UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"ANALISIS Y SOLUCION DE MODELOS DE PRODUCCION-INVENTARIO MULTIPERIODICOS DETERMINISTICOS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

YOLANDA LAZO TISCAREÑO

Febrero 88

1. INTRODUCCION .

En los albores de la civilización, el hombre, movido en un principio por su instinto, sintió la necesidad de almacenar alimentos y así aumentar la posibilidad de su supervivencia. Posteriormente, en una actitud más racional, inició la contabilidad de los mismos, y así nació la idea de inventario. Con el desarrollo de la civilización y la comercialización de los bienes, en sus manifestaciones primarias, como fué el trueque de materias primas y bienes rudimentarios, el hombre se vió impulsado a controlar sus recursos de venta, al aparecer el concepto de empresa incipiente; brotan los primeros sistemas productivos, y con ello surgen cuestionamientos como :
¿Cuánto demando?, o ¿cuánto produzco?. ¿Con qué frecuencia demando?, o ¿con qué frecuencia produzco?. Actualmente, toda persona que deba tomar decisiones se plantea esas preguntas. La teoría de inventarios proporciona las respuestas, a través del análisis, la elaboración de modelos conceptuales y formales y el uso de técnicas de solución apropiadas.

Se percibe la necesidad de que cualquier organización del ramo lleve un inventario de sus bienes, ya que puede serle físicamente imposible o económicamente no rentable poseer bienes no inventariados ante la circunstancia de que hubiese demanda, o bien porque pueden haber escasez o fluctuaciones notables de precios en las materias primas. Además, en empresas pequeñas las ventas al menudeo, y en consecuencia la ganancia, pueden aumentar si se tiene un inventario completo de los bienes que se ofrecen al consumidor.

Por lo anterior, el control y el mantenimiento de inventarios de los bienes físicos es una necesidad en cualquier empresa dentro de la estructura económica, porque representa un área muy importante dentro de las organizaciones. La administración de los inventarios, junto con la planeación de la producción, determina el nivel de ventas, la fabricación y la distribución bajo control de los productos.

La primera literatura relacionada con inventarios es la que se refiere a la demanda del dinero, la relativa a mantener cantidades de dinero en existencia. En 1988 Edgeworth trabajó sobre la determinación de las reservas en los bancos en presencia de incertidumbre.

En 1915 F. W. Harris, publicó la fórmula clásica del tamaño del lote económico. Mientras que Raymond, explica la manera en que diversas extensiones del modelo de lote económico pueden utilizarse en la práctica. En los años 20's, bajo los ímpetus de las pérdidas en inventario producidas por la gran depresión de 1921, la teoría de inventarios recibió un impulso importante.

En 1926, Benjamin Cooper formalizó un sistema de inventarios en el cual tuvo en cuenta la tasa de producción, a diferencia del sistema de Harris en que la tasa de producción la supuso considerablemente más alta que la tasa de demanda. En 1928, Thornton C. Fry estudió un sistema de inventarios en el cual los requisitos no estaban precisados. Mostró que la teoría de probabilidades podría aplicarse en su sistema. El primer intento por manejar una gran diversidad de sistemas de inventarios y concebir una teoría de los inventarios, lo llevó a cabo fair Freld E. Raymond con su libro "Cantidad y Economía en manufactura", publicado en 1931.

Wilson pone su atención en los fenómenos estocásticos, incluyendo consideraciones probabilísticas. En 1945 durante la Segunda Guerra Mundial se desarrolló un modelo estocástico útil, llamado Christmas Tree Model, aplicable al caso en que existe sólo una oportunidad de pedido en su momento dado. En 1951, Whitin realiza el trabajo "El manejo de la teoría de inventarios", que publica en 1953, en donde detalla los modelos estocásticos de inventarios, y que es la revisión estocástica del modelo del lote económico simple.

La publicación en 1951 de "Política Optima de Inventarios", de Arrow, Harris y Marsckak, marca el inicio de lo que podría llamarse el moderno análisis de inventarios. Dicho trabajo constituye un considerable avance en el estudio de sistemas de inventarios y ha servido de base a numerosos investigadores del tema.

Un intento de analizar el sistema general propuesto por estos tres autores, fue hecho por Dvorestsky, Kiefer y Wolfowitx, cuyas conclusiones se publicaron en 1952 en su trabajo "El problema del inventario". Allí se incluyen herramientas estadísticas y matemáticas más amplias, y los sistemas estudiados son de naturaleza más general. En 1960, se inició el estudio del inventario dinámico con demandas estocásticas. En 1962, Donald Iglehart estudió un problema de inventario dinámico con n períodos, en 1969 se utilizaron por primera vez, la programación dinámica y las redes de flujo para analizar los modelos de inventarios. En 1973, se inicia el estudio de modelos dinámicos multietapas y multiproductos, usando técnicas de análisis propias de la investigación de operaciones.

En 1987, se maneja con programación dinámica un modelo multi-períodos y multi-instalaciones. Los tiempos de retraso en la manufactura de un producto aumentan los costos y la incertidumbre acerca de los requerimientos, el modelo tradicional ignora este tiempo de retraso, Karkamar analiza las relaciones que existen entre el tamaño del lote y el tiempo de retraso y sus implicaciones sobre el inventario. H. Jonsson y E. A. Silver analizan un modelo de inventario con revisión periódica y dos etapas de distribución. Bryan L. Devermeyer desarrolla un modelo para una clase específica de sistema de inventario para varios productos perecederos, con demandas independientes y sustitución económica entre productos.

En los tiempos actuales, con la necesidad de los grandes abastos, el progreso tecnológico, los cambios en los patrones de consumo, el crecimiento demográfico, los problemas de inventario, han sido foco de gran interés y se ha profundizado en el tema.

El estudio de la teoría de inventarios proporciona las características de la política óptima de operación de los sistemas productivos, con base en la elaboración de modelos matemáticos que aportan los criterios para controlar la producción, y así maximizar las utilidades, o bien minimizar los costos.

El objetivo de este estudio es hacer un análisis de los modelos clásicos de producción inventario y sus extensiones y de los modelos que consideran producción multiperiódica cuyos costos se interpretan como funciones cóncavas y convexas; Se presenta un esquema de aplicación con ejemplos representativos para cada caso.

Para ello se hace una recopilación de información, definiendo la terminología y el concepto de inventario, clasificándolos según la estructura de los componentes y seleccionando de entre la gama de combinaciones posibles, sólo algunos casos particulares de tipo determinístico para esta investigación. Al tipificar las características de una situación de inventarios, se conceptualiza el modelo, desmembrando los elementos relevantes y detectando las variables de decisión y sus interrelaciones para plasmarla en símbolos con una estructura matemática en los modelos formales conocidos.

Los modelos matemáticos se interpretan detalladamente en su formulación, teniendo como soporte las técnicas de programación lineal y de Teoría de Redes de flujo, se presentan diversos métodos de solución para cada caso y finalmente se proporcionan ejemplos que tipifiquen las situaciones de los sistemas de producción-inventario analizadas.

Los sistemas de producción-inventario que se analizan en este estudio son los que se consideran una demanda conocida, no necesariamente constante, período a período, la producción de uno o varios artículos, el horizonte de planeación finito y las funciones de costo lineales y no lineales.

El presente trabajo comprende los siguientes capítulos: El primero define los conceptos básicos, introduciendo al lector en el lenguaje de los inventarios y ubicándolo dentro de los sistemas productivos, para así definir la función de los mismos. Se dá a conocer la estructura y componentes, clasificándolos según los diversos tipos, se agrega la sección de análisis en un problema de producción-inventario y las etapas que deben cubrirse para darle solución. En el segundo capítulo se describen los modelos clásicos de producción-inventario, analizando el modelo de lote económico en su forma pura primeramente y enseguida cuando estos forman parte de la producción. Se extienden los modelos integrados a los procesos de producción suponiendo que existen ventas pendientes. Se describe detalladamente la estructura matemática y los teoremas que la soportan.

En el Tercer Capítulo se trata la formulación y descripción del modelo multiperiodico con costos lineales, cuando existe déficit y cuando no es permitido, se plantea el modelo como un problema de programación lineal y su solución buscando puntos extremos, se relaciona con Teoría de flujo en redes y el problema de transporte. Se proporcionan métodos de solución y ejemplos. En el capítulo cuatro se detalla el planteamiento de un problema de producción-inventario cuando los costos asociados son funciones cóncavas y convexas, se vé a detalle la justificación matemática que permite alcanzar la optimalidad de los mismos, se agregan extensiones de los modelos cuando se limita la producción de los artículos. Se describen los métodos de solución y se proporcionan ejemplos.

CAPITULO I

LOS SISTEMAS DE PRODUCCION-INVENTARIO.

Al hablar de sistemas productivos se piensa en algo más complejo que la simple producción física de bienes, se alcanza la amplia perspectiva de una organización que abarca diversas actividades, es por eso que se hace necesario definir los componentes que intervienen en el sistema productivo en estudio, que es la teoría de inventarios; describir las funciones, relaciones y clasificación de los mismos, para situarlo con sus interrelaciones externas y conocer su estructura interna.

El capítulo se desarrolla como sigue: En la primera sección se sitúa el concepto de inventario y se establece la función de los mismos. En la segunda se dan a conocer la estructura y componentes de los inventarios; en la tercera sección se clasifican los diversos tipos de modelos de inventarios; en la cuarta sección se describen las etapas que tienen que cubrirse para estructurar y dar solución a un problema de control de inventarios.

1.1 DEFINICION Y FUNCION DE LOS INVENTARIOS .

Un Inventario es un subsistema inherente de los sistemas productivos, tal subsistema está compuesto de recursos útiles que se encuentran ociosos en algún momento. Se dice que el producto está ocioso, porque no se vende ni se transporta y es útil, dado que existe un motivo para almacenarlo, de manera controlada para un uso posterior. Los recursos parte de los inventarios comprenden, dinero, bienes materiales y el talento físico de los individuos. En un ambiente fabril, el inventario se compone de materia prima, productos semiterminados y artículos terminados. En el comercio son los bienes puestos a la venta, los almacenados. La producción de bienes es una de las funciones básicas de cualquier sociedad.

¿En qué momento existe un problema de inventario?

Cuando el nivel de cantidad de recurso disponible (sea uso de maquinaria, trabajadores o bienes) se puede variar a través del control que ejerce un tomador de decisiones, sobre qué producir, cuánto y cuándo, para que la operación del sistema sea máxima la productividad o bien el costo de manufactura sea mínimo. El objetivo en los problemas de inventario consiste en minimizar los costos (totales o esperados) del sistema, sujeto a la restricción de satisfacer una demanda (conocida o aleatoria).

Para formalizar la descripción de un proceso de inventario, considere el sistema en la figura 1.1a. Sea P(t) la tasa a la cual los materiales se están sumando al inventario en el tiempo t, y w(t) sea la tasa en la cual los materiales se separan del inventario.

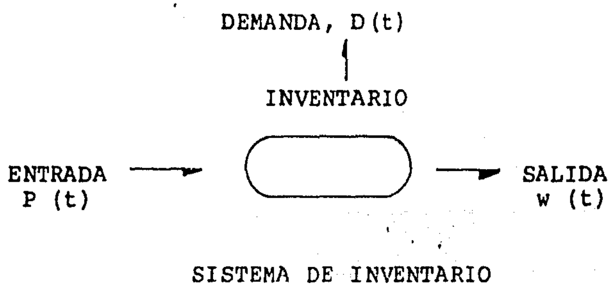


FIGURA 1.1a

Usualmente se supone que la salida es una respuesta a la demanda, con tasa D(t), lo cual tiene una causa externa y no está bajo control. La demanda puede estar influida por políticas de precios, de publicidad o la demanda puede ser generada por un proceso de producción que la empresa opere. Inicialmente se supone que D(t) no es controlable. La tasa de salida será igual a la tasa de demanda a menos que el inventario sea exhausto, entonces decimos que se está "fuera de inventario". El proceso de entrada está parcialmente bajo control, en tanto que podemos decidir cuándo y cómo ordenar de la fuente o de los proveedores. La existencia de un inventario refleja una pasividad entre dos actividades, las cuales se denominan proceso de oferta y de demanda. Se crean inventarios, para lograr cierta independencia entre estapas consecutivas en el proceso de manufactura o entre escalas consecutivas en sistemas de distribución. Es común encontrar inventarios en tránsito, inventarios en contingencia, inventarios estacionales e inventarios cíclicos.

La existencia de los inventarios permite la conducción de cada una de las principales actividades en forma relativamente independiente. Por supuesto, hay interacciones; sin embargo, las mismas no son tan marcadas como sería el caso si tratáramos de operar en cada una de las etapas con un abastecimiento instantáneo; ya que, cualquier interrupción del flujo en un punto del sistema afectaría muy rápidamente a todas las etapas siguientes. Podríamos decir que los inventarios son fundamentales para lograr un flujo uniforme, razonable utilización del equipo, costos adecuados de manejo de materiales y mantenimiento de un buen servicio a clientes.

Entre las funciones más relevantes de los sistemas de inventarios podemos mencionar: La explotación del mercado, en el que por medio del control se puede aprovechar la variación de los precios de los bienes, en los costos de producción, de mano de obra y de venta de los artículos. De alguna manera al contar con productos almacenados existe una segura protección contra faltantes, se puede además amortiguar cambios en la producción, suavizar irregularidades en la demanda y mediante este control económico aplicar las economías de escala.

Las fluctuaciones de precios en el mercado por cambios en la oferta o la demanda, por especulación o influencias externas, el almacenamiento que prevee futuras ventas, o el control de precios variándolos, dependiendo de las cantidades acumuladas son poderosas razones para justificar la existencia de los inventarios de bienes.

1.2 ESTRUCTURA Y COMPONENTES .

Los sistemas de control de inventario caen en dos grandes categorías : Sistemas de manufactura y Sistemas de distribución. En un sistema de distribución, el producto pasa del fabricante al vendedor mayorista, al vendedor al menudeo y por último al consumidor. En los procesos de manufactura se exhibe otro tipo de estructura de inventario. Inicia con materia prima y suministros, el proceso puede arrojar inventarios componentes, subensambles y bienes parcialmente terminados en varios niveles intermedios, antes de llegar a la etapa de producto deseado.

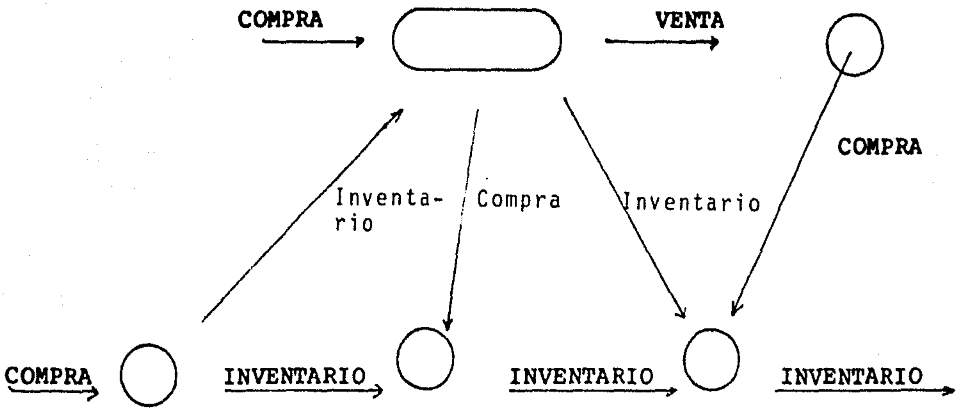
Los inventarios pueden clasificarse en función al número de niveles relacionados con los posibles puntos de almacenamiento de un producto.

La figura 1.2a muestra un proceso simple de inventario de un solo nivel, que podría ser el intermediario de un solo producto donde la dinámica del flujo es comprar, almacenar y vender. En la figura 1.2b el proceso se presenta de una manera más compleja, el ejemplo que representa puede ser la producción de un artículo que necesita para su elaboración la existencia de varios insumos.

En una empresa que maneje varios tipos de productos se deberá cuantificar cuáles son costeables de almacenar, porque lo más probable es que resulte ilógico llevar el mismo control estricto de inventario para cada uno de los productos.

SISTEMA DE UN SOLO NIVEL

FIGURA 1.2a



SISTEMA MULTINIVEL

FIGURA 1.2B

A continuación se definen los componentes principales de un sistema de inventarios : El número de artículos de los productos que se manejen en inventario pueden ser uno solo o varios, más aún, se pueden manejar productos sustitutos, perecederos o duraderos, según sea su vida útil; divisibles o indivisibles, dependiendo se aceptan o no valores fraccionarios. El tiempo de entrega es el lapso que transcurre entre el momento que se ordena un artículo o se decide fabricar éste, o el momento en el que se entrega al cliente o se termina su producción. Los tiempos de entrega de producción o re-orden pueden conocerse con certeza en cuyo caso son determinísticos, en caso contrario serán aleatorios.

El factor demanda es el más relevante en el control de los inventarios, y se define como el número de unidades requeridas en un periodo. La demanda se puede conocer con toda exactitud, o bien, puede ser aleatoria, en cuyo caso su distribución puede ser conocida o no. La demanda puede ser constante o variar en cada pariodo de tiempo. En el primer caso se le llama estática y en el segundo dinámica. La política de revisión es la estrategia que se sigue para conocer la cantidad de bienes almacenados y en un momento dado, decidir cuándo ordenar y en qué cantidad. Puede hacerse por intervalos de tiempo iguales o de manera constante. La cantidad ordenada o a ordenar, es el número de artículos que se adquieren para satisfacer la demanda, pueden ser cantidades fijas por periodo o cantidades variables.

La oferta es la cantidad de un bien o materia prima que está dispuesto de acuerdo con los precios que pueda alcanzar en el mercado. El horizonte de planeación es la clasificación está en función de los periodos de tiempo que se desean analizar, siendo éste un número finito o infinito.

La estructura de flujo en los requerimientos de materia prima para la elaboración de un producto en algunos casos se hace necesaria de manera simultánea, entonces se tiene el caso paralelo; cuando los requerimientos se dan cronológicamente tenemos el caso de flujo en serie. Es caso multicanal es una combinación de los dos anteriores.

El déficit se dá cuando el inventario es menor a la demanda, así el pedido se satisface, pero se entrega con retraso; en caso de que el excedente de demanda no se cubra, se tiene el concepto de déficit con pérdida o venta perdida.

Estructura de costos. Se describen a continuación los costos que se involucran de manera más frecuente con inventarios, pueden variar lineal o no linealmente con la cantidad producida o vendida; en el caso no lineal se interpretan como costos cóncavos o convexos.

Costos por Ordenar o costos fijos. Son aquellos que se relacionan con un proceso de producción o reorden, pero que son independientes de la cantidad que se produzca o se ordene. Se atribuyen a los gastos de transporte o flete, seguros de transporte, etc.. Costos de producción o de reorden. A diferencia de los costos fijos, si dependen de la cantidad que se produzca o se ordene, es el costo marginal de cada artículo. Costo por déficit o demanda no satisfecha. Es el costo de penalización en el que se cae por no contar con el inventario demandado. Costo del material ó costo de adquisición. Es el costo marginal de cada artículo. Se dividen en dos clases: los que se generan por compras al exterior, llamados costos de pedidos y los originados por autoabastecimiento que se les denomina de acondicionamiento o de preparación. Costo de almacenamiento. Son los costos asociados a la conservación del artículo hasta que es vendido o usado, pueden incluir el costo de capital paralizado, del espacio, del seguro y los impuestos atribuidos al almacenamiento. Para fines del planteamiento analítico de inventario se considera como un mismo costo. Los costos incurridos cada vez que se coloca un pedido, comienzan con la requisición de la orden de compra, el seguimiento de la misma, recibo de los artículos y su colocación en el inventario. Los costos de preparación se refieren a los gastos incurridos en el requerimiento, la programación, cambios de maquinaria y de proceso, recibo de inspección y almacenamiento. Los costos por desperfectos, por seguro, por abarrotamiento están considerados de alguna manera.

Clasificando los inventarios en el contexto de las características de sus principales componentes y haciendo las combinaciones posibles de las variantes de cada inciso se abarca en un 90% los diferentes tipos de inventarios que existen. Sean los siguientes:

a) Número de artículos
   1. Un artículo
   2. Varios artículos
   3. Por lote

b) Tipo de oferta
   1. Determinística
   2. Estocástica
   3. Estática
   4. Dinámica

   Tiempo de entrega
   1. Determinística
   2. Estocástico
   3. Inmediata
   4. Periódica

d) Tipo de demanda
   1. Determinística
   2. Estocástica
   3. Estática
   4. Dinámica

e) Satisfacción de la demanda
   1. Total
   2. Con déficit y reposición
   3. Con déficit y pérdida

f) Política de revisión
   1. Continua
   2. Periódica

g) Cantidad ordenada o a ordenar
   1. Fija
   2. Variable

h) Horizonte de planeación
   1. Finito
   2. Infinito

i) Estructura de flujo
   1. Paralelo
   2. Serie
   3. Multicanal

j) Estructura de costos, tipos de costos
   1. Costos por ordenar o fijos
   2. Costo del material
   3. Costo del sistema
   4. Costos de aprovisionamiento
   5. Costo por déficit
   6. Costo por transporte
   7. costo de producción de reorden

k) Función de costos
   1. Lineales
   2. Cóncavos
   3. Convexos
   4. Monótona
   5. Otros

l) Suposiciones particulares
   1. Perecederos
   2. Obsolenscencia

1.3 CLASIFICACION DE LOS SISTEMAS .

Al detectar un problema de inventario, es necesario hacer una serie de cuestionamientos sobre la realidad de la que forma parte para conceptualizarlo y después clasificarlo según la estructura de sus componentes. Un problema de inventario se considera como tal con cierto criterio a priori desmembrando los elementos que lo conforman, para detectar las variables de decisión que lo afectan. Esto es la base para la representación matemática en un modelo formal, de los cuales existen diversos ya elaborados y estudiados y que su uso depende de las características de la demanda, de los costos, de los productos, de los periodos, de la entrega de mercancía, etc.

Como se mencionó anteriormente los sistemas de control de inventario se pueden enmarcar en dos grandes categorías: los sistemas de distribución de mercancía y los sistemas de manufactura. En el sistema de distribución, el producto pasa del fabricante al vendedor mayorista al vendedor al menudeo y por último al consumidor; en los sistemas de manufactura el artículo requiere de inventario en las materias primas y en las diversas etapas del proceso de fabricación hasta ser producto terminado o parte de otro producto como subensambles, en ambos casos al entrar en la etapa de clasificación de acuerdo a la naturaleza propiamente de los componentes del problema, las preguntas serán : cómo se comporta la demanda?, el costo total es consecuencia de qué factores?, se comporta linealmente?, se consideran economías de escala?, se va a manejar un artículo o varios?, se presenta la producción de manera uniforme?. Con un razonamiento no muy complicado se intuye que la cantidad requerida en cualquier sistema de producción, es decir la demanda toma un carácter determinante en el proceso de estudio, al ser conocida se tienen los modelos de tipo determinístico, o al existir incertidumbre se plasma en los modelos de tipo probabilístico; estáticos y dinámicos según se manejen para un horizonte finito para un periodo o varios periodos. Los modelos pueden involucrar la producción de un artículo o varios artículos, una sola etapa o varias etapas.

De acuerdo a las anteriores consideraciones y dando respuesta a los cuestionamientos se tiene el siguiente cuadro, cuyas combinaciones posibles genera dieciseis modelos de producción inventario distintos.

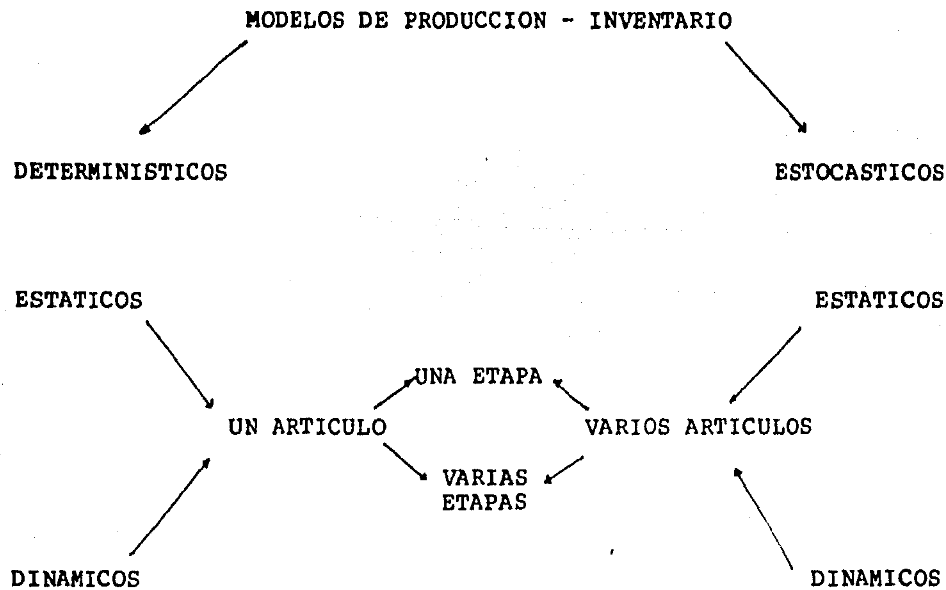

MODELOS DE PRODUCCION - INVENTARIO
DETERMINISTICOS
ESTOCASTICOS
ESTATICOS
ESTATICOS
UNA ETAPA
UN ARTICULO
VARIOS ARTICULOS
VARIAS ETAPAS
DINAMICOS
DINAMICOS

figura 1.3a

1.4 METODO DE ANALISIS .

El problema de análisis de inventario se inicia con el estudio del sistema en el que esta situado para determinar su estructura básica, sus fronteras, sus variables internas y externas y las correlaciones entre las mismas, detectando los puntos coyunturales y conociendo cuáles están bajo control ó influyen de manera determinante en el problema. Un subsistema de inventario puro es un sistema truncado, porque resulta ilógico abstraerlo del conjunto; la conexión que existe con el proceso de producción o con el subsistema de distribución y además con el megaentorno en general donde se sitúan sistemas productivos similares.

Es importante establecer de manera clara el objetivo del problema para proceder a desmemembrarlo y a aislarlo en sus partes, interacciones, relaciones y mecanismos dinámicos, conociendo además las cantidades que se utilizarán como medidas de comportamiento.

Después de que el problema ha sido entendido y planteado se cuenta con conocimientos suficientes para proceder a la etapa de integración o creación de modelos, la síntesis del sistema y representación idealizada y simplificada del prototipo: Enseguida deberán aplicarse las técnicas en busca de soluciones cuantitativas, proporcionando un juicio para la política de operación del mismo.

El análisis de un sistema de inventario comprende las siguientes etapas:

1) Determinación de las propiedades del sistema.

2) Formulación de problema de inventario.

3) Desarrollo de un modelo del sistema.

4) Derivación de una solución.

Frecuentemente al estar resolviendo un problema de inventario, se hace necesario volver a determinar las propiedades del sistema o reformular el mismo.

En la primera etapa se integra la mayor información posible sobre el problema de inventario, se determina el medio ambiente en el que se desenvuelve el sistema, se establecen los elementos, las leyes que los rigen; en la segunda, se decide cuál es realmente el problema, se abstrae la información para constituir el modelo conceptual identificando claramente las variables relevantes, después en la tercera etapa cuando el problema ha sido entendido y planteado, se toma una decisión sobre el tipo de modelo, que se utilizará para el estudio, sea determinístico, varios productos, con rezagos permitidos, etc. conociendo de antemano la información que pueden arrojar cada uno, se procede a constituir un modelo mátematico, entendiendo por ello aquel en el cual el sistema está representado por símbolos que lo describa y las reglas de decisión óptima serán derivadas del mismo, es decir, teniendo un planteamiento matemático en términos de las variables de decisión, se buscan los valores de dichas variables que minimicen la función en cuestión, habiendo considerado una serie de restricciones para la solución. Todas las restricciones del modelo deben ser expresadas como funciones matemáticas de las variables de decisión, que junto con la función objetivo, conforma un problema de optimización matemática que puede ser resuelto por métodos de cálculo, programación lineal, programación entera, o bien, algoritmos especiales.

