UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

CUBIERTAS TOPOLOGICAS DEL TIPO (M,N) EN SUPERFICIES DE RIEMANN COMPACTAS

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

Presenta:

Guillermo Fernández del Busto González

1989

Introducción.

Gunning en [1] demuestra que toda función meromorfa en una superficie de Riemann compacta induce una cubierta holomorfa ramificada del plano proyectivo $\mathbb{P}^1$. Por lo que podemos estudiar las funciones meromorfas en superficies de Riemann a través de estudiar las cubiertas holomorfas de $\mathbb{P}^1$. Dentro de estas cubiertas hay un tipo especial que son aquellas que se pueden factorizar a través de otras cubrientes. Este tipo de cubiertas se presenta al clasificar curvas algebraicas. En este trabajo caracterisamos este tipo de cubiertas desde el punto de vista topológico.

En el capítulo 1 recordamos las propiedades principales de cubiertas topológicas de una variedad topológica, así como el teorema de clasificación de cubiertas topológicas. Para una descripción mas detallada de los conceptos expuestos en este capítulo consúltese el libro de Greenberg [1], o el de Massey [1].

En el capítulo 2 suponemos que Y es una superficie de Riemann compacta y consideramos cubiertas holomorfas de Y. Se verá el equivalente al teorema de clasificación de cubiertas topológicas y la correspondencia entre las cubiertas holomorfas ramificadas de Y con locus de ramificación A y cubiertas holomorfas no ramificadas de $Y - A$. Para este capítulo el libro de Forster [1] es adecuado, al igual que el de Guuning [1]. Para un tratamiento moderno de las superficies de Riemann se puede consultar Griffiths-Harris [1] ó Hartshorne [1].

Por último, en el tercer capítulo definimos las cubiertas holomorfas del tipo (m, n) de Y y se dá una clasificación de estas cubiertas cuando Y es una superficie de Riemann compacta. Este resultado no había sido publicado anteriormente.

INDICE

1. Cubiertas topológicas.

Introducción. En este capítulo definimos lo que es una cubierta topológica (X, p) de una variedad topológica Y. En el conjunto A de cubiertas topologicas de Y se definimos una relación de equivalencia: nuestro interes es describir el conjunto $A/\sim$ de clases de equivalencia de cubiertas topológicas de Y (ver Teorema 1). Tambien se domostrará la existencia del elemento universal $(\tilde{Y}, q)$ en las cubiertas topológicas de Y, es decir, si (X, p) es una cubierta topológica de Y entonces existe un subgrupo Γ del subgrupo de automorfismos de $\tilde{Y}$ tal que $(\tilde{/}\Gamma, \tilde{p})$ es equivalente a (X, p). Tenemos tambien que si (X, p) es una cubierta topológica de Y entonces existe una fumnción continua $r: \tilde{Y} \to X$ tal que $(\tilde{Y}, f)$ es una cubierta topológica de X y q se factoriza a través de f y p, esto es $q = pf$.

Sean X y Y espacios topológicos y $X \xrightarrow{p} Y$ un homeomorfismo local (i.e. p es una función continua y para todo punto $x \in X$ existen vecindades V de x y U de $p(x)$ tales que la restricción $V \xrightarrow{p|_V} U$ es un homeomorfismo). Cuando X es un espacio conexo y Hausdorff, y Y es una variedad topológica, es posible dar a X una estructura de variedad topológica mediante p de la siguiente manera: Sea $\varphi_i: V_i \to W_i \subseteq \mathbb{R}^n$ una carta coordenada de Y escogida de tal manera que existe un subconjunto abierto U de X en donde la restricción $U \xrightarrow{p|} V$ es un homoemorfismo. Entonces $\psi = \varphi p: U \to W$ define una carta coordenada en X. Sea $\mathfrak{U}$ la familia de cartas coordenadas en X que se obtienen de esta manera. Entonces $\mathfrak{U}$ define una estructura de variedad topológica en X.

Si X, Y y Z son espacios topológicos, y $X \xrightarrow{p} Y$ y $Z \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas entonces un *levantamiento* de f es una función continua $Z \xrightarrow{g} X$ tal que $f = pg$. Al considerar p un homomorfismo local, tenemos la siguiente proposicón.

Proposición 1. (Unicidad del Levantamiento, Forster [1.p.22]). *Sean X y Y espacios Hausdorff, y $X \xrightarrow{p} Y$ un homeomorfismo local. Supongamos que Z es un espacio conexo y $Z \xrightarrow{f} Y$ es una función continua. Si $Z \xrightarrow{g_1, g_2} X$ son dos levantamientos de f, y $g_1(z_0) = g_2(z_0)$ para algun punto $z_0 \in Z$, entonces $g_1 = g_2$.*

Prueba. Sea $T = \{z \in Z : g_1(z) = g_2(z)\}$. Como Z es conexo, si probamos que el conjunto T es abierto y cerrado en Z, al ser T no vacio, tendremos que $Z = T$.

Como la función $Z \xrightarrow{(g_1, g_2)} X \times X$ es continua y X es Hausdorff, la diagonal $\Delta \subseteq X \times X$ es cerrado y por lo tanto T, que es la imagen inversa de Δ bajo (g_1, g_2), es cerrado.

Para ver que T es abierto, sea z un punto en T tal que $g_1(z) = g_2(z) = x$. Como p es un homeomorfismo local. existe una vecindad $U \subseteq X$ de x homeomorfa a una vecindad $V \subseteq Y$ de $p(x) = f(z)$, y como g_1 y g_2 son continuas. existe una vecindad $W \subseteq Z$ de z tal que $g_i(W) \subseteq U$. Sea $V \xrightarrow{q} U$ la inversa de $U \xrightarrow{p|} V$. Entonces $g_1 |_W = q(f |_W) = g_2 |_W$, y por lo tanto $W \subseteq T$. En consecuencia, T es abierto. ∎

Sean X y Y espacios Hausdorff, y $X \xrightarrow{p} Y$ un homeomorfismo local. Denotemos al intervalo $[0, 1]$ por I, y sean a, b dos puntos en Y. Supongamos que $H: I \times I \to Y$ es una función continua tal que $H(0, s) = a$ y $H(1, s) = b$ para todo $s \in I$. Si para cada $s_0 \in I$ denotamos por $v_{s_0}(t)$ a la curva $H(s_0, t)$, entonces tenemos la siguiente proposición. (Para la prueba ver Forster [1,p.23], Greenberg [1,p.18] ó Massey [1,p.152].)

Proposición 2. (Levantamiento de Curvas Homotópicas). *Si cada curva v_s se puede levantar a una curva $\hat{v}_s$ con punto inicial $\hat{a} \in p^{-1}(a)$, entonces $\hat{v}_0$ y $\hat{v}_1$ tienen el mismo punto final, y además son homotópicas.*

Decimos que una función continua $X \xrightarrow{p} Y$ tiene *la propiedad del levantamiento de curvas*, si para toda curva $[0, 1] \xrightarrow{v} Y$ y todo punto $x_0 \in X$, con $p(x_0) = v(0)$, existe un levantamiento $[0, 1] \xrightarrow{\hat{v}} X$ de v tal que $\hat{v}(0) = x_0$. Cuando esto ocurre, tenemos que $p_*\Pi_1(X, x) \subseteq \Pi_1(Y, y)$.

Definición. Sea Y una variedad topológica.Una *cubierta topológica de Y*, que denotamos (X, p), es un espacio topológico X y una función continua $X \xrightarrow{p} Y$ que satisface las siguientes propiedades:

(i) Para todo punto $y \in Y$, existe una vecindad abierta U de y, tal que

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j,$$

en donde $\{V_j\}_{j \in J}$ es una familia de subconjuntos abiertos y ajenos de X.

(ii) Las restricciones de p a cada V_j son homeomorfismos.

En particular, p es un homeomorfismo local, y por lo tanto X también es una variedad topológica.

En lo sucesivo, Y denotará una variedad topológica y X un espacio Hausdorff.

Proposición 3 (Forster [1,p.25]). *Si (X, p) es una cubierta topológica de Y, entonces p tiene la propiedad del levantamiento de curvas.*

Prueba. Supongamos que (X, p) es una cubierta topológica de Y, y sea $[0, 1] \xrightarrow{v} Y$ una curva con punto inicial $p(x_0)$.

Como $[0, 1]$ es compacto, existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ y abiertos $U_k \subseteq Y$, $1 \leq k \leq n$, que satisfacen:

(i) $v([t_{k-1}, t_k]) \subseteq U_k$.

(*ii*) $p^{-1}(U_k) = \bigcup_{j \in J_k} V_{k_j}$, donde cada $V_{k_j} \subseteq Y$ es abierto, y $V_{k_j} \xrightarrow{p|} U_k$ es un homeomorfismo.

Por inducción sobre k, probaremos la existencia de un levantamiento $[0, t_k] \xrightarrow{\hat{v}} X$ de v, con $\hat{v}(0) = x_0$. Para $k = 0$ es trivial, de modo que para $k > 0$ supongamos que tenemos un levantamiento $[0, t_{k-1}] \xrightarrow{\hat{v}} X$ de v, con $\hat{v}(t_{k-1}) = x_{k-1}$. Como $p(x_{k-1}) = v(t_{k-1})$, existe $j \in J_k$ tal que $x_{k-1} \in V_{k_j}$. Sea $U_k \xrightarrow{p^{-1}} V_{k_j}$ la inversa del homeomorfismo $V_{k_j} \xrightarrow{p|} U_k$; haciendo

$$\hat{v}\,|_{[t_{k-1}, t_k]} = p^{-1} v\,|_{[t_{k-1}, t_k]}$$

obtenemos una extensión continua del levantamiento $\hat{v}$ a $[0, t_k]$. ∎

Corolario 4 (Forster [1,p.26]). *Si (X, p) es una cubierta topológica de Y, para cualesquiera $y_0, y_1 \in Y$ los conjuntos $p^{-1}(y_0)$ y $p^{-1}(y_1)$ tienen la misma cardinalidad.*

Prueba. Si $[0, 1] \xrightarrow{v} Y$ es una curva de y_0 a y_1, y $[0, 1] \xrightarrow{\hat{v}} X$ es un levantamiento de v, con punto inicial un punto x en $p^{-1}(y_0)$, consideremos la función $f: p^{-1}(y_0) \to p^{-1}(y_1)$ definida como $f(x) = \hat{v}_x(1)$. Entonces, debido a la unicidad del levantamiento, f está bien definida. Además, si $[0, 1] \xrightarrow{\nu} Y$ es la curva $\nu(t) = v(1 - t)$, y $\hat{\nu}_x$ es un levantamiento de ν, con punto inicial un punto arbitrario x en $p^{-1}(y_1)$, la función $g: p^{-1}(y_1) \to p^{-1}(y_0)$ definida como $g(x) = \hat{\nu}_x(1)$, es la inversa de f. ∎

A la cardinalidad de $p^{-1}(y)$, $y \in Y$, se le llama *el orden de la cubierta.* Decimos que dos cubiertas topológicas (X', p') y (X, p) de Y son *equivalentes*, si existe un homeomorfismo $X' \xrightarrow{f} X$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p'"'] & & X \arrow[dl, "p"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Al conjunto de clases de equivalencia de cubiertas topológicas de Y de orden n, lo denotamos por $H(Y, n)$. Estamos interesados en estudiar a $H(Y, n)$. En el teorema 12 se demuestra que $H(Y, n)$ tiene una estructura de grupo.

