrucción de la aritmética en las nociones lógicas de "concepto" y "relación", Kitcher basa su aritmética empirista en las nociones relativas a la manipulación de objetos de: *coleccionar* y *correlacionar*. Con ellas, presenta una versión axiomática con las siguientes nociones primitivas: operación unitaria (Ux) mediante la cual se segrega un sólo objeto x; la operción de sucesor (Sxy $=_{def}$ x sucede inmediatamente a y), la operación de adición (Axyz $=_{def}$ x = y + z), y la operación de igualar (Mxy $=_{def}$ x = y). Los axiomas que presenta garantizan que la operación de igualar sea reflexiva, simétrica y transitiva; garantizan la existencia, la univocidad de la operación unitaria, así como el hecho de que no sea sucesor de nada, ya que hace las veces del "1"; garantizan, también, que cada elemento tenga un único sucesor; que la adición tenga siempre un único resultado, así como el principio de inducción matemática. Con todo ello se reproducen, en otros términos, los axiomas de Peano.

"Podemos concebir –según Kitcher– los principios de la aritmética de Mill como definiciones implícitas de un *agente ideal*" (Kitcher [1984] p. 117). De acuerdo a eso, para Kitcher, los números son operaciones ideales con objetos: el "1" es separar un objeto, el "2" es coleccionar dos objetos, etcétera. Las leyes de los números expresan las posibilidades ideales de dichas operaciones. Estas operaciones y posibilidades presentan, como los axiomas de Peano, una estructura abstracta que puede interpretarse en múltiples dominios. Una de esas interpretaciones es la manipulación concreta que podemos hacer en determinado momento con ciertos objetos.

Esta manera de concebir los números distingue dos clases de "números": los numeros o manipulaciones con objetos de los agentes reales, y los números matemáticos que son manipulaciones con objetos de un agente ideal. Me parece sumamente sugestiva esta tesis de Kitcher porque permite explicar, por un lado, la naturaleza abstracta de la matemática y, por otro, su aplicación en el mundo empírico. Encuentro, sin embargo, un problema en su concepción de los números además, por supuesto, de las limitaciones que presenté en 2.6 a toda reconstrucción axiomática de la aritmética.

En el transcurso de la presente investigación sobre los números, hemos llegado a la conclusión de que cualquier cosa que ellos sean pueden verse siempre vinculados a conceptos específicos, y que eso permite individualizarlos como algo más que elementos arbitrarios de estructuras abstractas: Frege los presenta como agrupaciones de ciertos conceptos; Russell, como agrupaciones de agrupaciones formadas a partir de ciertos conceptos y Frechet, como representaciones esquemáticas de ciertos conceptos que permiten agrupar conjuntos. Para Kitcher, un número es una manipulación o interacción con objetos; pero creo que estaría de acuerdo en admitir, también, que de la interacción con el mundo en general surjan los conceptos. Ahora bien, pienso que la manipulación con "objetos específicos" presupone una primitiva conceptualización que posibilite considerarlos como tales. Así pues, en todo caso, los números vistos como manipulaciones, estarían asociados también a conceptos específicos, cosa que, al parecer, olvida Kitcher. De la manipulación con objetos, es natural pensar que surgán otros conceptos; pero, ¿cuáles serían éstos? ¿no sería más natural pensar, como lo sugeriré en 4.4, que esos "números" son los conceptos que sugen a partir de la manipulación con los objetos segregados o agrupados a partir de una primitiva manipulación?

De cualquier forma, si Kitcher persiste en sostener que esos "números" son actividades y no conceptos, tendría que explicar por qué de esas actividades no surgen conceptos; y, si surgen, ¿cuáles son? Además, según Kitcher, "las matemáticas consisten en teorías idealizadas de los modos en los que podemos operar con el mundo" (Kitcher [1984] p. 161); y las teorías, al ser constructos teóricos, se componen de conceptos, no de operaciones o de actividades prácticas ideales; en todo caso, se componen de conceptos mediante los cuales se describen operaciones o actividades prácticas ideales.

Por otro lado, para reforzar su visión empirista, Kitcher recurre, también, a una reconstrucción histórica del desarrollo matemático: apoyándose en Kuhn, sugiere una visión evolucionista de las comunidades científicas, pero adaptada a las matemáticas. En éstas, según Kitcher, se ha observado históricamente que las nuevas teorías que han surgido, a diferencia de lo que pasa en otras ciencias, en general no han refutado y ni siquiera desplazado las anteriores salvo algunas excepciones[3]; sino más bien, bajo el acicate de los problemas incluso internos con los que se enfrentan, las han afinado, desarrollado, generalizado o complementado en alguna medida. En ese sentido, "las matemáticas son acumulativas en un sentido que las ciencias naturales no lo son...–debido a la– importancia de las estipulaciones en matemáticas" (Kitcher [1984] p. 161). Lo cual, hasta donde sé, me parece cierto y digno de tomarse en cuenta.

Los matemáticos modernos, según Kitcher, empiezan a trabajar aceptando las leyes y definiciones de sus antecesores en un *regresus* de autoridades hasta el origen empírico

[3] Ver aquí mismo el inciso 2.2 para la noción de número.

de los conceptos matemáticos. No obstante, los ejemplos históricos que presenta distan mucho de llegar hasta el origen supuestamente empírico de los conceptos que se analizan. Naturalemente, esto se debe, sobre todo para áreas básicas como la aritmética que nos interesa particularmente aquí, al hecho de que sabemos realmente muy poco sobre su origen histórico. De hecho, creo que es innegable que el problema de saber dónde y cuándo se inició el uso de los números nos lleva atrás en el tiempo hasta los mismos albores de la historia y quizás más atrás (ver, por ejemplo, Kline [1972]). Por lo cual, tenemos que caer en una reconstrucción conjetural como la que presenta Kitcher, y alejarnos en el inicio crucial del conocimiento matemático de la pretendida reconstrucción histórica.

Así pues, tratando de evitar lo que le objeto a Kitcher; pero, por otro lado, aceptando varias de sus ideas, sobre todo, la idea de que la historia de las matemáticas puede aclararnos algunos aspectos importantes del conocimiento matemático, en el inciso 4.2 presentaré un análisis metodológico de algunos momentos paradigmáticos en los cuales han estado muy cerca las matemáticas y la experiencia. De esa forma, ciertamente no podríamos rastrear el origen del número; pero, al no tener que regresar tan lejos como Kitcher, considero que podríamos explorar con algo más de fundamento las posibilidades de una versión empirista de las matemáticas en general y de los números en particular.

CAPITULO 4

¿QUE PODRIAN SER LOS NUMEROS?

4.1. En consecuencia, ¿qué podemos decir de las matemáticas y los números?

Como he tratado de mostrar en los autores examinados, al parecer nadie sabe en definitiva lo que son las matemáticas ni los números: ninguna de las posturas analizadas está libre de objeciones. Sin embargo, a pesar de las diferentes opiniones en ocasiones inreconciliables, en las diversas concepciones existen también, como hemos visto, múltiples coincidencias: por ejemplo, varias sostienen que las matemáticas son *a priori* en tanto que no hablan, al menos directamente, del mundo; otras afirman que están constituídas por estructuras abstractas que pueden interpretarse en múltiples dominios incluso empíricos; y otras coinciden en que deben verse definitivamente como refutables en tanto que son pinturas o imágenes ideales de ciertos dominios empíricos. Históricamente, después del auge de la visión apriorista de las matemáticas con los trabajos de Frege, Russell, Dedekind, Hilbert, etcétera, tal vez sobre todo a raíz de las dificultades y limitaciones encontradas por Gödel y otros en los sistemas formales, recientemente se ha estado explorando la vieja visión empirista de Aristóteles y Mill por parte de autores como Wittgenstein, Frechet, Lakatos y Kitcher, entre otros. Lo cierto es que, al parecer, la matemática puede verse en cierto sentido como *a priori*, en tanto que gran parte del trabajo cotidiano, así como las imágenes axiomáticas que se han construído, permiten constatar que múltiples elementos de las matemáticas sólo requieren pruebas internas; mientras que, por otro lado, la circunstancia de que una buena parte de las matemáticas actuales se haya originado en problemas prácticos y el hecho de que, independientemente de su origen, en múltiples casos exista un isomorfismo entre las estructuras matemáticas y el mundo empírico hacen pensar que las matemáticas deben verse, más bien, de una forma empirista.

Por otra parte, el término 'número' se ha estado usando de diferente forma por parte de los especialistas. Para los matemáticos 'número' es un término general para referirse a entidades matemáticas tales como 0, 1, 2, π, $\aleph$, etc. sin ir más allá. Los reconstructores de la aritmética como Frege, Russell, Dedekind y Peano pretenden referirse a los números de los matemáticos, pero al describirlos mediante un sistema axiomático crean imágenes de dichos números que difieren de éstos en tanto que sólo son sus imágenes ideales. Dentro de ellos, algunos como Frege y Russell piensan que los números de los matemáticos no pueden explicarse sólo por sus relaciones entre sí; mientras que otros, como Dedekind y Peano, piensan que con eso es suficiente. Por otra parte, Wittgenstein, Frechet y Kitcher usan 'número' en dos sentidos: 1) para referirse a los "números matemáticos" vistos como esquematizaciones o pinturas ideales de algo así como los "números primitivos", y 2) para referirse a estos "números primitivos" que para unos serían conceptos, para otros manipulaciones con objetos, etcétera. En cierto sentido, todos estos usos son legítimos ya que los referentes a los que hacen alusión, así como lo que se dice de ellos, juega un papel importante vinculado con los números tal como se manejan en matemáticas y todo el mundo acepta que 'número' se refiere a algo relacionado estrechamente con los números de la aritmética. Frente a la visión estructural de Dedekind, Peano y Benacerraf, he dado aquí algunos argumentos adicionales a los de Frege y Russell para defender la idea de que los números aritméticos son algo más que lo puramente estructural; pero, en realidad, todo lo que necesito para establecer la distinción conceptual que propondré es el hecho de que, en efecto, 'número' lo han usado, por ejemplo Frege, Russell, Wittgenstein, etcétera, para expresar algo más que lo puramente estructural. De cualquier forma, mientras no podamos decir en definitiva qué son los números, los diferentes usos del término intentan recoger diversos aspectos de los números que en algún sentido son relevantes. Así pues, se requiere una clarificación de los usos del término 'número' que nos permita sentar las bases de una investigación rigurosa acerca de la naturaleza de los números. Pienso que mientras esta tarea no se haya hecho, las discusiones acerca de lo que son los números tendrán el gran inconveniente de dar palos de ciego por estar hablando (como lo he sugerido y trataré de mostrarlo más detenidamente en 4.4.) de cosas diferentes (aunque vinculadas) con el mismo término, 'número'. Mi propuesta es que gran parte de la confusión radica en que los especialistas analizados, cuando hablan sobre los números, aparentemente se refieren a las mismas entidades y sobre ellas sostienen diferentes características; pero, un analisis más detallado del asunto revela que en realidad pueden distinguirse tres entidades a las que se han estado refiriendo indistintamente con el mismo término 'número'.

El propósito de este capítulo es construir una forma de entender las matemáticas en la que cobren sentido los diferentes usos, hasta donde puedo ver, legítimos del término 'número' y que nos permita sugerir una distinción conceptual al respecto. Una de las cuestiones más importantes que se plantea a quien intenta conocer a fondo una ciencia es la forma como las matemáticas se introducen en las descripciones del mundo empírico. Podemos aceptar con Kitcher, según veíamos en 3.5, que las matemáticas en efecto tienen una larga historia; pero, si no contamos con una definición precisa de lo que son las matemáticas, no siempre podemos saber cuándo estamos frente a ellas. Lo cual, por supuesto, no impide que normalmente podamos identificarlas, de forma similar a como podemos identificar los elefantes aun sin contar con una definición científica de los mismos. Una definición o caracterización rigurosa sirve, sobre todo, para identificar los casos límites. Pues bien, considero que cuando estamos frente a una ciencia matematizada, justo estamos en un caso límite, ya que no es fácil separar lo matemático de lo no matemático. La definición que nos sirva para discernir en los casos excepcionales puede configurarse *a priori*; pero, en ese caso, sería completamente arbitraria. Así pues, dicha definición al no poder salir sólo de los casos "normales" como, por cierto, pienso que han intentado los autores examinados en este trabajo, tendrá que surgir también tomando en cuenta los casos límite. Esa es la razón por la cual en el siguiente apartado nos detendremos a considerar algunos ejemplos paradigmáticos de teorías empíricas matematizadas. Con base en este análisis y, por supuesto, tomando en cuenta a los matemáticos y a los filósofos que hemos analizado en la presente indagación, propondré, en 4.3, una forma de ver las matemáticas que nos posibilite establacer en 4.4 una distinción conceptual acerca de los números que, hasta donde alcanzo a ver, aclara en alguna medida las discusiones acerca de los números analizadas aquí mismo. En este sentido, la presente investigación es una elucidación de los usos del lenguaje que intenta desbaratar los problemas que surgen del uso indiscriminado del término 'número'. Todo esto, como diría Wittgenstein, deja la aritmética como está; pero, si la hipótesis que propongo es correcta, se habrá ganado, al menos, un poco de claridad en este asunto y, según entiendo, eso es a lo más que puede aspirar un trabajo filosófico como el presente.

4.2 ¿Qué método han seguido algunos trabajos pioneros que han dado un tratamiento matemático de lo empírico?

Comenzaremos por analizar algunos momentos paradigmáticos en los cuales las matemáticas han estado estrechamente vinculadas a la explicación de lo empírico: me refiero al trabajo de Arquímedes titulado *Del Equilibrio de los Planos*, al trabajo de Galileo sobre el movimiento de los cuerpos, y al trabajo de Cournot que matematiza la teoría económica de Adam Smith. La idea de avanzar en el análisis sobre la naturaleza de las matemáticas y los números con base en un estudio semejante surgió, sobre todo, debido a la observación de que en estos trabajos, así como en el de Newton o la reciente teoría matemática de juegos, estaban presentes tanto elementos axiomáticos, presumiblemente *a priori*, como también elementos empíricos en tanto que dichos trabajos pretendían construir teorías explicativas de ciertos dominios empíricos. Como lo veremos brevemente, Arquímedes construyó la teoría referida de forma axiomática tratando de imitar la *Geometría* de Euclides a la que únicamente añadió las definiciones de 'peso' y de 'centro de gravedad'. Galileo, por su parte (al igual que Newton en los *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*) imitó en el trabajo citado la metodología de Arquímedes y construyó como éste una teoría matematizada con posibilidades de predicciones empíricas. Estos trabajos, al igual que el trabajo que analizaremos de Cournot y los trabajos mencionados de Newton y la teoría matemática de juegos, son sólo unos cuantos ejemplos que, a mi juicio, nos permiten ver elementos matemáticos *a priori* en relación con lo empírico. Si no podemos remontarnos al origen histórico de los números o al nacimiento de la aritmética, en estos ejemplos, al ser más recientes, podemos, al menos, analizar con algún detalle la forma como han surgido algunos resultados pioneros que mezclan elementos de la matemática abstracta con elementos empíricos.