Finalmente se aplica una técnica para obtener una respuesta a la inquietud que provoca el planteamiento del problema, o se reinicia la etapa de análisis y creación de modelo, que cada vez podrá ser más complejo dependiendo del número de variables de decisión que intervengan para representar de manera más científica o menos subjetiva la realidad de la problemática.

Cuando el propósito es tomar un criterio para implantar una política, el modelo matemático se puede manipular con reglas algebráicas para conocer como repercute el aumento de un costo en los otros elementos o bién aplicar ténicas de simulación que confronten el pasado y pronostiquen el futuro para conocer el comportamiento del sistema a través del tiempo. Las distintas validaciones son siempre permitidas ya que el modelo es una estructura, un simbolismo, un lenguaje metafísico.

CAPITULO II

2. MODELOS CLASICOS DE PRODUCCION - INVENTARIO .

Aún cuando los inventarios juegan un rol crucial en el estudio del desarrollo económico dinámico y dado que el control y mantenimiento de bienes físicos es un problema común a todas las empresas en cualquier sector de la economía, no fueron los economistas los primeros en tomar un interés activo en su solución, los pioneros en utilizar técnicas analíticas fueron los ingenieros enfocando soluciones a los problemas prácticos que surgían en la industria. Los ímpetus iniciales para utilizar métodos matemáticos en análisis de inventarios fueron despertados por el crecimiento simultáneo de las industrias manufactureras y otras ramas alternas de la Ingeniería, especialmente, la Ingeniería Industrial. La necesidad real para este análisis fue reconocido en industrias que tenían una combinación de problemas de producción con problemas de inventarios, surgiendo así los modelos clásicos de producción-inventario.

El presente capítulo describe los modelos clásicos de producción-inventario y está constituido de la siguiente manera: en la sección 2.1 se analiza el modelo de lote económico, en su forma pura y aislada, es decir, seperada de los sistemas de producción, inmediatamente después en la sección 2.2 se generaliza el mismo problema de inventario considerando el caso con déficit. En la sección 2.3 se estudian los modelos de inventario cuando éstos forman parte de los sistemas de producción, por último, la sección 2.4 corresponde a los modelos referentes a sistemas de inventarios integrados a los procesos de planeación de la producción, suponiendo que existen ventas pendientes. Se mostrará enseguida como el análisis de inventarios puede ser utilizado para ayudar al desarrollo de las reglas para controlar sistemas de inventarios.

2.1 EL MODELO BASICO DE INVENTARIO.

El problema más común sobre teoria de inventarios al que se enfrenta la Industria es cuando los niveles de existencia se agotan con el tiempo y es necesario reemplazarlos por otros nuevos. Un modelo simple que representa esta situación es el modelo básico de lote económico . Las variables de este modelo son un tanto ideales, pero a pesar de la sencillez de conceptualización, no se demerita su aplicabilidad, al contrario se utiliza frecuentemente con un considerable grado de éxito, dado que un modelo llano puede arrojar resultados aproximadados al valor óptimo en forma rápida y con costos módicos.

El problema de inventario es determinar el tamaño del lote económico, es decir qué cantidad de mercancía ordenar o producir y en qué periodos de tiempo de tal manera que los costos sean mínimos por unidad de tiempo. Para ello se describe el comportamiento de los elementos que forman parte del sistema. Suponga que los artículos de una compañía se demandan a una tasa constante y conocida d, suponga que al inicio de cada período se ordena una cantidad de artículos cuyo tiempo de entrega es cero y que siempre se dispone de artículos en inventario para satisfacer la demanda; la revisión es continua y es posible ordenar una cantidad sin límite, se considera el problema de controlar el inventario de un solo artículo, províniendo de una fuente cuya oferta es constante.

Dadas las consideraciones anteriores se formaliza con símbolos el problema, partiendo de la cuantificación de los costos y con ayuda de la figura 2.1.a se representa el comportamiento del modelo graficando el nivel de almacenamiento Q, versus tiempo.

El modelo está definido por los siguientes elementos: costos, demanda y el período de tiempo en cuestión. El costo de ordenar o manufacturar un monto Q, es representado por una función C(Q), la forma más simple es aquella en la cual el costo es proporcional al monto ordenado, es decir: C.Q; donde "C" representa precio por entidad.

Los costos que invervienen en el modelo clásico de inventario sin déficit son : costo por ordenar, costo del producto, costo por inventario. Donde : El costo por ordenar está dado por K y CQ es el costo C por número de unidades Q. El costo de inventario se calcula, como el área del triángulo A (Figura 2.1a) Por consiguiente, el costo total por periodo es :

$$CTP = K + CQ + \frac{hQ}{2d} \qquad (2.1.a)$$

El costo por unidad de tiempo o costo promedio se calcula dividiendo la anterior expresión entre el periodo T.

$$f(Q) = \frac{K + CQ + hQ/2d}{T} \qquad (2.1.b)$$

De donde sustituyendo:

$$f(Q) = \frac{Kd}{Q} + Cd + \frac{hQ}{2} \qquad (2.1.c)$$

La función f(Q) es convexa, puesto que la suma de funciones convexas es convexa y el cálculo de su mínimo puede hacerse obteniendo la primera derivada, sustentados en el siguiente teorema.

Teorema.

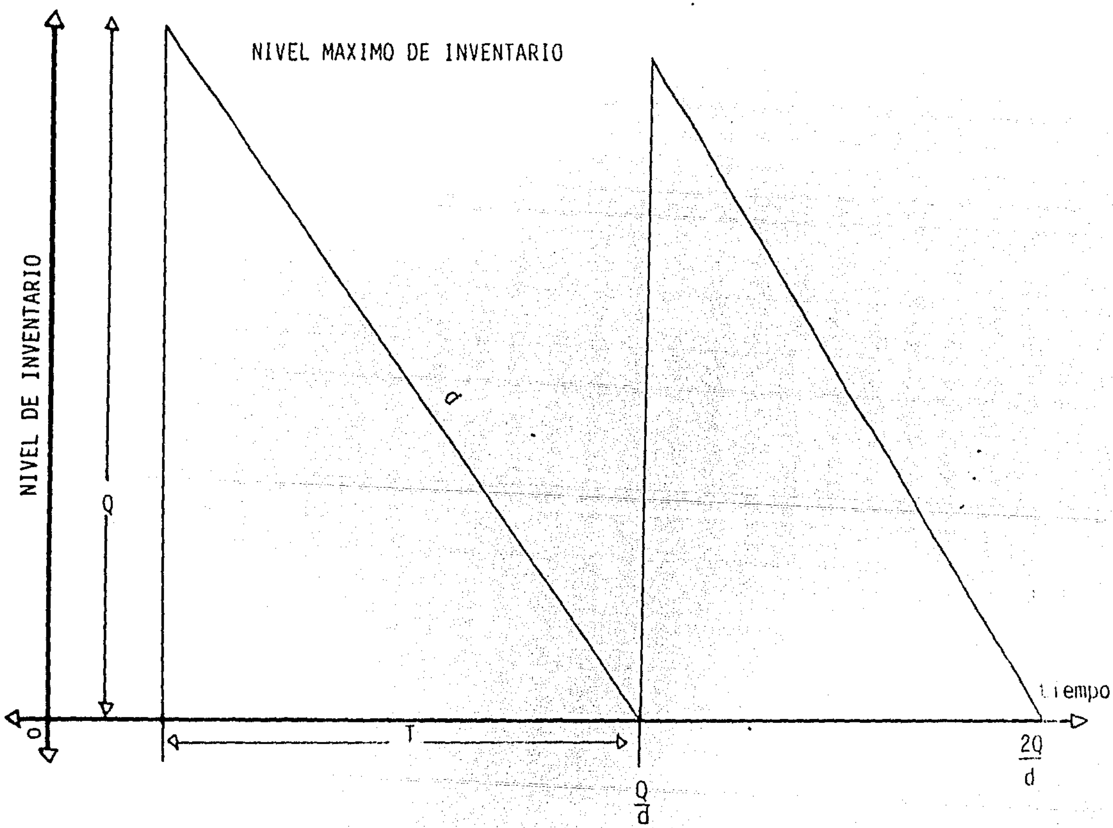
Si f(Q) tiene diferencial de segundo orden en un intervalo con centro en Xo y si f'(Xo) = o y f" (Xo) = o, entonces f(Q) tiene un mínimo local en Xo. Demostración en apéndice 1).

Por lo que si f(Q) es continua en un intervalo [a, b], entonces los óptimos locales y globales, se presentarán donde f'(Q) = o (puntos críticos) ó entre los extremos X = a, X = b.

Específicamente.

$$f'(Q) = -\frac{2Kd}{h} + Q^{2}$$

de donde : $$Q^{*} = \sqrt{\frac{2Kd}{h}} \qquad \ldots (2.1.d)$$



PERFIL DEL INVENTARIO EN EL MODELO CLASICO
PRODUCCION SIN DEFICIT
NIVEL DE INVENTARIO COMO UNA FUNCION DEL TIEMPO

figura 2.1a

y t^* queda expresado como :

$$t^* = \sqrt{\frac{2K}{dh}} \qquad \text{... (2.1.e)}$$

La expresión de Q está referida en la literatura bajo una gran variedad de nombres, es llamada fórmula del tamaño del lote, cantidad de orden económico, fórmula de la raíz cuadrada, fórmula de Wilson ó de Harris.

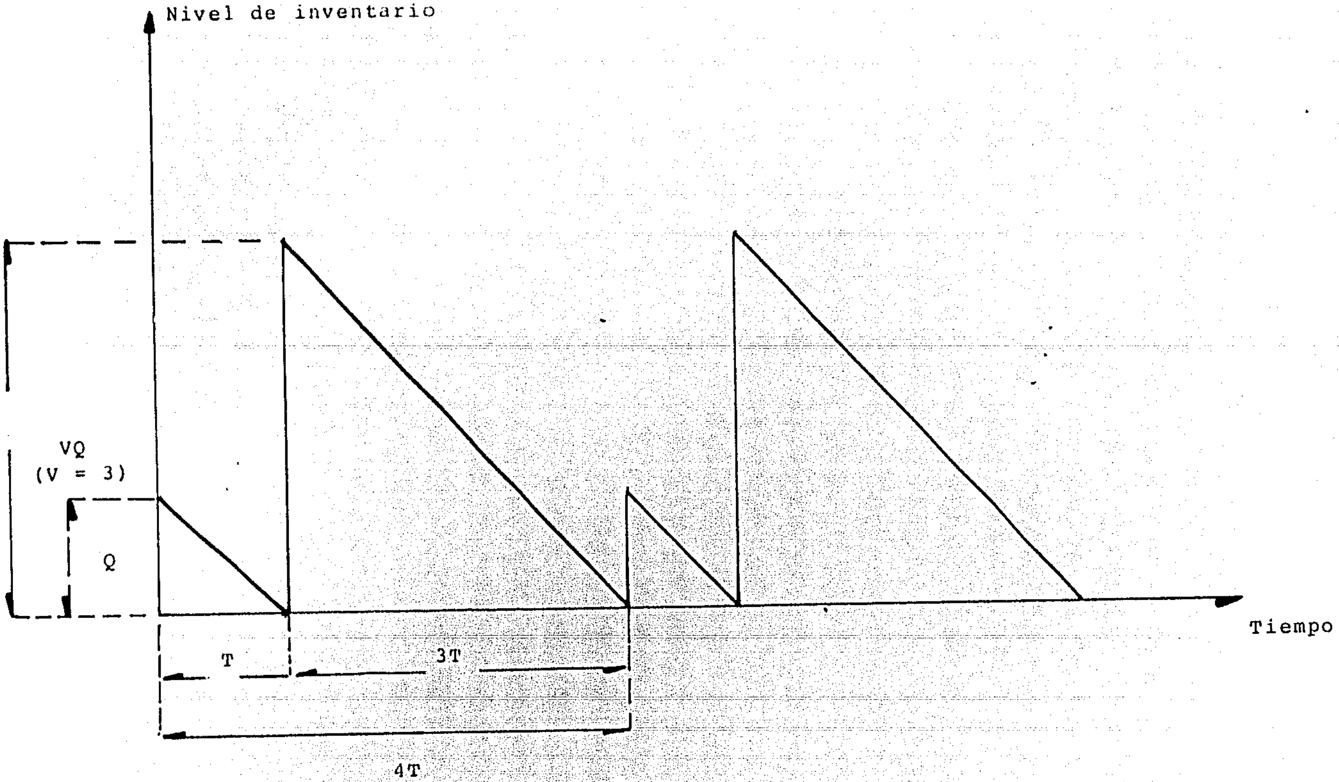
El problema de determinar cómo operar el sistema ha sido resuelto, puesto que con las fórmulas (2.1.d) y (2.1.e) se determina qué cantidad ordenar y con qué período de tiempo.

Analizando la fórmula (2.1.d) vemos que el costo del artículo producido no interviene explícitamente, sino que se refleja en el costo de inventario. Si $d = o$ ó si $h \rightarrow \infty$, no es necesario almacenar, lo mismo si $K = o$, o sea no implica gasto por ordenar, se puede hacer en cualquier momento, no se tiene inventario, ya que existe la consideración de entrega inmediata. De esa manera se pueden hacer una serie de razonamientos que son coherentes con la expresión algebráica del lote económico.

Ejemplo : Observe en la figura 2.1.b, la gráfica de un problema de inventario con demanda determinística y sin déficit, si al inicio de un período se pide una cantidad Q se tiene el compromiso a pedir una cantidad 3Q en cuanto se termine y repetir el ciclo. Suponga que las constantes K, d, h y c tienen el mismo significado que en el caso clásico del lote económico.

a) Determine una fórmula para el cálculo del lote económico propuesto.

b) Generalice el resultado en a para el caso en que después de pedir una cantidad Q se está comprometido a pedir una cantidad V Q donde $V > o$, qué pasa si $V = 1$?



LOTE ECONOMICO MODIFICADO

figura 2.1b

Solución: El costo promedio es:

$$F(Q) = \frac{2K + 4CQ + (h/2)[TQ + (3T)(3Q)]}{4T}$$

$$= \frac{2K + 4CQ + 5hQT}{4T}$$

$$= \frac{kd}{2a} + cd + \frac{(5)}{4} \quad hQ$$

Pues $T = Q/d$. La función $f(Q)$ es convexa y el valor Q^* que la minimiza es obtenida de la primera derivada de dicha función y es igual a $(2kd/5h)$.

b) En el caso general, el costo promedio es:

$$C+P = \frac{2K + C(V+1)Q + (h/2)[TQ + (Vt)(VQ)]}{(V+1)T}$$

Especificamente:

$$Q = \sqrt{\frac{4kd}{h(v \quad +1)}}$$

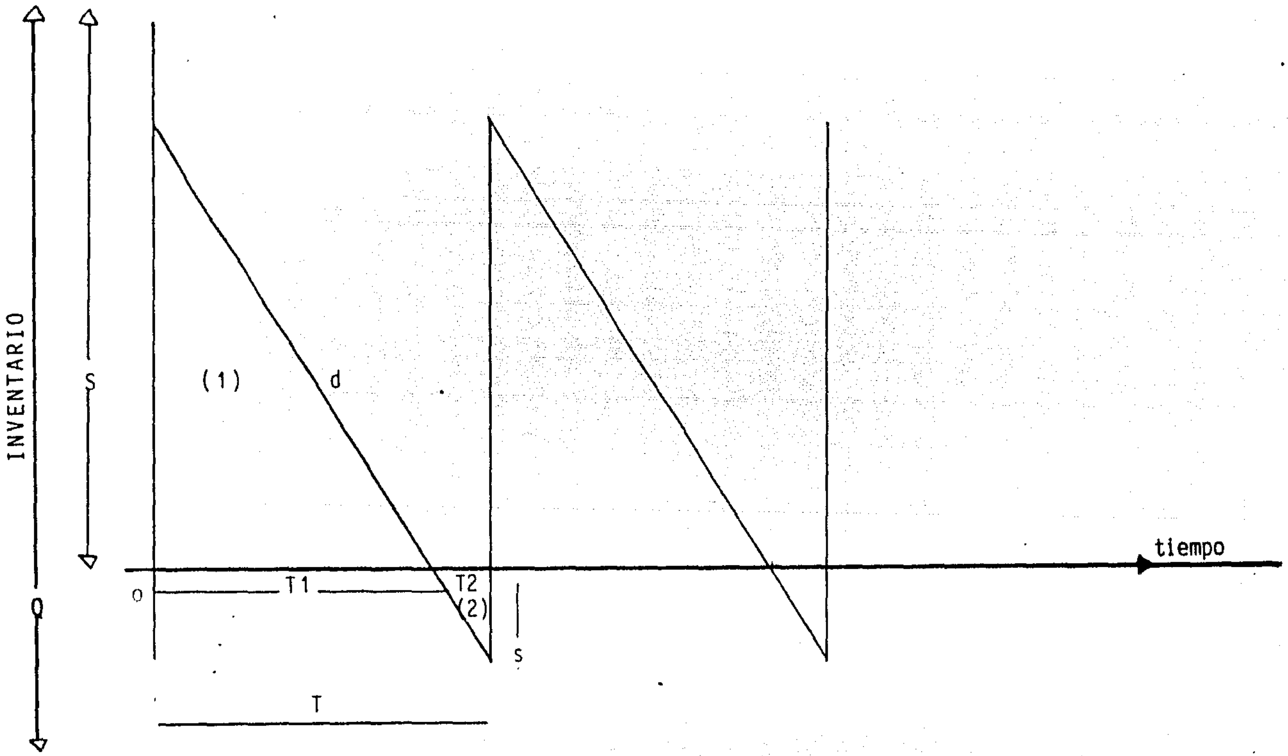
Observe que si v=1 se tiene la fórmula de Wilson.

2.2 MODELO DE INVENTARIO CON DEFICIT .

Los modelos que abarcan esta clasificación tienen como base las consideraciones tomadas en el caso del modulo clásico de inventario sin déficit se hace una generalización suponiendo que las demandas se satisfacen, pero es permisible para el sistema no tener el producto en inventario cuando la demanda ocurre, es decir se permite cubrir órdenes con retraso; la razón de ello es que el costo de quedarse sin existencias puede no ser representativo en comparación al costo de mantener el inventario. Se muestra en la figura 2.2a el desarrollo de los niveles de inventario del modelo en cuestión.

Se observa que el nivel de inventario cae por debajo de cero, pero dado que los pedidos pospuestos se cumplen inmediatamente cuando la demanda ocurre; el nivel máximo de inventario no alcanza la cantidad pedida Q, como lo hace el modelo anterior, sino que toma el valor Q-S, donde S representa la cantidad de faltantes por pedido.

La dificultad en este modelo estriba en la evaluación económica del costo por faltante. Dicho costo representa el decremento potencial en las ventas que podría resultar por la mala imagen y la pérdida de prestigio. Tomando en cuenta la psicología industrial, el criterio sería expresar tales costos en función del tiempo que transcurre cuando la demanda se presenta y el momento en el que se satisface, ya que a mayor retraso mayor pérdida de prestigio. La política de ordenamiento es como sigue :



PERFIL DE MODELO INVENTARIO CON DEFICIT

Q = cantidad pedida

T - tiempo entre pedidos

I = nivel máximo de inventario

t1 - tiempo en el que se dispone de inventario

t2 = tiempo durante el cual existen faltantes

S = cantidad de faltantes por pedido

figura 2.2a

Se inicia con un nivel S y se permite que disminuya el nivel de inventario hasta tener cierto déficit (por calcular). Una vez hecho se ordena una cantidad Q que llena el inventario hasta el nivel máximo S y así sucesivamente.

Considérense dos parámetros que dicten la política de ordenamiento, sean s y S, entonces :

$$\text{ordenar} = \begin{cases} Q; & \text{si } X = S \text{ ó } X < S \\ 0; & \text{si } X > s \end{cases}$$

donde X es el nivel de inventario en el momento de inspección.

El costo total está dado por la suma de los siguientes costos:

k = costo por ordenar
c = costo por unidad unidad ordenada
h = costo por inventario
p = costo de penalización por déficit

además sea :

Q = cantidad a ordenar
S = nivel máximo de inventario
d = rapidez de la demanda
T = longitud del período

La configuración de la ecuación del costo total y su desarrollo se presentan como sigue : El costo de inventario es la cantidad de productos almacenados representados por el área del triángulo (1) figura (2.2.a) y multiplicados por el costo h que genera el mantenimiento. sea $t_1 = \frac{S}{d}$;

de donde : Area del triángulo (1) = $S^2 / 2d$

El costo de penalización queda expresado por P que multiplica al área del triángulo (2) fig. (2.2.a)

de donde : Area triángulo (2) = $\frac{(Q - s)^2}{2d}$

COSTO POR PERIODO :

$$CTP = K + c(S-s) + h \frac{(S^2)}{2d} + P \frac{(Q-S)^2}{2d}$$

COSTO PROMEDIO :

$$fQ = \frac{\text{COSTO POR PERIODO}}{T}$$

Pero $T = (S - s)/d$

de donde se tiene :

$$f(Q) = \frac{hS^2}{2(S-s)} + \frac{P(Q-S)^2}{2(S-s)} + \frac{kd}{(S-s)} + dc$$

Para garantizar que existe un mínimo, derivando la expresión anterior, se calcula la hessiana para este caso de dos variables, se observa si es matriz positivamente definida (Teoremas y definiciones en apéndice 2) F(Q) es una función convexa porque está formada de la suma de funciones convexas. Derivando respecto a S se tiene.

$$\frac{f'(Q)}{S} = \frac{hs}{Q} - \frac{P}{Q}(Q-S) = 0$$

que finalmente queda:

$$S(h+p) = PQ$$

de donde:

$$S^* = \left(\frac{P}{h+p}\right) Q \quad \ldots \quad 2.2a$$

derivando la expresión del costo por período con respecto a Q, se tiene.

$$\frac{\partial F(Q)}{\partial Q} = -\frac{kd}{Q^2} - \frac{h}{2}\frac{S^2}{Q^2} \quad \frac{-P(Q-S)^2}{2Q^2} + \frac{P(Q-S)}{Q} = 0$$

Con manipulaciones algebráicas se tiene que

$$Q \quad (P - PS) = 2 \quad kd - hS$$

y sustituyendo el equivalente de S

$$Q^2 \left(\frac{h}{h+p} \right) = \frac{2kd}{p}$$

de donde:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2kd}{h}} \quad \sqrt{\frac{h+p}{p}} \qquad \ldots (2.2.b)$$

sustituyendo la fórmula (2.2.b) en la ecuación (2.2.a)

$$S^* = \sqrt{\frac{2kd}{h}} \quad \sqrt{\frac{p}{h+p}} \qquad \ldots (2.2.c)$$

como:

$-s = Q - S$ que sustituyendo (2.2.b) y (2.2.c) se tiene:

$$-s = \sqrt{\frac{2kd}{p}} \quad \sqrt{\frac{h}{h+p}}$$

Ejemplo: La demanda de un cierto articulo ocurre, con una rapidez de ocho unidades al mes, el costo de colocar una orden de pedido de articulos para el almacen es de doce unidades monetarias, mientras que el costo de almacenamiento es de dos por año por cada artículo. Existe además un costo capital asociado al material en inventario que es igual a una unidad monetaria por cada articulo que se tiene fisicamente. El costo asociado a cada unidad demandada que no es satisfecha inmediatamente (sino hasta que se dispone de artículos) se considera igual a 0.95 unidades monetarias. Determine:

i) El tamaño del lote económico.

ii) El nivel minimo de inventario antes de colocar el pedido (que se supone entregan inmediatamente).

iii) Cuál es el costo mensual de la politica descrita en los incisos i) e ii)?

Solución: Sea d = la rapidez de la demanda, K = costo por ordenar, h = costo por inventario, p = costo por déficit, es costo unitario por artículo, se tiene sustituyendo valores: d = 8; k = 12; h = $\frac{2}{12}$ + 1 = 1,17 (costo de capital más almacén)

p = 1; c = 0.95.

i) $$S = \sqrt{\frac{(2)(12)(8)}{1.17}} \qquad \sqrt{\frac{1.17}{1+1.17}} = 8.70$$

por lo que el tamaño del lote económico es Q = S −s = 18.87 unidades.

ii) Del inciso anterior, el nivel minimo de inventario es de s = 10.17 unidades.

iii) Con lo anterior, el costo total mensual de la politica seria:

$$\text{costo total} = \frac{(1.17)(8.7)}{2(18.8)} + \frac{(1)(10.17)}{2(18.87)} + \frac{(12)(8)}{18.87} + (0.95)(8) =$$

$$= 17.77 \text{ unidades monetarias.}$$

2.3 EL MODELO DE PRODUCCION INVENTARIO.

En la descripción del presente modelo se planea la producción incluyendo a los inventarios, es decir la oferta se nutre de producción y de inventarios que pueden ser parte de la producción misma o provenir de otras fuentes. En la figura 2.3.a se muestra un sistema de producción inventario, en el cual el ciclo e inicia cuando se está en el nivel cero y por el proceso de producción o compra externa o ambas e va acumulando la existencia del producto, hasta tener un inventario en un nivel deseado. Los artículos ingresan al inventario a medida que la producción se realiza y salen de él a una tasa "d" de consumo. El máximo nivel de inventario (Imax) y el nivel de inventario promedio (I) estarán en función de la tasa de producción (r) y la tasa de demanda "d". La tasa de crecimiento del inventario es igual a la tasa de producción menos la tasa de demanda (r-d). Esta representación al incluir el concepto de producción como vairiable determinante, arroja un modelo más enriquecido, más completo que los anteriores. Enseguida se detalla el esquema matemático. El perfil de este modelo se muestra en la figura (2.3.a). Para configurar el modelo intervienen los siguientes elementos.