Si (X, p) es una cubierta topológica de Y, y x y y son puntos en X y Y respectivamente, con $p(x) = y$, entonces el levantamiento de curvas homotópicas implica que el homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(X, x) & \xrightarrow{p_*} & \Pi_1(Y, y) \\ \delta & \mapsto & p\delta \end{array}$$

es inyectivo.

Si γ es una curva cerrada en $y \in Y$, y γ'_x un levantamiento de γ, con punto inicial en $x \in p^{-1}(y)$, la acción $\Pi_1(Y,y) \times p^{-1}(y) \xrightarrow{a} p^{-1}(y)$ definida por $a(\gamma, x) = \gamma'_x(1)$ es transitiva. El estabilizador de cualquier punto $x \in p^{-1}(y)$ es $p_*\Pi_1(X,x)$. Por lo tanto existe una biyección

$$\Pi_1(Y,y)/p_*\Pi_1(X,x) \leftrightarrow p^{-1}(y)$$

y si $p^{-1}(y)$ es finito, su cardinalidad es igual al índice del subgrupo $p_*\Pi_1(X,x)$ en $\Pi_1(Y,y)$. Por lo tanto, los distintos subgrupos $p_*\Pi_1(X,x)$ con $x \in p^{-1}(y)$ son todos conjugados. (Ver Massey [1,p.154] ó Greenberg [1,p.20])

Proposición 5 (Massey [1,p.155]). *Sea Z una variedad topológica y $Z \xrightarrow{q} Y$ un homeomorfismo local con la propiedad del levantamiento de curvas. Dada una función continua $X \xrightarrow{p} Y$, si $x_0 \in X$ y $z_0 \in Z$ con $p(x_0) = q(z_0) = y_0$, existe un levantamiento $X \xrightarrow{\tilde{p}} Z$ de p si y solo si $p_*\Pi_1(X,x_0) \subseteq q_*\Pi_1(Z,z_0)$.*

Prueba. Si existe el levantamiento $X \xrightarrow{\tilde{p}} Z$ de p, el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\Pi_1(X,x_0) \arrow[rr, "\tilde{p}_*"] \arrow[dr, "p_*"'] & & \Pi_1(Z,z_0) \arrow[dl, "q_*"] \\
& \Pi_1(Y,y_0) &
\end{tikzcd}$$

y como q_* es inyectiva, entonces $p_*\Pi_1(X,x_0) \subseteq q_*\Pi_1(Z,z_0)$.

Reciprocamente, supongamos que $x \in X$, y sea $[0,1] \xrightarrow{\delta} X$ una curva de x_0 a x. Si $[0,1] \xrightarrow{\tilde{\gamma}} Z$ es un levantamiento de $\gamma = p\delta$, con punto inicial z_0, entonces la función

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{p}} & Z \\ x & \mapsto & \tilde{\gamma}(1) \end{array}$$

está bien definida, pues si α y β son dos clases de equivalencia distintas de curvas en X de x_0 a x, entonces $\alpha\beta^{-1} \in \Pi_1(X,x_0)$, y por hipótesis $p_*(\alpha\beta^{-1}) \in p_*\Pi_1(Z,z_0)$. En consecuencia, $p_*(\alpha)p_*(\beta)^{-1}$ se levanta a una curva cerrada en z_0, y por lo tanto, $p_*(\alpha)$ y $p_*(\beta)$ se levantan a curvas con punto inicial z_0 y deben tener el mismo punto final. Claramente $q\tilde{p} = p$.

Para ver que $\tilde{p}$ es continua, sea $x \in X$ y $z = \tilde{p}(x)$. Si V es una vecindad de z, entonces existe una vecindad U de $p(x) = q(z)$ tal que $V \xrightarrow{q|} U$ es un homeomorfismo; sea $V \xrightarrow{q^{-1}} U$ la inversa de q. Como p es continua, existe una vecindad conectable por trayectorias W de x, con $p(W) \subseteq U$. Entonces $\tilde{p}(W) \subseteq V$, en efecto, si $x' \in W$ es un punto arbitrario en W, y δ' es una curva de x a x' contenida en W, entonces la curva

$\gamma' = p\delta'$ está contenida en U y $\tilde{\gamma}' = q^{-1}\gamma'$ es un levantamiento de γ', con punto inicial z. Por lo tanto, $\tilde{\gamma}\cdot\tilde{\gamma}'$ es un levantamiento de $\gamma\cdot\gamma' = p(\delta\cdot\delta')$ con punto inicial z_0, y así,

$$\tilde{p}(x') = \tilde{\gamma}\cdot\tilde{\gamma}'(1) = \tilde{\gamma}'(1) \in V.$$

Por lo tanto $W \subseteq V$, y $\tilde{p}$ es continua. ∎

Corolario 6. *Dos cubiertas topológicas (X', p') y (X, p) de Y, son equivalentes, si y solo si $p_*\Pi_1(X, x) = p'_*\Pi_1(X', x')$.* ∎

Corolario 7. *Sea Y una variedad de dimensión m. Si $X \xrightarrow{p} Y$ es un homeomorfismo local con la propiedad del levantamiento de curvas, entonces (X, p) es una cubierta topológica de Y.*

Prueba. Sea y_0 un punto arbitrario en Y, y $\{x_j\}_{j\in J}$ la imagen inversa de y_0 bajo p. Entonces existe una vecindad abierta U de y_0 homeomorfa a $\mathbb{D}^m = \{w \in \mathbb{R}^m : |w| < 1\}$; sea $U \xrightarrow{\imath} Y$ la inclusión natural. Entonces, para cada $j \in J$, como U es simplemente conexo, existe un levantamiento $U \xrightarrow{\tilde{\imath}_j} X$ de $\imath$ tal que $\tilde{\imath}_j(y_0) = x_j$. Sea $V_j = \tilde{\imath}_j(U)$. Entonces

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j\in J} V_j,$$

la familia $\{V_j\}_{j\in J}$ es ajena y para cada $j \in J$ la restricción $V_j \xrightarrow{p|} U$ es un homeomorfismo. Por lo tanto, p es una cubierta topológica de Y. ∎

Definición. Decimos que una cubierta topológica $(\tilde{Y}, q)$ de Y tiene la *propiedad universal* si satisface la siguiente condición:

Para toda cubierta topológica (X, p), y puntos $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ y $x \in X$ con $q(\tilde{y}) = p(x)$, existe una única función continua $\tilde{Y} \xrightarrow{r} X$ tal que $r(\tilde{y}) = x$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tilde{Y} \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, dashed, "r"] & \\
Y & X \arrow[l, dashed, "p"]
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Si la cubierta topológica $(\tilde{Y}, q)$ tiene la propiedad universal entonces la llamamos una *cubierta universal de Y*.

Observemos que debido a la proposición 5, si $(\tilde{Y}, q)$ es una cubierta topológica de Y, y $\tilde{Y}$ es simplemente conexo, entonces $(\tilde{Y}, q)$ es una cubierta universal de Y. Para demostrar que dada una variedad topológica existe una única cubriente universal utilizamos los siguientes lemas.

Lema 1. *Cuando un espacio topológico Y tiene una cubierta universal, ésta es única.*

Prueba. Supongamos que $(\tilde{Y}_1, q_1)$ y $(\tilde{Y}_2, q_2)$ son dos cubiertas universales de Y. Entonces existen funciones continuas $\tilde{Y}_1 \xrightarrow{r_1} \tilde{Y}_2$ y $\tilde{Y}_2 \xrightarrow{r_2} \tilde{Y}_1$. Ahora, la composición $r_2 r_1$ es tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y}_1 \arrow[rr, "r_2 r_1"] \arrow[dr, "q_1"'] & & \tilde{Y}_1 \arrow[dl, "q_1"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, al igual que la composición $r_1 r_2$ hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y}_2 \arrow[rr, "r_1 r_2"] \arrow[dr, "q_2"'] & & \tilde{Y}_2 \arrow[dl, "q_2"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

sea conmutativo. Por lo tanto, de la unicidad de la propiedad universal, tenemos que $r_2 r_1 = 1$ y $r_1 r_2 = 1$, lo cual muestra que $\tilde{Y}_1$ y $\tilde{Y}_2$ son homeomorfos. ∎

Sea y_0 un punto fijo en Y. Para $y \in Y$ denotemos por $\pi(y_0, y)$ al conjunto de clases de equivalencia de homotopía de curvas en Y de y_0 a y. Sea

$$\tilde{Y} = \{(y, \alpha) \ : \ y \in Y, \ \ \alpha \in \pi(y_0, y)\}$$

y consideremos la función $q: \tilde{Y} \to Y$ definida por $q(y, \alpha) = y$.

Si $(y, \alpha) \in \tilde{Y}$ y $U \subseteq Y$ es una vecindad abierta, conexa y simplemente conexa de y, definimos $[U, \alpha] \subseteq \tilde{Y}$ de la siguiente manera:
$[U, \alpha]$ consiste de aquellos puntos $(y', \beta) \in \tilde{Y}$ tales que $y' \in U$ y β esta en la misma clase de homotopía que $\upsilon \cdot \nu$, en donde υ es una curva de y_0 a y en la misma clase de homotopía que α, y ν una curva de y a y' completamente contenida en U. Sea $\mathfrak{B}$ la familia de subconjuntos de la forma $[U, \alpha]$. (Ver Forster [1,p.32] ó Greenberg [1,p.24]).