Veamos primero, por ejemplo, el célebre trabajo con el que Arquímedes inició el estudio matemático de la parte de la física que hoy se denomina estática. Este trabajo titulado "Del equilibrio de los planos o de sus centros de gravedad" comienza con siete postulados que transcribimos a continuación:

> 1. Pesos iguales a distancias iguales (del punto de apoyo de una balanza de brazos iguales) se equilibran, y a distencias desiguales se rompe el equilibrio y hay inclinación hacia el lado del peso que está a mayor distancia.
>
> 2. Si a uno de los dos pesos iguales se le añade algo, se rompe el equilibrio y el peso añadido queda más abajo.
>
> 3. Si se quita algo a uno de ellos, se rompe el equilibrio, y el peso no disminuido queda más bajo.
>
> 4. Los centros de gravedad de dos figuras que coinciden, también coinciden.
>
> 5. Los centros de gravedad de dos figuras desiguales, pero semejantes, están situados semejantemente.
>
> 6. Si dos pesos se equilibran a cierta distancia, dos pesos equivalentes a aquellos también se equilibran a la misma distancia.
>
> 7. El centro de gravedad de una figura cuya superficie es cóncava en la misma dirección, está en el interior de la figura (Arquímedes [s III ac] p. 502);

donde podemos constatar que los postulados 1, 2, 3 y 6 no hacen sino *describir* idealmente (es decir, sin considerar ninguna perturbación posible por el aire, las imperfecciones de la balanza o cualquier otro factor) experiencias observables (entendiendo por 'observable' la balanza, sus brazos de tal o cual medida, y la inclinación o equilibrio de la balanza al colgársele objetos materiales a diversas distancias de su eje). En base a eso, los postulados definen implícitamente lo que significa 'pesos iguales', 'peso mayor' y 'peso menor'; quedando así definido lo que se entiende por 'peso de un cuerpo'. Esos postulados describen idealmente los hechos observables de medir y balancear que con toda seguridad eran conocidos no idealmente antes de cualquier trabajo de Arquímedes; y, mediante ellos, se especifica que se llamará *peso de un cuerpo* aquello cuyas condiciones de identidad y cuyas posibilidades de ordenación bajo las relaciones "mayor que" o "menos que" han quedado establecidas por dichos postulados. Por otro lado, los postulados 4, 5 y 7 hacen otro tanto con "centros de gravedad": éstos quedan definidos idealmente a partir de esos postulados que describen experiencias observables referentes a las figuras y la posibilidad de equilibrarlas en un punto.

Más adelante, después de los 7 postulados, Arquímedes prueba 13 proposiciones en el libro I; posteriormente, presenta nuevas definiciones y prueba otras 10 proposiciones en el libro II. Por el momento no me interesa discutir el rigor lógico de estas definiciones que, de hecho, por ejemplo con respecto a los centros de gravedad, presuponen también una idea intuitiva de los mismos; no obstante, pasaremos por alto eso, ya que para nuestros propósitos actuales serán suficientes como están. Veamos, como ejemplo, las proposiciones 3 y 6 del libro I.

La proposición 3 dice: "si se equilibran dos pesos desiguales a distancias desiguales, el mayor estará a menos distancia que el menor" (Arquímedes [s III ac] p. 502). La prueba consiste en suponer, en primer lugar, que las distancias fueran iguales, y si ese fuera el caso y se quitara el exceso de peso del mayor, la balanza se inclinaría para el otro lado, por el postulado 3; lo cual es contrario al postulado 1, ya que quedarían pesos iguales a distancias iguales y deberían estar en equilibrio. Si la distancia del peso mayor fuera más grande y ahora se añadiera el faltante al peso menor, la balanza se inclinaría para ese lado por el postulado 2, pero, eso iría en contra del postulado 1 ya que quedarían pesos iguales y la balanza debería de inclinarse para el otro lado porque tiene mayor distancia. Pero si los cuerpos referidos de hecho están en equilibrio, según la suposición inicial, entonces concluye Arquímedes que el peso menor deberá estar forzosamente a mayor distancia. Esta prueba es casi literalmente la de Arquímedes, y sólo me aparté un poco en la segunda parte para hacerla, a mi juicio, más comprensible.

La proposición 6 dice algo similar a la proposición 3, pero con mayor precisión: "Dos pesos conmensurables se equilibran a distancias inversamente proporcionales a ellos"

(Arquímedes [s III ac] p. 503). La prueba se desarrolla a partir del siguiente diagrama de una balanza ideal:

$$
\begin{array}{cccccc}
L & E & G\ H & D & K \\
\hline
 & \downarrow & \triangle & \downarrow & \\
 & [\,A\,] & & [B] &
\end{array}
$$

donde A y B representan dos cuerpos equilibrados en una balanza con apoyo en el punto G; GH es una medida común para GE y GD, de tal manera que EH = GD y por lo tanto HD = EG; los brazos de la balanza se han extendido hasta los puntos L y K de tal manera que LE = GD = EH, y DK = HD = EG; y, según la proposición 6, A es a B como GD es a EG. Así pues, el punto E es el punto medio de LH, D es el punto medio de HK y G es el punto medio de toda la recta LK; ya que si LE = GD y EG = DK, entonces LE + EG = GD + DK. Por otro lado, A es a B como LH es a HK, ya que LH = 2GD y HK = 2EG. Si en LH hay x veces GH, dado que los pesos son conmensurables y proporcionales a las distancias, podemos definir un peso Z tal que en A haya x veces Z; y de igual forma, si en HK hay y veces GH, en B habrá y veces Z. Ahora bien, si repartimos A en x Z^s y las colocamos en las x partes de LH, y si igualmente repartimos B en y Z^s y las colocamos en las y partes de HK, todos esos pesos llenarán toda la línea LK y al ser iguales se equilibrarán en el punto medio G por el postulado 1. Por consiguiente, A y B están equilibrados en el punto G que guarda las proporciones referidas.

La proposición 6 y la proposición 7 que extiende lo anterior para cuando los pesos sean inconmensurables expresan las famosas *leyes de la palanca* de Arquímedes. El resto de las proposiciones son similares y se prueban de forma análoga. Algunas de ellas, como la 3, ya eran conocidas con anterioridad al trabajo de Arquímedes y otras, como tal vez la 6 y la 7, pudieron ser conocimientos relativamente nuevos. En la proposición 6 se establecen relaciones cuantitativas precisas entre los pesos y los brazos de una balanza (apoyandose, sobre todo, en la teoría de las porporciones de Eudoxo) y posibilitando, de esa forma, el tratamiento numérico de los pesos. Como no sería difícil de mostrar, estas relaciones pueden comprobarse empíricamente si despreciamos pequeñas diferencias imputables a otros factores no considerados en los postulados; y esto es gracias a que la balanza de Arquímedes reproduce, aunque sea idealmente, las balanzas empíricas.

Arquímedes representa los diferentes "pesos" de los cuerpos mediante números matemáticos; y, lo interesante es obsevar que se cumplen para dichos "pesos" las leyes aritméticas de los números. Eso, a mi juicio, sugiere que los números mismos, al igual que los "pesos", pudieron haber surgido de un proceso similar de idealización de lo empírico o de algo vinculado con esto. Si ese no fuera el caso, las leyes aritméticas de los números no tendrían por que coincidir, aunque sea aproximadamente, con el comportamiento de algunos fenómenos empíricos. Es perfectamente concebible que, por ejemplo, la suma empírica de los "pesos" de dos cuerpos diferentes no fuera igual a la suma aritmética de los "pesos" respectivos debido, tal vez, al desgaste de energía producido en la unión de los cuerpos. Esto podría ser posible; y, de hecho, cosas semejantes suceden en el mundo subatómico, con los volúmenes de agua y alcohol que se unan, o con otras magnitudes como la temperatura de dos curpos que se juntan[1]. De tal manera que si un cuerpo A pesa 2 kilos y un cuerpo B pesa 3 kilos, al pesar juntos los cuerpos A y B no pesarían 5 kilos, sino supongamos 4 kilos; y si, en general, la unión de dos cuerpos pesara siempre un kilo

[1] Según el modelo atómico de Bohr, al entrar un protón en el núcleo de un átomo, pierde parte de su masa y, por consiguiente, de su peso. Un volumen x de agua y otro volumen y de alcohol al unirse no producen un volumen $x + y$ de agua y alcohol, sino un volumen menor. Con respecto a la temperatura, es un fenómeno conocido que al juntar dos cuerpos que tienen diferente temperatura, las temperaturas no se suman aritméticamente, sino que se promedian. Por ejemplo, suponiendo conducción perfecta del calor, si juntamos un cuerpo que tiene una temperatura de 20° con un cuerpo que tiene 10°, la temperatura resultante de los dos cuerpos unidos será, no de $20^\circ + 10^\circ = 30^\circ$, sino de $20^\circ + 10^\circ = 30^\circ/2 = 15^\circ$.

más que el peso del cuerpo más pesado o, en caso de igualdad, un kilo más que cualquiera de ellos, entonces siempre tendríamos que si $x \geq y$, $x + y = x + 1$. Pero si éste fuera el caso no sólo para los "pesos" de los cuerpos, sino para la mayor parte de las magnitudes que se manejan empíricamente, pienso que tendríamos una aritmética diferente a la actual, en la cual "si $x \geq y$, entonces $x + y = x + 1$" sería un axioma. Por supuesto, todo esto es hipotético, pero argumentos como el que acabo de presentar sugieren que si las leyes aritméticas de los números se cumplen en el mundo empírico es, justamente, porque dichas leyes son idealizaciones de elementos vinculados estrechamente con lo empírico. En 4.4 sugeriré una forma de ver los números basada en una distinción conceptual que permite dar sentido a esa hipótesis tomando en cuenta, también, las investigaciones relevantes que hemos analizado, haciéndola, así, más plausible.

Ahora bien, con el propósito de distinguir lo propiamente matemático del trabajo de Arquímedes, veamos lo que tiene en común con la *Geometría* de Euclides que concientemente trató de imitar y que se considera universalmente como un trabajo puramente matemático. Como lo vimos brevemente en 2.6, en vez de tomar alguna descripción realista de las figuras físicas como base de su geometría, Euclides, siguiendo a sus antecesores, considera que todas las figuras están compuestas de puntos y lineas (aislando estos elementos de otros posibles constituyentes de las figuras como podrían ser la textura, la resistencia al cambio, etc.), define lo que es un punto y una línea ideales, y a partir de esas definiciones, algunos axiomas y leyes lógicas obtiene teoremas (algunos ya conocidos) para las figuras geométricas sentando, de esa forma, las bases de posibles predicciones sobre las figuras físicas: como es sabido, las regularidades geométricas se cumplen aproximadamente en las figuras físicas. Por su parte, Arquímedes hace una teoría del equilibrio de los cuerpos tomando como base la geometría euclideana, sobre todo la teoría de las proporciones de Eudoxo, define además 'peso' y 'centro de gravedad' y con todo eso reconstruye idealmente las balanzas físicas. Lo que resulta de particular interés en el trabajo de Arqímedes es observar que, de manera análoga a Euclides: 1) aisla del fenómeno de "peso" sólo ciertos aspectos que le parecen relevantes; 2) presupone el conocimiento matemático de las figuras contenido en la geometría euclideana; y 3) sustituye nociones comunes por definiciones y postulados que idealizan lo que él entiende por 'peso' y 'centro de gravedad'. Así pues, el trabajo *matemático* de Arquímedes consistió, al parecer, en ordenar todos esos conocimientos de una forma axiomática más o menos rigurosa (si tomamos en cuenta nuestros estándares contemporáneos) sustituyendo nociones comunes por definiciones o caracterizaciones ideales, desprendiendo de ellas, tanto regularidades conocidas, como posibles predicciones. Así pues, el tratamiento matemático que realizó Arquímese sobre el equilibrio de los cuerpos es similar, al menos, en los rasgos destacados aquí al trabajo puramente matemático que realizó Euclides. Eso nos da un indicio de que esos rasgos, tal vez, constituyan lo propiamente matemático. Pero, antes de inferir nada, veamos en seguida otros trabajos similares.

Galileo Galilei inagura con un trabajo similar al de Arquímedes el estudio matemático de la Dinámica o movimiento local de los cuerpos.

> El libro de la naturalesa está escrito en caracteres geométricos: la nueva física galileana es una geometría del movimiento, justo como la física de su verdadero maestro, el divino Arquímedes, era una geometría del reposo (Koyré [1968], p. 14).

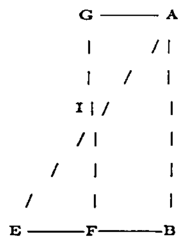
En "La jornada tercera" de sus *Consideraciones y Demostraciones Matemáticas sobre dos Nuevas Ciencias*, Galileo comienza por definir el movimiento uniforme y el movimiento uniformemente acelerado. Después de una breve introducción dice: "Por movimiento igual o uniforme entiendo aquél en el que los espacios recorridos por un móvil en tiempos iguales, cualesquiera que éstos sean son iguales entre sí" (Galileo [1638] p. 266). Con lo cual, según dice, sólo precisa la "vieja definición" con la expresión "cualesquiera" para referirse incluso a fracciones de tiempo. A partir de esta definición, Galileo desprende cuatro proposiciones que llama axiomas; y, mediante dichos axiomas, prueba cinco teoremas que definen, entre otras cosas, la velocidad como la razón de la distancia entre el tiempo, que hoy día se expresa con la fórmula de todos conocida $v = d/t$. Posteriormente, define el movimiento acelerado en los siguientes términos: "Llamamos movimiento igualmente, esto es, uniformemente acelerado, a aquél que partiendo del reposo adquiere, en tiempos iguales, iguales incrementos de rapidez" (Galileo 1, p. 288); pretendiendo que esta definición

> corresponda con exactitud al movimiento acelerado que nos brinda la naturaleza, —es decir, a la caida libre de los cuerpos.– Y esto creemos haberlo logrado especialmente si tenemos en cuenta que las propiedades que hemos ido demostrando sucesivamente (a partir de nuestra definición) parece que corresponden y coinciden exactamente con lo que los experimentos naturales nos ponen delante de los sentidos (Galileo [1638] pp. 275 y 276).

Veamos, por ejemplo, el teorema 1, proposición 1 que dice:

> El tiempo en el cual un espacio dado es recorrido por un movil que parte del reposo con movimiento uniformemente acelerado, es igual al tiempo en el que aquel mismo espacio habría sido recorrido por el mismo movil con un movimiento uniforme cuyo grado de velocidad fuese la mitad del grado de velocidad maximo alcanzado al final del movimiento uniformemente acelerado precedente (Galileo [1638] p. 292).

Para probar eso, Galileo se vale del siguiente diagrama:



donde AB representa el tiempo durante el cual un cuerpo se acelera en caída libre desde el instante A = 0, hasta el instante B; y la línea BE representa la velocidad que va alcanzando el cuerpo en caida desde la velocidad en el punto B igual a 0, hasta la velocidad E que alcanza en el momento final. Ahora bien, si por definición $v = d/t$, entonces algebráicamente $d = vt$; de tal forma que la distancia del cuerpo en caída queda representada por el área del triángulo EAB, ya que es la suma de multiplicar cada instante del tiempo AB por su respectiva velocidad, es decir, algo así como la suma de todas las líneas horizontales que pueden trazarse paralelas a EB y limitadas por las líneas AB y AE. De esa forma, el área del triángulo EAB representa la distancia recorrida por el cuerpo en caída libre en el tiempo AB. Por otro lado, al ser F = E/2, F x AB es el área del rectángulo FGAB y representa la distancia recorrida por un móvil a la velocidad constante F durante el tiempo AB. Así pues, hay que demostrar que las áreas FGAB y EAB son iguales. Para ello Galileo valiéndose únicamente de las propiedades geométricas de esas dos figuras, comienza por advertir que ambas comparten el trapecio FIAB y sólo queda por mostrar que los triángulos EIF y AGI son semejantes. Lo cual se demuestra al advertir que tienen iguales al menos dos ángulos (el recto y los opuestos por el vertice) y un lado (ya que EF = FB); y como FB = GA, entonces EF = GA. Por lo tanto ambas áreas son iguales y el teorema queda probado.

