

01180

2413

13 MAR 1989

NO ADEUDA LIBROS  
EN BIBLIOTECA  
CENTRAL

TEORIA DE INFORMACION  
SOBRE  
CANALES DE COMUNICACION DE MULTIACCESO

Tesis Doctoral

por

Chaoming Zeng

División de Estudios de Posgrado  
Facultad de Ingeniería  
Universidad Nacional Autónoma de México

Abril, 1989

TELIS CON  
PALA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

## ABSTRACT

---

Chao-Ming Zeng,

"Information Theoretic Study of Multiaccess Communication Channels,"

Ph.D. dissertation,

Graduate School of Engineering, National University of Mexico, April 1989.

Multiaccess communications is a very interesting problem for both, the communication system designers and the information theorists. The information theoretic approach to multiaccess problem began with a now well-known coding theorem developed by Ahlswede and Liao, which deals with the fundamental problem of how much data or information can reliably be communicated from various terminals to a common receiver over a noisy multiaccess channel.

In this thesis a variety of multiaccess channels are studied from the point of view of multi-user information theory. First we consider a discrete memoryless multiaccess channel where the transmitters can observe different feedback signals from the output. Using the *backward decoding* and *superposition block Markov encoding* scheme, new achievable rate regions are obtained for a class of the generalized feedback channels. Our rate regions are larger than those previously presented in the literature and their characterization is very simple.

Next, the multiaccess problem with relay is formulated. For this channel (named *multiaccess-relay channel*), some tight inner bounds (achievable) and outer bounds to the capacity region are derived. The obtained result has an interesting interpretation for the case of an additive white Gaussian noise channel.

Finally we deal with Gaussian multiaccess channel with intersymbol interference and constrained inputs, which is in practice of great interest. The proposed channel model can be described as follows: the sum of two input signals is passed through a linear filter and added to a Gaussian noise of

# TEORIA DE INFORMACION SOBRE CANALES DE COMUNICACION DE MULTIACCESO

Tesis Doctoral

por

Chaoming Zeng

*División de Estudios de Posgrado*

*Facultad de Ingeniería*

*Universidad Nacional Autónoma de México*

*marzo de 1989*

## RESUMEN

Un canal de multiacceso (MAC) consiste en dos (o más) transmisores y un sólo receptor. La teoría de información de multiacceso trata el problema fundamental de cuánta información (o datos) se pueden enviar confiablemente de los transmisores al receptor a través del MAC ruidoso, o sea, se encarga de encontrar la región de capacidad del canal. Este enfoque empezó en 1972 con un teorema de codificación para MAC discreto sin memoria, desarrollado por Ahlswede y Liao.

En esta tesis, estudiamos tres diferentes situaciones de MACs desde el punto de vista de la teoría de información de multiusuario: *MAC discreto y sin memoria (dm) con diferentes señales de realimentación, MAC dm con relevo, y MAC de ruido aditivo Gaussiano con memoria y restricciones en las entradas.* Basado en los modelos propuestos, se obtienen los siguientes resultados que se agrupan en los capítulos 2-5 de la tesis, respectivamente.

**Capítulo 2:** Utilizando las técnicas de *codificación Markoviana de bloques sobrepuestos y decodificación regresiva*, se establecen regiones nuevas de tasas alcanzables para MAC dm con diferentes señales de realimentación, las cuales son mayores que los resultados presentados previamente en la literatura, y sus caracterizaciones son simples.

**Capítulo 3:** Para el MAC con relevo, presentamos algunas cotas interiores (tasas alcanzables) y exteriores de la región de capacidad. Los resultados tienen interpretaciones interesantes en el caso de ruidos aditivos Gaussianos y blancos.

**Capítulo 4:** Para el MAC Gaussiano de tiempo-discreto y con memoria finita que representa interferencia entre símbolos, se obtienen región de capacidad con entradas restringidas en potencias promedio y región de tasas alcanzables

para entradas limitadas en picos de amplitud. Nuestra técnica se basa en una definición nueva y equivalente para la región de capacidad (definición con procesos en lugar de la definición estandard), paralela a la de Khinchine para los canales clásicos de punto a punto, lo cual permite simplificar las derivaciones usando sólo algunas propiedades sencillas de las tasas de entropía de los procesos estacionarios.

Capítulo 5: En el caso de los MACs Gaussianos de tiempo-continuo, primero establecemos un teorema de codificación para las entradas limitadas en potencias promedio, utilizando el método de la expansión ortonormal de señales y un resultado para un conjunto de MACs paralelos discretos en el tiempo. La región de capacidad para diferentes filtros del canal se puede calcular fácilmente mediante el método llamado "*water-filling*" ("llenado con agua"), similar al caso de los canales Gaussianos de punto a punto. En el caso de las entradas limitadas en sus picos de amplitud, se derivan las tasas alcanzables con tres tipos de filtros: *pasabaja*, *pasabanda*, y *diferenciador-pasabaja*. Finalmente analizamos las degradaciones de los desempeños debido al uso de restricciones más estrictas, i.e., restricciones de pico de amplitud en lugar de potencias promedio.

La mayoría de los resultados son nuevos y originales, y el trabajo complementa y extiende los resultados clásicos para los canales de punto a punto, proporcionando una visión profunda y un mejor entendimiento de las comunicaciones de multiacceso, tópico de gran interés actual.



Director de tesis: Dr. Federico Kuhlmann

arbitrary spectral density, the inputs are subject to either an *average-power* constraint or a *peak-amplitude* constraint. The analysis is carried out both in discrete-time and continuous-time:

i) For the discrete-time Gaussian multiaccess channel with finite memory, capacity region for power constrained case and achievable rate region for amplitude constrained case are derived. Our technique is based on a novel *process definition* of the capacity region, parallel to that given by Khinchine for single input channels. This approach simplifies the derivation because only simple properties of entropy rates of stationary random processes are used.

ii) For continuous-time (waveform) Gaussian multiaccess channel, capacity region is obtained based on the approach of orthonormal expansions of waveforms and a result for parallel, discrete-time Gaussian multiaccess channels. Our result shows that for Gaussian multiaccess channels, there also exists a so-called "*water-filling*" interpretation for the multi-user encoding scheme, similarly as in the classic (single input) Gaussian channel. In the amplitude constrained case, achievable rate regions are also found for certain filters (low-pass, bandpass and differentiator-low-pass) which are fairly close to the corresponding power constrained capacity region (they serve as outer bound to the amplitude constrained capacity region).

Some of our results resemble those of classic single input channels and provide useful insights into the practical multiaccess communications, a topic which is currently of great interest.

A version in English of this thesis is also available.

**Address:**

Chaoming Zeng  
National University of Mexico  
Graduate School of Engineering  
P.O. Box 70-256  
04510, Mexico D.F.  
MEXICO

---

## RESUMEN

---

Un canal de multiacceso (MAC) consiste en dos (o más) transmisores y un sólo receptor. La teoría de información de multiacceso trata el problema fundamental de cuánta información (o datos) se pueden enviar confiablemente de los transmisores al receptor a través del MAC ruidoso, o sea, se encarga de encontrar la región de capacidad del canal. Este enfoque empezó a ser estudiado en 1972 con un teorema de codificación para MAC discreto sin memoria, desarrollado por Ahlswede y Liao.

En esta tesis, estudiamos tres diferentes situaciones de MACs desde el punto de vista de la teoría de información de multiusuario: *MAC discreto y sin memoria (dm) con diferentes señales de realimentación*, *MAC dm con relevo*, y *MAC de ruido aditivo Gaussiano con memoria y con restricciones sobre las entradas*. Basado en los modelos propuestos, se obtienen los siguientes resultados principales:

- 1) Utilizando las técnicas de *codificación Markoviana de bloques sobrepuestos y decodificación regresiva*, se establecen regiones nuevas de tasas alcanzables para MAC dm con diferentes señales de realimentación, las cuales son mayores que los resultados presentados previamente en la literatura, y sus caracterizaciones son simples.
- 2) Para el MAC con relevo, presentamos algunas cotas interiores (tasas alcanzables) y exteriores de la región de capacidad. Los resultados tienen interpretaciones interesantes en el caso de ruido aditivo Gaussiano y blanco.
- 3) Para el MAC Gaussiano de tiempo discreto y con memoria finita que representa interferencia entre símbolos, se obtienen región de capacidad con entradas restringidas en potencia promedio y región de tasas alcanzables para entradas limitadas en pico de amplitud. Nuestra técnica se basa en una definición nueva y equivalente para la región de capacidad (definición con procesos en lugar de la definición estándar), paralela a la de Khinchine para los canales clásicos de punto a punto, lo cual permite simplificar las

derivaciones usando sólo algunas propiedades sencillas de las tasas de entropía de los procesos estacionarios.

4) En el caso de los MACs Gaussianos de tiempo continuo, primero establecemos un teorema de codificación para las entradas limitadas en potencia promedio, utilizando el método de la expansión ortonormal de señales y un resultado para un conjunto de MACs paralelos discretos en el tiempo. La región de capacidad para diferentes filtros del canal se puede calcular fácilmente mediante el método llamado "*water-filling*" (llenado con agua), similar al caso de los canales Gaussianos de punto a punto. En el caso de las entradas limitadas en sus picos de amplitud, se derivan las tasas alcanzables con tres tipos de filtros: *pasobaja*, *pasobanda*, y *diferenciador-pasobaja*. Finalmente analizamos las degradaciones de los desempeños debido al uso de restricciones más estrictas, i.e., restricciones de pico de amplitud en lugar de potencias promedio.

La mayoría de los resultados son nuevos y originales, y el trabajo complementa y extiende los resultados clásicos para los canales de punto a punto, proporcionando una visión profunda y un mejor entendimiento de las comunicaciones de multiacceso, tópico de gran interés actual.

---

## AGRADECIMIENTOS

---

Quiero expresar mi sincero agradecimiento al profesor Federico Kuhlmann, por sus ayudas y estímulos que me ha dado a lo largo de mis estudios de maestría y doctorado en UNAM. Agradezco a mi compañero Ning He por la colaboración en algunos trabajos que contribuyen a la tesis. También quiero dar gracias al professor Andrés Buzo por la ayuda que me ha brindado.

Esta investigación fue apoyada parcialmente por una beca otorgada por DGAPA de UNAM y por la Comisión Federal de Electricidad (CFE) y el Instituto de Investigaciones Eléctricas (IIE) a través del convenio CFE-IIE-UNAM/DEPFI. Quisiera expresar también mi agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) de Mexico por los apoyos financieros que me ha dado para asistir a algunos eventos académicos.

Finalmente, me gustaría dedicar esta tesis a mi familia por el amor y el estímulo que me han dado durante mis estudios en México.

---

## CONTENIDO

---

Abstract	ii
Resumen	iv
Agradecimientos	vi
Contenido	vii
Capítulo 1 Introducción	1
1.1 Comunicación Multiusuario y Teoría de Información	1
1.2 Trabajos Anteriores	4
1.3 Motivación y Objetivo	6
Capítulo 2 Canales de Multiacceso Discreto sin Memoria con Realimentación	9
2.1 MAC Discreto sin Memoria	9
2.2 MAC con Realimentación Perfecta	12
2.3 MAC con Diferentes Señales de Realimentación	20
2.4 Conclusión y Comentario	25
Apéndice 2.1	26
Apéndice 2.2	27
Capítulo 3 Canal de Multiacceso con Relevó	29
3.1 Formulación de Problema y Modelado	29
3.2 Resultado de Alcanzabilidad para Canales Degradados	32
3.3 Cota Exterior de la Región de Capacidad	39
3.4 Canal con Ruido Aditivo Gaussiano y Blanco	43
3.5 Discusión	46
Apéndice 3.1	48

<b>Capítulo 4 Canal de Multiacceso Gaussiano de Tiempo Discreto</b>	<b>52</b>
<b>con Memoria</b>	
4.1 Modelo del Canal y Restricciones de Entrada	52
4.2 Definición con Procesos para la Región de Capacidad	55
4.3 Región de Capacidad con Potencia Promedio	58
4.4 Canal con Amplitud Limitada	64
4.5 Conclusión y Comentarios	68
Apéndice 4.1	69
<b>Capítulo 5 Canal de Multiacceso Gaussiano de Tiempo Continuo</b>	<b>74</b>
5.1 MAC de Tiempo Continuo y la Expansión Ortonormal de Señales	74
5.2 Conjunto de MACs Gaussianos Paralelos	77
5.3 Región de Capacidad con Restricción de Potencia Promedio	81
5.4 "Water-Filling", Interpretación y Codificación Optima	84
5.5 Tasas Alcanzables para Restricción de Amplitud	87
5.6 Conclusión	96
<b>Capítulo 6 Comentario Final</b>	<b>97</b>
<b>Referencias</b>	<b>100</b>

---

## CAPITULO 1

---

### INTRODUCCION

---

#### 1.1 COMUNICACION MULTIUSUARIO Y TEORIA DE INFORMACION

Durante los últimos veinte años, ha habido un gran avance en los campos de tecnologías y sistemas de comunicaciones para satisfacer las demandas crecientes de comunicación. Ejemplos son los desarrollos de sistemas tales como ISDN (Redes Digitales de Servicios Integrados), LAN (Redes de Area Local) y redes de radios paquetizadas (packet radio networks). En estos sistemas generalmente existe más de una fuente de datos, o más de un canal entre dos terminales. Debido a las limitaciones de la teoría clásica de comunicaciones entre punto y punto para tratar tales situaciones, se introdujo el concepto de comunicaciones multi-usuario o multi-terminal.

Por otro lado, un enfoque general para las comunicaciones multiusuario es extremadamente difícil, y a veces es conveniente aislar cada uno de los problemas a ser estudiado. Entre los modelos básicos de los canales de comunicación de multiusuario, mencionamos los siguientes: canal de multiacceso (MAC), canal de difusión, canal con relevo, canal con interferencia, canal con realimentación, y canal bidireccional (two-way channel). Conceptualmente, un MAC consiste en dos o más transmisores y un receptor, lo cual se modela como se ilustra en la Fig.1.1. En cambio, un canal de difusión consiste en un transmisor y dos o más receptores, lo cual se modela en la situación como se muestra en la Fig.1.2. Un canal con relevo se refiere comúnmente a un canal de punto a punto con "repetidor" (o estación de relevo), tal como se muestra en la Fig.1.3. Un canal de interferencia modela el caso donde varios transmisores tratan de enviar mensajes a sus respectivos receptores sobre un sólo canal, y por consiguiente existe interferencia entre ellos. Un modelo de canal con realimentación se usa para la situación de comunicación entre transmisor y receptor, donde el transmisor

puede observar la señal de salida (i.e., existe un canal en la dirección opuesta). Finalmente un canal de dos direcciones consiste en dos terminales, cada una de las cuales terminal intenta enviar mensajes a la otra a través del mismo canal, pero en la dirección contraria.