Q = nivel máximo de inventario disponible.
T = período
r = producción en el tiempo T
d = demanda en el tiempo T
T_1 = tiempo de producción
T_2 = tiempo de agotamiento
S = nivel máximo de inventario disponible
(r-d) = crecimiento de inventario
c = costo unitario o precio del artículo

Observando la figura (2.3.a) se tiene:

$$(r-d) = \frac{S}{T_1} \qquad \text{... (2.3.a)}$$

de donde : $S = T_1\,(r-d)$ ... (2.3.b)

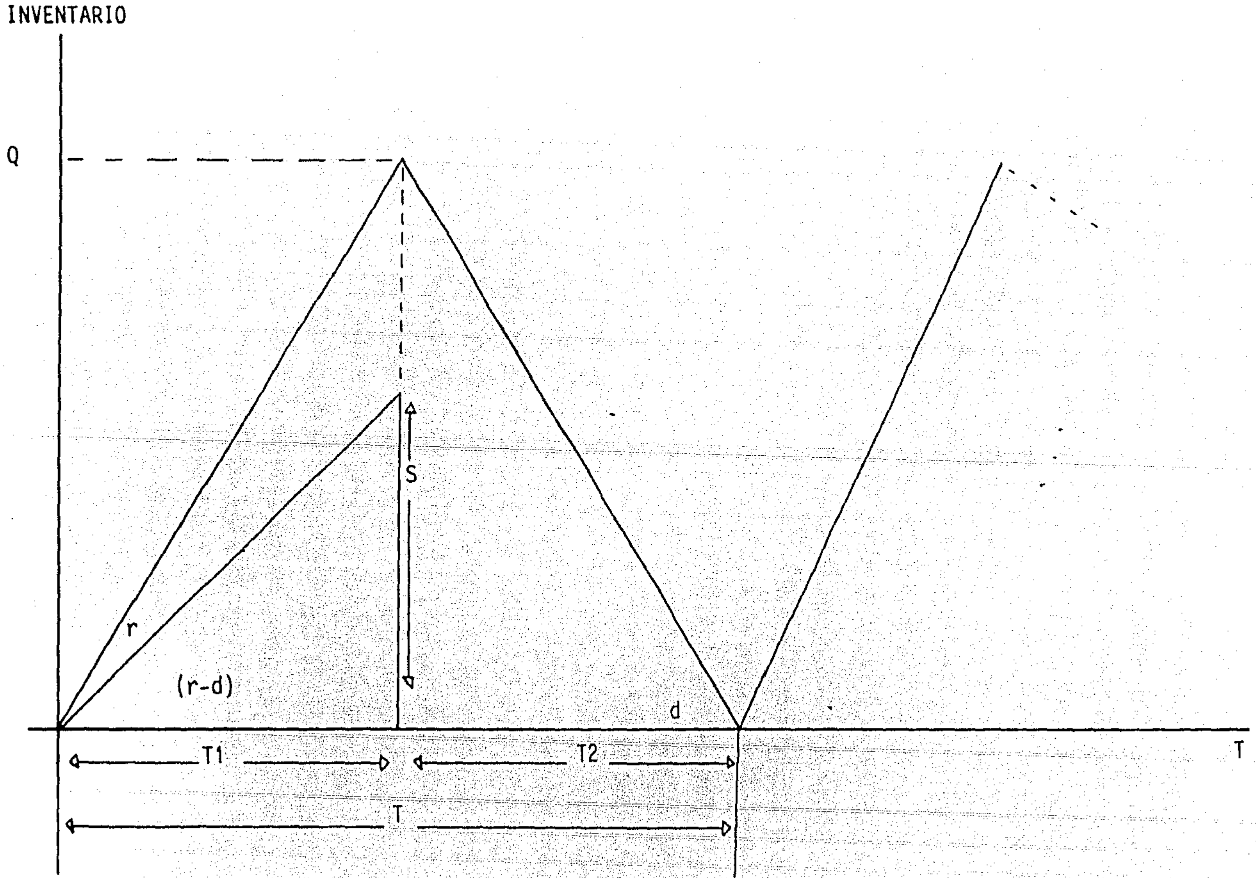


figura 2.3a

Conecuentemente el inventario medio durante el periodo T, es:

$$\text{Inv. medio} = \frac{S}{2} = \frac{T_1(r-d)}{2} \qquad \text{... (2.3.c)}$$

Considerando que Q unidades son producidas a una tasa de producción "r" durante el periodo "T" se tiene:

$$r = \frac{Q}{T1} \qquad \text{... (2.3.d)}$$

y sustituyendo la ecuación (2.3.d) en la ecuación (2.3.c) se tiene:

$$\text{Inv. medio} = \frac{T1\,(r-d)}{2} = \frac{Q}{r}\,\frac{(r-d)}{2} = \frac{Q}{2}\left(1-\frac{d}{r}\right) \qquad \text{... (2.3.f)}$$

$$T_2 = \frac{S}{d} = T - T_1 \qquad \text{... (2.3.g)}$$

Calculando el costo promedio total para este modelo, se tiene:

$$f(Q) = \frac{\text{COSTO FIJO} + \text{COSTO MAT.}}{\text{PERIODO}} + (\text{COSTO DE INV.})(\text{INV. MEDIO})$$

$$f(Q) = \frac{K}{T} + \frac{CQ}{T} + h\left[\frac{Q}{2}\left(1 - \frac{d}{r}\right)\right]$$

$$f(Q) = \frac{kd}{Q} + cd + h\left[\frac{Q}{2}\left(1 - \frac{d}{r}\right)\right] \qquad \text{... (2.3.h)}$$

Se busca el mínimo encontrando las derivadas parciales (justificación en el apéndice 2).

$$\frac{\partial CT}{\partial Q} = \frac{-Kd}{Q2} + \frac{h}{2}\left(1 - \frac{d}{r}\right) = o$$

de donde :

$$h\left(1 - \frac{d}{r}\right) = \frac{2Kd}{Q2}$$

Finalmente : $Q^* = \sqrt{\dfrac{2Kd}{h(1-\frac{d}{r})}}$ ... (2.3.i)

Sustituyendo la ecuación (2.3.i) en la ecuación (2.3.h), sin considerar el costo de materiales por demanda, se tiene :

$$f(Q) = \frac{Kd \sqrt{h\ (1-d/r}}{\sqrt{2kd}} + \frac{h\ (1-d/r)\ \sqrt{2Kd}}{\sqrt{2\ h(1-d/r)}}$$

Esto es el costo total óptimo queda expresado :

$$f(Q) = \sqrt{2Kdh\ (1-d/r)}$$

El número óptimo de lotes será :

$$N^* = \frac{D}{Q^*}$$

$$S = Q(1 - d/r)$$

$$S = \sqrt{\frac{2Kd}{h}}\sqrt{1 - dr}$$

El período de tiempo entre la fabricación de los lotes consecutivos será :

$$T^* = \frac{Q^*}{D} = \frac{1}{N^*}$$

Si se incluye el término de costo de materiales por demanda, es decir, cd, la expresión del costo total resulta :

$$CT = \sqrt{2kdh\ (1-d/r)} + Cd$$

que es el lote óptimo derivado de la ecuación (2.3.h).

Ejemplo:

Una compañía de publicidad requiere 20,000 sobres para los próximos dos meses. Se ha calculado el costo de mantenimiento en inventario de un peso por sobre por día y el costo fijo de producción es de 10,000 pesos con un costo por ordenar de 266 pesos. Cuánto debe producirse y con qué frecuencia para que el costo total sea mínimo?. No se permite diferir la demanda a futuro y la producción es tan alta, que se considera instantánea.

Solución:

i) $d = \dfrac{20,000}{60 \text{ días}} = 333$ sobres

$$Q = \frac{(2)(2666)(333)}{(1)\ (1 - .83)} = 1020 \text{ sobres}$$

$$T = \frac{1020}{333} = 3 \text{ días}$$

La serie de producción se hace cada 3 días y el tamaño del lote es de 1020 sobres con un costo mínimo de 2,580 pesos por ciclo días.

2.4 EL MODELO DE PRODUCCION-INVENTARIO CON DEFICIT .

Se se analiza un ciclo de producción o pedido, partiendo de que el inventario inicia en un nivel cero y que se incrementa por producción hasta alcanzar un nivel S (en "t " unidades de tiempo). La producción se suspende y se comienza a satisfacer la demanda hacia el consumidor. El inventario disminuye hasta que llega al nivel cero (en "t " unidades de tiempo), en ese momento continúan llegando más órdenes que no se pueden satisfacer y se va acumulando una demanda insatisfecha hasta alcanzar un nivel - s ("t " unidades de tiempo). Se produce de nuevo, se satisface a los clientes y, por lo tanto, la demanda no satisfecha empieza a disminuir, hasta alcanzar el nivel cero ("t " unidades de tiempo). En ese instante todo el ciclo se vuelve a repetir de manera idéntica (se supone que la demanda y los ciclos de producción tienen características constantes). Este ciclo se presenta en la figura (2.4.a).

El costo de mantenimiento es igual a "h" veces el inventario retenido y es igual al área del triángulo (1) cuya base es $t_1 + t_2$ y tiene por altura "S".

De donde costo de mantenimiento = $h \dfrac{(t_1 + t_2)(S)}{2}$ ... (2.4 a)

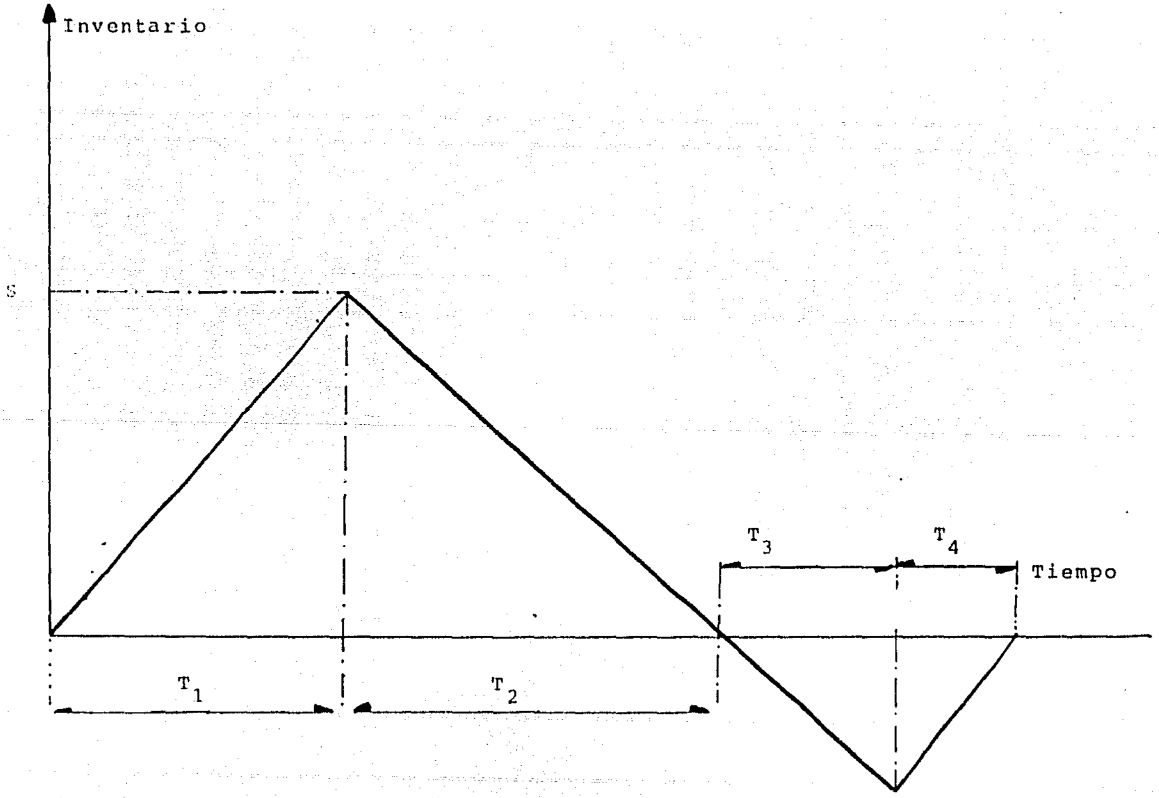
El costo por déficit es igual a "P" veces la demanda diferida, será igual al área del triángulo (2) cuya base es t3 + t4 y con altura igual a "s".

Por lo que el costo por déficit es= $P \dfrac{(t3 + t4)(s)}{2}$...(2.4 b)

Para expresar el costo total, agregamos a los dos anteriores, el costo por ordenar "K" y el costo por unidad de producto CQ.

De donde: $Ct = \dfrac{h(t_1+t2)S+P((t_3+t_4)s)1/2+K+cQ}{t1 + t2 + t3 + t4}$ ... (2.4.c)

Intervienen en la función de costos, seis variables, los tiempos y los niveles S y s, sin embargo, se reducirán a dos, a través de las relaciones que existen entre las mismas.



PRODUCCION - INVENTARIO CON DEFICIT, DEMANDA CONSTANTE

figura 2.4a

· Costo Promedio

$$CP = \left[K + CQ + \frac{hS^2 + Ps^2}{2d(1-d/r)}\right]/(Q/d)$$

$$= Kd/Q + cd + \frac{hS^2 + Ps^2}{2Q(1-d/r)}$$

El costo mínimo de los valores S y s (y consecuentemente para Q), se determina diferenciando la ecuación con respecto a S y s e igualando a cero y resolviendo. (Lo anterior se justifica con el soporte de los teoremas vistos en apéndice 2).

$$\frac{\partial CP}{\partial s} - \frac{2h(Q(1-d/r)+S)}{2Q(1-d/r)} + \frac{2Ps}{2Q(1-d/r)} = 0$$

de donde:

$$s = -\left(\frac{h}{p+h}\right) Q\ (1-d/r)$$

Diferenciando la ecuación con respecto a Q se tiene:

$$\frac{\partial CP}{\partial Q} = -\frac{Kd}{Q^2} - \frac{h(Q(1-d/r)+s)^2}{2Q^2(1-d/r)} + \frac{2h}{2Q(1-d/r)}\ (Q(1-d/r)+S)(1-d/r) - \frac{Ps^2}{2Q^2(1-d/r)} = 0$$

simplificando resulta:

$$Q = \sqrt{\frac{2Kd}{h(1-d/r)}}\sqrt{\frac{P+h}{p}}$$

S = Q (1-d/r)+s y sustituyendo el valor de s se tiene:

$$S = Q\ (1-d/r)\ (P/p+h)$$

Que sustituyendo el valor de Q, resulta:

$$S = \sqrt{\frac{2dKP(1-d/r)}{(h+P)h}}$$

$$s = \sqrt{\frac{2dKh(1-d/r)}{(h+P)P}}$$

El costo total óptimo, se expresa de la siguiente manera:

$$CT = \sqrt{\frac{2dhpK(1-d/r)}{h+p}}$$

Ejemplo:

Supongáse que en el ejemplo anterior (sección 2.3) se llega a un acuerdo con el cliente para diferir la demanda que no puede ser satisfecha, con un costo penal por déficit de 0.5 pesos por día por sobre calcule el tamaño del lote económico, los niveles S, y el período.

Solución sea:

d = 333 sobres

h = 1.0 peso

p = 0.5 pesos

k = 266 pesos

$$Q = \sqrt{\frac{(2)(2)(333)}{1.0}}\ \sqrt{\frac{0.5+1.0}{1.0}}$$

$$T = \frac{514}{333} = 1.5 \text{ días}$$

$$S = \sqrt{\frac{0.5}{0.5+1.0}\ (514)} = 171 \text{ sobres}$$

$$-s = \sqrt{\frac{1.0}{0.5+1.0}\ (514)} = 342 \text{ sobres}$$

La serie de producción se hace cada día y medio y el tamaño del lote es de 514 sobres, alcanzando un nivel de producción de 171 sobres y una demanda acumulada de 42 sobres.

CAPITULO III.

MODELOS MULTIPERIODICOS LINEALES .

Los capítulos anteriores sirvieron de introducción a la terminología y comprensión de inventarios, sus inicios y la conceptualización de los modelos clásicos, en este capítulo se inicia el análisis de los modelos multiperiódicos y las técnicas de solución asociadas que son el tema central del presente estudio.

Una de las características esenciales de un sistema económico es que está cambiando continuamente con el tiempo, para el caso de sistemas de inventarios, la generación de demandas, los tiempo de entrega, los costos de interés y los productos mismos están sujetos también a cambios dependiendo de factores externos, sin embargo en muchos casos, los cambios se dan lentamente para largos períodos, de tal forma que el sistema pueda ser tratado como un problema estático.

Se analizará en este capítulo el tema de la planeación de la producción sobre un intervalo de tiempo futuro, llamado horizonte de planeación, durante el cual la tasa de demanda de los productos varía período a período. El estudio se considera para un solo producto, se supone el intervalo de tiempo dividido en períodos y el problema de planeación será establecer una tasa de producción para cada uno en el horizonte de planeación, cuando la demanda puede no ser constante período a período.

Este capítulo se desarrolla como sigue: la sección 3.1 trata la formulación y descripción del modelo dinámico multiperiódico con costos lineales para el caso en que existen ventas pendientes y cuando éstas son permitidas para una o varias fuentes de producción. Enseguida en la sección 3.2 se justifica el planteamiento de un modelo de inventarios como un problema de programación lineal y la conexión con los conceptos de puntos extremos. En la sección 3.3 se analiza la teoría de redes y su relación con los sistemas de inventarios. Finalmente en la sección 2.4 se establecen los métodos de solución: programación lineal, redes de flujo, programación dinámica y algoritmo de transporte.

3.1 MODELO DINAMICO CON COSTOS LINEALES .

El modelo básico de control de producción será descrito de la siguiente manera : La demanda para un producto se presenta durante T períodos de tiempo consecutivos, y no es necesariamente la misma cantidad en cada período, numerados éstos de 1 hasta t. La demanda que ocurre en el período dado puede ser satisfecha por producción durante este período o durante períodos anteriores, por concepto de inventarios, la primera situación contempla la demanda satisfecha en cada período. El inventario al principio del período de planeación como al final del horizonte se requiere que sea cero. El modelo incluye costos de producción y costos de inventario, como funciones lineales. El objetivo es planear la producción con las anteriores características tal que satisfaga la demanda a mínimo costo.

Para encontrar el mínimo de una función lineal cuyas variables son no negativas y están sujetas a restricciones se utiliza la programación lineal. La producción y la demanda ocurren en cantidades enteras y el problema de encontrar la demanda a un costo total mínimo tiene la siguiente representación matemática :

$$\text{Min } Z = \sum_{t=1}^{T} \left(Ct\ (Xt) + ht\ (It) \right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3.1a$$

$$\text{sujeto a :} \quad I1 = I\ t+1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3.1b$$

$$It + Xt = dt + I\ t+1\ ;\ t = 1, \ldots, T \quad . \quad 3.1c$$

$$Xt > 0 \quad ; \quad Xt \text{ entero} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3.1d$$

$$It > 0 \quad ; \quad It \text{ entero} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3.1e$$

Los datos involucrados en este modelo son las demandas, las funciones de costos de producción y las funciones de costos por inventario. De manera más específica se utilizó la siguiente notación :

Dt = La demanda durante el periodo t; (t = 1, 2, ..., T)

Ct = El costo de producir una unidad en el periodo t

ht = El costo de sostener en inventario una unidad de producto en el periodo t

Las variables de decisión son, para t = 1, ..., T

Xt = La producción durante periodo t

It = La cantidad de inventario en el periodo t

La primera restricción asegura que el inventario inicial y el final son cero. La segunda restricción requiere que la suma del inventario al inicio de un periodo y la producción durante éste, sea igual a la demanda durante el periodo, más el inventario al principio del siguiente periodo. Los valores de la producción y el inventario son no negativos y enteros. La restricción $It > 0$ asegura que la demanda en el periodo t se satisface por la producción elaborada en el mismo o en periodos anteriores, es decir, no se aceptan pedidos con retraso.

Los niveles de producción e inventario están interrelacionados como es de esperarse. Si se conoce el nivel de inventario al principio de un periodo, se puede determinar el nivel de producción por medio de la ecuación 3.1.C. Inversamente, si se conocen los niveles de producción de $x1$ hasta Xt se pueden determinar los niveles de inventario por medio de las ecuaciones.

$$(3.1f)\ldots\ (X1+\ldots+Xt-1) = It+(d1+\ldots+d\ t-1),\ t = 2, \ldots, T$$

Para interpretar la anterior ecuación note que el inventario I al principio del periodo de t es igual a la producción total durante los periodos 1 hasta t-1 menos la demanda total durante esos periodos. Se considera (X1, ..., Xt) un plan de producción factible si los niveles de inventario determinados por (3.1f) satisfacen las restricciones del modelo anterior. Sea (X1, ..., Xt) un plan de producción óptima si es un plan de producción factible que minimiza la función objetivo del modelo planteado sobre todos los planes de producción factible. Es importante recalcar que los elementos que conforman la función objetivo, es decir los costos que ahí intervienen son funciones lineales. En la interpretación económica se tiene que los costos se relacionan linealmente, con los artículos, no existen descuentos por grandes montos de adquisición. El modelo descrito tiene la ventaja de que es sencillo y de fácil aplicación para artículos no costosos, puesto que parte de que siempre se tiene en existencia inventario, hasta para demandas que ocurran en períodos posteriores; encontrar una solución óptima no implica mucho esfuerzo, dado que no involucra gran cantidad de variables. La desventaja de no abarcar los casos en los cuales la demanda se satisface a posteriori se elimina ampliando el modelo como sigue.

Modelo de producción-inventario, permitiendo déficit.

Cuando la planeación de la producción difiere la satisfacción de la demanda a períodos futuros con las características enunciadas en el planteamiento del modelo anterior y además es posible surtir pedidos con rezagos, es decir la demanda ocurre en un período K pero la producción se realiza en el período K + 1, esto implica que aparece otra variable que podría interpretarse como un inventario negativo, un inventario que no existe. Para fines de la estructura del modelo matemático, se agrega la variable In y la estructura matemática se da en la siguiente forma :

$$\text{Min} \sum Ct\ (Xt) + ht\ (I^{+}t) + ht\ (I^{-}t)$$

sujeto a :

$$Xt + It + I^{-}t + 1 = dt + I^{+}t + 1 \qquad \ldots.\ (3.2\ g)$$

$$Xt > 0 \ \text{entero} \qquad \ldots.\ (3.2\ h)$$

$$It > 0 \ \text{entero} \qquad \ldots.\ (3.2\ i)$$

$$I1 = It + 1 = 0 \qquad \ldots.\ (3.2\ j)$$

$$It = I^{+}t - I^{-}t \qquad \ldots.\ (3.2\ k)$$

La restricción que hace la diferencia básica con el anterior es la 3.2 g, la que manifiesta el equilibrio de masas y expone que la producción e inventario en un periodo sumado a la cantidad que llega de un periodo posterior debe ser estrictamente igual a la demanda en ese periodo más lo que se conserva de inventario para el siguiente.

Este planteamiento al considerar más elementos es un modelo más completo que tiene mayor campo de aplicación y puede utilizarse cuando los artículos que se producen o almacenan son de alto costo.

MODELO MULTIPERIODICO CON VARIAS FUENTES .

Este modelo es apropiado para la situación en la que hay varias fuentes de producción para solo un producto en cada uno de los periodos de tiempo T, en donde por cada fuente, el producto tiene un costo variable unitario constante. No se va a planear déficit. No hay costo fijo de producción y ni costo por cambiar las tasas de producción de las diversas fuentes. Cada fuente tiene una capacidad dada en cada periodo de tiempo, medida en las mismas unidades que los requisitos de producción.

La tasa de demanda en el periodo se supone conocida, pero no es necesariamente constante periodo a periodo. Se tiene una tasa de demanda que varía en el tiempo, es decir el problema de planeación asociado es dinámico.

Los costos relevantes del modelo están considerados como funciones lineales de las variables que conforman el programa de producción, dicho problema puede ser formulado como un modelo de programación lineal, con la condición de que todas las restricciones también sean lineales. Sea la siguiente estructura matemática:

$$Z = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{m} [Cit\ Xit + ht\ It] \qquad \dots\dots .3.1\ 1$$

sujeto a :

$X_{it} > P_{it}$; $(i = 1, 2, ..., m \; ; \; t = 1, 2, ... T)$ . . .3.1 m

$I_t = I_{t-1} + X_{it} - D_t$, $(t = 1, 2, ..., T)$ . . . .3.1 n

$X_{it} > 0$, $(i = 1, 2, ..., m \; ; \; t = 1, 2, ..., T)$ . . .3.1 o

$I_t > 0$, $(t = 1, 2, ..., T)$ . . . . . 3.1 p

en donde :

D_t = Unidades requeridas en el periodo t, $(t = 1, 2,...,T)$

m = Número de fuentes del producto en cualquier periodo

P_{it}= Capacidad, en unidades de producto, de la fuente i en el periodo t, $(i = 1, 2, ..., m)$

X_{it}= cantidad que se planea obtener de la fuente i en el periodo t.

C_{it}= Costo variable por unidad de la fuente i en el periodo t.

h_t = Costo por almacenar una unidad del periodo t al periodo t + 1.

I_t = Nivel de inventario al final del periodo t, después de satisfacer los requisitos en el periodo t.

El problema es seleccionar el $\{X_{it}\}$ para minimizar el costo total relevante durante el horizonte de planeación.

La función objetivo es la suma sobre todos los periodos de tiempo, del costo de mantener el inventario. Este último se basa en el inventario final para un periodo. Las restricciones resultan de las limitaciones de capacidad de las fuentes de producción. Las restricciones son ecuaciones de saldo de material que relacionan las variables de inventario con las variables de producción. Estas ecuaciones unen periodos de tiempo sucesivos y son características de modelos de planeación de producción multiperiódica. Las restricciones aseguran niveles de producción no negativos, además incluyen el requisito de que los déficits no sean considerados. Note que aparte de los costos, demandas y capacidades, el inventario inicial no puede ser conocido de antemano. Enseguida se hará una conexión con la teoría de redes de flujo y su representación gráfica, con el fin de tener otra visión del problema y ampliar las alternativas de solución a los modelos anteriormente planteados.

3.2 INTERPRETACION EN TERMINOS DE TEORIA DE REDES .

Una red es una representación gráfica de una problemática que puede provenir de diversos tópicos cuyo modelaje pueda concebirse en estados relacionados entre sí, por medio de flujos circulando a través de ellos; la característica más importante de esta interpretación es el enfoque sistémico que se alcanza al contar con una forma gráfica que envuelve al problema, permitiendo de tal manera tener una visión más completa y esquemática de los elementos que intervienen en él, de tal manera que la solución al problema en cuestión se obtenga de manera más lógica y natural.

La teoría de redes y la programación lineal, así como la teoría de inventarios al concebirse como problema en un marco conceptual pueden interpretarse en términos similares al momento de elaborar un modelo formal; las técnicas utilizadas para la solución a tales problemas son en general válidas a cualquiera de los planteamientos, es decir un problema de inventarios puede ser visualizado como una gráfica de redes de flujo con la axiomática de teoría de redes y buscar su solución en los algoritmos propios de redes o de programación lineal o bien, los paquetes computacionales conocidos. Las variables de decisión que intervienen en un problema de producció-inventario ensamblan de manera perfecta en la estructura de redes de flujo. Para concatenar los dos conceptos se hacen necesarios conocer algunos conceptos y definiciones (remitirse al apéndice 3).

Representación de un sistema producción-inventario en términos de redes.

Si Cn (Xn) = Cn Xn y hn (In) = hnIn el modelo propuesto de producción inventario se interpreta como una red de flujo con costos lineales y parámetros en los arcos (Ø, ØØ, hn) = (capacidad mínima, capacidad máxima, costo) y una forma esquemática de las restricciones del problema se dá en la figura 3.2.a

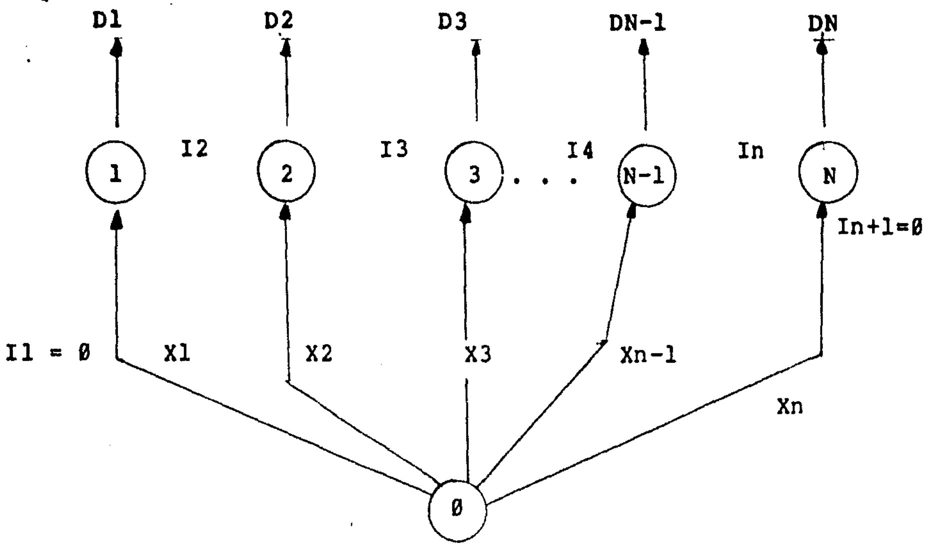


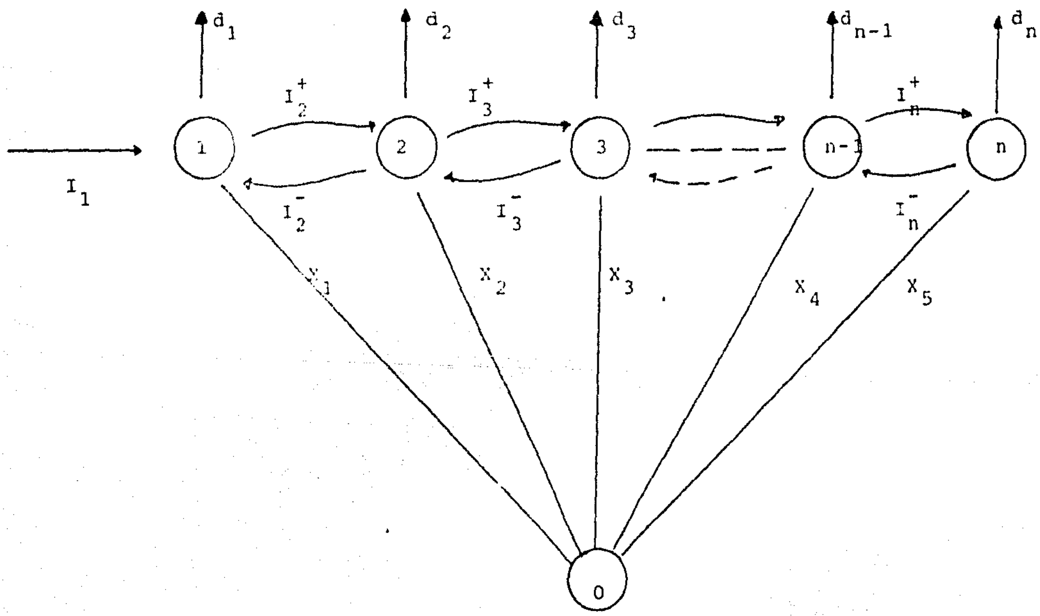
Figura 3.2.a

Red de un modelo de inventario determinista con N periodos y demanda discreta.