Por supuesto, esto podría verificarse empíricamente mediante un experimento sencillo, y, en efecto, curiosamente el teorema probado matemáticamente se cumple en la experiencia si despreciamos pequeñas desviaciones imputables a otros factores no considerados en las definiciones, como puede ser, por ejemplo, la resistencia del aire.

Un corolario del teorema anterior dice que un cuerpo en caída libre recorre en los tiempos 1, 2, 3, 4, etc. espacios que guardan la proporción de los números nones 1, 3, 5, 7, etcétera. Este resultado, verificable en la experiencia, maravilló al mismo Galileo y lo convenció que las leyes de la naturaleza pueden encontrarse trabajando matemáticamente. La prueba matemática es bastante sencilla y consiste en mostrar que si el dibujo anterior se extiende para abajo en la misma medida AB, la distancia recorrida por el cuerpo en caída libre en el siguiente tiempo como el de AB estaría representada por tres rectángulos como FGAB, ya que si fuera a la velocidad E con la que empieza, recorrería una distancia representada por el doble del rectángulo FGAB y con el nuevo incremento de velocidad recorrería otro rectángulo como FGAB, por un razonamiento análogo al efectuado para probar el teorema 1; por lo tanto, en total serían tres rectángulos como FGAB. De la misma forma, puede mostrarse que en el siguiente espacio de tiempo como AB, el cuerpo en caída libre recorrerá una distancia representada por cinco rectangulos como FGAB, y así sucesivamente.

Así pues, en base a esta pequeña muestra, podemos sugerir que el trabajo *matemático* de Galileo (de forma análoga al trabajo de Arquímedes) consistió en aislar del movimiento todo lo que no fuera movimiento local de los cuerpos, en sustitir nociones comunes por definiciones o caracterizaciones ideales y, presuponiendo sólo ciertos conocimientos geométricos y numéricos que ya constituían parte de las matemáticas de su tiempo, derivar lógicamente hechos comprobables empíricamente (por supuesto, si no consideramos posibles perturbaciones debidas a factores no considerados en la figura ideal construída mediante las definiciones).

Veamos ahora brevemente el trabajo de Cournot con el que se inicia el tratamiento matemático de la economía apoyado sobre todo en *La Riqueza de las Naciones* de Adam Smith y en sus destacados conocimientos como matemático. En sus *Investigaciones acerca de los Principios Matemáticos de la Teoría de las Riquezas*, Cournot, a pesar de no hacerlo con una presentación axiomática como Arquímedes y Galileo, comienza por dar la siguiente definición:

> Si queremos entendernos en la teoría, conviene identificar absolutamente el sentido de la palabra *riquezas* con el que presentan estas otras: *valores intercambiables*... La idea de riqueza, concebida de este modo sólo tiene sin duda una existencia abstracta... pero la extensión del comercio y el progreso de los procedimientos comerciales tienden a aproximar cada vez más el estado real de las cosas a ese orden de concepciones abstractas, único sobre el cual pueden basarse los razonamientos teóricos (Cournot [1838] pp. 23 y 24).

En el capítulo sobre la ley de la demanda, Cournot invoca "un axioma, o si se quiere,.. una hipótesis: que cada hombre intenta extraer el máximo valor posible de sus bienes o de su trabajo" (Cournot [1838] pp. 66 y 67). El mismo lo traduce en términos económicos diciendo que "la venta o la demanda crece cuando el precio desciende" (Cournot [1838] p. 68). Para cada precio se da una demanda; y si consideramos una población amplia en la que a cualquier variación del precio, por pequeña que ésta sea, se dé al menos alguien que compre más o menos, entonces, afirma Cournot, podemos representar la demanda (D) como una función continua del precio, es decir, $D = F(p)$; y, dado que la relación entre demanda y precio es inversa debido al axioma maximizador, dicha función tendrá pendiente negativa.

Para simplificar el problema, Cournot considera primero el caso de un monopolio que se enfrenta a una función de ventas o demanda $F(p)$, y cuyo ingreso total para cierto precio de sus productos será $pF(p)$, es decir la multiplicación del precio de su producto por la cantidad vendida del mismo. Ahora bien, como $F(p)$ es continua, $pF(p)$ también lo será; y como en $p = 0$, el ingreso también será nulo; en $p = a$, donde a es mayor que cero pero no demasiado grande, $aF(a) = b$, siendo b finito y mayor que cero; y en $p = c$, donde c es positivo y lo suficientemente grande como para pensar que los consumidores dejarán absolutamente de comprar el producto del monopolio, el ingreso volverá a ser nulo, es decir $cF(c) = 0$; por lo tanto, concluye Cournot, la curva que describe la función del ingreso $pF(p)$ tiene un valor máximo, es decir, tiene la forma de una campana. De ahí que el precio que corresponde al ingreso máximo no es necesariamente el más grande y está dado por la fórmula $p = F(p)/-F'(p)$, donde $F'(p)$ es la derivada de $F(p)$. Derivando el producto $pF(p)$ obtenemos $pF'(p) + F(p)$, e igualándola a 0 para encontrar el valor máximo nos da la ecuación $pF'(p) + F(p) = 0$, de la que obtenemos el referido valor de p que maximiza la función de ingreso.

Lo anterior puede verificarse empíricamente si previamente ha sido posible obtener la función de ventas correspondiente, que por cierto, no es facil de lograr. De cualquier forma, la conclusión matemática de Cournot de que debe de haber un precio que maximice los ingresos puede verificarse empíricamente elevando, por ejemplo, el precio para ver si el ingreso crece o disminuye, es decir, si se está antes o después del punto máximo; y, en base a eso, aumentar más el precio o disminuírlo hasta encontrar dicho punto. Una comprobación semejante tiene, sin embargo, el inconveniente de ser difícil de realizar debido a la casi imposibilidad de aislar en la práctica únicamente los factores que se consideran en el fenómeno ideal.

Así pues, de forma similar a los trabajos de Arquímedes y Galileo, al parecer el trabajo propiamente *matemático* de Cournot consistió en definir idealmente términos como el de 'riqueza' que anteriormente tenían un sentido no muy preciso, en dar como axiomas ciertas ideas sobre el comportamiento de los seres humanos y, presuponiendo ciertos conocimientos matemáticos sobre las funciones, desprender lógicamente comportamientos humanos comprobables empíricamente si no tomamos en cuenta factores que no han sido incluídos en la imagen ideal construida a partir de las definiciones y axiomas adoptados.

Como puede mostrarse, de forma similar a los trabajos de Arquímedes, Galileo y Cournot, se han dado otros trabajos muy relevantes en el inicio del tratamiento matemático de ciertas áreas. Tal es el caso, por ejemplo, de los *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural* de Newton con el que se inicia la Mécanica Clásica. En él obtiene como su primer corolario que "un cuerpo afectado simultáneamente por dos fuerzas describirá la diagonal de un paralelogramo en el mismo tiempo en que describiría los lados de ser afectado separadamente por esas dos fuerzas" (Newton [1687] p. 238). Lo cual puede verificarse empíricamente mediante un sencillo experimento (según lo sabemos ahora, sin contar pequeñas desviaciones imputables a otros factores no considerados en las definiciones y axiomas). Lo interesante, sin embargo, es que Newton lo desprende de sus axiomas o leyes del movimiento, sobre todo del segundo que dice: "el cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa, y se hace en la dirección de la linea recta en la que se imprime esa fuerza" (Newton [1687] p. 237); habiendo definido previamente, entre otros, los términos 'fuerza impresa' y 'cantidad de movimiento'. Por lo que, al parecer, el trabajo de Newton sigue la pauta trazada por Euclides, Arquímedes y Galileo para construir una teoría matemática con posibilidades de predicciones empíricas.

Otros trabajos en esa misma línea son, también, las teorías matemáticas de probabilidades que como dice León Olivé están dadas "en términos de modelos teóricos que se construyen racionalmente abstrayendo partes de sistemas reales"(Olivé [1981] p. 53); y la teoría de juegos que está brevemente descrita bajo la misma perspectiva en Avila [1987].

Así pues, ¿qué podemos extraer de todos esos ejemplos? al parecer, que al iniciar el tratamiento matemático de algún dominio se realizan, al menos, las siguientes tareas: 1) se definen los términos principales, por supuesto, mediante términos conocidos con anterioridad, intentando que la definición corresponda aunque sea de forma ideal a los fenómenos observados. De esa forma, por ejemplo, Arquímedes define implícitamente 'el peso de un cuerpo' a partir de la observación de las balanzas; Galileo define explícitamente 'movimiento uniformemente acelerado' pretendiendo que su definición corresponda a la caída libre de los cuerpos tal como se observa en la naturaleza; y Cournot define explícitamente 'riqueza' habiendo observado que el desarrollo de la sociedad tiende a asemejar la riqueza a la forma como él la define. 2) A partir de las definiciones, cuando éstas se prestan para ello, o de forma complementaria a ellas, se enuncian ciertos axiomas que describen el comportamiento de dichas entidades. De esa forma, por ejemplo, Arquímedes da sus "postulados" con los que también define sus términos; Galileo, a partir de las definiciones que ha dado, enumera sus "axiomas" del movimiento uniforme; y Cournot añade su "axioma" del comportamiento individual maximizador. 3) De una forma lógica se deducen afirmaciones a partir de las definiciones, los axiomas y algunos conocimientos matemáticos previos. De esa forma, Arquímedes obtiene sus "proposiciones" sobre los pesos y los brazos de una balanza a partir de sus "postulados" y de conocimientos matemáticos como la teoría de las proporciones de Eudoxo; Galileo obtiene sus "teoremas" sobre la caida de los cuerpos, a partir de sus definiciones, sus axiomas y conocimientos geométricos sobre triángulos y rectángulos; y Cournot, obtiene sus conclusiones sobre los ingresos de un monopolio, a partir de sus definiciones, sus axiomas y conocimientos matemáticos del cálculo diferencial. 4) De las afirmaciones deducidas, algunas ya eran bien conocidas mientras que otras pueden constituir conocimientos relativamente nuevos; pero, en cualquier caso, todas esas proposiciones pueden ser interpretadas en algún dominio empírico que asombrosamente, en general, las confirma. De esa forma, despreciando pequeñas desviaciones imputables a otros factores no considerados en las definiciones y los axiomas, se cumplen las relaciones cuantitativas entre pesos y brazos de balanzas que ha obtenido matemáticamente Arquímedes; los cuerpos en caída libre recorren, en sucesivos momentos iguales, espacios que están en la proporción 1, 3, 5, 7, etc., tal como lo dedujo matemáticamente Galileo de sus axiomas y definiciones; y, en principio, podría verificarse para sociedades económicas que tendieran a aproximarse al modelo ideal que popone Cournot que existe un precio, no necesariamente el más grande posible, que maximiza los ingresos de un monopolio, como concluyó matemáticamente Cournot.

Observando esos momentos paradigmáticos que hemos resumido y analizado aquí brevemente, y sin pretender reconstruir lógicamente los trabajos mencionados, me parece interesante resaltar los aspectos que he enumerado, sobre todo, para tomarlos como una guía en la comprensión de las relaciones entre matemáticas y experiencia. De hecho, me valdré de los análisis presentados aquí sólo para hacer más clara y más plausible la concepción de las matemáticas y los números que presentaré en los incisos 4.3 y 4.4 . Quisiera sólo resaltar que los ejemplos considerados, al ser casos límites en los que se muestra lo matemático, nos permiten sugerir que aquello que comparten con lo claramente matemático, como la *Geometría* de Euclides, puede ser propiamente *lo matemático* en el sentido más abstracto. Si éste es el caso, los elementos comunes de estas matematizaciones nos permiten dar una caracterización de las matemáticas en general y, por consiguiente, de la aritmética que particularmente nos interesa aquí. De hecho, en estos ejemplos se muestra que no sólo las teorías empíricas matematizadas, sino también las leyes aritméticas de los números en particular, permiten inferir conclusiones válidas empiricamente; y, por consiguiente, eso refuerza la idea de que la teoría matemática de los números pudo haber surgido de forma análoga a esas teórias empíricas matemátizadas.

4.3 Así pues, ¿qué podemos entender por 'matemáticas'?

Las matemáticas, como dice Kitcher, tienen una larga historia; pero, para la caracterización de ellas que daremos aquí, hemos tomado en cuenta sobre todo las que se desarrollaron a partir de los griegos con Thales de Mileto, Pitágoras, Eudoxo y Euclides y que han producido la aritmética, la geometría, el análisis, la teoría de grupos, la teoría de conjuntos y, al menos en parte, las ciencias matematizadas, entre otras disciplinas. La caracterización de las matemáticas que propongo pretende recoger los aspectos menos controvertidos de los pensadores que hemos analizado en el presente trabajo e intenta evitar sus ideas, a mi juicio, más vulnerables. En base a eso, al análisis de los casos límite que resumimos en 4.2 y, por supuesto, a cierto conocimiento mínimo del quehacer matemático ordinario sugeriré una forma de ver las matemáticas que, al parecer, explica algunos de sus rasgos más relevantes y, sobre todo, su aplicabilidad en el mundo empírico. Presupongo un conocimiento del quehacer ordinario de las matemáticas ya que toda la discusión entablada por los autores aquí mencionados y por mí mismo, lo suponen; es él, justamente, el que nos permite recurrir a ejemplos de elementos claramente matemáticos o, al menos, universalmente admitidos como tales. Por supuesto, estoy muy lejos de creer que la caracterización que voy a presentar describa "al fin" la evasiva naturaleza de las matemáticas. Por el contrario, creo que es innegable que aún hay inumerables tareas por delante para estar medianamente conformes en este asunto. No obstante, dado que la presente indagación sobre el número nos compele a adoptar un punto de vista al respecto, trataré a continuación de aclarar y defender en alguna medida la postura que adopto en este asunto.

