UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO NUMERICO DE UN FLUJO MAGNETOHIDRODINAMICO EN UN CAMPO MAGNETICO NO UNIFORME; BAJO LA APROXIMACION DEL NUMERO DE REYNOLDS MAGNETICO NULO.

Tesis de Maestria en Ciencias (Fisica de Materiales)

FABIO MANZINI POLI

MEXICO, D.F. DIC 1988

INDICE

CAPITULO I

INTRODUCCION

El objetivo de este trabajo es analizar el flujo de un metal líquido en un régimen laminar sujeto a un campo magnético no uniforme.

Para realizar este objetivo se presenta el estudio numérico del flujo isotérmico y en estado permanente de un fluido incompresible y conductor de la electricidad colocado entre placas paralelas no conductoras que se encuentra en presencia de un campo magnético no uniforme perpendicular a las placas. Se efectúa un análisis bidimensional en un plano paralelo al campo magnético aplicado. Este flujo es un modelo simplificado de un generador magnetohidrodinámico que, como se discutirán en detalle, constituye un sistema para transformar energía solar en energía eléctrica.

El estudio numérico se realiza integrando las ecuaciones de Navier-Stokes mediante una técnica computacional implícita, iterativa y de dominio finito contenida en el código computacional PHOENICS.

La motivación principal del presente estudio es el trabajo realizado por Hermann Branover durante los años sesenta acerca de ciclos magnetohidrodinámicos con metal líquido LMMHD[1] [28], mediante los cuales, según afirma el propio Branover [8], es posible producir electricidad aprovechando la energía solar de manera alternativa y más económica a las celdas fotovoltaicas.

[1] Del inglés, Liquid Metal Magneto-Hydro-Dynamics.

El ciclo LMMHD más recientemente desarrollado, para la generación de potencia eléctrica es el ciclo OMACON[2] que consiste de un circuito cerrado de tubería que contiene un metal líquido. Una región del circuito es calentada por una fuente de calor a temperaturas alcanzables mediante energía solar (entre 65° y 150 °C). En otra región del circuito, se inyecta un fluido con baja temperatura de evaporación, que al entrar en contacto con el metal caliente se volatiliza y forma burbujas, el sistema se muestra esquemáticamente en la figura (1.1). La presencia de burbujas en una parte del circuito pone en movimiento al metal líquido por efecto de flotación debido a la diferencia de densidad entre los brazos verticales del circuito; el movimiento es también favorecido por el tránsito ascendente de las burbujas en el seno del fluido. En la parte superior del circuito las dos fases se separan con el fin de permitir que el metal líquido, libre de burbujas, fluya a través de un campo magnético generado externamente y colocado perpendicular a la dirección del flujo. El movimiento de un fluido conductor de la electricidad en presencia de un campo magnético genera una diferencia de potencial que a su vez puede dar lugar a una corriente eléctrica; esto último es posible cuando se permite la circulación de la corriente a través de un circuito externo.

La diferencia de potencial que surge como consecuencia de la interacción del movimiento del material conductor y un campo magnético, se conoce como "Efecto Faraday"; este fenómeno es de fundamental importancia para el trabajo presente y se discutirá ampliamente más adelante. En la figura (1.2) se ilustra con mayor detalle una configuración típica de la sección del sistema donde el flujo interacciona con el campo magnético; esta parte del sistema recibe el nomre de "generador". El generador se compone de un ducto de sección rectangular cuyas paredes en el plano y-z son aislantes y las que se encuentran en el plano x-z son conductoras; el ducto se encuentra entre los polos de un imán que en el caso más general, produce un campo magnético no uniforme, y bajo la

[2] Del inglés, Optimized MAgneto CONverter, desarrollado en el Argonne National Laboratory, E.U., ver referencia [10].

influencia del cual se esperan patrones de flujo poco usuales [48]. Este tipo de generador, es un caso particular del problema objeto del presente estudio.

El desarrollo más reciente en ciclos LMMHD para la generación de potencia en pequeña escala es producto de proyectos de colaboración científica entre la Universidad de Ben Gurion en Israel y el Argonne National Laboratory en Estados Unidos, se construyó una primera planta experimental con capacidad de generación de 20 kW_e, posteriormente con la idea de producir una pequeña planta de potencia a escala semi-industrial, se construyó el proyecto Etgar-3 con una potencia total de salida de 8 kW_e [10]. Estudios numéricos de escalamiento de esta clase de plantas, predicen que el límite superior para plantas cuya fuente de calor es la energía solar es de 3 MW_e.

El originador de la presente aplicación, y de muchas otras, fué Michael Faraday quien descubrió en 1831 el efecto que conocemos hoy con su nombre, y ocho años después, en una recopilación de sus trabajos, lo enunció de la siguiente manera [18]:

> "Cuando un trozo de metal (y lo mismo puede ser cierto para toda sustancia conductora), es movido frente a un polo unico o los opuestos de un iman o cerca de polos electromagneticos, se producen corrientes electricas transversales al sentido del movimiento."

A continuación se expone una breve descripción fenomenológica de este efecto.

Se considera un material conductor que se mueve a una velocidad **v** a través de un campo magnético uniforme **B** perpendicular a la dirección del movimiento. Al estar en movimiento los portadores de carga (electrones o iones) en el conductor, se ven sujetos a una fuerza llamada fuerza de Lorentz F_L, que es directamente proporcional a la magnitud de $v \wedge B$ y por lo tanto perpendicular a ambos campos. Es esta fuerza la que dirigirá a los portadores en el sentido positivo de la fuerza ($+F_L$) si son positivos, y en sentido negativo de la fuerza ($-F_L$) si son de positivos, y en sentido negativo de la fuerza $(-F_L)$ si son de carga negativa, hasta los extremos paralelos al plano en que se encuentran **v** y **B**. Este movimiento de cargas hacia los extremos del conductor genera una corriente eléctrica J_B, en la misma dirección de la F_L, y una separación de cargas. Originando a su vez un campo electrostático E_B, medido como una diferencia de potencial entre los extremos del conductor. Si estos extremos no se conectan entre sí mediante un circuito externo, se dice que el sistema se encuentra en régimen de circuito abierto. Esto se ilustra en la figura (1.3).

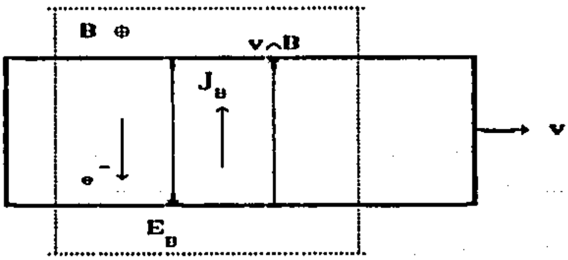


FIG. (1.3) Conductor en movimiento, régimen de circuito abierto.

Existen otros regimenes de operación; supóngase que entre los extremos del conductor paralelos al plano que contiene los vectores **v** y **B** se conecta una trayectoria conductora externa, entonces, se tendrá una corriente cuyas características dependerán del circuito externo:

a) Circuito externo puramente resistivo. Es el generador por efecto Faraday descrito anteriormente en la presentación del sistema OMACON. [53]. Ver figura (1.4).

b) Circuito externo activo: Al colocar una fuente de potencial en el circuito externo con su polaridad en el mismo sentido que el potencial inducido, se tiene un aparato que "empuja" al conductor en el mismo sentido que su movimiento. A este dispositivo se le conoce como bomba electromagnetica. [28]

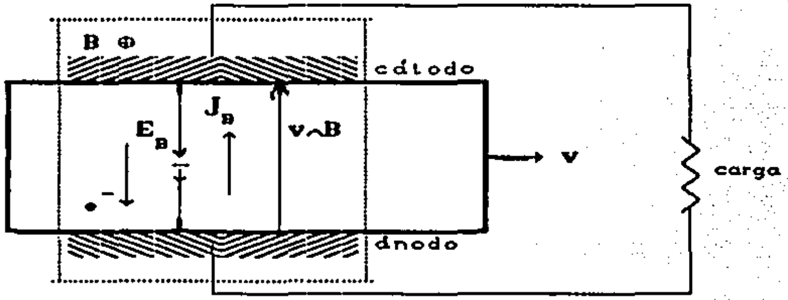


FIG. (1.4) Esquema de generador. Circuito externo cerrado mediante una carga resistiva.

c) Circuito externo activo con polaridad invertida: es el caso en el cual la polaridad de la fuente de potencial en el circuito externo se opone a la del potencial inducido. Se obtiene entonces un **freno electromagnetico** [28].

Todos los conductores presentan manifestaciones electromagnéticas tales como circulación de corrientes inducidas o magnetización al moverse en presencia de un campo electromagnético, sin embargo, no todos los materiales tienen la misma respuesta dinámica que depende básicamente de sus propiedades elásticas. Si son sólidos no presentan deformación alguna; en cambio, si son fluidos, es decir un medio continuo y deformable, como gases ionizados o metales liquidos, las corrientes inducidas por el movimiento, genera fuerzas de cuerpo que modifican la dinámica del flujo.

A la rama de la fisica que describe la mutua interacción entre un fluido conductor en movimiento y el campo magnético que atraviesa, se le conoce como MAGNETOHIDRODINAMICA (MHD).

J. Hartmann junto con F. Lazarus estudiaron en 1937 teórica y experimentalmente un flujo laminar que hicieron circular en presencia de un campo magnético entre placas paralelas en un estado permanente y completamente desarrollado y obtuvieron como resultado un perfil transversal de velocidades que se "aplana" dependiendo de la intensidad del campo.[a]

Este fué el principio y bautismo de la Magnetohidrodinámica como tal, pero al no encontrar mayor aplicación se suspendió temporalmente su desarrollo hasta 1950, cuando se continuaron los estudios aplicándolos a generación de electricidad con plasmas o gases ionizados a alta temperatura [17], en general al estudiar fluidos conductores en tuberías [1] y también al desarrollarse numerosas aplicaciones tecnológicas como bombas electromagnéticas, generadores de potencia, propulsión de iones [28] y flujómetros [52]. En Metalurgia se aplica en hornos de inducción, en agitadores de metal líquido y bombas electromagnéticas [9]. En el futuro se piensa aplicar al enfriamiento de reactores de fusión mediante metales líquidos, dados los campos magnéticos no uniformes muy intensos que se encuentran en su exterior. Mientras tanto se han realizado numerosos estudios teóricos [10].

Como se mencionó al principio de la introducción, en este trabajo se analizará el flujo magnetohidrodinámico en presencia de un campo magnético no uniforme. Aunque el objetivo inmediato de la tesis es adquirir información sobre este tipo de flujos desde un punto de vista meramente académico, con las consecuentes limitaciones al emplear modelos simplificados; el objetivo a largo plazo es comprender el fenómeno a un nivel de suficiente profundidad que permita recomendar las estrategias de diseño requeridas en la construcción de generadores MHD con metal líquido.

La tesis está organizada de la siguiente manera: en el capítulo que ahora concluye, se presentó el objetivo de la tesis y una breve introducción a la magnetohidrodinámica. En el segundo capítulo se hace una revisión bibliográfica de trabajos previos relacionados con el estudio de flujos magnetohidrodinámicos en

---

[a]Ver el anexo A para detalles de este perfil.

presencia de campos magnéticos no uniformes. En el tercer capítulo, se formula el marco teórico del problema; se presentan por separado las ecuaciones hidrodinámicas y las electromagnéticas, posteriormente se conjuntan mediante una serie de suposiciones llamadas aproximación magnetohidrodinámica, y finalmente se añade la suposición particular de número de Reynolds nulo obteniendo así la formulación particular del problema. Es en esta sección donde se presentan en detalle las condiciones del flujo en cuestión, que es un modelo simplificado de un generador MHD. En el cuarto capítulo se describe el método numérico empleado; la discretización del dominio y de las ecuaciones gobernantes, y el algoritmo para la solución del flujo. En el quinto capítulo se presentan los resultados de este trabajo que se agrupan en tres partes: a) la obtención y descripción del campo magnético utilizado, b) la discusión del flujo en desarrollo, tanto en el caso puramente hidrodinámico como en el magnetohidrodinámico bajo un campo magnético uniforme y c) la presentación del flujo magnetohidrodinámico bajo un campo magnético no uniforme. Finalmente, se presentan los comentarios y conclusiones al trabajo.

CAPITULO II

REVISION BIBLIOGRAFICA

El estudio de flujos magnetohidrodinámicos en presencia de campos magnéticos no uniformes es de fundamental importancia debido a que estas condiciones se encuentran en una gran cantidad de aplicaciones, como la conversión directa de energía solar en energía eléctrica mediante un ciclo MHD de metal liquido [8], flujómetros electromagnéticos [52], intercambiadores de litio para el enfriamiento de reactores de fusión [66] y [78], agitadores electromagnéticos de metal liquido [7], bombas electromagnéticas [28] etc., ver [10] para más aplicaciones. La causa principal de las no uniformidades del campo magnético, son los efectos de borde debido al tamaño limitado de los dispositivos, por ejemplo cerca de los polos de los imanes o en regiones adyacentes a los solenoides de los electroimanes donde la intensidad de campo magnético no se distribuye uniformemente [18]. Otras razones, de tipo técnico, pueden ser la falta de uniformidad en la magnetización del núcleo de un electroimán o que los polos del magneto no se encuentren alineados en planos perfectamente paralelos o presenten discontinuidades.

Los efectos dinámicos sobre flujos MHD bidimensionales en presencia de campos magnéticos no uniformes fueron estudiados por Shercliff [52,53], en el contexto de los fenómenos que ocurren en flujómetros magnéticos. Estos dispositivos están constituidos por un canal situado en un campo magnético transversal, las dos paredes opuestas del canal que son paralelas al campo son conductoras. Debido a la longitud finita de los polos del imán, el campo magnético puede variar en la dirección del flujo; esto provoca un "efecto de borde" en el flujómetro. Shercliff presenta un modelo idealizado del sistema que considera los cambios en la magnitud del campo magnético, pero únicamente toma en cuenta los fenómenos que ocurren en un plano perpendicular a la dirección del campo magnético aplicado y desprecia los efectos inerciales, viscosos y de campo inducido. El perfil transversal de velocidades en el plano perpendicular al campo magnético, manifiesta una zona de estancamiento en la región cercana al centro del ducto y una aceleración cerca de las paredes. La forma de este perfil es de una parábola, con máximos en las paredes y mínimo al centro.

Bajo estas suposiciones se encontró, como es de esperarse,que las perturbaciones producidas por el incremento gradual de campo magnético, disminuyen al decrecer el gradiente en el campo magnético. Además este autor comenta que la fuerza de cuerpo electromagnética modifica el perfil turbulento de velocidades.

Branover [6] realizó un análisis bajo las siguientes suposiciones: flujo no inercial, viscoso y sin campo magnético inducido en un ducto de sección cuadrada, y por lo tanto tridimensional. En su análisis discute las diferencias entre sistemas bajo un campo magnético uniforme y uno no-uniforme (también unidimensional), presentando en particular los perfiles de velocidad perpendiculares al campo magnético. Este autor encuentra un perfil en forma de M, que se presenta tanto en un campo uniforme como en uno no uniforme. Esto coincide con el resultado obtenido por Hughes y Young [28], quienes analizaron el flujo MHD viscoso en un canal con campo magnético uniforme. No discute los perfiles paralelos al campo magnético, ni transversales ni longitudinales. Concluye además que en regiones de campo no uniforme, existen corrientes recirculantes longitudinales que interactúan con el flujo resultando en una pérdida adicional de presión y en un incremento significativo del coeficiente de arrastre.

Holroyd y Walker en 1978 [24] marcaron la pauta a seguir en el estudio analítico de flujos en campos no uniformes, al obtener soluciones aproximadas en forma de series infinitas asintóticas.

En el caso analizado se considera un campo magnético no uniforme unidimensional de gran intensidad, un fluido inviscido no inercial que produce corrientes eléctricas a su paso. El campo magnético inducido es despreciado. El análisis enfatiza la existencia de capas límite cerca de las paredes. Bajo estas condiciones se genera un tubo de fluido estancado en la zona de la no uniformidad incluyendo una zona de recirculación. Además, se producen perturbaciones en el flujo tanto corriente arriba como corriente abajo, y se encuentra un gradiente de presión extra en esta zona. En este trabajo, se analizan además ductos de varias geometrías, tanto de paredes conductoras como no conductoras y secciones transversales constantes o variables. Esta formulación, tiene como inconveniente el no poder calcular el perfil de velocidades en ductos con conductividad alta.

En trabajos posteriores, [25-27], donde se pretende validar experimentalmente los resultados analíticos, Holroyd encontró que aún con campos moderadamente fuertes, los términos viscosos y convectivos son importantes. En el experimento, se observa un retardamiento severo del flujo en la región central del ducto, en la zona donde el campo es no uniforme, en contraste con la teoría de Holroyd y Walker [24] que predice un tubo de fluido estancado y una zona de recirculación. Las razones que expone es que los esfuerzos viscosos y en menor escala, los efectos inerciales son los responsables de las diferencias entre teoría y experimento.

Se requiere entonces, una teoría que tome en cuenta los términos inerciales y viscosos, para poder servir de ayuda o guía en la experimentación y dar indicaciones claras de las limitaciones del análisis a campos magnéticos altos. [26].

Al experimentar con ductos conductores, Holroyd [27] encontró que al aumentar la conductividad del ducto, los efectos asociados con la no uniformidad del campo magnético disminuyen. Una recomendación adicional enfatizada por Holroyd es el advertir que no es conveniente basarse en flujos completamente desarrollados, tanto hidrodinámicos como magnetohidrodinámicos, para usarlos como guías confiables en la modelación de flujos en campos no uniformes o con geometría variable.

En trabajos recientes, Walker [71], utiliza un campo magnético perpendicular no uniforme bidimensional, y presenta contornos de intensidad de campo cerca y lejos de las orillas del magneto. Las suposiciones que hace, varian un poco de las que hiciera junto con Holroyd en [24]; se sigue despreciando al campo magnético inducido, tambien los efectos inerciales se desprecian debido a que se considera un campo magnético muy fuerte, pero se toman en cuenta efectos viscosos, aunque confinados en una capa limite. Con estas suposiciones, el problema se vuelve lineal e integrable. Encuentra que debido a las no uniformidades del magneto se presenta una caida de presión adicional a la que se produce bajo campos uniformes.

De manera similar Walker [73], analiza la diferencia de la dinamica de un flujo MHD bidimensional en presencia de campos magnéticos con cambios severos (función escalón) y cambios graduales concluyendo que los perfiles de presión y velocidad, no varian sustancialmente.

Ramos y Winowich [48] realizaron un estudio numérico de un flujo MHD bajo un campo magnético unidimensional no uniforme, de magnitud moderada, involucrando la solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes con los términos convectivo y viscoso y las ecuaciones de Maxwell. El campo magnético inducido es despreciado. Estos autores presentan los perfiles de velocidad en el plano perpendicular al campo magnético, que tiene la forma de *M* caracteristica al ponerse en contacto con las paredes conductoras. No hay zona de estancamiento en el centro, aunque el fluido se frena en esta zona.

Con excepción de los trabajos [6] y [48], el resto de los estudios de flujos MHD en campos no uniformes, se ha llevado a cabo bajo las aproximaciones de flujo inviscido, no inercial y despreciando al campo magnético inducido; esto simplifica el sistema de ecuaciones haciéndolo lineal y desacoplado.

La diferencia principal entre los perfiles de velocidad en el plano perpendicular al campo magnético, calculado con modelos viscoso y no viscoso, no radica en su forma, ya que ambos tienen forma de M, sino en los valores de su mínimo al centro. En el caso no viscoso la velocidad mínima es cero, esto es, existe fluido estancado: en contraste, al considerar los efectos viscosos se encuentra que la velocidad en el centro es un mínimo diferente de cero. i.e., el flujo se encuentra retardado pero no inmóvil.

La mayoría de los autores, con el fin de simplificar su análisis, suelen escoger un campo magnético transversal no uniforme con una variación sólamente unidimensional, i.e., varía de intensidad sólo en la dirección del flujo.

CAPITULO III

MODELO TEORICO

Este capitulo tiene por objetivo formular el modelo teórico utilizado en el presente estudio.

La estrategia utilizada para cumplir este objetivo es la siguiente: en la sección 1 se presenta el conjunto de ecuaciones que describe la dinámica de un fluido; en la sección 2, las ecuaciones que decriben el comportamiento de los campos electromagnéticos; en la tercera sección, se realiza la serie de aproximaciones necesarias a los dos sistemas de ecuaciones previamente presentados, para la obtención de las ecuaciones gobernantes de un flujo magnetohidrodinámico. Finalmente, en la cuarta sección, se añade las suposición particular del número de Reynolds magnético nulo a las ecuaciones gobernantes, obteniendo así la formulación particular a resolver.

1. ECUACIONES HIDRODINAMICAS

Se presenta la ecuación de transporte de forma general para un medio continuo en movimiento, que describe los principios de conservación de energía, masa y cantidad de movimiento.

En un fluido en movimiento o reposo, el balance de masa, energía o cantidad de movimiento se calcula a través de una porción infinitesimal de fluido de forma arbitraria denominada volumen de control (VC).

La forma en que una variable (ϕ) cambia en el tiempo, descrita desde un marco de referencia fijo en el VC, se establece por la siguiente ecuación [15]:

$$\frac{d}{dt}\int_V (\rho\phi v)dV - \int_A (\Gamma_\phi \nabla\phi - \rho\phi v)\cdot dA - \int_V S_\phi dV = 0$$

Donde:
t = coordenada temporal
v = velocidad del fluido
ρ = densidad de masa del fluido
A = area del volumen de control
V = volumen del volumen de control
ϕ = variable dependiente o propiedad fisica
Γ_ϕ = coeficiente apropiado de intercambio de ϕ
S_ϕ = suma de fuentes o sumideros de ϕ

Al aplicar el teorema integral de Gauss a la integral sobre el área, se observa que todos los términos son ahora integrales sobre el mismo volúmen arbitrario, y la única manera en que esta ecuación se puede satisfacer, es cuando el integrando se anula idénticamente. De esta manera se obtiene la ecuación diferencial de balance que expresa cualquiera de los principios de conservación mencionados, por lo cual se le llamará ecuacion general de transporte. Identificando cada término se tiene:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)}_{\text{termino temporal}} + \underbrace{\nabla\cdot(\rho v\phi)}_{\text{termino convectivo}} = \underbrace{\nabla\cdot(\Gamma_\phi \nabla\phi)}_{\text{termino difusivo}} + \underbrace{S_\phi}_{\text{termino fuente}} \tag{1.1}$$

La variable ϕ puede representar variables físicas como las componentes del campo de velocidades, del campo magnético; o a propiedades físicas expresadas en campos escalares como el de temperatura o concentración. Los términos fuente S_ϕ contienen expresiones para fuentes o sumideros de la variable ϕ.

BALANCE DE MASA

La ecuación diferencial que se obtiene del principio de conservación de masa, se le llama ecuacion de balance de masa [2]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho u) = \dot{m} \tag{1.2}$$

Donde: $\dot{m}$ = tasa de creacion o destruccion de masa.

Que coincide con la ec.(1.1) cuando ϕ=1, $S_\phi=\dot{m}$ y Γ=0.

Esta ecuación establece que si el término fuente de masa se anula, $\dot{m}=0$, la masa que ingresa al VC es igual a la que egresa.

Cuando el fluido es incompresible la densidad es constante y la ecuación (1.2) adquiere una forma que será de gran utilidad en lo sucesivo. Añadiendo la suposición de la inexistencia de fuentes o sumideros de masa, $\dot{m}=0$, entonces se tiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{1.3}$$

La cual expresa que el campo de velocidades es solenoidal en un fluido incompresible.

BALANCE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

A la ecuación diferencial que se obtiene al aplicar el principio de conservación de cantidad de movimiento, es decir la segunda ley de Newton a un volúmen de control, se le llama la ecuacion de cantidad de movimiento [2]. Esta ecuación iguala la tasa de cambio de cantidad de movimiento en el volumen de control, con las fuerzas que actúan sobre él. Su expresión diferencial para un fluido incompresible es:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right] = -\nabla \Pi + f_e \tag{1.4}$$

Donde los términos entre paréntesis cuadrados, son la expresión de la derivada material Du/Dt.

Las fuerzas que actúan sobre el fluido son de dos tipos:

1. Las volumétricas o fuerzas de cuerpo (f_e), que se encuentran distribuidas en todo punto del fluido.

2. Las fuerzas superficiales actúan en el fluido a través de contactos en su superficie, y están representadas por el tensor de esfuerzos mecánico (Π) cuya expresión se obtiene mediante relaciones constitutivas que dependen del tipo de fluido involucrado.

Existe una gran cantidad de fluidos, entre ellos el agua, la mayoría de los gases, e inclusive metales líquidos, que obedecen la siguiente ecuación constitutiva para el tensor de esfuerzos. Expresado en notación indicial $\Pi=\sigma_{ij}$ se tiene:

$$\mathbb{T} = \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{1.5}$$

Donde:
p = presion mecanica
δ_{ij} = delta de Kroenecker
η = viscosidad dinamica
λ = segundo coeficiente viscoso

A estos fluidos se los conoce como fluidos newtonianos.

Para incluir esta expresión en la ec.(1.4), se le aplica el operador gradiente, considerando previamente que se trata de un fluido incompresible y con viscosidad constante, de manera que:

$$\nabla\mathbb{T} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \, \partial x_i}$$

Por conservación de masa (1.3)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$$

De tal suerte que el gradiente del tensor de esfuerzos mecánicos puede escribirse, retornando a la notación vectorial para abreviar, como:

$$\nabla\mathbb{T} = -\nabla p + \eta\nabla^2 \mathbf{v} \tag{1.6}$$

Sustituyendo esta expresión en la relación de balance (1.4) se obtiene una forma de la ecuación conocida como ecuacion de Navier-Stokes [2]:

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \eta\nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}_e \tag{1.7}$$

Esta ecuación coincide con la ecuación general de transporte (1.1) cuando ϕ=u,v,w; $\Gamma=\eta$ y $S_\phi=(f_e-\nabla p)$.

El primer termino de la izquierda indica el cambio de la cantidad de movimiento respecto el tiempo. El segundo término es el responsable de la tasa de incremento de momento por convección y se le denomina termino convectivo.

El primer término de la derecha representa la fuerza de presion sobre el fluido por unidad de volumen. El segundo termino es la fuerza viscosa sobre un elemento de fluido, se le llama termino difusivo. Y el tercero es el término que representan a las fuerzas de cuerpo que pueden actuar sobre el fluido, las cuales pueden por ejemplo fuerzas gravitatorias, o fuerzas electromagnéticas.

2. ECUACIONES ELECTRODINAMICAS

La naturaleza casi independiente de los fenómenos eléctrico y magnético, descritos por los campos E y H respectivamente desaparece al considerar los campos en estado transitorio; un campo eléctrico variable, produce un campo magnético y viceversa. Estos fenómenos fueron descubiertos por M. Faraday y A.M. Ampère respectivamente, y que obligan a considerar a los campos electromagnéticos como un solo fenómeno, hecho que fue clarificado por Maxwell y cuyo comportamiento es descrito por el conjunto de ecuaciones conocido como ecuaciones de Maxwell. Su expresión en un medio material en unidades MKS racionalizadas es: [33]

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \tag{2.1}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{2.2}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2.4}$$

Donde:

D = desplazamiento electrico
H = campo magnetico
B = induccion magnetica
E = campo electrico
J = densidad de corriente
ρ_e = densidad de carga electrica

La primera ecuación indica que las fuentes del campo de desplazamiento eléctrico son las cargas, y está intimamente ligada a la segunda ecuación, que es la forma diferencial de la ley de Ampère-Maxwell, la cual establece que la circulación del campo magnético alrededor de un circuito cerrado, es igual al flujo de corriente total a través de cualquier superficie limitada por el circuito. Esta corriente total es la suma de la corriente inducida más una corriente de desplazamiento, representadas por el primer y segundo término de la derecha en la ecuación (2.2). La tercera ecuación, (2.3), es la llamada ley de inducción de Faraday, y establece que la fuerza electromotriz inducida en un circuito cerrado, es igual al negativo de la tasa de cambio respecto al tiempo de la inducción magnética que atraviesa cualquier superficie limitada por el circuito. Finalmente, la ecuación (2.4) representa la ley de conservación de la inducción magnética, cuyo significado físico es establecer la inexistencia de monopolos magnéticos.

La primera y segunda ecuaciones de Maxwell pueden usarse para establecer la llamada ley de conservación de carga, que se deduce de éstas al aplicar el operador divergencia a (2.2) y derivar (2.1) con respecto al tiempo, sustituyendo el término que involucra a D, se obtiene:

$$\frac{\partial \rho_o}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0 \qquad (2.5)$$

Los campos vectoriales D y H que aparecen en las ecuaciones de Maxwell, surgen de la interacción de los campos eléctrico y magnético con la materia, y manifiestan las contribuciones que dan las corrientes atómicas a la densidad de carga y a la de corriente. Se definen mediante las siguientes ecuaciones constitutivas.

Desplazamiento Eléctrico,

$$D = \varepsilon E + P \qquad (2.6)$$

Campo Magnético,

$$H = \frac{1}{\mu} B - M \qquad (2.7)$$

Donde:
ε = permitividad electrica de un medio
μ = permeabilidad magnetica de un medio

Estas ecuaciones son aplicables a todos los materiales. Cuando el material es homogéneo, lineal e isotrópico, la permitividad y la permeabilidad son cantidades escalares. Particularizando en materiales conductores, entre éstos los ferromagnéticos, como Fe, Co, Ni, Cr o Mn y otros metales pertenecientes a las tierras raras y algunas aleaciones, en presencia de un campo magnético exhiben una magnetización M neta mucho mayor que el resto de los elementos conductores [35]. Análogamente, los materiales ferroeléctricos exhiben una polarización P comparable al campo eléctrico aplicado.

Para un material conductor no ferromagnético se considera que tanto la magnetización como la polarización son despreciables respecto a εE y a B/μ respectivamente, adquiriendo las ecuaciones constitutivas la siguiente forma:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{2.8}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \tag{2.9}$$

Para la mayoria de los materiales conductores, en cualquier estado, la permeabilidad del material puede considerarse igual a la del vacio, esto es, $\mu = \mu_o$. Donde μ_o en el sistema MKS es $4\pi \times 10^{-7}$ henry/m. Sin embargo, la permitividad del material (ε) sólo puede considerarse igual a la del vacio (ε_o) en algunos gases ionizados; por lo general $\varepsilon \neq \varepsilon_o$, para la gran mayoria de los materiales.

La respuesta de los conductores liquidos a los campos eléctrico y magnético indica que las ecuaciones (2.8) y (2.9) son adecuadas [28].

Además de las ecuaciones que relacionan los campos eléctrico y magnético con los desplazamientos respectivos debidos al medio material, es necesario obtener una relación constitutiva entre la densidad de corriente J, y el campo eléctrico E en un medio material conductor eléctrico como un metal. Con este objetivo se analizará el fenómeno de la conducción con cierto detalle.

El modelo más aceptado de conducción eléctrica fue inicialmente propuesto por Drude en 1900 para metales, el cual enuncia que solo puede haber transporte de carga, o conducción eléctrica, en un medio material que cuente con partículas portadoras de carga libres, i.e., electrones o iones susceptibles de desplazarse en presencia de un campo eléctrico [46]; estos portadores se mueven aleatoriamente en el medio sujetos a colisiones o más propiamente dicho, a interacciones eléctricas con los átomos del medio o con otros portadores, de esta manera es posible realizar un análisis estadístico semejante al que se hace con un gas. En reposo y en ausencia de campos electromagnéticos, se define una velocidad aleatoria promedio (v) de los portadores en función de la distancia libre media (ℓ), que recorre un portador entre dos colisiones, y el tiempo promedio ($\Delta\tau$) entre colisiones o interacciones, tanto ℓ como $\Delta\tau$ son propiedades del material [35].