Lema 2. *$\tilde{Y}$ es un espacio topológico con base $\mathfrak{B}$.*

Prueba. Claramente todo punto de $\tilde{Y}$ está en algun $[U, \alpha]$. Sea $(z, \gamma) \in [U, \alpha] \cap [V, \beta]$, entonces $z \in U \cap V$ y existe una vecindad abierta W de z conexa y simplemente conexa con $W \subseteq U \cap V$.
Por lo tanto $[W, \gamma] \subseteq [U, \alpha] \cap [V, \beta]$, y esto prueba que $\mathfrak{B}$ es una base de $\tilde{Y}$. ∎

Lema 3. *$\tilde{Y}$ es Hausdorff.*

Prueba. Sean $(y, \alpha), (y, \beta) \in \tilde{Y}$, con $\alpha \neq \beta$, y sea $U \subseteq Y$ es una vecindad de y conexa y simplemente conexa. Si $(z, \gamma) \in [U, \alpha] \cap [U, \beta]$ y ϑ es una curva en U de y a z, escribiendo $\alpha = [\upsilon]$ y $\beta = [\nu]$, tendriamos que $\gamma = [\upsilon \cdot \vartheta] = [\nu \cdot \vartheta]$ y esto implicaría que $\alpha = \beta$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $[U, \alpha] \cap [U, \beta] = \emptyset$, o sea, $\tilde{Y}$ es Hausdorff. ∎

lema 4. *$\tilde{Y}$ es conexo y $\tilde{Y} \xrightarrow{q} Y$ es un homeomorfismo local con la propiedad del levantamiento de curvas.*

Prueba. Sea $[0,1] \xrightarrow{\upsilon} Y$ una curva con punto inicial y_0 y para $t \in [0,1]$ consideremos la curva $[0,1] \xrightarrow{\upsilon_t} Y$ definida por $\upsilon_t(s) = \upsilon(st)$. Entonces la función $[0,1] \xrightarrow{\tilde{\upsilon}} \tilde{Y}$ definida por $\tilde{\upsilon}(t) = (\upsilon(t), [\eta \cdot \upsilon_t])$, donde η es una curva cerrada en y_0, es continua y es un levantamiento de υ con $\tilde{\upsilon}(0) = (y_0, [\eta])$. Finalmente sea $[0,1] \xrightarrow{\vartheta} Y$ una curva en Y con punto inicial un punto arbitrario y_1, $\alpha \in \pi(y_0, y_1)$ y ν una curva de y_0 en y_1 con $[\nu] = \alpha$. Entonces por el argumento anterior la curva $\upsilon = \nu \cdot \vartheta$ tiene un levantamiento con $\tilde{\upsilon}(0) = (y_0, [\eta])$ que da origen a un levantamiento de ϑ con $\tilde{\vartheta}(0) = (y_1, [\eta])$ ∎

Lema 5. *$\tilde{Y}$ es simplemente conexo.*

Prueba. Sea $[0,1] \xrightarrow{\vartheta} \tilde{Y}$ una curva cerrada en $(y_0, [\eta])$. Entonces $\upsilon = q\vartheta$ es una curva cerrada en y_0; sea $\tilde{\upsilon}$ el levantamiento de υ garantizado por el lema 4. Debido a la unicidad del levantamiento, $\tilde{\upsilon} = \vartheta$, de modo que $(y_0, [\upsilon]) = \tilde{\upsilon}(1) = (y_0, [\eta])$ y así υ es 0-homotópica. Por lo tanto ϑ es 0-homotópica, y en consecuencia $\tilde{Y}$ es simplemente conexo. ∎

Utilizando los lemas 1,4 y 5 se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 8. *Toda variedad topológica tiene una única cubierta universal.*

Sea (X, p) una cubierta topológica de Y y $(\tilde{Y}, q)$ la cubierta universal de Y. Por la propiedad universal existe una función continua $\tilde{Y} \xrightarrow{r} X$ tal que $q = pr$. En particular tenemos que r es un homeomorfismo local. Si $[0,1] \xrightarrow{\upsilon} X$ es una curva en Y entonces $p\upsilon = \upsilon'$ es una curva en Y. Como $(\tilde{Y}, q)$ es una cubierta topológica de Y entonces existe un levantamiento de υ', y por la proposición 2 tenemos que $r\upsilon' = \upsilon$. Del corolario 7 se sigue que $(\tilde{Y}, r)$ es una cubierta topológica de X, de hecho como $\tilde{Y}$ es simplemente conexo $(\tilde{Y}, r)$ es la cubriente universal de X. Esto implica que la cubriente universal $(\tilde{Y}, q)$ de Y se factoriza a través de una cubierta topológica $(\tilde{Y}, r)$ de X y una cubierta topologica de Y; es decir, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y} \arrow[dr, dashed, "r"] \arrow[dd, dashed, "q"'] & \\ & X \\ Y \arrow[ur, dashed, "p"'] & \end{tikzcd}$$

de cubiertas topológicas. En términos de los grupos fundamentales, la conmutatividad de este diagrama implica la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} \Pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}) \arrow[dr, dashed, "r_*"] \arrow[dd, dashed, "q_*"'] & \\ & \Pi_1(X, x) \\ \Pi_1(Y, y) \arrow[ur, dashed, "p_*"'] & \end{tikzcd}$$

en donde todos los homomorfismos son inyectivos.

Supongamos que $\Gamma \subseteq \Pi_1(Y,y)$ es un subgrupo. Queremos ahora demostrar que existe una cubierta topológica (X,p) de Y tal que $\Pi_1(X,x) \cong \Gamma$. Para esto daremos una caracterización de $\Pi_1(Y,y)$.

Para cualquier cubierta topológica (X,p) de Y, el conjunto de homeomorfismos $X \xrightarrow{f} X$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & X \arrow[dl, "p"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, forma un grupo que se conoce como el grupo de *transformaciones de cubierta de X en Y*, y que denotaremos por $Aut_Y(X)$, o por $Aut(X)$ cuando no se preste a confusión. Si Γ es un subgrupo de $Aut(X)$, dos puntos x y x' en X son *equivalentes módulo* Γ si existe $g \in \Gamma$ tal que $g(x) = x'$. Al conjunto de clases de equivalencia lo denotamos por X/Γ. Si $\tilde{Y} \xrightarrow{r} \tilde{Y}/\Gamma$ es la proyección canónica, existe una estructura de variedad topológica en $\tilde{Y}/\Gamma$ tal que r es continua. Es más, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 9 (Massey [1,p.164]). *Sea Y una variedad topológica y $(\tilde{Y},q)$ la cubierta universal de Y. Si Λ es un subgrupo de $Aut(\tilde{Y})$ entonces $\tilde{Y}, r$ es una cubierta topológica de $\tilde{Y}/\Lambda$. Además $\Lambda = Aut_{\tilde{Y}/\Lambda}(\tilde{Y})$.*

Prueba. Sea x un punto arbitrario en $\tilde{Y}/\Lambda$. Si $y \in r^{-1}(x)$, como $\tilde{Y}$ es una variedad topológica, existe una vecindad $V \subseteq \tilde{Y}$ de Y homeomorfa a $\mathbb{D}^m$, y tal que la familia $\{f(V): f \in \Lambda\}$ es ajena. Sea $U = r(V)$. Entonces como r es abierta, V es abierto y $r|: V \to U$ es un homeomorfismo. Si W es una componente conexa de $r^{-1}(U)$ distinta de V, entonces existe $f \in \Lambda$ tal que $W = f(V)$ y por lo tanto $r|: W \to U$ tambien es un homeomorfismo. Esto prueba que $\tilde{Y} \xrightarrow{r} \tilde{Y}/\Lambda$ es una cubierta topológica, y claramente $\Lambda = Aut(\tilde{Y}, \tilde{Y}/\Lambda)$. ∎

En la siguiente proposición describiremos el grupo fundamental de Y en terminos de los automorfismos de la cubriente universal de Y.

Proposición 10 (Forster [1,p.34]). *Sea $(\tilde{Y},q)$ la cubierta universal de Y, y y_0 en punto en Y. Para cualquier par de puntos $\tilde{y}_0, \tilde{y}_1 \in q^{-1}(y_0)$ existe $f \in Aut(\tilde{Y})$ tal que $f(\tilde{y}_0) = \tilde{y}_1$. Además, $Aut(\tilde{Y})$ es isomorfo a $\Pi_1(Y, y_0)$.*

Prueba. Sean $\tilde{y}_0$ y $\tilde{y}_1$ puntos en $q^{-1}(y_0)$. Entonces existen funciones continuas $\tilde{Y} \xrightarrow{f,g} \tilde{Y}$ tales que $f(\tilde{y}_0) = \tilde{y}_1$ y $g(\tilde{y}_1) = \tilde{y}_0$; además $fg = 1_{\tilde{Y}} = gf$. Esto prueba la primer afirmación de la proposición.

Para la segunda, sea $\tilde{y}_0$ un punto en $q^{-1}(y_0)$. Si f es una transformación de cubierta de $\tilde{Y}$ en Y, y $[0,1] \xrightarrow{v} \tilde{Y}$ es una curva de $\tilde{y}_0$ a $f(\tilde{y}_0)$,entonces la curva $q \cdot v$ es cerrada en y_0, de modo que podemos definir una función $\Phi: Aut(\tilde{Y}) \to \Pi_1(Y, y_0)$ como

$\Phi(f) = [q \cdot v]$.

Para ver que Φ es un homomorfismo, sean f y g transformaciones de cubierta de $\tilde{Y}$ en Y, y v (resp. ϑ) una curva de $\tilde{y}_0$ a $f(\tilde{y}_0)$ (resp. a $g(\tilde{y}_0)$). Entonces $f \cdot \vartheta$ es una curva de $f(\tilde{y}_0)$ a $fg(\tilde{y}_0)$ tal que $q(f \cdot \vartheta) = q\vartheta$. Por lo tanto, como la curva $v \cdot (f \cdot \vartheta)$ tiene punto inicial $\tilde{y}_0$ y final $fg(\tilde{y}_0)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi(f \cdot g) &= [q \cdot (v \cdot (f \cdot \vartheta))] \\ &= [qv] \cdot [q(f\vartheta)] \\ &= [qv] \cdot [q\vartheta] \\ &= \Phi(f)\Phi(g). \end{aligned}$$

Para ver que Φ es inyectiva, tomemos v una curva de $\tilde{y}_0$ a $f(\tilde{y}_0)$. Si f esta en el $Ker\Phi$, entonces qv es 0-homotópica, pero v es un levantamiento de qv, de manera que por la proposición del levantamiento de curvas homotópicas, v tambien es 0-homotópica. En consecuencia el punto final $f(\tilde{y}_0)$ de v es $\tilde{y}_0$. Por lo tanto, $f = 1_{\tilde{Y}}$ y Φ es inyectiva.