En primer lugar, parto de la idea de que de una o de otra forma las matemáticas forman parte del conocimiento que tenemos del mundo, es decir, de lo que creemos saber sobre los estados de cosas. No estoy diciendo aquí, en contra de pensadores como Wittgenstein, que las oraciones matemáticas digan algo, para decirlo en sus términos, sobre los hechos que conforman el mundo. Lo único que sostengo, por el momento, es que las matemáticas juegan algún papel inevitable, cualquiera que éste sea, en ciertos procesos cognoscitivos que desembocan en afirmaciones sobre los estados de cosas. No dudo que hay quien sostenga lo contrario; pero me parece que el desarrollo y el éxito actual de las ciencias que utilizan las matemáticas hacen cada vez menos plausible la idea de que las matemáticas están de más aun en esas disciplinas. Por supuesto, alguien que acepte esta postura podría aun sostener que sería mejor no usar las matemáticas en ninguna disciplina; pero, la cuestión es si se acepta o no que las disciplinas que las utilizan producen un conocimiento de alguna forma diferente. Podemos estar o no conformes con la imagen del mundo que producen las ciencias matematizadas; pero lo que quiero sostener aquí es únicamente que esa imagen es diferente, en alguna medida, a cualquier otra imagen producida por un proceso cognoscitivo que no utiliza las matemáticas. Negar eso implicaría sostener que las matemáticas, aun en ciencias matematizadas como las examinadas en el inciso 4.2, juegan un papel completamente superfluo en la imagen del mundo que nos confieren esas teorías; o, con otras palabras, que, por ejemplo, el tratamiento matemático que realizó Cournot apoyado en las ideas económicas de Adam Smith, no modificó en nada la imagen del mundo económico que había logrado exponer éste en *La Riqueza de las Naciones*. En qué difieren las imágenes que utilizan las matemáticas o, con otras palabras, qué papel juegan las matemáticas en general, es una cuestión a discutir: Platón dice que las matemáticas construyen prototipos ideales con respecto a los cuales las imágenes sensibles sólo son copias imperfectas; Aristóteles afirma que la matemática es la ciencia del aspecto cuantitativo del mundo; Frege sostiene que las matemáticas, como la lógica, expresan las leyes generales del pensamiento sin tomar en cuenta los objetos que se están considerando; Wittgenstein sugiere que las matemáticas muestran un campo de posibilidades de los hechos proposicionales; Dedekind, Benacerraf y en general la visión estructural de las matemáticas sostiene que la matemática es la ciencia que estudia las estructuras o, si se quiere, el aspecto estructural de cualquier dominio, es decir, que es la ciencia que estudia relaciones posibles entre objetos arbitrarios; Frechet sostiene que es una representación esquemática del mundo; Lakatos afirma que es refutable; y, para Kitcher, la matemática es una teoría idealizada de los modos con los que podemos operar con el mundo. De cualquier forma, todos ellos le asignan a las matemáticas un papel no superfluo en el conocimiento del mundo.

Entre quienes defienden lo contrario se encuentra, por ejemplo, Harty Field en *Science without numbers.* En esta obra sostiene que:

> para explicar aun aplicaciones complejas de la matemática al mundo físico (por ejemplo, el uso de ecuaciones diferenciales en la axiomatización de la física) no es necesario asumir que la matemática que es aplicada es verdadera; es necesario asumir mucho menos: que la matemática es consistente (Field [1980], p. VII).

La idea de Field es que las entidades matemáticas son teóricamente prescindibles en la axiomatización de las teorías científicas; es decir, que puede reescribirse la teoría sin mención alguna a números, funciones, etcétera. En ese sentido, dentro de una teoría empírica, la mención a entidades matemáticas es diferente a la mención de las entidades teóricas propias de esa teoría; ya que estas entidades son imprescindibles, tanto para la teoría misma, como para una axiomatización de la misma. La utilidad de las matemáticas se reduce a ser sólo un sistema lógico que facilita realizar inferencias válidas; ya que las matemáticas "son válidas en todo mundo posible" (Field [1980], p. 12) y, por lo tanto, no pueden estar hablando de entidades particulares. Sin embargo, por lo dicho en 2.6, habría que distinguir entre una teoría empírica y una reconstrucción axiomática de la misma. Esta última es una pintura de aquélla y la pintura puede estar hecha de un material diferente a la teoría misma, o puede no recoger algunos aspectos específicos de ella que (por supuesto, hipotéticamente) no se consideren centrales. De esa forma, aun cuando la teoría empírica contenga afirmaciones que involucren números u otras entidades matemáticas, la pintura axiomática de la teoría puede omitir la mención a las entidades matemáticas, ya que la teoría en cuestión no habla directamente de ellas, sino de ciertas entidades empíricas expresadas mediante sus términos teóricos. Por ejemplo, el teorema y el corolario de la teoría galileana que reproducimos en 4.2 enuncian relaciones cuantitativas entre el tiempo y la distancia recorrida por un cuerpo en caida libre; pero, con ello, Galileo no pretende enunciar propiedades de los números considerados, sino del movimiento uniformemente acelerado. Esta teoría, según vimos, puede verse como una idealización en términos matemáticos del movimiento de caída libre de los cuerpos sobre la tierra; pero, supuestamente (según la propuesta de Field), podríamos hablar de ello en otros términos y decir exactamente lo mismo; de forma análoga a como Cournot y Adam Smith (vease 4.2) supuestamente dirían lo mismo: el primero en términos matemáticos, y el segundo en otros términos. Sin embargo, ¿de qué forma podría garantizarse que están diciendo exactamante lo mismo? Necesitamos un criterio que decida qué elementos de una teoría empírica aportan un valor interpretativo de lo empírico; es decir, qué elementos poseen un valor cognoscitivo sobre el mundo. Lo que diga una teoría sobre el mundo es, en última instancia, lo que conforma su especificidad en cuanto teoría empírica, y toda axiomatización de ésta debería recogerlo. La teoría galileana mencionada afirma que los cuerpos en caida libre recorren en los tiempos 1, 2, 3, etcétera, espacios que están en la proporción 1, 3, 5, etcétera. En base a eso, podemos decir que esta teoría afirma sobre el mundo que cierto fenómeno empírico como la caída libre de los cuerpos tiene una estructura numérica; y, como lo veíamos a raiz de la teoría de Arquímedes en 4.2, no es cierto que las leyes de los números sean verdaderas interpretadas en todo mundo posible. Así pues, no veo como podamos decir que para ese fenómeno empírico valen ciertas leyes numéricas sin hacer mención de estas leyes. Por supuesto, siempre es posible decir más o menos lo mismo con otros términos (como lo veíamos en 1.4 con respecto a las definiciones fregeanas y russellianas de los números); pero esto es sólo un cambio de lenguaje, y no la supresión de ciertos elementos con valor cognoscitivo como lo supone la propuesta de Field. En consecuencia, una reconstrucción de una teoría empírica matematizada como la galileana no podría omitir el aspecto matemático de la misma sin mutilarla en un aspecto que es importante para la imagen del mundo que nos transmite.

En segundo lugar, creo que no debemos ignorar que, de cualquier forma que eso sea, las predicciones de las disciplinas matematizadas de hecho se cumplen en gran medida en el mundo empírico: la nave espacial calculada matemáticamente en efecto llega a la luna; en efecto se cumple que dos cuerpos se equilibran en una balanza a distancias inversamente proporcionales a sus pesos, como lo predice la teoría de Arquímedes (ver arriba inciso 4.2); es comprobable empíricamente que un cuerpo en caída libre sobre la tierra recorre en tiempos sucesivos iguales, distancias que están en la proporción de los números 1, 3, 5, 7,.. como lo predice la teoría de Galileo (ver arriba inciso 4.2); y, en fin, podemos observar que en comunidades económicas como las examinadas por Adam Smith y Cournot, en general, el comportamiento de los monopolios se ajusta a lo predicho por Cournot en la obra examinada (ver arriba inciso 4.2). Resulta difícil de pensar que las estructuras matemáticas se apliquen al mundo empírico sólo porque casualmente coinciden con el comportaminto de ciertos dominios empíricos. Actualmente podemos entender que se construyan estructuras arbitrarias que en el futuro por casualidad coincidan con ciertos dominios empíricos o que nunca coincidan; pero, es sumamente improbable que los primeros hombres que construyeron estructuras matemáticas lo hayan hecho sin pensar en cierta utilidad práctica. Tomando eso en cuenta, concuerdo con autores como Frechet, Putnam y Kitcher en que una buena forma de explicar por qué funcionan las matemáticas en el mundo empírico es proponiendo que en el origen de las disciplinas matemáticas tuvo que darse una "síntesis inductiva" o una "inducción cuasi-empírica" o cualquier cosa semejante mediante la cual se recogieron de algún modo ciertos aspectos de lo empírico. De hecho, los ejemplos examinados de Arquímedes, Galileo y Cournot, así como los mencionados de las teorías de probabilidades y de juegos, dan un tratamiento matemático a un dominio empírico justamente a partir de encerrar en sus definiciones y axiomas los rasgos que consideraron relevantes de sus respectivos dominios empíricos. Los tres primeros continuaron su discurso matemático en términos de sus propios dominios; de tal suerte que se confunde en ellos lo que es física o economía, y lo que es propiamente matemáticas. Mientras que las teorías matemáticas de probabilidades y de juego, como lo señala Borel,

> nacen de consideraciones muy simples, como aquellas que están en la base del estudio del juego de cara o cruz, para desarrollarse después hasta ser susceptibles de aplicaciones en dominios donde intervienen fenómenos muy complejos, como los que estudia la física moderna. Concepciones puramente abstractas se encuentran en

seguida aptas para la descripción de fenómenos en los cuales sus autores no habían soñado jamás (Borel [1938] vol. IV, inc. II).

De cualquier forma, todos esos trabajos se aplican al mundo empírico, al parecer, justamente porque surgieron intentando recoger algunos aspectos de lo empírico.

En tercer lugar, en cuanto a las disciplinas mátematicas en sí, los trabajos de la teoría matemática de grupos y otros que continuaron en esa línea como los Bourbaki y, más recientemente, los trabajos en la teoría de categorías[2] muestran que los resultados matemáticos, donde por 'resultados matemáticos' entiendo la totalidad de oraciones o ecuaciones mateméticas, pueden verse, en gran medida, como estructuras diversas que establecen relaciones determinadas entre objetos arbitrarios. Esto nos induce a ver las matemáticas sin objetos específicos; aunque con la posibilidad de que las relaciones entre objetos arbitrarios puedan aplicarse a objetos específicos interpretando dichos objetos en algún dominio que comparta esas relaciones. Esto, al parecer, le da la razón, al menos en parte, a quienes como Dedekind y Benacerraf conciben las matemáticas sólo como un conjunto de estructuras no interpretadas en ningún dominio. No obstante, si los estoy interpretando correctamente, lo único que muestran los trabajos mencionados es que los "resultados" matemáticos pueden verse como estructuras diversas que pueden interpretarse en diversos dominios; pero no que las matemáticas sean sólo eso.

Por último, me parece importante destacar que gran parte de los autores examinados, así como la observación directa de los trabajos matemáticos, le conceden un papel insistentemente relevante a las definiciones o, cuando menos, a la fijación de las relaciones entre los elementos considerados. Frege, por ejemplo, dedica gran parte de su esfuerzo a definir el número y, cuando considera que lo ha logrado, pretende reconstruir lógicamente toda la aritmética a partir de esa definición. Cantor afirma, por su parte, que para admitir

2 Por ejemplo, *Algebra* de Saunders Mac Lane y Garrett Birkhoff, The Mac Millan Company, London, 1967; y *Categories for the Working Mathematicien* de Saunders Mac Lane, Springer Verlag, N.Y. Heidelberg, Berlin

nuevas entidades en matemáticas basta con que "no tengan contradicciones internas y se establezcan relaciones definidas organizadas por medio de definiciones" (Cantor [1883] inc. 8). Euclides comienza su *Geometría* definiendo punto, línea, ángulo recto, etcétera. Para Hilbert, los axiomas son definiciones implícitas. Para Wittgenstein, las matemáticas se componen de igualdades, y las igualdades son definiciones de los símbolos empleados. Frechet sugiere que las "síntesis inductivas" se traducen en axiomas y definiciones. Kitcher recalca la importancia de las estipulaciones en matemáticas. Galileo comienza el trabajo que examinamos arriba definiendo el movimiento uniforme y el uniformemente acelerado. En fin, Cournot empieza también por definir la riqueza como un paso que distingue su trabajo matemático de *La Riqueza de las Naciones* de Adam Smith.

En resumen, comparto la idea de que las matemáticas forman parte de algún tipo de conocimiento del mundo; me parece una buena explicación para las predicciones matemáticas la hipótesis de que las disciplinas matemáticas recogen en sus elementos básicos algo de lo empírico; acepto que las matemáticas trabajan con estructuras y creo que uno de los rasgos peculiares de los trabajos matemáticos es que empiezan por definir las expresiones con las que expresan las entidades con las que trabajan o, cuando menos, inician fijando las relaciones entre dichas expresiones. Ahora bien, para completar un primer panorama de lo que, hasta el momento, podemos decir de las matemáticas, expondré a continuación las posturas que me parecen inaceptables con respecto a ese asunto.

Algunos empiristas, como Mill y Kitcher, parecen sostener que las matemáticas se diferencian de otras ciencias sólo porque tratan objetos diferentes. Sin embargo, los intentos de definir las matemáticas por su objeto de estudio se han visto sistemáticamente obstaculizados por el surgimiento de nuevos objetos o, si se prefiere, de nuevas entidades matemáticas. En esa línea, Aristóteles, por ejemplo, creía que la matemática era la ciencia de un aspecto de todos los entes físicos: la cantidad; pero, hoy día, eso no es sostenible ya que en ese caso la matemática se limitaría al estudio de la relación "mayor que", y ciertamente estudia también muchas otras relaciones. La versión más moderna de esa postura sería interpretar la visión estructuralista diciendo que las matemáticas estudian las relaciones en general, o mejor aún, las estructuras mismas, o si se prefiere, las categorías; en ese sentido, las matemáticas serían la ciencia de las relaciones o, más bien, de las estructuras o categorías. Sin embargo, aun cuando, como ya lo he expresado, estemos de acuerdo que las matemáticas trabajan con relaciones formando estructuras o categorías, eso no implica que el objeto de estudio de las matemáticas sea, como sugiere Kitcher, las estructuras (o, si se prefiere, las categorías). Afirmar esto, significaría que las matemáticas se proponen encontrar las leyes que rigen las relaciones, las estructuras o las categorías mismas; lo cual, en todo caso, se aborda únicamente en las disciplinas matemáticas relativamente recientes que tratan de las estructuras y las categorías; pero, junto a ellas, existen también muchas otras disciplinas matemáticas, como la aritmética misma, que surgieron y subsisten independientemente de aquéllas. Podemos decir, hablando desde una metamatemática, que la aritmética puede verse como una estructura formada de ciertos conjuntos y relaciones; pero, independientemente de esta consideración que pretende "explicar", en el sentido de Lakatos (ver arriba inciso 3.4), la naturaleza de la aritmética, ésta nació y se desarrolló sin recurrir a la noción de "estructura". Afirmar que el objeto de la aritmética es cierta estructura sólo porque la aritmética misma tiene esa estructura, equivaldría a sostener que el objeto del juego de ajedrez, por ejemplo, es cierta estructura, sólo porque dicho juego tiene esa estructura.

Por otro lado, algunos pensadores, como Frege, Russell, Hilbert y de cierta forma también la escuela estructuralista del grupo Bourbaki, piensan que las matemáticas son una ciencia completamente axiomatizable; es decir, que podemos desprender todas sus oraciones de ciertos axiomas, aunque sea de una forma arbórea desprendiendo nuevas ramas a partir de nuevos axiomas o leyes especiales. De cualquier forma, los trabajos de Gödel que comentamos en el inciso 2.6 muestran que un sistema formal finitista no puede encerrar todas las verdades ni siquiera aritméticas. Lo cual le da la razón a pensadores como Wittgenstein y Putnam que sostienen que para comprender la matemática no basta con ordenarla axiomáticamente; sino que hay que ver, también, cómo se usan los axiomas y en general las matemáticas (según Wittgenstein); o cómo es que surgen y se desarrollan las diferentes disciplinas matemáticas (según Putnam). Lo cierto es que, como veíamos en 2.6, las matemáticas son algo más de lo que puede recoger cualquier reconstrucción axiomática que se haga de ellas.