Si entre dos extremos de un conductor existe una diferencia de potencial, los portadores siguen sujetos a la fuerza debido a las interacciones, pero además se establece un campo eléctrico E en cada punto del interior que ejerce una fuerza eléctrica o de Coulomb, $F_E = qE$, que va a inducir un movimiento sobre cada portador con una velocidad de arrastre promedio (v_d), y dependiendo del signo de su carga será el sentido de su desplazamiento; si es positivo hacia -E y análogamente hacia +E si es negativo.

Haciendo uso de la segunda ley de Newton para la descripción dinámica del sistema:

$$F_E = \frac{\Delta(mv)}{\Delta\tau} \cong \frac{mv_d}{\Delta\tau} \qquad (2.10)$$

Donde:
m = masa de la partícula portadora de carga
F_E = magnitud de la fuerza que siente una carga en presencia de campo eléctrico.

Este resultado se obtiene debido a que se considera constante a la masa m y se realiza la aproximación $\Delta v \cong v_d =$ cte.

Por otra parte, al transporte neto de cargas se le llama corriente eléctrica (I) y se le define como cantidad de carga (Q) por unidad de tiempo (t).

$$I = \frac{Q}{t} \tag{2.11}$$

Para describir de una forma más general el transporte de carga, involucrando portadores de carga que se desplazan a través de un volúmen tridimensional, es necesario definir el concepto de densidad de corriente por lo cual se definen las siguientes cantidades promedio:

Sea n el número de portadores por unidad de volúmen o densidad de portadores con carga q, desplazándose con velocidad $\mathbf{v}_d$ que cruzan un marco plano de área s orientado arbitrariamente. Si sólo se consideran a los portadores que cruzan al marco s durante un intervalo de tiempo $\Delta\tau$, se obtiene así la expresión para la corriente eléctrica (I_s) a través de dicha área: [46]

$$I_s = \mathbf{s}\cdot\mathbf{v}_d nq \tag{2.12}$$

Donde:

$$nq = \frac{Q}{V} = \rho_e \tag{2.13}$$

ρ_e = densidad de carga o cantidad de carga por unidad de volumen
n = densidad de portadores o numero de portadores de carga por unidad de volumen
q = ke = carga de un portador
k = numero y signo de la cargas elementales
e = carga elemental, carga del proton = 1.60219×10^{-19} Coulomb
s = vector normal al area con la magnitud de esta
V = volumen

La cantidad vectorial que multiplica a s en (2.12) es la definición de densidad de corriente (J):

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v}_d = \rho_e\mathbf{v}_d \tag{2.14}$$

De la ecuación (2.10), considerando que la fuerza eléctrica es:

$$F_E = qE \tag{2.15}$$

Se obtiene la siguiente expresión para la aceleración:

$$\frac{v_d}{\Delta\tau} = \frac{qE}{m} \tag{2.16}$$

Además, el tiempo promedio entre colisiones es:

$$\Delta\tau = l/\upsilon \tag{2.17}$$

Substituyendo las ecs.(2.17) en (2.16) y despejando, se obtiene la siguiente expresión para la velocidad de arrastre:

$$v_d = \frac{qE}{m}\frac{\ell}{\upsilon} \tag{2.18}$$

Donde:
ℓ = distancia libre media
$\Delta\tau$ = tiempo promedio entre colisiones
υ = velocidad aleatoria promedio

Por otra parte, de la ecuación (2.14) se obtiene la velocidad de arrastre en función de la densidad de corriente:

$$v_d = \frac{J}{nq} = \frac{J}{\rho_e} \tag{2.19}$$

Igualando ambas expresiones para la velocidad de arrastre (2.18) y (2.19), se tiene:

$$J = \frac{nq^2\ell}{m\upsilon} E \tag{2.20}$$

Esta ecuación es una relación entre la densidad de corriente y el campo eléctrico, multiplicado por constantes que dependen del material. A este grupo de constantes, se le conoce como conductividad eléctrica (σ). Cuando ℓ y υ no dependen del campo eléctrico, la conductividad también es independiente del campo eléctrico y se establece una relación lineal entre la densidad de corriente y el campo eléctrico conocida como **Ley de Ohm**, determinada empíricamente y válida para la mayoría de los conductores metálicos a temperatura ambiente. Reescribiendo la ecuación (2.20) resulta:

$$J = \sigma E \tag{2.21}$$

Esta expresión de la Ley de Ohm sólo es válida cuando el medio conductor se encuentra en reposo, para analizar esta ley en un medio en movimiento, es necesario realizar el estudio de la transformación de las ecuaciones de campo entre distintos sistemas de referencia.

El sistema de referencia en que el medio se encuentra estático se le llama sistema en reposo. El sistema respecto al cual el medio se desplaza se le llama sistema de laboratorio.

Cuando el sistema en reposo (con comillas) se mueve con una velocidad v constante y en la dirección de las x positivas, respecto al sistema de laboratorio (sin comillas), las transformaciones de las coordenadas y del tiempo tienen la siguiente forma:

$$x'' = \nu(x-vt)$$
$$y'' = y$$
$$z'' = z \qquad (2.22)$$
$$t'' = \nu\left[t - \frac{vx}{c^2}\right]$$

Donde:
v = magnitud de la velocidad $\mathbf{v}$
t = tiempo
c = velocidad de la luz
$\nu = \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{-1/2}$

A este conjunto de ecuaciones se le conoce como la transformación de Lorentz [28].

Al emplear estas expresiones en las ecuaciones de Maxwell, ecs.(2.1-4), se observa que las ecuaciones de campo presentan la misma forma, tanto en reposo como en movimiento, mientras que las expresiones para los campos (en el caso no relativista donde $v^2 \ll c^2$), presentan la siguiente forma [28]:

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E} + \mathbf{v}\wedge\mathbf{B} \qquad (2.23)$$

$$\mathbf{D}'' = \mathbf{D} + \frac{\mathbf{v}}{c^2}\wedge\mathbf{H} \qquad (2.24)$$

$$\mathbf{H}'' = \mathbf{H} - \mathbf{v}\wedge\mathbf{D} \qquad (2.25)$$

$$\mathbf{B}'' = \mathbf{B} - \mathbf{v}\wedge\mathbf{E} \qquad (2.26)$$

$$\mathbf{J}'' = \mathbf{J} - \rho_e\mathbf{v} \qquad (2.27)$$

$$\rho_e'' = \rho_e - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{J}}{c^2} \qquad (2.28)$$

De manera que para obtener las expresión de la ley de Ohm para un sistema en movimiento, se sustituyen las expresiones (2.25) y (2.30) en la ecuación $\mathbf{J}''=\sigma\mathbf{E}''$ (donde el cambio con respecto a la ec.(2.21) es debido a la notación exclusivamente), se obtiene:

$$J = \sigma(E + v \wedge B) + \rho_e v \tag{2.29}$$

Esta es la expresión de la ley de Ohm en el sistema de laboratorio; los primeros dos términos de la derecha son la corriente de conducción y el tercero, la corriente de convección.

Una vez definidas las ecuaciones de Maxwell y sus ecuaciones constitutivas, se procede a la derivación de la densidad de fuerza electromagnética. Un medio conductor en movimiento se afecta con la presencia de un campo electromagnético. La forma en que se da interacción, es una generalización de la **fuerza de Lorentz** (F_L) sobre una partícula cargada (q) en movimiento con una velocidad v en presencia de campos electromagnéticos:

$$F_L = qE + qv \wedge \mu H \tag{2.30}$$

La expresión de esta ley para un fluido, con una distribución continua de carga, en términos de la densidad de carga (2.13) y de la densidad de corriente (2.14) es [28]:

$$f_L = \rho_e E + J \wedge \mu H \tag{2.31}$$

Donde:
f_L = densidad de fuerza electromagnetica

Una expresión alternativa para la densidad de fuerza electromagnética se puede obtenera al sustituir E, ρ_e y J de las ecuaciones de Maxwell, y D y B de las ecs. (2.8) y (2.9). Y desarrollando, se obtiene la siguiente ecuación en notación tensorial:

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\epsilon E_i E_k + \mu H_i H_k\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\epsilon E_m E_m + \mu H_m H_m\right) - \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(E \wedge H\right)_i \tag{2.32}$$

Abreviando,

$$f_i = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_i}{\partial t} \tag{2.33}$$

Donde g_i es la densidad de momento electromagnético, y se expresa como $1/c^2[E \wedge H]$. Mientras que T_{ik} es el tensor de esfuerzos de Maxwell, que en un medio continuo lineal e isotrópico, satisfaciendo las ecuaciones constitutivas (2.8) y (2.9) con ϵ y μ

constantes, adquiere la siguiente forma:

$$T_{ik} = (\varepsilon E_i E_k + \mu H_i H_k) - \delta_{ik}(\varepsilon E^2 + \mu H^2) \tag{2.34}$$

Esta es la expresión del tensor de esfuerzos electromagnéticos, válida en cualquier sistema de referencia, si se niegan los efectos debidos a la variación de ε y μ. [28].

3.APROXIMACION MAGNETOHIDRODINAMICA

El objetivo de esta sección consiste en plantear las ecuaciones de Maxwell (2.1-4) bajo una serie de suposiciones, llamadas en conjunto aproximacion magnetohidrodinamica, con las que es posible describir la interacción entre campos electromagnéticos y un medio continuo deformable conductor de la electricidad, que se encuentra en movimiento.

Se harán tres suposiciones:

S.1 REGIMEN NO RELATIVISTA. La velocidad a la cual se transporta el medio conductor es mucho menor que la velocidad de la luz.

$$|v|^2 \ll c^2 \tag{3.1}$$

S.2 BAJA FRECUENCIA. Los campos electromagnéticos varían a baja frecuencia, se trata de campos cuasi-estacionarios.

S.3 MAGNITUDES RELATIVAS DE LOS CAMPOS. Se considera al campo eléctrico E del mismo orden de magnitud que el campo inducido $v \wedge B$.

$$O(E) \simeq O(v \wedge B) \simeq O(v \wedge \mu H) \tag{3.2}$$

A continuación se comentarán algunas de las consecuencias de la aproximación anterior:

C.1 LEY DE AMPERE-MAXWELL. Se realiza un análisis de órdenes de magnitud, entre la corriente de desplazamiento y el término rotacional, utilizando las ecuaciones constitutivas (2.8) y (2.9) se tiene:

$$O\left\{\frac{\frac{\partial D}{\partial t}}{\nabla\wedge H}\right\} \simeq O\left\{\frac{\varepsilon_o\frac{\partial E}{\partial t}}{\frac{\nabla\wedge B}{\mu}}\right\} \simeq O\left\{\frac{\varepsilon_o EF}{\frac{B}{\mu d}}\right\} \tag{3.3}$$

Donde:

d,F = longitud y frecuencia características

La magnitud del campo magnético respecto al campo eléctrico, se obtiene a partir de la ley de inducción (2.3).

$$O(B) \simeq O\left(\frac{E}{Fd}\right)$$

Sustituyendo en (3.3) y simplificando:

$$O\left\{\frac{\varepsilon_o\frac{\partial E}{\partial t}}{\frac{\nabla\wedge B}{\mu}}\right\} \simeq O(\mu\varepsilon_o d^2F^2) \simeq O\left(\frac{d^2F^2}{c^2}\right) \simeq \left(\frac{d^2}{\lambda^2}\right) \tag{3.4}$$

Tomando $\mu\cong\mu_o$, y ya que $\mu\varepsilon_o = \frac{1}{c^2}$, y $\lambda=\frac{c}{F}$

Debido a S.2, la longitud de onda de la radiación electromagnética (λ), es mucho mayor que la longitud característica (d), λ>>d; por lo tanto, bajo la aproximación MHD la expresión (3.4) es tan pequeña que se suele despreciar, i.e., se desprecia la corriente de desplazamiento; de tal suerte que la ecuación restante es la expresión premaxwelliana para la corriente inducida; i.e., la ecuación de Ampère,

$$\nabla\wedge H = J \tag{3.5}$$

C.2 CONSERVACION DE LA CARGA: Como consecuencia inmediata de la ecuación (3.5), al aplicarle el operador divergencia se tiene que la expresión para la conservación de la carga (2.5), toma la forma:

$$\nabla\cdot J = 0 \tag{3.6}$$

Y por lo tanto la densidad de carga:

$$\frac{\partial \rho_o}{\partial t} \cong 0$$

Es decir, se desprecia el proceso de redistribución de cargas eléctricas. Entonces, puede suponerse que bajo la aproximación MHD que la densidad de carga es constante.

C.3 DENSIDAD DE CORRIENTE. La densidad de corriente se expresa en su totalidad por la ley de Ohm (2.29), más una contribución de cambio de polarización en el tiempo (si se trata de materiales polarizables). Como se particulariza el estudio a medios conductores metálicos, no se toma en cuenta la contribución por cambio de polarización; entonces se estudiará únicamente la forma que adquiere la ley de Ohm bajo la aproximación magnetohidrodinámica. Para tal propósito, se compara la magnitud de la corriente convectiva $\rho_e v$ respecto a la corriente total.

El orden de magnitud de la corriente convectiva, utilizando la ec.(2.1) y la suposición S.2, es:

$$O\left[\rho_e v\right] \simeq O\left[\frac{\varepsilon_o v^2 B}{d}\right]$$

El orden de magnitud de la corriente total se deriva de la ec.(3.5):

$$O\left[J\right] \simeq O\left[\frac{B}{\mu d}\right]$$

La razón entre las dos cantidades anteriores, es:

$$O\left[\frac{\rho_o v}{J}\right] \simeq O(\mu\varepsilon_o v^2) \simeq O\left[\frac{v^2}{c^2}\right] \tag{3.7}$$

Dada S.1 esta cantidad es muy pequeña y consiguientemente la corriente convectiva se desprecia con respecto a la corriente total. Sustituyendo en la ley de Ohm (2.29).

$$J = \sigma(E + v \wedge B) \tag{3.8}$$

Se tiene que la principal contribución a la corriente total viene dada por el término conductivo.

C.4 DENSIDAD DE FUERZA DE CUERPO. Tal como se expuso en la sección anterior, la densidad de fuerza de cuerpo es la densidad de fuerza de Lorentz para un medio continuo ec.(2.31). Se compararán los dos términos de la derecha entre sí.

De la ec. (2.1) y como O(E)≃O(vB) por S.3, se obtiene que el orden de magnitud del primer término en (2.31) es:

$$O\left[\rho_e E\right] \simeq O\left[\frac{\varepsilon_o v^2 B^2}{d}\right]$$

El orden de magnitud del segundo término de la derecha en (2.31) se obtiene de la ec.(3.6).

$$O\left[J \wedge \mu H\right] \simeq O\left[\frac{B^2}{\mu d}\right]$$

La razón entre estas magnitudes es:

$$O\left[\frac{\rho_e E}{J \wedge \mu H}\right] \simeq O(\mu \varepsilon_o v^2) \simeq O\left[\frac{v^2}{c^2}\right] \tag{3.9}$$

Al aplicar la suposición S.1, el término de la densidad de fuerza de cuerpo debida al campo eléctrico es mucho menor que la densidad de fuerza debida al campo magnético y por lo tanto es posible despreciarla, de tal manera la densidad de fuerza de Lorentz bajo la aproximación MHD, adquiere la siguiente forma:

$$f_e = f_L = J \wedge \mu H \tag{3.10}$$

Esta es la expresión que se empleará en las ecuaciones de cantidad de movimiento.

C.5 MAGNITUD RELATIVA DE ENERGIAS ELECTRICA Y MAGNETICA.

Utilizando argumentos de orden de magnitud, se compara a la energía eléctrica con la magnética. De S.3:

$$O\left[\varepsilon_o E^2\right] \simeq O(\varepsilon \mu^2 v^2 H^2) \simeq O\left[\frac{v^2}{c^2}\mu H^2\right]$$

Si se aplica la suposición S.1, la energía del campo eléctrico es mucho menor a la del campo magnético por un factor del orden v^2/c^2.

$$\varepsilon_o |E|^2 \ll \mu_o |B|^2 \tag{3.11}$$

Debido a que en la aproximación magnetohidrodinámica se desprecian tanto la corriente de desplazamiento como la energía eléctrica, la interacción principal se realiza entre el campo magnético y el fluido, de aquí se deriva el nombre magneto-hidro-dinámica.

C.6 INVARIANCIA DE LA INDUCCION MAGNETICA. Al cambiar del sistema de referencia en reposo al del laboratorio, la inducción magnética permanece invariante bajo esta aproximación. Se tiene que en general la inducción magnética se transforma como:

$$B'' = B - \frac{v \wedge E}{c^2}$$

Como S.3 implica que $O(E) \simeq O(vB)$, entonces

$$O(B'') \simeq O(B) - O\left(\frac{v^2 B}{c^2}\right)$$

Al aplicar la suposición S.1 el último término es despreciable y por lo tanto,

$$B'' \simeq B \tag{3.12}$$

La inducción magnética permanece invariante frente a cambios de sistema de referencia.

A manera de resúmen, al aplicar la aproximación MHD a las ecuaciones de Maxwell se tiene:

$$\nabla \wedge H = J \tag{3.5}$$

$$\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{2.3}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \tag{2.4}$$

La ley de conservación de carga

$$\nabla \cdot J = 0 \tag{3.6}$$

La densidad de corriente

$$J = \sigma(E + v \wedge B) \tag{3.8}$$

Y la densidad de fuerza de cuerpo.

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{f}_L = \mathbf{J} \wedge \mu\mathbf{H} \tag{3.10}$$

Basándose en las ecuaciones anteriores, se encuentra una forma conveniente para la descripción del campo magnético. Se observa que el campo eléctrico **E** se encuentra totalmente determinado por las ecuaciones (2.3), (2.4) y (3.5) junto con la ley de Ohm (3.8).

Igualando las ecuaciones (3.5) y (3.8), despejando al campo eléctrico y sustituyéndolo en la ec. (2.3), suponiendo que la permeabilidad (μ) y la conductividad (σ) permanecen constantes, se obtiene:

$$\frac{1}{\sigma\mu}\ [\nabla\wedge(\nabla\wedge\mathbf{H}) - \nabla\wedge(\mathbf{v}\wedge\mathbf{H})] = -\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$$

Desarrollando los dos primeros términos mediante identidades vectoriales se tiene:

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma\mu}\left[\nabla(\nabla\cdot\mathbf{H}) - \nabla^2\mathbf{H}\right] = (\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{H}$$

Donde el primer término de la izquierda se anula por la ec.(2.4), rearreglando los términos se obtiene la llamada ecuación de transporte de campo magnético:

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{H} = \frac{1}{\sigma\mu}\nabla^2\mathbf{H} + (\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{v} \tag{3.13}$$

La cual presenta una estructura comparable a la ecuación general de transporte con $\phi=H_x,\ H_y,\ H_z$; $\Gamma_\phi=1/\sigma\mu$ y $S_\phi=(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{v}$.

Con la finalidad de completar el sistema de ecuaciones involucradas en la descripción de la interacción fluido-campo magnético, bajo la aproximación MHD, sólo falta presentar la ecuación de cantidad de movimiento.

Se introduce el término de fuerza de cuerpo electromagnética bajo la aproximación MHD, ec.(3.10), en la ecuación de cantidad de movimiento (1.7), que adquiere la forma :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{J}\wedge\mu\mathbf{H} \tag{3.14}$$

Quedando así expresado el acoplamiento entre las ecuaciones de campo electromagnético con las de movimiento.

Para sumarizar, en la siguiente tabla (3.1) se expresan los valores necesarios para que tanto la ecuación de transporte de campo magnético como las ecuaciones hidrodinámicas adquieran la forma de la ecuación general de transporte (1.1).

Tabla (3.1) valores de la ecuacion general de transporte (1.1)

ECUACION de CONSERVACION	VARIABLE DEPENDIENTE ϕ	COEFICIENTE Γ_ϕ	FUENTE S_ϕ
MASA	1	0	$\dot{m}$
MOMENTO	u, v, w	η	$\mathbf{f}_e - \nabla p$
CAMPO MAGNETICO	$\frac{H_x}{\rho}, \frac{H_y}{\rho}, \frac{H_z}{\rho}$	$\frac{1}{\mu\sigma}$	$(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{v}$

4. APROXIMACION REYNOLDS MAGNETICO NULO

A continuación se presentan las ecuaciones de la magnetohidrodinámica derivadas en la sección anterior, añadiéndose la suposición de estado permanente $\partial/\partial t = 0$.

Conservación de masa:

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{1.3}$$

Conservación de cantidad de movimiento,

$$\rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{J}\wedge\mu\mathbf{H} \tag{3.14}$$

Transporte de campo magnético,

$$(v\cdot\nabla)H = \frac{1}{\sigma\mu}\nabla^2 H + (H\cdot\nabla)v \qquad (3.13)$$

La forma adimensional de estas ecuaciones se obtiene mediante la sustitución de las variables dimensionales por las siguientes variables adimensionales

$$v' = v/W;\ u'=u/W;\ v'=v/W;\ w'=w/W;\ x'=x/a;\ y'=y/a;\ z'=z/a;$$

$$H' = H/H_o;\ H'_x=H_x/H_o;\ H'_y=H_y/H_o;\ H'_z=H_z/H_o;\ p'=p/\rho W^2 \qquad (4.1)$$

Donde:
a, W, H = longitud, velocidad y campo magnetico caracteristicos

Se definen los siguientes parámetros adimensionales:

NUMERO DE REYNOLDS

$$Re = \frac{\rho W a}{\eta} \qquad (4.2)$$

NUMERO DE REYNOLDS MAGNETICO

$$Rm = \mu\sigma W a \qquad (4.3)$$

NUMERO DE HARTMANN

$$M = \mu H_o a\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} \qquad (4.4)$$

Existe otro parámetro, derivado de los anteriores, utilizado con frecuencia por algunos autores, es el llamado PARAMETRO DE INTERACCION.

$$N = \frac{M^2}{Re} \qquad (4.5)$$

Sustituyendo las variables dimensionales por su correspondiente adimensional ecs.(4.1) en las ecuaciones gobernantes (1.3), (3.16) y (3.17), y suprimiendo las primas, se obtienen las siguientes ecuaciones adimensionales:

Ecuación de conservación de masa:

$$\nabla\cdot v = 0 \qquad (4.6)$$

Conservación de cantidad de movimiento.

$$\rho(v\cdot\nabla)v = -\nabla p + \frac{1}{Re}\nabla^2 v + \frac{M^2}{Re} J\wedge H \qquad (4.7)$$

Transporte de campo magnético,

$$(v \cdot \nabla)H = \frac{1}{Rm}\nabla^2 H + (H \cdot \nabla)v \tag{4.8}$$

El número de Reynolds magnético es el cociente de efectos inerciales dinámicos sobre efectos difusivos magnéticos y expresa una medida de la distorsión del campo magnético aplicado debida al campo magnético inducido.

Por lo tanto si se supone que el número de Reynolds magnético se anula idénticamente, el campo magnético aplicado no se deforma a causa del movimiento del fluido según se puede observar de la ecuación (4.8). Equivalentemente en este caso, se considera que el campo inducido por el movimiento del fluido es despreciable respecto al campo aplicado.

Bajo esta aproximación la ecuación (4.8) adquiere la siguiente forma:

$$\nabla^2 H = 0 \tag{4.9}$$

Esta es la ecuación de Laplace para cada una de las componentes del campo magnético. Bajo esta aproximación la ecuación de transporte de campo magnético se desacopla de las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento. Sin embargo, los efectos magnéticos están presentes en las ecuaciones de cantidad de movimiento en el término de la fuerza de cuerpo, por lo tanto es conveniente resolver la ecuación (4.9), y emplear el campo magnético obtenido en las ecuaciones de cantidad de movimiento (4.7).

Las condiciones de frontera para (4.9) se discutirán en la novena sección, junto con su solución.

Hermann Branover en su sistema ER4 descrito en la referencia [9], proporciona la información necesaria para deducir que el Reynolds magnético con el cual trabaja su equipo es de 3.5×10^{-2}, lo cual da una idea de qué tan realista puede ser la aproximación del Reynolds magnético nulo adoptada en el presente trabajo.

5. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se tiene un flujo en estado permanente y en desarrollo, de un metal liquido con las siguientes caracteristicas: isotérmico, laminar, viscoso, newtoniano, incompresible y conductor de la electricidad que circula a través de un ducto de sección rectangular constante en presencia de un campo magnético no uniforme y perpendicular al ducto, ver fig.(1.2). El movimiento es inducido por un gradiente de presión constante.

Las paredes del ducto perpendiculares al campo aplicado, en el plano (x,y) se suponen no conductoras, mientras que las paredes paralelas al campo aplicado, en el plano (x,z) son conductoras.

Si se analiza el caso en que b>>a, entonces se tiene un ducto con una razón de aspecto muy grande y se pueden despreciar los efectos dinámicos sobre las paredes paralelas al campo ya que el flujo en el ducto se aproxima al existente entre placas aislantes paralelas infinitas separadas por una distancia 2a.

Por lo anterior, se considera un problema bidimensional, efectuando el análisis en un plano paralelo al campo magnético aplicado (x,z), limitándose en la dirección z a una sección de ducto que de la misma longitud que el ancho de los polos de magneto. Esta configuración incluye completamente los extremos no uniformes del campo magnético aplicado y todo el espacio entre los polos del magneto. Ver fig. (4.1) a) y b).

En lo sucesivo, debido a la técnica de solución numérica, se utilizarán las ecuaciones en su forma dimensional y sus componentes se expresarán en coordenadas cartesianas.

Tanto el campo magnético como el campo de velocidades son funciones del espacio con componentes en ambas direcciones del plano.

$$v = (u(x,z),0,w(x,z)) \tag{5.1}$$

$$H = (H_x(x,z),0,H_z(x,z)) \tag{5.2}$$

En el presente trabajo se consideran materiales de conductividad finita, como la de los metales, por lo tanto la ley de Ohm, ec. (3.8), es aplicable (3.10).

$$J_x = \sigma E_x \tag{5.3}$$

$$J_y = \sigma(E_y + \mu(wH_x - uH_z)) \tag{5.4}$$

$$J_z = \sigma E_z \tag{5.5}$$

Como se supone que el campo magnético no es función de la coordenada y, aplicando la ec. de Ampère (3.5) se tiene $J_x = J_z = 0$. Entonces, por las ecs.(5.3 y 5.5) los campos eléctrico y el de densidad de corriente son:

$$E = (0, E_y, 0) \tag{5.6}$$

$$J = (0, J_y, 0) \tag{5.7}$$

En este punto es conveniente determinar una expresión para el campo eléctrico. Debido a que en estado permanente $\nabla \wedge E = 0$, y a que el campo eléctrico solo tiene componentes en la dirección y, se concluye que E_y es constante. Para determinar su magnitud se introduce el concepto de circuito externo, que es una conexión eléctrica exterior entre las paredes conductoras del ducto por la que pueden circular corrientes eléctricas inducidas. Si se conectan entre sí los polos sin ningún elemento resistivo entre ellos, el circuito externo se encuentra en régimen de corto circuito. De acuerdo a lo que se discutió en la introducción, si se coloca un elemento resistivo en el circuito externo, el sistema funciona como generador si se conecta una fuente de potencial el circuito externo funciona como bomba o freno electromagnetico (dependiendo de la polaridad); y finalmente, si no se conectan entre sí los polos, el circuito externo se encuentra en régimen de circuito abierto, por el cual no pueden circular las corrientes inducidas y el campo eléctrico inducido es máximo y constante, $E_y = E_{ym}$, lo cual se expresa de la siguiente forma:

$$\int_{-a}^{a} J_y \, dx = 0 \tag{5.8}$$

Sustituyendo la componente y de la componente en la dirección z de la ley de Ohm (5.5)

$$\int_{-a}^{a} \sigma(E_{ym} + \mu(wH_x - uH_z))dx = 0 \quad (5.9)$$

Suponiendo que σ y μ son propiedades constantes del medio, se obtiene:

$$\int_{-a}^{a} E_{ym}\,dx + \mu\int_{-a}^{a} (wH_x - uH_z)dx = 0 \quad (5.10)$$

o bien, como E_{ym} es constante:

$$E_{ym} = -\frac{\mu}{2a}\int_{-a}^{a} (wH_x - uH_z)dx \quad (5.11)$$

Con el fin de describir al campo eléctrico inducido (E_y) en función del campo eléctrico máximo (5.11), con mucha frecuencia en la literatura [28] se introduce la suposición de que existe una variación lineal entre estos. Para plasmar esta relación, se define un nuevo parámetro, el factor de campo electrico o factor de carga (e), que se define como:

$$e = \frac{E_y}{E_{ym}} \quad (5.12)$$

Factor que puede variar entre 0 y 1, dependiendo de si la carga es máxima (circuito abierto e=1) o mínima (en cirto circuito e=0) o si se le conecta una fuente de potencial externa, puede ser negativo.

El campo eléctrico viene dado entonces:

$$E_y = eE_{ym}$$

$$E_y = \frac{e\mu}{2a}\int_{-a}^{a} (uH_z - wH_x)dx \quad (5.13)$$

Sustituyendo esta expresión en la ley de Ohm ec.(5.5).

$$J_y = \sigma\mu\left[\frac{e}{2a}\int_{-a}^{a} (uH_z - wH_x)dx + wH_x - uH_z\right] \quad (5.14)$$

De esta manera se tiene la densidad de corriente en función de variables conocidas o calculadas simultáneamente en las ecuaciones de cantidad de movimiento, que se obtienen sustituyendo

los campos considerados: velocidad (5.1), campo magnético (5.2) y densidad de corriente (5.7) más la expresión (5.14). Las componentes de la ecuación de Navier-Stokes (3.14) toman la forma:
En la coordenada x:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+$$

$$+\sigma\mu^2\left[wH_xH_z-uH_z^2+\frac{eH_z}{2a}\int_{-a}^{a}(uH_z-wH_x)dx\right] \qquad (5.15)$$

En la coordenada z:

$$\rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\eta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+$$

$$+\sigma\mu^2\left[uH_xH_z-wH_x^2-\frac{eH_x}{2a}\int_{-a}^{a}(uH_z-wH_x)dx\right] \qquad (5.16)$$

Las ecuaciones de cantidad de movimiento anteriores, aunadas a la de conservación de masa ec.(1.3),

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (5.17)$$

Constituyen un sistema acoplado de tres ecuaciones con tres incógnitas (u, w, p). Ya que la ecuación para el campo magnético (4.9) se considera resuelta previamente y se conocen sus componentes H_x y H_z.

Es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, de segundo orden, no lineal y acoplado, cuya solución analítica no se conoce. Por tanto se recurrirá a una aproximación numérica para su solución.

Las condiciones a la frontera son las siguientes:
No resbalamiento en las paredes,

$$u(a,z) = u(-a,z) = 0$$
$$w(a,z) = w(-a,z) = 0 \qquad (5.18)$$

Perfil uniforme a la entrada,

$$u(x,0) = 0$$
$$w(x,0) = w_0 \qquad (5.19)$$

Por lo tanto el problema considerado es de flujo en desarrollo.

CAPITULO IV

SOLUCION NUMERICA

En este capitulo se describe la manera en que se obtiene la solución al problema expuesto. Para cumplir con este objetivo se realiza un análisis matemático de tipo numérico, por ser una forma que permite integrar un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, no lineales y acopladas como el presente, sin requerir simplificaciones que modifiquen al problema original.