Donde : dn representa la demanda en el periodo m, In es el inventario al inicio del periodo y Xn es la cantidad que se produce.

Haciendo el análisis de la relación que existe con el problema de inventario planteado como un modelo de programacion lineal, con la teoría de redes, se muestra que la restricción de capacidad del modelo lineal se manifiesta en la gráfica al haber considerado los parámetros de los arcos con sus cotas de cero como la mínima cantidad que puede circular por ese arco y un número grande o infinito como cota máxima, el tercer escalar es el costo de producción o de inventario. El principio de conservación de la materia que es otra de las restricciones del problema, también se cumple en la gráfica de redes dado que en cada arco la cantidad de flujo que sale es igual a la suma de todos los que salen y debe cumplirse la igualdad con la suma de los arcos que inciden en el nodo en cuestión en la literatura de teoría de redes, este concepto recibe el nombre de divergencia de flujo. (Referencia - Apéndice 3). La no negatividad de las cantidades de producción y de inventario se cumple, puesto que está relacionado con el sentido de los arcos, de igual forma en el caso de inventario con déficit se puede manejar el concepto con los sentidos de los arcos. (referencia apéndice 3).

La representación en términos de redes para el caso de funciones de producción-inventario y déficit, se dá en la figura (3.2.b). La nomenclatura es la misma que para el caso sin déficit, agregando I_i que se interpreta como el inventario que se deposita en el período t+1 proveniendo del período t; la variable I_i es la cantidad de producto que se satisface con retraso, es decir elaborada en el período t+1 para satisfacer una demanda ocurrida en el período t.



FORMA ESQUEMATICA DE UN SISTEMA DE PRODUCCION INVENTARIO CON DEFIC

figura 3.2b

3.3 RELACION CON EL PROBLEMA DE TRANSPORTE .

Observando el modelo matemático de producción-inventario descrito antes y redefiniendo las variables de decisión, se observa que el problema se puede plantear con la estructura de los modelos de transporte de programación lineal y el modelo queda como sigue :

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{T} \sum_{k=j}^{T} Cijt\ Yijt$$

Sujeto a :

$$\sum_{R=j}^{T} Yijt < Pij; \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, T) \qquad (3.3\ a)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{t} Yijt = Dt; \quad (t = 1, 2, \ldots, T) \qquad (3.3\ b)$$

$$Yijt > 0 \qquad (3.3\ c)$$

Siendo :

Yijt = número de unidades producidas por la fuente i en el periodo j para satisfacer los requisitos del periodo t.

Cijt = Costo variable unitario de producción de una unidad de la fuente i en el periodo j y almacenamiento hasta el periodo t, cuando se requiere.

El coeficiente de costo está compuesto por :

$$Cijt = C\ ij + hj + hj+1 + \ldots + hk-1, \quad (k \geq j)$$

En caso de no permitirse déficit, se tiene Yijt = 0 para t < j Que al buscar una solución computarizada podría forzarse, asignando un valor muy grande a Cijt cuando t < j.

La anterior formulación considera que puede o no haber inventario inicial, dado que está considerado en los requerimientos, empezando con el primer periodo, tal que los valores de Dk son requerimientos netos. Para incluir explícitamente la asignación del inventario inicial en el modelo, permítase que Yok sea el número de unidades del inventario inicial usado para satisfacer la demanda en el periodo K y sea Cok el costo unitario asociado con sostener un inventario.

Entonces : $Cok = h1 + h2 + \ldots hk-1$ (al inventario inicial ya existente se le asigna un costo de producción de cero).

El modelo modificado tiene la siguiente estructura :

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{T} \sum_{k=j}^{T} Cij\ Yijk + \sum_{k=1}^{T} Cok\ Yo$$

Sujeto a :

$$\sum_{k=j}^{T} Yikj < Pij \quad ; \quad (i = 1, 2, \ldots, m \; ; \; j = 1, 2, \ldots, T) \qquad (3.3\ d)$$

$$\sum_{k=1}^{T} Yok < Io \qquad (3.3\ e)$$

$$Yok + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} Yijk = Dk \; ; \; (k = 1, 2, \ldots, T) \qquad (3.3\ f)$$

$$Yok > \emptyset \quad ; \quad (k = 1, 2, \ldots, T) \qquad (3.3\ g)$$

$$Yjk > \emptyset \qquad (3.3\ h)$$

La restricción (3.3 d) refleja la capacidad de producción por fuente y período de tiempo y la restricción (3.3 f) asegura que la demanda de cada período se satisface exactamente. Es claro que las restricciones de la (3.3 d) a la (3.3 h) representan un modelo de transporte de programación lineal y puede ser resuelto como tal.

La conceptualización de un problema de producción-inventario plasmado en un modelo matemático como los modelos antes descritos pueden ser expresados por un sistema de ecuaciones Ax = b con x > 0, en donde el objetivo es minimizar una función lineal en la presencia de restricciones lineales del tipo desigualdad, igualdad o ambas, características que definen un problema de programación lineal. Al existir esta similitud, toda la teoría y técnica utilizada en la solución de problemas de programación lineal podrá ser aplicada a la teoría de inventarios. Sea un vector x = (x1, x2, ... xn) considerado un plan de producción (u ordenamiento) factible si junto con el vector de inventario satisface las restricciones del modelo de producción-inventario planteado como un problema de programación lineal. El vector se dice óptimo si x es factible y minimiza la función objetivo. El problema planteado es uno de optimización. Por lo que toda la teoría matemática que soporta a la progamación lineal puede ser aplicada a la teoría de inventarios cuando se plantean los problemas como modelos matemáticos en este contexto.

Ejemplo.

Un proveedor debe surtir material para hospital durante T días consecutivos, la cantidad requerida en el día t es Dt. Estos requerimientos puedes ser satisfechos mediante la compra de nuevo equipo a un costo de C1 centavos por unidad, o por el esterilizado de los mismos.

Asuma que hay dos tipos de servicio de esterilización disponibles: el servicio regular, que requiere w días y cuesta C2 centavos por unidad y el servicio especial, el cual requiere $v < w$ días, y cuesta $C3 > C2$ centavos por artículo. El tiempo de esterilizado de w días significa que el artículo utilizado en el día t puede estar listo a tiempo para ser usado nuevamente el día $t + w$. Estos artículos han sido diseñados para este uso exclusivo. Pueden comprarse en cualquier cantidad pero no tendrán ningún valor para el proveedor después del día t. El problema es determinar el mejor programa de compras y de esterilización para reunir la demanda equipo cada día. Naturalmente, para que el problema sea interesante, se asume que $C3 < C1$ y $w < T$. Se cuenta con un inventario I, al iniciar.

a) Formule un modelo algebráico para este problema de optimización.

b) Formule el problema como uno de redes de flujo.

c) Muestre que el problema puede ser representado como un modelo de transporte dando la tabla de transporte.

d) Planté el problema para T=10, C1=20, C2=9, C3=14, w=4, v=2, {Dt} = {200, 230, 250, 220, 290, 310, 240, 200, 250, 300}.

Solución.

a) Sean las variables de decisión definidas de la siguiente manera.

Wi = La cantidad de equipo que es utilizado en cualquier periodo i= 1,2,...,T

Xi = Cantidad de equipo comprado a un costo C , en el periodo i.

Yi = Cantidad de equipo esterilizado en servicio regular, a un costo C , en cualquier periodo i = 2, ...,T

Zi = Cantidad de equipo esterilizado en servicio extra, a un costo C en cualquier período t = 3, ..., T.

La función objetivo queda expresada con la siguiente fórmula.

$$\text{Min} z = C_1 \sum_{i=1}^{T} X_i + C_2 \sum_{i=2}^{T} Y_i + C_3 \sum_{i=3}^{T} Z_i$$

sujeto a:

restricciones de demanda:

$$W_1 + X_1 = d_1$$

$$W_1 + X_2 = d_2$$

$$W_3 + X_3 + Y_1 = d_3$$

$$W_4 + X_4 + Y_2 + Z_1 = d_4$$

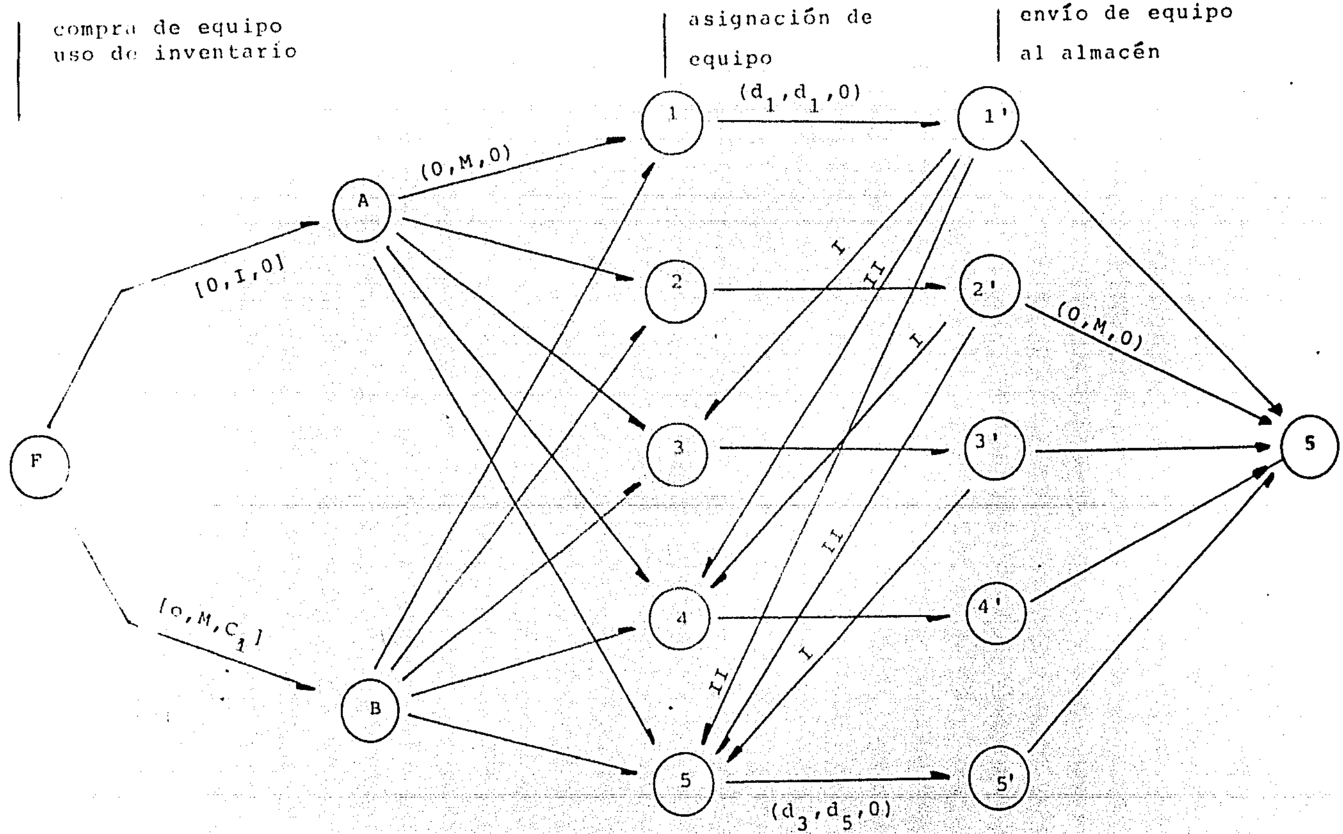
....

$$W_n + X_n + Y_{n-2} + Z_{n-3} \quad d_n$$

Con todas las variables no negativas y enteras.

b) La red correspondiente al problema de equipo médico se muestra en la figura 3.3a, se distinguen los nodos F y S que sirven para contabilizar el equipo tanto en inventario como comprados que se asignan a los distintos días de la semana. Los nodos 1,2,3,4,5, (cuando T=5) representan el inicio de cada día, mientras que 1', 2', 3', 4', 5', representan el final de esos mismos días respectivamente. Como puede observarse parte del equipo usado en un día puede ser esterilizado y enviado para servicio cuando estén disponibles. Este comportamiento está reflejado en los arcos respectivos. El nodo S funciona únicamente como sumidero.

b)



SOLUCION A PROBLEMA DE SUMINISTRO DE EQUIPO PARA HOSPITALES

I = arcos con parámetros $(0,M,C_2)$

II = arcos con parámetros $(0,M,C_3)$

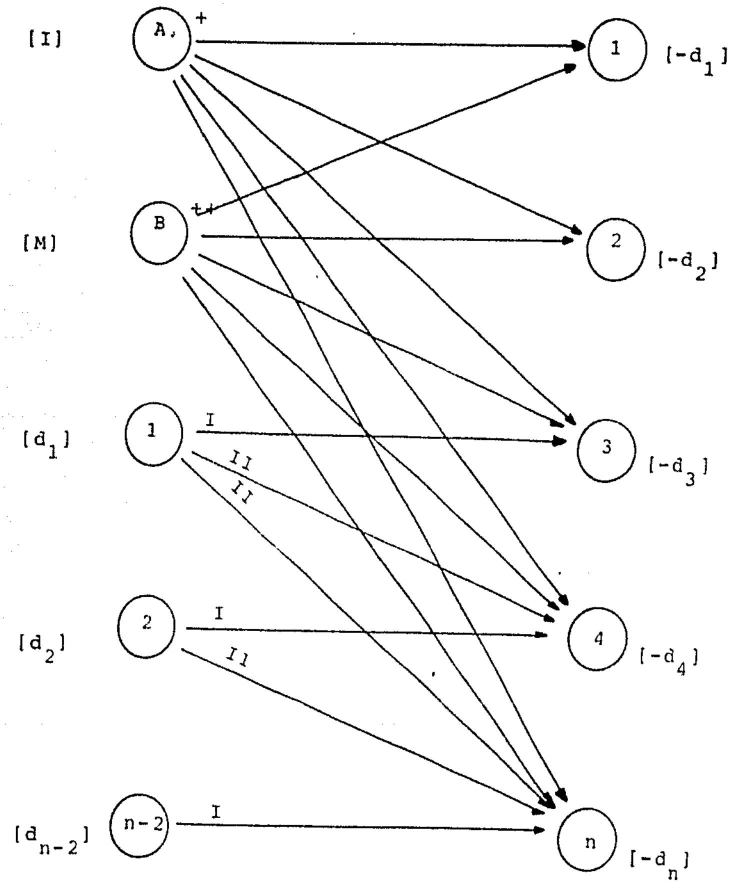
figura 3.3a

c) Observe en la figura 3.3b que el nodo A sirve para representar la disponibilidad de equipo en inventario inicial (los que pueden asignarse cualquier dia). El nodo B sirve para representar la compra de equipo nuevo. Los nodos restantes denotan la disponibilidad de equipo usado al final de los dias 1,2,3 o dicho equipo puede ser utilizado nuevamente si se envia al servicio de esterilización, de ahi los costos asociados a los arcos.

Enseguida se muestra la tabla de transporte.

		1	2...	v...	w	w+1...	T	T+1	CAPACIDAD MAXIMA
f	x	C_1	C_1	C_1	C_1	C_1	C_1	Ø	D_i
u									
e									
n	y	M	M	M	M	C_2	C_2	Ø	D_i
t									
e	z	M	M	M	C_3	C_3	C_3	Ø	D_i
Demanda		D_1	D_2	D_v	D_w	D_{w+1}	D_T	ΣD_i	

c)



RED DE TRANSPORTE QUE REPRESENTA LA PROBLEMATICA

Donde:

+ = arcos con parámetros (0,M,0)

++ = arcos con parámetros $(0,M,C_1)$

I = arcos con parámetr-s $(0,M,C_2)$

II = arcos con parámetros $(0,M,C_3)$

d) $\min Z = 20\ (X + X + \ldots + X\ ) +$

$9\ (X + Y + \ldots + Y\ ) +$

$14\ (Z + Z + \ldots + Z\ )$

s.a.

$Y = 0$ para $= 1, 2, 3, 4$

$Z = 0$ para $= 1, 2,$

$Z + Y$	<200
$Z + Y + Z + Y$	<430
$Z + Z + Y + Y_5 + Y$	<680
$Z + \ldots + Z + Y + \ldots + Y$	<900
$Z + \ldots + Z + Y_5 + \ldots + Y_9$	<1190
$Z + \ldots + Z + Y + \ldots + Y_{10}$	<1500
$Z + \ldots + Z + Y_5 + \ldots + Y_{10}$	<1740
$Z + \ldots + Z_{10} + Y_5 + \ldots + Y_{10}$	<1940

3.4 PROGRAMACION DINAMICA .

El vocablo dinámico sugiere una programación en el tiempo. Actualmente el término se utiliza para describir un método de solución más que un modelo. El método consiste en solucionar ciertos problemas de optimización que sólo pueden ser resueltos cuando se les descompone en una serie de etapas. El conjunto de problemas que se abarca con este método es muy general, no está limitado por restricciones de linealidad o continuidad. Sin embargo para casos que involucran mucha información se requiere de apoyo computacional para aplicarlo.

El problema de planeación de la producción multiperiódica puede frecuentemente ser simplificado y formulado como un modelo de programación dinámica. La utilidad de este modelo puede ser limitada si se requieren cálculos innumerables para obtener una solución. Sin embargo, bajo ciertas condiciones, el conocimiento de las propiedades de la solución óptima nos permitirá desarrollar un procedimiento de solución significativamente más eficiente que el método usual para resolver problemas de programación dinámica. Se formulará un modelo general de programación dinámica del modelo multiperiódico problemas de un solo artículo y N periodos planteados como problemas de programación dinámica.

Se tienen las siguientes consideraciones, el nivel de inventario se revisa periódicamente, en lugar de continuamente, el modelo establece que el almacén se reabastece instantáneamente al inicio del periodo, no se permite ninguna escasez. El desarrollo de los modelos deterministas dinámicos está limitado al estudio de horizontes de tiempo finito, ya que la técnica de programación dinámica es factible únicamente por un número finito de periodos o etapas. Esta no es una limitación seria, ya que las demandas futuras distantes usualmente tienen poco efecto sobre las decisiones del horizonte de tiempo finito presente. Además, en la mayoría de las situaciones no es práctico suponer que el artículo se mantendrá en existencia indefinidamente.

Defina para el periodo i, i + 1, 2, ..., N

Xi = producción programada para el periodo i

di = demanda esperada en el periodo i

Ii = inventario neto a final del periodo i

hi = costo de mantenimiento por unidad de llevar adelante el inventario del periodo i al periodo i + 1

Ki = costo fijo

Ci (Xi) = función de costo de compra marginal (producción) dada Xi.

$$\text{Sea } Ci(Xi) = \begin{cases} di\ Ki + (i\ (Xi) \\ \emptyset,\ xi = \emptyset \\ 1,\ x > \emptyset \end{cases}$$

di

La función C_i (X_i) es de interés únicamente si el costo de compra unitario varía de un periodo al siguiente o si existen rebajas en los precios. El objetivo es determinar los valores óptimos de Z_i que minimizan la suma de los costo fijos, de compra y de mantenimiento para todos los N periodos. El costo de mantener el inventario se supone proporcional a :

$$I_i + 1 = I_i + X_i + d_i$$

que es la cantidad de inventario que se lleva desde i hasta i + 1. Esto significa que el costo de mantener el inventario en el periodo i es h_i I + 1. El desarrollo del modelo de programación dinámica se simplifica representando gráficamente el problema, como se muestra en la figura :

X1 X2 X3 X n-1 Xn

I1 I2 I3 I n-4 In

---

d1 d2 d n-1 dn

Figura 3.4a.

Cada periodo representa una etapa. Usando la ecuación recursiva hacia atrás, se pueden definir los estados del sistema en la etapa i como la cantidad de inventario que entra I_i.

Sea f_i (I_i) el costo de inventario mínimo para los periodos i, i + 1, ... N. La ecuación recursiva completa está dada por :

$$f_n (I_n) = \min_{\substack{X_n + I_n = d_n \\ X_n > 0}} \{C_n (X_n)\}$$

$$f_i (I_i) = \min_{\substack{d_i < I_i + X_i < d_i + \ldots + d_n \\ X_i > 0}} \{C_i (X_i) + h_i (I_i + X_i - d_i) + f_i + 1 (I_i + X_i - d_i)$$

$$i = 1, 2, \ldots, N$$

La ecuación recursiva hacia adelante puede desarrollarse definiendo los estados en la etapa i como la cantidad de inventario al final del periodo i. De la figura estos estados son equivalentes a Ii + 1. En cualquier etapa los valores de Ii + 1 están limitados por Ø < Ii + 1 di + 1 ... + dn.

Esto significa que, en el caso extremo, la cantidad Zj en el periodo j < i puede ser ordenada lo sifucientemente grande de manera que el inventario restante Ii + 1 satisfaga la demanda para todos los periodos restantes.

Sea fi (Ii + 1) el costo del inventario mínimo para los periodos 1, 2, ..., N. La ecuación recursiva completa entonces está dada como :

$$f_i (I_2) = \min_{\emptyset < X_1 < d_i + I_2} \{C, (X_1) + h_i I_2\}$$

$$f_i (I_i + 1) = \min_{\emptyset < X_i < d_i + I_i + 1} \{C_i (X_i) + h_i I_i + 1 + f_{i-1} (I_i + 1 + d - X_i)$$

$$i = 2, 3, \ldots, N$$

Las formulaciones hacia adelante y hacia atrás del modelo son computacionalmente equivalentes. Esto es así ya que las transformaciones de estado son básicamente las mismas en ambos casos. El ejemplo numérico siguiente, se utiliza para ilustrar el procedimiento de cómputo del algoritmo hacia adelante.

3.5 METODOS DE SOLUCION :

Como se ha descrito en las secciones anteriores, existen formas diversas de plantear un modelo formal de un problema de producción-inventario, se enumerarán enseguida algunas de las técnicas de solución que sean las más representativas para cada caso y algunos ejemplos afines.

El conocido método simplex resuelve los problemas planteados como problemas de programación lineal, primero se demuestra que existe una solución óptima, entonces también existe un punto extremo óptimo, después se caracterizan los puntos extremos en términos de soluciones básicas factibles y propiamente en esta etapa interviene el método simplex para mejorar dichas soluciones, hasta alcanzar la optimalidad, o bien hasta concluir que el valor óptimo es no acotado. Otros modos computarizados de resolver problemas con la misma configuración matemática son una serie de paquetes que existen en el mercado, por ejemplo: LINDO, SUPERLINDO, MICROSOLVE, SOPLI, etc.

Dentro de la programación de flujo en redes al conceptualizar un problema de producción-inventario se facilita su solución porque existen una serie algoritmos para resolver los problemas de optimización, que muchas veces son más eficientes que la programación lineal al utilizar métodos computacionales. Los algoritmos son variaciones del método simplex primal adaptados para aprovechar la estructura especial de redes. Algunos son los siguientes : árbol de expansión mínima, problemas de flujo máximo por una red a costo mínimo, árboles mínimos de comunicación en una red simplex especializada, además de un fuerte apoyo computacional con paquetes como el Red-Gen y el Microsolve. Al hacer el planteamiento del problema como uno de transporte, cuando el problema no involucra mucha información puede ser aplicado el algoritmo de transporte para obtener el programa de producción óptima.

La programación dinámica es otro método de solución, es un proceso de decisión de n etapas y planteado como tal encuentra su solución en básicamente dos algoritmos, proceso hacia adelante y proceso hacia atrás, con un fuerte apoyo computacional en diversos paquetes.

En seguida se ilustran los métodos con los siguientes ejemplos:

Ejemplo:
Algoritmo de transporte.

Una compañía desea hacer su planeación de producción para el próximo año, para cada una de las 4 estaciones.

Las capacidades de producción y las demandas esperadas son las siguientes :

	PRIMAVERA	VERANO	OTOÑO	INVIERNO
DEMANDA	250	100	400	500
CAPACIDAD NORMAL	200	300	350	...
CAPACIDAD TIEMPO EXTRA	100	50	100	150

Los costos de producción normal para la compañía son : $7.00 por unidad, el costo unitario del tiempo extra varía según la estación, siendo de $8.00 en primavera y otoño, $9.00 en verano y 10.00 en invierno.

Se tiene un inventario de 200 unidades el 1 de enero, pero se planea descontinuar el producto a fines de año, se desea inventario cero después de la temporada invernal. Las unidades producidas en los turnos normales no se encuentran disponibles para embarque durante la estación de producción, se venden en la siguiente estación.

Las unidades que no se venden, se agregan al inventario y se acumulan a un costo de $0.70 por unidad por estación. En cambio las unidades producidas en tiempo extra deben embarcarse en la misma estación en que se producen.

Determínese un programa de producción que cubra todas las demandas a un mínimo de costo total.

Los períodos durante los cuales se puede efectuar la producción son : el tiempo extra para las cuatro estaciones y el turno normal para las primeras tres estaciones. Cada uno de estos períodos es un origen y se añade un octavo origen, el inventario inicial, ya que también proporciona mercancía. El suministro total es 1450 unidades. Los períodos en los cuales se requerirán productos, son las cuatro estaciones, que son los destinos, con una demanda total de 1250 unidades. Ya que el suministro total excede a la demanda total, deberá crearse un destino ficticio con una demanda igual al exceso de 200 unidades.

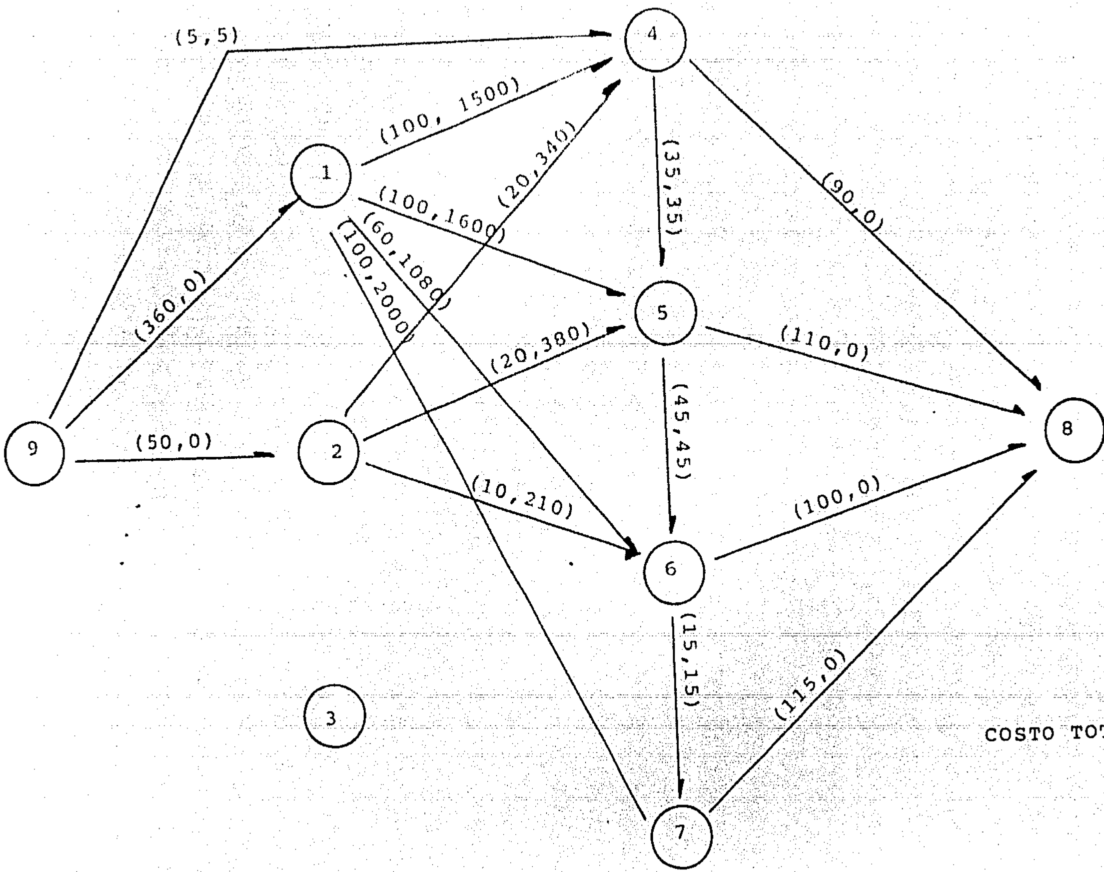
Las asignaciones positivas de un origen al destino ficticio representan unidades que el origen podría producir, pero que no serán producidas porque no son necesarias, ya que todas las unidades en el inventario inicial ya han sido producidas, para evitar lo anterior se asigna un número prohibitivamente grande (en comparación a los costos reales) al costo unitario asociado. Los costos asociados con el destino ficticio se tomas como cero. Los costos restantes son la suma de los costos de almacenamiento más costos de producción.