Para ver que Φ es suprayectiva, sea $\alpha \in \Pi_1(Y, y_0)$ y v una curva que represente a α. Entonces, si $[0,1] \xrightarrow{\tilde{v}} \tilde{Y}$ es un levantamiento de v de y_0 a y_1, por la primera parte de la proposición existe una transformación de cubierta f de $\tilde{Y}$ en Y tal que $f(\tilde{y}_0) = (y_1)$, y por lo tanto $\Phi(f) = \alpha$. Esto prueba que la función $\Phi: Aut(\tilde{Y}) \to \Pi_1(Y, y_0)$ es un isomorfimo. ∎

Nota 10. Para cualquier cubierta topológica (X, p) de Y y cualesquiera dos puntos x_0 y x_1 en $p^{-1}(y)$, no siempre existe $f \in Aut(X)$ tal que $f(x_0) = x_1$. Cuando existe este automorfismo para toda y en Y y x_0, x_1 en p^{-1}, entonces se dice que que (X, p) es una *cubierta topológica norma* de Y. En particular el subgrupo $p_*\Pi_1(X, x_0)$ es normal en $\Pi_1(Y, y)$ (ver Greenberg [1,p.21]).

Por la propiedad universal de $(\tilde{Y}, q)$, si (X, p) es una cubierta topológica de Y, de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y} \arrow[dr, "r"] \arrow[d, "q"'] & \\ Y \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd}$$

tenemos que $Aut_X(\tilde{Y})$ es un subgupo de $Aut_Y(\tilde{Y})$. Además dos puntos $\tilde{y}_0, \tilde{y}_1 \in \tilde{Y}$ tienen la misma imagen bajo r si y solo si $\tilde{y}_0$ y $\tilde{y}_1$ son equivalentes módulo $Aut_X(\tilde{Y})$.

Teorema 11 (Massey [1,p.171]). *Para cualquier subgrupo $\Gamma \subseteq \Pi_1(Y, y)$ de índice n, existe una cubierta topológica (X, p) de Y de orden n, tal que $\Gamma = p_*\Pi_1(X, x)$.*

Prueba. Sea $(\tilde{Y}, q)$ la cubriente universal de Y, y sea $\tilde{y} \in q^{-1}(y)$ un punto fijo. Si v es una clase de homotopía en $\Pi_1(Y, y)$, sea $v_{\tilde{y}}$ un levantamiento de v con punto inicial $\tilde{y}$.

Consideremos el siguiente subgrupo Λ de $Aut(\tilde{Y})$: $f \in \Lambda$ si y solo si existe $v \in \Gamma$ tal que $f(\tilde{y}) = v_{\tilde{y}}(1)$.

Sea $X = \tilde{Y}/\Lambda$, y sea $X \xrightarrow{p} Y$ la función inducida por $\tilde{Y} \xrightarrow{q} Y$. Entonces como $\tilde{Y} \xrightarrow{r} \tilde{Y}/\Lambda$ es una cubierta topológica de X, y $q = pr$, entonces (X, p) es una cubierta topológica de Y, y como $\Lambda = Aut_X(\tilde{Y})$, entonces $\Gamma \cong p_*\Pi_1(X, x)$ y además p es de orden n. ∎

Por el teorema 11 y el corolario 6 tenemos:

Teorema 12. *Si (X, p) es una cubierta topológica de entonces existe un subgrupo $\Gamma \subseteq \Pi_1(Y, y)$ tal que $X \cong \tilde{Y}/\Gamma$, donde $(\tilde{Y}, q)$ es la cubriente universal de Y.*

Para terminar este capítulo, veremos el teorema de clasificación de cubiertas topológicas (Fulton [1]), el cual nos permite dar una estructura de grupo al conjunto de clases de equivalencia $H(Y, n)$ de cubiertas topológicas de Y de orden n.

Denotemos por $\mathfrak{S}_n$ al grupo de permutaciones en n símbolos.

Definición. Dos homomorfismos $\Pi_1(Y, y) \xrightarrow{\pi} \mathfrak{S}_n$ y $\Pi_1(Y, y) \xrightarrow{\pi'} \mathfrak{S}_n$ son *equivalentes*, si existe $\lambda \in \mathfrak{S}_n$ tal que $\pi'(\gamma) = \lambda^{-1}\pi(\gamma)\lambda$, para todo $\gamma \in \Pi_1(Y, y)$. En particular, si identificamos a $\mathfrak{S}_{n-1}$ con el subrupo de $\mathfrak{S}_n$ que consiste de aquellas permutaciones que fijan el símbolo i_0, entonces $\pi^{-1}(\mathfrak{S}_{n-1})$ y $\pi'^{-1}(\mathfrak{S}_{n-1})$ son conjugados. Denotemos por $Hom(\Pi_1(Y, y), \mathfrak{S}_n)$ al conjunto de clases de equivalencia de homomorfismos de $\Pi_1(Y, y)$ en $\mathfrak{S}_n$, cuya imagen es un subgrupo transitivo de $\mathfrak{S}_n$. Notemos que $Hom(\Pi_1(Y, y), \mathfrak{S}_n)$ es un grupo.

Sea (X, p) una cubierta topológica de Y de orden n. Entonces $p_*\Pi_1(X, x)$ es un subgrupo de $\Pi_1(Y, y)$ de índice n. Sea $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq n}$ un conjunto completo de representantes de clases laterales izquierdas de $p_*\Pi_1(X, x)$ en $\Pi_1(Y, y)$. Para cada $\gamma \in \Pi_1(Y, y)$ tenemos que $\gamma\alpha_i = \alpha_{\pi_\gamma(i)}\gamma_i$, con γ_i una única clase de homotopía de curvas cerradas en $x \in X$. Denotemos por π_γ la permutación $i \mapsto j$, y consideremos la función $\pi: \Pi_1(Y, y) \to \mathfrak{S}_n$ definida como $\pi(\gamma) = \pi_\gamma$. Si $\gamma' \in \Pi_1(Y, y)$, con $\gamma'\alpha_i = \alpha_{\pi_{\gamma'}(i)}\gamma'_i$, entonces

$$\begin{aligned}
\gamma\gamma'\alpha_i &= \gamma\alpha_{\pi_{\gamma'}(i)}\gamma'_i \\
&= \alpha_{\pi_\gamma\pi_{\gamma'}(i)}\gamma_{\pi_{\gamma'}(i)}\gamma'_i \\
&= \alpha_{\pi_{\gamma\gamma'}(i)}\gamma_{\pi_{\gamma'}(i)}\gamma'_i \quad .
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\pi: \Pi_1(Y, y) \to \mathfrak{S}_n$ es un homomorfismo.

Decimos que $\pi: \Pi_1(Y, y) \to \mathfrak{S}_n$ es *la representación inducída por (X, p) respecto a $\{\alpha_i\}$*. Este homomorfismo depende de la elección del conjunto completo de representantes de clases laterales izquierdas $\{\alpha_i\}$. Sin embargo, si $\{\alpha'_i\}$ es otro conjunto completo de representantes de clases laterales izquierdas de $p_*\Pi_1(X,x)$ en $\Pi_1(Y,y)$, entonces $\alpha'_i = \alpha_{\lambda(i)}\varsigma_i$ para toda $1 \leq i \leq n$. Como la familia $\{\alpha_i p_*\Pi_1(X,x)\}$ es ajena, así como la familia $\{\alpha'_i p_*\Pi_1(X,x)\}$, entonces λ es un elemento de $\mathfrak{S}_n$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \gamma\alpha'_i &= \gamma\alpha_{\lambda(i)}\varsigma_i \\ &= \alpha_{\pi_\gamma\lambda(i)}\gamma_{\lambda(i)}\varsigma_i \\ &= \alpha'_{\lambda^{-1}\pi_\gamma\lambda(i)}\varsigma^{-1}_{\lambda^{-1}\pi_\gamma\lambda(i)}\gamma_{\lambda(i)}\varsigma_i \quad , \end{aligned}$$

de manera que si $\pi'\colon\Pi_1(Y,y) \to \mathfrak{S}_n$ es la representación inducída por (X,p) respecto a $\{\alpha'_i\}$, tenemos que $\pi'(\gamma) = \lambda^{-1}\pi(\gamma)\lambda$, es decir, $\pi\colon\Pi_1(Y,y) \to \mathfrak{S}_n$ y $\pi'\colon\Pi_1(Y,y) \to \mathfrak{S}_n$ son homomorfismos equivalentes. De esta manera podemos decir que $\pi\colon\Pi_1(Y,y) \to \mathfrak{S}_n$ es *la representación inducida por* p.

Teorema de clasificación de cubiertas topológicas. *Existe una correspondencia biyectiva entre* $H(Y,n)$ *y* $Hom(\Pi_1(Y,y),\mathfrak{S}_n)$.

Prueba. Sea (X,p) un representante de una clase en $H(Y,n)$. Consideremos la representación $\pi\colon\Pi_1(Y,y) \to \mathfrak{S}_n$ inducida por p. Como π coincide con el homomorfismo inducido por la acción $\Pi_1(Y,y) \times p^{-1}(y) \xrightarrow{a} p^{-1}(y)$, tenemos que la imagen de $\Pi_1(Y,y)$ bajo π es un subgrupo transitivo de $\mathfrak{S}_n$ y por lo tanto que π define un elemnto en $Hom(\Pi_1(Y,y),\mathfrak{S}_n)$.
Si (X,p) y (X',p') son cubiertas topológicas equivalentes de Y de orden n, con representaciones $\pi\colon\Pi_1(Y,y) \to \mathfrak{S}_n$ y $\pi'\colon\Pi_1(Y,y) \to \mathfrak{S}_n$ inducidas por p y p' respectivamente respecto a $\{\alpha_i\}$ y $\{\alpha'_i\}$, como $p_*\Pi_1(X,x)$ y $p'_*\Pi_1(X',x')$ estan en la misma clase de conjugación, existe $\lambda \in \mathfrak{S}_n$ tal que $\alpha'_i = \alpha_{\lambda(i)}\varsigma_i$. Por lo tanto $\pi'(\gamma) = \lambda^{-1}\pi(\gamma)\lambda$ para todo $\gamma \in \Pi_1(Y,y)$. Con esto le hemos asociado a cada elemento de $H(Y,n)$ un elemento de $Hom(\Pi_1(Y,y),\mathfrak{S}_n)$.