Entre los métodos numéricos disponibles, se eligió el de volúmen finito, también conocido como dominio finito, el cual se encuentra implementado en el código PHOENICS [58]. Este código contiene una formulación implicita de las ecuaciones en un volúmen finito y un procedimiento para resolverlas. Tanto la formulación como el procedimiento son producto del trabajo de Patankar y Spalding [43].

La razón fundamental por la que se eligió este método, es su estrecha relación con el fenómeno físico que se resuelve; en él, cada uno de los términos empleados en la formulación numérica, tiene un significado real que da información sobre el estado del sistema.

En el presente capitulo se describe el método de volúmen finito. En la sección 6 se define y se discretiza la región en donde se pretende resolver las ecuaciones; en la sección 7 se integra la ecuación general de transporte con lo cual se obtiene una ecuación discretizada de forma general. En la sección 8 se muestran las ecuaciones gobernantes ya discretizadas. Finalmente, en la sección 9, se expone el algoritmo para obtener la solución al flujo.

6. DISCRETIZACION DEL DOMINIO

El primer paso hacia la solución numérica de una ecuación diferencial consiste en determinar la región en donde esta se desea integrar, a la cual en lo sucesivo se le llamará **dominio de solucion**. En la fig. (6.1) el dominio de solución es la región que delimita el área sombreada.

Una vez determinado el dominio de solución, se le sobrepone una malla, que en coordenadas cartesianas consiste en una serie de lineas perpendiculares entre si que dividen al dominio.

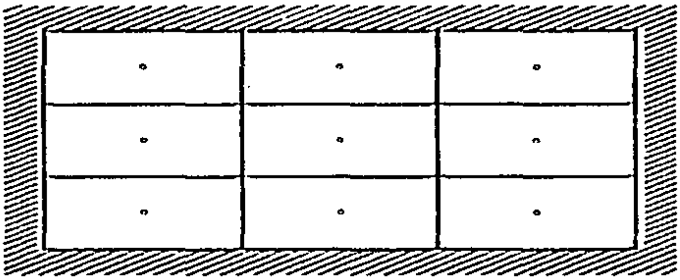


FIG.(6.1) Discretizacion del dominio de solucion mediante lineas con espaciamiento constante entre si, formando una malla uniforme.

A cada uno de los subdominios resultantes se le conoce con el nombre de **volumen de control** (VC), y se refiere a los volúmenes finitos sobre los cuales se integran las ecuaciones diferenciales para transformarlas en ecuaciones algebraicas.

En la fig.(6.2) se muestra la proyección de un solo volúmen de control en el plano x-z. A su centro geométrico P se le define como el **nodo principal** del VC. En la misma figura se muestran los nodos vecinos. Denotándose como los puntos L, H, E, W (del inglés Low(-z), High(+z), East(+x) y West(-x)). También se muestran las lineas que unen a los nodos y que cortan las caras del volúmen de control en los puntos l, h, e, w. Finalmente, se indican las dimensiones del VC en las direcciones "x" y "z" como Δx y Δz respectivamente.

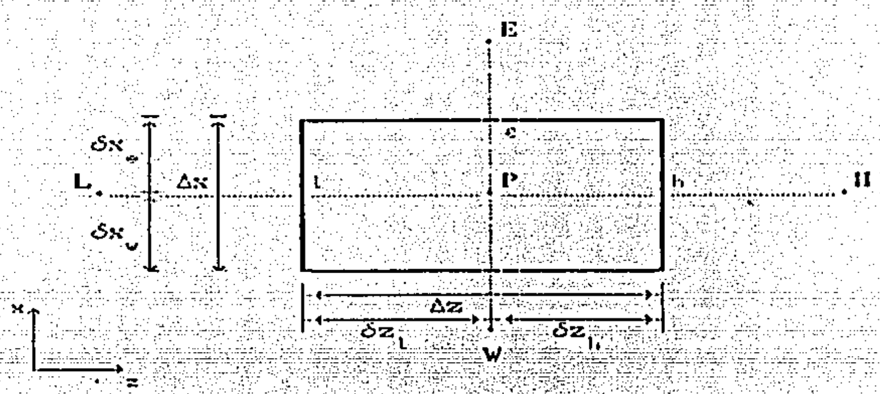
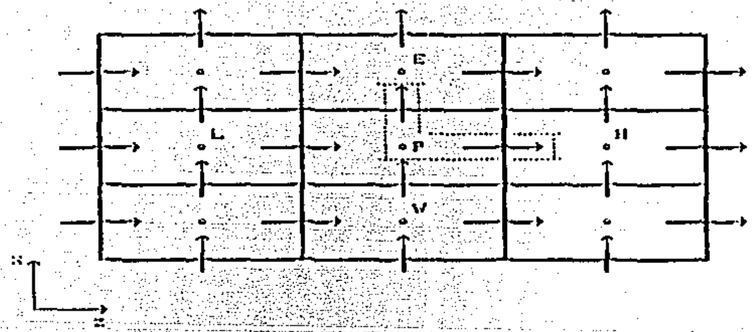


FIG. (6.2) Volumen de control considerado.

Entonces, el área A_i de cada cara i del volúmen de control se calcula como: $A_h = A_l = \Delta x$ y $A_e = A_w = \Delta z$; y el volúmen V del volúmen de control como: $V = \Delta x \Delta z$.

Una caracteristica importante de este tipo de discretización, son los lugares de almacenamiento de las variables y de las propiedades físicas del sistema.

Los valores de las propiedades como densidad, viscosidad y conductividad, y la variable escalar del problema, i.e., la presión, se almacenan en los nodos principales; mientras que las componentes de las variables vectoriales, velocidad y campo magnético, se localizan en los centros de las caras de los volúmenes de control. Ver fig. (6.3).



∘ variables escalares. Ej. presion

→ componente del campo vectorial en la direccion z

↑ componente del campo vectorial en la direccion x

FIG.(6.3) Localizacion de los variables en una malla de dominio finito.

Por convención, en la cara superior de cada volumen de control, mostrado en la fig.(6.3), se almacena el valor de la componente del campo vectorial en la dirección x. Y en la cara derecha se almacena el valor de la componente vectorial en dirección z. De esta manera se forman localizaciones de almacenamiento en forma de "L" asociadas a cada volúmen de control.

Por lo anterior, se pueden definir tres tipos de volúmenes de control, ver fig.(6.4), los cuales son:

a) VC principal, para las variables escalares almacenadas en los nodos.

b) VC alrededor de la componente del campo vectorial en cuestión, en la dirección z.

c) VC alrededor de la componente del campo vectorial en cuestión, en la dirección x.

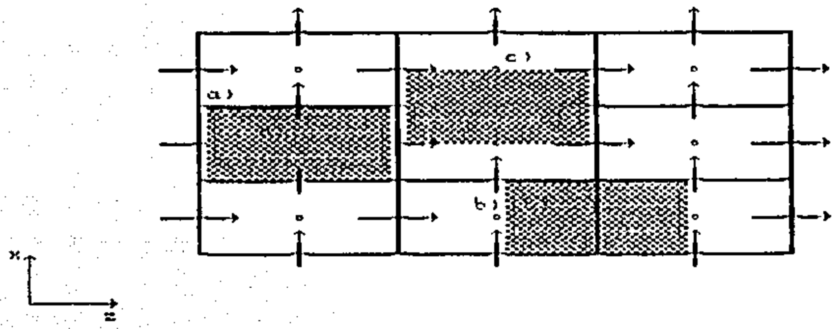


FIG. (6.4) Definicion de volumenes de control

En el presente estudio se utilizan los tres tipos de volúmenes de control, intersectándose entre si y formando una "malla escalonada". Su utilidad se pone de manifiesto en la solución de cada componente del campo vectorial en cuestión.

Una vez definido el dominio de solución y la manera de discretizarlo se procederá, en la siguiente sección, a la integración de la ecuación general de transporte, con la cual se establece una forma general de discretizar las ecuaciones gobernantes del sistema.

7. INTEGRACION DE LA ECUACION GENERAL DE TRANSPORTE

Las ecuaciones diferenciales gobernantes de un flujo magnetohidrodinámico han sido formuladas invocando los principios de conservación sobre un volúmen de control infinitesimal. Invirtiendo el proceso, las ecuaciones algebraicas de volúmen finito se desarrollarán integrando las ecuaciones gobernantes a través de un volúmen de control no infinitesimal.

En el capítulo anterior se evidenció que las ecuaciones gobernantes del sistema pueden expresarse de la forma general (1.1). A continuación, se demuestra que al integrar esta ecuación general de transporte a través de un VC, se obtiene una ecuación algebraica general que proporciona el valor de la variable dependiente en el interior del VC, como función de los valores que ésta variable presenta en los VC vecinos.

La integración de la ecuación general de transporte (1.1), en estado permanente y a través de un VC, se expresa de la siguiente manera:

$$\rho\int_{V}\nabla\cdot(v\phi)dV = \int_{V}\nabla\cdot(\Gamma_{\phi}\nabla\phi)dV + \int_{V}S_{\phi}dV \tag{7.1}$$

Por conveniencia, la ec.(7.1) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\mathbb{C} = \mathbb{D} + \mathbb{S} \tag{7.2}$$

Donde:
$\mathbb{C}$ = termino convectivo integrado sobre el volumen de control (VC)
$\mathbb{D}$ = termino difusivo integrado sobre el VC.
$\mathbb{S}$ = termino fuente integrado sobre el VC.

A continuación, se procede a exponer el proceso de integración de cada término de la ecuación (7.1), éste se realizará en dos dimensiones ya que representa el espacio en el que está planteado el problema.

TERMINO CONVECTIVO

La integral del término convectivo a través del volúmen de control mostrado en la figura (7.2), tiene la siguiente forma:

$$\mathbb{C} = \int_{w}^{e}\int_{l}^{h}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w\phi)\right]dxdz \tag{7.3}$$

La integración se efectúa suponiendo que la densidad es constante, por lo tanto se aplica la ecuación (1.3); integrando en una dirección manteniendo a la otra constante, se obtiene:

$$\mathbb{C} = \left[(\rho u\phi)_{e} - (\rho u\phi)_{w}\right]\Delta z + \left[(\rho w\phi)_{h} - (\rho w\phi)_{l}\right]\Delta x \tag{7.4}$$

Para abreviar, se define la variable F_i como al flujo convectivo por unidad de área a través de la cara i (donde i=e,w,l,h). Por ejemplo a través de la cara e se tiene:

$$F_{e} = \rho_{e}u_{e} \tag{7.5}$$

El valor de la densidad en la cara i se obtiene mediante una interpolación lineal de los valores de la densidad en los nodos vecinos. El cálculo del flujo convectivo para todas las caras, se se muestraen la tabla (7.1).

Sustituyendo $F_i$en la parte derecha de la ecuación (7.4) se tiene que:

$$\mathbb{C} = (F_e\phi_e - F_v\phi_v)\Delta z + (F_h\phi_h - F_l\phi_l)\Delta x \tag{7.6}$$

En el método de Volúmen Finito se considera que el valor de la variable dependiente (ϕ) al ser evaluada en la cara i del volúmen de control, adquiere el valor nodal prevaleciente en la cara del volúmen de control anterior en la dirección del flujo. Por ejemplo, cuando el flujo convectivo es calculado en la cara este, el valor de la variable es:

$$\begin{aligned} \phi_e &= \phi_E \text{ si } u<0, \text{ ó} \\ \phi_e &= \phi_P \text{ si } u>0 \end{aligned} \tag{7.7}$$

En las otras caras se aplican reglas semejantes para la obtención de los valores de ϕ. A este criterio se le conoce como "esquema de diferenciación corriente arriba" (upwind differencing scheme) desarrollado por Spalding en 1972 [57].

Las ecuaciones (7.7) se pueden expresar de forma compacta, definiendo al operador $[\![A,B]\!]$ como el valor máximo entre A y B. De esta manera, la convección de ϕ a través de la cara e se denota como:

$$F_e\phi_e = \phi_P[\![F_e,0]\!] - \phi_E[\![-F_e,0]\!] \tag{7.8}$$

Para el resto de las caras, la expresión es semejante.

La forma final que adquiere el término convectivo (7.6) mediante la aplicación del esquema (7.8) es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} = & \left(\phi_P[\![F_e,0]\!] - \phi_E[\![-F_e,0]\!] - \phi_W[\![F_v,0]\!] + \phi_P[\![-F_v,0]\!]\right)\Delta z + \\ & + \left(\phi_P[\![F_h,0]\!] - \phi_H[\![-F_h,0]\!] - \phi_L[\![F_l,0]\!] + \phi_P[\![-F_l,0]\!]\right)\Delta x \end{aligned} \tag{7.9}$$

TERMINO DIFUSIVO

La integral del término difusivo a través del volúmen de control mostrado en la figura (7.2), presenta la siguiente forma:

$$\mathbb{D} = \int_v^e \int_l^h \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) \right] dxdz \qquad (7.10)$$

La integración se efectúa en una dirección, mientras se mantiene la otra constante. De esta manera se obtiene:

$$\mathbb{D} = \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_v \right] \Delta z + \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_h - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_l \right] \Delta x \qquad (7.11)$$

Para evaluar estas derivadas se supondrá que ϕ varia linealmente entre puntos nodales adyascentes de manera que se cumple que:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_e} \qquad (7.12)$$

Las derivadas contenidas en los términos de las demás caras se definen en forma similar.

El coeficiente de transporte difusivo Γ_i debe ser evaluado en las caras de los volúmenes de control, para lo cual se calcula la media armónica entre valores nodales adyascentes [12]. Por ejemplo:

$$\Gamma_e = \frac{2\Gamma_P \Gamma_E}{\Gamma_P + \Gamma_E} \qquad (7.13)$$

Los coeficientes Γ_v, Γ_h y Γ_l se definen de manera semejante, y se muestran en la tabla (7.1).

Bajo las consideraciones anteriores, la ecuación que resulta de integrar el término difusivo es:

$$\mathbb{D} = \frac{\Gamma_e}{\delta x_e}(\phi_E - \phi_P)\Delta z - \frac{\Gamma_v}{\delta x_v}(\phi_P - \phi_W)\Delta z +$$

$$+\frac{\Gamma_h}{\delta x_h}(\phi_H-\phi_P)\Delta x-\frac{\Gamma_l}{\delta x_l}(\phi_P-\phi_L)\Delta x \qquad (7.14)$$

Tabla 7.1 FORMULAS PARA FLUJOS CONVECTIVOS Y COEFICIENTES DIFUSIVOS

CARA i	FLUJOS CONVECTIVOS F_i	COEFICIENTES DIFUSIVOS Γ_i
e	$\rho_e u_e$	$2\Gamma_P\Gamma_E/(\Gamma_P+\Gamma_E)$
w	$\rho_w u_w$	$2\Gamma_P\Gamma_W/(\Gamma_P+\Gamma_W)$
h	$\rho_h u_h$	$2\Gamma_P\Gamma_H/(\Gamma_P+\Gamma_H)$
l	$\rho_l u_l$	$2\Gamma_P\Gamma_L/(\Gamma_P+\Gamma_L)$

TERMINO FUENTE

Todos los términos que no están incluidos en los términos convectivo o difusivo, pueden incluirse en el término fuente S_ϕ de la ecuación (1.1).

Para facilitar la solución del sistema de ecuaciones por resolver, es deseable que este término, al igual que el convectivo y el difusivo, también sea discretizado mediante una ecuación algebraica lineal; para esto, se supondrá que S_ϕ permanece constante dentro de todo el volúmen de control. Realizando la integración sobre el volúmen de control mostrado en la fig.(7.2) se tiene:

$$S = \int S_\phi \, dxdz = \int_w^e \int_l^h S_\phi \, dV = \overline{S_\phi}\Delta x \Delta z \qquad (7.15)$$

Donde:

$\overline{S_\phi}$ = valor promedio del termino fuente en el interior del VC.

Independientemente de la relación matemática que define al término fuente, éste se puede expresar en forma local, en cada volúmen de control considerado de la siguiente manera [44]:

$$S_\phi = S_c + S_p\phi_p \qquad (7.16)$$

ϕ_P = valor de ϕ en el nodo correspondiente.

S_C, S_P = coeficientes que expresan la ordenada al origen y la pendiente del termino fuente linealizado.

Por lo tanto, al sustituir (7.16) en (7.15) se obtiene la forma discretizada del término fuente:

$$S = \left(S_C + S_P\phi_P\right)\Delta x\Delta z \tag{7.17}$$

En la ref.[44], se encuentran ejemplos de linealizaciones del término fuente.

Una vez discutida la discretización de los términos de la ecuación diferencial general de transporte de manera individual, se procederá a exponerlos en conjunto.

FORMA GENERAL DE LA ECUACION DE VOLUMEN FINITO

Al sustituir en la ec.(7.2) la forma discretizada del término convectivo (7.9), la del término difusivo (7.14) y la del término fuente (7.16), se obtiene:

$$\left(\phi_P[\![F_e,0]\!] - \phi_E[\![-F_e,0]\!] - \phi_W[\![F_w,0]\!] + \phi_P[\![-F_w,0]\!]\right)\Delta z + $$
$$+ \left(\phi_P[\![F_h,0]\!] - \phi_H[\![-F_h,0]\!] - \phi_L[\![F_l,0]\!] + \phi_P[\![-F_l,0]\!]\right)\Delta x \quad =$$
$$\frac{\Gamma_e}{\delta x_e}(\phi_E-\phi_P)\Delta z - \frac{\Gamma_w}{\delta x_w}(\phi_P-\phi_W)\Delta z + \frac{\Gamma_h}{\delta x_h}(\phi_H-\phi_P)\Delta x - \frac{\Gamma_l}{\delta x_l}(\phi_P-\phi_L)\Delta x +$$
$$+ \quad \left(S_C + S_P\phi_P\right)\Delta x\Delta z$$

Al agrupar términos y definir coeficientes "a", se obtiene la forma abreviada de la ecuacion general de volumen finito:

$$a_P\phi_P = a_H\phi_H + a_L\phi_L + a_E\phi_E + a_W\phi_W + b \tag{7.18}$$

Donde las "a" denotan los coeficientes de la ecuación de volúmen finito en los nodos involucrados. Éstos se definen de la siguiente manera:

$$a_E = \left[\frac{\Gamma_e}{\delta x_e} + [\![F_e,0]\!]\right]\Delta z$$

$$a_W = \left[\frac{\Gamma_w}{\delta x_w} + [\![F_w, 0]\!] \right] \Delta z$$

$$a_N = \left[\frac{\Gamma_n}{\delta x_n} + [\![F_n, 0]\!] \right] \Delta x$$

$$a_L = \left[\frac{\Gamma_l}{\delta x_l} + [\![F_l, 0]\!] \right] \Delta x$$

$$a_P = a_N + a_L + a_E + a_W - S_P \Delta x \Delta z$$

$$b = S_C \Delta x \Delta z$$

En la sección 8 se discute en detalle la solución a esta ecuación algrebraica general.

8. ECUACIONES DISCRETIZADAS

Se les llama ecuaciones discretizadas a las ecuaciones algebraicas que involucran los valores desconocidos de la variable dependiente ϕ en todos los puntos del dominio de solución. Estas se derivan de la ecuación diferencial que gobierna a ϕ y por lo tanto expresan la misma información física.

Todas las ecuaciones discretizadas involucradas se pueden obtener a partir de la ecuación general de volúmen finito (7.18). Sin embargo, es necesaria una discusión detallada de las ecuaciones de cantidad de movimiento y de conservación de masa debido a las particularidades que presentan.

ECUACION DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

En el capítulo anterior, se demostró que la ecuación de cantidad de movimiento puede expresarse de la forma general (1.1). Sin embargo existen dos aspectos en los que difieren, los cuales serán discutidos a continuación.

1.- Patankar demuestra en su libro [14], que si se aplican las prácticas de integración discutidas en la sección 6, a las ecuaciones de cantidad de movimiento, existe la posibilidad de obtener soluciones físicamente irreales que sin embargo satisfacen las ecuaciones. Para evitar esto, se adopta una malla escalonada como la que se presentó en la sección 5. La consecuencia de esta estrategia, es que la integración de cada una de las componentes en las ecuaciones de cantidad de movimiento se realiza en volúmenes de control diferentes (b y c en la figura (7.4)). Esto implica un costo adicional de almacenamiento en el cálculo, que no obstante se debe pagar para asegurar el realismo de la solución.

2.- En la sección 1 se presentó la forma general de la ecuación de transporte. Con el fin de incluir las ecuaciones de cantidad de movimiento en esta forma general, el término que contiene al gradiente de presiones se agrupó en el término fuente. Sin embargo, dada la naturaleza del método de solución empleado (ver sección 8) resulta conveniente involucrar el término que contiene a la presión en forma explícita, de tal manera que pueda ser integrado por separado.

Integrando el gradiente de presiones en la dirección x, sobre el volúmen de control asociado a la componente u de la velocidad (presentado en la fig.(7.2)), se tiene:

$$\mathbb{P}_x = \int_w^e \frac{\partial P}{\partial x}\, dx = \Big((P_E - P_P) + (P_P - P_W) \Big) A_e \qquad (8.1)$$

Analogamente, para la componente z:

$$\mathbb{P}_z = \Big((P_H - P_P) + (P_P - P_L) \Big) A_h$$

Donde:

$\mathbb{P}_x, \mathbb{P}_z$ = componente x,z del termino gradiente de presiones integrado en el VC correspondiente.

De esta manera se completa la discretización de la ecuación de cantidad de movimiento, incluyendo al término del gradiente de presión (8.1). Para la componente x es:

$$a_e u_e = \sum a_i u_i + b + (p_P - p_E) A_e \qquad (8.2)$$

Para la componente z:

$$a_h v_h = \sum a_i v_i + b + (p_P - p_H) A_h$$

Donde:

b = termino fuente

i = subindice que denota a los coeficientes y variables vecinas (w,h,l,e)

p = presion

Cabe hacer notar que debido al uso de la malla escalonada, la integración del término convectivo no requiere interpolación alguna, como fué el caso en la integración del término convectivo de la ecuación general.

La unica ecuación que queda por discretizar es, la ecuación de conservación de masa (1.3) que se satisface, con el método de solución empleado (ver sección 8), a través de ajustes en la presión; para esto se deduce una ecuación para corregir la presión. En el siguiente inciso se discuten los detalles.

DISCUSION SOBRE CONSERVACION DE MASA

Hasta el momento se tiene un sistema de dos ecuaciones de cantidad de movimiento, y tres incógnitas: las componentes u y w del campo de velocidades y la presión p. Por lo tanto es necesario completar el sistema con una relación para la presión.

La ecuación de conservación de masa (1.2), especifica indirectamente el campo de presiones ya que ésta sólo se satisface con el campo de velocidades calculado a partir del campo de presiones real. Por lo tanto, se procede a la discretización de esta ecuación.

$$\int_w^e \int_t^h \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] dxdz = 0$$

Si la integral se calcula en cada una de las direcciones, manteniendo la otra constante, se obtiene:

$$[(\rho u)_e - (\rho u)_w]\Delta z + [(\rho w)_h - (\rho w)_t]\Delta x = 0 \qquad (8.3)$$

Esta es la forma que se utilizará para la derivación de las dos siguientes ecuaciones, una para la corrección de presión y otra para la presión, expresados en función de las componentes del campo de velocidades.

ECUACION CORRECCION DE PRESION

La corrección de presión p' es una cantidad añadida a un campo inicial de presiones p^* supuesto o calculado previamente, para obtener el campo de presiones real p:

$$p = p^* + p' \tag{8.4}$$

Y consecuentemente, la respuesta del campo de velocidades a este cambio de presión es:

$$\begin{aligned} u &= u^* + u' \\ v &= v^* + v' \\ w &= w^* + w' \end{aligned} \tag{8.5}$$

Donde:

$u'_*, v', w'_* = f(p') =$ correcciones al campo de velocidades.
u^*, v^*, w^* = componentes del campo de velocidades supuesto o calculado.

Para obtener una ecuación que sólo involucre las correcciones de presión, recordando que se trata de un problema bidimensional, se supone una distribución de presiones p^* y se obtiene un campo de velocidades supuesto, (u^*, w^*), de la ecuación de cantidad de movimiento :

$$a_e u_e^* = \sum a_i u_i^* + b + (p_P^* - p_E^*) A_e \tag{8.6}$$

Se sustituyen las relaciones (8.4) y (8.5) en la ecuación de cantidad de movimiento (8.2), a lo obtenido, se le resta la ecuación (8.6); de esta manera se obtiene una ecuación similar a la de cantidad de movimiento para la corrección de presión.

$$a_e u'_e = \sum a_i u'_i + (p'_P - p'_E) A_e \tag{8.7}$$

Se desprecia el primer término de la derecha por conveniencia en el cálculo numérico, ya que este término incluye los efectos de presión en los VC vecinos, y tendría que incluir, a su vez, los efectos en sus vecinos. Esto tendría como consecuencia el requerir una gran cantidad de memoria, por esto se prefiere omitir aunque ocasione inestabilidades y dificultades en la convergencia de la solución; a pesar de esto, la omisión no introduce errores, ya que la solución una vez convergida, satisface la ecuación de conservación de masa (8.3). [44].

En la ecuación (8.7) se despeja para la corrección de velocidad u'_e y se sustituye en la relación (8.5):

$$u_e = u_e^* + d_e (p'_P - p'_E) \tag{8.8}$$

Donde: $d = \frac{A_e}{a_e}$

De manera similar, para la componente de velocidad en la dirección z,se tiene:

$$w_h = w_h^* + d_h(p'_P - p'_H)$$

De esta manera se obtienen relaciones generales para la velocidad corregida basada en las correcciones de presión. Al sustituir las relaciones (8.8) en la ecuación de conservación de masa (8.3), se obtiene la siguiente ecuación discretizada para la corrección de presión.

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_H p'_H + a_L p'_L + b \qquad (8.9)$$

Donde:

$$a_E = \rho_e d_e \Delta x$$

$$a_W = \rho_v d_v \Delta x$$

$$a_H = \rho_h d_h \Delta z$$

$$a_L = \rho_l d_l \Delta z$$

$$a_P = a_E + a_W + a_H + a_L$$

$$b = - [(\rho u^*)_e - (\rho u^*)_v]\Delta z - [(\rho w^*)_h - (\rho w^*)_l]\Delta x \qquad (7.10)$$

Donde b es el negativo de la ecuación de conservación de masa para las velocidades supuestas; cuando b se anula, significa entonces que los valores supuestos de velocidad satisfacen la ecuación de conservación de masa y ya no es necesario corregir la presión, dado que $p'=0$ es la solución de (8.9).

Las inestabilidades y dificultades que provoca la omisión del primer término en la ecuación (8.7) se evitan al hacer uso de la siguiente ecuación.

ECUACION DE PRESION

De la ecuacion de cantidad de movimiento, (8.2), se definen las siguientes cantidades útiles en la derivación de la ecuación de presión. Despejando u_e se obtiene:

$$u_e = \frac{\sum a_v u_v + b}{a_e} + d_e(p_P - p_E) \qquad (8.11)$$

Al primer término de la derecha se le define como una pseudovelocidad ($\hat{u}$).

$$\hat{u}_e = \frac{\sum a_v u_v + b}{a_e} \qquad (8.12)$$

Es necesario aclarar que la pseudovelocidad se compone sólo de las velocidades de los volúmenes de control vecinos y no contiene términos que involucran a la presión. La expresión para la componente en la dirección z es similar.

Sustituyendo (8.5) en (8.4), se obtienen las siguientes relaciónes:

$$u_e = \hat{u}_e + d_e(p_P - p_E) \qquad (8.13)$$

$$w_h = \hat{w}_h + d_h(p_P - p_H)$$

Se observa que estas ecuaciones de corrección de velocidad, se basan en las pseudovelocidades y en las presiones en los nodos vecinos.

Al sustituir las relaciones (8.13) en la ecuación de conservación de masa (8.3) se obtiene la siguiente relación para la presión.

$$a_P p_P = a_E p_E + a_W p_W + a_H p_H + a_L p_L + b \qquad (8.14)$$

Donde:

$$a_E = \rho_e d_e \Delta x$$

$$a_W = \rho_v d_v \Delta x$$

$$a_H = \rho_h d_h \Delta z$$

$$a_L = \rho_l d_l \Delta z$$

$$a_P = a_E + a_W + a_H + a_L$$

$$b = -[(\rho\hat{u})_e - (\rho\hat{u}_v)]\Delta z + [(\rho\hat{w})_h - (\rho\hat{w})_l]\Delta x \qquad (7.15)$$

Es de notar que los coeficientes "a" están definidos de la misma forma que en la ecuación de corrección de presión, y que el término fuente, ec.(8.15) es el negativo de la ecuación discretizada de conservación de masa calculada para las pseudovelocidades.

Como las pseudovelocidades no dependen de la presión, si se usa un campo de velocidades correcto para calcularlas, la ecuación de presión (8.14), proporciona entonces la presión correcta.

Se observa que tanto la ecuación de presión (8.14), como la de corrección de presión (8.9), tienen la forma de la ecuación general de volúmen finito (8.18), por lo tanto se incluyen en el sistema de ecuaciones algebraicas a resolver.

ECUACION DE TRANSPORTE DE CAMPO MAGNETICO

La discretización de la ecuación de transporte de campo magnético (4.8) adquiere exactamente la forma de la ecuación general de volúmen finito (8.18), por lo tanto no requiere mayores comentarios.

En esta sección se presentaron todas las ecuaciones discretizadas a resolver; en la siguiente, se especificará un algoritmo de solución y las técnicas numéricas empleadas para llegar a la solución. También se presentará el algoritmo de solución de las ecuaciones discretizadas y las técnicas numéricas que se emplean.

9. SOLUCION A LAS ECUACIONES DISCRETIZADAS

Un algoritmo con el cual se obtiene la solución al flujo, i.e., las componentes de velocidad, la distribución de presiones y el valor de las demás variables dependientes en un flujo, es el llamado SIMPLER (del inglés, Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations Revised) [44], el cual enlaza las ecuaciones de cantidad de movimiento con la de presión y la corrección de presión, expuestas en la sección anterior, mediante la siguiente secuencia de operaciones.

1) Se supone un campo de velocidades (u^*, w^*).

2) Se calculan los coeficientes para las ecuaciones de cantidad de movimiento y se calculan las pseudovelocidades $(\hat{u}, \hat{w})$, mediante las ecuaciones (8.12).

3) Se calculan los coeficientes de la ecuación de presión (8.14) y se resuelve la ecuación para obtener el campo de presiones p.

4) Se trata al campo p. obtenido en 3), como un campo de presiones supuesto p^*, y se resuelve la ecuación de cantidad de movimiento (8.2), obteniendo así un campo de velocidades mejorado (u^*, w^*).

5) Con el campo de velocidades supuesto (u^*, w^*) obtenido en 4), se calcula la fuente de masa mediante la ec. (8.10).

   Si la fuente de masa se anula, o es más pequeña que un valor límite dado de antemano, la ecuación de balance de masa se satisface con el campo de velocidades mejorado, y la presión ya no requiere correcciones porque ya se logró la convergencia del problema. Si esto no se cumple se prosigue al siguiente paso.

6) Se evalúa la corrección de presión p' en todo el dominio mediante la ecuación (8.9).

7) Utilizando las correcciones de presión de 6), se corrige el campo de velocidades mediante las relaciones (8.8). Manteniendo al campo de presiones sin corregir.

8) Se resuelven las ecuaciones discretizadas para otras ϕ.

9) Se retrocede al paso 2), y empleando el campo de velocidades obtenido en 7) se repite el algoritmo hasta obtener convergencia.