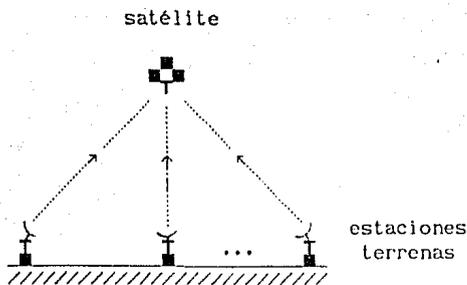


Fig.1.1 Canal de multiacceso

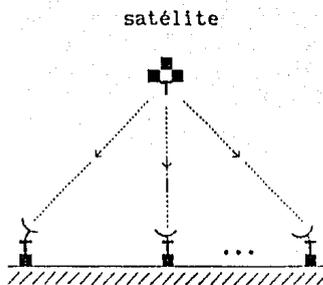


Fig.1.2 Canal de difusión

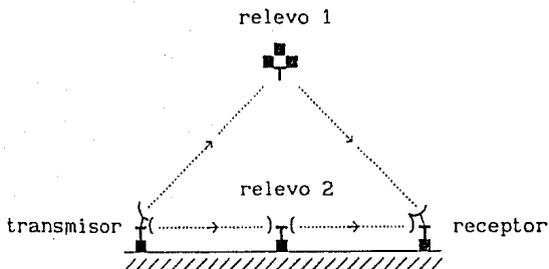


Fig.1.3 Canal con relevo

La demanda de la capacidad de comunicación continúa creciendo como consecuencia de los aumentos explosivos del número de usuarios o terminales del sistema, así como de los tipos de servicio. El diseñador del sistema de comunicación está ahora presionado a mejorar el desempeño del sistema. Esto es, él trata de maximizar la tasa de transmisión de la información a través del canal disponible sujeto a algunos requerimientos de la confiabilidad del mensaje, y por lo tanto utiliza técnicas más complicadas. Hasta este punto, sería razonable preguntar si existen límites en las transmisiones confiables de información, y si existen, cómo se puede diseñar un sistema tal que su

desempeñase aproxíme a estos límites. La respuesta a estas cuestiones es el tema central de la teoría de información, lo cual ha desempeñado un papel crucial en el diseño y el desarrollo de muchos sistemas, empezando con el artículo fundamental de Claude Shannon en 1948, "A Mathematical Theory of Communication" [1].

La rama de la teoría de información que estudia sistemas de comunicación de usuarios múltiples se conoce como teoría de información de multiusuario, y ha atraído mucha atención de los investigadores del campo en los últimos años. Para una introducción y un resumen de esta rama, los artículos de van der Meulen [2] y de El Gamal y Cover [3] son excelentes referencias.

En esta tesis, nos concentramos en uno de los problemas más importantes e interesantes (tanto en la teoría como en la práctica): el canal de multiacceso. La necesidad de multiacceso se origina en situaciones donde hay múltiples transmisores (generalmente distantes y por lo tanto independientes) y un sólo receptor. La señal recibida está contaminada tanto por el ruido como por la interferencia entre los transmisores. Usualmente hay una pequeña cantidad de realimentación desde el receptor hacia los transmisores. Este tipo de modelo es apropiado para el enlace superior de una red de satélites, para una red de radio donde existe un repetidor central, así como para los tráficos a un nodo central en una línea telefónica de "multidrop".

Hablando de los canales de multiacceso, cabe señalar que actualmente existen tres áreas de investigación en MAC: *resolución de colisiones*, *teoría de información de multiacceso*, y *spread spectrum*. Cada una de ellas procede en aislamiento virtual de las otras y usan modelos totalmente diferentes, aunque se trata de la misma situación de comunicación. Como indicó Gallager en [4], la mayor diferencia entre el método de resolución de colisiones y el de teoría de información es que el primero siempre se ha enfocado en las llegadas intermitentes o de ráfaga (bursty arrivals) de los mensajes y la interferencia entre los transmisores, pero se ha ignorado el ruido del canal (i.e., se supone que un mensaje se recibe correctamente en la ausencia de colisiones e incorrectamente en el caso contrario), y en el último método, los aspectos del ruido y de la interferencia se modelan adecuadamente, pero se ignoran las llegadas aleatorias de los mensajes. Esta tesis pertenece al último.

A lo largo de esta tesis, sólo consideramos los MACs con dos

transmisores; en primer lugar, porque se pueden generalizar o extender de alguna forma a MACs con cualquier número de transmisores, y en segundo lugar, ellos son esenciales para entender el MAC.

Uno de los conceptos novedosos en la teoría de MAC, lo cual difiere de los canales de punto a punto, es el concepto de región de capacidad. En un MAC, existen dos transmisores, y por lo tanto no podemos hablar de la capacidad del canal la cual es sólo un número real. En lugar de capacidad, buscamos una "región de capacidad", la cual caracterice todas las posibilidades de comunicación (i.e., todos los pares de tasas) entre un par de usuarios. Este concepto se definirá posteriormente.

## 1.2 TRABAJOS ANTERIORES

El primer estudio sobre canales multiusuario fue el trabajo de Shannon de canales bidireccionales [5] en 1961. Pocos trabajos se hicieron posteriormente, hasta la investigación de Cover en 1972 sobre los canales de difusión [30] y los resultados básicos que vamos a describir en seguida.

Uno de los resultados más importantes en el campo de los canales de multiusuario después del artículo de Shannon [1] es sin duda alguna el resultado de caracterización simple de la región de capacidad de MAC discreto sin memoria, presentado por Ahlswede en el *Tsahkadsor Symposium* [6] en 1971. Liao obtuvo también el mismo resultado en su tesis doctoral [7]. A partir de ese momento, muchos trabajos se han concentrado alrededor de este campo.

Ulrey [8] generalizó formalmente el teorema básico de codificación para MAC con más de dos entradas. La región de capacidad de MAC con ruido aditivo Gaussiano y blanco y entradas restringidas por potencias promedio fue determinada por Cover [9] y Wyner [10].

Una propiedad sorprendente de un MAC sin memoria es que la realimentación puede aumentar la región de capacidad, lo cual difiere del canal clásico sin memoria donde la realimentación no aumenta la capacidad (demostrado por Shannon [11] y Dobrushin [12]). Este hecho fue mostrado primero por Gaarder y Wolf [13]. Posteriormente, Cover y Leung dieron una región de tasas alcanzables bajo la condición de realimentación "perfecta" en

[14] donde se introdujo el concepto de codificación Markoviana de bloques sobrepuestos. Más tarde, varios trabajos como los de Dueck [15], de Cariciale [16], de Willems y van der Meulen [17] mostraron que la región obtenida por Cover y Leung también puede ser alcanzada con realimentación parcial (i.e., sólo un transmisor recibe la realimentación). Para ciertas clases de MAC, Willems [18] demostró que dicha región coincide con la región de capacidad con realimentación.

El MAC donde los transmisores reciben diferentes señales de realimentación fue estudiado por King [19] y generalizado por Cariciale en [16]. Después, el resultado de Cariciale fue mejorado por Willems, van der Meulen y Schalkwijk en [20].

La determinación de la región de capacidad del MAC con ruido aditivo Gaussiano y blanco y con realimentación perfecta se debió a Ozarow [21], utilizando codificación determinística, método similar al de Schalkwijk y Kailath [52],[53].

Algunas situaciones de MAC con fuentes o codificadores correlacionados también han sido estudiadas. Slepian y Wolf [22] introdujeron el MAC con entradas de codificadores correlacionadas (de fuentes independientes). El MAC con fuentes arbitrariamente correlacionadas fue investigado por Cover, El Gamal y Salehi en [23]. Otra situación donde las salidas de los codificadores están correlacionadas (llamada MAC con "cribbing encoders") fue estudiada por van der Meulen [2]. Este problema ha sido resuelto en un trabajo reciente de Willems y van der Meulen [24].

Se ha analizado también el problema de sincronización en el MAC. Implícitamente, un modelo de tiempo discreto de MAC supone que el canal tiene sincronización perfecta tanto de símbolos como de fases entre transmisores y receptores. Cover, McEliece y Posner [25] mostraron que con una cantidad acotada de incertidumbre en temporización entre los transmisores, la región de capacidad es la misma que con sincronización perfecta. Para incertidumbre completa en temporización, por otra parte, se ha demostrado (por Hui y Humblet [26], y Poltyrev [27]) que la región de capacidad es la unión de las regiones alcanzables, en lugar de sus coberturas convexas (convex hull), porque el compartimiento de tiempo no se puede aplicar en el caso de asincronía total.

### 1.3 MOTIVACION Y OBJETIVO

Para los científicos, la teoría de información puede justificarse sólo por su contribución a un mejor entendimiento de las leyes naturales. Para los ingenieros (como nosotros), sin embargo, la teoría de información debe de ser justificada además en base de sus aplicaciones. Los beneficios que da la teoría de información a la ingeniería abarcan desde los procedimientos específicos de diseño hasta la definición de las direcciones generales de la evolución del área.

Una razón más importante para estudiar la teoría de información es por su implicación en el diseño de los sistemas de transmisión de información. Por ejemplo, los sistemas de comunicación digital punto a punto (incluyendo comunicaciones por satélite, modems para líneas telefónicas, y sistemas de almacenamiento magnético) usan ahora ondas sofisticadas en las cuales las secuencias de datos están encadenadas de forma compleja. No transmitimos ni recibimos siempre un bit por cada intervalo de tiempo; sino que transmitimos y recibimos, en un nivel más alto, paquetes de bits. Más aún, la teoría de información nos dice cuánto nos falta para mejorar el desempeño del sistema. Un ejemplo es la famosa fórmula de Shannon para la capacidad de un canal con ruido aditivo Gaussiano y blanco, establecida en 1948 [1],

$$C = W \log_2 [1 + S/(N_0 W)] \quad (\text{bps}).$$

Para canales telefónicos de voz (ancho de banda  $\approx$  2400 Hz), la capacidad teórica que se estimó es de aproximadamente 25,000 bps (la "cutoff rate" es menor). Comparando con las tasas de los modems para canales de voz las cual se han incrementado desde típicamente 4,800 y 9,600 bps en los años pasados utilizando técnicas de modulación de amplitud en cuadratura (QAM), a tasas de 14,400 y 19,200 bps utilizando técnicas de constelaciones grandes de señales y de códigos de corrección de error (Trellis-Coded Modulation), podemos ver la tendencia en el desarrollo de los modems cuyas tasas son cada día más cercanas a los límites teóricos.

Sistemas multi-terminal de comunicación digital son mucho más

complicados que los sistemas de comunicación punto a punto, y su teoría no se conoce bien aún. Actualmente muchos sistemas multiterminal se desarrollan en forma "arbitraria", mientras los teóricos tratan de proporcionar un nuevo enfoque para ayudar a los diseñadores con ideas y métodos novedosos.

Aunque el MAC es el más estudiado (comparado con otros canales multiterminal), algunos problemas siguen estando abiertos. Un problema que todavía no se ha resuelto es la caracterización de la región de capacidad del MAC discreto sin memoria con realimentación. Hasta hoy, solamente se conoce algunas regiones alcanzables como la de Cover y Leung. En un MAC con diferentes señales de realimentación, el problema es aún más difícil.

Otra cuestión es el establecimiento del desempeño de una estación de relevo en un esquema multiacceso. Específicamente, supongamos que ciertas terminales quieren enviar mensajes a una estación central remota a través de un canal, como la señal recibida en el centro es demasiado "débil" (y consecuentemente baja la tasa de transmisión), puede ser deseable colocar una estación de relevo situada entre los transmisores y el receptor central para auxiliar a las transmisiones. Ahora la situación se complica, porque la señal recibida en el centro es una versión contaminada (por ruido) de la señal de relevo interferida por las señales de los transmisores. ¿Sería útil el relevo en este caso? En otras palabras, ¿pueden los transmisores mandar sus mensajes más rápidamente utilizando el relevo que sin el relevo?

Los estudios de MAC con alfabeto continuo (por ejemplo, un AWGN MAC) son todavía incompletos. Hasta hoy, sólo los AWGN MACs sin memoria han sido considerados, y poco se sabe del MAC Gaussiano con memoria, lo cual presenta serios problemas, tales como interferencia entre símbolos.

Esta tesis se dedica a estudiar alguno de estos problemas en el contexto de los siguientes modelos:

- 1) MAC discreto sin memoria (dm) con diferentes señales de realimentación (tanto bilateral como parcial).
- 2) MAC sin memoria con relevo, incluyendo MAC dm con relevo, MAC con ruido aditivo Gaussiano y blanco (AWGN) y con relevo, y MAC dm con relevo y realimentación.
- 3) MAC Gaussiano de tiempo discreto con memoria finita y entradas restringida en potencia promedio o en picos de amplitud (el proceso del ruido Gaussiano

es de densidad espectral de potencia arbitraria).

4) MAC Gaussiano de tiempo continuo con restricción de potencia promedio o de picos de amplitud para las entradas (también ancho de banda restringido).

Estos cuatro modelos se discuten en los capítulos 2-5, respectivamente, obteniendo algunos resultados interesantes. El capítulo 6 contiene comentarios finales sobre los resultados obtenidos, así como algunos problemas abiertos y sugerencias para investigación futura.

---

## CAPITULO 2

---

### CANAL DE MULTIACCESO DISCRETO SIN MEMORIA CON REALIMENTACION

---

En algunos medios de comunicación práctica, particularmente en los sistemas de multiacceso, a veces está disponible para los transmisores realimentación de la salida del canal. Este capítulo trata del MAC discreto sin memoria con realimentación. La sección 2.1 introduce el MAC dm con algunas definiciones importantes, así como resultados básicos acerca de secuencias típicas. El MAC con realimentación perfecta se discute en la sección 2.2 donde presentamos una demostración nueva y simple del resultado de alcanzabilidad de Cover y Leung. Técnicas como *codificación Markoviana de bloques sobrepuestos* (superposition block Markov encoding o SBME) y *decodificación regresiva* (backward decoding) son también descritas. En la sección 2.3, establecemos algunas nuevas regiones de tasas alcanzables de MAC dm con diferentes señales de realimentación. La sección 2.4 concluye el capítulo con algunos comentarios.