Aplicando el algoritmo de transporte, se obtiene el siguiente tableau óptimo. 3.5a

	Primavera	Verano	Otoño	Invierno	Ficticio	Suministro	u_i
Normal (primavera)	10 000 (993.60)	7.00 100	7.70 (0)	8.40 100	0 (1.60)	200	8.40
Normal (verano)	10 000 (9994.30)	10 000 (9993.70)	7.00 300	7.70 0	0 (2.30)	300	7.70
Normal (otoño)	10 000 (9995)	10 000 (9994.40)	10 000 (9993.70)	7.00 350	0 (3)	350	7
Inventario inicial	0 200	0.70 (0.10)	1.40 (0.10)	2.10 (0.10)	10000 (10 008)	200	2
T. extra (primavera)	8.00 50	10 000 (9991.40)	10 000 (9990.70)	10 000 (9990)	0 50	100	10
T. extra (verano)	10 000 (9992)	9.99 (9.40)	10 000 (9990.70)	10 000 (9990)	0 50	50	10
T. extra (otoño)	10 000 (9993.30)	10 000 (9992.70)	8.00 100	10 000 (9991.30)	0 (1.30)	100	8.70
T. extra (invierno)	10 000 (9992)	10 000 (9991.40)	10 000 (9990.70)	10.00 50	0 100	150	10
Demanda	250	100	400	500	200		
v_i	-2	-1.40	-0.70	0	-10		

TABLA QUE RESUELVE EL EJEMPLO

Tabla 3.5a



COSTO TOTAL = 7210

RED DE FLUJO OPTIMA A COSTO MINIMO

figura 3.5a

Ejemplo.
Resuelto con un planteamiento de red de flujo y el paquete LINDO de programación lineal.

Considere un problema de producción inventario con varias alternativas de producción y cuatro periodos de demanda determinística. Suponga que todos los costos son funciones lineales y que las formas de producción son tres : producción normal, producción con tiempo extra y producción con subcontratación.

Los costos unitarios y las capacidades máximas de producción de cada alternativa en cada periodo se tienen a continuación junto con la demanda a satisfacer.

ALTERNATIVA DE PRODUCCION	PERIODO 1	2	3	4
	COSTOS UNITARIOS			
NORMAL	15	16	18	20
EXTRA	17	19	21	24
SUBCONTRATACION	20	21	22	23
	CAPACIDADES MAXIMAS			
NORMAL	100	100	60	100
EXTRA	20	20	10	10
SUBCONTRATACION	40	40	40	40
DEMANDA	90	110	100	115

Suponga que el inventario inicial es de cinco articulos y que no se permite tener demandas pendientes de satisfacer en periodos futuros, también suponga que el costo unitario por tener articulos en inventario es de una unidad.

a) formule el problema como uno de programación lineal.

b) formule el problema como una red de flujo.

c) Encuentre una solución.

Solución

Sean las variables de decisión :

a) Xit = La cantidad de producción elaborada en la alternativa de producción i en el periodo T.

It = Inventario al inicio del periodo T.

Fun. Obj. Min Z = 15 X11 + 16 X12 + 18 X13 + 20 X14

17 X21 + 19 X22 + 21 X23 + 24 X24

20 X31 + 21 X32 + 22 X33 + 23 X34

+ I1 + I2 + I3 + I4 + I5

Sujeto a :

Restricciones que satisfacen la demanda para cada periodo:

X11 + X21 + X31 > 90

X12 + X22 + X32 > 110

X13 + X23 + X33 > 100

X14 + X2X + X34 > 115

Restricciones de capacidad :

X11 < 100	X12 < 100
X21 < 20	X22 < 20
X31 < 40	X32 < 40
X13 < 60	X14 < 100
X14 < 10	X24 X 10

El inventario inicial es :

$$I1 = 5$$

y no se desea inventario final :

$$I5 = 0$$

Además como no se aceptan rezagos, se tiene la no negatividad en inventarios :

$$It > 0$$

c) Problema de Inventarios.

Nodo fuente = 9 Nodo sumidero = 8

Flujo de salida 1000.00

* * * * * * ENTRADA DE DATOS * * * * * *

ARCO NO.	NODO INICIAL	NODO FINAL	COTA INFERIOR	COTA SUPERIOR	COSTO	AMPLIFICACION
1	9	4	5.00	5.00	1.00	1.00
2	9	1	.00	360.00	.00	1.00
3	9	2	.00	60.00	.00	1.00
4	9	3	.00	160.00	.00	1.00
5	1	4	.00	100.00	15.00	1.00
6	1	5	.00	100.00	16.00	1.00
7	1	6	.00	60.00	18.00	1.00
8	1	7	.00	100.00	20.00	1.00
9	2	4	.00	20.00	17.00	1.00
10	2	5	.00	20.00	19.00	1.00
11	2	6	.00	10.00	21.00	1.00
12	2	7	.00	10.00	24.00	1.00
13	3	4	.00	40.00	20.00	1.00
14	3	5	.00	40.00	21.00	1.00
15	3	6	.00	40.00	22.00	1.00
16	3	7	.00	40.00	23.00	1.00
17	4	8	90.00	90.00	.00	1.00
18	4	5	.00	75.00	1.00	1.00
19	5	8	110.00	110.00	.00	1.00
20	5	6	.00	125.00	1.00	1.00
21	6	8	100.00	100.00	.00	1.00
22	6	7	.00	135.00	1.00	1.00
23	7	8	115.00	115.00	.00	1.00

Patrón de flujo optimo *****,

AR.	INICIAL	FIN	INF.	SUP.	COSTO	GAN.	FLUJO	COSTO ARCO
1	9	4	5.00	5.00	1.00	1.00	5.00	5.00
2	9	2	.00	360.00	.00	1.00	360.00	.00
3	9	3	.00	60.00	.00	1.00	50.00	.00
4	9	4	.00	160.00	.00	1.00	.00	.00
5	1	5	.00	100.00	15.00	1.00	100.00	.00
6	1	6	.00	100.00	16.00	1.00	100.00	1500.00
7	1	7	.00	60.00	18.00	1.00	60.00	1600.00
8	1	8	.00	100.00	20.00	1.00	100.00	1080.00
9	2	4	.00	20.00	17.00	1.00	20.00	2000.00
10	2	5	.00	20.00	19.00	1.00	20.00	340.00
11	2	6	.00	10.00	21.00	1.00	10.00	380.00
12	2	7	.00	10.00	24.00	1.00	.00	210.00
13	3	4	.00	40.00	20.00	1.00	.00	.00
14	3	5	.00	40.00	21.00	1.00	.00	.00
15	3	6	.00	40.00	22.00	1.00	.00	.00
16	3	7	.00	40.00	23.00	1.00	.00	.00
17	4	8	90.00	90.00	.00	1.00	90.00	.00
18	4	5	.00	75.00	1.00	1.00	35.00	35.00
19	5	8	110.00	110.00	.00	1.00	110.00	.00
20	5	6	.00	125.00	1.00	1.00	45.00	45.00
21	6	8	100.00	100.00	.00	1.00	100.00	.00
22	6	7	.00	135.00	1.00	1.00	15.00	15.00
23	7	8	115.00	115.00	.00	1.00	115.00	.00
24	9	8	.00	1000.00	100.00	1.00	585.00	58500.00

****** COSTO TOTAL ****** 7210.00

NUMERO DE ITERACIONES 14

NUMERO DE ITERACIONES DEGENERADAS 2

NUMERO DE ITERACIONES CICLO 0

Ejemplo :

Considere una situación de inventario de 3 periodos con unidades discretas y demanda determinista dinámica. Los datos se dan en la siguiente tabla :

PERIODO i	DEMANDA i	COSTO FIJO K_i	COSTO DE INVENTARIO h_i
1	3	\$3.00	\$1.00
2	2	7.00	3.00
3	4	6.00	2.00

El inventario de entrada X_1 al periodo 1 es igual a 1. La función de compra marginal.

$$C_i(Z_i) = \begin{cases} 10\,Z_i \quad ; \quad 0 < Z_i < 3 \\ 30 + 20\,(Z_1 - 3), \; Z_i > 4 \end{cases}$$

o sea el precio por unidad es 10 para las tres primeras unidades y 20 para cualquier unidad adicional.

Los cálculos de etapa para el algoritmo hacia adelante son los siguientes :

ETAPA 1

d = 3, 0 I 2 + 4 = 6

f (X I) = C (X) + h I

		X = 2	3	4	5	6	7	8	Solución Optima	
I	h I	C (x) = 23	33	53	73	93	113	133	f (I)	X *
0	0	23							23	2
1	1		34						34	3
2	2			55					55	4
3	3				76				76	5
4	4					97			97	6
5	5						118		118	7
6	6							139	139	8

Dado q' I = 1, el valor más pequeño de X es d - I = 2

ETAPA 2

d = 2, 0 X 4

f (X I) = C (X) + h I + f ((I + d - X)

		X = 0	1	2	3	4	5	6	Solución Optima	
I	h I	C (X) = 0	17	27	37	57	77	97	f (I)	X*
0	0	0+55=55	17+34=51	27+23=50					50	2
1	3	3+76=79	20+55=75	30+34=64	40+23=63				63	3
2	6	6+97=103	23+76=99	33+55=88	43+34=66	63+23=86			77	3
3	9	9+118=127	26+97=123	36+76=112	46+55=101	66+34=100	86+23=109		100	4
4	12	12+139=151	29+118=147	39+97=136	49+76=125	69+55=124	89+34=123	109+23=132	123	5

ETAPA 3

d = 4, 0 = 0

f (X 0) = C (X) + h I + f (0 + d - X)

		X = 0	1	2	3	4		
I	h I	C (X) = 0	16	26	36	56	f (I)	X *
0	0	0+123 = 123	16+100 = 116	26+77 = 103	36+63 = 99	56+50 = 106	99	3

La solución X* = 2, X* = 3, X* = 3
Con un valor total de $99.

Ejemplo :

Resuelto con programación dinámica, establezca una fórmula de recursión para el siguiente problema :

Una compañía puede fabricar hasta cuatro computadoras por semana y el compromiso es entregar al comprador en cada una de las siguiente 4 semanas tres, dos, cuatro y dos computadoras respectivamente. Los costos de producción están en función del número de computadoras fabricadas y se dan en la siguiente tabla en millones de pesos.

UNIDADES PRODUCIDAS	0	1	2	3	4
COSTO f (x)	4	13	19	27	32

Las computadoras pueden entregarse a los consumidores al final de la misma semana en que se fabrican o pueden almacenarse para su entrega futura, con un costo de $400 por semana. Debido a la capacidad limitada de almacentamiento, la compañía no puede almacenar más de tres computadoras. El inventario inicial es cero y no se desea inventario después de las cuatro semanas.

Cuántas computadoras deberán fabricarse en cada una de las siguientes cuatro semanas, para cumplir todas las demandas a un costo mínimo total?

Es un problema de producción de n etapas que puede resolverse mediante programación dinámica. Es un proceso de 4 etapas, donde j representa la semana (j = 1, 2, 3, 4).

El estado en la etapa j es el número de computadoras en inventario al inicio de la semana j mj (x) = costo mínimo de completar el programa de producción que comienza en la etapa j en el estado .

dj (x) = programa de producción para la etapa j con la que se logra mj (x).

Dj = demanda en la etapa j

hj (x) = costo de inventario cargado a la etapa j, cuando el estado es .

fj (X) = costo de producir X computadoras en la etapa j.

Considérese el momento que la compañía entra a la etapa j con computadoras en inventario. Durante esta etapa. la compañía produce tantas computadoras como su capacidad lo permita. Siempre y cuando la suma de su nivel de producción y el de inventario sea al menos tan grande como la demanda Dj, cualquier cantidad que exceda a Dj, se almacena en inventario para la siguiente etapa. El costo de almacenamiento de unidades almacenadas es hj (u), de donde el costo total por período j es de fj (u) + hj ( ). Se tienen u + X - Dj unidades en el inventario para la etapa j + 1 y el costo mínimo para completar el proceso es Mj + 1 (u + X - Dj). Por lo tanto, el costo total para completar el proceso, iniciando en la etapa j con un programa de producción de X unidades, es

$$fj\ (X) + h\ j\ (u)\ Mj + 1\ (u + X - Dj).$$

La mejor decisión para la etapa j con unidades en almacén es producir aquella cantidad X ue minimice este costo. Entonces para j + 1, 2, 3 :

$$Mj\ (u) = \min_{X} \{ fj\ (X) + hj\ (u) + mj + 1\ (u + X - Dj)\}$$

$$= hj\ (u) + \min_{X} \{fj\ (X) + mj + 1\ (u + X - Dj)\} \quad ..(1)$$

en donde X = 0, 1, 2, 3, 4.

Para garantizar que :

$$0 < \ + X - Dj < 3 \text{ capacidad de almacenamiento}$$

se fija mj + 1 (u) igual a un costo penal prohibitibamente alto, M, siempre que $u < 0$ ó $u > 3$, tanto los costos de inventario como los costos de producción son independientes de la etapa y están dados respectivamente por hj ( ) = 4 (en unidades de millones de pesos) y fj (x) = f (x) (por la tabla) y las demandas D1 = 3, D2 = 2, D3 = 4, D4 = 2

La ecuación (1) queda :

$$Mj\ (u) = 4 + \min \{f\ (x) + mj = 1\ (u + X - Dj)\}$$

$$X + 0,\ 1,\ 2,\ ,\ 4$$

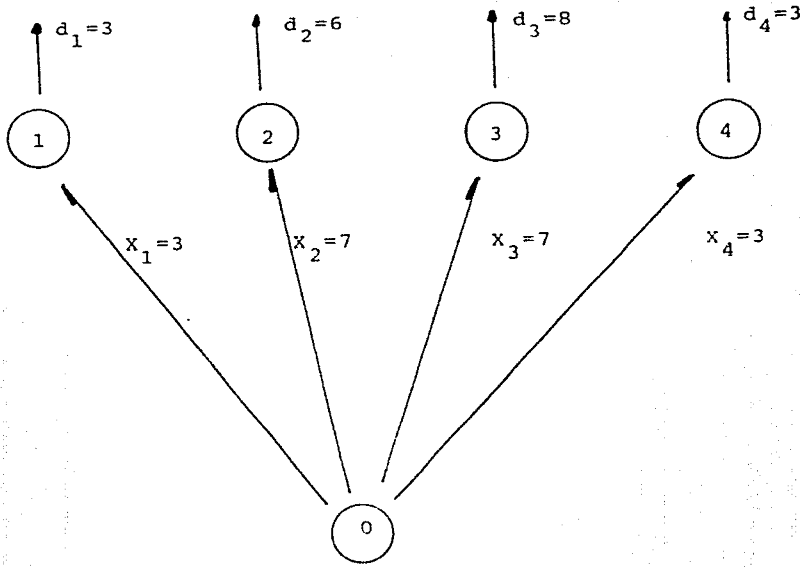


figura 4.4d

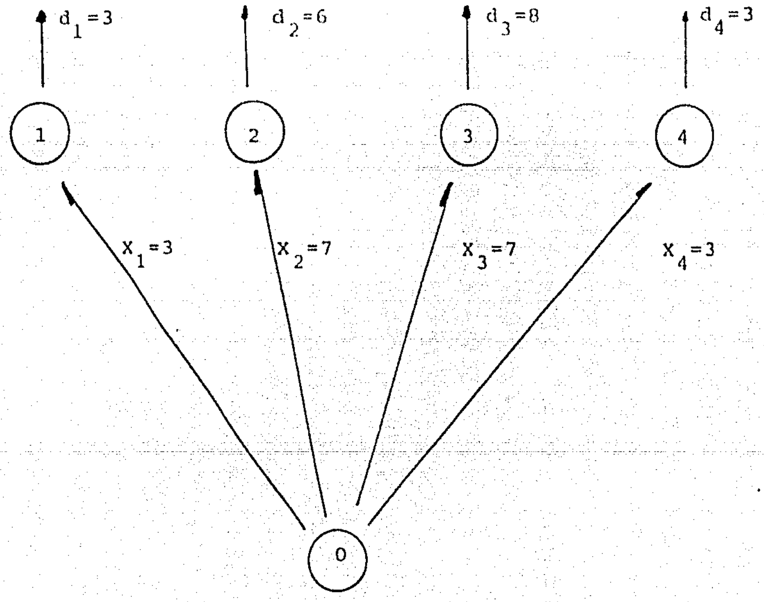
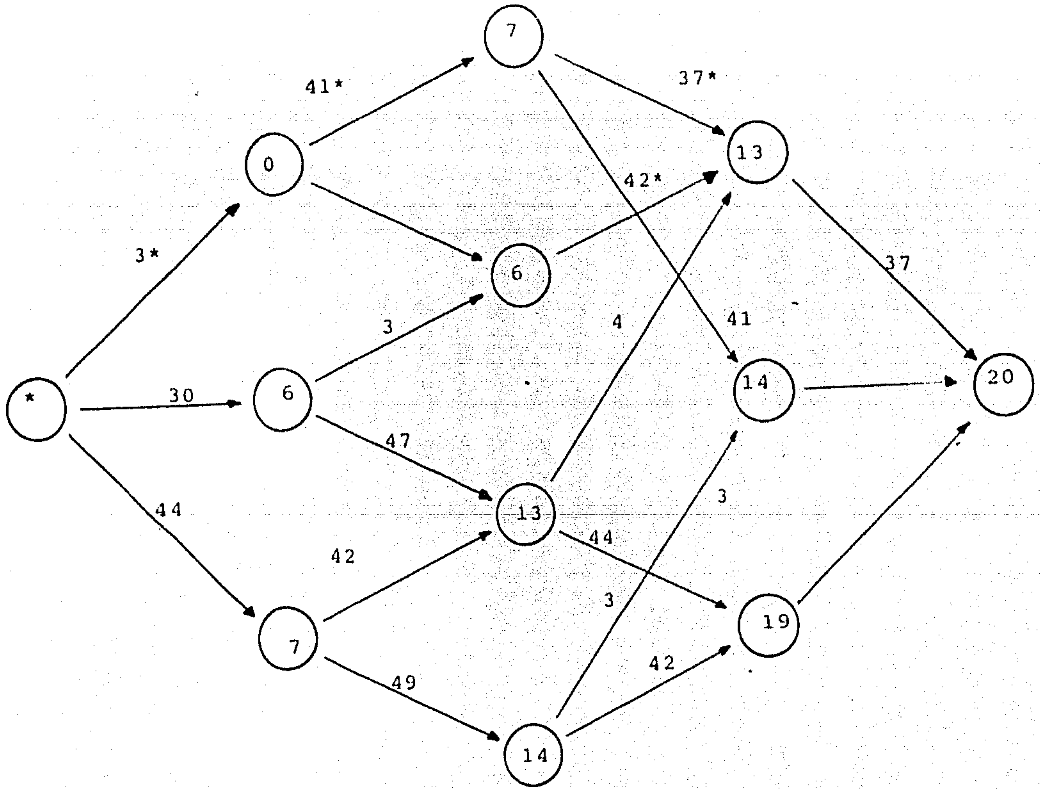


figura 4.4d

Considerando sólo los vértices requeridos para determinar la ruta de costo mínimo del vértice (*) al vértice 20, se tiene; la gráfica de la siguiente figura 4.4e.

La ruta de costo mínimo se indica con el símbolo *, resultando que f(1) es el costo de satisfacer la demanda durante los períodos 1 hasta 4, si I1=0, por tanto el plan de producción óptimo es: x = 3, x = 6, x = 7, x = 4 cuyos resultados pueden ser apreciados en la fig. 4.4f.



REPRESENTACION DE LA RUTA DE COSTO MINIMO

figura 4.4e

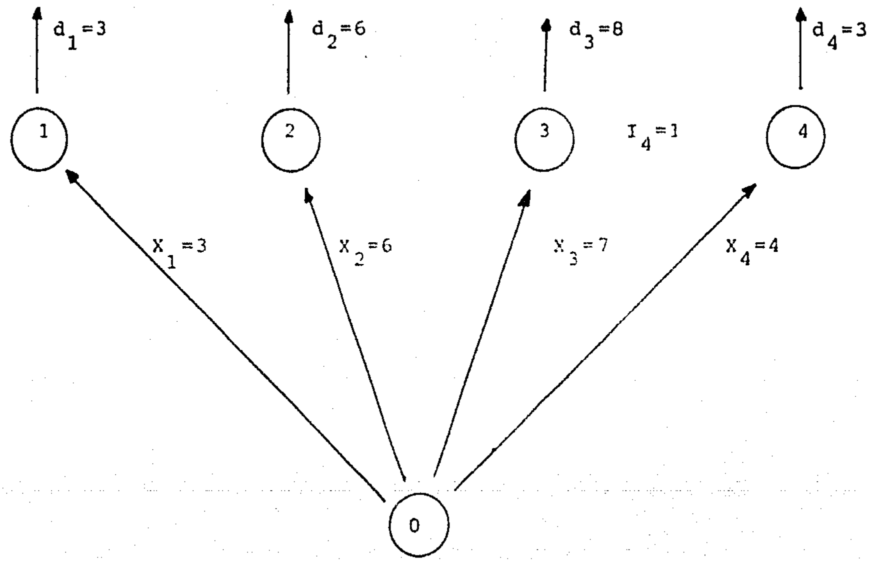


figura 4.4f

CAPITULO IV.

MODELO CON COSTOS CONCAVOS Y CONVEXOS.

Una extensión natural del capítulo anterior, es el análisis del control de producción-inventario para el caso en que las funciones de costos e inventario son funciones cóncavas y convexas. En los problemas de inventario más comunes de la vida real, los costos que intervienen inciden con mayor frecuencia como costos no proporcionales a las cantidades manipuladas. La psicología industrial aplicada a la mercadotecnia, con el fin de incrementar utilidades, trae como consecuencia variaciones en el costo marginal del producto; dependiendo de las cantidades negociadas, los economistas engloban este concepto en las llamadas economías de escala que son beneficiosas para ambas partes, comprador y vendedor.

Por lo anterior, existe la necesidad de dedicar un capítulo especial cuando las funciones de costos son monótonas crecientes y decrecientes.

Este capítulo analiza un sistema de producción-inventario cuyos costos son cóncavos y convexos, la problemática consiste en la determinación de una política óptima de operación cuando la demanda es determinística y periódica.

El capítulo se desarrolló como sigue: En la Sección 4.1 se plantean y se analizan los modelos matemáticos cuyos costos con cóncavos para el caso sin déficit y el caso con demanda rezagada, en la Sección 4.2; se plantean los modelos modificados que son extensiones del modelo original, cuando existe restricción en la producción, La Sección 4.3 detalla los argumentos con base en teoremas y axiomas de cómo y porqué se alcanza la optimalidad de las soluciones. En la Seccion 4.4 se describen los métodos de solución para cada caso y se proporcionan varios ejemplos representativos de los resultados expuestos. En la Sección 4.5 se analiza el caso de costos convexos con ejemplos tipo.

4.1. MODELO BASICO CON COSTOS CONCAVOS.

Se analizará el modelo de producción-inventario bajo la hipótesis de que las funciones de costo por producción e inventario son funciones cóncavas. Una función de costos cóncavos es aquella cuyos costos de producir una unidad adicional de producto cuando estamos en el nivel de producción x + 1 es menor que el correspondiente al nivel x. Los modelos que representan los costos que caen en esta categoría son los más generalizados, reales y complejos en los procesos de producción. La definición de concavidad en términos matemáticos se encuentra en el apéndice 5, mientras que la figura 4.1 a, muestra gráficamente una función cóncava.

La problemática de determinar una política óptima para un sistema de producción-inventario, con demanda determinística en un horizonte de planeación constituido por N períodos, sin demanda diferida, queda expresado en un modelo con la siguiente configuración matemática :

$$\text{Min } z = \sum_{t=1}^{n} C_t (X_t) + H_t (I) (I)$$

Sujeto a :

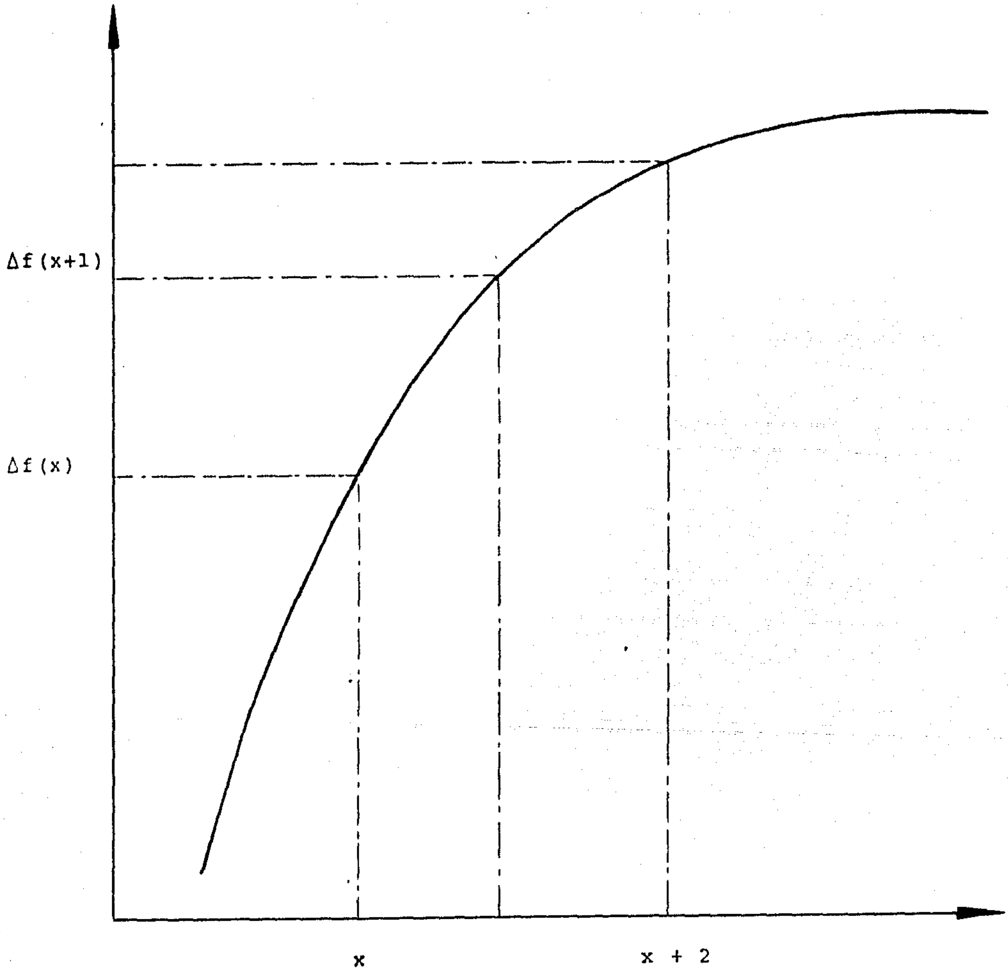
$$X_1 - d_1 = I_1 \quad \ldots\ldots \quad 4.1a$$

$$I_{t-1} + X_t - D_t = I_t \; ; \; = 1.2, \ldots, n-1 \ldots 4.1b$$

$$I_{n-1} + X_n - D_n = 0 \quad \ldots \quad 4.1c$$

$$I_o = I_n = 0 \quad \ldots \quad 4.1d$$

$$X_t \geq 0 \; ; \; I_t \geq 0, \quad t=1, 2, \ldots, n$$



FUNCION CONCAVA
figura 4.1a

Podría agregarse la restricción que equilibra el monto total de artículos producidos, expresado con la ecuación.

$$\sum_{t=1}^{T} D_t = \sum_{t=1}^{T} X_t$$

La cual está implícita como consecuencia de operaciones simples entre las restricciones planteadas.