Sea $[\pi\colon\Pi_1(Y,y) \to \mathfrak{S}_n]$ una clase de equivalencia en $Hom(\Pi_1(Y,y),\mathfrak{S}_n)$. Como $\mathfrak{S}_{n-1}$ es un subgrupo de $\mathfrak{S}_n$ de índice n, y la imagen de Π_1 bajo π es un subgrupo transitivo de $\mathfrak{S}_n$, entonces $\pi^{-1}(\mathfrak{S}_{n-1})$ es un subgrupo de $\Pi_1(Y,y)$ de índice n. Por la proposición 6 existe una cubierta topológica (X,p) de Y de orden n.
Si $\pi\colon\Pi_1(Y,y) \to \mathfrak{S}_n$ y $\pi'\colon\Pi_1(Y,y) \to \mathfrak{S}_n$ representan la misma clase de equivalencia en $Hom(\Pi_1(Y,y),\mathfrak{S}_n)$, entonces $\pi^{-1}(\mathfrak{S}_{n-1})$ y $\pi'^{-1}(\mathfrak{S}_{n-1})$ son subgrupos conjugados de $\Pi_1(Y,y)$. Por la proposición 5 las correspondientes cubiertas topológicas (X,p) y $X' \xrightarrow{p'} Y$ son equivalentes. Con esto le hemos asociado a cada elemento de $Hom(\Pi_1(Y,y),\mathfrak{S}_n)$ un elemento de $H(Y,n)$, lo cual establece la biyección entre $H(Y,n)$ y $Hom(\Pi_1(Y,y),\mathfrak{S}_n)$. ∎

2. Cubiertas holomorfas.

Introducción. Sea (X, p) una cubierta topológica de Y de orden n. Si Y es una superficie de Riemann entonces utilizando la estructura holomorfa en Y se le puede dar una estructura de superficie de Riemann a X tal que $p: X \longrightarrow Y$ es holomorfa. En este capítulo consideramos funciones holomorfas entre superficies de Riemann compactas y vemos estas funciones determinan cierto tipo de cubiertas. En particular se verá que toda superficie de Riemann compacta se puede ver como una cubierta (de cierto tipo) del espacio proyectivo $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Sean X y Y superficies de Riemann, y $X \xrightarrow{p} Y$ es una función holomorfa (no-constante). Para todo punto x en X, existe un entero $k(x) \geq 1$ y cartas (U, φ) en X y (V, ψ) en Y tal que $x \in U$ y $p(x) \in V$, en donde la composición $P = \psi p \varphi^{-1}: U \longrightarrow V$ está dada por $P(z) = z^{k(x)}$, para toda $z \in U$. Al número $k(x)$ se le llama el *índice de ramificación* de p en x, y si $k(x) > 1$, se dice que p es *ramificada* en x. Un punto $y \in Y$ es de *ramificación* si p es ramificada en algun punto de $p^{-1}(y)$. Al conjunto de puntos de ramificación se le llama el *locus de ramificación* de p. Una *cubierta holomorfa no-ramificada de* Y es una función holomorfa $X \xrightarrow{p} Y$ sin puntos de ramificación.

Proposición 1 (Forster [1,p.21]). *Sean X y Y superficies de Riemann, y $p: X \longrightarrow Y$ una función holomorfa no-constante. Entonces p no tiene puntos de ramificación si y solo si p es un homeomorfismo local.*

Prueba. Supongamos que $p: X \longrightarrow Y$ no tiene puntos de ramificación, y sea x un punto arbitrario en X. Entonces existe una vecindad U de x tal que $p|_U$ es inyectiva. Como p es continua y abierta, la restricción $p|_U$ es un homeomorfismo de U en el abierto $V = p(U)$. Por lo tanto, p es un homeomorfismo local.

Recíprocamente, supongamos que $p: X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo local. Entonces, para cada $x \in X$, existe una vecindad U de x que es mapeada homeomorficamente por p en un subconjunto abierto de Y. En particular $p|_U$ es inyectiva, y por lo tanto, p es no-ramificada. ∎

Proposición 2 (Forster [1,p.28]). *Supongamos que X y Y son superficies de Riemann compactas, y sea $p: X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo local. Entonces p es una cubierta topológica de Y.*

Prueba. Sea y un punto arbitrario en Y. Como $p^{-1}(y)$ es un subconjunto discreto de X y X es compacto, $p^{-1}(y)$ es finito; sea $p^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Como p es un homeomorfismo local, para cada $1 \leq i \leq n$, existen vecindades W_i de x_i y V_i de y tales que $p|: W_i \longrightarrow V_i$ es un homeomorfismo. Podemos suponer que para $i \neq j$, $W_i \cap W_j = \emptyset$. Entonces, como $W_1 \cup \ldots \cup W_n$ es una vecindad de $p^{-1}(y)$, existe una vecindad $V \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_n$ de y tal que $p^{-1}(V) \subseteq W_1 \cup \ldots \cup W_n$. Sea $U_i = W_i \cap p^{-1}(V)$, entonces

(*i*) $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$, (*ii*) $p^{-1}(V) = U_1 \cup \ldots \cup U_n$,

(*iii*) Las restricciones $p|: U_i \to V$ son todas homeomorfismos.

Por lo tanto, p es una cubierta topológica de Y. ∎

De las dos proposiciones anteriores, tenemos que si $p: X \to Y$ es una función holomorfa no-constante entre superficies de Riemann compactas sin puntos de ramificación, entonces p es una cubierta topológica de Y de orden n, en donde $n < \infty$ es la cardinalidad de la imagen inversa de cualquier punto en Y.

Nota 3. Si $X \xrightarrow{p} Y$ es una función holomorfa entonces al quitar el locus de ramificación en Y y considerar la restricción de p, se obtiene una cubierta holomorfa no-ramificada, y por la proposición 2, es una cubierta topológica de orden n. Como corolario de la proposición 2 y el teorema de clasificación de cubiertas topológicas tenemos el siguinte resultado:

Corolario 4. *Sea Y una superficie de Riemann compacta, y A un subconjunto discreto de Y. El conjunto de clases de equivalencia de cubiertas holomorfas no-ramificadas de $Y - A$ de orden n esta en correspondencia 1-1 con el conjunto $Hom(\Pi_1(Y - A, y), \mathfrak{S}_n)$.*

Sean X y Y superficies de Riemann compactas, y sea $X \xrightarrow{p} Y$ una función holomorfa. Entonces el locus de ramificación A de p es un conjunto discreto y por lo tanto es un conjunto finito. La restricción $X - p^{-1}A \xrightarrow{p|} Y - A$ es una cubierta holomorfa no-ramificada de $Y - A$ de orden n; la cardinalidad de la imagen inversa de cualquier punto y' en $Y - A$ es n. En caso que y este en A, el número n es interpretado de la siguiente manera.

Proposición 5 (Forster [1,p.29]). *La suma de los índices de ramificación sobre los puntos de $p^{-1}(y)$ es independiente del punto y. De hecho, $n = \sum_{x \in p^{-1}(y)} k(x)$.*

Prueba. Sea y un punto de ramificación de p en Y, y sea $p^{-1}(y) = \{x_1, \ldots x_r\}$. Denotemos por k_i al índice de ramificación de p en x_i. Existen vecindades U_i de x_i y V_i de y tales que para todo $z \in V_i - \{y\}$, el conjunto $p^{-1}(z) \cap U_i$ consiste de exactamente k_i puntos. Podemos encontrar una vecindad $V \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_r$ de y tal que $p^{-1}(V) \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_r$. Por lo tanto, para cualquier punto $y \in V \cap Y - A$, $p^{-1}(y)$ consiste de exactamente $k_1 + \ldots + k_r$ puntos. Por otro lado, la cardinalidad de $p^{-1}(y)$ es n. En consecuencia, $n = \sum_{x \in p^{-1}(y)} k(x)$. ∎

Si $p: X \to Y$ es una función holomorfa entonces por la proposición 5 tenemos que para todo $y \in Y$ existe un número n asociado a $p^{-1}(y)$. Esto nos permite generalizar el concepto de cubierta no-ramificada.

Definición. Una *cubierta holomorfa ramificadade Y de orden n con locus de ramificación A* es una función holomorfa $X \xrightarrow{p} Y$ con locus de ramificación A tal que la restricción es una cubierta topológica de orden n. Dos cubiertas holomorfas ramificadas $X_1 \xrightarrow{p_1} Y$ y $X_2 \xrightarrow{p_2} Y$ de Y de orden n son *equivalentes*, si existe un biholomorfismo $X_1 \xrightarrow{f} X_2$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Al conjunto de clases de equivalencia de cubiertas holomorfas ramificadas de Y con locus de ramificación A lo denotamos por $H(Y, A, n)$

Nota 6. Hasta aquí no hemos utilizado la compacidad de las superficies de Riemann. Solo el hecho de que las funciones son propias.

Lema. *Sea $D^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 <| z |< 1\}$ el disco agujerado, y X una superficie de Riemann. Sea $X \xrightarrow{\pi} D^*$ una cubierta holomorfa no-ramificada de D^*.*

(i) Si la cubierta es de orden infinito, entonces existe un biholomorfismo ϕ de X en el plano superior izquierdo H, tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & H \arrow[dl, "exp"] \\ & D^* & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

(ii) Si la cubierta es de orden finito k, entonces existe un biholomorfismo $X \xrightarrow{\phi} D^*$, tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & D^* \arrow[dl, "p_k"] \\ & D^* & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, en donde $D^* \xrightarrow{p_k} D^*$ está definida como $p_k(z) = z^k$.

Prueba. Como H es simplemente conexo, $H \xrightarrow{exp} D^*$ es la cubriente universal de D^*. Por lo tanto, existe una función holomorfa $\psi: H \to X$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "exp"'] & & X \arrow[dl, "\pi"] \\ & D^* & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, y por la proposición 1.7, existe un subgrupo $G \subseteq Aut_{D^*}(H)$ tal que $G \cong \Pi_1(X)$. Sea $\tau_n: H \to H$ la función definida por $\tau_n(z) = z + 2\pi n$. Como $Aut_{D^*}(H) \cong$

$\Pi_1(D^*) \cong \mathbb{Z}$ entonces G es la identidad (en caso que el orden sea ∞) ó $G = \{r_{nk} : n \in \mathbb{Z}\}$ (en caso que el orden sea k), pues $Aut(H, D^*) = \{H \xrightarrow{r_n} H : n \in \mathbb{Z}\}$.

Si G consiste únicamente de la identidad, entonces X es simplemente conexo y por la unicidad de la cubriente universal, ψ es un biholomorfismo, de donde se tiene (i).