#### 2.1 MAC DISCRETO SIN MEMORIA

Denotemos un MAC dm con  $\{\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, p^*(y|x_1, x_2), \mathcal{Y}\}$ , donde  $\mathcal{X}_1$  y  $\mathcal{X}_2$  son los alfabetos de entrada,  $\mathcal{Y}$  es el alfabeto de salida, y  $p^*(y|x_1, x_2)$  es la matriz de probabilidades de transición del canal para  $x_1 \in \mathcal{X}_1$ ,  $x_2 \in \mathcal{X}_2$ , y  $y \in \mathcal{Y}$ . El canal es *discreto* en el sentido de que  $\mathcal{X}_1$ ,  $\mathcal{X}_2$ ,  $\mathcal{Y}$  son conjuntos finitos o contables. Sea  $a^k \triangleq (a_1, a_2, \dots, a_k)$ ; el canal se dice que es *sin memoria* si

$$\Pr(y_k | x_1^k, x_2^k, y^{k-1}) = \Pr(y_k | x_{1k}, x_{2k})$$

para todas las  $k$ , donde  $x_{1k}$ ,  $x_{2k}$  y  $y_k$  son las entradas y la salida del canal en el tiempo  $k$ .

Un código de bloque para MAC dm, denotado por  $(M_1, M_2, N)$ , consiste en

1) dos conjuntos de enteros que representan los conjuntos de mensajes

$$M_1 = \{1, 2, \dots, M_1\} \triangleq [1, M_1], \quad M_2 = \{1, 2, \dots, M_2\} \triangleq [1, M_2],$$

2) dos funciones de codificación

$$f_1: M_1 \rightarrow \mathcal{X}_1^N, \quad f_2: M_2 \rightarrow \mathcal{X}_2^N, \quad \text{y}$$

3) una función de decodificación

$$g: \mathcal{Y}^N \rightarrow M_1 \times M_2.$$

Las tasas (en nats/uso de canal) de este código están definidas por

$$r_1 \triangleq \frac{1}{N} \log M_1, \quad \text{y} \quad r_2 \triangleq \frac{1}{N} \log M_2.$$

Se supone que en el inicio de cada bloque de  $N$  usos de canal las fuentes 1 y 2 producen enteros aleatorios  $\omega_1 \in M_1$  y  $\omega_2 \in M_2$ , respectivamente, cada pareja  $(\omega_1, \omega_2)$  con probabilidad  $1/(M_1 M_2)$ . Entonces la *probabilidad de error promedio* del código se puede definir como

$$P_e^N \triangleq \Pr\{g(Y^N) \neq (W_1, W_2)\} = \frac{1}{M_1 M_2} \sum_{\omega_1=1, \omega_2=1}^{M_1, M_2} \Pr\left\{g(Y^N) \neq (\omega_1, \omega_2) \mid W_1 = \omega_1, W_2 = \omega_2\right\}.$$

Un par de tasas  $(R_1, R_2)$  se dice que es *alcanzable* para un MAC dm si para cualquier  $\varepsilon > 0$  y  $N$  suficientemente grande, existe una sucesión de códigos  $(M_1, M_2, N)$  con tasas

$$R_1 \leq \frac{1}{N} \log M_1, \quad \text{y} \quad R_2 \leq \frac{1}{N} \log M_2,$$

tal que  $P_e^N \leq \varepsilon$ .

La *región de capacidad*  $\mathcal{C}$  se define formalmente como la *cobertura convexa* (*convex hull*)<sup>1</sup> del conjunto de todos los pares de tasas alcanzables  $(R_1, R_2)$ . Por el argumento de *compartimiento de tiempo* (*time sharing*), no es difícil

<sup>1</sup> La cobertura convexa de un conjunto de puntos  $A$  es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen  $A$ , y se denota usualmente como  $\text{co}(A)$ .

ver que la cobertura convexa de cualquier región alcanzable es también alcanzable en un MAC.

Para demostrar teoremas de codificación (parte positiva o alcanzable), necesitamos algunos resultados sobre *secuencias típicas* cual se describen a continuación. Sea  $\{X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(K)}\}$  una colección finita de variables aleatorias discretas con alguna distribución conjunta fija  $p(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(K)})$ , para  $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(K)}) \in X^{(1)} \times X^{(2)} \times \dots \times X^{(K)}$ . Denote con  $S$  a un subconjunto ordenado de estas variables aleatorias (con el correspondiente conjunto de alfabetos  $\mathcal{S}$ ), y considere  $N$  copias independientes de  $S$  (denotado por  $S$ ). Entonces

$$\Pr\{S=s\} = \prod_{i=1, N} \Pr\{S_i = s_i\}, \quad s \in \mathcal{S}^N.$$

Sea la *entropía* de la variable aleatoria  $S$

$$H(S) = - \sum_{s \in \mathcal{S}} \Pr\{S=s\} \log(\Pr\{S=s\});$$

por la *Ley de los grandes números*,

$$-\frac{1}{N} \log \Pr\{S\} = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log \Pr\{S_i\} \rightarrow H(S),$$

con probabilidad uno.

**Definición 2.1:** El conjunto  $\mathcal{A}_\epsilon$  de secuencias (de longitud  $N$ )  $\epsilon$ -típicas está definido por

$$\mathcal{A}_\epsilon \triangleq \mathcal{A}_\epsilon(X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(K)}) \triangleq \left\{ (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(K)}) : \left| -\frac{1}{N} \log(\Pr\{S=s\}) - H(S) \right| \leq \epsilon, \forall S \subseteq \{X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(K)}\} \right\}.$$

A esta clase de secuencias típicas, a veces se le conoce como secuencias típicas en entropía [31], y se usan frecuentemente en la literatura; tienen la ventaja de que se pueden generalizar fácilmente a modelos con memoria y con alfabetos continuos (o abstractos). Un resultado básico que vamos a necesitar es el siguiente lema.

Lema 2.1 (ver [3],[32]): Para cualquier  $\epsilon > 0$ ,

$$1) \mathbf{s} \in \mathcal{A}_\epsilon(S) \implies \exp(-N(H(S)+\epsilon)) \leq \Pr\{S=\mathbf{s}\} \leq \exp(-N(H(S)-\epsilon)).$$

2) Si  $S_1, S_2 \subseteq \{X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(K)}\}$  y  $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \in \mathcal{A}_\epsilon(S_1, S_2)$ , entonces

$$\exp(-N(H(S_1|S_2)+2\epsilon)) \leq \Pr\{S_1=\mathbf{s}_1 | S_2=\mathbf{s}_2\} \leq \exp(-N(H(S_1|S_2)-2\epsilon)).$$

Además, para  $N$  suficientemente grande, se cumple

$$3) \Pr\{\mathcal{A}_\epsilon(S)\} \geq 1-\epsilon,$$

$$4) (1-\epsilon)\exp(N(H(S)-\epsilon)) \leq \|\mathcal{A}_\epsilon(S)\| \leq \exp(N(H(S)+\epsilon)),$$

donde  $\|\cdot\|$  denota la cardinalidad de un conjunto; en la desigualdad derecha de 4), no se requiere que  $N$  sea grande.

Un resultado fundamental para MAC dm es el siguiente teorema de codificación establecido por Ahlswede [6] y Liao [7].

Teorema 2.1: La región de capacidad del MAC dm  $\{X_1 \times X_2, p^*(y|x_1, x_2), Y\}$  está dada por

$$\mathcal{C} = \text{co} \left\{ (R_1, R_2) : 0 \leq R_1 \leq I(X_1; Y|X_2), 0 \leq R_2 \leq I(X_2; Y|X_1), R_1 + R_2 \leq I(X_1, X_2; Y) \right. \\ \left. \text{sobre todas } p(x_1, x_2, y) = p(x_1)p(x_2)p^*(y|x_1, x_2) \right\}, \quad (2.1)$$

donde  $\text{co}\{\cdot\}$  denota la cobertura convexa de la unión de regiones sobre todas las distribuciones conjuntas de las entradas que tienen forma de producto  $p(x_1, x_2) = p(x_1)p(x_2)$ , i.e., para entradas independientes.

Este teorema se puede demostrar fácilmente aplicando el lema 2.1 para su parte de alcanzabilidad y la desigualdad de Fano [33] para su parte converso (ver, por ejemplo, [3]). En seguida consideramos el MAC dm con realimentación.

## 2.2 MAC CON REALIMENTACION PERFECTA

En la Fig.2.1 se muestra un MAC dm con realimentación perfecta, i.e., los transmisores pueden observar la señal de la salida  $Y$  (con una unidad de tiempo de retraso). Un código  $(M_1, M_2, N)$  para este canal es similar al que dimos anteriormente para MAC dm (sin realimentación), excepto que las

funciones de codificación cambian ahora a

$$x_{ik} = f_{ik}(W_i, Y^{k-1}), \quad i=1,2, \quad k=1,2,\dots,N,$$

donde  $W_i \in \{1, 2, \dots, M_i\}$  son los mensajes a transmitir.

Una región de tasas alcanzables está dada por el siguiente teorema.

**Teorema 2.2:** Para un MAC dm  $\{X_1 \times X_2, p^*(y|x_1, x_2), \mathcal{Y}\}$ , la región de tasas

$$\mathcal{R} = \left\{ (R_1, R_2) : 0 \leq R_1 \leq I(X_1; Y|X_2, U), \quad 0 \leq R_2 \leq I(X_2; Y|X_1, U), \quad R_1 + R_2 \leq I(X_1, X_2; Y) \right. \quad (2.2)$$

$$\left. \text{sobre } p(u, x_1, x_2, y) = p(u)p(x_1|u)p(x_2|u)p^*(y|x_1, x_2) \right\}$$

es alcanzable con realimentación parcial, doonde  $U \in \mathcal{U}$  es una variable aleatoria auxiliar arbitraria con  $\|U\| \leq \min\{\|X_1\| + 1, \|Y\| + 2\}$ .

Notas: Se puede ver que esta región es mayor que la región de capacidad sin realimentación dada por (2.1), porque con  $U = \text{constante}$ , (2.2) se convierte en (2.1). Aquí la convexificación (o tomar la cobertura convexa) es innecesaria debido a que la región (2.2) ya es convexa.

Este teorema fue demostrado originalmente por Cover y Leung [14] para el MAC con realimentación perfecta en dos lados (i.e., realimentación para ambos transmisores) utilizando el método de codificación en lista e indexamiento lexicográfico (list coding and lexicographical indexing). En [17] se presentó una demostración para el caso de realimentación parcial utilizando el método de partición no aleatoria y decodificación restrictiva. Como se mostró en [18], esta región coincide con la región de capacidad real si por lo menos una entrada está completamente determinada por la otra entrada y la salida (i.e.,  $x_i = f(x_j, y)$ ,  $i \neq j$ , y  $f(\cdot)$  es un mapeo determinístico).

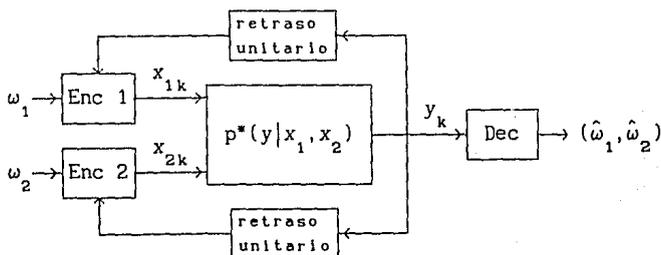


Fig.2.1 Canal de multiacceso con realimentación perfecta

Frecuentemente se usa la codificación Markoviana de bloques sobrepuestos (SBME) para demostrar teoremas de codificación para canales multiterminal con "información o canal lateral" (side information o side channel) tales como canales con realimentación, con "cribbing encoders", y con relevo, etc.. La idea básica, introducida por Cover y Leung [14] para el MAC con realimentación perfecta, es la siguiente.

Considere un número grande  $B$  de bloques (ver la Fig.2.2); cada bloque consiste en  $N$  usos del canal. En el bloque  $b$  ( $b=1, 2, \dots, B-1$ ), los transmisores mandan "información fresca" (*fresh information*) al receptor con una tasa que es demasiado alta para permitir decodificación confiable. La ambigüedad remanente se puede eliminar si los transmisores mandan información de resolución (*resolution information*) en el siguiente bloque  $b+1$  al receptor en forma cooperativa. Sobrepuesto en la información de resolución, se manda también la nueva información fresca de tasas altas en el bloque  $b+1$  (como si estuvieran formando cadenas de Markov los bloques de mensajes). Consideramos ahora el problema de decodificación de estos bloques de información sobrepuesta.

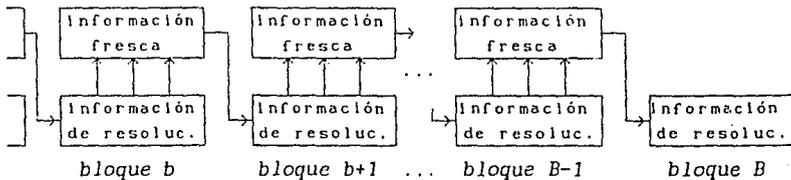


Fig.2.2 Codificación Markoviana de bloques sobrepuestos

Entre los métodos para lograr eso, mencionamos *codificación en lista con indexamiento lexicográfico* [14], *codificación en lista con partición aleatoria* [34], y *partición no aleatoria con decodificación restrictiva* [17]. La decodificación secuencial o paso-por-paso [35] es común para todos ellos. Esto es, para decodificar la información fresca en el bloque  $b$  (suponiendo que la información de resolución en el bloque  $b$  ha sido decodificada), el receptor "extrae" primero (de la información sobrepuesta) la información de

resolución en el bloque  $b+1$ . Pues la información fresca del bloque  $b$  puede ser decodificada exitosamente incorporando esta información de resolución. Este proceso se efectúa bloque por bloque. Bajo la mayoría de las situaciones de comunicación de multiusuario, la decodificación paso por paso podría ser inferior que la decodificación simultánea (en el sentido de tasas de transmisión), como se señaló en [36], o puede causar un incremento de complejidad en los esquemas de codificación.