La restricción 4.1a manifiesta que el inventario neto al final del período uno es igual a la producción menos la demanda en ese período; la segunda restricción considera el inventario del período anterior para efectuar el equilibrio de flujo semejante a la ecuación 4a. La restricción 4.1c supone que el inventario al final del horizonte de planeación es cero. Los valores de las variables de decisión son no negativas.

El modelo considera que en cada período t se tiene una demanda conocida de un mismo artículo que se denota por Dn. La variable de decisión representa la producción en el período t y el costo de producir Xt artículos en cada período es Ct (Xt) con Ct(.) función conocida. El costo de almacenar, I (t) unidades del artículo en cuestión durante el período t está dado por ht (It) con ht (.) función conocida. La demanda debe satisfacerse con la producción del mismo período o uno anterior, equivalentemente, se dice que el sistema de producción inventario no permite demanda acumulada o déficit en la satisfacción de la demanda.

El costo total del período t, está dado por una función Kt (Xt, It) englobando costos de producción y del inventario neto del mismo, es decir Kt (Xt It) = Ct (Xt) + Ht (It); Ct (Xt) es una función cónvava (fig. 4.1 a) dependiente de la variable de producción en el período. Ht (It) es la función cóncava de mantenimiento.

CASO CON DEFICIT.

Al planearse la producción para varios períodos existe la posibilidad de que la demanda no sea completamente satisfecha en alguno de ellos y se acumule para períodos posteriores. En este caso defínase las variables I_t^+ e I_t^- como el inventario a la mano y como el inventario diferido a períodos futuros respectivamente, al final del período t. El inventario neto queda expresado como $It = I_t^+ - I_t^-$. Para este caso la función de costos tiene la siguiente estructura :

$$K_t \quad (X_t, I_t) = C_t \quad (X_t) + H_t \quad (I_t^+) + H_t \quad (I_t^-)$$

El modelo se modifica también en las restricciones dado que es necesario seguir guardando el equilibrio de flujo y se ha alterado la expresiòn porque se cuenta con entradas retrospectivas de productos. Analizando este concepto en términos de teoría de Redes se visualiza de manera muy clara, sea la gráfica 4.2 a. tomando como ejemplo el nodo 3 se tienen seis arcos relacionados con el nodo, tres arcos incidentes y otros tres que partes de ahí. Los arcos que llegan son el que lleva el flujo de producción; el segundo es el inventario que proviene del nodo 2 y por último el inventario diferido cuyo producto es elaborado en un período futuro. Los arcos que parten del nodo tres son : el que satisface la demanda, el que transporta el flujo con retraso hacia el nodo dos y el que traslada al nodo cuatro inventario sobrante.

Matemáticamente este equilibrio se expresa con la siguiente ecuación, que vendrá a formar parte del modelo como una restricción.

$$I_2^+ + X_3 + I_3^- = D_3 + I_2^- + I_3^+$$

La formulación matemática de flujo máximo a costo mínimo de la red es :

$$\text{Min} \quad Z \quad = \sum_{t=1}^{n} (C_t \ X_t - r_t \ D_t) + \sum_{t=1}^{n-1} (h_t \ I_t^+ + P_t \ I_t^-)$$

Sujeto a :

$$X_1 + I_1^- = D_1 + I_1^+$$

$$X_t + I_{t-1}^+ + I_t^- = D_t + I_{t-1}^- + I_t^+$$

$$X_n + I_{n-1}^+ = D_t + I_{n-1}^- \qquad t = 2, 3, \ldots, n-1$$

$$X_t \geq 0, \; I_t^+ \geq 0, \; I_t^- \geq 0, \; t = 1, 2, \ldots, n$$

Donde la interpretación de las variables son las que se han venido manejando y Pt es el costo unitario de penalización por diferir demanda entre los periodos t y t+1, t = 1, 2, ..., n.

Este modelo tiene una gran aplicabilidad en los casos prácticos porque su estructura al involucrar mayor número de variables representa de manera mas cercana los problemas reales. Las varialbes Ii y Xi deben tomar valores enteros que satisfagan las demandas de los periodos presente, pasado y futuro al periodo de producción y como las Di son tambien cantidades enteras, se tiene un problema de programación no lineal con variables de decisión enteras.

4.2. EXTENSIONES DEL MODELO.

MODELO CON COSTOS CONCAVOS Y PRODUCCION LIMITADA

El propósito de esta sección es abarcar problemas distintos a los analizados en los capítulos anteriores, a los cuales se les agregará restricciones o bien se considerarán mas varialbes de decisión que de hecho son elementos que en los problemas prácticos surgen, encaminando lo anterior a converger a una posible solución mediante un modelo matemático mas completo. Al modelo básico de producción inventario con costos cóncavos se le suman las restricciones de límite en la producción, dado que no es posible producir todo lo que se desee.

Considerese el problema de producción-inventario en que se pretende satisfacer la demanda de cierto artículo a costo mínimo con la restricción de que la producción en cada período no puede exceder de un cierto límite preestablecido L. Se supone que la demanda puede ser satisfecha por la producción en ese mismo período o por la producción elaborada en períodos anteriores. Se toman las mismas consideraciones que en el modelo anterior, en cuanto a nomenclatura y funciones de costos, agregando que la capacidad de producción está limitada por Ln unidades por período, que en forma de ecuación, se expresa como sigue:

$$L_n \geq D_n \qquad \text{ó} \qquad \sum_{n=1}^{N} L_n \geq \sum_{n=1}^{N} D_n$$

y enriquece al modelo, de tal manera que toma la siguiente configuración matemática :

$$\text{Minimice} \quad \sum_{n=1}^{N} C_n(X_n) + h_n(I_n)$$

$$\text{Sujeta a :} \quad I_1 = I_{n+1} = 0$$

$$I_n + X_n = d_n + I_{n+1}, \quad \ldots \quad n=1, \ldots, N$$

$$\sum_{n=1}^{N} L_n \geq \sum_{n=1}^{N} d_n \quad \ldots \quad n=1, \ldots, N$$

$$0 \leq X_n \leq L_n \quad \ldots \quad n=1, \ldots, N$$

MODELO CON COSTOS CONCAVOS, PRODUCCION LIMITADA Y DEFICIT PERMITIDO.

Para analizar esta problemática, se parte de nuevo del modelo básico con sus consideraciones, modificando algunas de sus restricciones y suponiendo que la demanda será satisfecha con la producción del mismo período o períodos futuros o por inventario existente.

Dado que se permite que exista déficit en a lo más P períodos (P número finito), se incluye en el modelo la restricción:

$$I_i \geq - \sum_{j=i-P+1}^{i} d_j \ ; \ i=p,\ p+1,\ \ldots,\ n$$

En donde se interpreta a Lj como el limite de producción, el cual debe ser mayor que la demanda en i periodos menos P periodos en los que se permite que haya déficit. De donde el modelo se transforma, tomando la siguiente estructura :

$$\text{Min:} \sum_{i=1}^{n} C_i \ (X_i) + h_i \ (I_i)$$

Sujeto a:

$$I_i + X_i = d_i + I_{i+1} \quad ; \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$I_i \geq \sum_{j=i-p+1}^{i} dj \quad ; \qquad i = p, p+1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{i} Lj \geq \sum_{j=1}^{i-p} dj$$

$$I_1 = I_{i+1} = 0 \qquad i = 2, \ldots, n$$

$$I_1 \text{ no restringido} \qquad i = 2, \ldots, n$$

A diferencia de los casos anteriores analizados, cuando se consideraba la extensión al modelo que permitia déficit, siempre la función objetivo se veia alterada, porque se sumaba el costo de penalización de manera explicita, con el próposito de que entrara en el proceso de minimización, notese que la función objetivo para este caso no cambia, es la misma, pero se interpreta de manera distinta a la variable hi (Ii), como el costo de mantener inventario cuando Ii es negativo.

4.3 OPTIMALIDAD DE LAS SOLUCIONES.

Observando las gráficas cóncavas 4.1 b y 4.1 c, en forma intuitiva se puede concluir que el mínimo de la función de costos se localiza en un punto extremo (definición en apéndice) de la región de factibilidad. Un punto extremo de la función siempre existe, puesto que está definida para un intervalo cerrado.

El punto extremo pertenece al conjunto de soluciones del conjunto poliédrico y coincide con el óptimo de la función objetivo del modelo. El siguiente teorema lo establece de manera clara.

Teorema : - (equivalencia de puntos extremos y soluciones básicas).

Sea K el politope convexo formado por los vectores X que satisfacen Ax = b donde A matriz m x n de rango m y b vector columna de m componentes. Entonces x es un punto extremo de K si y solo si, $x \geqslant o$ y x es una solución básica de Ax = b (demostración en apéndice 6).

Teorema.-

Sea P (x) una función continua y diferenciable en E^n una condición necesaria para que X* sea un mínimo local de f (x) es que f (x*) = o y que H (x*) sea positiva semi-definida. Una condición suficiente para que x* sea un mínimo local único de f (x) es que f (x*) = Ø y que H (x*) sea positiva definida (demostración apéndice 2).

Proposición.-

Sea f función cóncava en S, donde S es un conjunto convexo, cerrado y acotado. Sean x_1, x_2,... x_n puntos extremos de s, entonces el problema min {f(x) / xc S} tiene un elemento minimizante que es un punto extremo de S. (Demostración en apéndice 7) De donde se concluye que para el caso de inventarios el vector de producción óptimo es un punto extremo de las restricciones, además por la estructura del problema se cumple que (x_k) y (I_k) son números enteros.

Con apoyo en los teoremas anteriores se conoce que un punto óptimo de un problema de optimización cóncavo, con restricciones lineales, se obtiene en un punto extremo de la región de factibilidad. Un punto extremo tendrá a lo sumo n variables positivas (variables básicas) Si $D_t > 0$ implica que uno o ambos de X_t y I_{t-1} deben ser positivos (por las restricciones de equilibrio de flujo). Como existen n restricciones y la base tiene a lo sumo n variables positivas, se debe cumplir la restricción I_{t-1} $X_t = 0$, que indica, que si $X_t > 0$, entonces $I_{t-1} = 0$ y viceversa. Si $D_t = 0$, es posible que tanto I_{t-1} como X_t sean cero simultáneamente. Lo anterior queda establecido en el siguiente teorema.

Teorema.- Considérese el modelo de producción-inventario con costos cóncavos. Entonces existe al menos un plan de producción óptimo x = (xl, ..., xn) con correspondiene plan de inventario I = (Il, ..., In) tal que Xi Ii = 0 para todo período i + 1, ..., n (prueba ver apéndice 9).

Utilizando como metodo de solución para los problemas de producción-inventario la programación dinámica, se toma como soporte lo siguiente : al existir ciertos problemas de optimización que solo pueden ser resueltos cuando se les descompone en una serie de etapas, la solución secuencial de los problemas de decisión asociados con cada etapa es equivalente a la solución del problema de decisión del sistema original o bien, el principio de optimalidad de Bellman enuncia que si el sistema está en un estado dado en alguna etapa, la sucesión óptima de decisiones del estado siguiente es independiente de la sucesión de decisiones que fué usada para alcanzar dicho etado. Para que la programacion dinámica pueda ser aplicada, este principio debe cumplirse para los estados y decisiones definidas para el problema.

En la representacion de la problemática de producción-inventario como una red de flujo, se garantiza el plan de producción óptimo encontrando una solución que gráficamente muestra un árbol de expansión mínima (ver definición en apéndice), es decir para que la red sea óptima no debe de existir un circuito, hecho que esta relacionado con el concepto de vector linealmente independiente y que no puedan existir en una solución vectores dependientes. Una circulación en la red es un flujo distinto de cero que circula a lo largo del circuitos. Se puntualiza que en la red de flujo que representa al modelo no existe una circulación si y solo si Xi Ii = o paa todo i + 2, 3, ..., n, equivalentemente, no existe una circulación si y solo si en cada nodo i la demanda se satisface usando inventario de artículo del período anterior o de la producción en el mismo periodo i, pero no ambos.

Lema 1.- Un flujo factible, no tiene circuitos si y solo si satisface Ij Xj = o ; j = 2, ..., n, es decir en cada nodo la demand se satisface usando inventario de periodo anteriores o produccion del mismo período, pero no de ambos (prueba, ver apéndice 10).

Una implicación importante es que con las anteriores consideraciones se presenta la oportunidad de utilizar la técnica de programación dinámica para resolver los problemas en cuestión; las variables x solo pueden tomar ciertos valores que satisfagan exactamente las demandas de los períodos presentes, pasados y futuros al periodo de producción y como las di son cantidades enteras, entonces las variables de decisión podrán ser solo enteros.

Teorema.- Considérese el modelo de producción inventario con costos cóncavos y con opción a déficit en la satisfacción de la demanda. Entonces, existe al menos un plan de produccion optimo x = (x1, x2, ..., xn) con correspondiente plan de inventario I = (I1, I2, ..., In) tal que si Xm > 0 y Xn >0 donde m < n entonces Ii = o para al menos un i que satisface m < i ≤ n (prueba ver apéndice 9).

4.4 METODOS DE SOLUCION Y EJEMPLOS

Dentro de las técnicas con las que cuenta la investigación de operaciones los modelos de producción-inventario utilizan algunas de ellas, siendo las más usadas, la Teoría de Redes y la programación dinámica.

Modelos de producción-inventarios con costos cóncavos aplicando programación dinámica.

El problema de producción-inventario multiperiódico con un sólo artículo y costos cóncavos puede plantearse como un problema de programación dinámica. Sean:

X_t = Producción en el período t, t = 1, 2, ..., T.
D_t = Demanda esperada en el período t.
I_t = Inventario al final del período t.

K_t (I_t, X_t) = Costo de producir X_t unidades y tener un inventario final I_t en el período t.

F_t = Costo del plan de producción óptimo del período t al período T.

Las anteriores variables cumplen la relación $I_t = I_{t-1} + X_b - D_t$, con lo que el modelo de programación dinámica puede formularse considerando a la variable t como las etapas, a la variable I_t, como los estados y a X_t como variables de decisión. La relación planteada es la función de transformación de estados;

f_t (I, X) = min i K_t (I_t " X_t) + f_t + 1 (I_t, X_t) es la ecuación recursiva y f_t (I_t, X_t) es la condición de frontera.

La resolución del modelo proporciona un programa de producción óptimo (X_1^*, ... , X_t^*) respecto a los costos. El problema básico anterior puede modificarse para permitir restricciones adicionales (como límite de producción $X_t < D_t$ y de inventario $I_t < L_t$) o para facilitar la manipulación numérica del problema explotando las propiedades de su función de costos. Enseguida se describirá un algoritmo hacia adelante para el caso sin déficit con costos por unidad fijos.

Los costos de compra y los precios de venta son constantes através de todos los periodos y consecuentemente sólo los costos por manejo del inventario son considerados. Para el periodo t-ésimo, t=1,2, ... , N, haciendo:

Dt = Cantidad demandada
ht = Costo por unidad de inventario acarreada al periodo t+1
At = Costo por ordenar
Xt = Cantidad ordenada o manufacturada
Kt(Xt,It) = Costo, en el periodo t, por producir Xt unidades y teniendo al final un inventario neto de It

Las demandas y los costos son no negativos
El problema es encontrar un programa Xt > 0, t=1,2, ... , T tal que cumpla con las demandas a un costo mínimo al cual denominaremos "programa óptimo". Se denotará "I" como el inventario que entra al periodo e "Io" el inventario inicial. Para el periodo "t" tendremos:

$$I = I_0 + \sum_{j=1}^{t-1} X_j - \sum_{j=1}^{t-1} D_j \quad 0$$

Podemos entonces escribir una ecuación que represente la política de costo mínimo para los periodos t a , dando el inventario que llega. Para el periodo "t"

$$f_t \; (I) \; \min_{\substack{x + 20 \\ I + X + \geq +}} K_t, \; (X_t, \; I + X_t - D_t) + f_t^{-1} \; (I + X_t - D_t)$$

Entonces para el periodo T se tendrá:

$$F_t = \min_{o \leq j \leq k-1} F_j + M_{jk} \; ; \qquad y \; F \cdot (0) = 0 \; (\text{condición de frontera})$$

Consecuentemente, podemos calcular ft (I) iniciando en t = N, con esto, calcular la función para t = N-1 y asi sucesivamente hasta llegar a 1. Sea Mjk el costo de producir en el periodo j+1 para satisfacer las demandas en los periodos j+1, j+2 ... , k (incluye costos de producción y de inventario). Sea f (t) el programa de costo mínimo para los periodos 1 a t. Entonces:

$$f \; (I) = \min_{\substack{X + 20 \\ I + X + \geq 0 +}} (K_n \; (X_n) \; I + X_n - D_n) \qquad \ldots 2.3.1$$

$$F \; (0) = 0 \; (\text{condición de frontera})$$

Esto es, el costo mínimo de los primeros "t" períodos consiste en el costo inicial en el período "j" más los costos por tomar la política óptima en los períodos 1 a j-1 tomados por sí mismos, más los costos de acarreo de inventario desde el período j.

Sea A_{jk} el costo óptimo para los períodos 1, 2, ... , k (un horizonte de K períodos). donde Ik = Ø y j + 1 es el período de la última producción: esto es, cuando $Xj+1 > 0$, y $Xj+2 = Xj+3 = \ldots = Xn = \emptyset$, entonces

$$A_{jk} = F_j + M_{jk}\ Y$$

$$F_k = \min\ A_{jk}$$

Para un horizonte de k períodos, el último punto de regeneración óptimo es j*(k) definido por

$$A^*_j\ (k),\ k = \min_{0 \leq j \leq k-1} A_{jk}$$

Dado un punto de regeneración k cualquiera se puede fácilmente encontrar el último punto de regeneración óptimo anterior al período k, j* (k), donde el inventario es cero. Esto significa que la última producción ocurrió en el período j* (k) +1.

Para que esta ecuación sea válida, debe poseer las siguientes propiedades:

1) IXt = Ø , para toda t

2) X = Ø o $X = \sum_{j=T}^{k}$ Dt para alguna k, tal que t k < T

3) Si Dl es satisfecha por alguna Xk, donde k < i , entonces Dt, para t = k+1, k+2, ... , i-1, también on satisfechas por Xk.

4) Dado que I = Ø para el período t, es óptimo considerar los períodos 1 a t-1 por sí mismos.

5) Si para un período i el mínimo de la ecuación ocurre para j = k i, entonces, en períodos t > i es suficiente considerar sólo k ≤ i. En particular, si i = k, es suficiente considerar programas que Xl > Ø

6) Si l ≥ k entonces j* (l) ≥ j*(k), donde j*(.) es el último punto de regeneración.

El alogoritmo es el siguiente:

para el período i, i = 1, 2, ... , N

1. Considerar las políticas de ordenar en el tiempo k para

k = 1, 2, ..., i y satisfaciendo las demandas Dt para t = k, k+1, ... , i, en ese orden.

2. Determine el costo total de estas i distintas políticas mediante la adición de los costos por ordenar y de almacenamiento asociados al poner una orden en el periodo k, y el costo por actuar de manera óptima para los periodos 1 a k-1 considerados para cada uno de ellos. El costo ha sido determinado con anterioridad al efectuar los cálculos para los periodos t = 1, 2, ... , i

3. De estas i alternativas, seleccionar la política de costo mínimo para los periodos 1 a i considerándolos de manera independiente.

4. Proseguir para el periodo i+1 aún no es igual a T, ya que de serlo se habrá finalizado.

Ejemplo:

La siguiente tabla presenta un conjunto de datos para un periodo de 12 meses; para simplificar cálculos, se hace ht = 1 para toda t, la segunda tabla contiene los cálculos especificos. Para ilustrar: el plan óptimo para el periodo 1 únicamente se ordena a un costo de 85. Se tienen que evaluar dos posibilidades para el periodo 2 en el periodo 2 y utilizar la mejor opción para el primer periodo (considerando a éste por separado) u ordenar en el periodo 1 para ambos periodos y almacenar en inventario para el periodo 2 (a un costo de 85+29 = 114). La mejor politica es esta última. Para el tercer periodo hay tres alternativas, etc.

MES	Dr	At	hr
1	69	85	1
2	29	102	1
3	36	102	1
4	61	101	1
5	61	98	1
6	26	114	1
7	34	105	1
8	67	86	1
9	45	119	1
10	67	110	1
11	79	98	1
12	56	114	1
%	52.5	102.8	1

MES t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
COSTO DE ORD.	85	102	102	101	98	114	105	86	119	110	98	114
DEMANDA	69	29	36	61	61	26	34	67	45	67	79	56
	85	187	216	287	375	462	505	555	674	710	808	903
		114	223	277	348	401	496	572	600	741	789	864
			106			400	469			734		901
							502					
COSTO MINIMO	85	114	186	277	348	400	469	555	600	718	789	864
POLITICA OPT.	1	12	123	34	45	456	567	8	89	10	10,11	11,12

En el renglón de la politica óptima de esta tabla sólamente se muestra el último periodo de ordenamiento; 567 indica que la politica óptima para los periodos 1 a 7 es el ordenar en el periodo 5 para satisfacer demandas D5, D6, y D7, y adoptar la politica óptima para los periodos 1 a 4 considerándolos separadamente. Cada vez que aparece un horizonte de tiempo, las entradas de la tabla pueden ser truncadas hacia abajo de la diagonal sureste. Para el juego de datos mostrado, la politica óptima es:

En el renglón de la política óptima de esta tabla sólamente se muestra el último período de ordenamiento; 567 indica que la política óptima para los períodos 1 a 7 es el ordenar en el período 5 para satisfacer demandas D5, D6, y D7, y adoptar la política óptima para los períodos 1 a 4 considerándolos separadamente. Cada vez que aparece un horizonte de tiempo, las entradas de la tabla pueden ser truncadas hacia abajo de la diagonal sureste. Para el juego de datos mostrado, la política óptima es:

1. Ordenar en el período 11, X11 = 79 +56 = 135 y usar la política óptima para los períodos 1 a 10, que implica:

2. Ordenar en el período 10, X10 = 67 y usar la política óptima para los períodos 1 a 9, que implica:

3. Ordenar en el período 8, X_8 = 67 + 45 = 112 y usar la política óptima para los períodos 1 a 7, que implica:

4. Ordenar en el período 5, X5 = 61 + 26 + 34 = 121, y usar la política óptima para lo períodos 1 a 4, que implica:

5. Ordenar en el período 3, X3 = 36 + 61 = 97, y usar la política óptima para los períodos 1 y 2, que implica:

6. Ordenar en el período 1, X1 = 69 + 29 = 98.

El costo total de la política es 864.

Ejemplo:

Considere un sistema de producción-inventario con la demanda determinística y horizonte de planeación consistente de cuatro periodos. Suponga que las funciones de costo por producción e inventario son como sigue: Ci(xi)=0 si xi=0; Ci(xi)=ki+Cixi si xi>0 y hi(Ii)=hiIi i=1, ..., 4. Las constantes asociadas así como la demanda en cada periodo son:

Periodo i	Demanda D	Costo fijo K	Costo unitario C	Costo unitario por inventario h
1	20	30	3	2
2	30	40	3	2
3	40	30	4	1
4	30	50	4	1

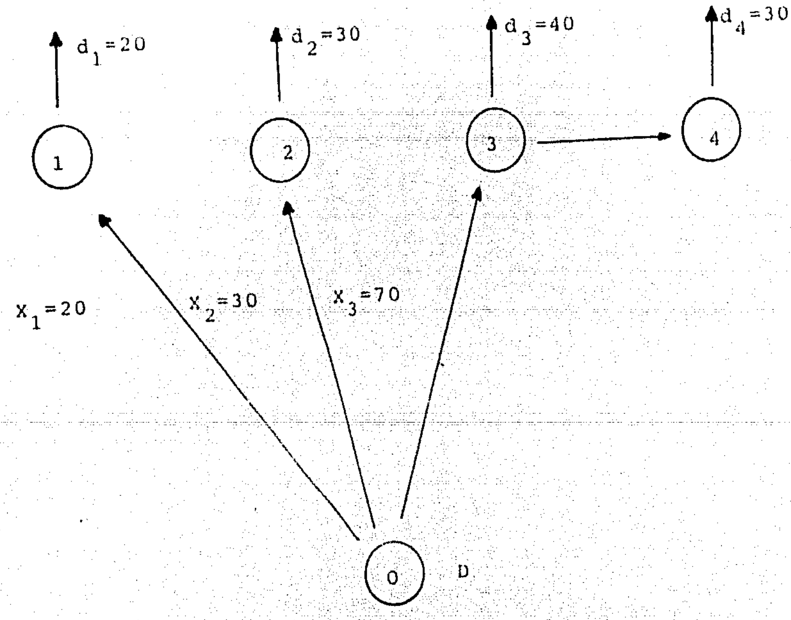
Si definimos las constantes Cij asociadas con el costo de satisfacer la demanda desde el periodo i hasta antes del periodo j se tiene que:

C12 = 90 C13 = 180 C14 = 300
C23 = 130 C24 = 250 C34 = 190
C15 = 390 C25 = 340 C35 = 310

De donde la solución con programación dinámica es: f(5)= 0 y

$$f(i) = \min \{Cij + f(j) \ / \ j>i\}$$

Para todo i=1,2,3,4. Lo que deseamos es calcular f(1). Efectuando operaciones se tiene que: f(4)= 170; f(3) =340 f(2) = 470; f(1) =560 entonces, f(1) es el costo de satisfacer la demanda durante los periodos 1 hasta 4, se tiene I1=0 y el plan de solución óptimo es: x = 20, x =30, x = 70, x = 0 cuyo resultado final puede ser apreciado en la fig. 4.4a. Como se puede observar en la figura el plan de producción no forma ciclos por tanto se cumple la condición x I = 0 de donde se concluye que es un plan de producción óptimo.



REPRESENTACION DEL PLAN DE PRODUCCION OPTIMO

figura 4.4a

EJEMPLO:

Considere el mismo sistema de producción-inventario del problema anterior, con demanda determinística y horizonte de planeación consistente de cuatro períodos. Suponga que las funciones de costo de producción e inventario son como sigue: $c_i(x_i) = 0$ si $x_i = 0$; $c_i(x_i) = k_i + c_i x_i$ si $x_i > 0$ $i = 1,2,3,4$. Suponga que se permite acumulación de demanda no satisfecha a un costo $h_i(I_i) = P_i I_i$ $i=1...,4$ las constantes asociadas, así como la demanda en cada período son:

Período i	Demanda d	Costo de preparación k	Costo marginal c	Costo por inventario h	Costo por déficit p
1	20	30	3	2	1
2	30	40	3	2	1
3	40	30	4	1	2
4	30	50	4	1	2

Si se definen las constantes c_{ij} asociado con el costo de satisfacer la demanda desde el período i hasta antes del período j, se tiene que:

$c_{45}=170$; $c_{35}=340$; $c_{23}=130$; $c_{12}=90$

$c_{34}=190$, $c_{24}=330$; $c_{13}=210$

$c_{25}=510$; $c_{14}=410$

$c_{15}=590$

como f(1) es el costo asociado al plan de producción óptimo del periodo 1 al 4 dado que $I1=0$, y éste es igual a 116, entonces el plan de producción óptimo será como se muestra en la figura 4.4d.

El plan de producción óptimo es $x1=3$ $x2=7$ $x3=7$ $x4=3$ a un costo de 116.

Ejemplo 5.2. Suponga que se desea planear la producción-inventario para cuatro periodos cuyas demandas son: $d1 = 3$, $d2 = 6$, $d3 = 8$, $d4 = 3$. La capacidad máxima de producción para todo periodo es $Li = 7$ $i = 1, 2, 3, 4$. Los costos de producción están dados como: $Ci(xi) = 0$ si $xi = 0$; $Ci(xi) = (6-i) + 5xi$ si $xi>0$ y la función de costos de inventario tiene la forma: $hi(Ii) = -1(Ii)$ si $Ii<0$. Determinar el plan de producción óptimo durante cuatro periodos. Utilizando las funciones recursivas de la programación dinámica el plan de producción óptimo se determinará calculando f(1).