En conclusión, si las matemáticas nos proporcionan cierto conocimiento, al parecer recogiendo algunos aspectos del mundo (lo que les permite realizar predicciones) y, por otro lado, si no tienen un objeto específico de estudio, ni se desprenden de cualquier número finito de enunciados, me parece que podríamos ver las matemáticas, más bien, como un *método* de conocimiento mediante el cual se pueden abordar diversos objetos. Por otra parte, si los resultados matemáticos pueden verse como estructuras que pueden interpretarse en diversos dominios, tal vez, podemos considerar dichas estructuras como imágenes idealizadas de esos dominios a la manera como lo sugieren Platón, Frechet y Kitcher. Por último, si las matemáticas definen sus términos como, al parecer, una parte sustancial de su quehacer, pienso que podemos ver las matemáticas como un *método* de abordar diferentes dominios que consiste en construir estructuras que pueden verse como imágenes idealizadas de esos dominios y para lo cual define los términos con los que arma dichas estructuras. Así pues, en base a todo esto y tomando como guía los análisis que resumí al final de 4.2, en la presente indagación sobre el número, estoy entendiendo por 'matemáticas', o más bien, por 'matemático' un *método* de conocimiento mediante el cual se construyen imágenes idealizadas de diversos dominios empíricos, racionales o, incluso, matemáticos y que consiste, al menos, en los siguientes pasos: 1) aisla los elementos que se consideran básicos del dominio; 2) define esos elementos, por supuesto, mediante elementos conocidos o fija, en calidad de axiomas, las relaciones encontradas entre dichos elementos; 3) reconstruye idealmente el dominio únicamente en términos de los elementos previamente definidos o fijados; 4) lo construido se desarrolla lógicamente y puede relacionarse con otras construcciones anteriores; 5) sus elementos, conjuntamente con otros elementos similares, pueden ser objeto de una nueva construcción del mismo tipo (cuando se hace matemática de la matemática, por ejemplo, en la teoría de grupos que estudia ciertas características comunes a varias álgebras); y 6) la descripción que se hace de los elementos aislados en el paso 1 se puede ver como un sistema abstracto de condiciones que pueden ser satisfechas no sólo por esos elementos, sino también por otros semejantes a ellos en tanto que cumplen esas condiciones.

En ese sentido, los trabajos de Arquímedes, Galileo y Cournot que analizamos en el inciso 4.2 son ejemplos de tratamientos matemáticos de ciertos dominios empíricos; la lógica matemática y cierto tipo de filosofía[3], como lo sugerí en el inciso 2.6, serían ejemplos de tratamientos matemáticos de ciertos dominios racionales; las reconstrucciones formales de las matemáticas mismas, tal como las expuse en el inciso 2.6, serían ejemplos de tratamientos matemáticos de dominios matemáticos que incluyen las oraciones matemáticas y sus transformaciones; y los trabajos matemáticos sobre los grupos, estructuras y categorías, incluídos también trabajos como los de Bourbaki, serían, dentro de esa perspectiva, ejemplos de tratamientos matemáticos de los "resultados" matemáticos.

Viendo así las cosas, la diferencia entre los trabajos de, por ejemplo, Cournot y Adam Smith, que abordan un mismo dominio y comparten varios supuestos, sería que Cournot empieza definiendo sus términos y a partir de sus definiciones obtiene lógicamente sus conclusiones, mientras que Adam Smith no define sus términos como base de su análisis. El resultado de ambos trabajos se refleja en que la imagen del mundo económico que resulta

---

[3] Por ejemplo, pienso que ese es el caso de la Concepción Estructuralista de la Ciencia expuesta con bastante claridad en *The Structuralist View of Theories. A Possible Analogue of the Bourbaki Programme in Physical Science* de Wolfgang Stegmüler, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1979, en Moulines [1982] y más recientemente en *An Architectonic for Science* de W. Balser, U. Moulines y J. Sneed, Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987

de usar un método matemático o no matemático es diferente, en tanto que, por ejemplo, la imagen que presentó Cournot es un límite bien definido al que tiende la sociedad económica que estudió; mientras que la imagen que presentó Adam Smith en la *Riqueza de las Naciones* es menos precisa en sus contornos. De cualquier forma, ambas son imagenes que nos sugieren ver de cierta forma determinadas sociedades económicas: una presentándonos su esqueleto, por decirlo de algún modo y la otra, comentándonos algunos aspectos importantes de su comportamiento. ¿Hasta qué punto es preferible tener el esqueleto, o lo otro? Yo diría que ambas imagenes pueden complementarse para darnos una idea más exacta del dominio en cuestión, como lo sugerí al final de 2.6. Las limitaciones de los sistemas formales nos dan una idea de que, en general, a los esqueletos siempre se les escapa algo; y eso tendría que abordarse sin recurrir a otro esqueleto, es decir, por un método no matemático.

4.4 En ese contexto, ¿qué podrían ser los números?

Los matemáticos profesionales generalmente sólo aceptan sobre los números lo que dice la aritmética: es decir, que la suma de ellos es conmutativa, asociativa, etcétera. Estos matemáticos ordinariamente trabajan con los números combinándolos entre ellos o con otras entidades matemáticas como los puntos, descubriendo nuevos números y encontrando regularidades en su comportamiento. Si le preguntamos a uno de estos matemáticos qué son los números, seguramente nos contestará que son todos aquellas entidades matemáticas que tienen las propiedades que hasta ahora se les conocen. No obstante esta caracterización es incompleta porque siempre pueden surgir, y de hecho han surgido, nuevos números que pueden modificar nuestra actual manera de ver los números (ver arriba 2.2). Así pues, al parecer, dichos matemáticos no pueden decir, con sus recursos, qué son los números en general. Por otro lado, los que han intentado reconstruir la aritmética se sitúan en un nivel metamatemático y construyen, según vimos en 2.6 y 4.3, una imagen ideal de los números aritméticos tratando de "explicar" su naturaleza y, en ese sentido, son refutables como lo sostiene Lakatos[4]. Tal como dice Wittgenstein, de hecho podemos tener múltiples imágenes de un mismo objeto. Si estas imágenes realmente retratan el objeto que pretenden, diferirán, tal vez, sólo en los recursos que utilizan, o bien, también en los elementos del objeto que recogen. Viendo así las cosas, como ya lo hemos sugerido, las imágenes que construyeron Dedekind y Peano (utilizando sistemas conceptuales diferentes) recogen de los números aritméticos sólo su aspecto estructural. El exito, aunque relativo, de las reconstrucciones de Dedekind y Peano hace pensar que en efecto lo números con los que trabajan los matemáticos pueden verse, en cierto sentido, como elementos de determinadas estructuras abstractas; o con otras palabras, que dichos números tiene una estructura. No obstante, aun cuando esas y otras reconstrucciones muestren que los números aritméticos tienen una estructura, eso no implica que dichos números *sean* sólo eso: lo único que muestran es que *pueden verse*, en cierto sentido, como tal cosa.

La siguiente cuestión es preguntarnos si se han dado mejores retratos que otros; es decir, si algunos han recogido más elementos que corresponden a los números aritméticos. Ciertamente, las imágenes que construyeron Dedekind y Peano recogen gran parte de lo que son los números aritméticos: su aspecto estructural; pero ¿es eso todo lo que podemos decir de los números aritméticos? En los incisos 2.2 y 2.5 presenté algunos argumentos adicionales a los de Frege y Russell para apoyar la idea de que, en efecto, hay algo más que lo puramente estructural en los números aritméticos. Ahora podría añadir otro argumento: aceptando la concepción de las matemáticas que propusimos en 4.3, aun cuando aceptemos que los números, al ser un resultado del método matemático, conforman algo que puede

[4] Un contraejemplo de la aritmética no puede refutar una imagen ideal de ésta, porque la imagen es un retrato idealizado al que forsosamente se le escapan elementos de la aritmética. Raúl Orayen me sugirió lo que me parece una buena solución al respecto. Tal como sucede, por ejemplo con las leyes de la balanza de Arquímedes o con las predicciones empíricas del movimiento de Galileo, puede pensarse en una diferencia tolerable entre un dominio y su imágen ideal. De esa forma, podría precisarse una diferencia tolerable entre la aritmética y una reconstrucción axiomática de la misma.

verse como una estructura, si los reducimos a eso, se nos está escapando la circunstancia de que esa estructura es una imagen de *algo*; eso sería como ya lo sugerimos en 3.1 pretender que el retrato de una persona puede explicarse cabalmente analizando sólo los colores, los contrastes, la belleza y la armonía, olvidando que intenta retratar a alguien. Sin embargo, un retrato mientras sea más esquemático tiene mayor posibilidad de retratar otras cosas parecidas a las originalmente propuestas. Tal es el caso de la estructura abstracta de la aritmética que, aun aceptando que originalmente se había propuesto para idealizar determinado dominio empírico, puede, sin embargo, retratar también otros dominios no previstos originalmente. De cualquier forma, esto no implica que debamos ignorar que pretende retratar algo. Una pintura es, ante todo, una pintura de algo.

Los reconstructores de la aritmética como Dedekind y Peano intentan, como lo mencionamos en 2.2, dar una caracterización general de los números. Pero los resultados del trabajo de Gödel, como lo veíamos en 2.6, nos permiten afirmar que ninguna enumeración finita de las propiedades de los números es suficiente para contener toda la aritmética; y, por consiguiente, que en particular hay algo más que las caracterizaciones de Dedekind y Peano no recogen. Pero ¿qué es aquello que estas caracterizaciones no recogen? A ciencia cierta, por el mismo resultado de Gödel, resulta imposible contestar a eso de una manera completa. Las imágenes construídas por Frege, Russell, Wittgenstein, Frechet y Kitcher, como lo vimos en los capítulos anteriores, "hablan" de algo más que lo puramente estructural con respecto a los números aritméticos. Frege y Russell, por ejemplo, intentan recoger dos ideas generalmente aceptadas: a) que los matemáticos ven los números como objetos específicos cuando afirman, por ejemplo, que el 2 tiene tal propiedad; y b) que el uso extramatemático de los números los relaciona estrechamente con ciertos conceptos; por ejemplo, sostienen que al hablar de estos 2 caballos se está vinculado el 2 específicamente con el concepto "– es un caballo que está aquí". Por su parte, Wittgestein, Frechet y Kitcher, tomando en cuenta las aplicaciones empíricas de los números, intentan recoger en sus imágenes el fenómeno que garantiza que las leyes aritméticas se cumplen también en el mundo empírico (como lo muestran, por ejemplo, los trabajos de Arquímedes y Galileo vistos en 4.2). De ahí que ellos construyan imágenes de los números aritméticos que los presentan a éstos, a su vez, como imágenes idealizadas de algo empírico o vinculado con lo empírico. Así pues, aun cuando no podamos dar una definición completa de los números aritméticos, lo que sí podemos afirmar es que el término 'número', tal como lo usan los matemáticos, los que vinculan los números con los conceptos y los que aplican las leyes de los números a lo empírico, tiene también los usos que recogen las imágenes construídas por Frege, Russell, Wittgestein, Frechet y Kitcher.

Ahora bien, según lo expuesto en el inciso anterior, entendemos las matemáticas como un método de conocimiento que construye imágenes abstractas de ciertos dominios y que al ser abstractas pueden también representar otros dominios. Así pues, lo matemático, o bien, es parte del método mismo, o bien, es una imagen que ha resultado de la aplicación del método. Por otro lado, como dice Wittgenstein y lo confirma la matemática actual, "los números no son fundamentales para la matemática" (Wittgenstein [1967] ver. 706). Tomando esto en cuenta, los números de los que habla la aritmética no pueden formar parte del *método* matemático y tendrán que ser, más bien, un resultado de la aplicación de dicho *método*. Pero, si los números aritméticos son un resultado del método matemático, entonces tendrá que haber algo extramatemático sobre lo cual tuvo que haber sido aplicado el *método*. El resultado de una matematización es una imagen ideal del dominio sobre el cual se ha aplicado el método matemático; y por lo cual, los números aritméticos tendrían que ser vistos como imágenes ideales de ciertos "números" no matemáticos.

Así pues, si los matemáticos se refieren con 'número' (al decir, por ejemplo, que $\sqrt{2}$ es un *número* irracional) a algo que intentan representar los reconstructores de la aritmética mediante lo que ellos se refieren con 'número' (al decir, por ejemplo, que un *número* es la extensión de un concepto), entonces podemos decir que dichos referentes no son lo mismo ya que se está hablando de "números" de dos niveles: los números aritméticos que están en un nivel x de abstracción, y las reconstrucciones de ellos que estarían en un nivel de abstracción $x + 1$. Por otro lado, los que representan los fenómenos empíricos mediante números aritméticos están usando 'número' de una forma diferente a los matemáticos. Para entender a qué se refiere el '3' de la expresión 'estos 3 caballos', recordemos que 'estos 3 caballos' es equivalente a la expresión 'esto es un trío de caballos'; y decir "un trío de caballos" es lo mismo que afirmar que algo empírico (estos caballos) que ha sido previamente conceptualizado con el concepto "– es un caballo" entra dentro de la clasificación de "– es un trío"; o, con otras palabras, se está afirmando que algo empírico-conceptual entra dentro de cierta clasificación; en nuestro ejemplo, la clasificación es en tríos y no tríos. Si el "3" fuera el 3 de la aritmética, las expresiones 'estos 3 caballos' y 'este trío de caballos' no serían equivalentes; ya que la primera refiere a algo en términos del 3 matemático, mientras que la segunda refiere a algo en términos de un trío; y no podemos decir que 3 = trío, ya que el 3 es único y los tríos pueden ser muchos; tampoco podríamos decir que 3 = "– es un trío", ya que el 3 no es una clasificación porque nada cae bajo él y, además, las clasificaciones no tienen criterios de identidad claramente definidos como lo tiene el 3 aritmético. Aunque, por otra parte, el 3 aritmético puede verse como una idealización de la clasificación en tríos, ya que el comportamiento matemático del 3 retrata idealizadamente el comportamiento de las clasificaciones en tríos, pares, etcétera; por ejemplo, podemos obtener la clasificación "– es un quinteto" a partir de las clasificaciones "– es un trío" y "– es un par", y, matemáticamente, $3 + 2 = 5$. De tal suerte que, a pesar de que ciertamente hay una fuerte vinculación entre "– es un trío" y el 3 de la aritmética, hay también una diferencia. Por consiguiente, habrá que distinguir el referente de '3' en la expresión matemática '$3 + 2 = 5$' y el referente de '3' en la expresión '– estos 3 caballos'. Siguiendo a Frechet, Kitcher y Wittgenstein y según, también, la concepción de la aritmética que he propuesto aquí, los números aritméticos serían una idealización de algo que podríamos llamar "números primitivos". Así pues, si los números aritméticos están en un nivel de abstracción x, las clasificaciones con respecto a los cuales ellos pueden verse como idealizaciones estarán en un nivel de abstracción $x - 1$.