El concepto de *decodificación regresiva* [24] permite en cierta forma la decodificación simultánea en cada bloque. El principio de este método es: el receptor empieza el proceso de decodificación solamente hasta recibir todos los  $B$  bloques de salida. Primeramente, se decodifica la información de resolución "pura" del último bloque  $B$ . La información fresca de alta tasa en el bloque  $B-1$  puede por lo tanto transformarse en información de baja tasa utilizando su información de resolución decodificada previamente. Ahora el receptor decodifica esta información fresca de baja tasa simultáneamente con la información de resolución sobrepuesta en este bloque, la cual se necesitará para el bloque posterior  $B-2$ . Este proceso se sigue hasta que se termine de decodificar todos los bloques de información.

Presentamos ahora una nueva demostración del teorema 2.2 para la realimentación parcial, utilizando SBME y decodificación regresiva. La demostración es más sencilla que las originales, y se puede fácilmente generalizar para otras situaciones especiales de realimentación (como veremos en la sección 2.3).

**Demostración del teorema 2.2:** considere un MAC con realimentación parcial (se supone que es para codificador 1); fijese la distribución  $p(u, x_1, x_2) = p(u)p(x_1|u)p(x_2|u)$  y una  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeña.

i) **Códigos Aleatorios:** El código se construye de la siguiente manera lo cual se utilizará en los  $B$  bloques.

- Generar  $M_2 = \exp(NR_2)$  secuencias  $u = (u_1, \dots, u_N)$ , cada una con probabilidad  $\Pr\{u\} = \prod_k p(u_k)$  e indexarlas como  $u(r)$ ,  $r \in [1, M_2]$ .
- Para cada  $u(r)$  generar  $M_1 = \exp(NR_1)$  secuencias  $x_1 = (x_{11}, \dots, x_{1N})$  de acuerdo a  $\Pr\{x_1|u(r)\} = \prod_k p(x_{1k}|u_k(r))$  e indexarlas como  $x_1(r, \omega_1)$ , donde  $r \in [1, M_2]$ ,  $\omega_1 \in [1, M_1]$ .
- Similarmente, generar  $M_2$  secuencias  $x_2 = (x_{21}, \dots, x_{2N})$  para cada  $u(r)$  de acuerdo a  $\Pr\{x_2|u(r)\} = \prod_k p(x_{2k}|u_k(r))$ ; indexarlas como  $x_2(r, \omega_2)$ , donde  $r$ ,

$$\omega_2 \in [1, M_2].$$

ii) Codificación: Suponga que  $\omega_{1b} \in [1, M_1]$ ,  $\omega_{2b} \in [1, M_2]$ ,  $b=1, 2, \dots, B-1$ , son mensajes a ser enviados en  $B$  bloques por los transmisores 1 y 2 respectivamente (nótese que si  $B \rightarrow \infty$ , las tasas totales  $R_1(B-1)/B \rightarrow R_1$  y  $R_2(B-1)/B \rightarrow R_2$ ). Entonces, ellos mandan las siguientes palabras del código

$$\begin{aligned} x_1(1, \omega_{11}) & \quad y \quad x_2(1, \omega_{21}), & \text{en el bloque 1, y} \\ x_1(r'_b, \omega_{1b}) & \quad y \quad x_2(r_b, \omega_{2b}), & \text{en el bloque } b=2, \dots, B-1, \text{ y} \\ x_1(r'_B, 1) & \quad y \quad x_2(r_B, 1), & \text{en el último bloque } B, \end{aligned}$$

donde  $r_b = \omega_{2,b-1}$  y  $r'_b = \omega'_{2,b-1}$ ; aquí  $\omega'_{2,b-1}$  significa el estimado del mensaje  $\omega_{2,b-1}$  lo cual se puede obtener por el codificador 1 de la realimentación antes del  $b$ -ésimo bloque de codificación. Nótese que se usa  $r_b$  como la información de resolución para el bloque  $b-1$ .

iii) Decodificación Parcial de Realimentación: Para formar la información de resolución cooperativa (en este caso  $r_{b+1}$ ) después del bloque  $b$ , el codificador 1 escoge  $\omega'_{2b}$  como el estimado de  $\omega_{2b}$  si él es único tal que (él conoce  $r'_b$  y  $\omega_{1b}$  obviamente)

$$(u(r'_b), x_1(r'_b, \omega_{1b}), x_2(r'_b, \omega'_{2b}), y_b) \in \mathcal{A}_c(U, X_1, X_2, Y). \quad (2.3)$$

Luego se pone  $r'_{b+1} = \omega'_{2b}$  para la siguiente codificación. Aquí  $y_b$  es la señal de realimentación recibida en codificador 1 durante el bloque  $b$ .

iv) Decodificación Regresiva: Después de recibir todas las salidas  $y_b$ ,  $b=1, \dots, B$ , el receptor inicia la decodificación regresiva. Primero encuentra un  $\hat{r}_B$  (la información de resolución pura) si él es único tal que

$$(u(\hat{r}_B), x_1(\hat{r}_B, 1), x_2(\hat{r}_B, 1), y_B) \in \mathcal{A}_c(U, X_1, X_2, Y). \quad (2.4a)$$

Conociendo  $\hat{r}_B$ , el decodificador pone  $\hat{\omega}_{2,B-1} = \hat{r}_B$  y encuentra  $\hat{\omega}_{1,B-1}$  y  $\hat{r}_{B-1}$  tal que

$$(u(\hat{r}_{B-1}), x_1(\hat{r}_{B-1}, \hat{\omega}_{1,B-1}), x_2(\hat{r}_{B-1}, \hat{\omega}_{2,B-1}), y_{B-1}) \in \mathcal{A}_c(U, X_1, X_2, Y). \quad (2.4b)$$

Este proceso se repite para todos los bloques restantes, encontrando  $\hat{\omega}_{1b}$  y  $\hat{r}_b$  (excepto en el bloque 1 donde sólo se necesita decodificar  $\hat{\omega}_{1,1}$  porque  $\hat{\omega}_{2,1} = \hat{r}_2$ ), y poniendo obviamente  $\hat{\omega}_{2,b-1} = \hat{r}_b$  en cada etapa.

v) Probabilidad de Error: Suponiendo que los mensajes transmitidos  $W_{1b} \in [1, M_1]$  y  $W_{2b} \in [1, M_2]$ ,  $b=1, \dots, B-1$ , están uniformemente distribuidos y son independientes; denótese  $W'_{2b}$  al estimado de  $W_{2b}$  en el codificador 1 (se obtiene de la realimentación), y  $\hat{W}_{1b}$ ,  $\hat{W}_{2b}$  los estimados del receptor. Para acotar superiormente la probabilidad de error, promediada sobre el conjunto de códigos aleatorios, definamos primero la probabilidad de error promedio para  $B-1$  pares de mensajes como

$$P_c^B \triangleq \Pr \left\{ \bigcup_{b=1, B-1} (\hat{W}_{1b} \neq W_{1b}) \cup (\hat{W}_{2b} \neq W_{2b}) \right\}. \quad (2.5)$$

En el apéndice 2.1 demostramos que (2.5) se puede acotar superiormente por la suma de las probabilidades de errores individuales de cada etapa, suponiendo que no hay error que se propague de etapas previas. Esto es

$$P_c^B \leq \sum_{b=1}^{B-1} P_{e1}(b) + \sum_{b=1}^B P_{e2}(b), \quad (2.6)$$

donde  $P_{e1}(b)$  denota la probabilidad de error de decodificación parcial de realimentación en bloque (o etapa)  $b$ ,  $b=1, \dots, B-1$ , y  $P_{e2}(b)$  denota la probabilidad de error de decodificación regresiva del receptor en bloque  $b$ ,  $b=1, \dots, B$ . Consecuentemente, lo que nos falta para completar la demostración es probar que  $P_{e1}(b)$  y  $P_{e2}(b)$  pueden hacerse arbitrariamente pequeñas en cada etapa. Sin perder la generalidad podemos suponer que  $(\omega_{1b}, \omega_{2b}) = (1, 1)$  y  $y_b = y$  para  $b=1, \dots, B$ , y definir los siguientes eventos

$$E(\omega_2) \triangleq \{(u(1), x_1(1, 1), x_2(1, \omega_2), y) \in A_c\}$$

$$F(r) \triangleq \{(u(r), x_1(r, 1), x_2(r, 1), y) \in A_c\}$$

$$G(r, \omega_1) \triangleq \{(u(r), x_1(r, \omega_1), x_2(r, 1), y) \in A_c\}$$

$$H(\omega_1) \triangleq \{(u(1), x_1(1, \omega_1), x_2(1, 1), y) \in A_c\}$$

donde  $A_c \triangleq A_c(U, X_1, X_2, Y)$ . Veamos primero  $P_{e1}(b)$ , la probabilidad de error de la decodificación parcial de realimentación en la etapa  $b=1, \dots, B-1$ . De (2.3) tenemos

$$P_{e1}(b) = \Pr \left\{ (u(1), x_1(1,1), x_2(1, \omega_2), y) \text{ no son conjuntamente típicas para } \omega_2=1 \right. \\ \left. (i.e., \text{ el mensaje } \omega_2=1 \text{ nunca se podría decodificar}), \text{ o existen} \right. \\ \left. \text{algunos } \omega_2 \neq 1 \text{ tales que } (u(1), x_1(1,1), x_2(1, \omega_2'), y) \text{ son también} \right. \\ \left. \text{conjuntamente típicas (i.e., el mensaje decodificado fue falso)} \right\}$$

De lo anterior podemos acotar fácilmente las probabilidades de error como se muestra en lo siguiente:

$$P_{e1}(b) = \Pr \left\{ E^c(1) \cup \left[ \bigcup_{\omega_2 \neq 1} E(\omega_2) \right] \right\} \leq \Pr\{E^c(1)\} + \sum_{\omega_2 \neq 1} \Pr\{E(\omega_2)\}, \quad b=1, \dots, B-1$$

$$P_{e2}(B) = \Pr \left\{ F^c(1) \cup \left[ \bigcup_{r \neq 1} F(r) \right] \right\} \leq \Pr\{F^c(1)\} + \sum_{r \neq 1} \Pr\{F(r)\}, \quad (2.7)$$

$$P_{e2}(b) = \Pr \left\{ G^c(1,1) \cup \left[ \bigcup_{(r, \omega_1) \neq (1,1)} G(r, \omega_1) \right] \right\} \leq \Pr\{G^c(1,1)\} + \sum_{r \neq 1} \Pr\{G(r,1)\} \\ + \sum_{\omega_1 \neq 1} \Pr\{G(1, \omega_1)\} + \sum_{r \neq 1, \omega_1 \neq 1} \Pr\{G(r, \omega_1)\}, \quad \text{para } b=B-1, \dots, 2$$

$$P_{e2}(1) = \Pr \left\{ H^c(1) \cup \left[ \bigcup_{\omega_1 \neq 1} H(\omega_1) \right] \right\} \leq \Pr\{H^c(1)\} + \sum_{\omega_1 \neq 1} \Pr\{H(\omega_1)\},$$

donde  $A^c$  significa el complemento del evento  $A$ . Observe que los eventos  $E^c(1)$ ,  $F^c(1)$ ,  $G^c(1,1)$  y  $H^c(1)$  son los mismos. Aplicando la propiedad 3) del lema 2.1, se puede ver que para  $N$  suficientemente grande

$$\Pr\{E^c(1)\} = \Pr\{F^c(1)\} = \Pr\{G^c(1,1)\} = \Pr\{H^c(1)\} \leq \epsilon.$$

Para las otras probabilidades se pueden aplicar también las propiedades del lema 2.1. Por ejemplo, para  $\omega_2 \neq 1$

$$\Pr\{E(\omega_2)\} = \sum_{(u, x_1, x_2, y) \in A_c} p(u)p(x_2|u)p(y, x_1|u)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{(u, x_1, x_2, y) \in \mathcal{A}_\varepsilon} \exp(-N[H(U) + H(X_2|U) + H(Y, X_1|U) - 5\varepsilon]) \\
&= \|\mathcal{A}_\varepsilon\| \exp(-N[H(U) + H(X_2|U) + H(Y, X_1|U) - 5\varepsilon]) \\
&\leq \exp(N[H(U, X_1, X_2, Y) + \varepsilon]) \exp(-N[H(U) + H(X_2|U) + H(Y, X_1|U) - 5\varepsilon]) \\
&= \exp(-N[I(X_2; Y|X_1, U) - 4\varepsilon])
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se debe a que  $\omega_2 \neq 1$ , lo cual implica que la generación de  $x_2$  es independiente de la generación de  $(y, x_1)$  dado  $u$ . La primera y la segunda desigualdades se derivan de las propiedades 1), 2) y 4) del lema 2.1. Análogamente,

$$\begin{aligned}
\Pr\{F(r)\} &= \Pr\{G(r, 1)\} \leq \exp(-N[I(X_1, X_2; Y) - 4\varepsilon]), & \text{si } r \neq 1, \\
\Pr\{G(1, \omega_1)\} &= \Pr\{H(\omega_1)\} \leq \exp(-N[I(X_1; Y|X_2, U) - 4\varepsilon]), & \text{si } \omega_1 \neq 1, \\
\Pr\{G(r, \omega_1)\} &\leq \exp(-N[I(X_1, X_2; Y) - 4\varepsilon]), & \text{si } r \neq 1 \text{ y } \omega_1 \neq 1.
\end{aligned}$$

Utilizando estas cotas, (2.7) resulta en

$$\begin{aligned}
P_{e1}(b) &\leq \varepsilon + (M_2 - 1) \exp(-N[I(X_2; Y|X_1, U) - 4\varepsilon]) \\
&\leq \varepsilon + \exp(-N[I(X_2; Y|X_1, U) - R_2 - 4\varepsilon]), & b=1, \dots, B-1, \\
P_{e2}(B) &\leq \varepsilon + \exp(-N[I(X_1, X_2; Y) - R_2 - 4\varepsilon]), \\
P_{e2}(b) &\leq \varepsilon + \exp(-N[I(X_1, X_2; Y) - R_2 - 4\varepsilon]) + \exp(-N[I(X_1; Y|X_2, U) - R_1 - 4\varepsilon]) \\
&\quad + \exp(-N[I(X_1, X_2; Y) - (R_1 + R_2) - 4\varepsilon]), & b=2, \dots, B-1, \\
P_{e2}(1) &\leq \varepsilon + \exp(-N[I(X_1; Y|X_2, U) - R_1 - 4\varepsilon]),
\end{aligned}$$

donde  $R_1 \triangleq (1/N) \log(M_1)$ . De lo anterior podemos concluir que para  $N$  suficientemente grande, la probabilidad de error de decodificación parcial de realimentación en cada etapa está acotada por  $P_{e1}(b) \leq 2\varepsilon$ , si

$$R_2 \leq I(X_2; Y|X_1, U) - 5\varepsilon, \quad (2.8)$$

y la probabilidad de error de decodificación regresiva en cada etapa está acotada por  $P_{e2}(b) \leq 4\varepsilon$ , si

$$R_1 \leq I(X_1; Y | X_2, U) - 5\epsilon, \quad (2.9a)$$

$$R_1 + R_2 \leq I(X_1, X_2; Y) - 5\epsilon, \quad (2.9b)$$

$$R_2 \leq I(X_1, X_2; Y) - 5\epsilon; \quad (2.9c)$$

donde (2.9c) se puede eliminar en vista de (2.8) y (2.9b). Por lo tanto, para  $N$  suficientemente grande,  $P_e^B \leq 6(B-1)\epsilon$  si el par de tasas  $(R_1, R_2)$  satisface (2.8), (2.9a) y (2.9b). Nótese también que las tasas nulas son siempre alcanzables.