INTRODUCCION DE CONDICIONES A LA FRONTERA

Los valores de la variable dependiente (ϕ) se requieren en las fronteras del dominio durante través de todo el procedimiento de solución. Estos valores de frontera determinan la unicidad de la solución para una situación de flujo dada. Los dos tipos que se emplean en este caso son:

1) Cuando el valor de la variable está prescrito en la frontera (condición de frontera de primera clase o de Dirichlet). Ésta es la más común entre las condiciones de frontera.

2) El valor de ϕ en la frontera es deducido de un gradiente conocido en la frontera (condición de frontera de segunda clase o de Von Neumann).

Ambas condiciones se incluyen en el el sistema como términos fuente [58], de la forma general expresada en la ecuación (8.16).

TECNICAS DE SOLUCION DE LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS

Se tiene una ecuación algebraica o de volúmen finito, para cada variable y para cada volúmen de control en el dominio de solución, la cual puede expresarse de la forma (8.18).

Cuando los coeficientes "a", de estas ecuaciones, son función de las mismas variables dependientes ϕ, el sistema es no lineal.

Sin embargo, los procedimientos numéricos utilizados para resolver las ecuaciones de volúmen finito explotan la apariencia lineal que tienen las ecuaciones, y por lo tanto, se resuelven como lineales.

Debido a que el valor de la variable en cada volúmen de control se encuentra en función de sus vecinos, el sistema de ecuaciones algebraicas forma una matriz tridiagonal, como la que se muestra a continuación:

$$\begin{vmatrix} a_{i-1} & -a_{i} & -a_{i+1} & & & \\ & a_{i} & -a_{i+1} & -a_{i+2} & & \\ & & a_{i+1} & -a_{i+2} & -a_{i+3} & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \phi_{i} \\ \phi_{i+1} \\ \phi_{i+2} \\ \cdot \\ \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{i} \\ b_{i+1} \\ b_{i+2} \\ \cdot \\ \cdot \end{vmatrix}$$

Para la solución de esta matriz tridiagonal se selecciona el método directo TDMA (del inglés, Tri-Diagonal Matrix Algorithm), por las ventajas que tiene sobre otros en cuanto al ahorro en almacenamiento y tiempo de procesamiento.

Sin embargo, si se tiene un sistema de dos o tres dimensiones, el número de ecuaciones aumenta considerablemente, siendo los requerimientos de cómputo extremadamente altos. Por esta razón la técnica TDMA se combina con un método iterativo de solución de ecuaciones algebraicas.

Un método iterativo consiste en expresar cada variable en función de las n-1 variables restantes que componen el sistema. Entre los métodos iterativos de solución se elige el de Gauss-Seidel línea por línea. En éste, se calculan los valores de cada línea mediante el método directo TDMA empleado en la evaluación del problema unidimensional.

Para detalles sobre las técnicas iterativas utilizadas en el código PHOENICS consultar [58].

CAPITULO V

RESULTADOS

En este capitulo, se procederá a la descripción y análisis de los resultados obtenidos con el presente modelo, en primer lugar se describe el campo magnético aplicado y la forma en que se calculó, en la siguiente sección se presentan los parámetros que se utilizarán para la descripción dinámica del flujo, la cual se realiza en las siguientes secciones. Se comienza, en la sección 12, con la descripción y análisis del flujo laminar en desarrollo, con y sin campo magnético aplicado; se determina la longitud de desarrollo para ambos casos y se le compara con las obtenidas por otros autores. Enseguida se elige entre los valores estudiados, un caso para su descripción, finalmente, se hace un estudio paramétrico y se describen los efectos relevantes encontrados.

10. DESCRIPCION DEL CAMPO MAGNETICO

Como ya se discutió en la sección 4, bajo la aproximación del número de Reynolds Magnético nulo, la intensidad de campo magnético no se afecta con el movimiento del fluido; de tal suerte que su magnitud puede calcularse con las ecuaciones de Maxwell solamente.

En el presente estudio, se asumirá que el campo magnético se genera por un magneto (permanente o de inducción electromagnética), cuya magnetización interna es constante y tiene la geometría que se muestra en la figura (10.1).

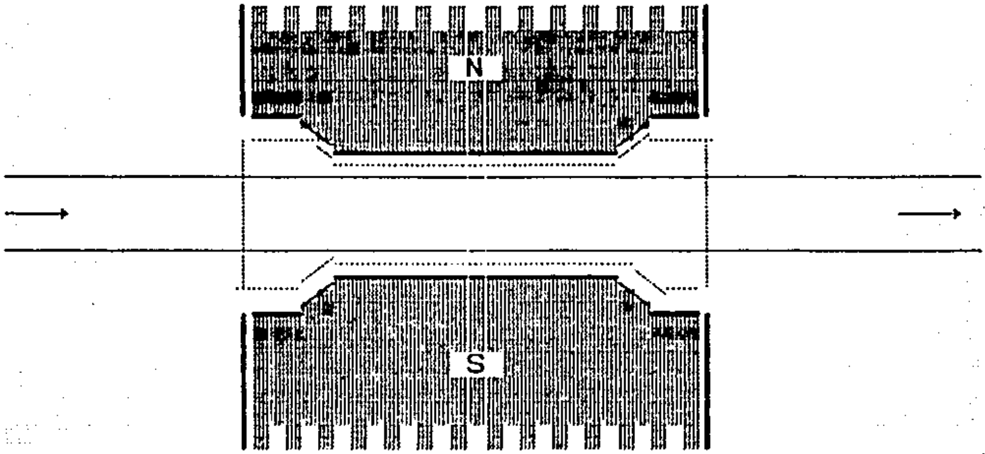


FIG. (10.1) Geometria bajo estudio, a) corte longitudinal de la figura (1.2).

Experimentalmente se puede obtener una situación semejante utilizando un electromagneto tipo herradura como el que se muestra en la figura (10.2), con un núcleo de material altamente diamagnético.

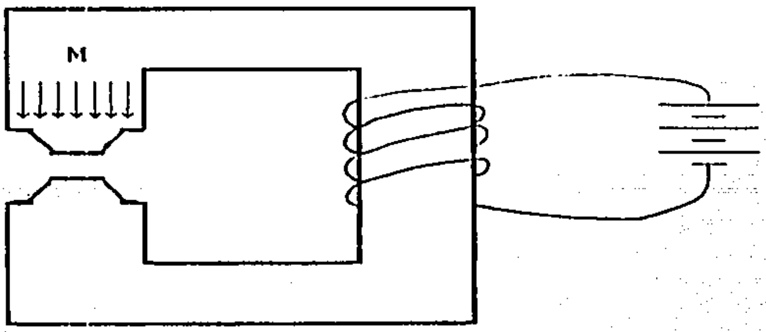


FIG. (10.2) Dispositivo experimental para la obtencion de campo magnetico no uniforme en los polos.

Al suponer una magnetización (M) constante y uniforme en el interior del magneto, el campo magnético entre los polos será uniforme o no, dependiendo de la geometría de estos.

En el espacio alrededor de los polos, el campo magnético se describe con las ecuaciónes de la magnetostática, que tienen la siguiente forma:

$$\nabla \wedge B = 0, \text{ y} \tag{10.1}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \tag{10.2}$$

Se observa que al cumplir con estas ecuaciones, se trata de un campo irrotacional y solenoidal. Utilizando propiedades de campos irrotacionales, se puede definir un potencial magnetico (ϕ_M) de la siguiente manera:

$$B = \nabla \phi_M \tag{10.3}$$

Sustituyendo la expresión (10.3) en la ecuación (10.2), se tiene que el potencial magnético obedece la llamada ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 \phi_M = 0 \tag{10.4}$$

Las condiciones a la frontera a ser impuestas en la función potencial en los polos de un magneto, bajo la suposición de una magnetización constante son:

$$\Delta \phi_M = M \cdot n \tag{10.5}$$

Donde $\Delta \phi_M$ es el "salto" en el potencial a través de la frontera, M es la magnetización y n es el vector unitario que define a la superficie de los polos. Obviamente, esta condición aplica solamente en las fronteras limitadas por los polos. En principio la integración de la ecuación (10.2) debe efectuarse en la región infinita alrededor de los polos del magneto. Sin embargo, en el presente estudio la integración se limitará al área finita que encierra la linea punteada mostrada en la figura (10.1). A ésta área en lo sucesivo se le denominará dominio de solución, se muestra en la fig.(10.3). La ecuación (10.4) se aplicará en las fronteras limitadas por los polos magnéticos, denotadas por I y U, mientras que la condición $d\phi_M/dn$, se aplicará en las fronteras A y A'.

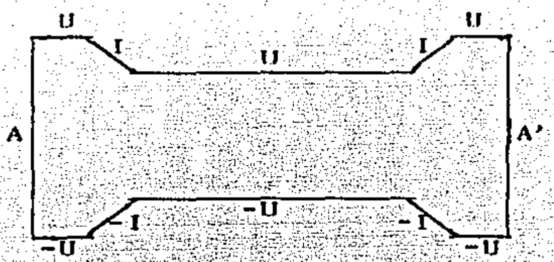


FIG. (10.3) Dominio de solucion con valores en las fronteras.

Sumarizando, el potencial magnético se encuentra al resolver la ecuación $\nabla^2\phi_M=0$, con las condiciones de frontera:

$$\phi_M = \pm|M| \quad \text{en: U y -U respectivamente}$$

$$\phi_M = \pm|M|\cos\theta, \quad \text{en: I e -I respectivamente}$$

$$\frac{d\phi_M}{dn} = 0 \quad \text{en : A y A'} \qquad (10.6)$$

Donde θ es el ángulo formado por el vector magnetización (M) y el vector unitario normal (n) a la superficie I, como se muestra en la figura (10.4)

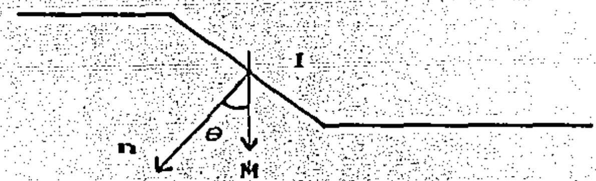


FIG. (10.4) Definicion del angulo θ.

Las componentes del campo magnético se calculan del campo de potencial magnético $\phi_M(x,z)$, mediante la ecuación (10.3), se tiene:

$$\frac{\partial\phi_M}{\partial x} = B_x \; ; \; \frac{\partial\phi_M}{\partial z} = B_z \qquad (10.7)$$

La solución en el dominio mostrado en la figura (10.4) se encuentra numéricamente siguiendo el procedimiento descrito en el capitulo anterior.

Se recordará que una vez determinado el dominio de solución, se procede a su discretización. Debido a la forma peculiar que presenta el dominio de solución bajo estudio, fig.(10.3), se utilizaron "coordenadas generalizadas"[1] para la discretización del dominio.

La malla elegida tiene las siguientes caracteristicas:

Cuenta con 51 volúmenes de control en la dirección "x" y 80 en la dirección "z", de los cuales, los que se encuentran en la región central del dominio (entre a y -a en la fig.(10.6)), forman una malla no uniforme de 41x80, la cual presenta una variación exponencial de la distancia entre nodos, siendo muy fina en las paredes, donde se esperan los gradientes más agudos de velocidad, a gruesa en el centro del canal. Mientras que los que se encuentran cercanos a los polos (entre a y p, -a y -p) son los volúmenes que se ajustaron a la forma de los polos. La malla se muestra en la figura (10.5).

La presente malla se escogió después de realizar un estudio de refinamiento basado en la reproducción de longitudes de desarrollo tanto hidrodinámicas como magnetohidrodinámicas, los cuales se detallarán en la sección 12. Se partió de una malla de 25x25 y se concluyó que una malla de 55x100 producia resultados independientes de mayor refinamiento. Sin embargo, al intentar emplear dicha malla en coordenadas generalizadas, se encontró que la capacidad de alamcenamiento de la computadora utilizada (Hewlett-Packard 9000 serie 500) se veia rebasada, por lo tanto se decidió disminuir el número de nodos; la malla de 51x80 fue la máxima aceptable, que por otra parte no se encuentra muy alejada, (sólo un 20% menor), de la malla calificada como óptima.

[1] Del inglés, Body Fitted Coordinates (BFC), opcionales en el código PHOENICS [58].

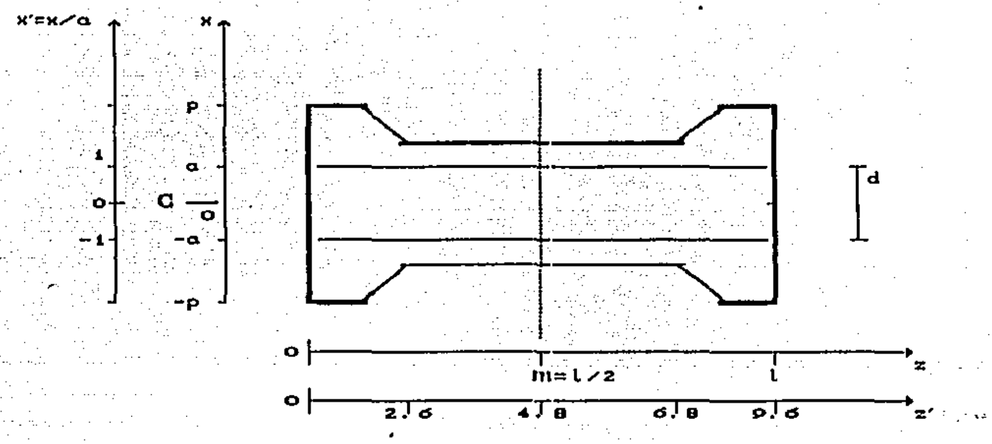


FIG. (10.6) Seccionamiento del dominio de solucion.

Para una descripción conveniente del dominio de solución se definen las siguientes propiedades geométricas: tiene un eje de simetría longitudinal (C), que coincide con el punto cero en el eje x y se alarga por el eje z abarcando toda la longitud (l) del dominio, es la linea (0,z). Existe otro eje de simetría, ahora transversal (m) localizado a la mitad de la longitud, o en el punto 4.8 del eje adimensional z', es la linea (x,l/2).

Al área que se encuentra definida por $-a<x<a$ y $0<z<l$, se le llamará el canal, debido a que es la zona donde pasa el fluido.

Se hace la siguiente subdivisión para abreviar la nomenclatura:

Región de entrada en el eje z' (0,2.6).

Región intermedia en (2.6,6.8).

Región de salida en (6.8,9.6).

En la figura (10.7) se muestran las isolineas del campo de potencial magnético $\phi_M(x,z)$, se observa una perfecta simetría del campo con respecto a los dos ejes de simetría m y C.

Para obtener las componentes del campo magnético aplicado, se realizan las derivaciones que se indican en las ecs.(10.7). En la figura (10.8) se grafica la resultante de la adición vectorial de las dos componentes, los vectores de campo magnético son colocados coincidiendo por su parte media con el nodo principal de la celda.

Para tener una idea más clara de la forma del campo magnético en el dominio, se grafica la magnitud de cada una de sus componentes arespecto a la coordenada z' adimensional, a varias alturas entre los polos: en C a lo largo del eje de simetría longitudinal, en "a" a lo largo de lo que corresponderá ser la pared del canal bajo estudio y en p, una línea que sigue el contorno de los polos.

Las magnitudes de ambas componentes estan adimensionalizadas con respecto a la magnitud de B_x en z'=0.

De las figuras se observa que la componente B_x es por lo menos un orden de magnitud mayor que la componente B_z, por lo tanto la magnitud de la componente B_x es muy similar (en un 10% aproximadamente) a la magnitud del campo magnético.

En la fig. (10.9), se observa el perfil de B_x como función de la coordenada z para diferentes posiciones en la dirección x. Con línea punteada, se muestra el perfil del campo en la región cercana al polo del imán, mientras que las líneas continuas indican $B_x(z)$ para x'=0,.2,.5,.7 y .9. Todas estas se encuentran localizadas dentro de la región ocupada por el ducto, la primera sobre la línea de simetría axial y la última cercana a las paredes.

El perfil de B_x a lo largo de la línea central (C,z) describe una curva parecida a una campana de Gauss con su valor máximo en z'=4.8. En la región intermedia el perfil es prácticamente uniforme, se mantiene alrededor de un valor dado variando en menos de 5%.

Es importante notar que el valor de B_x en el centro de la región ocupada por el ducto es mayor que en el resto del ducto para $0 \le z' \le 2.2$ y $7. \le z' \le 9.6$ mientras que es menor para $2.2 < z' < 7$.

El perfil del campo en el contorno cercano a los polos (±p,z), se ilustra con línea punteada en la figura (10.9), y muestra varios máximos y mínimos locales debido a la geometría de los polos. En la región de entrada el perfil disminuye súbitamente hasta un mínimo local en $z'=.6$, posteriormente presenta un máximo local en $z'\cong2.6$ y llega a otro mínimo local en la región central, en $z'=4.8$, donde pasa el eje de simetría transversal m. También este perfil resulta simétrico con este eje, De tal manera que se tiene un máximo local en $z'\cong6.8$ y otro mínimo local simétrico en $z'=9.6$. Mostrando en su totalidad dos máximos locales y tres mínimos locales. Es de notarse que los mínimos y los máximos locales en las regiones de entrada y salida, coinciden con los puntos donde los polos presentan discontinuidades. Estos fuertes cambios sugieren que también habrá cambios fuertes en la dinámica del flujo debidos especialmente a los efectos sobre el fluido cercano a las paredes.

El perfil del campo a lo largo de $(\pm a,z)$, es de gran interés ya que es donde se encuentran definidas las paredes del canal. Su forma es similar a la del perfil central. En la región de entrada se encuentra por debajo del perfil central y muestra sólo una leve inflexión en $z'=.6$, de este punto aumenta con una pendiente casi constante hasta $z'\cong2.6$ donde presenta un valor máximo coincidiendo con el perfil en los polos y obviamente con los puntos donde la pendiente del contorno de los polos es discontinua. A partir de este punto el perfil disminuye hasta llegar a un mínimo local en la región central coincidiendo con la línea de simetría media (m) ver figura (10.6), lo cual no es de extrañar debido a la simetría que presenta la solución del potencial magnético. A partir de este punto se presenta otro máximo local simétrico al de la región de entrada y todo el comportamiento de la curva es de simetría especular con respecto a la línea de simetría media.

Del conjunto de perfiles mostrado en la fig.(10.9), se aprecian tres zonas donde el campo magnético aplicado es uniforme en la sección transversal del canal y entre los polos, en la entrada en el intervalo de $z'=[2.04,2.28]$, en el centro $z'=[3.96,5.64]$ y a la salida $z'=[7.2,7.44]$; en el resto del dominio el campo aplicado es completamente no uniforme tanto transversal como longitudinalmente por ser función de la posición, $B=f(x,z)$.

Para la descripción de la componente del campo en la dirección z se hace uso de dos figuras; en la figura (10.10) se presenta la forma que tiene el campo a partir de la linea central C, x'=0, hasta una pared del canal a (x'=1) como función de z', en la siguiente figura(10.11), se presentan los perfiles desde la pared x'=1 hasta el contorno de los polos "p".

En la figura (10.11) se observa que a lo largo de la linea central C, no hay componente x ó z del campo magnético, indicando que se trata de un máximo de potencial magnético en la dirección z y que la única componente del campo que interviene a lo largo de C es la transversal.

A lo largo de (a,z) se observa un máximo de B_z, ya que los demás decaen tanto hacia el centro como hacia el polo, como se apreciará en la figura (10.11), donde también se observa que este perfil tiene una simetria con respecto al punto medio del dominio, donde se intersectan los dos ejes de simetria m y C.

A lo largo de los polos (p,z), el perfil muestra claramente la influencia de las discontinuidades en el campo magnético, provocadas por las discontinuidades en la pendiente del contorno de los polos.

El campo magnético así obtenido es el que se tendria con un magneto cuya magnitud en la dirección "y" fuera mucho mayor que las correspondientes dimensiones en las direcciones "x" y "z". Por lo tanto, debido a que se considera un plano lo suficientemente alejado de los bordes en la dirección "y", ver figura (10.1)b, se desprecia la componente del campo magnético en esa dirección.

$$B = (B_x(x,z),0,B_z(x,z)) \qquad (10.9)$$

El considerar variaciones de ambas componentes con respecto a la posición, lo vuelve un campo magnético completamente no uniforme, lo que hace una gran diferencia con trabajos anteriores en campos no uniformes [24], [48] y [68], la mayoria sólo considera un campo no uniforme en una de sus componentes, la perpendicular a la dirección del flujo despreciando a las otras dos componentes, esta componente además sólo varía en la dirección del flujo, mientras que en la dirección transversal se mantiene uniforme.

11 ~~10~~. PARAMETROS DEL FLUJO

El flujo magnetohidrodinámico bajo estudio, se caracteriza completamente con tres parámetros definidos con anterioridad en la la cuarta sección: el número de Reynolds (Re), el número de Hartmann (M) y el factor de carga (e).

$$v = f(Re,M,e)$$

El número de Reynolds, mediante el cual se varía el comportamiento dinámico del sistema, se definió tomando como velocidad característica a la velocidad de entrada de un flujo uniforme en la dirección Z (w_o) ver fig. (11.1); y como distancia característica, a la mitad del la distancia entre placas (a) que es constante, ver fig. (10.5). Las propiedades del fluído también se consideran constantes, variando únicamente la velocidad de entrada.

$$Re = \frac{\rho a w_o}{\eta} \tag{11.1}$$

Los valores del número de Reynols que se decidió explorar fueron 1, 10, 30 y 100.

En el número de Hartmann, al igual que en el de Reynolds, la longitud característica es la mitad de la distancia entre placas,

$$M = \rho\mu a\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}\,H_o \tag{11.2}$$

El único parámetro que varía es la magnitud del campo aplicado (H_o) en el punto medio del dominio, i.e. en la intersección de los ejes de simetría C y m. Se elige este valor ya que el número de Hartmann es función de posición, y en este punto presenta uniformidad transversal como ya se mencionó en la sección anterior.

Los valores de M explorados son: 0, 1, 3, y 10

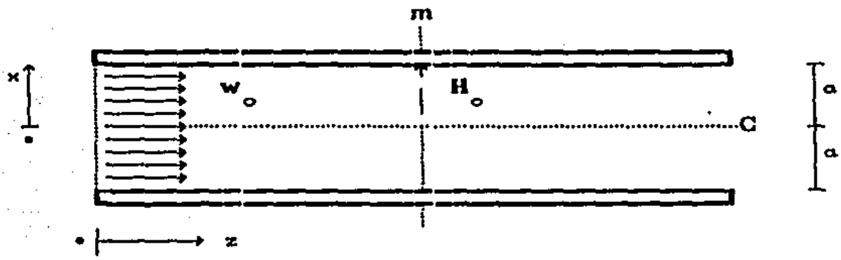


FIG. (10.1) Geometría considerada.

Otro parámetro conocido como parámetro de interacción (N), definido previamente por la ec.(4.5), es utilizado con cierta frecuencia, en el presente trabajo se le mencionará sólo esporádicamente debido a que es un parámetro derivado de los anteriores.

Es importante subrayar que aunque la magnitud del campo magnético varíe como función de la posición, debido a la aproximación del número de Reynolds magnético nulo, el campo magnético no se altera por el movimiento del fluido.

Para el factor de carga se consideraron los valores correspondientes a los modos de operación típicos de una máquina de inducción, es decir, en circuito abierto (e=1), máxima potencia (e=.5), corto circuito (e=0) y un voltaje aplicado (e=-1).

~~11.~~ 12 FLUJO EN DESARROLLO

Los resultados que se presentan a continuación fueron obtenidos al resolver numéricamente las ecuaciones de cantidad de movimiento (5.15) y (5.16) acopladas a la ecuación de conservación de masa (5.17), con las condiciones a la frontera que se discuten en la cuarta sección. El dominio de solución de estas ecuaciones ya no es el que se encuentra entre los dos polos fig.(10.5), sino la zona de este delimitada entre (a,-a) y (0,l) ilustrada en la figura (10.6).

FLUJO EN DESARROLLO. CASO HIDRODINAMICO

Cuando el campo magnético aplicado es nulo, M=0, el problema se reduce al flujo hidrodinámico entre dos placas paralelas inducido por un gradiente de presiones. El flujo presenta a la entrada (z'=0), un perfil uniforme de velocidades conocido como "flujo tapón", ver figura (11.1). Al entrar al ducto, la velocidad del fluído adyacente a las paredes es cero, debido a la condición de no resbalamiento. Esto a su vez frena las parcelas de fluído cercanas a las paredes y en consecuencia, por conservación de masa, el fluído se acelera en la región central. Este proceso de desarrollo del flujo culmina cuando el fluído ya no sufre aceleraciones y se establece un perfil parabólico de velocidades, llamado perfil laminar desarrollado también conocido como perfil de Poiseuille. A la distancia que requiere un fluído para desarrollarse en un 99% del valor máximo en la región central, se le conoce como longitud de desarrollo L_d y es función directa del número de Reynolds. Ver fig. (12.1).

$$L_d = akRe \tag{12.1}$$

Donde:

a = mitad de la distancia entre placas

k = constante de proporcionalidad

La constante de proporcionalidad es una magnitud adimensional que se identifica con una longitud de desarrollo adimensionalizada:

$$k = L_d^* = \frac{L_d}{aRe} \tag{12.2}$$

Debido a la distribución parabólica de este flujo, la razón entre la velocidad máxima del perfil desarrollado (que coincide con la línea central C), y la velocidad uniforme de entrada, es 1.5.

En la figura (12.2) se muestra el efecto de la variación del número de Reynolds sobre el desarrollo del flujo. En el eje vertical se grafica la velocidad adimensional en el punto medio del canal vs. la longitud adimensional en la dirección del flujo (z').

Se observa cómo al aumentar el Re, aumenta la longitud de desarrollo. Los resultados obtenidos utilizando el presente modelo cuando M=0 y Re=10, se presentan en la tabla (12.1), donde también aparecen resultados de investigaciones similares que han aparecido en la literatura. Una discusión amplia sobre la comparación se presenta en la siguiente sub-sección.

En la figura (12.3) se muestra el perfil longitudinal de velocidades, para un caso hidrodinámico a un número de Reynolds de diez a diferentes alturas en el canal, desde el centro C (x'=0) hasta la pared a (x'=1), se observa en los perfiles de x'=.4 y .7, un máximo antes de alcanzar su velocidad completamente desarrollada. Se observa que estas curvas no son monótonas en el intervalo de z'=(.2,.8).

FLUJO EN DESARROLLO. CASO MAGNETOHIDRODINAMICO

Cuando se aplica un campo magnético uniforme en forma transversal a un fluido conductor que circula en la geometría ya descrita, se presentan los efectos dinámicos que se ilustran en la figura (12.4), la cual es la situación análoga al caso hidrodinámico fig.(12.1).

Se observa un comportamiento similar al caso hidrodinámico, adherencia en las paredes y aceleramiento en la región central, pero este aceleramiento tiene un límite menor al caso hidrodinámico, pues el perfil de velocidades una vez desarrollado presenta un achatamiento debido a la presencia del campo magnético. Cuando el campo magnético es uniforme a este perfil se le conoce como perfil de Hartmann[2]. En la siguiente figura (12.5), se muestra el efecto del número de Hartmann sobre el perfil transversal de velocidades completamente desarrollado.

En este caso, la razón entre la velocidad máxima, que se encuentra en la línea central, y la velocidad de entrada, es función de la intensidad del campo magnético aplicado.

Con el fin de comparar los resultados del presente modelo con los de otros autores se escogió el parámetro de longitud de desarrollo L_d. Con este objetivo se modificó el campo magnético aplicado volviéndolo uniforme y perpendicular a la dirección del flujo, $B=(B_o,0,0)$, despreciando la componente en la dirección z y considerarlo constante en la dirección x. Se consideró un factor de carga nulo (e=0). Se observa de las ecuaciones de cantidad de movimiento (5.15) y (5.16), que un campo magnético uniforme simplifica en gran medida la forma de la fuerza de cuerpo y por otra parte vuelve innecesario el uso de las coordenadas generalizadas, por esta razón se pudo ampliar el número de nodos en la malla utilizada hasta obtener resultados que fueran independientes de la malla la cual contenía 55x100 nodos.

Con el fin de efectuar una comparación más completa con la mayoría de los autores que han investigado el problema de flujo en desarrollo, se consideró además una formulación alternativa a la presentada en la sección cuatro; en las ecuaciones de cantidad de movimiento, se eliminó el término difusivo en la dirección del flujo, es decir que las ecuaciones se modificaron de elípticas a parabólicas en la dirección z.

---

[2] Para detalles de este perfil ver Anexo A.

	AUTORES	NUMERO DE HARTMANN (M) 0	2	4	10
A	SCHLICHTING [75]	.04	—	—	—
A	WU [77]	.0467	—	.019	.00265
A	HWANG, C. [31]	—	—	.0197	.00655
N	HWANG, L. [32]	.0422	—	.0188	.00304
N	BODOIA [4]	.044	—	—	—
N	BRANDT [5]	.0442	.0475	—	.0195
N	ROIDT [50]	.0454	—	.0167	—
N	PRESENTE MODELO PARABOLICO	.0444	.0367	.0210	.00481
N	PRESENTE MODELO ELIPTICO	.0587	.0443	.0292	.0139

TABLA (11.1) Comparacion de longitudes de desarrollo adimensionales L_d^* ec. (11.2), entre diversos autores, utilizando aproximaciones analiticas (A) o numericas (N).

De la información presentada en la tabla (12.1) se observa que aunque la dispersión de los valores de L_d disponibles es grande, los resultados del modelo parabólico coinciden aproximadamente con los reportados usando otro tipo de soluciones. La comparación es excelente para el caso M=0, que es además el caso mejor documentado. Cuando M=2 sólo hay otro autor con quien comparar [5], el cual presenta un valor mayor al presente y también lo hace así en el caso en que M=10, estando por arriba de todos los autores. En el caso en que M=4 el valor del presente modelo es el más alto, es un 5% mayor al valor más grande [31]. Cuando M=10 el valor propuesto se encuentra entre los valores obtenidos analiticamente y por encima del [32] obtenido numéricamente. Se observa que al aumentar el número de Hartmann, las diferencias entre los resultados aumentan. Esto se debe a que en la formulación eliptica del presente modelo, se toma en cuenta al término difusivo en dirección del flujo. Se observa que en general la longitud de desarrollo aumenta al considerar este término, el valor dado mediante la formulación eliptica es mayor que cualquiera de las formulaciones parabólicas (excepto el valor de [5] cuando M=10). Y que las diferencias entre valores parabólicos y elipticos, aumentan al aumentar el número de Hartmann, lo que hace pensar que la difusión de cantidad de movimiento en la direccion del flujo se vuelve más importante al incrementarse el número de Hartmann.

En la siguiente figura (12.6), se presenta el efecto de la variación del número de Reynolds, manteniendo fijos M y e, sobre el perfil longitudinal de velocidades a lo largo de la linea central; aunque en este caso el campo magnético aplicado no es uniforme, esta figura sirve para ilustrar cómo influye el número de Reynolds en el desarrollo del flujo y cómo se determina la longitud de desarrollo magnetohidrodinámica como función de los números de Reynolds y Hartmann.

En el trabajo previo [39] se hace el análisis detallado del problema de flujo en desarrollo. También ver [11].

13. FLUJO EN UN CAMPO MAGNETICO NO UNIFORME

Al igual que en la sección 12 los resultados aquí presentados se obtienen al resolver las ecuaciones de balance da masa y cantidad de movimiento en la región ocupada por el ducto. Las componentes del campo magnético calculadas en la sección 10 se integran a las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento a través de los términos fuente.