Esta manera de ver las matemáticas y los números aritméticos posibilita plantear la hipótesis que principalmente quisiera defender aquí: gran parte de la confusión que pudimos apreciar en los autores examinados acerca de la naturaleza de los números se debe a que se ha estado usando el mismo término 'número' básicamente para referirse a tres entidades diferentes, aunque vinculadas: a) para referirse a los "números" que llamaremos de primer nivel y que están en un grado de abstracción con respecto a las matemáticas de $x - 1$; b) para referirse a los números aritméticos que llamaremos de segundo nivel y que están en un grado de abstracción x; y c) para referirse a las reconstrucciones de los números aritméticos que llamaremos de tercer nivel y que están en un grado de abstracción con respecto a las matemáticas de $x + 1$.

Ahora bien, ¿qué podemos decir sobre los números de esos tres niveles de acuerdo al uso que les han dado los autores examinados? Por supuesto, habrá que advertir que no intentaré definir aquí los números del primer nivel, ya que, según mi propuesta, la aritmética se encarga de ello; tampoco intento definir los números del segundo nivel, ya que no pretendo hacer matemática de la matemática: con ello sólo crearía números del tercer nivel, como lo hacen las reconstrucciones de la aritmética. Lo único que intentaré será aclarar y precisar un poco más a qué cosas podemos decir que se están refiriendo los que hemos dicho que hablan de los números de los tres niveles apuntados.

De acuerdo a lo anterior, ¿qué podemos afirmar de los números de primer nivel? en primer lugar, que pueden verse como clasificaciones; en segundo lugar, por reflexiones como las de Frege, Russell y las que hemos hecho aquí mismo, podemos decir que, a su vez, están asociados fuertemente a ciertas clasificaciones previas; y, en tercer lugar, podemos decir que los números aritméticos son una representación esquemática de ellas que debe recoger gran parte de lo que son, en tanto que permiten hacer predicciones como las de Arquímedes y Galileo. En base a eso, considero que podemos ver estos números como clasificaciones de segunda instancia o reclasificaciones, es decir, como clasificaciones secundarias formadas a partir de, o usando, clasificaciones primitivas. En esos términos, un sistema clasificatorio primitivo podemos decir que divide los objetos, por ejemplo, en animales, minerales, etcétera, o en verdes, rojos, etcétera. Mi propuesta, que creo es cercana en este punto a la de Russell, es que los números de primer nivel dividen los objetos en tríos, pares, etc. y para lo cual, necesariamente se montan sobre una clasificación previa, ya que un trío, por ejemplo, es siempre el trío de algo, es decir de animales, minerales, o lo que sea. En ese sentido, el "tres" de primer nivel, por ejemplo, sería la clasificación bajo la cual caen todos los tríos, y un trío de hombres, por ejemplo, es algo empírico que ha sufrido una primera clasificación. De igual forma, el "dos" de primer nivel sería la clasificación bajo la cual caen todos los pares; "3/5" de primer nivel sería la clasificación bajo la cual caen todas las tres quintas partes de lo que sea; "π" de primer nivel sería la clasificación bajo la cual cae todo aquello que podamos representar por el 3.1415... de segundo nivel, etcétera.

Considero que los números de primer nivel son los que Russell describe al decir: "Es claro que concebir los números es una manera de agrupar... Podemos suponer a todos los pares en un grupo, a todos los tríos en otro y así sucesivamente"(Russell [1919] cap. 2, p. 14). De esa forma, los números de primer nivel, recogen la idea de Frege de que los números están siempre asociados a los conceptos. De hecho, según mi sugerencia, los números de primer nivel serían clasificaciones formadas a partir de ciertos conceptos (o clasificaciones previas) a los que, por consiguiente, estarían fuertemente asociadas; de cualquier forma. Para Frege, el número del concepto "dedos de una mano" es la extensión de un concepto F bajo el cual cae todo concepto, incluído "dedos de una mano", tal que los objetos que caigan bajo él puedan ponerse en correspondencia biunívoca con los objetos que caigan bajo "dedos de una mano"; mientras que yo sugiero que veamos el número de primer nivel correspondiente como la clasificación "cinco" bajo la cual caen todos los quintetos, es decir, las extensiones de los conceptos que agrupa el número fregeano, o las clases que agrupa la clase de clases russelliana correspondiente. En esos términos, como decíamos anteriormente, después de dividir el mundo en animales y vegetales, etcétera, podemos pensar que los números de primer nivel reclasifican el mundo en tríos, pares, etcétera.

Por otro lado, así como hay disciplinas que estudian con diferentes métodos los minerales o los vegetales, etcétera, la aritmética sería el estudio *matemático* de los tríos, pares, etcétera. Y como, al menos, gran parte del mundo puede ser reordenado bajo el sistema clasificatorio de los números, podemos decir que las leyes de la aritmética en realidad hablan del mundo visto a través de las clasificaciones numéricas. De hecho, la eficiencia de las predicciones aritméticas nos hace pensar que las leyes de los números matemáticos reflejan aunque sea de forma ideal las relaciones entre esas reclasificaciones que serían los números de primer nivel. Por ejemplo, se cumplen empíricamente las regularidades númericas que obtuvieron matemáticamente Arquímedes y Galileo, y ambos reclasificaron sus dominios de estudio en términos numéricos de primer nivel; ya que en vez de estudiar la gravedad y el movimiento en tanto que se trataba de piedras o de animales o de cualquier otra forma, estudiaron la pesadez y los cambios de lugar sólo en tanto que eran unidades, pares, tríos, etcétera; es decir, en tanto que uno era el doble, el triple o la mitad de otro. Además, ellos aplicaron también las leyes generales que enuncia la aritmética a las relaciones entre las clasificaciones numéricas particulares con las que trabajaron; y esto sólo es posible si la aritmética enuncia leyes que, aunque sea de forma ideal, valen para las clasificaciones de tíos, pares, etc. y, por consiguiente, para los trío o los pares de pesos, tiempos, o velocidades con los que ellos trabajaron.

Los números del segundo nivel serían los números de los que habla la aritmética: los naturales, los primos, los irracionales, los transfinitos, etcétera. Wittgenstein, al decir que los números son *figuras*, Frechet, al decir que los números son *representaciones esquemáticas* y Kitcher, al decir que son operaciones de un *agente ideal*, se refieren al segundo nivel y hacen alusión a que hay algo en el primer nivel. Así pues, en ese sentido, podemos ver los números de segundo nivel como figuras o representaciones esquemáticas de las reagrupaciones númericas que hemos llamado números de primer nivel. Aunque, como ya lo mencionamos, los números de segundo nivel podrían ser figuras también de otros dominios no previstos en el uso que se hace de ellos actualmente en el lenguaje ordinario y científico.

No obstante, al parecer en contra de esta visión de los números aritméticos, sabemos que al menos algunos números aritméticos no tuvieron un origen extramatemático, sino que más bien, hasta donde se puede constatar, surgieron de necesidades internas de la aritmética al trabajar con los números aritméticos ya dados. Este es el caso, por ejemplo, de los números fraccionarios que, al parecer, surgieron como una extensión de la operación de división entre los enteros. Sin embargo, esto también podríamos explicarlo desde la perspectiva propuesta haciendo ver que una característica muy peculiar de las clasificaciones numéricas (es decir, los números de primer nivel) es que podemos obtener una de esas clasificaciones, no sólo usando conceptos no-numéricos previos como mencionamos anteriormente, sino también a partir de otras clasificaciones númericas ya dados. Y así, a partir, por ejemplo, de la clasificación que agrupa a los tríos y la que que agrupa a los pares, se puede obtener la clasificación que agrupa a los quintetos aun cuando nunca se haya observado un quinteto, si previamente se había observado que un cuarteto es la unión de un trío y una unidad, y que un par es la unión de dos unidades. De esa forma la clasificación "cinco" puede surgir no sólo como una forma de agrupar quintetos observados, sino también porque se observó que las unidades, pares, tríos y cuartetos son entidades que pueden obtenerse unas a partir de otras.

Si vemos los números de segundo nivel como figuras de las clasificaciones númericas, las operaciones aritméticas estarían recogiendo idealmente ese tipo particular de relaciones entre las reagrupaciones que son los números de primer nivel. Por supuesto, los números del segundo nivel, que son de los que hablan los matemáticos, son, como diría Platón, prototipos perfectos; y las clasificaciones que permiten agrupar tríos o pares reales se parecen a ellos sólo imperfectamente. Dos clasificaciones son siempre algo más que una; sin olvidar que las clasificaciones, por tener cierto carácter intensional, no tienen criterios de identidad bien definidos. Además, si tengo un quinteto de lo que sea, será seguramente diferente que tener un par y un trío; ya que podemos admitir, sin mucha dificultad, que todos los quintetos tienen características especiales que no tienen ni los pares ni los tríos. De cualquier forma, si uniendo un par y un trío obtenemos siempre un quinteto, independientemente de las características de los pares, tríos o quintetos tomados individual o colectivamente, podemos aislar esa propiedad y definir el 5 como igual a 2 + 3. Al estudio matemático de las clasificaciones numéricas es a lo que llamamos aritmética; y, según la postura que adoptamos, el estudio matemático de lo que sea se caracteriza, entre otras cosas, por trabajar con definiciones sacando conclusiones a partir de lo previamente definido. Así pues, aritméticamente 2 + 3 pueden ser igual por definición a 5; aun cuando un par y un trío no sean estrictamente igual a un quinteto y, por consiguiente, la clasificación "dos" y la clasificación "tres", en rigor, sean diferentes a la clasificación "cinco". Así pues, si las relaciones entre las clasificaciones númericas, mediante las cuales unas se pueden obtener a partir de otras, se definen como operaciones que por definición valen para todos los números (con algunas exepciones como la división entre 0), el surgimiento de, al menos, algunos de los números nuevos que nacieron por necesidades internas de las matemáticas, y no para representar originalmente ciertos clasificaciones númericas, pueden explicarse desde la perspectiva propuesta como un resultado de las definiciones adoptadas.

Los números de tercer nivel serían figuras de las figuras aritméticas. Algunas de ellas incluirían más o menos elementos lógicos que otras y eso las haría más o menos formales. Las figuras, o reconstrucciones de la aritmética, que pretenden recoger no sólo los resultados matemáticos, sino también los encadenamientos que establecen los matemáticos entre sus oraciones, son las que se llaman figuras formalizadas e intentan definir todos esos recursos de los que se valen los matemáticos; y las figuras, o reconstrucciones, que no pretenden definirlo todo, particularmente los métodos de inferencia, se denominan más o menos informales. El acento estaría, creo, en qué es aquello que definen y qué tanto dejan sin definir. En ese sentido, por ejemplo, Dedekind, Peano y la escuela estructuralista presentan imágenes de tercer nivel que intentan recoger los números como *resultados* matemáticos, es decir, en su aspecto estructural; la aritmética de Mill, sugerida por Kitcher, presenta una imagen de tercer nivel similar a las de Dedekind y Peano, pero que además pretende recoger las aplicaciones empíricas de los números; Hilbert y los formalistas presentan imágenes de tercer nivel que intentan recoger no sólo la estructura de los números matemáticos, sino también la lógica que llevan implícitos los razonamientos aritméticos; y Frege y Russell presentan imágenes como las de Hilbert, pero con las cuales intentan recoger, además, el uso de los números matemáticos en el lenguaje ordinario al insistir en que los números están siempre ligados a los conceptos De cualquier forma, las diferentes figuras de los números aritméticos que han dado los autores que examinamos pretenden definir dichos números, obviamente, en base a ciertos términos previamente definidos o aclarados. Así, Frege, por ejemplo, los define como *extensiones* de ciertos conceptos; Cantor, como *abstracciones* obtenidas a partir de los conjuntos; Dedekind, como *cortaduras* o lugares en una serie, y Kitcher como *manipulaciones ideales con objetos.* A partir de esas definiciones, y por supuesto de ciertas reglas de inferencia más o menos explícitas, construyen una representación esquemática de la aritmética.

En muchas interpretaciones de ese trabajo, por ejemplo en el artículo de Benacerraf que analizamos en el inciso 2.5, se afirma que las reconstrucciones sólo dan una semántica o interpretación adecuada para la aritmética. Sin embargo, esto sería cierto únicamente si vemos la aritmética sólo como una estructura. Ciertamente la aritmética forma una estructura; como también la forma una reconstrucción de la aritmética ya que, según mi propuesta, igualmente utiliza el *método* matemático. Por otro lado, ambas estructuras deben ser isomorfas para que una de ellas sea figura de la otra; pero ¿qué decide que una sea la figura de la otra? Según mi propuesta, el hecho que esté idealizando elementos de la otra introduciendo definiciones implícitas o explícitas en un plan explicativo, como lo sugiere Lakatos y como, de hecho, hemos visto que lo hacen las reconstrucciones de Frege, Russell y Dedekind.

Para terminar, sólo quisiera recalcar que la distinción conceptual que propongo puede ayudar a desbaratar los problemas que surgen del uso poco preciso del término 'número' ubicando las diferentes afirmaciones acerca de los números y permitiendo fijar, así, sus límites y alcances; y, para lo cual, únicamante habría que empezar por especificar de qué números se está hablando: de los números del primero, segundo o tercer nivel. En ese sentido, podemos decir que todos los autores examinados aquí tienen razón, al menos en parte. Por ejemplo, si entendemos la afirmación de Dedekind, de que los números son sólo lugares en una serie, como una afirmación de tercer nivel, que intenta recoger los números aritméticos sólo en tanto que *resultados* matemáticos tomados en abstracto, podemos estar de acuerdo con él. Igualmente, estaremos de acuerdo con Frege cuando dice que los números son extensiones que agrupan conceptos, si esto lo entendemos como describiendo números del tercer nivel que intentan recoger los números aritméticos tal como se comportan en el manejo matemático de los mismos y en su relación con los conceptos en general. También estaremos de acuerdo con los matemáticos que no reconocen en los números sino sus propiedades aritméticas, si comprendemos que se refieren sólo a los números de segundo nivel. Y, en fin, si cuando Arquímedes y Galileo hablan de las longitudes, pesos, distancias, tiempos y velocidades en términos de los números matemáticos del segundo nivel lo entendemos como haciendo alusión a cierto aspecto de los números de primer nivel que es representable por las *figuras* o *representaciones esquemáticas* del segundo nivel, podemos estar de acuerdo con ellos. En resumen, si aceptamos dicha distinción conceptual, entenderemos las afirmaciones sobre los números como afirmaciones sobre los números de primer, segundo o tercer nivel que he descrito. Eso ubicará los límites y alcances de esas afirmaciones, y permitirá entender mejor sus diferencias. No obstante, para establecer definitivamente esa distinción conceptual, además de las justificaciones teóricas que he presentado aquí, se necesitaría, por supuesto, explorar más ampliamente en la práctica las ventajas de su uso. Esto, sin embargo, rebasa mis fuerzas y es más bien una tarea que le corresponde a los matemáticos, a los reconstructores de la aritmética y a los científicos que aplican los números a los objetos que conforman los hechos del mundo. Quede, pues, el presente trabajo sólo como la propuesta de ciertas ventajas y cierta viabilidad de establecer la mencionada distinción conceptual.

CONCLUSIONES

Aparentemente los diferentes especialistas que han hecho afirmaciones acerca de los números se refieren a lo mismo y sólo difieren en las características que le atribuyen. Sin embargo, la conclusión más importante del análisis que he realizado aquí es que en realidad pueden distinguirse tres tipos de entidades diferentes, aunque estrechamente vinculados, a los que se han estado refiriendo con el mismo término 'número'. Lo que parecía una diferencia únicamente de sentidos en las afirmaciones sobre los números, resultó, también, una diferencia de referentes.