Concluimos finalmente que existe por lo menos un código de entre el conjunto de códigos cuya probabilidad de error promedio  $P_e^B \leq 6(B-1)\epsilon$ , y por consiguiente, todos los pares dentro de  $\mathcal{R}$  son alcanzables para el MAC con realimentación parcial, porque la demostración es válida para todo  $\epsilon > 0$  y todas las distribuciones  $p(u, x_1, x_2) = p(u)p(x_1|u)p(x_2|u)$ . Así queda demostrado el teorema 2.2. ■

## 2.3 MAC CON DIFERENTES SEÑALES DE REALIMENTACION

En las comunicaciones multiacceso prácticas, información lateral podría presentarse de diversas formas en los codificadores. En la sección anterior hemos considerado el MAC con realimentación perfecta, *i.e.*, el transmisor observa directamente la señal de salida  $Y$ . Carleial [16] consideró una situación más general de realimentación: cada transmisor observa una señal diferente de realimentación (*i.e.*,  $Y_1$  para el codificador 1 y  $Y_2$  para el codificador 2) como se muestra en la Fig. 2.3. El obtuvo una región general de tasas alcanzables para este tipo de canales y las especializó para algunos casos de interés.

En esta sección presentamos algunas regiones alcanzables para ciertos casos del MAC con diferentes señales de realimentación, cuyas caracterizaciones son muy simples. También demostramos que la región de Carleial [16] siempre es un subconjunto de la nuestra; en algunos casos nuestra región es estrictamente mayor que la de Carleial (ver apéndice 2.2).

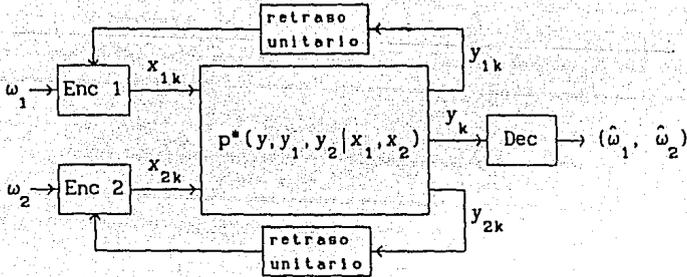


Fig.2.3 MAC con diferentes señales de realimentación

Consideramos primero el caso en el cual la salida  $Y$  es una señal degradada de las señales de realimentación  $Y_1$  o  $Y_2$  (podría interpretarse como si  $Y_1$  o  $Y_2$  fuese "mejor" que  $Y$ ), lo cual se define en el siguiente sentido [16]:

**Definición 2.2:** En el MAC con diferentes señales de realimentación,  $Y$  es una versión degradada de  $Y_1$  con respecto a las entradas del canal (denotado como:  $X_1, X_2$ :  $Y_1 \geq Y$ , o simplemente se dice que  $Y_1$  es "mejor" que  $Y$ ), si existe un "canal de prueba" de  $Y_1$  a una variable aleatoria  $Y'$  tal que

a)  $(X_1, X_2, Y_1, Y')$  forman una cadena de Markov, i.e.,  $p(y' | x_1, x_2, y_1) = p(y' | y_1), y$

b)  $Y'$  es estadísticamente equivalente a  $Y$  con respecto a las entradas (denotado como  $(X_1, X_2)$ :  $Y' \sim Y$  or  $Y \sim Y'$ ), i.e., los espacios de muestras de  $Y'$  y  $Y$  son isomórficos, y para todos los valores correspondientes  $y' \sim y$ ,  $p(y' | x_1, x_2) = p(y | x_1, x_2)$ .

Nuestro resultado principal es el siguiente.

**Teorema 2.3:** Para el MAC dm con dos diferentes señales de realimentación

$\{X_1 \times X_2, p^*(y, y_1, y_2 | x_1, x_2), \forall y, y_1, y_2\}$ , si  $Y_1, Y_2 \geq Y$ , entonces la región

$$R_1 = \left\{ (R_1, R_2) : 0 \leq R_1 \leq I(X_1; Y_2 | X_2, U), 0 \leq R_2 \leq I(X_2; Y_1 | X_1, U), \right. \\ \left. R_1 + R_2 \leq I(X_1, X_2; Y) \right\} \quad (2.10)$$

$$\text{para } p(u, x_1, x_2, y, y_1, y_2) = p(u)p(x_1|u)p(x_2|u)p^*(y, y_1, y_2|x_1, x_2) \}$$

es alcanzable, donde  $U \in \mathcal{U}$  es una variable aleatoria auxiliar arbitraria con  $\|U\| \leq \min(\|X_1\| + 1, \|Y\| + 2)$ .

Es fácil verificar que la región  $\mathcal{R}_1$  es convexa, por lo cual no se requiere la convexificación. La suficiencia de tomar la cardinalidad de  $U$  como lo indicado en el teorema se puede comprobar si aplicamos la extensión de Fenchel-Eggleston de un lema dado por Ahlswede y Korner en [37] y usamos un procedimiento similar al de [24, apéndice B].

En el apéndice 2.2, mostramos que nuestra región es mayor que la obtenida por Carleial en [7, ec.(24)], porque su región, además de las restricciones similares a (2.10), contiene otras restricciones sobre las tasas  $R_1$  y  $R_2$  las cuales dependen de la salida  $Y$ . La diferencia entre las dos regiones podría aumentar si  $Y_1$  y  $Y_2$  son mucho "mejores" que  $Y$ . A continuación presentamos una demostración simple del teorema 2.3.

**Demostración del teorema 2.3:** El código aleatorio se genera como sigue: primero generamos  $M_1 M_2 = \exp(N(R_1 + R_2))$  secuencias de  $u$  de acuerdo a  $\prod_k p(u_k)$  y las indexamos como  $u(r)$ ,  $r \in \{1, \dots, M_1 M_2\}$ . Para cada  $u(r)$  se generan  $M_1$  secuencias de  $x_1$  de acuerdo a  $\prod_k p(x_{1k}|u_k(r))$  y las llamamos  $x_1(r, \omega_1)$ , donde  $\omega_1 \in \{1, \dots, M_1\}$ . Similarmente se generan  $M_2$  secuencias de  $x_2$  con  $\prod_k p(x_{2k}|u_k(r))$  y las indexamos como  $x_2(r, \omega_2)$ , donde  $\omega_2 \in \{1, \dots, M_2\}$ .

Los mensajes  $\omega_{1b} \in \{1, \dots, M_1\}$ ,  $\omega_{2b} \in \{1, \dots, M_2\}$ ,  $b=1, 2, \dots, B-1$ , se codifican por los transmisores 1 y 2 como se muestra abajo

$$\begin{aligned} x_1(1, \omega_{11}) & \text{ y } x_2(1, \omega_{21}), & \text{ en el bloque 1, y} \\ x_1(r'_b, \omega_{1b}) & \text{ y } x_2(r''_b, \omega_{2b}), & \text{ en el bloque } b=2, \dots, B-1, \text{ y} \\ x_1(r'_B, 1) & \text{ y } x_2(r''_B, 1), & \text{ en el último bloque } B, \end{aligned}$$

donde  $r'_b = (\omega_{1, b-1}, \omega'_{2, b-1})$  y  $r''_b = (\omega''_{1, b-1}, \omega_{2, b-1})$ ; aquí  $\omega'_{2, b-1}$  significa el estimado de  $\omega_{2, b-1}$  obtenido por el codificador 1 de la realimentación  $Y_1$  antes del  $b$ -ésimo bloque de codificación, y  $\omega''_{1, b-1}$  es el estimado de  $\omega_{1, b-1}$  obtenido por codificador 2 de la realimentación  $Y_2$ . Más específico, el codificador 1 encuentra un  $\omega'_{2, b-1}$  si él es único tal que

$$(u(r'_{b-1}), x_1(r'_{b-1}, \omega_{1,b-1}), x_2(r'_{b-1}, \omega'_{2,b-1}), y_{1,b-1}) \in \mathcal{A}_C(U, X_1, X_2, Y_1).$$

Por el lema 2.1 y la suposición de que no se había cometido ningún error en las etapas anteriores, podemos mostrar que  $\omega'_{2,b-1} = \omega_{2,b-1}$  con probabilidad de error arbitrariamente pequeña  $P'_{e1}(b-1) \leq 2\epsilon$ , si

$$R_2 \leq I(X_2; Y_1 | X_1, U).$$

De la misma manera, el codificador 2 encuentra un  $\omega''_{1,b-1}$  como el estimado de  $\omega_{1,b-1}$  de la realimentación  $Y_2$ , si él es único tal que

$$(u(r''_{b-1}), x_1(r''_{b-1}, \omega''_{1,b-1}), x_2(r''_{b-1}, \omega_{2,b-1}), y_{2,b-1}) \in \mathcal{A}_C(U, X_1, X_2, Y_2).$$

La probabilidad de error de la decodificación se puede hacer arbitrariamente pequeña  $P''_{e1}(b-1) \leq 2\epsilon$ , si

$$R_1 \leq I(X_1; Y_2 | X_2, U).$$

Se inicia la decodificación regresiva en el receptor después de recibir  $B$  bloques de salidas. Se decodifica primero la información de resolución pura en el bloque  $B$ , es decir, se busca un  $\hat{r}_B$  si él es único tal que

$$(u(\hat{r}_B), x_1(\hat{r}_B, 1), x_2(\hat{r}_B, 1), y_B) \in \mathcal{A}_C(U, X_1, X_2, Y).$$

Luego se pone  $(\hat{\omega}_{1,B-1}, \hat{\omega}_{2,B-1}) = \hat{r}_B$  y se fija en el bloque  $B-1$ , encontrando un  $\hat{r}_{B-1}$  único tal que

$$(u(\hat{r}_{B-1}), x_1(\hat{r}_{B-1}, \hat{\omega}_{1,B-1}), x_2(\hat{r}_{B-1}, \hat{\omega}_{2,B-1}), y_{B-1}) \in \mathcal{A}_C(U, X_1, X_2, Y).$$

Tal proceso se continúa hasta que todos los mensajes hayan sido decodificados. Nótese que si

$$R_1 + R_2 \leq I(X_1, X_2; Y)$$

en cada etapa  $b$ , entonces  $\hat{r}_b = r_b = (\omega_{1,b-1}, \omega_{2,b-1})$  con una probabilidad de

error arbitrariamente pequeña  $P_{e2}(b) \leq 2\epsilon$  (usando otra vez el lema 2.1).

Con argumentos similares a los que usamos para la demostración del teorema 2.2, demostramos que la región dada por (2.10) es alcanzable. Esto completa la demostración del teorema 2.3. ■

Ahora consideremos el caso de realimentación parcial y diferente de la salida (i.e., se dispone nadamás de la señal de realimentación para un transmisor). El siguiente teorema nos da una región alcanzable para el caso  $Y_1 \geq Y$ .

**Teorema 2.4:** Para un MAC dm  $\{X_1, X_2, p^*(y, y_1 | x_1, x_2), \mathcal{U}, \mathcal{Y}\}$  con realimentación parcial  $Y_1 \geq Y$ , la región de tasas

$$\mathcal{R}_2 = \left\{ (R_1, R_2): \begin{aligned} &0 \leq R_1 \leq I(X_1; Y | X_2, U), \quad 0 \leq R_2 \leq I(X_2; Y_1 | X_1, U), \\ &R_1 + R_2 \leq I(X_1, X_2; Y) \end{aligned} \right. \quad (2.11)$$

para  $p(u, x_1, x_2, y, y_1) = p(u)p(x_1 | u)p(x_2 | u)p^*(y, y_1 | x_1, x_2)$

es alcanzable, donde  $U \in \mathcal{U}$  es una variable aleatoria auxiliar arbitraria con cardinalidad  $\|\mathcal{U}\| \leq \min\{\|X_1\| \cdot \|X_2\| + 1, \|\mathcal{Y}\| + 2\}$ .

Esta región también es mayor que la región derivada por Carleial [16, ec.26], porque podemos mostrar de una forma similar a lo del apéndice 2.2 que su región contiene una restricción adicional en la tasa  $R_2$ , la cual depende de la salida  $Y$ . La alcanzabilidad de nuestra región se puede demostrar fácilmente si aplicamos el código y la demostración del teorema 2.2, excepto que ahora la señal de realimentación para codificador 1 es  $Y_1$ , en lugar de  $Y$ .

Finalmente, si  $Y_1 \sim X_2$  o  $Y_2 \sim X_1$  (i.e., un codificador puede observar directamente las secuencias de salida del otro codificador), lo cual convierte el canal al tal llamado MAC con "cribbing encoders" estudiado extensivamente en [24], nuestras regiones alcanzables son justamente regiones de capacidad y coinciden, como era de esperarse, con los resultados obtenidos en [24].