Se eligió el caso Re=10, M=3, e=.5, por ser un caso donde todos los parámetros que influyen en la dinámica del flujo son igualmente importantes, pues la fuerza difusiva magnética es comparable en magnitud a la fuerza inercial convectiva, dado que $M^2/Re \cong 1$ en la ec. (4.5).

En la figura (13.1), se muestra el perfil longitudinal de velocidades en dirección axial para x'=0. Con el fin de evidenciar el efecto del campo magnético, en la figura (13.1), se también se muestra el perfil de velocidades obtenido empleando el mismo número de Reynolds (Re=10) pero campo magnético nulo (M=0).

Los fenómenos de entrada, $0 \leq z' \leq .8$, son muy similares en ambos casos pues el campo magnético es pequeño en esa región; las curvas presentan el aumento caracteristico en la velocidad al centro del ducto. Sin embargo, el incremento paulatino de la intensidad del campo magnético reduce el aumento de la velocidad, llegando aún a causar un máximo en el perfil de velocidades, en la región donde los efectos de entrada han reducido su importancia ($z'\cong1.6$). En las regiones centrales, donde el campo magnético alcanza su máxima intensidad en $z'\cong4.8$ y $x'=0$, la velocidad se reduce hasta alcanzar un mínimo cerca del punto $z'=4.8$; a partir de esta localidad, el perfil mustra un crecimiento monótono debido a la reducción en la intensidad del campo magnético. Al amplificar la escala de la figura anterior, se observa en la figura (13.2) que a partir del mínimo descrito anteriormente, el fluído aumenta su velocidad, aunque con ligeros cambios en su tasa de crecimiento. En principio, al abandonar la zona de campo magnético, el flujo tenderá a un flujo de Poiseuille totalmente desarrollado cuyo valor en la región central del ducto es 1.5. Esto no se llega a apreciar en las figuras debido a la limitada longitud analizada.

Una diferencia importante de este flujo bajo un campo no uniforme con el flujo hidrodinámico, y con el flujo de Hartmann, es que una vez desarrollado el flujo, los casos analizados no presentan una velocidad máxima constante, esto se debe a la no uniformidad del campo magnético aplicado a lo largo del canal.

En la sección 10, donde se discutieron las propiedades del campo magnético aplicado, se estableció que aunque la dependencia respecto a la coordenada axial es su característica más relevante, existe también una funcionalidad respecto a la coordenada transversal. El efecto de este comportamiento en la dinámica del flujo, se puede apreciar en la figura (13.3) donde se muestran los perfiles longitudinales de velocidad a diferentes alturas del canal, desde el centro, $x'=0$, hasta cerca de la pared $x'\cong1$. Se observa que correspondiendo al máximo y al mínimo del perfil central, se manifiestan respectivamente un mínimo y un máximo del perfil cercano a la pared, y esto sucede exactamente en las zonas que corresponden a una mayor no uniformidad del campo magnético aplicado. Cerca de las paredes, el campo magnético es mayor que en el centro, ver fig.(10.9), por consiguiente al ser mayor la fuerza de cuerpo electromagnética que se opone al flujo cerca de las paredes, se presenta un efecto de frenamiento en la pared con su correspondiente aceleración al centro por conservación de masa.

En la figura (13.4) se grafican cada uno de los términos involucrados en el término fuente a lo largo de la línea central para el mismo caso, la expresión del término fuente tiene la siguiente forma, de la ec.(5.16):

$$S_z = kuH_xH_z - kwH_x^2 - k\frac{eH_x}{2a}\int_{-a}^{a}(uH_z - wH_x)dx$$

$$S_z = 1 - 2 - e\cdot 3 \qquad (13.1)$$

Donde: $k = \sigma\mu^2$

Se observa que el término 2 es siempre del mismo signo, mientras que el signo de 3 depende del factor de carga e; el primer término se anula debido a que tanto la componente transversal del campo de velocidades como la componente axial del campo magnética se anulan a lo largo de x'=0.

En la figura (13.5) se grafican los perfiles transversales (i.e. a lo largo de la coordenada transversal) de velocidad en diversos puntos en la dirección z, se observa que los perfiles tienen una forma similar a la que presentan bajo un campo uniforme, y que son del tipo del perfil de velocidades de Hartmann (ver anexo A). Este resultado concuerda con los reportados por Branover [6], el cual asevera que tampoco se han encontrado diferencias experimentales en estos perfiles, ver también [30].

ESTUDIO PARAMETRICO

En la sección 11 se indicó que el espacio de parámetros del problema es tridimensional, siendo las variables los números de Reynolds y Hartmann, y el factor de carga. Con el fin de estudiar la influencia de cada uno de ellos se obtuvieron resultados efectuando series de experimentos en los que se varía sistemáticamente un parámetro, manteniendo fijos los dos restantes.

El efecto de la variación del número de Reynolds, se muestra en la figura (13.6) donde se ha graficado w' en función de z'. Se observa en los perfiles longitudinales de velocidad, que de manera similar al caso hidrodinámico, la longitud de desarrollo aumenta al aumentar el número de Reynolds; se observa también que los perfiles presentan un máximo y un mínimo descritos en el comentario a la fig.(13.1). El punto donde la velocidad alcanza el valor del máximo local es una función directa del número de Reynolds, esto es, a mayor número de Reynolds el máximo se encuentra a mayor distancia de la entrada. La diferencia entre los valores máximo y mínimo en los perfiles es una función inversa del número de Reynolds. La dinámica de los flujos con Re>10 es dominada por las fuerzas inerciales, esto se debe a que en estos casos el parámetro de interacción (M^2/Re) es menor a la unidad.

El efecto del factor de carga es mucho menor que el discutido anteriormente; en la figura (13.72) se presenta (amplificada) la velocidad axial como función de z' para Re=10, M=3 y e=1,0.5,0 y -1. El comportamiento de los perfiles en los tres primeros casos es similar; aunque se presentan algunas diferencias, el máximo local se presenta en puntos más alejados de la entrada para menores factores de carga. Se observa también que la diferencia entre el mínimo y el máximo local es menor para menores factores de carga. El perfil para e=-1 presenta un comportamiento cualitativamente diferente al resto, pues se observan dos máximos locales a la izquierda y a la derecha de la región central. Este efecto de aumento de velocidad es consecuencia de un frenamiento correspondiente en las regiones cercanas a las paredes provocadas por la distribución espacial del campo magnético, ver figura (10.9). Nótese que el efecto es más notorio en este último caso pues como se muestra en la figura (13.8) el término fuente es (en valor absoluto) de mayor magnitud cuando e=-1.

El término fuente en la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección z, graficado para este caso Re=10, M=3, e=.5 y distintos factores de carga a lo largo de la línea central (x'=0), se ilustra en la figura (13.8), se observa cómo al cerrar el circuito externo, e<1, el valor absoluto de la fuerza de cuerpo aumenta hasta por un factor de dos, cuando e=-1; también se observa lo parecido de su comportamiento con el perfil central del campo magnético (fig.(10.9)), aunque no es simétrico como éste ultimo debido a la presencia de las componentes de velocidad en la expresión del término fuente, ver ec.(13.1).

En la figura (13.9) se ilustra el efecto de la variación de la intensidad de campo magnético sobre el perfil longitudinal de velocidades. El caso en que el campo magnético se anula, M=0, se discutió a principios de esta sección. La forma de los perfiles para M=1 es similar, presentando un máximo en la región de entrada, seguido por un mínimo local cerca de la región central y un crecimiento monótono a partir del mínimo. En el caso M=10, se presentan dos máximos locales situados antes y después del punto medio z'=4.8. La interpretación de este perfil es parecida a la que se presentó en la discusión de la figura (13.7), el fenómeno ocurre debido a que en las regiones de los máximos locales la fuerza magnética es más intensa cerca de las paredes del ducto; por lo tanto, se genera un mayor frenamiento cerca de las paredes y consecuentemenete un aumento de velocidad en el centro. (ver figura (13.10)). Este efecto de "estrangulamiento" del flujo es similar al que ocurre en una tobera y aunque está presente también en otros casos, su magnitud es pequeña y se requiere un campo magnético relativamente intenso para ponerlo claramente en evidencia. El comportamiento aquí descrito, es consecuencia no solo de una no uniformidad del campo, sino de la forma particular de su distribución en el espacio.

Con el fin de estudiar el efecto de estrangulamiento con mayor profundidad, se analizó el flujo con un número de Reynolds igual a la unidad y número de Hartmann diez; en este caso, el parámetro de interacción es de 10^2 y se espera que los efectos MHD se presenten de manera más notable.

En la figura (13.11) se presentan los perfiles longitudinales de la velocidad en la dirección axial para tres valores del factor de carga e=5,0 y -1. Como se puede observar, el efecto de los aumentos locales en la velocidad central es más notorio para el caso en que e=-1. Esto es consistente con los casos discutidos anteriormente. Empleando los resultados mostrados en la figura

(13.12) se puede deducir que la región de aumento de velocidad corresponde a $-.5 \leq x' \leq .55$, mientras que en el resto de la sección transversal, el fluido sufre un frenamiento.

En la figura (13.12) se aprecian los perfiles longitudinales de velocidad a varias alturas en el canal, desde el centro, $x'=0$, hasta cerca de la pared $x \cong 1$. De manera similar al caso $Re=10$; $M=3$; $e=.5$ ver fig.(13.3), se observa que correspondiendo al máximo y al mínimo del perfil central, corresponden respectivamente mínimos y máximos del perfil cercano a la pared, y esto sucede exactamente en las zonas que corresponden a una mayor no uniformidad del campo magnético aplicado. Cerca de las paredes, el campo magnético es mayor que en el centro, ver fig.(10.9), por consiguiente al ser mayor la fuerza de cuerpo electromagnética que se opone al flujo cerca de las paredes, se presenta un efecto de frenamiento en la pared con su correspondiente aceleración al centro por conservación de masa. Como se aprecia de la figura (13.12), el efecto de frenamiento produce un estrangulamiento semejante al que ocurre en una tobera. Este estrangulamiento sin lugar a dudas, es el resultado más importante de este trabajo, no se han encontrado referencias que mencionen este efecto.

DISCUSION Y CONCLUSIONES

En este trabajo se estudia un flujo magnetohidrodinámico bajo un campo magnético no uniforme, similar al que se obtendría usando los polos de un imán real. El modelo es bidimensional y en estado permanente.

Se presentan resultados de la distribución espacial del campo magnético, los efectos dinámicos del flujo en desarrollo y finalmente, la influencia del campo magnético no uniforme sobre el movimiento del fluido.

El flujo en desarrollo bajo un campo magnético uniforme fue analizado empleando un modelo parabólico y uno eliptico en la dirección axial. Los resultados de longitud de desarrollo obtenidos con el modelo parabólico se comparan favorablemente con los reportados en la literatura; mientras que, el modelo eliptico presenta longitudes de desarrollo consistentemente mayores. Esto ocurre bajo las mismas condiciones dinámicas y para la misma malla, indicando el importante papel que juega la difusión axial de cantidad de movimiento, al menos para números de Reynols pequeños ($Re \ll 10$). Aparentemente este efecto no ha sido estudiado con detenimiento en la literatura, donde se han empleado exclusivamente modelos parabólicos (en dirección axial).

Los efectos magnetohidrodinámicos se manifiestan más notablemente cuando el parámetro de interacción es grande ($\simeq 10^2$) y el factor de carga es -1. Bajo estas condiciones la fuerza de cuerpo electomagnética adquiere su valor más alto. Esto combinado con la particular distribución espacial del campo magnético da por resultado varios efectos, entre los cuales el más notable es el de "estrangulamiento" del flujo. Este fenómeno ocurre debido al tipo de no uniformidad estudiada, que es análoga a la que se presentaría bajo una situación real.

Aunque la magnitud relativa de los efectos estudiados es pequeña debido al intervalo de parámetros elegido, es de esperarse que bajo campos magnéticos más intensos o no uniformidades geométricas más severas, los fenómenos aquí descritos jueguen un papel determinante en la dinámica del flujo. En particular, el efecto de estrangulamiento o tobera podría dar lugar a fenómenos de recirculación que pondrián en duda el uso de un modelo bidimensional para el estudio de este fenómeno.

La extensión natural del presente estudio, sería el análisis de casos con números de Hartmann mayores. Esto es difícil usando el presente modelo debido a las capas límite que se forman en las regiones cercanas a las paredes. Posiblemente sería conveniente diseñar un modelo ad-hoc para este análisis. Otra rama de investigación sería extender el el estudio a flujos tridimensionales, en cuyo caso se requiere de una capacidad de cómputo mucho mayor a la empleada en este estudio. El relajamiento de la condición Rm=0 sería otra investigación que permitiría apegarse más a la realidad, sobre todo en los casos en que la velocidad (o número de Reynolds) sean altos; sin embargo, en estos problemas se debe considerar también la posibilidad de que el flujo se encuentre en régimen turbulento.

Ante el amplio panorama de estudio que se vislumbra, se espera que este trabajo sirva de apoyo para futuras investigaciones.

ANEXO A

FORMULACION DE HARTMANN

J. Hartmann en 1937 realizó los primeros estudios teóricos y experimentales reportados sobre el flujo de metales liquidos en presencia de campos magnéticos. A las ecuaciones gobernantes de un flujo magnetohidrodinámico obtenidas en la tercera sección, Hartmann añadió la serie de suposiciones que a continuación se detallarán, obteniendo un sistema de ecuaciones el cual pudo resolver analiticamente.

Hartmann supone un flujo completamente desarrollado en estado permanente, laminar, viscoso e isotérmico, de un fluido con las siguientes propiedades: incompresible, conductor de la electricidad y newtoniano. Este fluido circula entre dos placas paralelas infinitas no conductoras debido a un gradiente de presión constante en la dirección del flujo. Este sistema se encuentra en presencia de un campo magnético uniforme perpendicular a las placas. Ver fig.(A.1).

Se tiene entonces un problema unidimensional, donde todas las variables son función de la coordenada normal a los planos (x), exceptuando la presión que varía en la dirección del flujo (z).

Se consideran los siguientes campos:

$$v = (0,0,w) \qquad (A.1)$$

$$H = (H_x,0,H_z) \qquad (A.2)$$

Donde:

$H_x = H_o$ = campo magnetico constante aplicado.

$H_z = H_z(y)$ = campo magnético inducido

Una suposición adicional es el considerar un fluido con una conductividad eléctrica muy grande, $\sigma \to \infty$, la cual permite una formulación matemática simple [28], manifestándose en la sustitución de la densidad de corriente de la ecuación de Maxwell (3.5) y no de la ley de Ohm (3.8), ya que la suposición adicional haría tender $J \to \infty$ en la ley de Ohm, sabiendo que J es finita. De manera que sustituyendo el campo magnético (A.2) en la ec.(3.5), se obtiene la forma del campo de densidad de corriente, la cual es:

$$J = (0, J_y, 0) \tag{A.3}$$

Donde:

$$J_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \tag{A.4}$$

Sustituyendo los campos (A.1-3) en la ecuación de cantidad de movimiento (3.14), se observa que el término convectivo se anula, lo cual resulta de gran utilidad ya que se elimina así el término no lineal de la ecuación obtiéndose una ecuación diferencial ordinaria, de segundo orden, lineal y no homogénea:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu H_x \frac{\partial H_z}{\partial x} \tag{A.5}$$

La ecuación anterior se encuentra acoplada a la ecuación de transporte de campo magnético en estado permanente (3.13), la cual se obtiene de manera similar, sustituyendo en esta última los campos (A.1-3).

$$0 = \frac{1}{\sigma\mu}\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + H_x\frac{\partial w}{\partial x} \tag{A.6}$$

Integrándose con las siguientes condiciones de frontera:

Condición de no resbalamiento en las paredes.

$$w(a) = w(-a) = 0 \tag{A.7}$$

El campo magnético inducido se anula en las paredes.

$$H_z(a) = H_z(-a) = 0 \tag{A.8}$$

Como $H_x = H_o$ es el campo magnético uniforme aplicado y por lo tanto conocido, y el gradiente de presión es conocido y es constante. Desacoplando las ecuaciones (A.5 y A.6), e integrando para la componente de velocidad [36]:

$$w = w_o \frac{\cosh M - \cosh \frac{Mx}{a}}{\cosh M - 1} \qquad (A.9)$$

Donde:
M = numero de Hartmann

$$M = \mu H_o a \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} \qquad (4.4)$$

El perfil de velocidades así obtenido se le conoce como **perfil de Hartmann**, siendo el perfil laminar equivalente al de Poiseuille. Esto último se verifica al considerar un campo magnético aplicado nulo, M=0 en la ec.(A.9), ver fig.(A.1). Este perfil, a pesar de haber sido obtenido a través de grandes simplificaciones es de gran utilidad ya que permite verificar claramente los límites, y por otra parte, reproducir en gran medida la estructura característica de los flujos laminares en canales MHD, dando una información sobre la dinámica del flujo importante al considerar sistemas más complejos.

Posteriormente, una vez conocida la distribución de velocidades (A.9) se realiza la integración de la ecuación (A.6), resultando así [36]:

$$H_z = -w_o \sqrt{\sigma\eta} \; \frac{\frac{x}{a} \operatorname{senh} M - \operatorname{senh} \frac{Mx}{a}}{\cosh M - 1} \qquad (A.10)$$

Las distribuciones tanto de campo magnético inducido, como de velocidad, se ilustran en la figura (A.1).

NOMENCLATURA

a = longitud caracteristica, mitad de la distancia entre placas. (sec. 4)
b = termino fuente. (sec. 8)
c = velocidad de la luz. (sec. 9)
d = distancia entre placas. (sec. 10)
e = factor de campo electrico o factor de carga. (sec. 4)
$\mathbf{f}_L$ = densidad de fuerza de Lorentz. (sec. 2)
$\mathbf{f}_e$ = densidad de fuerza electromagnetica. (sec. 2)
f_i = densidad de fuerza electromagnetica en notacion indicial. (sec. 2)
g_i = densidad de momento electromagnetico, en notacion indicial. (sec. 2)
ℓ = distancia libre media. (sec. 2)
m = masa de la particula portadora de carga. (sec. 2)
$\dot{m}$ = tasa de creacion o destruccion de masa. (sec. 1)
n = densidad de portadores o numero de portadores de carga por unidad de volumen. (sec. 2)
$\mathbf{n}$ = vector de superficie unitario que define a la superficie de los polos. (sec. 10)
p = presion mecanica. (sec. 1)
$\mathbf{p}$ = momento. (sec. 2)
q = carga de un portador. (sec. 2)
$\mathbf{s}$ = vector normal al area con la magnitud de esta. (sec. 2)
t = coordenada temporal. (sec. 1)
$\mathbf{v} = (u,v,w)$ = velocidad del fluido. (sec. 1)
$\mathbf{v}' = (u',v',w')$ = correcciones al campo de velocidades. (sec. 8)
$\mathbf{v}^* = (u^*, v^*, w^*)$ = campo de velocidades supuesto. (sec. 8)
υ = velocidad aleatoria promedio de los portadores. (sec. 2)
$\mathbf{v}_d$ = velocidad de arrastre promedio. (sec. 2)
w_o = velocidad de entrada de un flujo uniforme en la direccion z. (sec. 11)
$\mathbf{x}' = (x',y',z')$ = coordenadas adimensionales. (sec. 4)

A_i = area de la cara i del volumen de control, i=v,t,h,e. (sec. 6)
$\mathbf{B} = (B_x,B_y,B_z)$ = induccion magnetica. (sec. 2)
$\mathbb{C}$ = termino convectivo integrado sobre el volumen de control (VC). (sec. 7)
$\mathbb{D}$ = termino difusivo integrado sobre el VC. (sec. 7)
$\mathbf{D} = (D_x,D_y,D_z)$ = desplazamiento electrico y sus componentes. (sec. 2)
$\mathbf{E} = (E_x,E_y,E_z)$ = campo electrico. (sec. 2)

E_{ym} = campo electrico inducido maximo en la direccion y. (sec. 4)

F_E = fuerza electrica o de Coulomb. (sec. 2)

F_L = fuerza de Lorentz. (sec. 2)

F = frecuencia electromagnetica caracteristica. (sec. 3)

F_i = flujo convectivo por unidad de area a traves de la cara i del VC. (sec. 7)

$\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$ = campo magnetico. (sec. 2)

H_o = campo magnetico caracteristico. (sec. 4)

$\mathbf{H}' = (H'_x, H'_y, H'_z)$ = campo magnetico adimensional. (sec. 4)

$\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ = corriente electrica por unidad de area o densidad de corriente. (sec. 2)

L_d = longitud de desarrollo. (sec. 12)

L_d^* = longitud de desarrollo adimensionalizada. (sec. 12)

M = magnetizacion. (sec. 10)

M = numero de Hartmann. (sec. 4)

N = parametro de interaccion. (sec. 4)

Re = numero de Reynolds. (sec. 4)

Rm = numero de Reynolds magnetico. (sec. 4)

F_i = flujo convectivo por unidad de area a traves de la cara i del VC. (sec. 7)

$\mathbb{P}$ = integral del gradiente de presiones. (sec. 8)

Q = cantidad de carga. (sec. 2)

S_ϕ = suma de fuentes o sumideros de la variable dependiente. (sec. 1)

S_C, S_P = coeficientes que expresan la ordenada al origen y la pendiente del termino fuente linealizado. (sec. 6)

$\overline{S_\phi}$ = valor promedio del termino fuente en el interior del VC. (sec. 7)

$\mathcal{S}$ = termino fuente integrado sobre el VC. (sec. 7)

$\mathbb{T}$ = tensor de esfuerzos mecanicos. (sec. 1)

T_{ik} = tensor de esfuerzos electromagneticos de Maxwell. (sec. 2)

W = velocidad caracteristica. (sec. 4)

CARACTERES GRIEGOS

δ_{ij} = delta de Kroenecker. (sec. 1)

ε = permitividad electrica de un medio. (sec. 2)

ε_o = permitividad electrica del vacio. (sec. 2)

ϕ = variable dependiente o propiedad fisica. (sec. 1)

ϕ_P = valor de ϕ en el nodo correspondiente. (sec. 7)

ϕ_M = potencial magnetico. (sec. 10)

ν = factor relativista de velocidades. (sec. 2)

λ = segundo coeficiente viscoso. (sec. 1)

μ = permeabilidad magnetica de un medio. (sec. 2)

μ_o = permeabilidad magnetica del vacio. (sec. 2)

η = viscosidad dinamica. (sec. 1)

ρ = densidad de masa del fluido. (sec. 1)

ρ_e = densidad de carga o cantidad de carga por unidad de volumen. (sec.

σ_{ij} = tensor de esfuerzos expresado en notacion indicial. (sec. 1)

σ = conductividad electrica. (sec. 2)

$\Delta\tau$ = tiempo promedio. (sec. 2)

Γ_ϕ = coeficiente apropiado de intercambio de ϕ. (sec. 1)

θ = angulo formado por el vector magnetizacion (M) y el vector unitario normal. (sec. 10)

BIBLIOGRAFIA

[1] BATCHELOR, G.K. "On the spontaneous magnetic field in a conducting liquid in turbulent motion" *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A 201** (1950)

[2] BATCHELOR, G.K. An Introduction to Fluid Dynamics *Cambridge Univ. Press*, Cambridge (1967)

[3] BLEANEY, B.I.; BLEANEY, B. Electricity and Magnetism *Oxford Univ. Press*, Oxford (1978)

[4] BODOIA, J.R.; OSTERLE, J.F. "Finite difference analysis of plane Poiseuille and Couestte Flow developments" *Appl. Sci. Res.* **A10**, 265-276 (1961)

[5] BRANDT, A. and J. GILLIS. "Magnetohydrodynamics flow in the inlet region of a straight channel" *Phys. Fluids*, *9*, 690-699 (1966).

[6] BRANOVER, HERMANN. Magnetohydrodynamic Flow in Ducts *Halsted Press*, New York (1978)

[7] BRANOVER, H.; YAKHOT, A. editores. MHD Flows and Turbulence *Proc. 2nd Bat-Sheva International Seminar, Israel U.P.* (1980)

[8] BRANOVER, H.; CLAESSON, S. "Magnetohydrodynamic systems for converting solar energy into electricity" *Chemica Scripta* **19** 209-223 (1982).

[9] BRANOVER, H.; MOND, M.; PIERSON, E.; WALKER, J. "Magnetohydrodynamic Flows and Turbulence: a report on the Fourth Beer-Sheva Seminar" *J. Fluid Mech.* **148**, 461-476 (1984)

[10] BRANOVER, H.; LYKOUDYS, P.; MOND, M. editores. Single and Multiphase Flows in an Electromagnetic Field *Progress in Astronautics and Aeronautics Series* **100** (1985)

[11] BRANOVER, H.; MOFFATT, H.K.; MOND, M.; PIERSON, E.S.; SULEM, P.S.; YAKHOT, A. editores. "Magnetohydrodynamic Flow and Turbulence: a report on the Fifth Beer-Sheva Seminar" *J. Fluid Mech.* **188**, 87-106 (1988)

[12] CASTREJON, A. Unsteady free-convection heat transfer inside an annular cavity *Ph.D. Thesis, University of London* (1984)

[13] CHEN, T.S.; CHEN, G.L. "Magnetohydrodynamic channel flow with an arbitrary inlet profile" *Phys. Fluids*, 15, 1531-1534 (1972)

[14] CHIANG D.; y LUNDGREN, T. "Magnetohydrodynamic flow in a rectangular duct with perfectly conducting electrodes" *Appl. Sci. Res. B*, **10**, 329-343 (1963).

[15] CURRIE, I.G. Fundamental Mechanics of Fluids *McGraw-Hill*, New York (1974)

[16] D'ARCY, GERALD P.; SCHMIDT, P.S. "Magnetohydrodynamic entry flow for a plane channel in an axial magnetic field" *J. Fluid. Mech.* **80**,part 2, 209-221 (1977)

[17] DRAGOŞ, L. Magnetofluid Dynamics *Abacus Press, Eng.* (1975)

[18] FARADAY, M. Invéstigaciones Experimentales en Electricidad *EUDEBA*, Buenos Aires (1971)

[19] GHERSON, P.; LYKOUDIS, P.S.; LYNCH, R.E. "Analytical Study of end Effects in Liquid Metal MHD Generators" *Seventh International Conference on MHD, Electrical Power Generator*, Massachusetts, Cambridge (1980).

[20] GRINBERG, G.A. "On steady flow of a conducting fluid in a rectangular tube with two non conducting walls, and two conducting ones parallel to an external magnetic field" *P.M.M.* 25(6), 1024-1034 (1961)
[21] HALL, F.S.; LUDFORD, G.S.; WALKER, J.S. "Hartmann layers in slowly solidifying liquids" en H. BRANOVER ed. Single and multiphase flows in an electromagnetic field. Energy, metallurgical and solar applications *Progress in Astronautics and Aeronautics Series* 100 (1985)
[22] HAYS, P.R.; WALKER, J.S. "Liquid metal MHD open channel flows" *J. Appl. Mech.* 51, 13-18 (1984)
[23] HSIA, E.S. "Entrance development of a weakly interacted MHD plane channel flow as affected by wall conductances" *ASME J. Appl. Mech.*, 38, 665-673 (1977)
[24] HOLROYD, R.J.; WALKER, J.S. "A theoretical study of the effects of wall conductivity, non-uniform magnetic fields and variable-area ducts on liquid-metal flows at high Hartmann number" *J Fluid Mech.* 84, 471-495 (1978)
[25] HOLROYD, R.J. "MHD flow in a rectagular duct with pairs of conducting and non-conducting walls in the presence of a on-uniform magnetic field" *J. Fluid Mech. 96*, 335-353 (1980)
[26] HOLROYD, R.J. "An experimental study of the effects of wall conductivity, non-uniform magnetic fields and variable-area ducts on liquid-metal flows at high Hartmann number. Part 1. Ducts with non-conducting walls" *J. Fluid Mech.* 93, 609-630 (1979)
[27] HOLROYD, R.J. "An experimental study of the effects of wall conductivity, non-uniform magnetic fields and variable-area ducts on liquid-metal flows at high Hartmann number. Part 2. Ducts with conducting walls" *J. Fluid Mech. 96*, 355-374 (1980)
[28] HUGHES, W.F.; F.J. YOUNG. The Electromagnetodynamics of Fluids *John Wiley & Sons* (1966)
[29] HUNT J.C.R. "MHD flow in rectangular ducts" *J. Fluid Mech.* 21(4), 577-590 (1965)
[30] HUNT, J.C.R.; STEWARTSON, K. "MHD flow in rectangular ducts. II" *J. Fluid Mech.* 23(3), 563-581 (1965)
[31] HWANG, C.C. "Linearized analysis of MHD channel entrance flow" *Phys. Fluids*, 15, 1852-1854 (1972)
[32] HWANG, C.L.; FAN, L.T. "A finite difference analysis of laminar MHD flow in the entrance region of a flat rectangular duct." *Appl. Sci. Res.* B 10, 329-343 (1963)
[33] JACKSON, J.B. Classical Electrodynamics *Kohn Wiley*, New York (1962)
[34] KIRILLIN, V.A.; SHEYNDLIN, A.E. editores. MHD Energy Conversion: Physiothechnical Problems *Progress in Astronautics and Aeronautics Series* 101 (1983)
[35] KITTEL, C. Introduccion a la Fisica del Estado Solido *Reverte*, Barcelona (1976)
[36] LANDAU, L.; LIFSHITZ, E.M. Electrodynamics of Continous Media *Pergamon Press*, New York (1984)
[37] MAEDA, T.; y MURATA, H. "A survey note on magnetic field analysis by PHOENICS" *Proc. 2nd. Int. PHOENICS User Conf.* London (1987)

[38] MAIELLARO, M.; DE MITRI, M., "A note on non linear stability of the Poiseuille flows in anisotropic MHD" *Meccanica*, 22, 35-37 (1987).
[39] MANZINI, F.; CASTREJON, A.; LOPEZ, M.; RAMOS, E. "2D model of a LMMHD generator" *V Beer-Sheva International Seminar on MHD Flows and Turbulence*, Jerusalem, Israel, Mar (1987)
[40] McMICHAEL, J.M.; DEUTSCH, S. "Magnetohydrodynamic pipe flow in nonuniform, axisymmetric fields" *Phys. Fluids*, 22(11), 2087-2097, Nov (1979)
[41] MITTAL, M.; NATARAJA , H.; NAIDU, V. "Fluid flow and heat transfer in the duct of an MHD power generator" *Int. J. Heat Mass Transfer*. 30(3), 527-535 (1987)
[42] NAMIKAMA, T.; HAMABATA, T. "Exact solutions of Magnetohydrodynamic equation for fluids in a circular magnetic field." *Phys. Fluids*, 31(4), Abr (1988)
[43] PATANKAR, S.V.; SPALDING, D.B. "A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three dimensional parabolic flows" *Int. J. Heat Mass Trans*. 15 (1972)
[44] PATANKAR, S.V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow *McGraw-Hill*, New York (1980)
[45] PETRYKOWSKI, J.C.; WALKER, J.S. "Liquid-metal flow in a rectangular duct with a strong non-uniform magnetic field" *J. Fluid Mech*. 139, 309-324 (1984)
[46] PURCELL, E.M. Electricity and Magnetismo *McGraw-Hill*, New York (1965)
[47] QIANG, S.W.; GU, G.Q. "Magnetohydrodynamic pipe flow in a duct with sector cross section" *J. Phys. A: Math. Gen.* 20, 1087-1096 (1987)
[48] RAMOS, J.; Y WINOWICH, N. "Magnetohydrodinamic channel flow study" *Phys. Fluids* 29(4), 992-996 (1986)
[49] RAJARAM, S.; YU, C.P. "Development of MHD flow in a parallel-plate channel in an inclined field" *J. Fluids Eng*. 105, 71-75, Mar (1983)
[50] ROIDT, M.; CESS, R.D. "An aproximate analysis of laminar MHD flow in the entrance region of a flat duct" *J. Appl. Mech*. 171-176, mar (1962)
[51] SHAH, R.K.; LONDON, A.L. Laminar Flow Forced Convection in Ducts *Academic Press* (1978)
[52] SHERCLIFF, J. The theory of electromagnetic flow-measurement *Cambridge Univ. Press* (1962)
[53] SHERCLIFF, J. A Textbook of Magnetohydrodynamics *Pergamonn Press*, N.Y. (1965).
[54] SHERCLIFF, J.A. "Thermoelectric magnetohydrodynamics" *J. Fluid Mech*. 91, part 2, 231-251 (1979)
[55] SHOHET, J.L.; OSTERLE, J.F.; YOUNG, F.J. "Velocity and temperature profiles for laminar MHD flow in the entrance region of a plane channel." *Phys. Fluids* 5(5), 545-549, May (1962)
[56] SING, B; LAL, J. "Finite element method in magnetohydrodynamic chanel flow problem " *John Wiley and Sons*, 1982.
[57] SPALDING, D.B. "A novel finite-difference formulation for diferential equations involving first and second derivatives" *Int. J. Num. Mech. in Eng*. 4 (1972)