Definiendo las constantes Cij asociadas con el costo de satisfacer la demanda del periodo i hasta antes del periodo j, se tiene que considerar $f(5) = 0$:

C45 = 17 con S45 = {3} ; C34 = 00

C35 = 61 con S35 = {7,4}

C23 = 34 con S23 = {6} ; C12 = 20 con S12 = {3}

C24 = 79 con S24 = {7,7} ; C13 = 55 con S13 = {2,7}

C25 = 100 con S25 ={7,3,7} ; C14 =103 con S14 = {7,3,7}

C15 =117 con S15 = {0,7,7,6}

con $f(i) = \min \{Cij + f(j)\}$ $j>0$

$f(4) = 17$; $f(3) = 61$

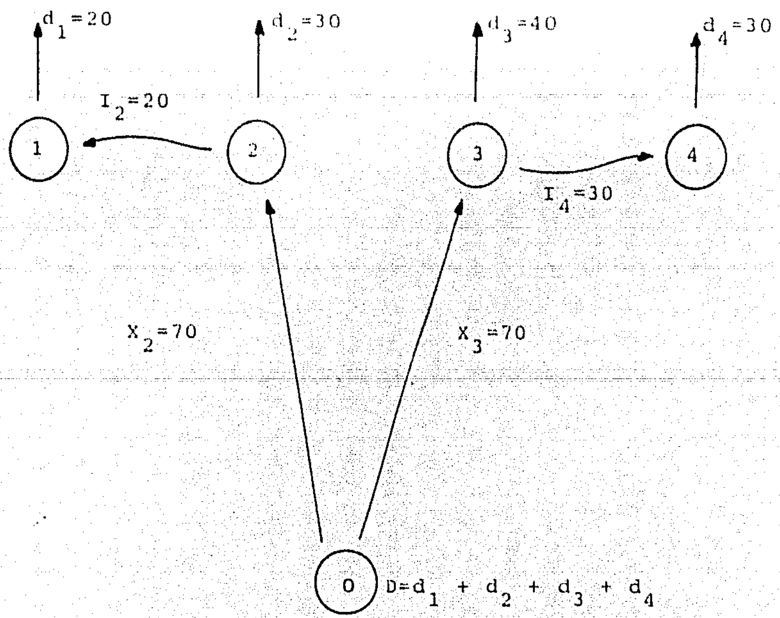
$f(2) = 95$; $f(1) = 115.$

Entonces la solución con programación dinámica es como sigue: f(5) = 0 y f(1) = min {cij + f (j) / j>1} para todo i=1,2,3,4. Lo que se desea es calcular f(1). Efectúando operaciones se tiene que: f(4) = 170 ; f(3) = 340 f(2) = 470 ; f(1) = 550 siendo f(1) el mínimo costo para satisfacer la demanda de los períodos i=1, ..., 4, cuando I = 0. De tal forma que el plan de producción óptimo está dado por:

f(1) = C13 +f(3) = C13 +C35+f(5) = C13+C35

f(1) = C13(2) + C35(3).

Por lo tanto se debe producir en los períodos 2 y 3, y el plan de producción óptimo es: x = 0; x2 = 70; x3 = 70; x4 = 0 con un costo óptimo de f(1) = 550. Los resultados se observan en la figura 4.4b.



REPRESENTACION GRAFICA DE LA PRODUCCION OPTIMA

figura 4.4b

EJEMPLO.

Considere un problema de cuatro periodos cuyas demandas son $d_1=3$, $d_2=6$, $d_3=8$, $d_4=8$ respectivamente y cuya capacidad de producción para todo periodo es $Li = 7$ $i = 1,2,3,4$; los costos de producción e inventario están dados por:

$Ci\ (xi)=0$ si $xi=0$; $ci(xi)=(6-k) + 5\ (xk)$ si $xi>0$. Y los costos de almacenamiento están dados por $Hi\ (Ii)= i(Ii)$. No se permite acumular demanda. El problema es determinar el plan de producción óptimo, tal que los costos totales incurridos se minimicen.

Definiendo las constantes Cij asociadas con el costo de satisfacer la demanda desde el periodo i hasta antes del periodo j se tiene que:

C45 = 17 con S45= {3} ; C34 =

; C35 =

C23 = 34 con S23= {6} ; C12= 20 con S12 =3

C24 = 79 con S24= {7,7}; C13=54 con S13= {7,2}

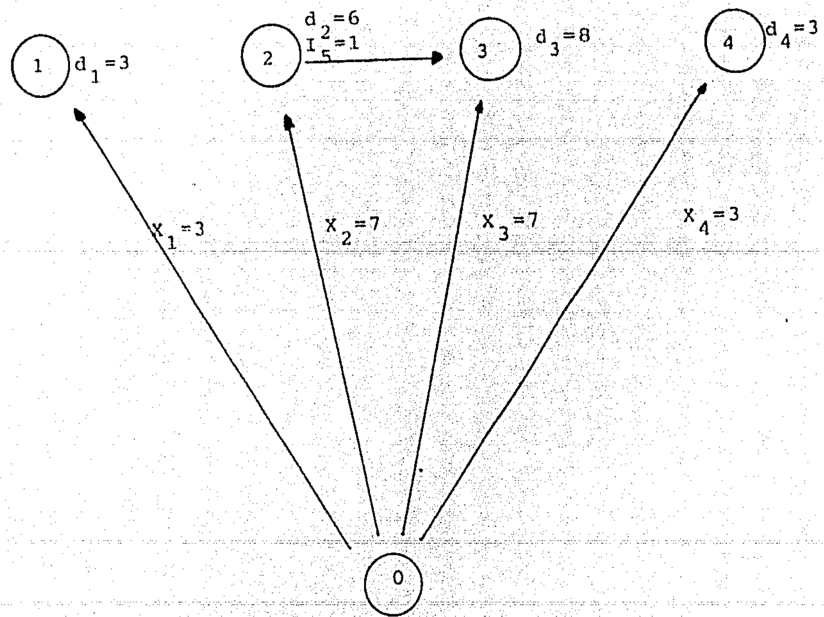
C25 = ; C14 =103 con S14= {7,3,7}

; C15 =132 con S15 = {6,7,7, 8}

Resolviendo con programación dinámica se tiene que la condición de frontera es: $f(5) = 0$, y

$$f(i) = \min \{cij = f(j) \ / \ j>i\}$$

para todo i = 1,2,3,4. lo que se desea es calcular f(1). efectuando las operaciones se tiene: f(4) = 17; f(3) = 00 f(2) = 96 f(1) = 116 considerando sólo los vértices requeridos para determinar la ruta de costo mínimo del vértice (*) al vértice 20 se tiene la ruta más corta del vértice (*) al vértice 20 es la indicada por el doble arco.



REPRESENTACION DEL PLAN DE PRODUCCION OPTIMO

figura 4.4d

4.5 MODELOS CON COSTOS CONVEXOS.

En la presente sección se analizan sistemas de producción-inventario, cuyos costos son dados por funciones convexas (definición en apéndice 5), figura 5.1a.

Surge la necesidad en la teoría de inventarios de plantear y resolver problemas, cuando los costos son dados por curvas monótonas decrecientes, porque bajo el concepto de deseconomías de escala, se tienen los casos en los que al aumentar el volúmen de artículos elaborados ó almacenados, también aumenta el costo marginal de los mismos. Al intentar resolver un problema de producción-inventario, cuyos costos son convexos, se puede plantear matemáticamente con el mismo modelo que se analizó para el caso de costos cóncavos, pero la función objetivo involucra los costos K (X, I) = c (X) + H (I) donde c (X) es cpmvexp [ara $X \geqslant 0$ y H (I) es convexo para todos los valores del inventario neto.

Es interesante preguntarse cómo se alcanza la optimalidad de las soluciones cuando se tiene un problema de programación no lineal, cuya función objetivo está constituída por funciones convexas, observando las figuras 5.1a en forma gráfica se aprecia que en todos los casos es posible localizar un punto mínimo, para la función definida con un conjunto convexo y compacto (cerrado y acotado), la justificación matemática se soporta en una serie de teoremas que se pueden revisar en el apéndice 2. Enseguida se muestra un planteamiento con un formato general de un problema de redes de flujo con costos convexos.

$$\text{Min} \sum_{(i,j)\, e A} c_{ij}\,(X_{ij})$$

Sujeta a:

$$\sum X_{ij} - \sum_{j e T_i} X_{ji} = b_i \; ; \; i \; e \; S$$

$$0 \quad X_{ij} \quad U_{ij} \; ; \; (i,j)\; eA$$

$$X_{ij} \text{ entero}$$

donde:

C_{ij} (.) función convexa

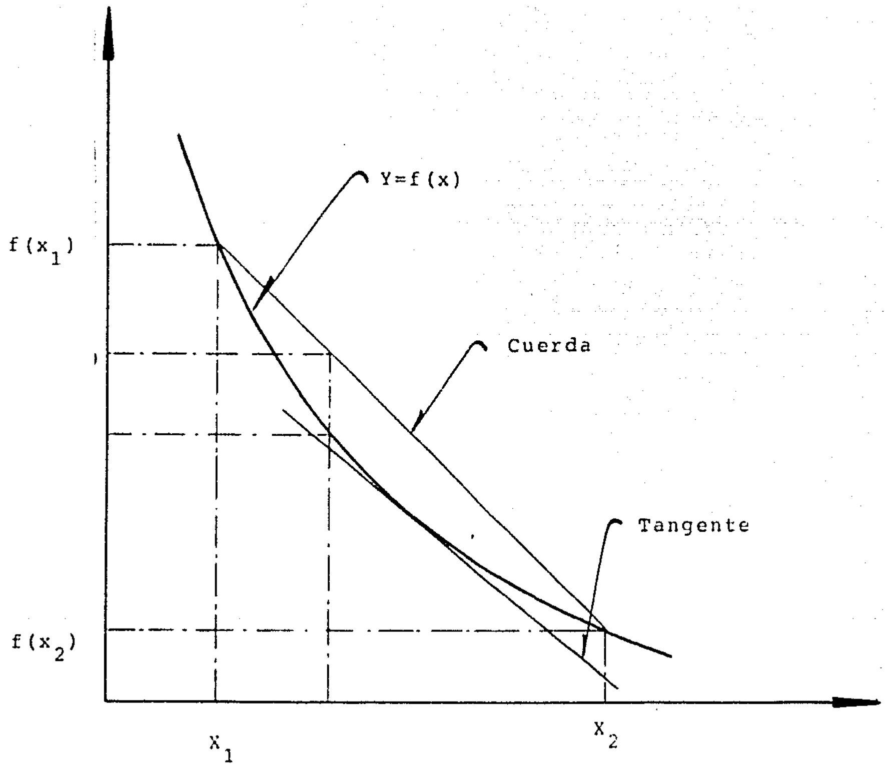
E_i + i (i,j) eA conjunto de nodos adyacentes a i

por area (i,j)

T_i = (j,i) e A conjunto de nodos adyacentes a i

por un arco (j,i).

b_i = disponibilidad o requerimiento de flujo.



FUNCION CONVEXA

figura5.1a

Una condición necesaria en este modelo es que la suma de los requerimientos y disponibilidades sobre todos los nodos S de la red sume cero o bién $b = \emptyset$. El problema consiste en minimizar los costos convexos por paso de flujo en una red [S,A] donde S es el conjunto de nodos y A es el conjunto de aros. El problema de transporte es un caso especial y ejemplo representativo del modelo planteado.

METODOS DE SOLUCION.

Para resolver los problemas de producción-inventario con costos convexos se utilizan básicamente tres métodos de solución, el primero soportándose en la teoría de redes de flujo, el segundo el algoritmo de costos convexos para el caso en el que no se permite diferir la demanda a períodos futuros y por último cuando el déficit es permitido, se usa el algoritmo de transporte.

Cuando los modelos han sido conceptualizados como problemas de redes de flujo, el objetivo es encontrar una red conexa que contenga a todos los nodos para que se garantice que se está satisfaciendo la demanda que se asigna a cada uno de ellos y que sea tal que la suma de los costos asociados a los arcos sea un costo mínimo, el problema se resuelve siempre mediante un árbol que además es único (apéndice 8).

Ejemplo:

Considere un problema de planeación de la producción en el cual puede haber dos tipos de producción: de tiempo regular y de tiempo extra en cada período. En cualquier período la capacidad de tiempo regular y de tiempo extra es de dos unidades. Las demandas en los períodos 1, 2 y 3 son 2, 7 y 3 unidades respectivamente. Costo de producción de tiempo regular es de $4 por unidad y tiempo extra el costo es $7 por unidad. Los costos de inventario son $1 por unidad y costos por órdenes surtidas con retraso con $2 por unidad por período. No tiene inventario inicial y el inventario neto final será cero. El déficit se surte con retraso.

Solución.

El planteamiento queda como sigue:

$$\text{Min } Z = 4 X_{51} + 4X_{52} + 4X_{53} + 7 X_{61} + 7 X_{62} + 7 X_{63} + I_2 + I_3 + 2 I_4 + 2 I_5$$

Sujeto a:

$$X_{61} + X_{51} - I_2 + I_4 = 2 \qquad \text{nodo (1)}$$

$$X_{52} + X_{62} + I_2 - I_4 + I_5 - I_3 = 7 \qquad \text{nodo (2)}$$

$$X_{53} + X_{63} + I_3 - I_5 = 3 \qquad \text{nodo (3)}$$

$X_{ij} > 0$; $I_j > 0$

Valor de la función objetivo = 70

X5, = 2 ; X52 = 2 ; X53 = 2 X6, 2 ;

X6 + 2 ; X63 = 2 ; I = 2 I = 0; I = 4

X5 = 1, la gráfica 4.5b muestra el problema.

Donde el nodo (5) representa la producción en tiempo normal y el nodo 6 la producción con tiempo extra. Las variables I_4, e I_5 son los inventarios surtidos con déficit.

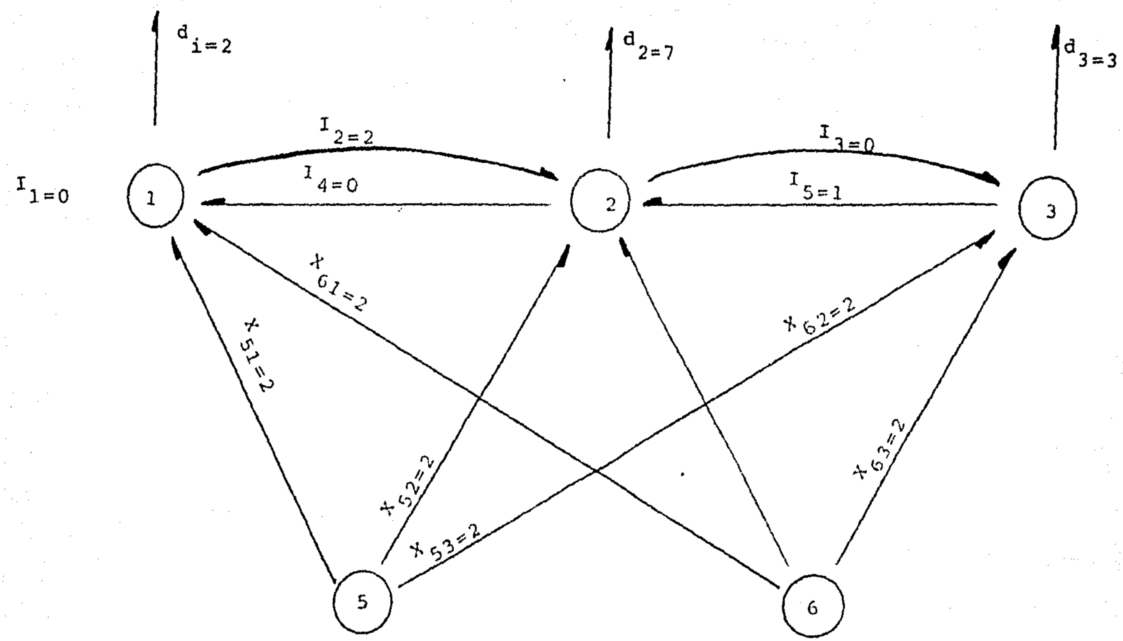

d i=2
d 2=7
d 3=3
I 2=2
I 3=0
I 4=0
I 5=1
I 1=0
1
2
3
X 61=2
X 51=2
X 62=2
X 52=2
X 53=2
X 63=2
5
6

figura 4.5b

ALGORITMO DE COSTOS CONVEXOS.

La demanda de cada periodo se satisface por turnos, iniciando con el periodo 1, después el periodo 2 y asi sucesivamente, hasta que todas las demandas sean cubiertas. Cuando se decide cómo encontrar la demanda de un periodo, use las fuentes de producción en orden del costo marginal creciente. Las alternativas de producción en el periodo corriente (es decir el que se esta manejando), son producción en un periodo anterior con almacenaje y producción en un periodo posterior con entrega retrasada. Mas formalmente, supongamos en uso esta aproximación, la producción ha estado planeada para encontrar la demanda en los periodos 1, 2, ..., k - 1 y ahora el periodo k se ha considerado.

Paso 1. Existen T alternativas posibles para satisfacer la unidad siguiente de Dk correspondiendo a la producción o incrementada en una unidad en exactamento uno de los periodos 1, 2, ..., T. Para cada una de estas alternativas calcule el costo incremental entero de la producción, inventario y demanda retrazada (en el cálculo este costo incremental, se supone que ambos el original y los itinerarios de la nueva producción parcial están localizados en contra de las demandas en los periodos 1, 2, ..., k - 1 y cualquier parte de la demanda será satisfecha en periodo k, de tal manera que minimiza los costos relevantes totales). Selecione la alternativa de minimo costo y ajuste el plan de producción de manera acorde.

Paso 2. Si la demanda para el periodo k no ha entrado completamente satisfecha, regrese al paso 1 y determine la demanda para la siguiente unidad del periodo k de manera mejorada, en caso contrario, considere los requerimientos en el periodo k+1 y regrese al paso 1 con k = k+1, continúe a través de todo los periodos T. El modelo del trabajo en el uso de este algoritmo está asociado con determinar la óptima localización del itinerario de la producción parcial (etapa 1). La excepción se da cuando las ordenes retrasadas no se permiten y los costos de inventarios son lineales, en tal caso el programa óptimo se obtiene fácilmente. El modelo convexo a menudo resulta de situaciones donde hay fuente de producción múltiple en un periodo y se supone que los costos de producción son proporcionales a la cantidad producida por una fuente.

Asignando producción primero a la fuente con el costo unitario más bajo, hasta que su capacidad ea alcanzada, entonces el procedimiento a usar la siguiente fuente más barata, para la capacidad, etc., se desarrolla un costo de producción total que es convexo en el monto total documentado para un período.

Ejemplo. La producción se planea obre un horizonte de planeación con 4 períodos, donde los requerimientos por período son 20, 10, 40 y 30 unidades, repectivamente. Los costos de inventario y almacenamiento son de la forma ht It, con h1 = 3; h2 = 2; h3 = h4 = 1, no se permite déficit. Los costos de producción los cuales son convexos estan dados en la tabla de abajo. Los datos de la tabla son los costos marginales de producción, los cuales se suponen constantes para el rango dado de Xt. La máxima producción en un período es de 35 unidades. El inventario final neto y el inicial son cero.

RANGO DE PRODUCCION	PERIODO DE PRODUCCION, t			
	1	2	3	4
1 < X + < 8	4	6	6	3
9 < X + < 17	5	10	8	5
18 < X + < 25	6	12	10	7
26 < X + < 35	8	14	12	10

Para resolver el problema, se suponen cuatro fuentes de producción en cada período, en cada fuente teniendo una capacidad dada y un costo proporcional. Puesto que los costos de inventario son también proporcionales, se puede usar el tablero de transporte para organizar la solución. Cuando la demanda en período 1 ha sido satisfecha por localización de la producción viniendo de las fuentes más baratas; las capacidades en la columna, son ajustadas para reflejar la demanda del período 2 es satisfecha de la fuente más barata y así sucesivamente, hasta que todos los requisitos se satisfagan. El programa de producción óptimo es $X1 = 25$, $X2 = 10$, $X3 = 35$, $X4 = 30$, para este programa $I1= 5$, $I2= 5$, $I3= 0$ e $I4 = 0$, el costo total mínimo es 713.

El formato del tablero de transporte es un buen camino para organizar un problema teniendo costos de producción convexos, quebrados linealmente y costo de inventario lineales con entrega resagada. Cuando existen ordenes con retraso, el problema es más eficientemente resuelto por el algoritmo de transporte de programación lineal que por el algoritmo de costos convexos descrito anteriormente.

Supongamos que en el problema anterior se permite déficit y que los costos de órdes con retraso en el período t son Pt; con $P1 = 2$, $P2 = 3$, $P3 = 1$ y $P4 =$ infinito. La solución $X1=25$, $X2=8$, $X3=32$ y $X4=35$ fue obtenida usando el algoritmo de transporte. Para esta solución los niveles de inventario son: $I1=5$, $I2=3$, $I3= I4 = 0$ y demandas retrasadas solo ocurren en el período $I3=5$. El costo mínimo es 708.

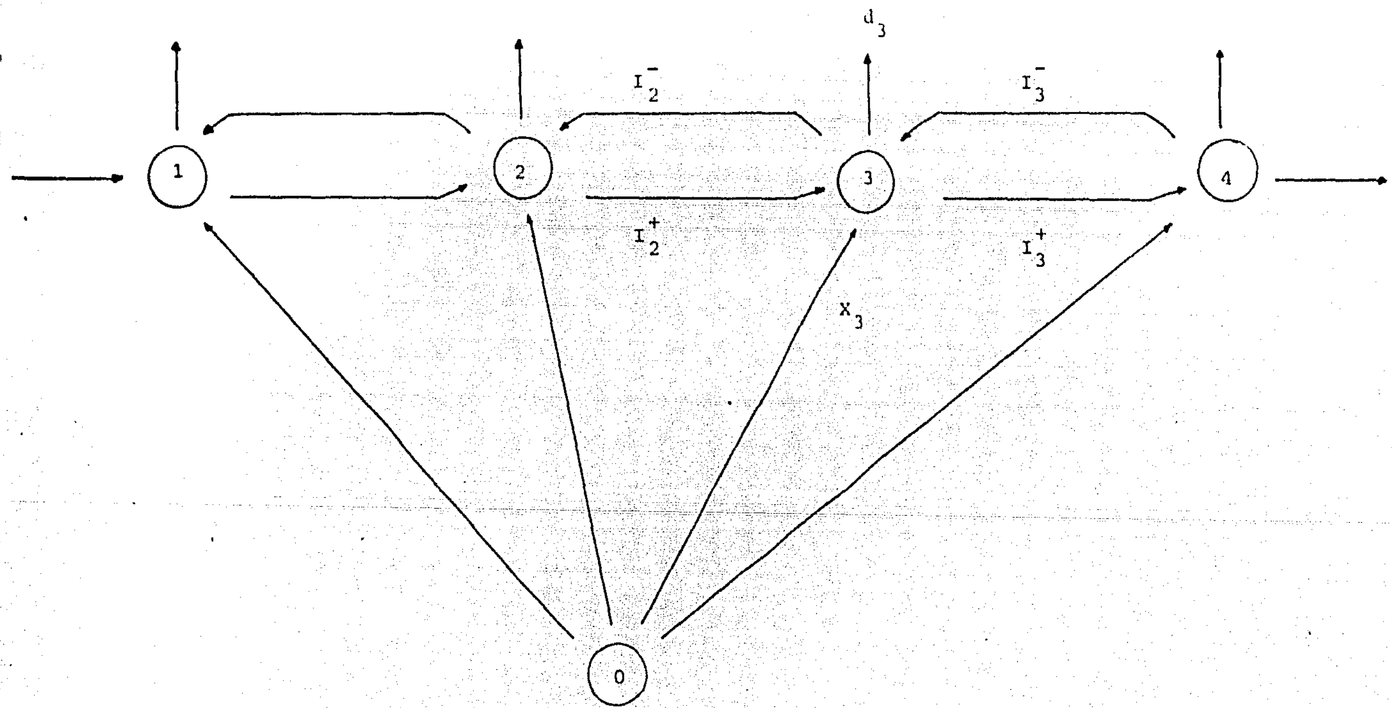


figura 4.2a

CONCLUSIONES

El análisis que se ha hecho en el presente estudio al desintegrar los elementos que influyen y son parte de los inventarios y el lenguaje afín que se maneja; proporcionan una idea clara del concepto de inventario y las interrelaciones de los factores relevantes que intervienen; estructura de la demanda, número de periodos de decisión, funciones de costo, de tal manera que se norma un criterio para hacer las variaciones pertinentes según lo requiera la realidad de la que forman parte en un problema práctico determinado. Al plasmar esa información en un modelo formal se pretende abatir costos de almacenamiento por pérdidas por daño o por escacez de los artículos, se desea mantener un inventario suficiente para que la producción o la venta no carezcan de materias primas, partes o suministros y se realicen compras con adquisiciones económicas, eficientes y oportunas.

Los modelos determinísticos proporcionan una buena aproximación de las cantidades óptimas a pedir y del tiempo de pedido en forma rápida y con costos módicos.

La estructura matemática de los modelos clásicos permite obtener información variada, simulando con distintos valores asignados a los elementos que los conforman.

Los modelos matemáticos cuyas funciones de costos son cóncavos y convexos representan los problemas más reales y comunes, éstos han sido también analizados a detalle teniendo como soporte la base matemática de la teoría de flujo en redes, de la programación lineal y dinámica, se ha podido explotar su estructura para obtener métodos de solución sencilla y eficiente.

La importancia de los inventarios ha ido en aumento a medida que ha pasado el tiempo para ilustrar este hecho se menciona que en los dos últimos años el número de publicaciones sobre este tema ha sido tan grande como el de todas las publicaciones anteriores.

La importancia de la teoría de inventarios en un país subdesarrollado, en crisis y con inflación galopante como es el caso de México el funcionamiento de los sistemas existentes se mejoraría notoriamente con una buena administración de bienes, es decir con un control de inventarios adecuado que permita regular los abastos de recursos naturales, como son agua, bosques, energía eléctrica, hidrocarburos, además de que todos los grandes sistemas productivos requieren de modelos bien diseñados que podrían si no resolver plenamente, si mejorar su funcionamiento en gran medida.

B I B L I O G R A F I A

LAWRENZE D. BURNS, RANDOLPH W. HALL, DENNIS E. BLUMENFELD Y CARLOS F. DAGANZO. "Distribution estrategies that minimize transportation and inventory costs". Operation Research. 1985

ROBERT G. BROWN. "Decision rules for inventory management". 1967

MOKAHTAR S. BAZARAA, JOHN J. JARVIS. "Programación lineal y flujo en redes". 1984

ERIC V. DENARDO. "Dynamic programming".

G. HADLEY. "Linear programming". 1964

G. HADLEY. "Nonlinear and dynamic programming". 1964

PAUL A. JENSEN. "Student's guide to operation research". 1986

LYNWOOD A. JOHNSON, DOUGLAS C. MONTGOMERY. "Operations research in production planning scheduling and inventory control". 1974

S. F. LOVE. "Inventory control". 1979

DAVID L. LUENBERGER. "Introduction to linear and nonlinear programming". 1973

ELIEZER NADDOR. "Inventory systems". 1965

REIN PETERSON, EDWARD A. SILVER. "Decision systems for inventory management and production planning". 1979

JUAN PRAWDA. "Métodos y modelos de investigación de operaciones." Vol. I, II. 1984

R. T. ROCKAFELLAR. "Network flows and monotropic optimization". 1984

WALTER RUDIN. "Principios de análisis matemático". 1980

TAHA. "Investigación de operaciones". 1976

HARVEY M. WAGNER. "Principles of operation research". 1969

A P E N D I C E S

APENDICE 1

Teorema. Supongamos que f es una función real continua en un espacio métrico compacto X y $M = \sup_{p \in X} f(p)$, $m = \inf_{p \in X} f(p)$.

Existen puntos p, q eX, tales que f (p)=M y f (q)=m donde M es la mínima cota superior del conjunto de todos los números f (p), cuando p tiene rango a X, y m es la máxima cota inferior de este conjunto de números. También puede enunciarse la conclusión como sigue: Existen puntos p y q en X tales que f (q) < f (x) > f (p) para todo x e X; esto es, f alcanza su máximo (en p) y su mínimo (en q).