## 2.4 CONCLUSION Y COMENTARIO

Hemos usado las técnicas de codificación Markoviana de bloques sobrepuestos y de decodificación regresiva para probar el teorema de codificación de MAC dm con realimentación parcial y perfecta. Esta demostración es simple y más transparente que las anteriores, porque se evita el uso de técnicas como codificación en lista y de particionamiento. Para ciertos casos particulares de MAC con diferentes señales de realimentación, obtuvimos algunas regiones de tasas alcanzables mejores que las regiones derivadas en el trabajo de Carleial, y tienen formas de caracterización muy simples. Willems et al [20] presentaron un resultado similar al de nosotros, pero sin la demostración como la del apéndice 2.2.

## APENDICE 2.1

Aquí presentamos la demostración de la siguiente afirmación: la probabilidad de error  $P_e^B$  dada en (2.5) puede acotarse superiormente por la suma de las probabilidades de error de decodificación en cada etapa como se muestra en (2.6), bajo la suposición de que no haya error que se propague de las etapas previas.

Definimos primero los siguientes eventos:

$$\begin{aligned} D_1 &\triangleq \{\hat{W}_{2,1} \neq W_{2,1}\}, & D_B &\triangleq \{\hat{W}_{1,B-1} \neq W_{1,B-1}\}. \\ D_b &\triangleq \{\hat{W}_{1,b-1} \neq W_{1,b-1} \cup \hat{W}_{2b} \neq W_{2b}\}, & & b=2, 3, \dots, B-1, \\ A_b &\triangleq \{W'_{1b} \neq W_{1b}\}, & & b=1, 2, \dots, B-1, \end{aligned}$$

De la definición de  $P_e^B$  en (2.5) se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} P_e^B &= \Pr\left\{ \bigcup_{j=1, B} D_j \right\} \leq \Pr\left\{ \left( \bigcup_{i=1, B-1} A_i \right) \cup \left( \bigcup_{j=1, B} D_j \right) \right\} \\ &= \Pr\left\{ \bigcup_{i=1, B-1} A_i \right\} + \Pr\left\{ \left( \bigcup_{j=1, B} D_j \right) \cap \left( \bigcup_{i=1, B-1} A_i \right)^c \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Pero como

$$\bigcup_{i=1, B-1} A_i = A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c) \cup (A_3 \cap A_1^c \cap A_2^c) \cup \dots \cup (A_{B-1} \cap \left[ \bigcap_{k=1, B-2} A_k^c \right])$$

y  $\Pr\{A \cap B\} \leq \Pr\{A|B\}$ , el primer término de (2.12) se acota por lo tanto como

$$\Pr\left\{ \bigcup_{i=1, B-1} A_i \right\} \leq \Pr\{A_1\} + \Pr\{A_2|A_1^c\} + \dots + \Pr\{A_{B-1} | \bigcap_{k=1, B-2} A_k^c\}. \quad (2.13)$$

De manera similar, el segundo término de (2.12) puede acotarse como abajo

$$\Pr\left\{ \left( \bigcup_{j=1, B} D_j \right) \cap Z \right\} \leq \Pr\{D_B|Z\} + \Pr\{D_{B-1}|Z \cap D_B^c\} + \dots + \Pr\{D_1|Z \cap \left[ \bigcap_{k=2, B} D_k^c \right]\}. \quad (2.14)$$

donde

$$Z \triangleq \left( \bigcup_{i=1, B-1}^A (U, A_i)^c \right)^c = \bigcap_{i=1, B-1} A_i^c.$$

De (2.12)-(2.14) se puede ver que la afirmación inicial es cierta. ■

## APENDICE 2.2

En este apéndice mostramos que la región de tasas alcanzables  $\mathcal{R}_1$  dada por (2.10) es mayor que la región obtenida en [16, ec.24]. Para compararlas, reescribimos la región de Carlejal para el mismo canal como sigue:

$$\mathcal{R}_0 = \text{co} \left\{ (R_1, R_2) : 0 \leq R_1 \leq I(U_1; Y_2 | W_1, W_2, U_2), \right. \quad (2.15)$$

$$0 \leq R_2 \leq I(U_2; Y_1 | W_1, W_2, U_1), \quad (2.16)$$

$$0 \leq R_1 \leq I(U_1; Y | W_1, W_2, U_2) + I(W_1; Y | W_2), \quad (2.17)$$

$$0 \leq R_2 \leq I(U_2; Y | W_1, W_2, U_1) + I(W_2; Y | W_1), \quad (2.18)$$

$$R_1 + R_2 \leq I(W_1, W_2, U_1, U_2; Y), \quad (2.19)$$

$$\left. \text{para } Z \in \mathcal{P}, Z = (U_1, U_2, W_1, W_2, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2) \right\}$$

donde  $\mathcal{P}$  tiene la forma  $p(z) = p(u_1)p(w_1)p(u_2)p(w_2)\delta(x_1 | u_1, w_1, w_2)\delta(x_2 | u_2, w_1, w_2)p^*(y, y_1, y_2 | x_1, x_2)$ , y  $\delta(\cdot)$  denotan funciones de probabilidad degeneradas de los mapeos determinísticos  $X_1 = f_1(U_1, W_1, W_2)$  y  $X_2 = f_2(U_2, W_1, W_2)$ . Omitimos la variable de compartimento de tiempo "Q" usada en [16] debido a la evidente equivalencia al tomar la cobertura convexa para la región.

Observe primero que por el teorema de procesamiento de datos (aplicado a la cadena de Markov  $(W_1, W_2, U_1, U_2) \Rightarrow (X_1, X_2) \Rightarrow Y$ )

$$I(W_1, W_2, U_1, U_2; Y) \leq I(X_1, X_2; Y). \quad (2.20)$$

Nótese ahora que

$$\begin{aligned}
 I(U_1; Y_2 | W_1, W_2, U_2) &= H(Y_2 | W_1, W_2, U_2) - H(Y_2 | W_1, W_2, U_1, U_2) \\
 &= H(Y_2 | W_1, W_2, U_2, X_2) - H(Y_2 | W_1, W_2, U_1, U_2, X_1, X_2) \\
 &\leq H(Y_2 | W_1, W_2, X_2) - H(Y_2 | W_1, W_2, U_1, U_2, X_1, X_2) \\
 &= H(Y_2 | W_1, W_2, X_2) - H(Y_2 | W_1, W_2, X_1, X_2) \\
 &= I(X_1; Y_2 | X_2, W_1, W_2)
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

donde la segunda igualdad se debe a los mapeos determinísticos  $f_1$  y  $f_2$ , y la tercera igualdad es por el hecho de que  $(W_1, W_2, U_1, U_2) \Rightarrow (X_1, X_2) \Rightarrow Y_2$  forma una cadena Markoviana. Similarmente podemos demostrar que

$$I(U_2; Y_1 | W_1, W_2, U_1) \leq I(X_2; Y_1 | X_1, W_1, W_2). \tag{2.22}$$

Por otra parte, si ponemos  $U=(W_1, W_2)$  en la región (2.10), no es difícil ver (de las desigualdades (2.20)-(2.22)) que  $\mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}_1$ . Además, en el caso de un MAC con "cribbing encoders" (i.e.,  $Y_1 \sim X_2, Y_2 \sim X_1$ ),  $\mathcal{R}_0$  está estrictamente dentro de  $\mathcal{R}_1$  (de hecho, nuestra región  $\mathcal{R}_1$  es la región de capacidad en este caso). Por lo tanto podemos concluir que nuestra región alcanzable  $\mathcal{R}_1$  dada por el teorema 2.3 es mayor que la  $\mathcal{R}_0$  de Carleial. ■

---

## CAPITULO 3

---

### CANAL DE MULTIACCESO CON RELEVO

---

En este capítulo introducimos un nuevo canal multiusuario denominado canal de multiacceso con relevo (MARC), lo cual es adecuado para modelar comunicaciones de multiacceso con ayuda de una estación de relevo. En la sección 3.1 se formula el problema y se define el modelo del canal. En la sección 3.2 presentamos una región de tasas alcanzables para un MARC degradado (i.e., la señal recibida en el receptor es una versión degradada de la que recibe el relevo). Se deriva en la sección 3.3 una cota exterior general de la región de capacidad. La sección 3.4 extiende el resultado de alcanzabilidad de la sección 3.2 a canales con ruido aditivo Gaussiano y blanco. En la sección 3.5 concluimos el capítulo comentando algunos resultados de MARC con realimentación y haciendo sugerencias para investigación futura.

#### 3.1 FORMULACION DE PROBLEMA Y MODELADO

Consideremos una situación de comunicación como la ilustrada en la Fig.3.1, la cual se puede describir como sigue: suponemos que varias terminales quieren enviar mensajes a un receptor remoto a través de un canal de multiacceso. Debido a la distancia, la señal recibida en el receptor es "débil"; una manera usual de resolver el problema es colocar una estación de relevo entre transmisores y receptor para ayudar a sus transmisiones. Observe que la señal "relevada" será contaminada no sólo por el ruido del canal, sino también por la interferencia de los transmisores. Nuestro problema consiste en determinar cuánta información se puede comunicar confiablemente de estos transmisores al receptor común con la ayuda de la estación de relevo. Tal situación es muy común en las redes de comunicación por radio, y las

comunicaciones vía satélite [39].

Un problema similar, restringido sin embargo a un sólo transmisor, se conoce como canal de relevo. El canal de relevo fue introducido por van der Meulen [38], y estudiado por Cover y El Gamal [34] en gran detalle. A continuación presentamos el modelo del canal denominado canal de multiacceso con relevo (MARC) para lo cual se puede ver como una generalización de los canales de relevo.

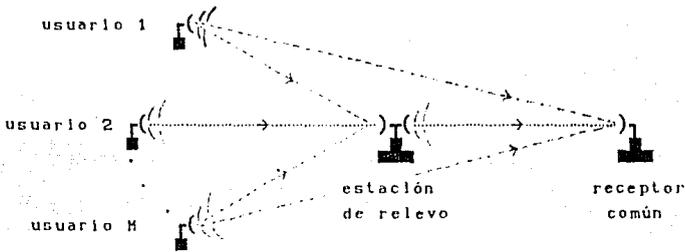


Fig.3.1 Multiacceso con relevo

Un MARC discreto sin memoria  $\{\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3, p^*(y, y_1 | x_1, x_2, x_3), \mathcal{Y} \times \mathcal{Y}_1\}$  consiste en cinco conjuntos finitos  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{Y}$  y  $\mathcal{Y}_1$ , y una matriz de probabilidades de transición del canal  $p^*(y, y_1 | x_1, x_2, x_3)$ , donde  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3, (y, y_1) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{Y}_1$ ;  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$  son los alfabetos de entrada del canal en los transmisores 1 y 2,  $\mathcal{X}_3$  es el alfabeto de entrada al canal por el relevo,  $\mathcal{Y}_1$  es el alfabeto de salida del canal en el relevo, y  $\mathcal{Y}$  es el alfabeto de salida del canal en el receptor final. El modelo del canal se muestra en la Fig.3.2. Un MARC se dice que es *sin memoria* si  $(y_k, y_{1k})$  dependen de las pasadas  $(x_{1k}^k, x_{2k}^k, x_{3k}^k)$  sólo a través de los símbolos transmitidos actualmente  $(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k})$ .

Un código  $(M_1, M_2, n)$  para el MARC dm consiste en:

dos conjuntos de mensajes

$$M_1 = \{1, 2, \dots, M_1\} \triangleq [1, M_1], \quad M_2 = \{1, 2, \dots, M_2\} \triangleq [1, M_2],$$

dos funciones de codificación

$$f_1: M_1 \rightarrow \mathcal{X}_1^n, \quad f_2: M_2 \rightarrow \mathcal{X}_2^n, \quad (3.1)$$

un conjunto de funciones de relevo (causal o no-anticipatorio)  $\{f_{3k}\}_{k=1}^n$  tal que

$$x_{3k} = f_{3k}(y_1^{k-1}), \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (3.2)$$

y una función de decodificación

$$g: \mathcal{Y}^n \rightarrow M_1 \times M_2.$$

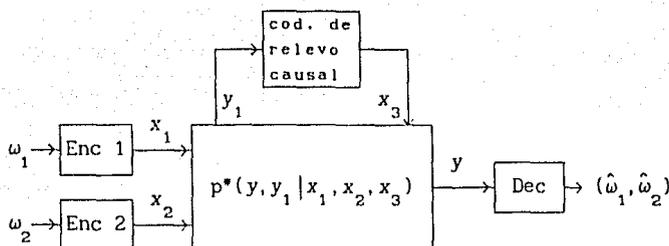


Fig. 3.2 Canal de multiacceso con relevo (MARC)

La probabilidad de error promedio de este código se define como

$$P_e^n \triangleq \frac{1}{H_1 H_2} \sum_{\omega_1=1, \omega_2=1}^{H_1, H_2} \Pr \left\{ g(Y^n) \neq (\omega_1, \omega_2) \mid W_1 = \omega_1, W_2 = \omega_2 \right\},$$

suponiendo que los mensajes  $W_1$  y  $W_2$  son estadísticamente independientes y uniformemente distribuidos sobre los conjuntos  $[1, M_1]$  y  $[1, M_2]$ , respectivamente.

Nótese que para cualquier selección de  $p(\omega_i)$ ,  $\omega_i \in M_i$ ,  $i=1, 2$ , y de los códigos  $f_1$ ,  $f_2$  y  $\{f_{3k}\}$ , la distribución de probabilidad conjunta sobre  $M_1 \times M_2 \times \mathcal{X}_1^n \times \mathcal{X}_2^n \times \mathcal{X}_3^n \times \mathcal{Y}^n \times \mathcal{Y}_1^n$  está dada por

$$p(\omega_1, \omega_2, x_1, x_2, x_3, y, y_1) = p(\omega_1) p(\omega_2) \prod_{k=1}^n p(x_{1k} | \omega) p(x_{2k} | \omega) p(x_{3k} | y_{11}, \dots, y_{1, k-1}) p^*(y_k, y_{1k} | x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}). \quad (3.3)$$

El par de tasas del código está definido por  $(\frac{1}{n} \log M_1, \frac{1}{n} \log M_2)$ . Un par de tasas  $(R_1, R_2)$  se dice que es alcanzable para un MARC dm si para cualquier  $\epsilon > 0$  y todos los  $n$  suficientemente grandes, existe un código  $(M_1, M_2, n)$  tal que

$$R_1 \leq \frac{1}{n} \log M_1, \quad R_2 \leq \frac{1}{n} \log M_2,$$

y  $I_c^n$  es la región de capacidad  $\mathcal{C}$  es la cerradura del conjunto de todos los pares de tasas alcanzables  $(R_1, R_2)$ .