[58] SPALDING, D.B. "A general purpose computer program for multi-dimensional one and two-phase flows" Mathematics and Computers in Simulation *North-Holland Press*, XXIII (1981)
[59] SUTTON, G.; HURWITZ, H.; y PORITSKY, H. "Electrical and pressure lusses in a magnetohydrodynamic channel due to end current loops" *Trans. Am. Inst. Elec. Enginrs. comunications and electronics*, 687-695 (1962)
[60] SUTTON, G.W.; SHERMAN, A. Engineering Magnetohydrodynamics *Mcgraw-Hill*, New York (1965)
[61] TALMAGE, G.; WALKER J. "Three dimensional laminar MHD flow in ducts with thin metal walls and strong magnetic fields" V *Beer-Sheva Seminar on MHD flows and Turbulence*, Israel, March (1987)
[62] UGRIW-SPARAC, D. "Design of Large Permanent Magnets with Rotationally Symmetrical Poles" *ZAMP*, Yugoslavia, XII, 38-53, (1961)
[63] WALKER, J.; LUDFORD. G.; y HUNT, J. "Three-dimensional MHD duct flows with strong transverse magnetic fields. Part 3, variable-area rectangular ducts with insulating walls" *J. Fluid Mech.* 56(1), 121-141 (1972)
[64] WALKER, J.; LUDFORD. G.; y HUNT, J. "Three-dimensional MHD duct flows with strong transverse magnetic fields. Part 4, Fully insulated, variable-area rectangular ducts with small divergences" *J. Fluid Mech.* 56(3), 481-496 (1972)
[65] WALKER, J.; BUCKMASTER, J.D. "Ferrohydrodynamic thrust bearings" *Int. J. Engng. Sci.* 17, 1171-1182 (1979)
[66] WALKER, J.S. "Large interaction parameter magnetohydrodynamics and applications in fusion reactor technology" *Proc. SIMS conf. Fluid Mech. Ener. Conv.* (1979)
[67] WALKER, J.S. "Magnetohydrodynamic flows in rectangular ducts with thin conducting walls. Part I" *J. de Mecanique*, 20(1), 79-112 (1981)
[68] WALKER, J.S. "Three dimensional laminar MHD flows in rectangular ducts with non-conducting walls and strong transverse nonuniform magnetic fields" *from* Liquid metal flows and magnetohydrodynamics H. Branover ed. *Progress in Astronautics and Aeronautics*, 84, (1983)
[69] WALKER, J.S. "Laminar duct flows in strong magnetic fields" in Single and multiphase flows in an electromagnetic field. Energy, metallurgical and solar applications H. Branover Ed. *Progress in Astronautics and Aeronautics Series* 100 (1985)
[70] WALKER, J.S.; PETRYKOWSKI, J.C. "Approximate side layer solutions for a liquid metal flow in a rectangular duct with a strong nonuniform magnetic field" in H. BRANOVER ed. Single and multiphase flows in an electromagnetic field. Energy, metallurgical and solar applications *Progress in Astronautics and Aeronautics Series* 100 (1985)
[71] WALKER, J.S. "Liquid-metal flow in a thin conducting pipe near the end region of uniform magnetic field" *J. Fluid Mech.* 167, 199-217 (1986)
[72] WALKER, J.S. "Liquid-metal flow through a thin walled elbow in a plane perpendicular to a uniform magnetic field" *Int. J. Engng. Sci.* 24(11), 1741-1754 (1986)
[73] WALKER, J.R. Liquid metal flow in a rectangular duct with a non-uniform magnetic field" *J. Theo. Appl. Mech.* 5(6), 827-851 (1986)

[74] WALKER, J.S. "Liquid-metal MHD flow in a duct whose cross section changes from a rectangle to a trapezoid" *Int. J. Engng. Sci.* 25(3), 351-371 (1987)
[75] WHITE, F. Viscous Fluid Flow *McGraw-Hill*, New York (1974)
[76] WOMACK, G.J MHD-Power Generation: Engineering Aspects *Chapman and Hall*, Londres (1969)
[77] WU, S.T.; FU, T.S.; WEAR, M.B."Development of MHD flow in the entrance region of a channel" *Revue de Physique Appliquee*, 6, 409-414 (1971)
[78] YAGAWA, G.; MASUDA, M. "Finite element analysis of magnetohydrodynamics and its application to lithium blanket design of a fusion reactor" *Nuclear Engineering and Design* 71, 121-136, (1982)

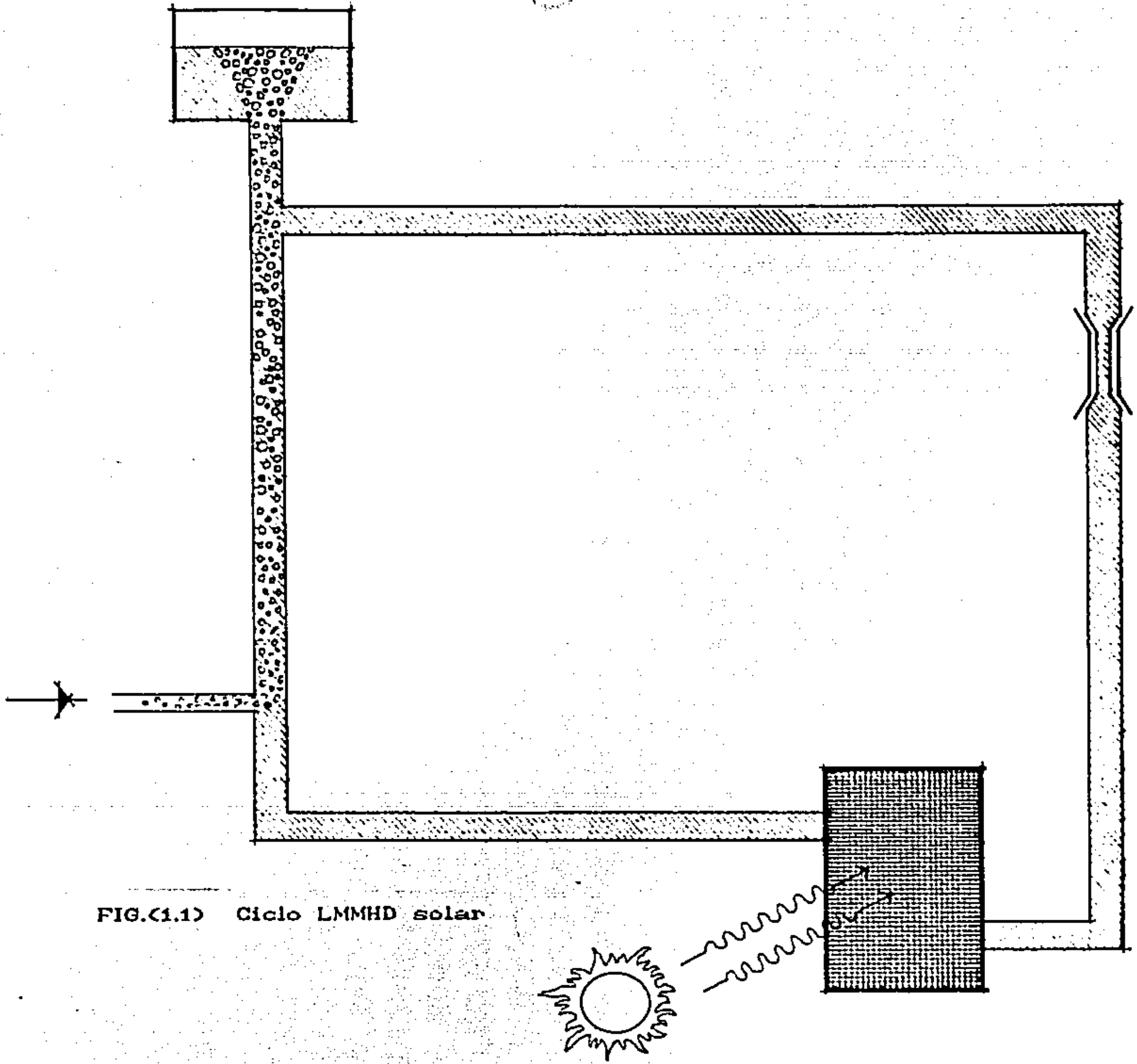


FIG.(1.1)   Ciclo LMMHD solar

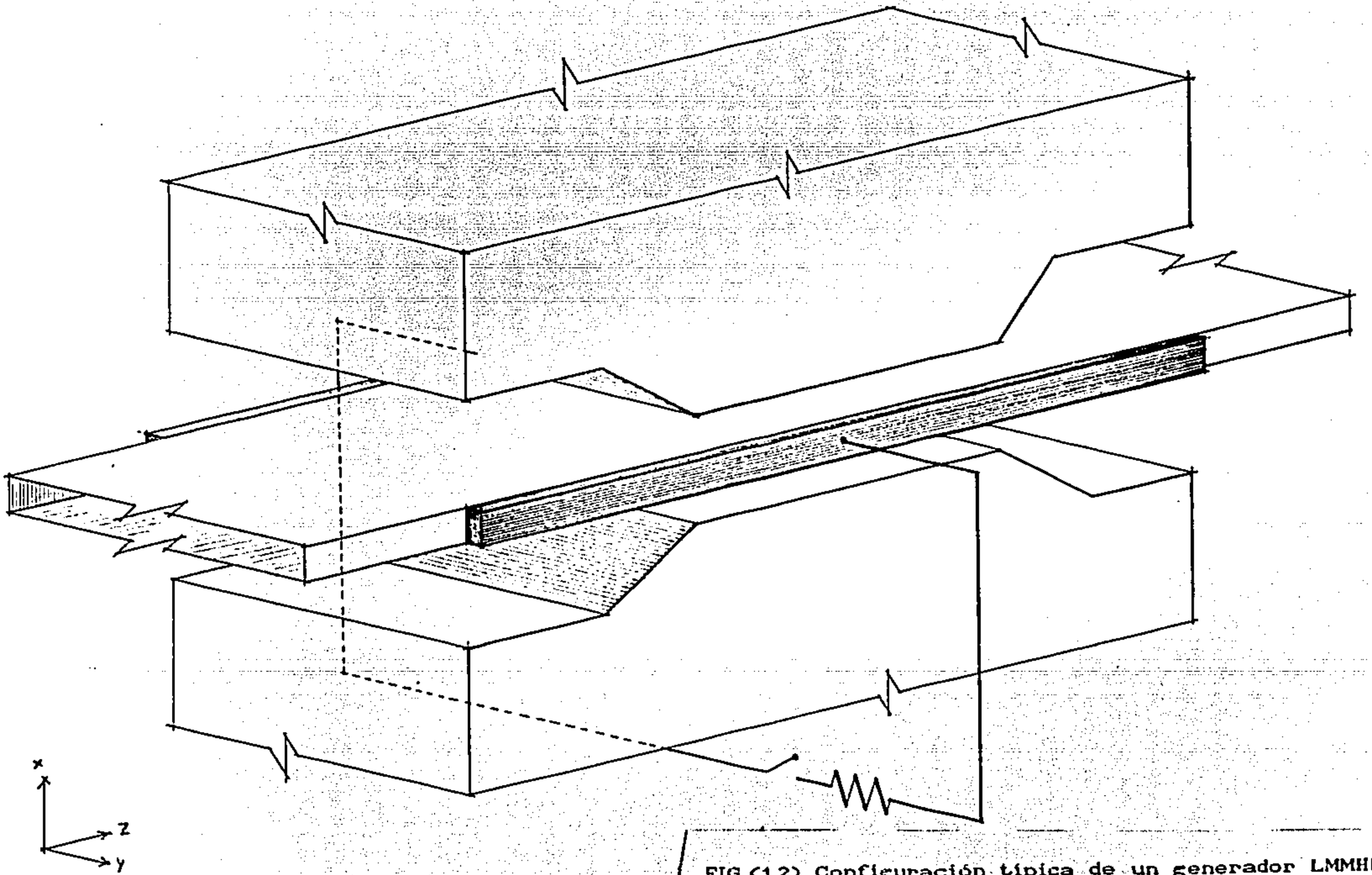


FIG.(1.2) Configuración típica de un generador LMMHD.

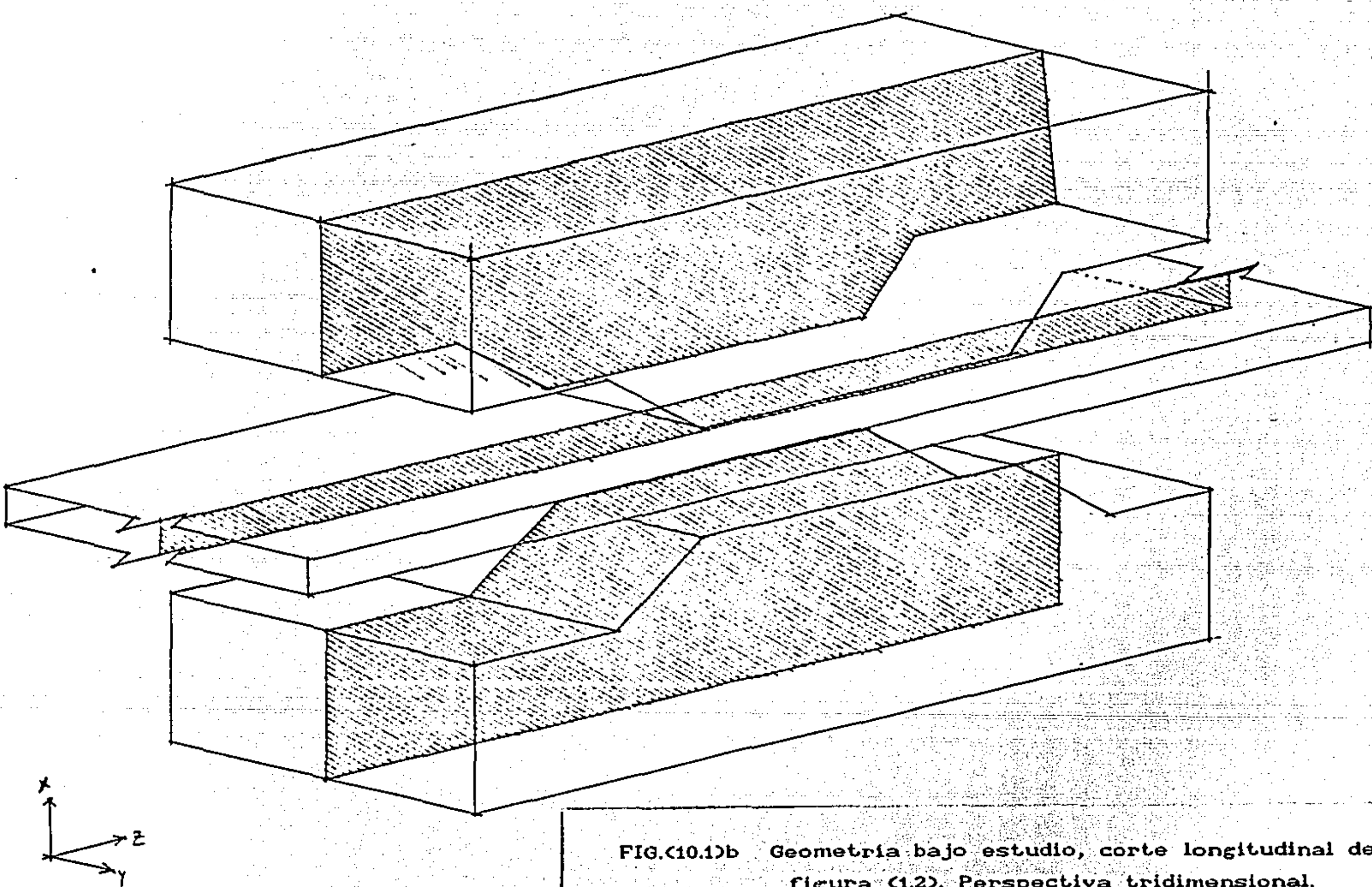


FIG.(10.1)b Geometría bajo estudio, corte longitudinal de la figura (1.2). Perspectiva tridimensional.

MALLA UTILIZADA (51X80)

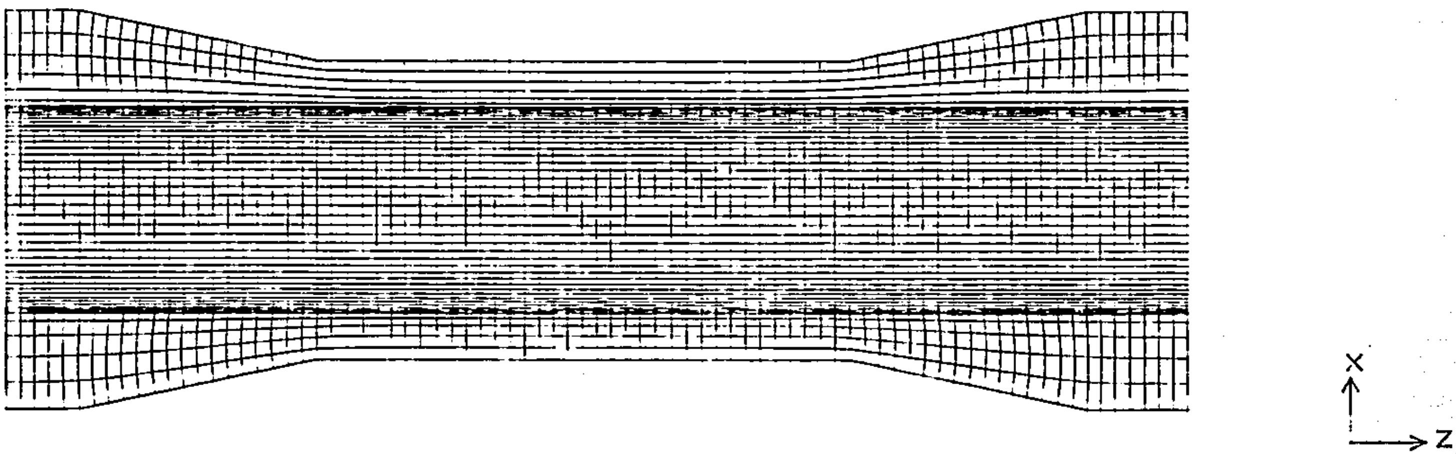


FIG.(10.5) Malla utilizada

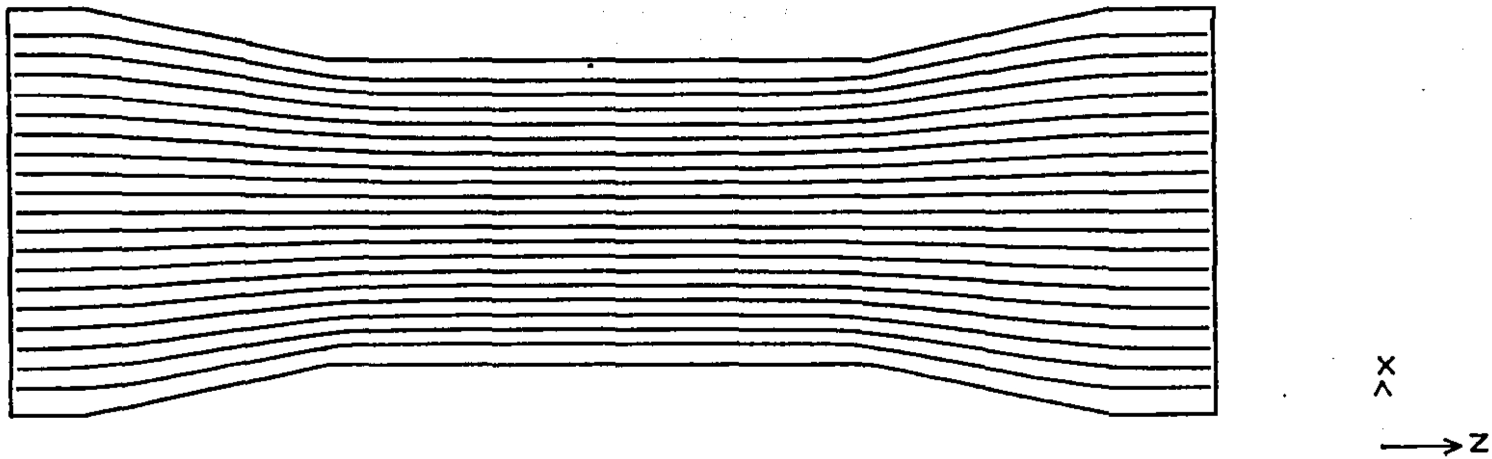


FIG.(10.7) Lineas equipotenciales magneticas.

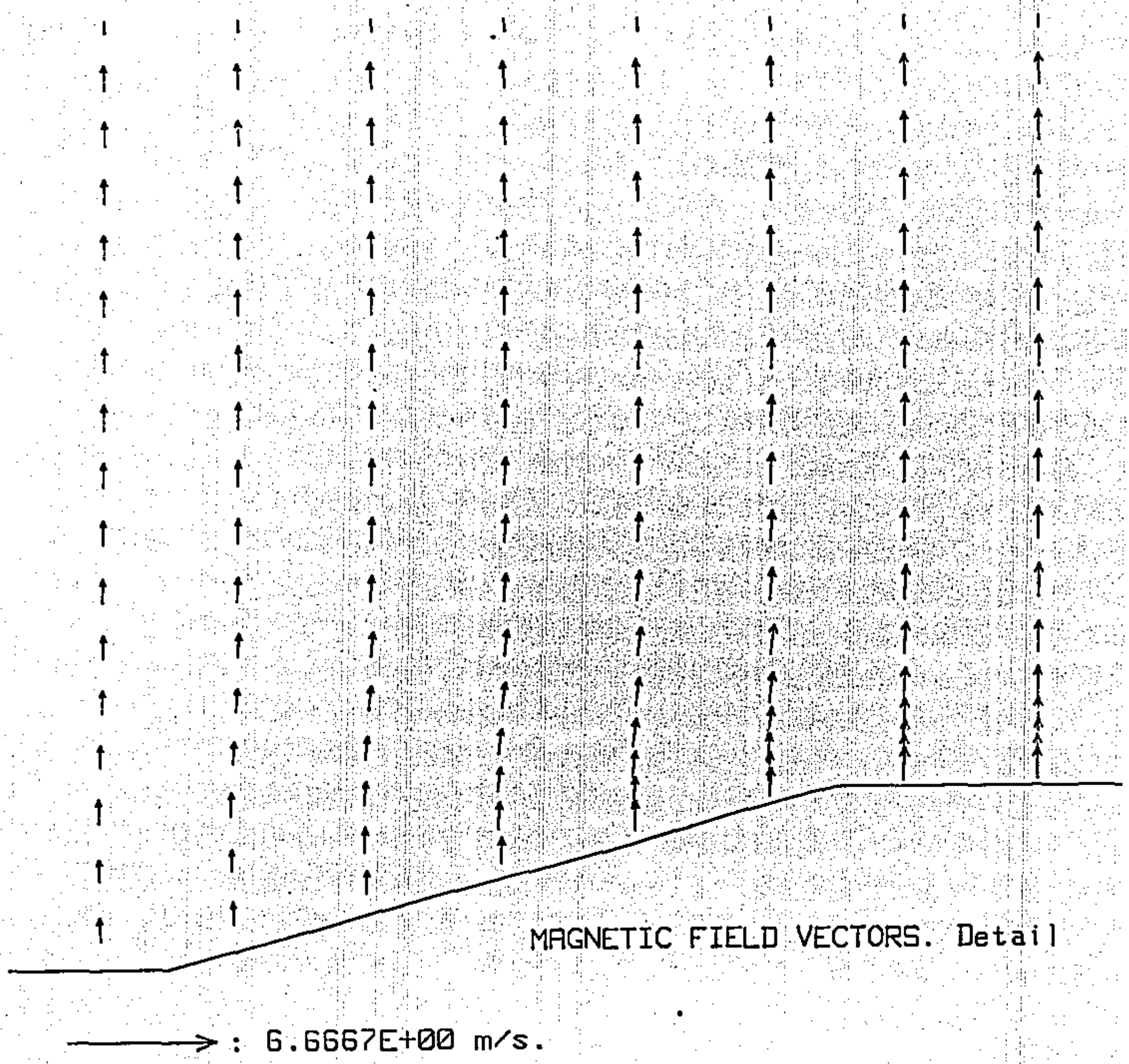


FIG.(10.8) Vectores del campo magnético aplicado (detalle).

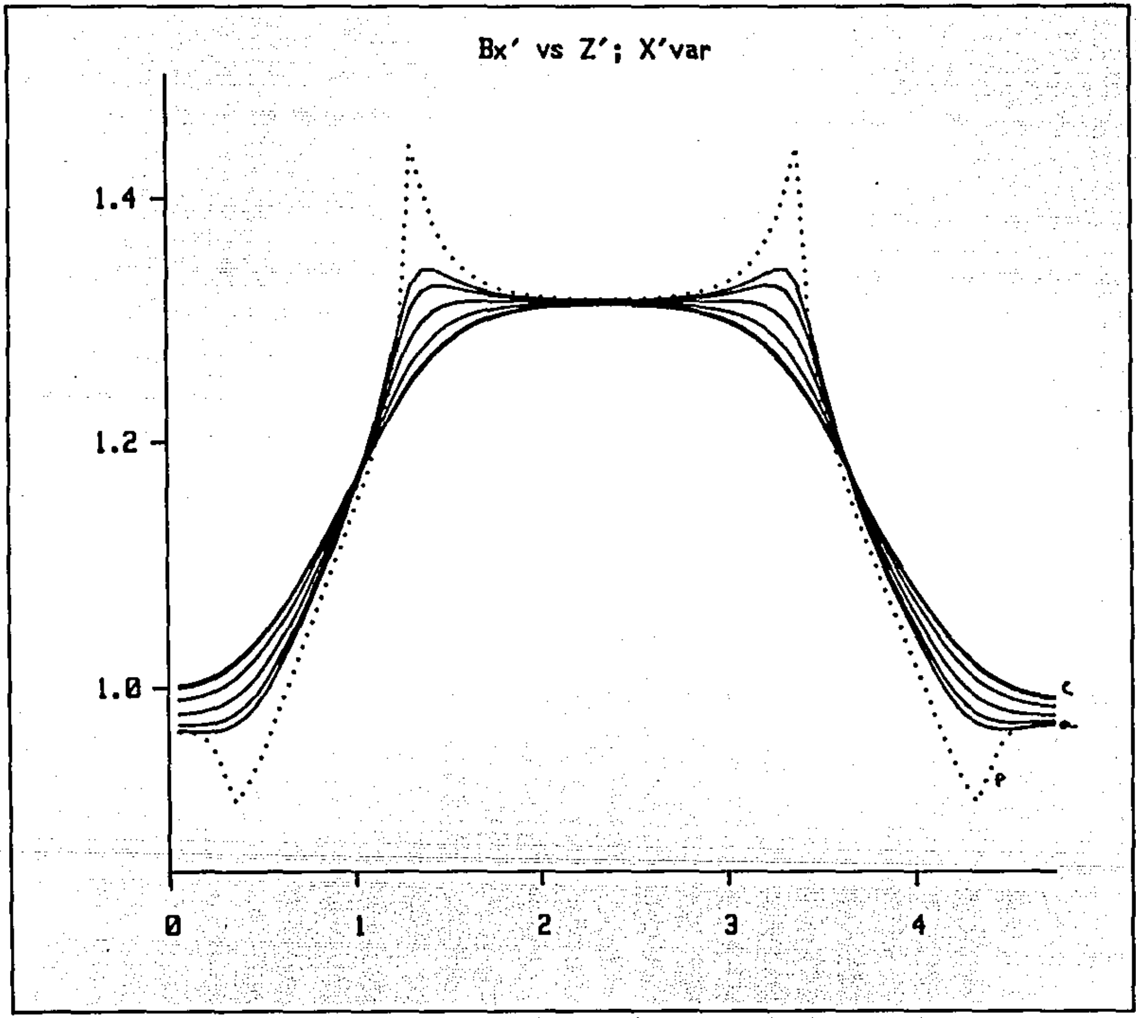


FIG.(10.9) B_x Componente en la direccion x del campo magnético aplicado.