Prueba : El siguiente teorema enuncia que: Si f es una aplicación continua de un espacio métrico compacto X en R^r, f (X) es cerrado y acotado. Así pues, f es un conjunto cerrado y acotado de números reales; por tanto, contiene a su extremo superior M y al inferior m.

Teorema. Sea E un conjunto de números reales acotado superiormente y que no es vacío. Si y = sup E, entonces y e E. Por consiguiente y e E si E es cerrado.

Prueba. Si eE, entonces y eE. Supóngase que y cE. Entonces para cada h > Ø existe un punto x c E tal que y-h < x < y, porque de otra forma y-h sería una cota superior de E. De aquí que y es un punto límite de E. Por consiguiente y c E.

De donde f (x) es un conjunto cerrado y acotado de números reales; por tanto, contiene a su extremo superior M y al inferior m.

APENDICE 2

Definición. Una matriz simétrica A de nxn (tal que $A=A^t$) es positiva definida, si X AX es positiva para cada vector de n dimensiones $X \neq 0$.

Definición. La matriz hessiana que tenga primeras derivadas parciales, es :

$$Hf = \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}; \quad (i, j= 1, 2, \ldots n)$$

El vector gradiente ∇f asociado con una función f (x1, x2, ..., Xn) que tenga primeras derivadas parciales está definido por :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^t$$

Teorema. Sea f (X) una función continua y diferenciable en E , una condición necesaria y suficiente para que X* sea un mínimo local de f (X) es que ∇f (X) = Ø y que H (X*) sea positiva definida.

Prueba. Se supone que ∇f (x*) =Ø y que H (x*) es positiva definida. Se prueba que X* es un mínimo local. De la expresión de Taylor se tiene :

$$f (X^* + h) = f (x^*) + f (x^*) h + \frac{1}{2} h H [X^* + (1-\emptyset) (X^* + h)] h$$

para que la expresión de arriba indicada sea positiva definida se requiere que el término hHh sea positiva para cualquier valor del vector h, excepto h=Ø, si esto ocurre, entonces hHh > Ø, por lo que:

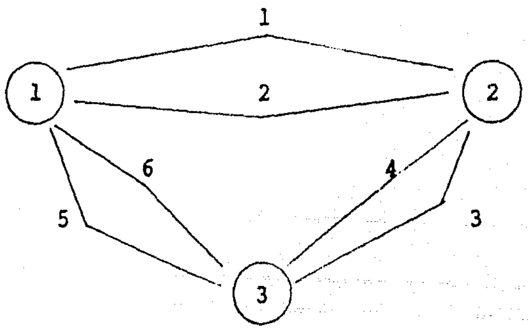
$$f (X^* + h) - f (X^*) = \frac{1}{2} hHh > \emptyset$$

$$f (X^* + f) > f (x)$$

para cualquier valor de h, excepto h = Ø, y por lo tanto X* es un punto mínimo local. El teorema queda probado.

APENDICE 3

Una red es una pareja de conjuntos A y N y una función f: A- N x N que asocia a cada elemento J c A un par (i = i) N x N, donde i≠ i. Los elementos de N reciben el nombre de nodos y los de A se llaman arcos. Los elementos de A tienen dirección que se representa con una flecha. Para denotar f(j) = (i, i), con J c A e i, i' c N, se utiliza simplemente J (i, i'); los nodos i e i' son respectivamente el nodo inicial y el nodo final de J. Si (i, i') está asociado a un solo arco, puede escribirse J = (i, i'), nótese que si todo arco corresponde de manera única a una pareja de nodos, entonces el conjunto A puede identificarse con un subconjunto de N x N. Una red con esta característica se llama digráfica. Se tiene adelante un ejemplo de red de flujo con 3 nodos y 6 arcos conectándolos, figura 3. Enseguida en la figura 3.2.b se muestra una red que representa un problema de producción inventario sin déficit, para un solo producto, n períodos y demanda determinística pero variable período a período.



Red de flujo
Figura 3.

FLUJOS Y DIVERGENCIA.

Un flujo en una red G es una función X: A-R. El valor correspondiente X (j) se conoce como flujo a través del arco j. Un flujo puede denotarse mediante un vector X.

Conviene señalar que la cantidad de flujo que sale de un nodo i es la suma de los flujos X(j) o, tales que e (i, j) = 1, más la suma de los flujos tales que x (j) o con e (i, j) = -1 donde e (i, j) representa la función de incidencia definida como :

$$e\ (i,\ j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \text{ es nodo inicial del arco } j \\ -1 \text{ si } i \text{ es nodo final del arco } j \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

La suma de todos los términos e (e, j) X (i, j) es la cantidad total de flujo que sale de i menos la cantidad total de flujo que llega a i y recibe el nombre de divergencial de flujo en el nodo i. Esta cantidad se denota por Y (i), es decir :
Y (i) = e (i, j) X (j)

Se dice que el nodo i es un nodo fuente si Y (i)=Ø; análogamente i es un nodo sumidero si Y (i)=Ø se dice que el flujo es circulatorio, se conserva en i.

El conocido principio de conservación de la materia se evidencia de lo anterior, dado que la cantidad de productos que se generan deben des igual al monto que se tiene al final del horizonte de estudio. En la literatura de teoría de redes a este resultado se le llama principio de divergencia total. En la figura se observa un ejemplo de red.

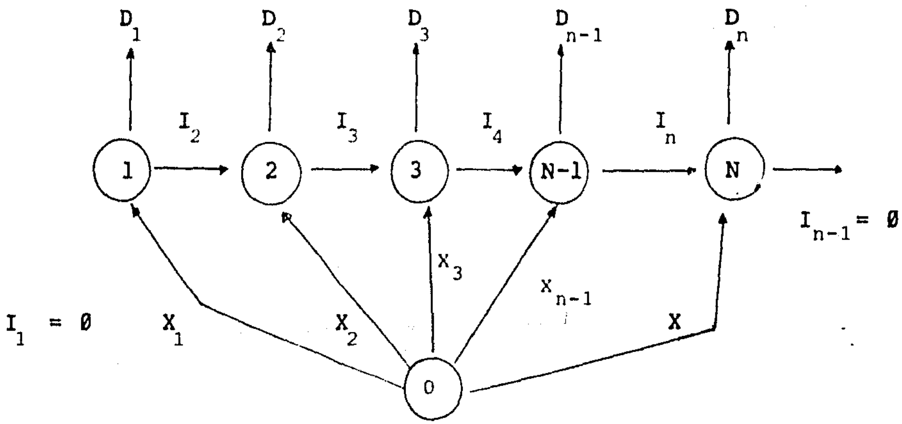
La teoría de redes y la programación lineal, así como la teoría de inventarios al concebirse como problema en un marco conceptual pueden interpretarse en términos similares al momento de elaborar un modelo formal; las técnicas utilizadas para la solución a tales problemas son en general válicas a cualquiera de los planteamientos, es decir, un problema de inventarios puede ser visualizado como una gráfica de redes de flujo con la axiomática de teoría de redes y buscar su solución en los algoritmos propios de redes o de programación lineal o paquetes computacionales.

REPRESENTACION DE UN SISTEMA PRIDUCCION-INVENTARIO EN TERMINOS DE REDES.

Si Cn (Xn) = Cn Xn y hn (In = hnIn el modelo propuesto de producción inventario se interpreta como una red de flujo con costos lineales y parámetros en los arcos (Ø, ØØ, hn) = (capacidad mínima, capacidad máxima, costo) y una forma esquemática de las restricciones del problema se da en la figura :

Donde :

dn = demanda en el período n
In = inventario al inicio del período n
Xn = producción en el período n



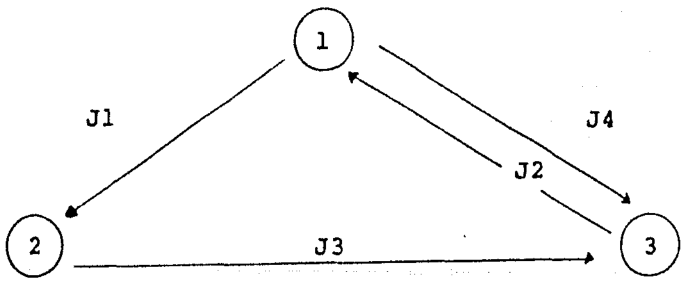
Red de un modelo de inventario determinista con N períodos con demanda discreta.

Representación de una red en forma matricial :

Sea G una red, la matriz de incidencia nodos-arcos E es una matriz de orden m x n, donde m es el número de nodos y n es el número de arcos, cuyos elementos e (i, j) son :

$$e(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } j \text{ sale del nodo } i \\ -1 & \text{si el arco } j \text{ entra al nodo } i \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

Ejemplo :



	J1	J2	J3	J4
1	1	1	0	-1
2	-1	0	1	0
3	0	-1	-1	+1

También es posible hacer la representación con una matriz nodos-nodos.

APENDICE 4

El concepto de punto extremo desempeña un papel especialmente importante en la teoría de programación lineal. Un punto x en un conjunto convexo X se llama punto extremo de x, si x no se puede representar como una combinación convexa estricta de dos puntos distintos en x, es decir, si $x = \lambda x1 + (1 - \lambda) x2$ con λc (o, 1) y x1, x2 c x, entonces $x1 = x2 = x$.

Entendiendo por conjunto convexo cualesquiera dos puntos x1 y x2 en X, entonces $\lambda x1 + (1 - \lambda) x2$ c X para $\lambda c[0, 1]$. Un contenido X en P se dice convexo si dados cualesquiera dos puntos X y Y cX, la línea que los une, está contenida en X.

APENDICE 5

FUNCIONES CONVEXAS Y CONCAVAS.

Convexidad de la curva. Se dice que una curva es convexa hacia arriba en el intervalo (a, b), si todos los puntos de la misma están por debajo de cualquier tangente a la curva en este intervalo.

Se dice que la curva es convexa hacia abajo en el intervalo (b, c) si todos los puntos de la misma están situados por arriba de cualquier tangente a la curva en este intervalo.

La curva que tiene la convexidad hacia arriba se llama convexa en el intervalo (a, b) y cóncava en intervalo (b, c).

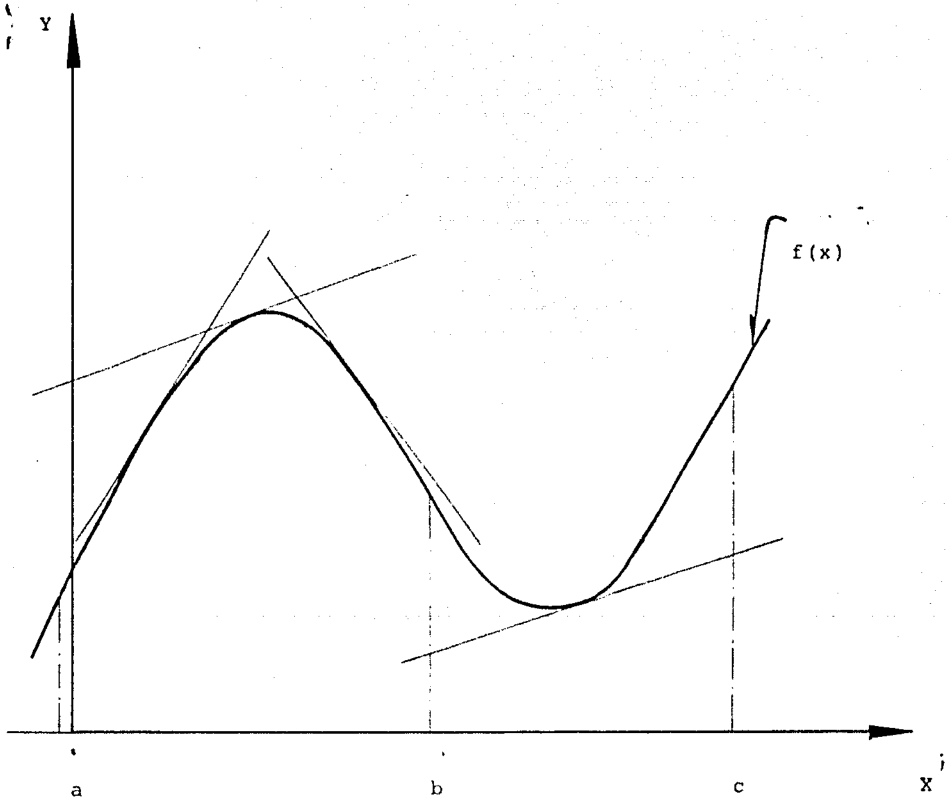


figura 1

En donde :

Sea una curva $Y = f(x)$ que representa la función $f(X)$ continua y derivable.

El signo de la segunda derivada.

Teorema. (Funciones con derivadas positivas). Si $f' > 0$ en un intervalo, f en creciente en este intervalo.

El signo de la segunda derivada también tiene un significado geométrico. Si $f'' > 0$ o en un intervalo, f' crece, aplicando el teorema a la función f', significa que la pendiente de la tangente a la gráfica crece al avanzar por la curva de izquierda a derecha; la tangente gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj, la gráfica "se dobla hacia ariba". A tal función se le llama estrictamente convexa.

Observando la figura 2 vemos que una gráfica estrictamente convexa se encuentra debajo de sus cuerdas y encima de sus tangentes.

Una función con $f'' > 0$ se llama convexa en lugar de estrictamente convexa.

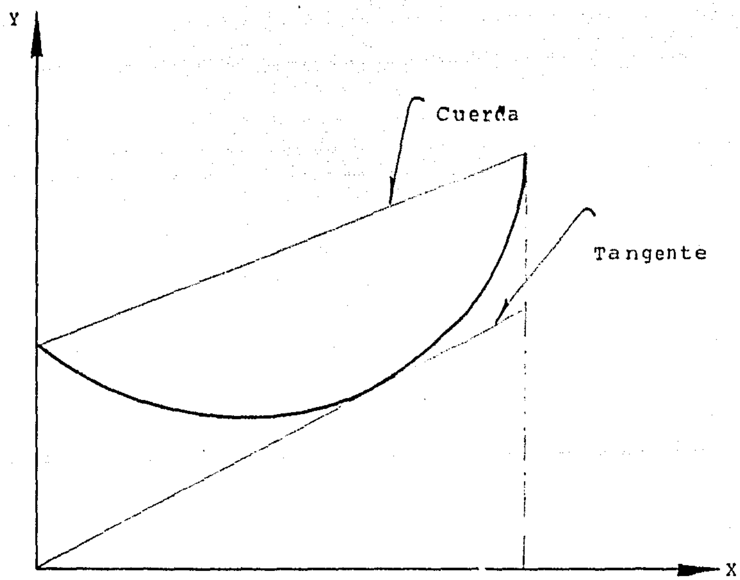


figura 2

Ejemplo :

Sea $f(X) = X2$, entonces $f'(X) = 2X$; $f''(X) = 2 > 0$ para todas las X la función es convexa.

Definición.

Una función de una sola variable, sea $f(X)$ es una función convexa, si para cada par de valores de X1 sean X1 y X2, se tiene :

$$f(\alpha X1 + (1-\alpha) X2) \leqslant \alpha f(X1) + (1-\alpha) f(X2)$$

para todos los valores de α tales que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. En una función estrictamente convexa el signo " $<$ " se sustituye por el signo " $<$ ". Ademas se cumple con la desigualdad estricta excepto cuando $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ (figura 3).

APENDICE 6

Teorema 2. (Equivalencia de puntos extremos y soluciones básicas) Sea K el polítope convexo formado por los vectores x que satisfacen

$$Ax = b$$

donde A es una matriz mxn de rango m y b es un vector columna de m componentes. Entonces, x es un punto extremo d K, si y solo si, $x \geqslant 0$ y x es una solución básica de $Ax = b$.

Prueba. Suponga que $x = (X1, X2, \ldots, Xm, 0, 0, \ldots, 0) > 0$ es una solución básica de $Ax = b$. Entonces,

$$a1x1 + a2x2 + \ldots + amxm = b$$

donde a1, ..., am, son los primeros vectores columna de A, los cuales son linealmente independientes. Suponga que x no es punto extremo de K. Entonces, existen elementos distintos y, zeK tales que x = y + (1-) z para algún 0 < < 1. Haciendo la observación que $y > 0$, $z > 0$ se tiene que los últimos n-m componentes de estos vectores deben ser cero. Por otra parte

$$a1y1 + a2y2 + \ldots + amym = b$$

$$a1z1 + a2z2 + \ldots + amzm = b$$

donde los vectores a1, a2, ..., am, son linealmente independientes. Sin embargo, esto implica que $x = y = z$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, x es un punto extremo de K.

Recíprocamente, suponga que x es un punto extremo de k. Para simplificar, suponga que los vectores a1, ... ak son linealmente dependientes. Entonces, existe una combinación lineal no trivial de estos vectores tal que

$$a1\ y1 + a2\ y2 + a3\ y3 + \ldots + ak\ yk = 0$$

Hagamos $y = (y1, y2, \ldots, yk, 0, \ldots, 0)$ eRn. Usando el hecho que $xi > 0$, $i=1, \ldots k$, es posible encontrar un $e > 0$, tal que

$$x + ey > 0 \quad ; \quad x - ey > 0$$

de donde, $x = 1/2\ (x + ey) + 1/2\ (x - ey)$. Sin embargo, esto es una contradicción, pues x es un punto extremo. Por lo tanto, los vectores a1, a2, ... ak son linealmente independientes. Si k=m, es claro que x es una solución básica. Si k < m, podemos seleccionar m-k vectores linealmente independientes del conjunto de n-m vectores restantes. Esto es posible porque la matriz A es de rango m. Note que el vector x tiene la misma representación con el nuevo conjunto de m vectores linealmente independientes. Por lo tanto, x es una solución básica, aunque degenerada; y la prueba termina.

APENDICE 7

Proposición. Sea f función cóncava en S, donde S es un conjunto convexo, cerrado y acotado. Sean x1, x2, ..., xn puntos extremos de S. Entondes el problema min {f (x) / xeS} tiene un elemento minimizante que es punto extremo de S.

Prueba. Sea αeS entonces x = α1x1 + α2x2 + ... + αnxn

donde $\alpha 1 > \emptyset, \ldots, \alpha n > \emptyset$ y $\alpha 1 + \alpha 2 + \ldots, + \alpha n = 1$

$f(x) > \alpha 1\ f\ (x1) + \ldots + \alpha n\ f\ (xn)$

$> \alpha 1\ M + \ldots + \alpha nM$

$= (\ \alpha 1 + \alpha 2 + \ldots\ (\alpha\ n)\ M = M$

pero como $\alpha 1 + \alpha 2 + \ldots + \alpha n = 1$

implica que M = min { f (xi) / i = 1, 2, ..., nE por lo que : en el problema se tiene que el vector de producción óptimo es un punto extremo de las restricciones, y dada la estructura del prblema se cumple que {xk} y {Ik} son enteros.

Programación entera.

Los siguientes resultados concatenan los sistemas de producción-inventarios con la programación entera.

Una matriz A de números enteros y orden nxn se dice unimodular si su determinante es cero, uno o menos uno. De la misma manera A es totalmente unimodular si A es matriz de orden mxn de números enteros y toda submatriz cuadrada de A es unimodular.

Suponga que A es la matriz de incidencia nodos-arcos de una red asociada a un problema de producción inventario, lo que implica que es una matriz constituida de ceros, unos y menos unos, de donde se infiere que A es totalmente unimodular. Además por estar formada por números enteros y vectores linealmente independientes, entonces se demuestra que los puntos extremos del conjunto :

$$s = \{x\ /\ Ax = b,\ \ x \geqslant \emptyset\}$$

Son enteros para todo vector b de números enteros.

En conclusión en el sistema de producción inventario, se tiene que el vector de producción óptimo es un punto extremo de las restricciones y dada la estructura de la matriz A asociada al problema se cumple que los valores de xk y de Ik son enteros.

APENDICE 8

Otro concepto que es necesario definir es el de árbol, porque está íntimamente relacionado con los vectores básicos asociados a la solución de un problema. Se tienen las siguientes definiciones :

Un árbol es una red (o gráfica) caracterizada por cualquiera de los siguientes enunciados :

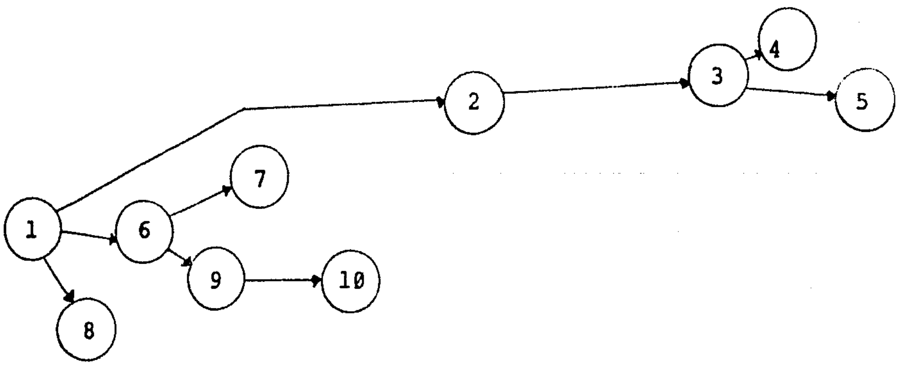
a) Conectada y sin circuitos

b) Existe una trayectoria única entre cada par de nodos

c) No tiene circuitos pero exactamente uno se forma al añadir un arco

d) Es conectada pero deja de serlo si algún arco es eliminado

De manera gráfica un árbol se expresa en la figura :



Forma gráfica de red-árbol
Figura

Para lograr la transición del concepto de árbol hacia la aplicación de teoría de inventarios, es necesario recordar algunas otras definiciones. Una colección de vectores A1, A2, ..., Ar de dimensión n es linealmente independiente si :

$$\sum_{j=1}^{k} C_j A_j = 0; \text{ implica } C_j = 0 \text{ para } j = 1, 2, \ldots, r$$

donde : C1, C2, ..., Cr son números reales.

Los vectores asociados a un árbol son linealmente independientes, de donde se tiene la siguiente proposición.

Proposición. Un flujo factible en una red, no tiene **circuitos, si y solo si :**

$$I_i X_i = 0 \ ; \quad i = 1, \ldots, N$$

Demostración en apéndice 10.

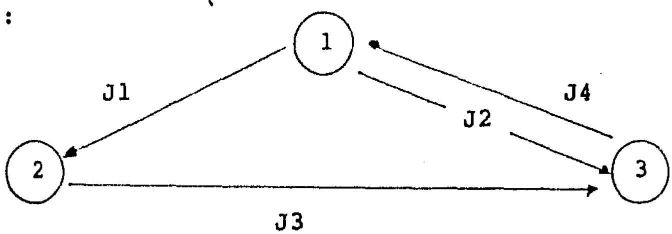
Analizando la anterior proposición tenemos que para que un flujo sea factible programación lineal implica que deberá existir un valor asociado a las variables de las restricciones que satisfaga cada una de las mismas y siendo básico factible, forma un árbol cuyos vectores son linealmente independientes.

Representación de una red en forma matricial:

Sea G una red, la matriz de incidencia nodos-arcos E es una matriz de orden m x n, donde m es el número de nodos y n es el número de arcos, cuyos elementos e (i, j) son :

$$e\,(i,\, j) = \begin{cases} 1 \text{ si el arco j sale del nodo i} \\ -1 \text{ si el arco j entra al nodo i} \\ 0 \text{ otros} \end{cases}$$

Ejemplo:



	J1	J2	J3	J4
1	1	1	0	-1
2	-1	0	1	0
3	0	-1	-1	+1

También es posible hacer la representación con una matriz nodos-nodos.

APENDICE 9

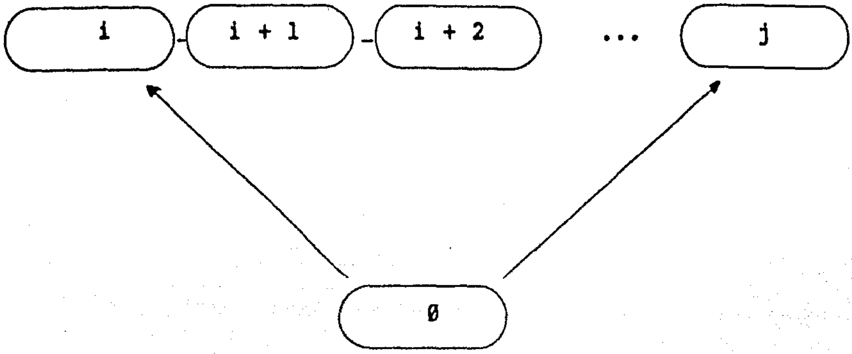
Teorema. Considerese el modelo A de producción-inventario con costos cóncavos. Entonces, existe al menos un plan de producción óptimo x = (x1, ..., Xn) con correspondiente plan de inventario I = (I1, ..., In) tal que xi Ii = Ø para todo periodo i = 1, ..., n.

Prueba. Dado que existe un número finito de planes de producción factibles se concluye que al menos uno de ellos es óptimo. Sea x = (x1, ..., xn) un plan de producción óptimo con correspondiente plan de inventarios I = (I1, I2, ..., In) tal que minimiza la suma (x1 + I1) + ... + (xn + In) sobre todos los planes de producción óptimos. Suponga que xi Ii = o para algún i + 1, ..., n. Entonces, el lema 1 implica que existe un circuito. Dicho circuito es de la forma (Ø, i, i + 1, ..., j, Ø) donde cada índice está asociado a un nodo de la red asociada al problema considerado (figura z). Observe que todos los flujos en este circuito son enteros positivos.

Un nuevo flujo factible se obtiene si incrementamos xi en una unidad; incrementamos Ik en una unidad para i < k < j; y decrementamos xj en una unidad. El costo asociado con este nuevo flujo no puede ser menor que el costo óptimo. Por lo que podemos escribir

$$B = Ci\ (xi) + Cj\ (xj) + \sum_{K=i+1}^{J} hk\ (Ik)$$

$$\leq < Ci\ (xi + 1) + Cj\ (xj - 1) + \sum_{K=i+1}^{J} hk\ (Ik + 1)$$



De manera análoga, es factible perturbar el plan de producción óptimo x decrementando xi en una unidad; decrementando Ik en una unidad para i < k < j; y, aumentando kj en una unidad. El flujo o plan perturbado tiene un costo mayor igual que el costo óptimo y podemos escribir

$$\gamma = Cl\ (xl) + Cj\ (xj) + \sum_{K=i+1}^{J} hk\ (Ik)$$

$$< Ci\ (xi - 1) + Cj\ (xj + 1) + \sum_{K=i+1}^{J} hk\ (Ik - 1)$$

Sumando B con y arreglando la suma tenemos

$$\emptyset < \Delta^2 Ci\ (xi - 1) + \Delta^2 Cj\ (xj - 1) + \sum_{k=i+1}^{J} \Delta^2 hk\ (Ik - 1)$$

pero, las segundas diferencias hacia adelante de funciones cóncavas son no-positivas. Entonces podemos concluir que la desigualdad anterior es una ecuación y, por lo tanto, ambos planes de producción perturbados son óptimos. Sin embargo, la perturbación que disminuye x_i e I_k donde $i < k < j$, en una unidad, y aumenta x_j en una unidad es tal que disminuye en forma neta el flujo en las áreas en $(j-i) > 0$ unidades. Esto contradice la minimalidad de la suma $(x_1 + I_1) + \ldots + (x_n + I_n)$ y termina la prueba.

APENDICE 10

Lema. Un flujo factible en el modelo no tiene circuitos si y solo si satisface

$$I_j X_j = 0 \quad ; \quad j = 2, \ldots, n$$

esto es en cada nodo la demanda se satisface usando inventario de periodos anteriores o producción del mismo periodo pero no en ambos.

Prueba. Si existe un circuito en la red asociada con el modelo A se tiene que es de la forma

$$0 \to i \to i + 1 \to \ldots \to j \to 0$$

y necesariamente $I_j X_j \neq 0$

Reciprocamente, si $I_j X_j \neq 0$ para algún $j = 2, 3, \ldots, n$ es sencillo verificar que existe un circuito como el indicado al principio de la prueba. Con lo cual queda demostrado.