Cabe señalar aquí que la determinación de la región de capacidad para un MARC general es extremadamente difícil. En la siguiente sección, consideramos un caso especial del MARC en el cual la señal recibida en el relevo  $Y_1$  es "mejor" que la salida final del canal  $Y$ .

### 3.2 RESULTADO DE ALCANZABILIDAD PARA CANALES DEGRADADOS

Desde el punto de vista práctico, es razonable suponer que la señal recibida en el relevo es mejor o menos ruidosa que la señal recibida en el receptor final. Definimos este tipo de canal (denominado MARC degradado) en la siguiente forma:

**Definición 3.1:** Un MARC dm  $(X_1 \times X_2 \times X_3, p^*(y, y_1 | x_1, x_2, x_3), \forall x, y_1)$  se dice que es degradado si  $(X_1, X_2), (X_3, Y_1), Y$  forman una cadena de Markov, i.e.,

$$p(y | x_1, x_2, x_3, y_1) = p(y | x_3, y_1).$$

Para el MARC dm degradado, tenemos el siguiente resultado de alcanzabilidad.

**Teorema 3.1:** La región de tasas  $\mathcal{R}_1$  es alcanzable para el MARC dm degradado

$$(X_1 \times X_2 \times X_3, p^*(y, y_1 | x_1, x_2, x_3), \forall x, y_1), \text{ donde}$$

$$\mathcal{R}_1 = \text{co} \left\{ (R_1, R_2) : \begin{aligned} 0 \leq R_1 &\leq \min\{I(X_1, X_3; Y | X_2, V), I(X_1; Y_1 | X_2, X_3, U)\}, \\ 0 \leq R_2 &\leq \min\{I(X_2, X_3; Y | X_1, U), I(X_2; Y_1 | X_1, X_3, V)\}, \\ R_1 + R_2 &\leq \min\{I(X_1, X_2, X_3; Y), I(X_1, X_2; Y_1 | X_3, U, V)\}, \end{aligned} \right. \quad (3.4)$$

para  $p(u, v, x_1, x_2, x_3, y, y_1) = p(u)p(v)p(x_1|u)p(x_2|v)p(x_3|u, v)p^*(y, y_1|x_1, x_2, x_3)$

donde  $U, V$  son variables aleatorias auxiliares arbitrarias y  $\min\{a, b\}$  denota el mínimo de  $a$  y  $b$ .

Nota: Si  $X_2 = \text{constante}$ , dicho canal se reduce a un canal de relevo degradado y las tasas alcanzables (con  $R_2 = 0$  obviamente) de (3.4) son la capacidad real del canal. Esto es, si ponemos las variables auxiliares  $U = X_3$  y  $V = \text{constante}$ , obtendremos

$$R_1 \leq \sup_{p(x_1, x_3)} \min\{I(X_1, X_3; Y), I(X_1; Y_1 | X_3, U)\}$$

lo cual coincide con el resultado de Cover y El Gamal [34].

Ahora probamos este teorema utilizando las técnicas de SBME y decodificación regresiva, introducidas en el capítulo anterior. Es importante señalar que, aunque esta prueba y todas las construcciones son válidas para MARC dm arbitrario (i.e., la condición de degradación no aparece en la demostración), la demostración es interesante (o mejor dicho, tiene sentido) sólo para el caso degradado.

Prueba: Fijese la distribución  $p(u, v, x_1, x_2, x_3) = p(u)p(v)p(x_1|u)p(x_2|v) \cdot p(x_3|u, v)$  y un  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño. Los mensajes  $W_{1b} \in [1, M_1 = \exp(nR_1)]$  y  $W_{2b} \in [1, M_2 = \exp(nR_2)]$ ,  $b=1, 2, \dots, B-1$ , serán transmitidos al receptor en  $B$  bloques, cada bloque consiste en  $n$  usos del canal, y suponemos que los mensajes son uniformemente distribuidos e independientes. Nótese que las tasas totales  $R_1(B-1)/B \rightarrow R_1$  y  $R_2(B-1)/B \rightarrow R_2$  si  $B$  es grande. Utilizamos ahora un argumento de codificación aleatoria para demostrar la alcanzabilidad de  $\mathcal{R}_1$ .

i) Códigos Aleatorios: El código se construye de la siguiente manera:

- Generar  $M_1 = \exp(nR_1)$  secuencias  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  de acuerdo a  $\Pr\{u\} = \prod_{k=1}^n p(u_k)$ , e indexarlas como  $u(s_1)$ ,  $s_1 \in [1, M_1]$ .

- Generar  $M_2 = \exp(nR_2)$  secuencias  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  de acuerdo a  $\Pr(v) = \prod_{k=1}^n p(v_k)$ , e indexarlas como  $v(s_2)$ ,  $s_2 \in [1, M_2]$ .
- Para cada  $u(s_1)$ , generar  $M_1$  secuencias  $x_1$  con probabilidad  $\Pr(x_1 | u(s_1)) = \prod_{k=1}^n p(x_{1k} | u_k(s_1))$ , e indexarlas como  $x_1(\omega_1, s_1)$ , donde  $\omega_1, s_1 \in [1, M_1]$ .
- Para cada  $v(s_2)$ , generar  $M_2$  secuencias  $x_2$  con probabilidad  $\Pr(x_2 | v(s_2)) = \prod_{k=1}^n p(x_{2k} | v_k(s_2))$ , e indexarlas como  $x_2(\omega_2, s_2)$ , donde  $\omega_2, s_2 \in [1, M_2]$ .
- Para cada par  $(u(s_1), v(s_2))$ , generar una secuencia  $x_3$  de acuerdo con la probabilidad  $\Pr(x_3 | u(s_1), v(s_2)) = \prod_{k=1}^n p(x_{3k} | u_k(s_1), v_k(s_2))$ ; denotarla como  $x_3(s_1, s_2)$ , donde  $s_1 \in [1, M_1]$  y  $s_2 \in [1, M_2]$ .

ii) Codificación: Usando este código, los mensajes  $\omega_{1b}$  y  $\omega_{2b}$  se codifican de la siguiente manera. En el bloque 1, los transmisores 1 y 2 y el codificador de relevo mandan

$$x_1(\omega_{11}, 1), \quad x_2(\omega_{21}, 1), \quad x_3(1, 1).$$

En el bloque  $b$ ,  $b = 2, 3, \dots, B-1$ , supongamos que el relevo ya tiene a su disposición los estimados  $\omega'_{1,b-1}$  y  $\omega'_{2,b-1}$  de los últimos mensajes  $\omega_{1,b-1}$  y  $\omega_{2,b-1}$  (se decodifican en iii)). Entonces ellos envían

$$\begin{aligned} x_1(\omega_{1b}, s_{1b}), & \quad s_{1b} = \omega_{1,b-1}, \\ x_2(\omega_{2b}, s_{2b}), & \quad s_{2b} = \omega_{2,b-1}, \\ x_3(s'_{1b}, s'_{2b}), & \quad s'_{1b} = \omega'_{1,b-1} \text{ y } s'_{2b} = \omega'_{2,b-1}. \end{aligned}$$

En el último bloque  $B$ , ellos mandan

$$\begin{aligned} x_1(1, s_{1B}), & \quad s_{1B} = \omega_{1,B-1}, \\ x_2(1, s_{2B}), & \quad s_{2B} = \omega_{2,B-1}, \\ x_3(s'_{1B}, s'_{2B}), & \quad s'_{1B} = \omega'_{1,B-1} \text{ y } s'_{2B} = \omega'_{2,B-1}. \end{aligned}$$

Se puede observar que  $\omega_{1b}$  y  $\omega_{2b}$  llevan la información fresca, mientras  $s_{1b}$  y  $s_{2b}$  llevan la información de resolución para el bloque anterior. El relevo coopera con los transmisores mandando la información de resolución al

receptor simultáneamente.

iii) Decodificación en el Relevo: Para formar información de resolución cooperativa, el relevo encuentra un par  $(\omega'_{1b}, \omega'_{2b})$  como el estimado del par de mensajes  $(\omega_{1b}, \omega_{2b})$  de la salida en el relevo  $y_{1b}$ , si este par es único tal que

$$(u(s'_{1b}), v(s'_{2b}), x_1(\omega'_{1b}, s'_{1b}), x_2(\omega'_{2b}, s'_{2b}), x_3(s'_{1b}, s'_{2b}), y_{1b}) \in \mathcal{A}'_C,$$

donde  $\mathcal{A}'_C \triangleq \mathcal{A}_C(U, V, X_1, X_2, X_3, Y)$ . Inmediatamente, el codificador de relevo pone  $s'_{1,b+1} = \omega'_{1b}$  y  $s'_{2,b+1} = \omega'_{2b}$  para el siguiente bloque  $(b+1)$ .

iv) Decodificación Regresiva en el Receptor: Después de recibir todas las salidas  $y_b$ ,  $b = 1, 2, \dots$ , de los  $B$  bloques, el receptor puede empezar la decodificación regresiva. Primero decodifica la información de resolución pura del bloque  $B$ . Esto es, se encuentra un único par  $(\hat{s}_{1B}, \hat{s}_{2B})$  tal que

$$(u(\hat{s}_{1B}), v(\hat{s}_{2B}), x_1(1, \hat{s}_{1B}), x_2(1, \hat{s}_{2B}), x_3(\hat{s}_{1B}, \hat{s}_{2B}), y_B) \in \mathcal{A}_C,$$

donde  $\mathcal{A}_C \triangleq \mathcal{A}_C(U, V, X_1, X_2, X_3, Y)$ .

Conociendo  $\hat{s}_{1B}$  y  $\hat{s}_{2B}$ , se pone primero  $\hat{\omega}_{1,B-1} = \hat{s}_{1B}$  y  $\hat{\omega}_{2,B-1} = \hat{s}_{2B}$ , y encuentra un único  $(\hat{s}_{1,B-1}, \hat{s}_{2,B-1})$  tal que

$$(u(\hat{s}_{1,B-1}), v(\hat{s}_{2,B-1}), x_1(\hat{\omega}_{1,B-1}, \hat{s}_{1,B-1}), x_2(\hat{\omega}_{2,B-1}, \hat{s}_{2,B-1}), x_3(\hat{s}_{1,B-1}, \hat{s}_{2,B-1}), y_{B-1}) \in \mathcal{A}_C.$$

Este proceso se sigue hasta que termine de decodificar toda la información  $\omega_{1b}$  y  $\omega_{2b}$ ,  $b=B-1, B-2, \dots, 1$ .

v) Probabilidad de Error: Sean  $W'_{1b}$  y  $W'_{2b}$  los estimados del relevo para los mensajes  $W_{1b}$  y  $W_{2b}$ , y  $\hat{W}_{1b}$  y  $\hat{W}_{2b}$  los estimados del receptor. Definase el evento de error ocurrido en la decodificación regresiva durante el bloque  $b$  como

$$F_b \triangleq \{\hat{W}_{1b} \neq W_{1b} \text{ o } \hat{W}_{2b} \neq W_{2b}\},$$

y el evento de error de decodificación en el relevo durante el bloque  $b$  como

$$G_b \triangleq \{W'_{1b} \neq W_{1b} \text{ o } W'_{2b} \neq W_{2b}\}.$$

Para acotar superiormente la probabilidad de error, promediada sobre el conjunto de códigos, definamos primero la probabilidad de error para  $B-1$  pares de mensajes:

$$P_e^B \triangleq \Pr \left\{ \bigcup_{b=1, B-1} F_b \right\}.$$

Esta probabilidad se puede acotar como sigue

$$\begin{aligned} P_e^B &\leq \Pr \left\{ \bigcup_{b=1, B-1} (F_b \cup G_b) \right\} \leq \Pr \left\{ \bigcup_{b=1, B-1} G_b \right\} + \Pr \left\{ \bigcup_{b=1, B-1} F_b \mid \bigcap_{i=1, B-1} G_i^c \right\} \\ &\leq \sum_{b=1}^{B-1} \Pr \left\{ G_b \mid \bigcap_{i=1, b-1} G_i^c \right\} + \sum_{b=1}^{B-1} \Pr \left\{ F_b \mid \left( \bigcap_{i=1, b-1} G_i^c \right) \cap \left( \bigcap_{j=b+1, B-1} F_j^c \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde usamos la desigualdad  $\Pr\{A \cap B\} \leq \Pr\{A|B\}$ .

La desigualdad (3.5) implica que podemos completar la demostración mostrando además que la probabilidad de error en cada etapa de decodificación puede hacerse arbitrariamente pequeña, bajo la suposición de que ningún error ha sólo cometido en las etapas previas<sup>1</sup>.