Los especialistas que hablan sobre los números son básicamente científicos, matemáticos y filósofos. Los científicos describen algunos hechos del mundo con afirmaciones que involucran números aparentemente aritméticos; por ejemplo, en la teoría galileana que analizamos en 4.2, se afirma que los cuerpos en caída libre recorren en los intervalos de tiempo 1, 2, 3, etcétera, espacios que están en la proporción 1, 3, 5, etcétera; y, aun cuando ésta sea una afirmación sobre lo empírico, los números mencionados se comportan, al menos, aproximadamente igual que los números de la aritmética. Por otro lado, los matemáticos describen propiedades de los números de la aritmética al afirmar, por ejemplo, que $2 + 3 = 3 + 2$. Por último, los filósofos han tratado de dar una caracterización general de los números aritméticos al decir, por ejemplo, que los números son extensiones que agrupan conceptos o clases de clases o cortaduras, etcétera. Estos últimos son los únicos que pretenden decir de una manera general lo que son los números aritméticos. De cualquier forma, tanto los científicos, como los filósofos y no se diga los matemáticos se refieren a entidades que si no son directamente los números aritméticos, cuando menos están estrechamente vinculadas con éstos. Por ello mi análisis empieza por buscar una caracterización general de los números aritméticos para poder delimitar si sólo se está hablando de ellos.

Los filósofos analizados aquí, como Frege, Russell y Dedekind, han construído sistemas axiomáticos mediante los cuales pretenden describir los números aritméticos. De hecho, intentan probar lo correcto de sus caracterizaciones mostrando que en ellas se recoge adecuadamente el comportamiento aritmético de los números. Sin embargo, los trabajos de Gödel y otros han probado que ningún sistema axiomático finitista es capaz de recoger toda la aritmética; y, por consiguiente, la aritmética es algo más que los sistemas axiomáticos de Frege, Russell o Dedekid no recogen. Por consiguiente, no podemos decir que sean lo mismo los números aritméticos que las reconstrucciones axiomáticas que se hagan de éstos. Más bien, creo que debemos ver esas reconstrucciones como pinturas o retratos idealizados de la aritmética. En ese sentido, cuando Frege dice que los números son extensiones que agrupan conceptos está describiendo ciertos "números" que he llamado de tercer nivel que intentan retratar o parecerse a los números aritméticos que he llamado de segundo nivel. En esos términos, si Frege quiere referirse a los números aritméticos mediante sus "números" de tercer nivel, tendrá que decir que los números aritméticos *pueden verse* como extensiones que agrupan conceptos. Y lo mismo pasaría con los otros reconstructores de la aritmética. Así pues, de ahí se infiere que pueden distinguirse dentro del uso del término 'número', al menos, los dos referentes mencionados, uno de los cuales intenta ser el retrato del otro.

Las diferentes afirmaciones de los filósofos de la aritmética que analizamos en el presente trabajo pueden dividirse en dos grandes grupos: las que sostienen que los números aritméticos son sólo lugares en una serie, es decir elementos de estructuras abstractas; y las que afirman que hay algo extramatemático (como pueden ser los conceptos) a lo cual pueden vincularse los números aritméticos; siendo ésta una propiedad no estructural porque vincula números específicos con entidades extramatemáticas independientemente de las relaciones de los números entre sí. Esto nos plantea la cuestión de si lo matemático es puramente estructural o algo más, y nos obliga a tratar de precisar qué puede ser propiamente lo matemático. Con este propósito, además de considerar los autores analizados aquí cuando se refieren a las matemáticas en general, creí pertinente efectuar un análisis directo de ciertos momentos paradigmáticos en los cuales se presentaba muy vinculada la matemática (reconocida universalmente como tal) con elementos no matemáticos (al menos, no claramente matemáticos como puede ser lo empírico). La hipótesis que adopté aquí es que lo que comparten esos momentos (concretamente "el equilibrio de los planos" de Arquímedes, "la ciencia del movimientos uniforme y uniformemente acelerado" de Galileo y *Los Principios Matemáticos de la Teoría de la Riqueza* de Cournot) con lo claramente matemático (como los *Elementos de Geometría* de Euclides) puede ser lo propiamente matemático. De acuerdo a eso, entiendo por 'matemático' un método mediante el cual se construyen imágenes idealizadas de diversos dominios empíricos, racionales o, incluso, matemáticos; donde las imágenes son estructuras abstractas que pueden "retratar" también otros dominios que compartan con el original ciertas caracteristicas estructurales.

Puesto que los números aritméticos no son esenciales en matemáticas, no pueden ser parte del método y tendrían que ser, más bien, un resultado del método matemático al haberse aplicado éste sobre algún dominio. De acuerdo a lo anterior, considero que pueden distinguirse los números aritméticos que he llamado de segundo nivel, y los "números" del primer nivel que serían aquellas entidades que se intentan representar idealmente con los números aritméticos llamados, por eso, de segundo nivel. Si las leyes aritméticas no fueran una idealización de algo empírico o conectado con lo empírico no se explicaría que por casualidad coincidieran con el comportamiento de algunos dominios empíricos. Actualmente podemos concebir que se construyan estructuras por el sólo gusto de construirlas; pero resulta muy difícil de pensar que las primeras culturas que empezaron a trabajar con números los hayan inventado sin algún fin práctico específico. Así pues, concibiendo los números aritméticos como idealizaciones de algo extramatemático pueden explicarse mejor las ciertamente exitosas aplicaciones de los números a ciertos dominios empíricos. Quienes, como los estructuralistas, piensan que aplicar los números de la aritmética para contar objetos del mundo es sólo aparear éstos con lugares de una serie matemática, no ven que al hacer tal cosa hay una intermediación de conceptos y, en base a éstos, hay una fijación de los lugares de la serie con algo extramatemático. Para contar necesito primero saber qué voy a contar: caballos, animales, objetos individuales, etcétera; y, para ello, debo recurrir a una clasificación previa de las cosas que voy a contar. Al aparear, por ejemplo, el lugar x de una serie con objetos previamente conceptualizados, le corresponderá a ese lugar x determinados conceptos, a saber, aquellos bajo los cuales caigan x objetos. De esa forma, el lugar x queda anclado con esos conceptos y no con otros; de tal manera que, en lo sucesivo, puedo definir el lugar x sin tomar en cuenta su relación con los otros lugares y sólo mediante su vinculación con dichos conceptos. Podría decir, por ejemplo, que el lugar x es aquel que está vinculado con esos conceptos y no con otros. En esos términos, podemos decir, con Russell, que el número x es lo que tienen en común esos conceptos, o bien, con Frege, que el número x es la agrupación de esos conceptos.

Los números matemáticos concebidos como elementos de estructuras abstractas pueden teóricamente interpretarse en múltiples dominios, uno de los cuales sería el que originalmente se intentó idealizar. Al parecer, este dominio está estrechamente relacionado con clasificaciones primitivas, lo cual se manifiesta en el uso empírico de los números en afirmaciones como "4 caballos". De acuerdo a eso, los números de primer nivel (al menos, en el uso del lenguaje ordinario) pueden verse como clasificaciones de agrupaciones producto de clasificaciones previas. La clasificación "3" sería la que permitiría agrupar todos los tríos que, a su vez, son el producto de cierto material empírico que ha sido tratado mediente una clasificación previa que agrupa los objetos del mundo en perros, caballos, etcétera. Vistas así las cosas, los números de primer nivel serían a los que se refieren los científicos y en general los que hablan del mundo en términos númericos. Decir, por ejemplo, "3 caballos" es equivalente a decir "un trío de caballos", o bien, que ciertos objetos conceptualizados como caballos en forma individual pueden clasificarse en conjunto en el grupo de los tríos. Siendo así, el "3" sería una clasificación de objetos previamente clasificados. Pero el 3 de la aritmética no es, en sí mismo, una clasificación, aunque puede verse como una clasificación idealizada que tiene, a diferencia de las clasificaciones ordinarias, ciertos criterios de identidad claramente determinados. La clasificación "3" que agrupa todos los tríos es más vaga e imprecisa que el 3 de la aritmética para el cual valen leyes universales y necesarias. Así pues, en base a todo eso, concluyo que pueden distinguirse los números aritméticos (que llamé de segundo nivel) de los "números" de primer nivel que serían, al menos en el uso del lenguaje ordinario, clasificaciones que agrupan pares, tríos, etétera.

Vistas así las cosas, las afirmaciones sobre los números que han venido haciendo los especialistas deberán entenderse como afirmaciones sobre los números de primer, segundo o tercer nivel. En función de eso, por ejemplo, la discutida afirmación de Frege de que los números están asociados a conceptos específicos debe entenderse como describiendo números de tercer nivel mediante los cuales se intenta retratar los números de segundo nivel en tanto que éstos, a su vez, son pinturas de los números de primer nivel; éstos pueden verse como clasificaciones formadas a partir de ciertos conceptos a los cuales, por consiguiente, están asociados; y, en esos términos, en efecto podemos decir que los números de segundo nivel están asociados a conceptos específicos, aunque no directamente, sino a través de los números de primer nivel que intentan retratar. En resumen, tanto Frege como Dedekind o Kitcher tienen razón, al menos en parte, y la útilidad de la división conceptual que propongo es, sobre todo, que permite ubicar lo que se ha dicho acerca de los números fijando así sus límites y alcances.

ALVAREZ CARLOS:

[1987]. "Sobre las posibilidades de una equivalencia para el fundamento de la aritmética" en *Theoria* segunda epoca, año II, curso 1986-87, números 5-6, España, pp. 345 a 364.

ALVAREZ S., BRONCANO F. y QUINTANILLA M. A. (eds):

[1984]. *Lógica y Filosofía del Lenguaje* vols. I y II, Ediciones Universidad de Salamanca, Salamanca.

ANGELELLI IGNACIO:

[1967]. *Studies on Gottlob Frege and Traditional Philosophy,* D. Reidel Publihing Company, Dordrech Holland, 1967.

ARQUIMEDES:

[s III ac]. "On the equilibrium of planes or the Centres of Gravity of planes" traducción de Thomas L. Heath, *Great Books of the Western World,* tomo II, William Benton, Publisher, *Encyclopaedia Britannica,* 1952, pp. 502 a 519.

ARISTOTELES:

[s IVa ac]. *Logic,* traducción de E. M. Edghill, A. J. Jenkinson, G. R. G. Mure, y W. A. Pickard-Cambridge, *Great Books of the Western World,* tomo VIII, William Benton, Publisher, *Encyclopedia Britannica,* 1952, pp. 5 a 253.

[s IVb ac]. *Metaphysics,* traducción de W. D. Ross, *Great Books of the Western World,* tomo VIII, William Benton, Publisher, *Encyclopedia Britannica,* 1952, pp. 499 a 626.

AVILA ALFONSO:

[1987]. "Las estructuras matemáticas y las ciencias empíricas" en *Notas de Investigación*, cuaderno No. 1, Facultad de Filosofía y Letras, UNAM, México.

BAUM ROBERT (ed):

[1973]. *Philosophy and Mathematics: from Plato to the present*, Freeman, Cooper and Co., San Francisco.

BENACERRAF PAUL:

[1965]. "What numbers could not be" en Benacerraf P. y Putnam H. [1983] pp. 272 a 294.

BENACERRAF P. y PUTNAM H. (eds):

[1983]. *Philosophy of Mathematics*, segunda edición, Cambidge University Press, Cambridge.

BERKELEY GEORGE:

[1748]. *A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge*, selección en Baum [1973], pp. 175 a 192.

BIRJUKOV B. V:

[1964]. *Two Soviet Studies on Frege*, Dordrecht, Holland.

BOREL EMILE:

[1938]. *Traite du Calcul de Probabilies et ses Applications* Gauthier-Vilars, Paris.

BOWNE G. D:

[1966]. *The Philosophy of Logic 1880 - 1908*, Mouton and Co. London, The Hague, Paris.

BURALI-FORTI:

[1897]. "A question on transfinite numbers *and* on well-ordered classes" en Heijenoort [1967] pp. 104 a 112.

BURGE TYLER:

[1984]. "Frege on extension of concepts from 1884 to 1903" en *The Philosophical Review* xciii, no. 1, January 1984.

CANTOR GEORG:

[1871]. "Extensión de un teorema de las series trigonométricas" en Sestier [1986].

[1883]. "Foundations of a general theory of manifolds", Leipzig, traducción de Uwe Parpart, en *The Campaigner* 9, 1976.

[1886]. "Carta de Cantor a un maestro berlines", Halle, traducción de Andrés Sestier en *Matemáticas y Enseñanza*, No. 17, vol. VI, no. 1, UNAM, México, 1982.

[1895] "Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers" en Cantor [1955] pp. 85 a 136.

[1897]. "Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers" en Cantor [1955] pp. 137 a 201.

[1955]. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers* traducción de Philip Jourdain, Dover, NY.

[1962]. "Correspondencia de G. Cantor" en Cavailles [1962] y Sestier [1986].

CAVAILLES JEAN:

[1962]. *Philosophie Mathématique*, Hermann, Paris.

COPI IRVING:

[1958]. "The Burali-Forti paradox" en *Phil. Sc.* 25, 1958, pp. 281 a 286.

COURANT R. y ROBBINS H:

[1971]. *¿Qué es la Matemática?*, Aguilar, Madrid.

COURNOT ANTOINE:

[1838]. *Investigaciones acerca de los Principios Matemáticos de la Teoría de las Riquezas*, Alianza Editorial, Madrid, 1969.

DAUBEN JOSEPH:

[1979]. *Georg Cantor: his Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Harvard University Press, Camb. Mass.

[1983]. "Georg Cantor y la teoría de conjuntos transfinitos", *Investigación y Ciencia*, España, agosto de 1983.

DEDEKIND RICHARD:

[1872]. "Continuity and irrational numbers" en Dedekind [1963].

[1893]. "The nature and meaning of numbers" en Dedekind [1963].

[1963]. *Essays on the Theory of Numbers*, Dover, New York.

DIMITRIU ANTON:

[1983]. "Les limitations des systèmes formeles" en *International Logic Review* N. 27 Giugno 1983, pp. 5 a 27.

DUMMETT MICHAEL:

[1959]. "Wittgensten's Philosophy of Mathematics" en *Truth and other Enigmas*, Duckworth, G. B. y en Pitcher [1966], pp. 420 a 447.

[1963]. *Frege Philosophy of Language*, Duckworth, London.

[1981]. *The Interpretation of Frege's Philosophy* , Duckworth, London and Cambridge Mass.

EUCLIDES:

[s III ac]. *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* traducción de Thomas L. Heath, it Great Books of the Western World, tomo II, William Benton, Publisher, *Encyclopedia Britannica,* 1952, pp. 1 a 396.

FIELD HARTRY:

[1980]. *Science Without Numbers,* Basil Blackwell, Oxford.

FRAENKEL ABRAHAM:

[1973]. *Foundations of Set Theory,* segunda edición revisada y aumentada por Bar-Hillel y Levy Azriel con la colaboración de Van Dalen D, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

[1976]. *Teoría de los Conjuntos y Lógica*, traducción de Roberto Caso Bercht, UNAM, México.