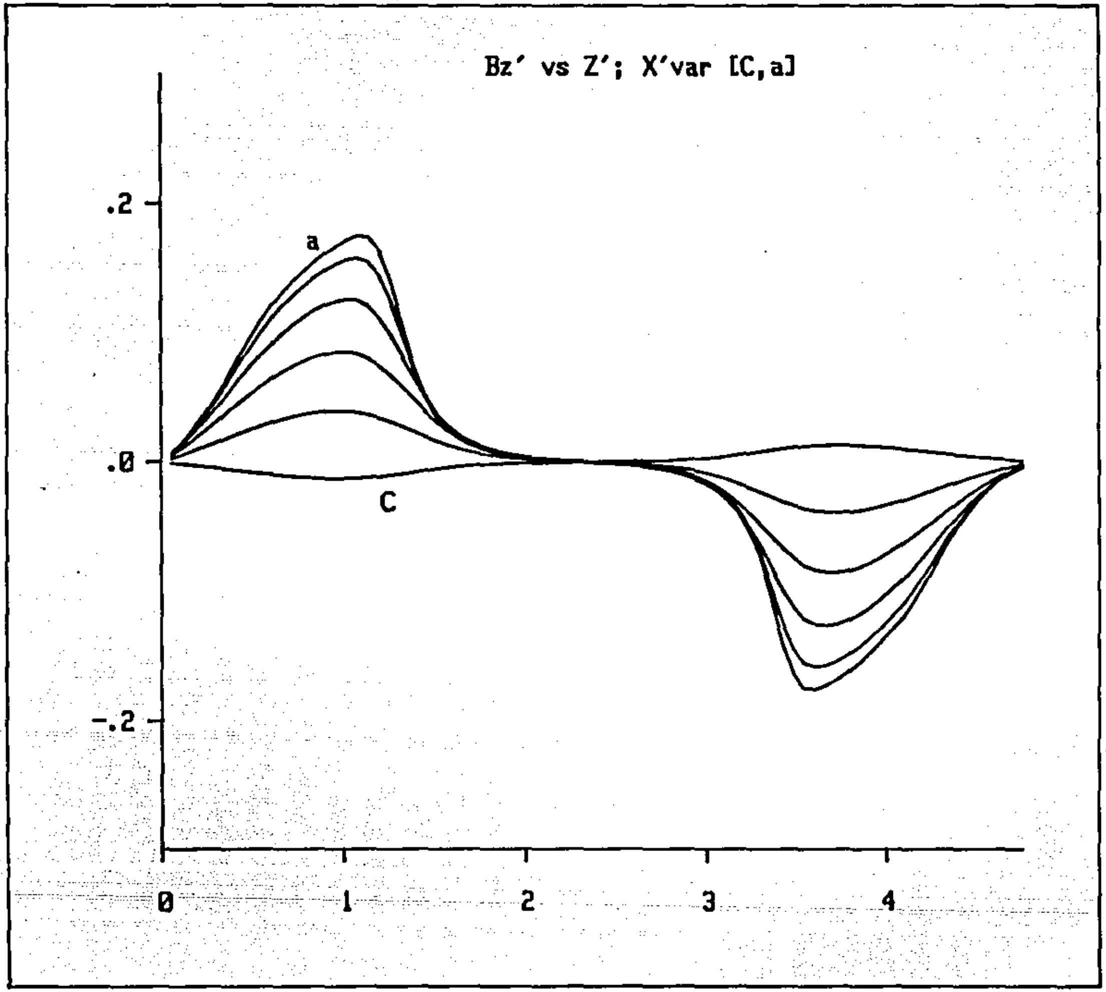


FIG.(10.10) B_z Componente en la direccion z del campo magnético aplicado. $0 \leq x' \leq a$

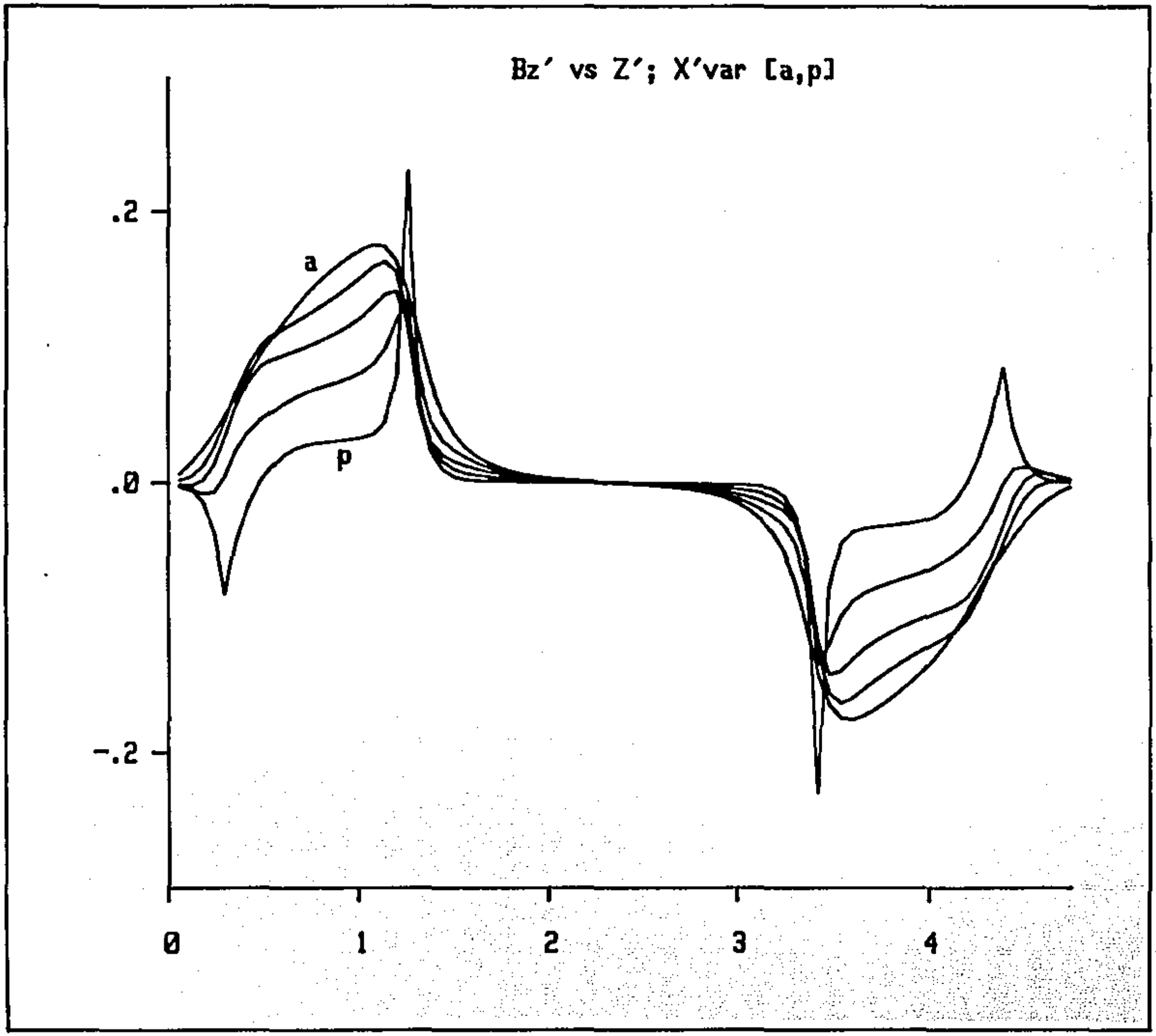


FIG.(10.11) B_z Componente en la direccion z del campo magnetico aplicado. $a \leq x'_i \leq p$.

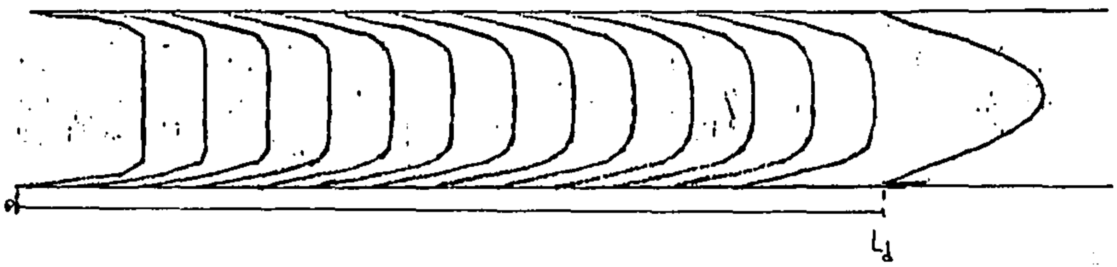


FIG.(12.1) Flujo laminar hidrodinamico en desarrollo.

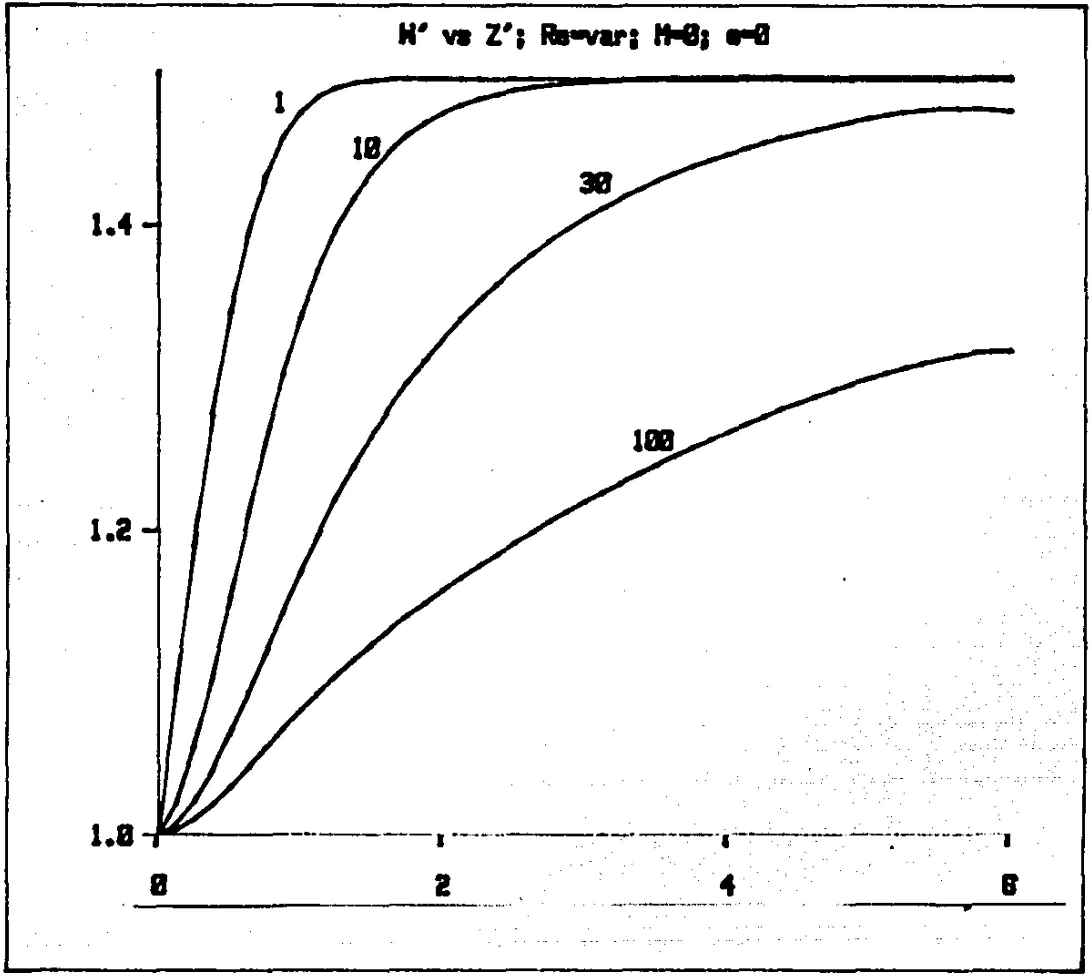


FIG.(12.2) Efecto del numero de Reynolds sobre el perfil en desarrollo. Velocidad en el punto central entre las placas como función de la distancia axial.

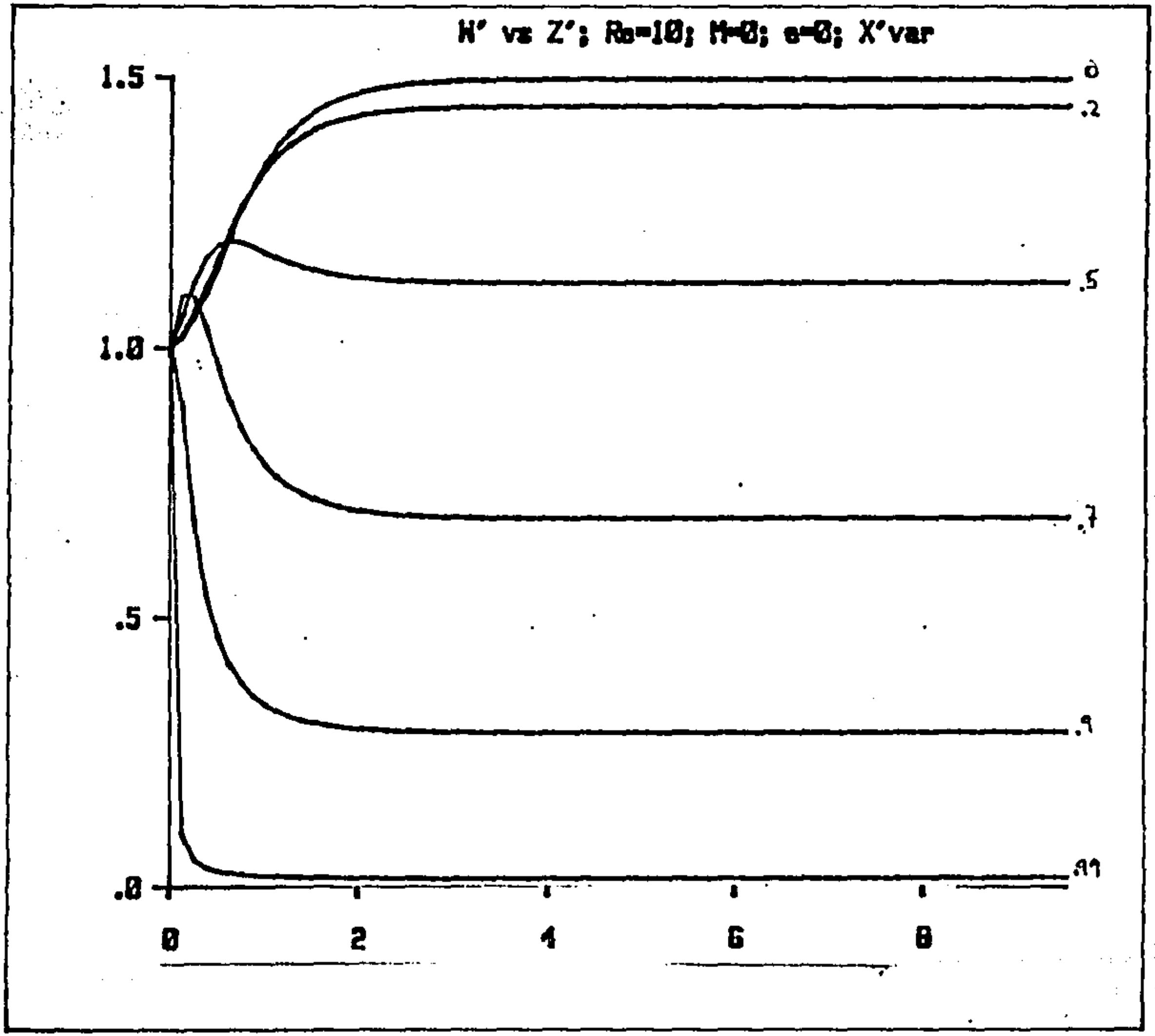


FIG.(12.3) Perfil longitudinal de velocidades para el caso hidrodinámico. Para x'=0,.2, .5, .7, .9 y .99

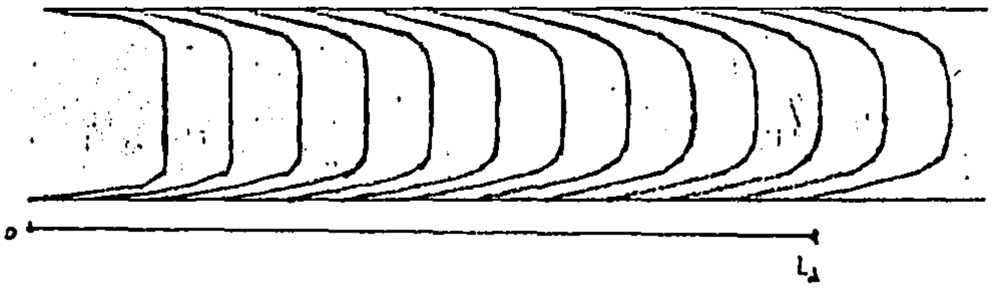


FIG.(12.4) Flujo laminar magnetohidrodinamico en desarrollo.

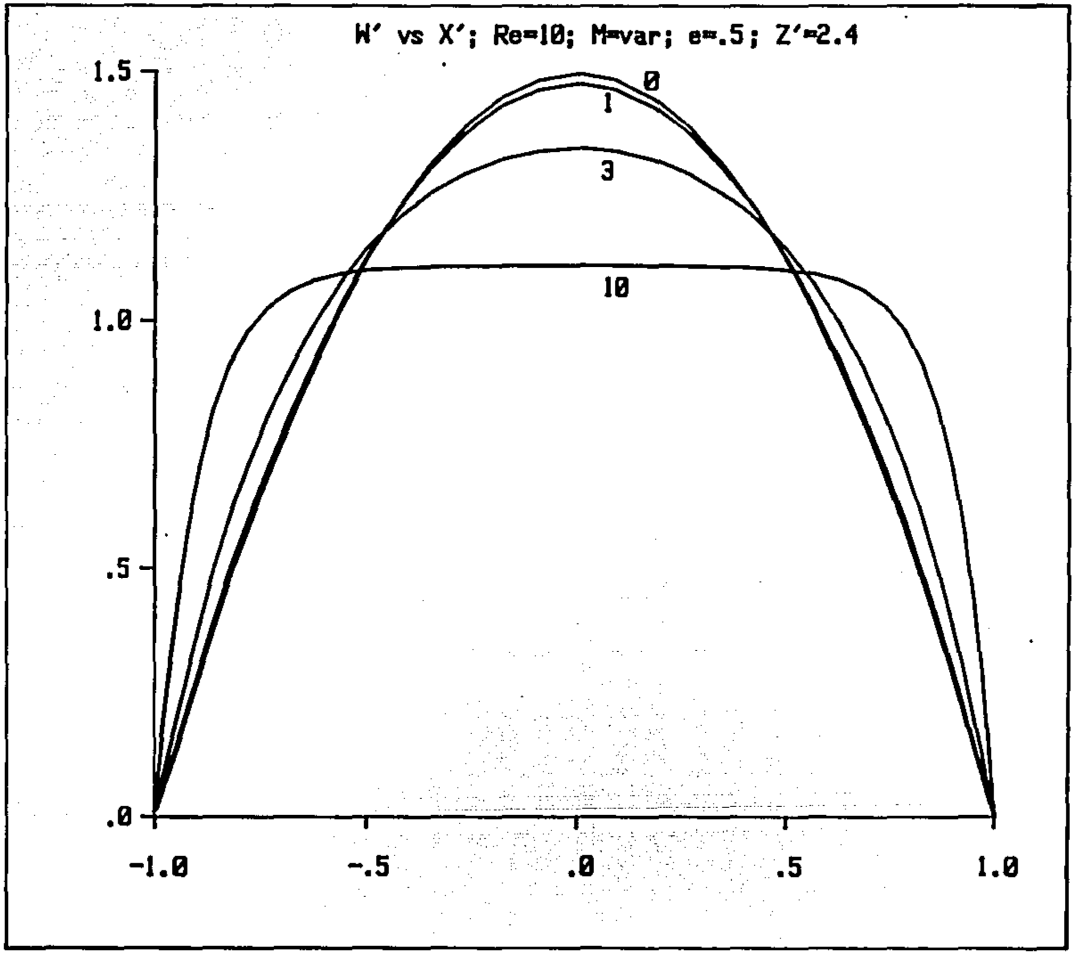


FIG.(12.5) Efecto de la variación del número de Hartmann sobre el perfil transversal de velocidades. En régimen de circuito abierto e=1 y un Re=10.

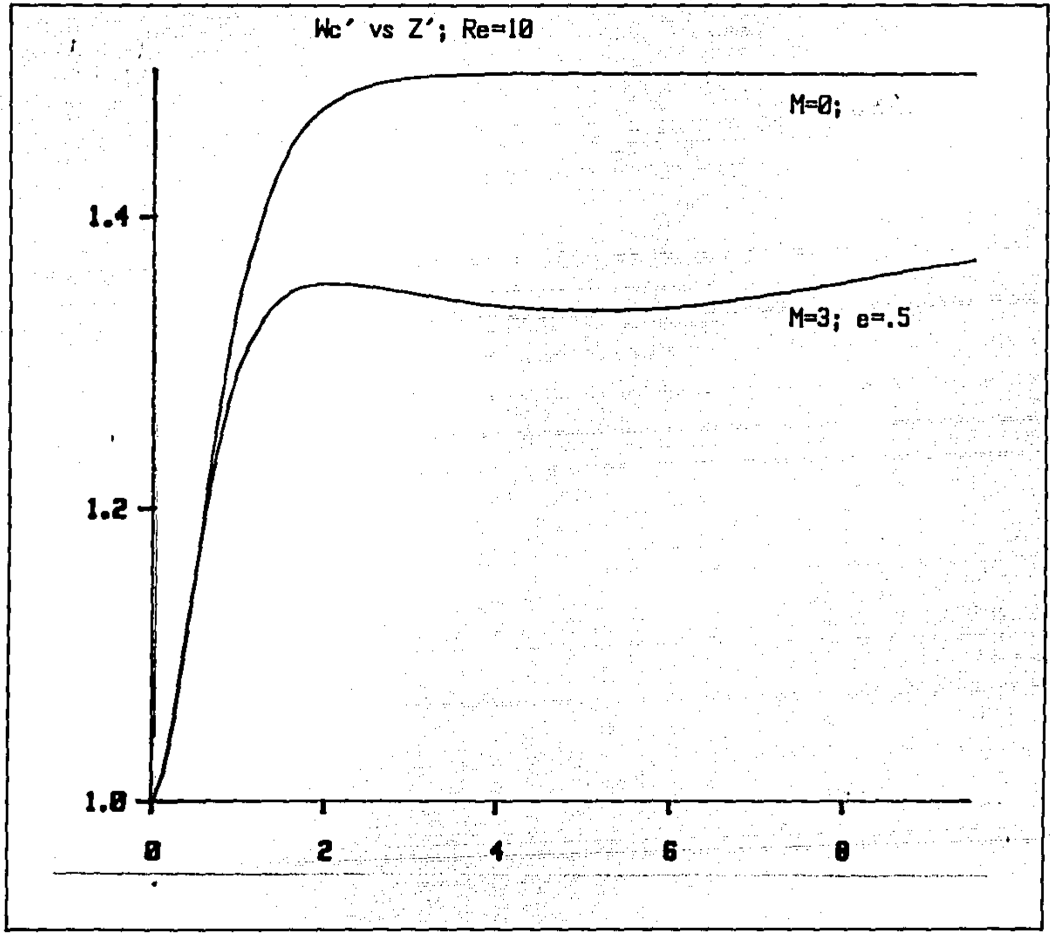


FIG.(13.1) Perfiles de velocidades central como función de z′, para los casos hidrodinamico puro (M=0) y el caso M=3, e=.5, cuando Re=10 para ambos.

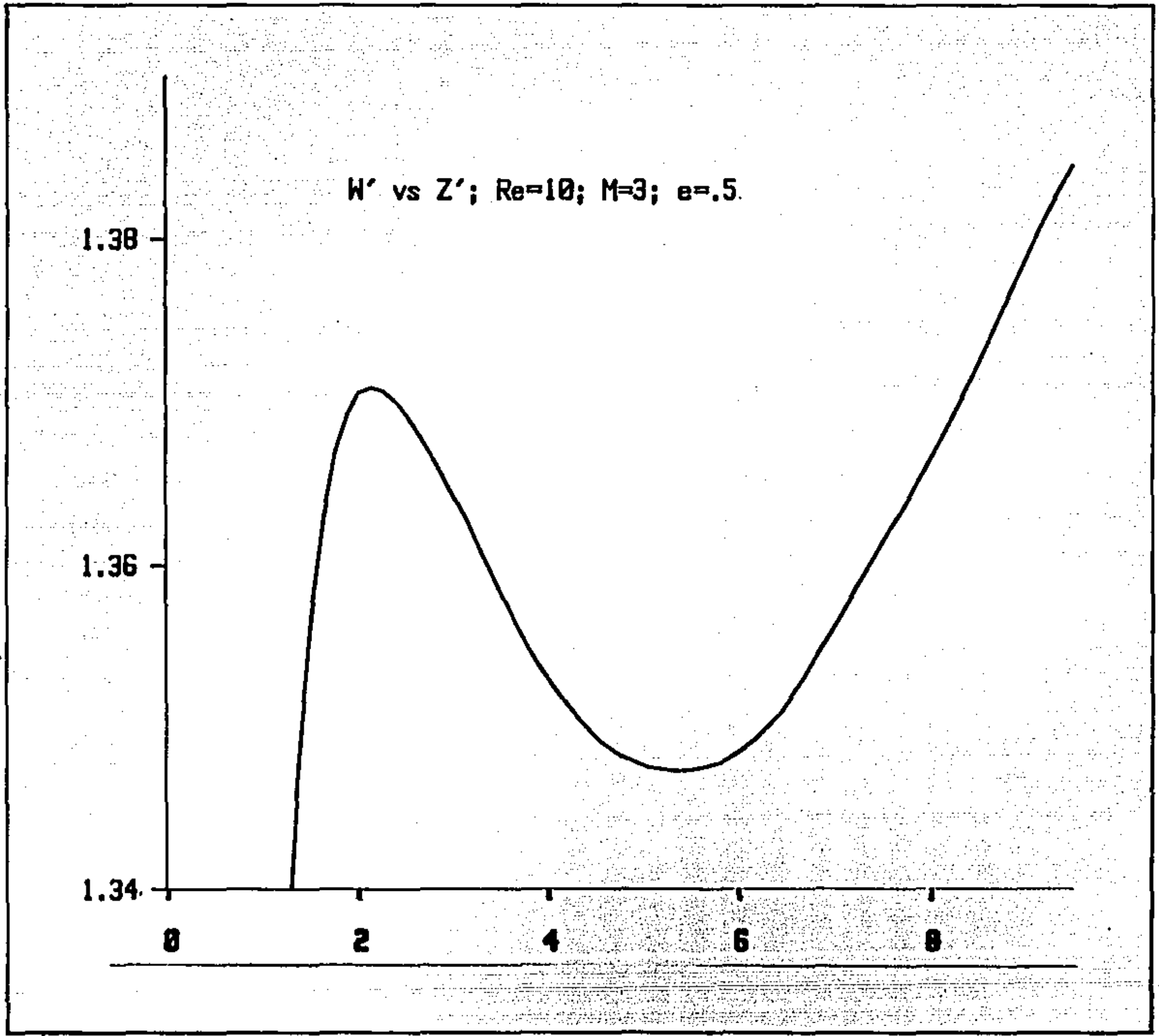


FIG.(13.2) Detalle de la figura (12.1).

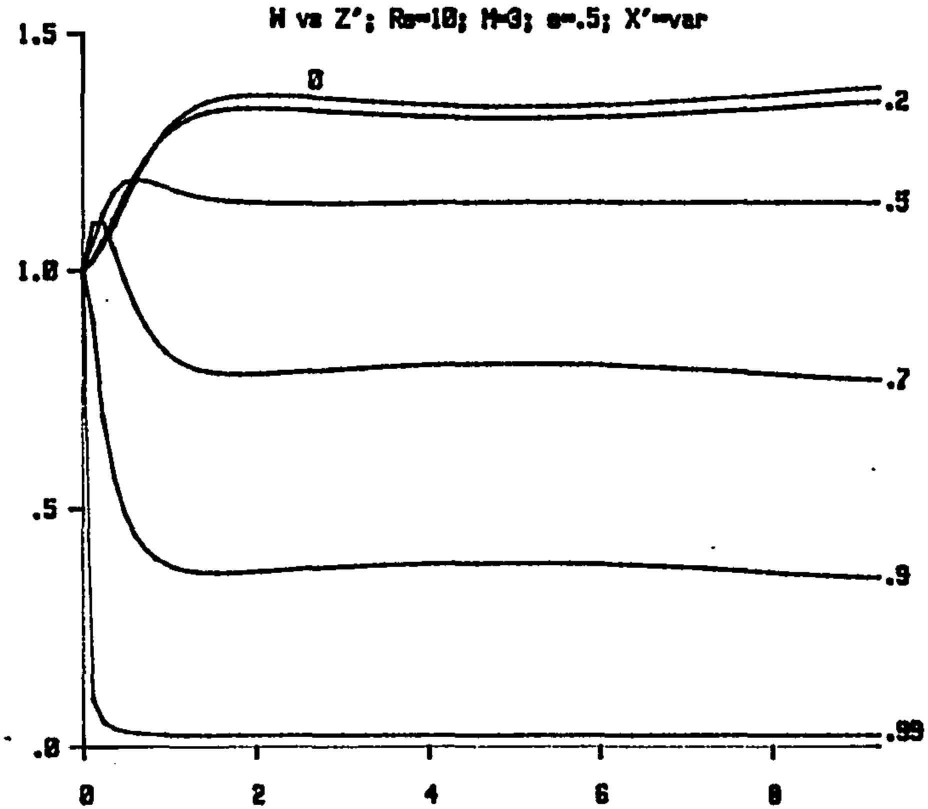


FIG.(13.3) Perfil longitudinal central para Re=10, M=3, e=.5;
x'=0, .2, .5, .7, .9 y .99

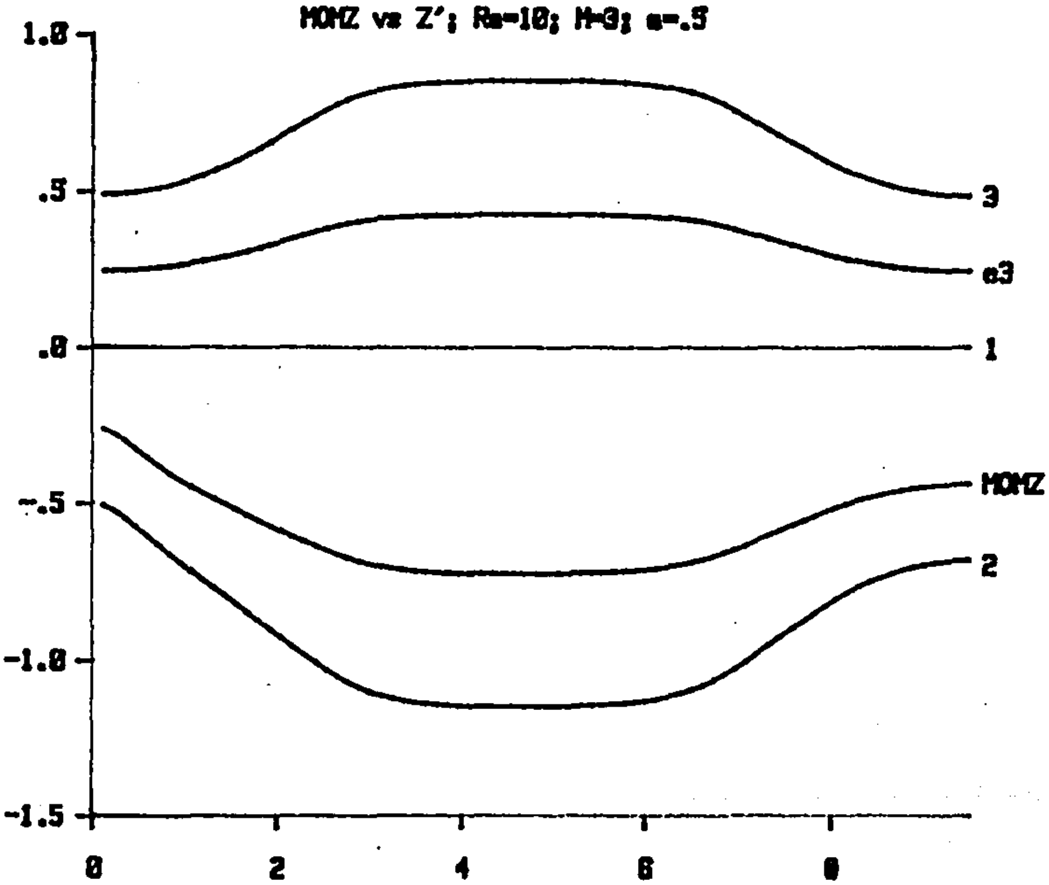


FIG.(13.4) Perfil longitudinal de la fuerza de cuerpo en la dirección z.