Si G es de orden $k \neq \infty$, entonces sea $H \xrightarrow{g} D^*$ la cubierta topológica de D^* definida por $g(z) = exp(z/k)$. Se tiene entonces que $g(z) = g(z')$ si y solo si $\tau(z) = z'$ para algún $\tau \in G$, de manera que existe una biyección $X \xrightarrow{\phi} D^*$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[rr, "\phi"] & & D^* \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Pero ψ y g son biholomorfismos locales, por lo que ϕ es un biholomorfismo tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & D^* \arrow[dl, "p_k"] \\ & D^* & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. ∎

Teorema de extensión de Riemann. *Sea Y una superficie de Riemann compacta y $A \subseteq Y$ discreto. Si $X' \xrightarrow{p'} Y - A$ es una cubierta holomorfa no-ramificada propia, entonces p' se extiende a una cubierta holomorfa ramificada de Y con locus de ramificación A.*

Prueba. Sea $X' \xrightarrow{p'} Y - A$ una cubierta holomorfa no-ramificada de Y de orden n, y para cada $a \in A$, sea (U_a, z_a) una carta coordenada tal que $z_a(a) = 0$, $z_a(U_a) \cong \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $U_a \cap U_{a'} = \emptyset$ si $a \neq a'$.

Sea $U_a^* = U - a$. Entonces $p'^{-1}(U_a^*)$ solo tiene un número finito de componentes conexas $V_{a_1}^*$, $1 \leq i \leq n(a)$, y $V_{a_i}^* \xrightarrow{p'|} U_a^*$ es una cubierta holomorfa no-ramificada. Sea k_{a_i} el grado de esta cubierta. Por el lema anterior, existe un biholomorfismo $V_{a_i}^* \xrightarrow{\varsigma_{a_i}} D^*$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V_{a_i}^* \arrow[r, "\varsigma_{a_i}"] \arrow[d, "p'"'] & D^* \arrow[d, "p_{k_{a_i}}"] \\ U_a^* \arrow[r, "z_a"] & D^* \end{tikzcd}$$

es conmutativo, en donde $p_{k_{a_i}}(z) = z^{k_{a_i}}$.

Sean q_{a_i}, $a \in A$ y $1 \leq i \leq n(a)$, puntos distintos de un conjunto ajeno a X'. Entonces la topología de X' de extiende a una única topología en $X = X' \cup \{q_{a_i}\}$ tal que si $W \subseteq X$ es un elemento de la base que contiene a a, entonces $\{q_{a_i}\} \cup (p'^{-1} \cap V_{a_i}^*) \subseteq X$ es un elemento de la base que contiene a q_{a_i}. Con esta topología X es un espacio compacto y Hausdorff, y $X' \xrightarrow{p'} Y - A$ se extiende a una función continua $X \xrightarrow{p} Y$ donde $p(q_{a_i}) = a$.

Para definir una estructura compleja en X, además de las cartas coordenadas de X', consideremos los conjuntos de la forma $V_{a_i} = V_{a_i}^* \cup \{q_{a_i}\}$ y los homeomorfismos $V_{a_i} \xrightarrow{\zeta_{a_i}} D$. Entonces X es una superficie de Riemann compacta y p una cubierta holomorfa ramificada de Y tal que $p\,|_{X'} = p'$. ∎

Corolario 7. *Sea Y una superficie de Riemann compacta, y A un subconjunto discreto de Y. Existe una correspondencia 1-1 entre el conjunto de clases de equivalencia de cubiertas holomorfas no-ramificadas de $Y - A$ de orden n y el conjunto de clases de equivalencia de cubiertas holomorfas ramificadas de Y de orden n con locus de ramificación A.*

Gunning en [1,p.57] demuestra que toda superficie de Riemann compacta Y admite una función meromorfa no-constante y que las funciones meromorfas en Y estan en correspondencia 1-1 con las funciones holomorfas de Y en $\mathbb{P}^1$. Por lo tanto toda superficie de Riemann compacta se puede ver como una cubierta ramificada de $\mathbb{P}^1$.

Para concluir este capítulo probamos la fórmula de Riemann-Hurwitz que relaciona los géneros entre las superficies de Riemann de una cubierta holomorfa ramificada.

Proposición 8. (Fórmula de Riemann-Hurwitz). *Sean X y Y superficies de Riemann compactas de género g y g' respectivamente, y sea $X \xrightarrow{p} Y$ una cubierta holomorfa ramificada de Y de orden n. Si $b = \sum_{x \in X} (k(x) - 1)$, entonces*

$$2 - 2g = n(2 - 2g') - b.$$

Prueba. Hagamos una triangulación de Y, de tal manera que cada punto de ramificación sea un vértice de ésta, y que la imagen inversa de cualquier 2-simplejo singular bajo p sea la unión ajena de n componentes cada una homeomorfa a este 2-simplejo. Sea n_i el numero de i-simplejos de esta triangulación. Claramente la triangulación inducida en X tendrá $nn_0 - b$ vértices, nn_1 aristas y nn_2 caras. De manera que si $\chi(X)$ es la caracteristica de Euler de X, y $\chi(Y)$ es la de Y, entonces $\chi(X) = n\chi(Y) - b$ (ver Springer [1,p.275]) y como $\chi(X) = 2 - 2g$ y $\chi(Y) = 2 - 2g'$ (ver Greenberg [1,p.100]), tenemos que $2 - 2g = n(2 - 2g') - b$. ∎

3. Cubiertas del tipo (m, n).

Introducción. Sea Y una variedad topológica y $(\tilde{Y}, q)$ la cubriente universal de Y. Por la propiedad universal tenemos que q se factoriza a través de cubiertas topologicas. En este capítulo estudiamos cubiertas topológicas de Y que se pueden factorizar a través de otras cubiertas. A este tipo de cubiertas las llamamos cubiertas topológicas del tipo (m, n). Al igual que en las cubiertas topológicas, estudiamos las representaciones del grupo fundamental $\Pi_1(Y, y)$ en algun subgrupo del grupo de permutaciones. El teorema de extensión de Riemann nos dará cierta información cuando Y es una superficie de Riemann compacta.

Definición. Sea Y una variedad topológica. Una *cubierta topológica de Y del tipo* (m, n), que denotaremos por $(\tilde{X}, \tilde{p}; X, p)$, consiste de una cubierta topológica $\tilde{X} \xrightarrow{\tilde{p}} X$ de orden m y de una cubierta topológica $X \xrightarrow{p} Y$ de orden n.

Dos cubiertas topológicas $(\tilde{X}_1, \tilde{p}_1; X_1, p_1)$ y $(\tilde{X}_2, \tilde{p}_2; X_2, p_2)$ de Y del tipo (m, n) son *equivalentes* si existen homeomorfismos $\tilde{X}_1 \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{X}_2$ y $X_1 \xrightarrow{f} X_2$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}_1 \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\tilde{p}_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[d, "\tilde{p}_2"] \\
X_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "p_2"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Sea $H(Y, (m, n))$ el conjunto de clases de equivalencia de cubiertas topológicas de Y del tipo (m, n).

Para estudiar $H(Y, (m, n))$ recordaremos el concepto de producto semidirecto entre dos grupos.

Sean G_1 y G_2 grupos, y $\theta: G_1 \to Aut(G_2)$ un homomorfismo; denotemos por θ_{g_1} a la imagen de g_1 bajo θ. El *producto semidirecto* de G_1 y G_2 respecto a θ, denotado por $G_1 \times_\theta G_2$, es el grupo en $G_1 \times G_2$ con producto $(g_1, g_2)(g_1', g_2') = (g_1 g_1', \theta_{g_1'}(g_2) g_2'))$. Satisface las siguientes propiedades:

(*i*) Los homomorfismos $\iota_1: G_1 \to G_1 \times_\theta G_2$ y $\iota_2: G_2 \to G_1 \times_\theta G_2$, definidos como $\iota_1(g_1) = (g_1, 1)$ y $\iota_2(g_2) = (1, g_2)$, son inyectivos.

(*ii*) $\iota_2(G_2)$ es normal en $G_1 \times_\theta G_2$.

(*iii*) $\iota_1(G_1) \cong G_1 \times_\theta G_2 / \iota_2(G_2)$.

Consideremos el grupo de permutaciones $\mathfrak{S}_n$, y sea $\mathfrak{S}_m^n = \mathfrak{S}_m \times \ldots \times \mathfrak{S}_m$ el producto directo de n copias de $\mathfrak{S}_m$. Sea $\theta: \mathfrak{S}_n \to Aut(\mathfrak{S}_m^n)$ el homomorfismo definido por $\theta_\sigma(\tau_1, \ldots, \tau_n) = (\tau_{\sigma(1)}, \ldots, \tau_{\sigma(n)})$. El producto semidirecto $\mathfrak{S}_n \times_\theta \mathfrak{S}_m^n$ además satisface:

(iv) La proyección $\wp: \mathfrak{S}_n \times_\theta \mathfrak{S}_m^n \to \mathfrak{S}_n$ es suprayectiva.

(v) El homomorfismo $\ell: \mathfrak{S}_n \times_\theta \mathfrak{S}_m^n \to \mathfrak{S}_{mn}$ definido como

$$\ell(\sigma, (\tau_1, \ldots, \tau_n))(i, j) = (\sigma(i), \tau_i(j))$$

es inyectivo.

Sea $(\tilde{X}, \tilde{p}; X, p)$ una cubierta topológica de Y del tipo (m, n). Entonces tenemos que el índice de $\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ en $\Pi_1(X, x)$ es m, y el índice de $\Pi_1(X, x)$ en $\Pi_1(Y, y)$ es n.

Si $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq n}$ y $\{\beta_j\}_{1 \leq j \leq m}$ son conjuntos completos de representantes de clases laterales izquierdas de $\Pi_1(X, x)$ en $\Pi_1(Y, y)$ y de $\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ en $\Pi_1(X, x)$, y $\pi: \Pi_1(Y, y) \to \mathfrak{S}_n$ y $\tilde{\pi}: \Pi_1(X, x) \to \mathfrak{S}_m$, son las representaciones inducídas por p y $\tilde{p}$ respecto a $\{\alpha_i\}$ y $\{\beta_j\}$, habiamos visto en el capítulo 1 que para toda clase de homotopía γ en $\Pi_1(Y, y)$, existen clases de homotopía únicas $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ en $\Pi_1(Y, y)$ tales que $\gamma\alpha_i = \alpha_{\pi_\gamma(i)}\gamma_i$. Consideremos la función $\phi: \Pi_1(Y, y) \to \mathfrak{S}_n \times_\theta \Pi_1(X, x)^n$ definida como $\phi(\gamma) = (\pi_\gamma, (\gamma_1, \ldots, \gamma_n))$. Entonces tenemos definida una función $\varphi: \Pi_1(Y, y) \to \mathfrak{S}_n \times_\theta \mathfrak{S}_m^n$ como la composición $(1 \times \tilde{\pi}^n)\phi$

$$\begin{tikzcd}
\Pi_1(Y, y) \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathfrak{S}_n \times_\theta \Pi_1(X, x)^n \arrow[d, "1 \times \tilde{\pi}^n"] \\
& \mathfrak{S}_n \times_\theta \mathfrak{S}_m^n
\end{tikzcd}$$

en donde $1 \times \tilde{\pi}^n: \mathfrak{S}_n \times_\theta \Pi_1(X, x)^n \to \mathfrak{S}_n \times_\theta \mathfrak{S}_m^n$ es el homomorfismo definido como $(1 \times \tilde{\pi}^n)(\sigma, (\tau_1, \ldots, \tau_n)) = (\sigma, (\tilde{\pi}_{\tau_1}, \ldots, \tilde{\pi}_{\tau_n}))$.