FRECHET MAURICE:

[1958]. *Las Matemáticas y lo Concreto*, traducción de Gustavo Machado, UNAM, México.

FREGE GOTTLOB:

[1879]. *Begriffsschrift* en Heijenoort [1967] pp. 1 a 82 y en Frege [1972a] pp. 7 a 104.

[1882]. "Sobre la justificación científica de una conceptografía" en Frege [1972a] pp. 209 a 214.

[1884]. *Die Grundlagen der Arithmetik*, Hildesheim, Germany, 1961.

[1885]. "On formal theories of arithmetic" en Frege [1984] pp. 112 a 121.

[1891]. "Function and concept" en Frege [1972a] pp. 215 a 235, en Frege [1980a] pp. 21 a 41 y en Frege [1984] pp.137 a 156.

[1892a]. "On sense and meaning" en Frege [1980a] pp. 56 a 78 y en Frege [1984] pp. 157 a 177.

[1892b]. "On concept and object" en Frege [1980a] pp. 42 a 55 y en Frege [1984] pp. 182 a 194.

[1893]. *The Basic Laws of Arithmetic* Translated and edited with an Introduction by Mongomery Furth, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1964.

[1895a]. "A critical elucidation of some points in E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*" en Frege [1980a] pp. 86 a 106 y en Frege [1984] pp. 210 a 228.

[1895b]. "Coments on sense and meaning" en Frege [1979] pp. 118 a 125.

[1902]. "Leter to Russell" en Heijenoort [1967] pp. 126 a 128 y en Frege [1976] pp. 131 a 133.

[1904]. "What is a function?" en Frege [1980a] pp. 107 a 116 y en Frege [1984] pp. 285 a 292.

[1914]. "Logic in mathematics" en Frege [1979] pp. 202 a 250.

[1971]. *Estudios sobre Semántica*, traducción de Ulises Moulines, ediciones Ariel, Barcelona.

[1972a]. *Conceptografía, Los Fundamentos de la Aritmética, y otros Estudios Filosóficos*, traducción de Hugo Padilla, UNAM, México.

[1972b]. *Fundamentos de la Aritmética* con un estudio de Claude Imbert, traducción de Ulises Moulines, Editorial Laia, Barcelona. (Traducción castellana de Frege [1884]).

[1976]. *Philosophical and Mathematical Correspondence* Basil Blackwell, Oxford.

[1979]. *Posthumous Writings*, Basil Blackwell, Oxford.

[1980a]. *Translation from the Philosophical Writings of Gottlob Frege* edited by Peter Geach and Max Black, Basil Blackwell, tercera edición, Oxford.

[1980b]. *Funktion, Begriff, Bedeutung*, Vandenhoeck and Ruprecht in Göttingen.

[1984]. *Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy* edited by Brian Mc. Guinness, Basil Blackwell, Glasgow.

GALILEO GALILEI:

[1638]."Jornada Tercera" de las *Consideraciones y Demostraciones Matemáticas sobre dos Nuevas Ciencias*, edición de C. Solis y J. Sadaba, Editora Nacional, Madrid, 1981, pp. 265 a 379.

GARCIADIEGO ALEJANDRO:

[1985]. "The emergence of some of the nonlogical paradoxes of the theory of set, 1903-1908" en *Historia Mathematica* 12, pp. 337 a 351.

[1986]. "Note on rewriting the history of the foundations of mathematics at the turn of the century" en *Historia Mathematica* 13, 1986, pp. 39 a 41.

[1988]. *Bertrand Russell and the Origin of the Set Theoretic Paradoxes*, por editarse en Suiza.

GARCIADIEGO A. y MOORE G:

[1981] "Burali-Forti's paradox: a reappraisal of its origins", en *Historia Mathematica* 8, pp. 319 a 350.

GEACH PETER:

[1956]. "On Frege's way out" en Klemke [1968] pp. 502 a 504.

GÖDEL KURT:

[1931]. "Discusión sobre la fundamentación de la matemática" en Gödel [1981] pp. 97 a 100.

[1944]. "La lógica matemática de Russell" en Gödel [1981] pp. 297 a 327.

[1947]. "¿Qué es el problema del continuo de Cantor?" en Gödel [1981] pp. 340 a 362.

[1981]. *Obras Completas*, edición de jesús Mosterín, Alianza Editorial, Madrid.

HAAPARANTA L. y HINTIKKA J. (eds):

[1986]. *Frege Synthesized*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, Lancaster, Tokyo.

HAHN HANS:

[1934]. "El infinito" en Newman [1956] vol. 4, pp. 384 a 401.

HEIJENOORT JEAN VAN:

[1967]. *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

HILBERT DAVID:

[1900]. "Problemas futuros de las matemáticas" Congreso Mundial de Matemáticas en *Comunicaciones Internas* No. 7, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1980.

[1904]. "On the foundations of logic and aritmetic", en Heijenoort [1967] pp. 129 a 138.

[1925]. "On the infinite", en Heijenoort [1967] pp. 367 a 392.

[1927]. "The foundations of matematics", en Heijenoort [1967] pp. 464 a 479.

IMBERT CLAUDE:

[1972]. "Estudio de los *Fundamentos de la Aritmética* de Frege" en Frege [1972b].

JONES CHARLES:

[1978]. *The Concept of ONE as a Number*, tesis de doctorado en filosofía en la universidad de Toronto, Canada.

[1985]. "Aristotle's influence on the foundations of Euclid's *Elements*" presentado en el congreso de Filosofía e Historia de las Matemáticas, UNAM, México, diciembre de 1985, y publicado en español en *Mathesis* vol. III, no. 4, México, noviembre de 1987, pp. 375 a 387.

KITCHER PHILIP:

[1984]. *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, N. Y. and Oxford.

[1986]. "Frege, Dedekind and the philosophy of mathematics" en Haaparanta L. and Hintika J. [1986] pp. 299 a 342.

[1988]. "Mathematical naturalism" en Aspray, William and Kitcher, Philip, *History and Philosophy of Modern Mathematics*, University of Minesota Press, Minneapolis, pp. 293 a 325.

KLENK V. H:

[1976]. *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, Martinus Nijhoff, The Hague, Netherlands.

KLEMKE E. D. (ed):

[1968]. *Essays on Frege*, University of Illinois Press, Urbana Chicago and London.

KLINE MORRIS:

[1972]. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, N. Y.

KÖRNER STEPHAN:

[1960]. *Introducción a la Filosofía Matemática* traducción de Carlos Gerhard, Siglo XXI, México.

[1965]. *La Matemática Godeliana y sus Implicaciones Filosóficas*, traducción de Eli de Gortari, UNAM, México, 1972.

KOYRE ALEXANDER:

[1968]. *Metaphysics and Measurement*, Chapman and Hall, Londres.

KRIPKE SAUL:

[1981]. *El Nombrar y la Necesidad* traducción de Margarita Valdés, UNAM, México, 1985.

LAKATOS IMRE:

[1976]. *Proofs and Refutations: Logic of Mathematical Discovery,* editado por John Worrall y Elie Zahar, Cambridge University Press, Inglaterra.

[1978]. *Mathematics, Science and Epistemology* editado por John Worrall and Gregory Currie, Cambridge University Press, Inglaterra.

MENDELSOHN RICHARD:

[1982]. "Frege's *Begriffsschrift* theory of identity" *Journal of the History of Philosophy* vol. XX, No. 3, pp. 279 a 299.

MILL J. S.:

[1869]. *A System of Logic*, Harper and Brothers Publishers, New York. Selección en Baum [1973], pp. 238 a 262.

MIRO QUESADA FRANCISCO:

[1987]. "La naturaleza del conocimiento matemático: crítica a un libro de Philip Kitcher" *Crítica, Revista Hispanoamericana de Filosofía.* Vol. XIX, No. 57, diciembre 1987, pp. 109 a 136.

MOORE GREGORY:

[1978]. "The origins of Zermelo's axiomatization of set theory" *Journal of Philosophical Logic* 7, pp. 307 a 329.

MOULINES ULISES:

[1982]. *Exploraciones Metacientíficas*, Alianza Universidad, Madrid.

NAGEL E. y NEWMAN J:

[1931] "La demostración de Gödel" en Newman [1969] pp. 79 a 116.

NEWMAN JAMES (ed):

[1956]. *Sigma: el Mundo de las Matemáticas*, tercera edición, Grijalbo, Madrid, 1974.

[1969]. *Matemática, Verdad y Realidad*, Grijalbo, España.

NEWTON ISAAC:

[1687] *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural y su Sistema del Mundo*, edición de Antonio Escohotado, Editora Nacional, Madrid, 1982.

OLIVE LEON:

[1981]. "El concepto de probabilidad" en *Crítica* vol. XIII, no. 37, México, abril de 1981, pp. 29 a 56.

ORAYEN RAUL:

[1980] *La Ontología de Frege*, Instituto Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia, Universidad Nacional de la Plata, Argentina, vols. 3 y 4.

[1987]. "Sobre un enfoque erróneo clásico de las paradojas conjuntísticas" presentado en el seminario de investigadores del Instituto de Investigaciones Filosóficas de la UNAM, México, en diciembre de 1987 y por aparecer en *Revista Latinoamericana de Filosofía*, vol 1 de 1989.

[1988] "Los *Werthverlauf* de Frege y la teoría de conjuntos", *Análisis Filosófico* vol. VIII, no. 1, mayo 1988, Buenos Aires, pp. 1 a 18.

PARSONS CHARLES:

[1976]. "Some remarks on Frege's conception of extension" en Schirn vol. 1, pp. 265 a 278.

PARSONS TERENCE:

[1984]. "Why Frege should not have said 'the concept horse in not a concept'?" *Mathematical Recearch:* Frege Conference, proceding of the international conference held at Schwerin (GOR), Sep. 10 - 14.

PEANO:

[1889]. "The principles of arithmetics, presented by a new method" en Heijenoort [1967] pp. 83 a 97.

PITCHER GEORGE (ed):

[1966]. *Wittgenstein: Philosophical Investigations,* MacMillan, Londres, 1968.

PLATON:

[s IV ac]. *The Republic,* traducción de Benjamin Jowett, *Great Books of the Western World,* tomo VII, William Benton, Publisher, *Encyclopedia Britannica,* 1952, pp. 295 a 441.

PUTNAM HILARY:

[1967]. "Mathematics without foundations" en Benacerraf P. y Putnam H. [1983] pp. 295 a 314 y en Putnam [1975] pp. 43 a 59.

[1971]. "Philosophy of logic" en Putnam [1975], pp. 323 a 357.

[1975]. *Mathematics Matter and Method,* Philosophical Papers, volumen I, segunda edición, Cambridge, University Press, N.Y. 1979.

[1979]. "Philosophy of mathematics: a report" en *Current Research in Philosophy of Science*, 1979, pp. 386 a 398.

PROCLO DE LICIA:

[s V]. "Prólogo a los *Elementos* de Euclides" en *Científicos Griegos* vol. II, edición de Franscico Vera, Aguilar, Madrid, 1970, pp. 1147 a 1184.

QUINE W. VAN ORMAN:

[1951]. *Mathematical Logic*, Harvard University Press, USA, 1981.

[1953]. *From a Logical Point of View*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1961 .

[1955]. "On Frege's out" en Klemke [1968] pp. 485 a 501.

[1970]. *Philosophy of Logic* Prentice-hall, Englewood Cliffs, N. J.

[1974]. *Las Raíces de la Referencia,* traducción de Manuel Sacristan, Revista de Occidente, Madrid, 1977.

[1981]. *Theories and Things* The Belknap Press of Harvanrd University Press, Cambirdge, Massachusetts and London, England.

RAMSEY F. P:

[1931]. *Foundations of Mathematics and Other Logical Essays* ed. por Richard Bevan, Braithwaite; Paul y Trench, Trubner, London; Harcourt, Brace, N. Y.

RESNIK M. D:

[1980]. *Frege and the Philosophy of Mathematicas*, Cornell University Presss, Ithaca and London.

ROSADO HADDOCK GUILLERMO:

[1985]. *Exposición Crítica de la Filosofía de Gottlob Frege,* Republica Dominicana.

RUSSELL BERTRAND:

[1902]. "Letter to Frege" en Heijenoort [1967] pp. 124 y 125.

[1903]. *The Principles of Mathematics* George Allen and Unwin ltd, London.

[1908]. "Mathematical logic as based on the theory of types" en Russell [1956] pp. 75 a 144.

[1918]. "Introducción al *Tractatus* de Wittgenstein" en Wittgenstein [1918].

[1919]. *Introduction to Mathematical Philosophy*, George Allen and Unwin ltd, London.

[1956]. *Logic and Knowledge. Essays 1901-1950,* George Allen and Uniwin ltd. London.

RUSSELL B. y WHITEHEAD A. N:

[1910]. *Principia Mathematica*, second edition, Cambridge University Press, 1950.

SCHIRN MATTHIAS:

[1976]. *Studien zu Frege*, vols. I y II, Frommann Holzboog, Stuttgart.

SESTIER ANDRES:

[1986]. *Documentos Históricos de la Matemática*, UAM, México.

SHWAYDER D. S.:

[1971]. "El pensamiento de Wittgenstein sobre las matemáticas" en Winsh y colaboradores [1971], pp. 49 a 98.

SLUGA HANS:

[1980]. *Gottlob Frege,* Routledge and Kegan Paul, London.

STEINER MARK:

[1975]. *Mathematical Knowledge,* Cornell University Press, Ithaca and London.

STROUD BARRY:

[1965]. "Wittgenstein and logical necessity" en Pitcher [1966], pp. 477 a 496.

TARSKI ALFRED:

[1941]. *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*, Oxford University Press, New York, tercera edición revisada 1965.

VALDIVIA LOURDES:

[1984]. "Lo indecible y sus raíces categoriales en la teoría de Frege" en Alvarez S., Broncano F. y Quintanilla M. A. [1984], vol. II, pp. 297 a 315.

WEDBERG ANDERS:

[1955]. *Plato's Philosophy of Mathematics*, Almqvist and Wiksell, Stockholm.

WELS RULON:

[1951]. "Freg's ontology" en Klemke [1968] pp. 3 a 41.

WILDER RAYMOND:

[1952]. "El método axiomático", traducción de Manuel Sacristán, *Matemáticas, Verdad y Realidad* editado por James R. Newman, Gijalbo, Barcelona, 1974.

WINSH PETER y Colaboradores:

[1971]. *Estudios sobre la Filosofía de Wittgestein*, traducción de León Mirlas, Eudeba, Buenos Aires.

WITTGENSTEIN LUDWIG:

[1918]. *Tractatus Logico-Philosophicus* traducción de Enrrique Tierno Galván, Alianza Editorial, España, 1980.

[1967a]. *Zettel,* editado por G.E.M. Anscombe and G.H. von Wright, University of California Press, Berkeley y los Angeles, 1970.

[1967b]. *Remarks on the Foundations of Mathematics* edited by Anscom, Wright and Rhees translated by G. E. M. Anscombe, Basil Blackwell, Oxford.

[1974]. *Philosophical Investigations*, Basil Blackwell, Oxford.

WRIGHT CRISPIN:

[1980]. *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*, Duckworth, Gran Bretaña.

[1983]. *Frege's Conception of Numbers as Objects* , Aberdeen University Press, Great Britain.

[1984]. *Frege* (editor for the special issue) en *The Philosophical Quarterly* vol. 34, no. 136, July 1984.