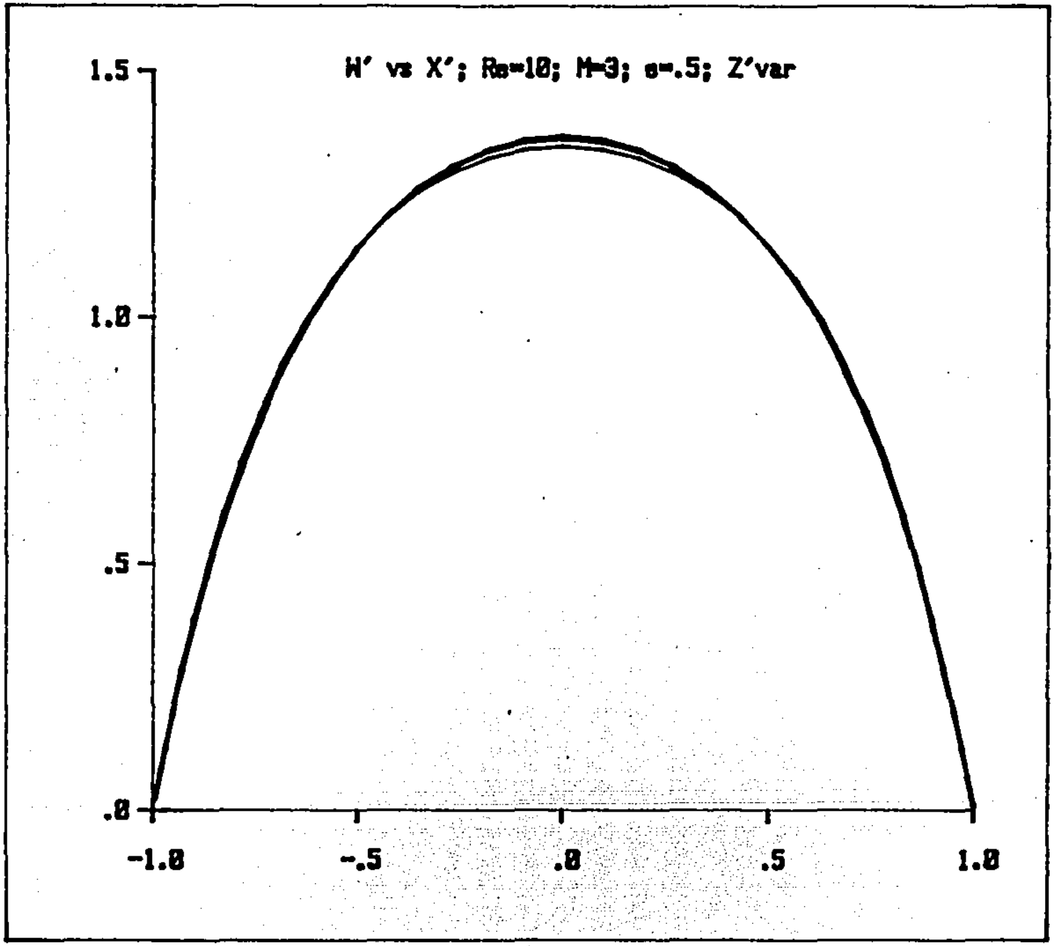
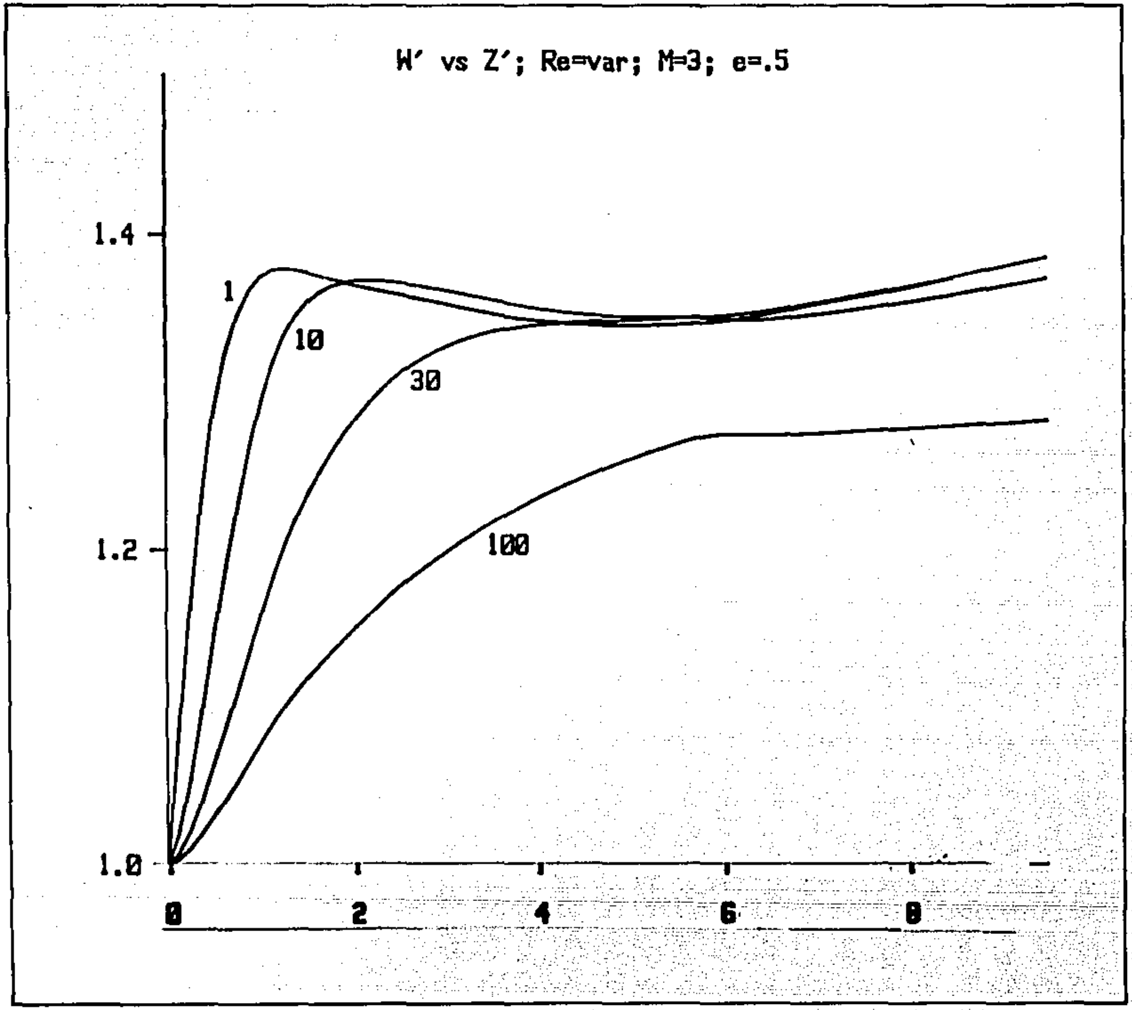


FIG.(13.5) Perfiles transversales de velocidades del caso Re=10, M=3, e=.5 a diferentes longitudes (z') desde la entrada.



FIG(13.6) Perfil longitudinal de velocidades en dirección z' para Re= 1, 10, 30, 100; M=3; e =.5.

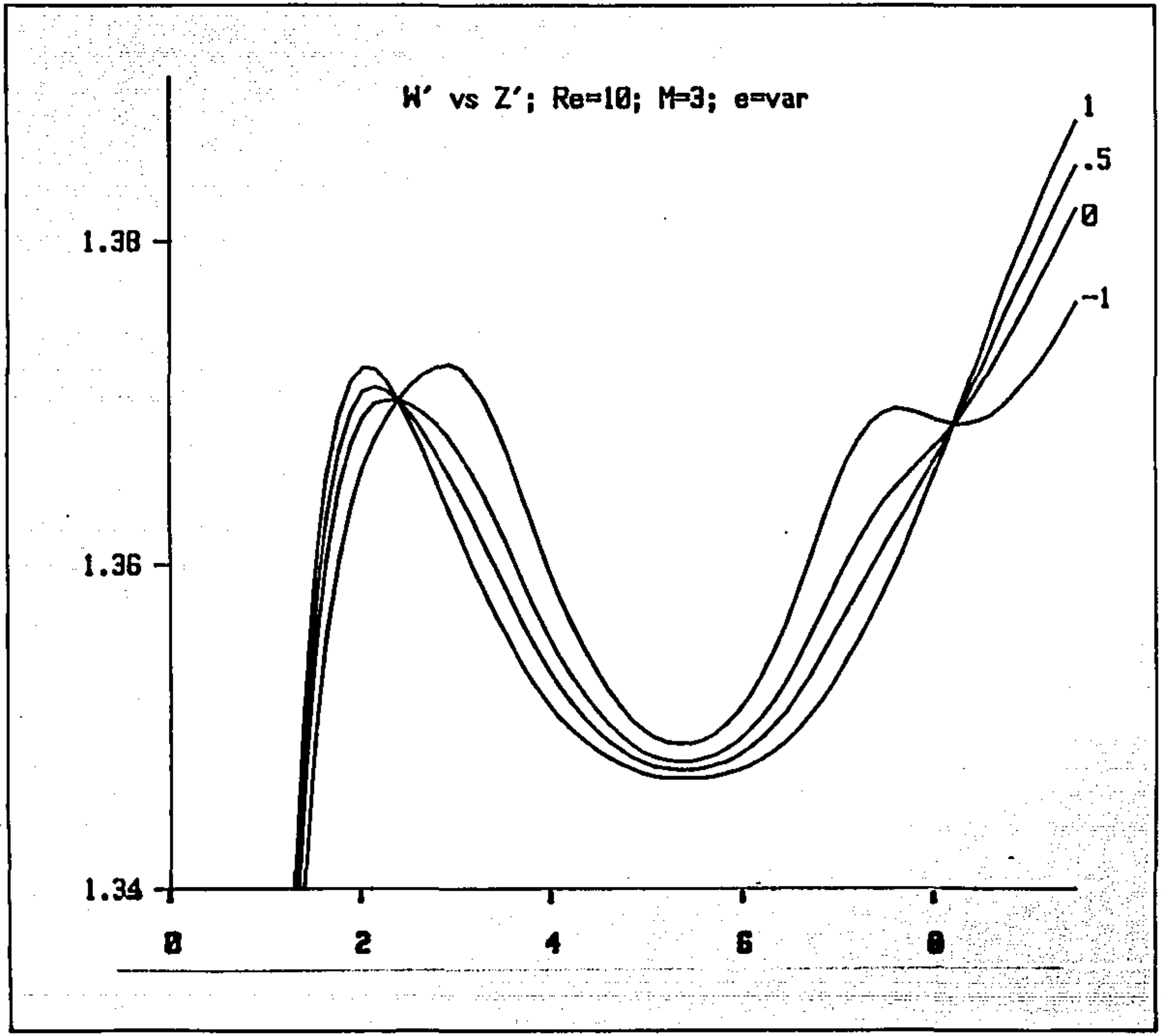


FIG.(13.7) Perfil longitudinal de velocidades para Re=10, M=3, e=1, .5, 0 y -1.

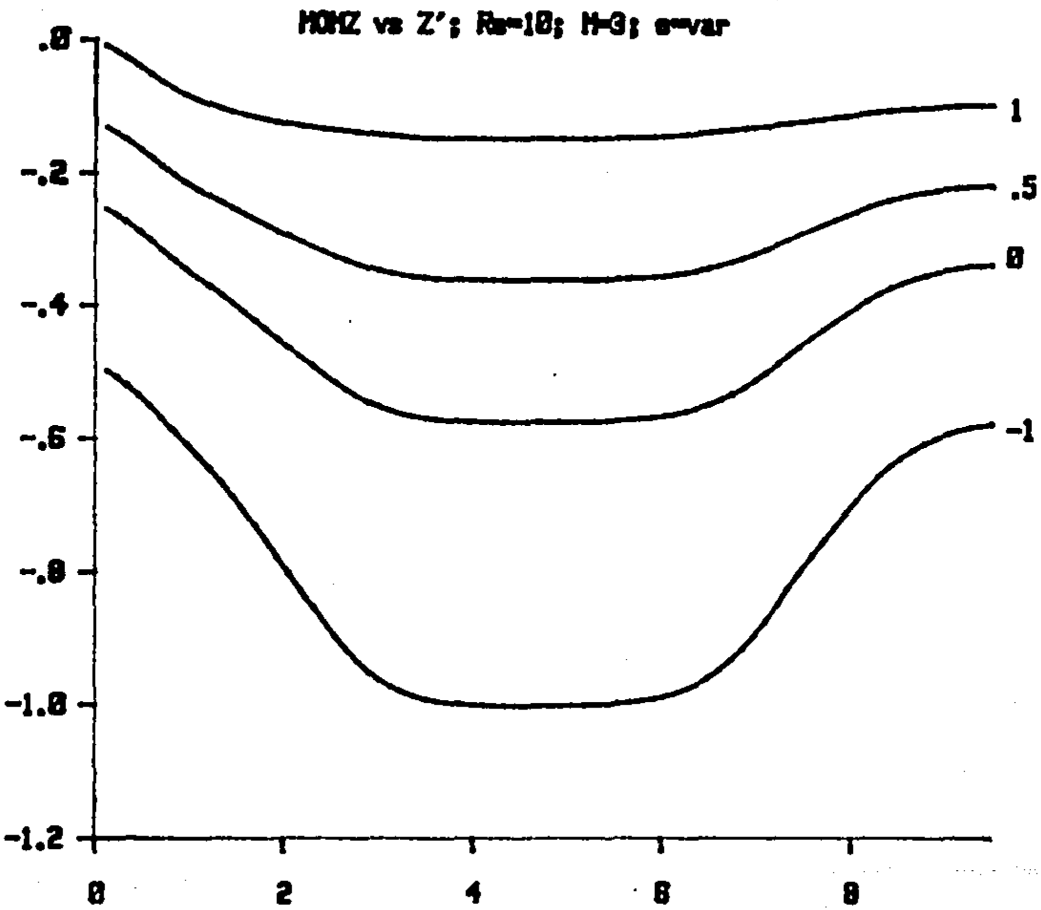


FIG.(13.8) Perfiles longitudinales del término fuente en la dirección Z, para diversos factores de carga.

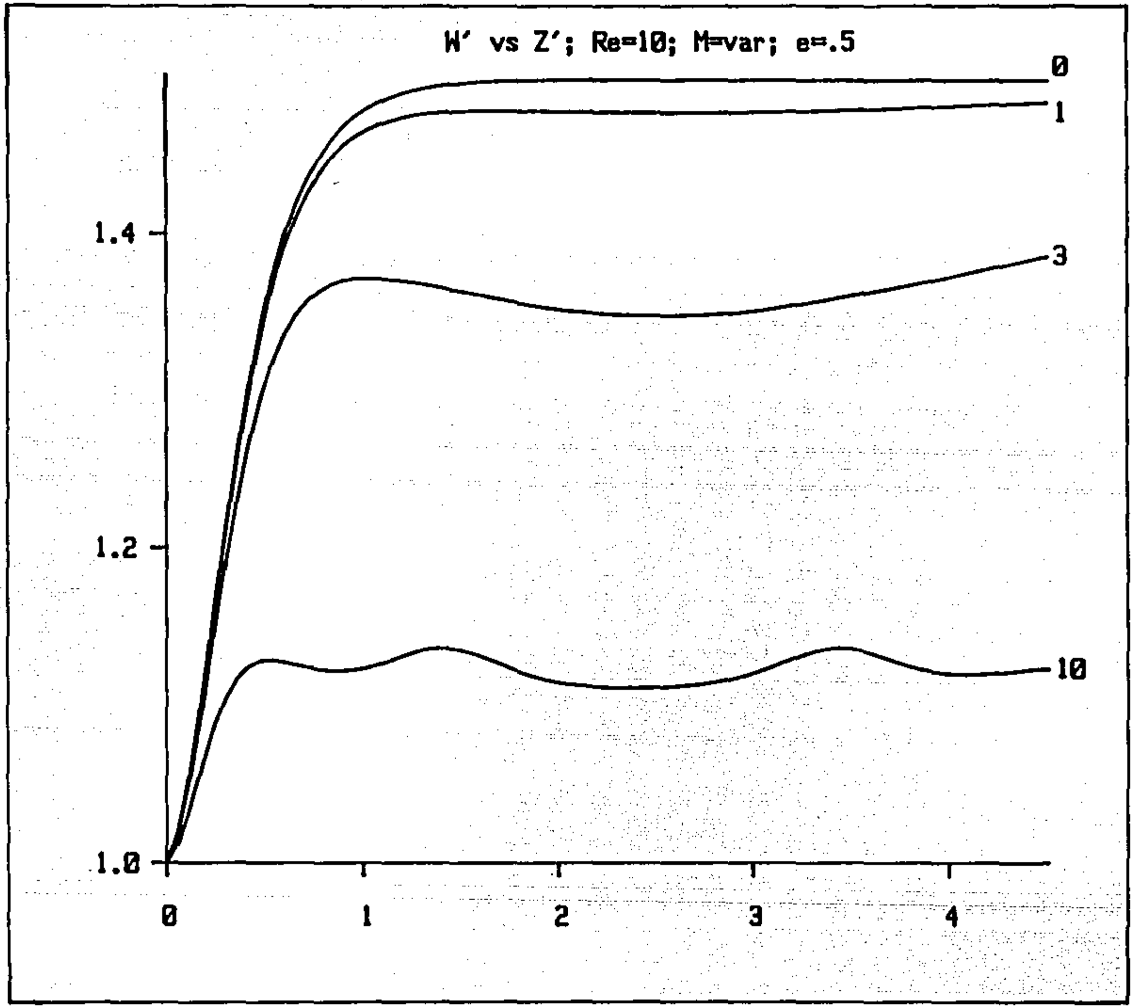


FIG.(13.9) Perfiles longitudinales de velocidad en dirección z' para Re=10, e=.5 y M=0, 1, 3 y 10.

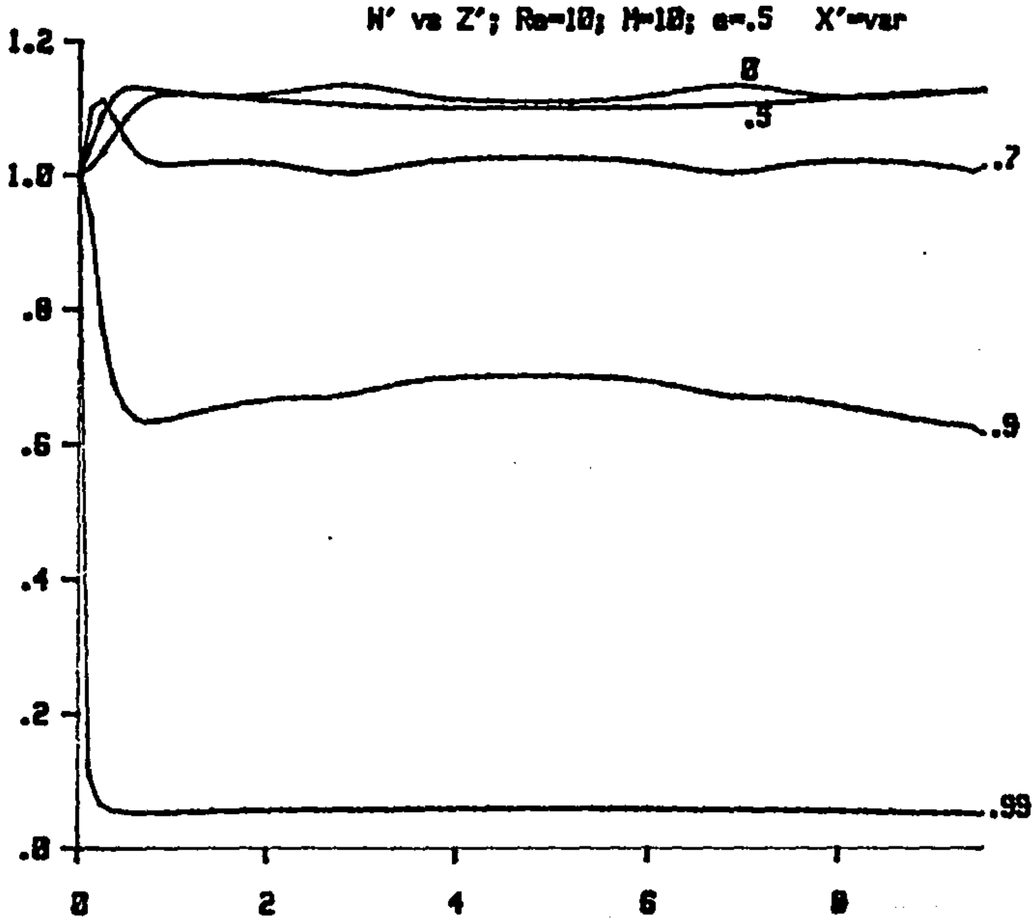


FIG.(13.10) Perfil longitudinal de velocidad en dirección z' como función de z', para x'= 0,.2,.5, .7, .9 y .99; Re=10, M=10, e=.5

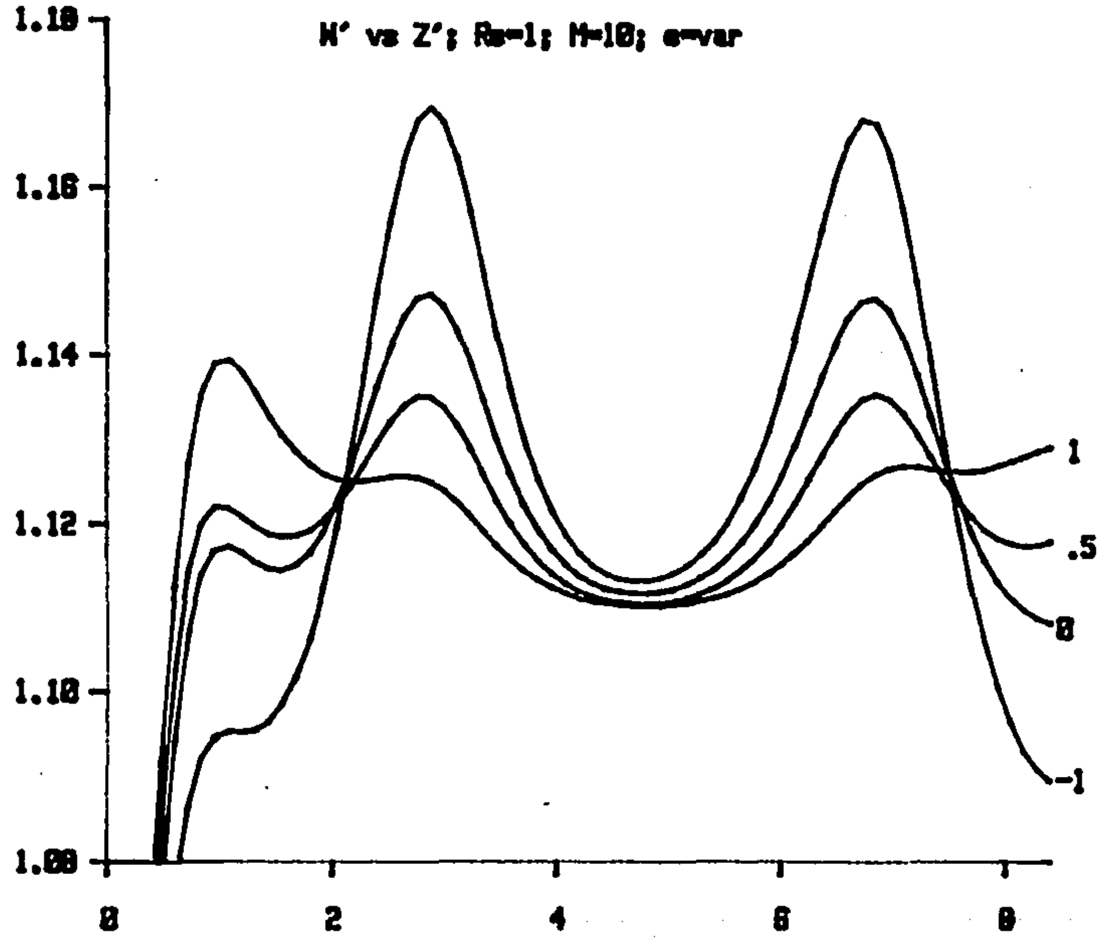


FIG.(13.11) Detalle de los perfiles de máximo efecto dinámico, variando el factor de carga. Re=1, M=10, e=1, .5, 0 y -1

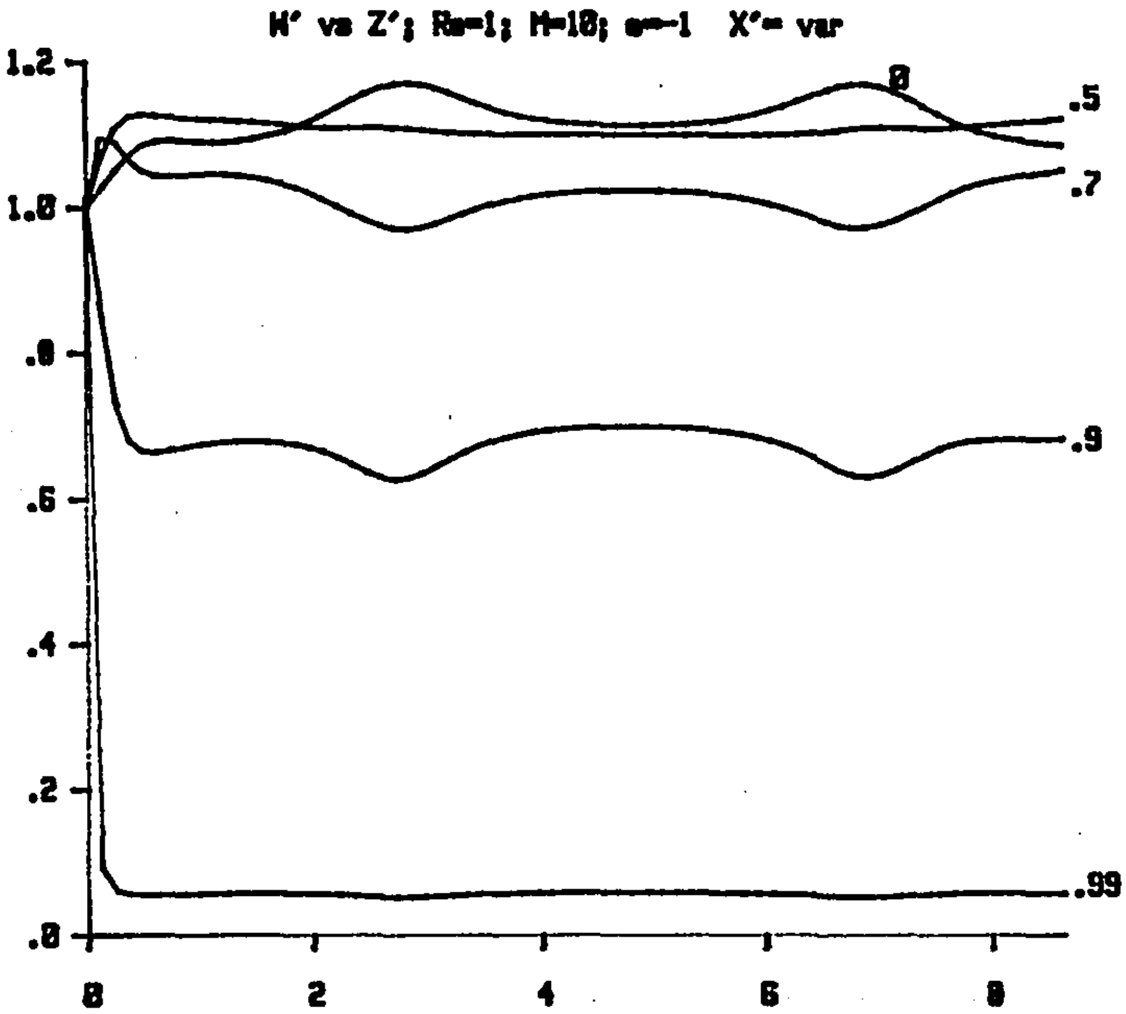


FIG.(13.12) Perfil longitudinal de velocidades para el caso extremo Re=1, M=10, e=-1, x'= 0, .2, .5, .7, .9 y .99

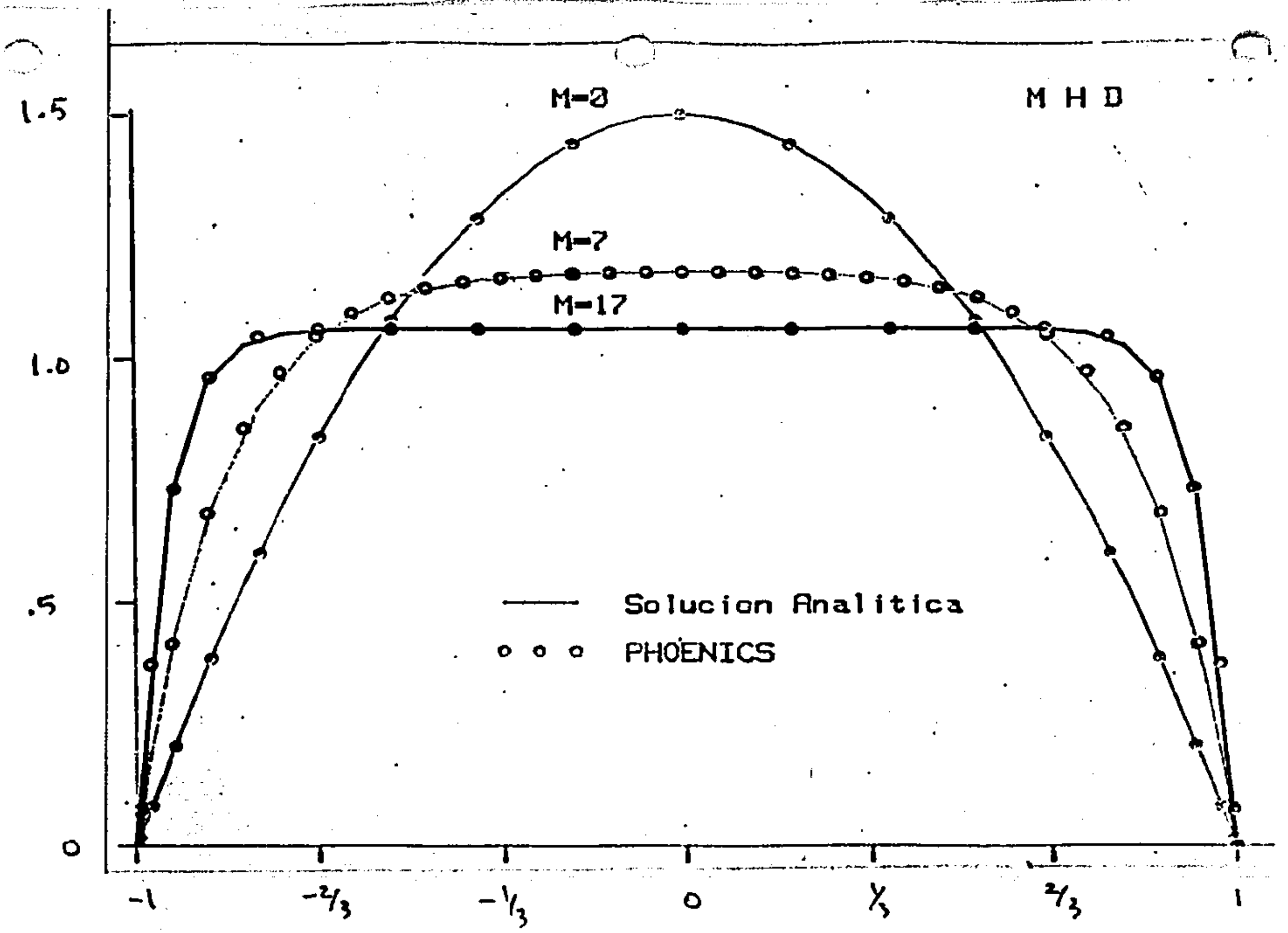


FIG.(A.1) Perfiles transversales de velocidad calculados teóricamente comparados con perfiles obtenidos numéricamente con el modelo parabólico utilizado en la sección 11.