Proposición 1. *Sea $(\tilde{X}, \tilde{p}; X, p)$ una cubierta topológica de Y del tipo (m, n). Entonces la función $\varphi: \Pi_1(Y, y) \to \mathfrak{S}_n \times_\theta \mathfrak{S}_m^n$ es un homomorfismo.*

Prueba. Como $\varphi = (1 \times \tilde{\pi}^n)\phi$, es suficiente con ver que ϕ es un homomorfismo. Para esto, sean γ y γ' clases de homotopía en $\Pi_1(Y, y)$, y supongamos que respecto a $\{\alpha_i\}$ y $\{\beta_j\}$ tenemos que $\gamma\alpha_i = \alpha_{\pi_\gamma(i)}\gamma_i$ y $\gamma'\alpha_i = \alpha_{\pi_{\gamma'}(i)}\gamma'_i$. Entonces

$$\begin{aligned}
\gamma\gamma'\alpha_i &= \gamma\alpha_{\pi_{\gamma'}(i)}\gamma'_i \\
&= \alpha_{\pi_\gamma\pi_{\gamma'}(i)}\gamma_{\pi_{\gamma'}(i)}\gamma'_i \\
&= \alpha_{\pi_{\gamma\gamma'}(i)}\gamma_{\pi_{\gamma'}(i)}\gamma'_i \quad ,
\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\phi(\gamma\gamma') &= (\pi_{\gamma\gamma'}, (\gamma_{\pi_{\gamma'}(1)}\gamma'_1, \ldots, \gamma_{\pi_{\gamma'}(n)}\gamma'_n)) \\
&= (\pi_\gamma \pi_{\gamma'}, (\gamma_{\pi_{\gamma'}(1)}\gamma'_1, \ldots, \gamma_{\pi_{\gamma'}(n)}\gamma'_n)) \\
&= (\pi_\gamma, (\gamma_1, \ldots, \gamma_n))(\pi_{\gamma'}, (\gamma'_1, \ldots, \gamma'_n)) \\
&= \phi(\gamma)\phi(\gamma') \quad . \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Decimos que $\varphi\colon \Pi_1(Y, y) \to \mathfrak{S}_n \times_\theta \mathfrak{S}_m^n$ es *la representación inducida por* $(\tilde{p}, p)$ *respecto a* $\{\alpha_i\}$ *y* $\{\beta_j\}$.

Si ahora consideramos representaciones $\rho\colon \Pi_1(Y, y) \to \mathfrak{S}_n$ y $\tilde{\rho}\colon \Pi_1(X, x) \to \mathfrak{S}_m$ inducidas por p y $\tilde{p}$ respecto a distintos conjuntos $\{\alpha'_i\}$ y $\{\beta'_j\}$ de representantes de clases laterales izquierdas de $\Pi_1(X, x)$ en $\Pi_1(Y, y)$ y de $\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ en $\Pi_1(X, x)$, entonces existe $\lambda \in \mathfrak{S}_n$ y $\mu \in \mathfrak{S}_m$ tales que $\alpha'_i = \alpha_{\lambda(i)}\varsigma_i$ y $\beta'_j = \beta_{\mu(j)}\xi_j$, con $\varsigma_i \in \Pi_1(X, x)$ y $\xi_j \in \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$. Sea $\varphi'\colon \Pi_1(Y, y) \to \mathfrak{S}_n \times_\theta \mathfrak{S}_m^n$ la representación inducida por $(\tilde{p}, p)$ respecto a $\{\alpha'_i\}$ y $\{\beta'_j\}$.

Proposición 2. *Los homomorfismos* $\varphi, \varphi'\colon \Pi_1(Y, y) \to \mathfrak{S}_n \times_\theta \mathfrak{S}_m^n$ *son equivalentes.*

Prueba. Sea γ una clase de homotopía en $\Pi_1(Y, y)$, y supongamos que respecto a $\{\alpha_i\}$ tenemos que $\gamma\alpha_i = \alpha_{\pi_\gamma(i)}\gamma_i$, y que respecto a $\{\alpha'_i\}$ tenemos que $\gamma\alpha'_i = \alpha'_{\rho_\gamma(i)}\delta_i$. Entonces

$$\begin{aligned}
\gamma\alpha'_i &= \gamma\alpha_{\lambda(i)}\varsigma_i \\
&= \alpha_{\pi_\gamma\lambda(i)}\gamma_{\lambda(i)}\varsigma_i \\
&= \alpha'_{\lambda^{-1}\pi_\gamma\lambda(i)}\varsigma^{-1}_{\lambda^{-1}\pi_\gamma\lambda(i)}\gamma_{\lambda(i)}\varsigma_i \quad ,
\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\phi'(\gamma) &= (\lambda^{-1}\pi_\gamma\lambda, (\varsigma^{-1}_{\lambda^{-1}\pi_\gamma\lambda(1)}\gamma_{\lambda(1)}\varsigma_1, \ldots, \varsigma^{-1}_{\lambda^{-1}\pi_\gamma\lambda(n)}\gamma_{\lambda(n)}\varsigma_n)) \\
&= (\lambda^{-1}, (\varsigma_{\lambda^{-1}(1)}, \ldots, \varsigma_{\lambda^{-1}(n)}))\phi(\gamma)(\lambda, (\varsigma_1, \ldots, \varsigma_n)) \\
&= (\lambda, (\varsigma_1, \ldots, \varsigma_n))^{-1}\phi(\gamma)(\lambda, (\varsigma_1, \ldots, \varsigma_n)) \quad .
\end{aligned}$$

Esto prueba que los homomorfismos ϕ y ϕ' son equivalentes. Como $\varphi = (1_{\mathfrak{S}_n} \times_\theta \tilde{\pi}^n)\phi$ y $\varphi' = (1_{\mathfrak{S}_n} \times_\theta \tilde{\rho}^n)\phi'$, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi'(\gamma) &= (1_{\mathfrak{S}_n} \times_\theta \tilde{\rho}^n)\phi'(\gamma) \\
&= (1_{\mathfrak{S}_n} \times_\theta \tilde{\rho}^n)(\lambda, (\varsigma_1, \ldots, \varsigma_n))^{-1}\phi(\gamma)(\lambda, (\varsigma_1, \ldots, \varsigma_n)) \\
&= (\lambda, (\rho_{\varsigma_1}, \ldots, \rho_{\varsigma_n}))^{-1}(1_{\mathfrak{S}_n} \times_\theta \tilde{\pi}^n)\phi(\gamma)(\lambda, (\rho_{\varsigma_1}, \ldots, \rho_{\varsigma_n})) \\
&= (\lambda, (\mu\rho_{\varsigma_1}, \ldots, \mu\rho_{\varsigma_n}))^{-1}(1_{\mathfrak{S}_n} \times_\theta \tilde{\pi}^n)\phi(\gamma)(\lambda, (\mu\rho_{\varsigma_1}, \ldots, \mu\rho_{\varsigma_n})) \\
&= (\lambda, (\mu\rho_{\varsigma_1}, \ldots, \mu\rho_{\varsigma_n}))^{-1}\varphi(\gamma)(\lambda, (\mu\rho_{\varsigma_1}, \ldots, \mu\rho_{\varsigma_n})) \quad ,
\end{aligned}$$

de manera que si $\chi = (\lambda,(\mu\rho_{\varsigma_1},\ldots,\mu\rho_{\varsigma_n}))$, tenemos que $\varphi'(\gamma) = \chi^{-1}\varphi(\gamma)\chi$, lo cual prueba que φ y φ' son equivalentes. ∎

Teorema 3. *Sea Y una variedad topologica. Si $(\tilde{X}_1,\tilde{p}_1;X_1,p_1)$ y $(\tilde{X}_2,\tilde{p}_2;X_2,p_2)$ son cubiertas topológicas de Y del tipo (m,n) equivalentes, entonces las representaciones inducidas φ_1 y φ_2 son equivalentes.*

Prueba. Sean $(\tilde{X}_1,\tilde{p}_1;X_1,p_1)$ y $(\tilde{X}_2,\tilde{p}_2;X_2,p_2)$ cubiertas topológicas de Y del tipo (m,n) equivalentes, y sean $\varphi_1\colon\Pi_1(Y,y)\to\mathfrak{S}_n\times_\theta\mathfrak{S}^n_m$ y $\varphi_2\colon\Pi_1(Y,y)\to\mathfrak{S}_n\times_\theta\mathfrak{S}^n_m$ los homomorfismos inducidos por $(\tilde{p}_1,p_1)$ y $(\tilde{p}_2,p_2)$. Entonces $\tilde{P}_{1*}\Pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)$ y $\tilde{P}_{2*}\Pi_1(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2)$, asi como $P_{1*}\Pi_1(X_1,\tilde{x}_1)$ y $P_{2*}\Pi_1(X_2,\tilde{x}_2)$, son isomorfos; por lo tanto conjugados. Por la proposición 2 tenemos que φ y φ' son equivalentes. ∎

Supongamos que $(\tilde{X},\tilde{p};X,p)$ es una cubierta topológica de Y del tipo (m,n) con homomorfismo inducido $\varphi\colon\Pi_1(Y,y)\to\mathfrak{S}_n\times_\theta\mathfrak{S}^n_m$. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathfrak{S}_{mn} \\
\Pi_1(Y,y) \arrow[urr, dashed, "\varrho"] \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[drr, "\pi"'] & & \mathfrak{S}_n\times_\theta\mathfrak{S}^n_m \arrow[u, "\ell"'] \arrow[d, "\wp"] \\
 & & \mathfrak{S}_n
\end{tikzcd}$$

en donde $\varrho\colon\Pi_1(Y,y)\to\mathfrak{S}_{mn}$ es la representación inducida por la cubierta topológica $\tilde{X}\xrightarrow{p\tilde{p}}Y$ y $\pi\colon\Pi_1(Y,y)\to\mathfrak{S}_n$ es la representación inducida por la cubierta topológica $X\xrightarrow{p}Y$, es decir $\pi=\wp\varphi$ y $\varrho=\ell\varphi$.

El diagrama anterior nos da condiciones necesarias y suficientes para que una cubierta topologica $(\tilde{X},q)$ de Y se factorice en cubiertas $(\tilde{X},\tilde{p})$ y (X,p)

Teorema 4. *Sea $\tilde{X}\xrightarrow{q}Y$ una cubierta topológica de Y de orden mn con homomorfismo inducido $\varrho\colon\Pi_1(Y,y)\to\mathfrak{S}_{mn}$, y sea $X\xrightarrow{p}Y$ una cubierta topológica de Y de orden n con homomorfismo inducido $\pi\colon\Pi_1(Y,y)\to\mathfrak{S}_n$. Entonces existe una cubierta topológica $\tilde{X}\xrightarrow{\tilde{p}}X$ de X de orden m tal que $q=p\tilde{p}$ si y solo si existe un homomorfismo $\varphi\colon\Pi_1(Y,y)\to\mathfrak{S}_n\times_\theta\mathfrak{S}^n_m$ tal que la imagen de $\Pi_1(Y,y)$ bajo φ es un subgrupo transitivo de $\mathfrak{S}_n\times_\theta\mathfrak{S}^n_m$, con $\pi=\wp\varphi$ y $\varrho=\ell\varphi$.*

Prueba. Supongamos que $\varphi\colon\Pi_1(Y,y)\to\mathfrak{S}_n\times_\theta\mathfrak{S}^n_m$ es un homomorfismo tal que $\pi=\wp\varphi$ y $\varrho=\ell\varphi$. Con i_0 y j_0 fijos, identifiquemos a $\mathfrak{S}_{n-1}$ (resp. $\mathfrak{S}_{mn-1}$) con el subgrupo de $\mathfrak{S}_n$ (resp. $\mathfrak{S}_{mn-1}$) que consiste de aquellas permutaciones en $\mathfrak{S}_n$ (resp. $\mathfrak{S}_{mn-1}$) que fijan el símbolo i_0 (resp. (i_0,j_0)).
Consideremos la función $\tilde{\pi}\colon\Pi_1(X,x)\to\mathfrak{S}_m$, en donde $\mathfrak{S}_{m-1}\subsetneq\mathfrak{S}_m$ consiste de aquellas permutaciones en $\mathfrak{S}_m$ que fijan j_0, definida de la siguiente manera: Si γ es una clase de

homotopía en $\Pi_1(X,x)$ y $\varphi p_*(\gamma) = (\sigma, (\tau_1, \ldots, \tau_n))$, definimos $\tilde{\pi}(\gamma)$ como τ_{i_0}.
Como $\Pi_1(X,x) \cong \pi^{-1}(\mathfrak{S}_{n-1})$, $\tilde{\pi}$ es un homomorfismo, y como $\Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}) \cong \varrho^{-1}(\mathfrak{S}_{mn-1})$, $\Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}) = \tilde{\pi}^{-1}(\mathfrak{S}_{m-1})$. Por el teorema 11 existe una cubierta topológica $\tilde{X} \xrightarrow{\tilde{p}} X$ de X de orden m que es tal que $p\tilde{p} = q$. ∎

Sea $\varphi: \Pi_1(Y,y) \to \mathfrak{S}_n \times_\theta \mathfrak{S}_m^n$ un homomorfismo tal que la imagen de $\Pi_1(Y,y)$ bajo φ es un subgrupo transitivo de $\mathfrak{S}_n \times_\theta \mathfrak{S}_m^n$. Entonces los homomorfismos $\wp\varphi$ y $\ell\varphi$ inducen cubiertas topológicas $X \xrightarrow{p} Y$ y $\tilde{X} \xrightarrow{q} Y$ de Y de orden n y mn respectivamente. Por el teorema anterior, existe una cubierta topológica $(\tilde{X},\tilde{p})$ de X de orden m tal que $(\tilde{X},\tilde{p};X,p)$ es una cubierta topológica de Y del tipo (m,n). Decimos que $(\tilde{X},\tilde{p};X,p)$ es *la cubierta inducida por* $\varphi_1: \Pi_1(Y,y) \to \mathfrak{S}_n \times_\theta \mathfrak{S}_m^n$.

Teorema 5. *Sea Y una variedad topológica y sean $\varphi_1: \Pi_1(Y,y) \to \mathfrak{S}_n \times_\theta \mathfrak{S}_m^n$ y $\varphi_2: \Pi_1(Y,y) \to \mathfrak{S}_n \times_\theta \mathfrak{S}_m^n$ dos homomorfismos equivalentes en $Hom(\Pi_1(Y,y), \mathfrak{S}_n \times_\theta \mathfrak{S}_m^n)$. Entonces las cubiertas inducidas $(\tilde{X}_1, \tilde{p}_1; X_1, p_1)$ y $(\tilde{X}_2, \tilde{p}_2; X_2, p_2)$ son equivalentes.*

Prueba. Si $\varphi_1: \Pi_1(Y,y) \to \mathfrak{S}_n \times_\theta \mathfrak{S}_m^n$ y $\varphi_2: \Pi_1(Y,y) \to \mathfrak{S}_n \times_\theta \mathfrak{S}_m^n$ son equivalentes, el teorema de clasificación para cubiertas topológicas implica que las cubiertas topológicas $X_1 \xrightarrow{p_1} Y$ y $X_2 \xrightarrow{p_2} Y$, son equivalentes, así como las cubiertas topológicas $\tilde{X}_1 \xrightarrow{p\tilde{p}_1} Y$ y $\tilde{X}_2 \xrightarrow{p\tilde{p}_2} Y$. Por lo tanto $(\tilde{X}_1, \tilde{p}_1; X_1, p_1)$ y $(\tilde{X}_2, \tilde{p}_2; X_2, p_2)$ son equivalentes. ∎

Como consecuencia de los teoremas 3 y 5 obtenemos el teorema de clasificación de cubiertas topologicas del tipo (m,n).

Corolario 6. (Clasificación de cubiertas topológicas del tipo (m,n)). *Sea Y una variedad topológica. Entonces los conjuntos $H(Y(m,n))$ y $Hom(\Pi_1(Y,y), \mathfrak{S}_n \times_\theta \mathfrak{S}_m^n)$ estan en correspondencia 1-1.*

Ahora consideremos el caso en que Y es una superficie de Riemann compacta.

Definición. Sea Y una superficie de Riemann, y A un subconjunto discreto de Y. Una *cubierta ramificada de Y del tipo (m,n) con locus de ramificación A*, que denotaremos por $(\tilde{X},\tilde{p};X,p)$, consiste de una cubierta holomorfa ramificada $X \xrightarrow{p} Y$ de Y de orden n con locus de ramificación A, y una cubierta holomorfa ramificada $\tilde{X} \xrightarrow{\tilde{p}} X$ de X de orden m con locus de ramificación $p^{-1}A$.

Dos cubiertas ramificadas $(\tilde{X}_1, \tilde{p}_1; X_1, p_1)$ y $(\tilde{X}_2, \tilde{p}_2; X_2, p_2)$ de Y del tipo (m,n) son *equivalentes* si existen biholomorfismos $\tilde{X}_1 \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{X}_2$ y $X_1 \xrightarrow{f} X_2$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}_1 \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\tilde{p}_1"'] & \tilde{X}_2 \arrow[d, "\tilde{p}_2"] \\
X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & X_2 \arrow[d, "p_2"] \\
& Y
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Sea $H(Y, A, (m, n))$ el conjunto de clases de equivalencia de cubiertas ramificadas de Y del tipo (m, n) con locus de ramificación A.

Como consecuencia del teorema de extensión de Riemann, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 7. *Sea Y una superficie de Riemann compacta, y A un subconjunto discreto de Y. Existe una correspondencia 1-1 entre $H(Y, A, (m, n))$ y $H(Y, (m, n))$.*

Como corolario del teorema de clasificación de cubiertas topológicas del tipo (m, n), tenemos el teorema de clasificación de cubiertas ramificadas del tipo (m, n).

Corolario 8. *Sea Y una superficie de Riemann compacta, y A un subconjunto discreto de Y. Entonces $H(Y, A, (m, n))$ y $Hom(\Pi_1(Y - A, y), \mathfrak{S}_n \times_\theta \mathfrak{S}_m^n)$ estan en correspondencia 1-1.*

Las cubiertas que hemos considerado en $H(Y, A, (m, n))$ ó en $H(Y, (m, n))$ han sido tales que las cubiertas $(\tilde{X}, \tilde{p})$ y (X, p) son ambas ramificadas ó no-ramificadas. Si $(\tilde{X}, \tilde{p})$ es no-ramificada y (X, p) es ramificada el problema de clasificación de estas cubiertas se complica.

Donagi en [2] considera el caso particular en que $(\tilde{X}, \tilde{p})$ es no-ramificada de orden 2 y (X, p) es ramificada de orden 4, así como la construcción de Recillas (ver Recillas [1]) en que $(\tilde{X}, \tilde{p})$ es no-ramificada de orden 2 y (X, p) es ramificada de orden 3.

Para el caso general no se conoce ningun resultado.

BIBLIOGRAFIA

Donagi, R.

1. The tetragonal construction, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 4 (1981), 181-185.
2. The Schottky problem, preprint.

Forster, O.

1. *Lectures on Riemann Surfaces*, Graduate texts in Mathematics 81, Springer-Verlag, Heidelberg (1980).

Fulton, W.

1. Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves, *Annals of Math.*, **90** (1969).

Greenberg, M.

1. *Lectures on algebraic topology*, Mathematics Lecture Note Series, W.A. Benjamin (1973).

Griffiths, P. and Harris, H.

1. *Principles of algebraic geometry*, Pure and applied Mathematics, John Wiley & Sons (1978).

Gunning, R.C.

1. *Lectures on Riemann surfaces*, Princeton Math. notes **2** (1966).

Hartshorne, R.

1. *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer- Verlag, Heidelberg (1977).

Massey, W.

1. *Introducción a la topología algebraica.*, Editorial Reverté, (1977).

Recillas, S.

1. Jacobians of curves with g_4^1 are Prym varietes of trigonal curves, *Bol. Soc. Mat. Mex.*, **19** (1974).