Debido a la construcción del código, podemos suponer que  $(\omega_{1b}, \omega_{2b}) = (1, 1)$  sin perder generalidad. Consecuentemente, se puede ver sin mayor dificultad que el cálculo de la probabilidad de error de cada etapa de decodificación del relevo es la misma, y el cálculo de la probabilidad de error de cada etapa de la decodificación regresiva es también la misma. Esto implica que

$$P_e^B \leq (B-1)(P_{e1} + P_{e2}), \quad (3.6)$$

donde  $P_{e1}$  es la probabilidad de error de la decodificación de relevo en una etapa, y  $P_{e2}$  es la probabilidad de error de la decodificación regresiva de una etapa. Ellas pueden acotarse si definimos los siguientes eventos:

<sup>1</sup> El orden del procedimiento de esta decodificación es: la decodificación del relevo del bloque 1 al bloque  $B-1$ , siguiendo por la decodificación regresiva del bloque  $B$  al bloque 2.

$$E_{\omega_1 \omega_2} \triangleq \{ (u(1), v(1), x_1(\omega_1, 1), x_2(\omega_2, 1), x_3(1, 1), y_1) \in \mathcal{A}'_c \},$$

$$H_{s_1 s_2} \triangleq \{ (u(s_1), v(s_2), x_1(1, s_1), x_2(1, s_2), x_3(s_1, s_2), y) \in \mathcal{A}'_c \}.$$

Esto es

$$P_{e1} = \Pr \left\{ E_{11}^c \cup \left( \bigcup_{(\omega_1, \omega_2) \neq (1,1)} E_{\omega_1 \omega_2} \right) \right\}$$

$$\leq \Pr\{E_{11}^c\} + \sum_{\omega_1 \neq 1} \Pr\{E_{\omega_1 1}\} + \sum_{\omega_2 \neq 1} \Pr\{E_{1\omega_2}\} + \sum_{\substack{\omega_1 \neq 1 \\ \omega_2 \neq 1}} \Pr\{E_{\omega_1 \omega_2}\}$$

$$P_{e2} = \Pr \left\{ H_{11}^c \cup \left( \bigcup_{(s_1, s_2) \neq (1,1)} H_{s_1 s_2} \right) \right\} \quad (3.7)$$

$$\leq \Pr\{H_{11}^c\} + \sum_{s_1 \neq 1} \Pr\{H_{s_1 1}\} + \sum_{s_2 \neq 1} \Pr\{H_{1s_2}\} + \sum_{\substack{s_1 \neq 1 \\ s_2 \neq 1}} \Pr\{H_{s_1 s_2}\}$$

De la propiedad 3) del lema 2.1, tenemos para  $n$  suficientemente grande

$$\Pr\{E_{11}^c\} \leq \epsilon, \quad \Pr\{H_{11}^c\} \leq \epsilon. \quad (3.8a)$$

Aplicando nuevamente el lema, tenemos para  $\omega_1 \neq 1$ ,

$$\Pr\{E_{\omega_1 1}\} = \sum_{(u, v, x_1, x_2, x_3, y_1) \in \mathcal{A}'_c} p(u)p(x_1|u)p(y_1, x_2, x_3, v|u)$$

$$\leq \mathcal{A}'_c \exp(-n[H(U) - \epsilon]) \exp(-n[H(X_1|U) - 2\epsilon]) \exp(-n[H(Y_1, X_2, X_3, V|U) - 2\epsilon])$$

$$\leq \exp(n[H(U, V, X_1, X_2, X_3, Y_1) + \epsilon]) \exp(-n[H(U) - \epsilon]) \exp(-n[H(X_1|U) - 2\epsilon])$$

$$\exp(-n[H(Y_1, X_2, X_3, V|U) - 2\epsilon])$$

$$\leq \exp(-n[I(X_1; Y_1, X_2, X_3, V|U) - 6\epsilon]). \quad (3.8b)$$

donde la primera igualdad se debe a  $\omega_1 \neq 1$ , lo cual implica la independencia de  $X_1$  con respecto a  $(Y_1, X_2, X_3, V)$  dado  $U$  [3, 32]. Por la definición de  $p(u, v, x_1, x_2, x_3, y_1)$  en el teorema, se puede ver que

$$I(X_1; Y_1 | X_2, X_3, U) = I(X_1; Y_1, X_2, X_3, V | U) \quad (3.8c)$$

Similarmenete podemos acotar las demás probabilidades en (3.7) como sigue

$$\begin{aligned}
 \Pr\{E_{1\omega_2}\} &\leq \exp(-n[I(X_2, Y_1 | X_1, X_3, V) - 6\epsilon]), & \text{para } \omega_2 \neq 1, \\
 \Pr\{E_{\omega_1\omega_2}\} &\leq \exp(-n[I(X_1, X_2; Y_1 | X_3, U, V) - 6\epsilon]), & \text{para } \omega_1 \neq 1 \text{ y } \omega_2 \neq 1, \\
 \Pr\{H_{s_1}\} &\leq \exp(-n[I(X_1, X_3; Y | X_2, V) - 6\epsilon]), & \text{para } s_1 \neq 1, \\
 \Pr\{H_{1s_2}\} &\leq \exp(-n[I(X_2, X_3; Y | X_1, U) - 6\epsilon]), & \text{para } s_2 \neq 1, \\
 \Pr\{H_{s_1s_2}\} &\leq \exp(-n[I(X_1, X_2, X_3; Y) - 6\epsilon]), & \text{para } s_1 \neq 1 \text{ y } s_2 \neq 1.
 \end{aligned}
 \tag{3.8d}$$

Sustituyendo (3.8) en (3.7), obtenemos

$$\begin{aligned}
 P_{e1} &\leq \epsilon + \exp(nR_1) \exp(-n[I(X_1; Y_1 | X_2, X_3, U) - 6\epsilon]) \\
 &\quad + \exp(nR_2) \exp(-n[I(X_2; Y_1 | X_1, X_3, V) - 6\epsilon]) \\
 &\quad + \exp(n(R_1 + R_2)) \exp(-n[I(X_1, X_2; Y_1 | X_3, U, V) - 6\epsilon]), \\
 P_{e2} &\leq \epsilon + \exp(nR_1) \exp(-n[I(X_1, X_3; Y | X_2, V) - 6\epsilon]) \\
 &\quad + \exp(nR_2) \exp(-n[I(X_2, X_3; Y | X_1, U) - 6\epsilon]) \\
 &\quad + \exp(n(R_1 + R_2)) \exp(-n[I(X_1, X_2, X_3; Y) - 6\epsilon]).
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Entonces, con (3.6) y (3.9) mostramos sin dificultad que para  $n$  suficientemente grande,  $P_e^B \leq 8(B-1)\epsilon$ , si el par de tasas  $(R_1, R_2)$  satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
 R_1 &\leq \min\{I(X_1, X_3; Y | X_2, V), I(X_1; Y_1 | X_2, X_3, U)\} - 7\epsilon, \\
 R_2 &\leq \min\{I(X_2, X_3; Y | X_1, U), I(X_2; Y_1 | X_1, X_3, V)\} - 7\epsilon, \\
 R_1 + R_2 &\leq \min\{I(X_1, X_2, X_3; Y), I(X_1, X_2; Y_1 | X_3, U, V)\} - 7\epsilon.
 \end{aligned}$$

Nótese también que las tasas nulas son siempre alcanzables.

Hasta aquí, podemos concluir que existe por lo menos un código entre el conjunto de códigos aleatorios cuya  $P_e^B \leq 8(B-1)\epsilon$ , si las tasas cumplen las condiciones anteriores. Como la prueba es válida para cualquier  $\epsilon > 0$  y todas las distribuciones  $p(u, v, x_1, x_2, x_3) = p(u)p(v)p(x_1|u)p(x_2|v)p(x_3|u, v)$ , por el

argumento de compartimiento de tiempo se demuestra el teorema. ■

### 3.3 COTA EXTERIOR DE LA REGION DE CAPACIDAD

Hemos establecido en la sección anterior una región de tasas alcanzables (cota interior de la región de capacidad) para el MARC dm degradado. Para ver qué tan cerca está la región alcanzable de la región de capacidad actual (todavía es una incógnita), es necesario acotar exteriormente la región de capacidad. El siguiente teorema nos da una cota exterior para el MARC dm en el caso general:

**Teorema 3.2:** La región de capacidad  $\mathcal{C}$  del MARC dm general es siempre un subconjunto de la región  $\mathcal{R}'_0$ , donde

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'_0 = \{ (R_1, R_2): & 0 \leq R_1 \leq \min\{I(X_1, X_3; Y | X_2), I(X_1; Y, Y_1 | X_2, X_3)\}, \\ & 0 \leq R_2 \leq \min\{I(X_2, X_3; Y | X_1), I(X_2; Y, Y_1 | X_1, X_3)\}, \\ & R_1 + R_2 \leq \min\{I(X_1, X_2, X_3; Y), I(X_1, X_2; Y, Y_1 | X_3)\}, \\ & \text{para } p(x_1, x_2, x_3, y, y_1) = p(x_1)p(x_2)p(x_3 | x_1, x_2)p^*(y, y_1 | x_1, x_2, x_3) \}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Antes de probar este teorema, especializamos el resultado para el caso de un MARC dm degradado.

**Corolario 3.1:** Para el MARC dm degradado, la cota exterior del teorema anterior puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'_0 = \{ (R_1, R_2): & 0 \leq R_1 \leq \min\{I(X_1, X_3; Y | X_2), I(X_1; Y_1 | X_2, X_3)\}, \\ & 0 \leq R_2 \leq \min\{I(X_2, X_3; Y | X_1), I(X_2; Y_1 | X_1, X_3)\}, \\ & R_1 + R_2 \leq \min\{I(X_1, X_2, X_3; Y), I(X_1, X_2; Y_1 | X_3)\}, \\ & \text{para } p(x_1, x_2, x_3, y, y_1) = p(x_1)p(x_2)p(x_3 | x_1, x_2)p^*(y, y_1 | x_1, x_2, x_3) \}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Este corolario se demuestra simplemente al notar que

$$I(X_1; Y, Y_1 | X_2, X_3) = I(X_1; Y_1 | X_2, X_3) + I(X_1; Y | X_2, X_3, Y_1),$$

y de la definición de un MARC degradado, tenemos  $I(X_1; Y | X_2, X_3, Y_1) = 0$  (similarmente para otros términos del lado derecho de (3.10)).

**Demostración del teorema 3.2:** Dado cualquier código  $(N_1, N_2, n)$  para el MARC dm, la desigualdad de Fano [33] implica que

$$H(W_1, W_2 | Y^n) \leq n(R_1 + R_2) P_e^n + h_b(P_e^n) \triangleq n c_n, \quad (3.12a)$$

donde  $h_b(\cdot)$  denota la función de entropía binaria dada por

$$h_b(p) = -p \log p + (1-p) \log(1-p); \quad 0 \leq p \leq 1.$$

Nótese que  $P_e^n \rightarrow 0$  implica automáticamente  $c_n \rightarrow 0$ . Consecuentemente,

$$H(W_1 | Y^n, W_2) \leq n c_n \quad \text{y} \quad H(W_2 | Y^n, W_1) \leq n c_n. \quad (3.12b)$$

Obsérvese ahora que

$$nR_1 = H(W_1) = H(W_1 | W_2) = I(W_1; Y^n | W_2) + H(W_1 | Y^n, W_2) \leq I(W_1; Y^n | W_2) + n c_n, \quad (3.13a)$$

$$nR_2 = H(W_2) \leq I(W_2; Y^n | W_1) + n c_n, \quad (3.13b)$$

$$n(R_1 + R_2) = H(W_1, W_2) \leq I(W_1, W_2; Y^n) + n c_n. \quad (3.13c)$$

Acotamos primero el lado derecho de (3.13a) como sigue,

$$\begin{aligned} I(W_1; Y^n | W_2) &= \sum_{k=1}^n H(Y_k | W_2, Y^{k-1}) - H(Y_k | W_1, W_2, Y^{k-1}) \\ &\stackrel{(a)}{=} \sum_{k=1}^n H(Y_k | X_{2k}, W_2, Y^{k-1}) - H(Y_k | X_{1k}, X_{2k}, W_1, W_2, Y^{k-1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^n H(Y_k | X_{2k}) - H(Y_k | X_{1k}, X_{2k}, X_{3k}, W_1, W_2, Y^{k-1}) \\ &\stackrel{(b)}{=} \sum_{k=1}^n H(Y_k | X_{2k}) - H(Y_k | X_{1k}, X_{2k}, X_{3k}) \\ &= \sum_{k=1}^n I(X_{1k}, X_{3k}; Y_k | X_{2k}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Donde (a) se debe a las funciones de codificación definidas en (3.1), y (b)

es por (3.3) (el canal es sin memoria). Por un razonamiento similar, también podemos demostrar que

$$I(W_2; Y^n | W_1) \leq \sum_{k=1}^n I(X_{2k}, X_{3k}; Y_k | X_{1k}). \quad (3.15)$$

Nótese luego que

$$\begin{aligned} I(W_1, W_2; Y^n) &= \sum_{k=1}^n I(W_1, W_2; Y_k | Y^{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n I(W_1, W_2, X_{1k}, X_{2k}, X_{3k}; Y_k | Y^{k-1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^n I(X_{1k}, X_{2k}, X_{3k}; Y_k). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Acotamos ahora los términos del lado derecho de (3.13) introduciendo la salida en el receptor  $Y_1$ . Para empezar, tenemos

$$\begin{aligned} I(W_1; Y^n | W_2) &\leq I(W_1; Y^n, Y_1^n | W_2) = \sum_{k=1}^n I(W_1; Y_k, Y_{1k} | W_2, Y_1^{k-1}, Y_1^{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n H(W_1 | W_2, Y_1^{k-1}, Y_1^{k-1}) - H(W_1 | W_2, Y_1^k, Y_1^k) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Es fácil ver que  $W_1$  y  $X_{3k}$  son condicionalmente independientes dado  $(W_2, Y_1^{k-1}, Y_1^{k-1})$  (de hecho,  $X_{3k}$  sólo depende estadísticamente de  $Y_1^{k-1}$  por (3.2)). Por lo cual

$$H(W_1 | W_2, Y_1^{k-1}, Y_1^{k-1}, X_{3k}) = H(W_1 | W_2, Y_1^{k-1}, Y_1^{k-1}).$$

Continuando con las desigualdades de (3.17), tenemos

$$\begin{aligned} I(W_1; Y^n | W_2) &\leq \sum_{k=1}^n H(W_1 | W_2, Y_1^{k-1}, Y_1^{k-1}, X_{3k}) - H(W_1 | W_2, Y_1^k, Y_1^k, X_{3k}) \\ &= \sum_{k=1}^n I(W_1; Y_k, Y_{1k} | W_2, Y_1^{k-1}, Y_1^{k-1}, X_{3k}) \\ &= \sum_{k=1}^n H(Y_k, Y_{1k} | W_2, Y_1^{k-1}, Y_1^{k-1}, X_{3k}) - H(Y_k, Y_{1k} | W_1, W_2, Y_1^{k-1}, Y_1^{k-1}, X_{3k}) \\ &\leq \sum_{k=1}^n H(Y_k, Y_{1k} | X_{2k}, X_{3k}) - H(Y_k, Y_{1k} | X_{1k}, X_{2k}, X_{3k}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^n I(X_{1k}; Y_k, Y_{1k} | X_{2k}, X_{3k}). \quad (3.18)$$

donde la última desigualdad se debe a (3.1) y a la propiedad de dm del canal. Por la simetría también podemos ver que

$$I(W_2; Y^n | W_1) \leq \sum_{k=1}^n I(X_{2k}; Y_k, Y_{1k} | X_{1k}, X_{3k}). \quad (3.19)$$

Finalmente

$$I(W_1, W_2; Y^n) \leq I(W_1, W_2; Y^n, Y_1^n) = \sum_{k=1}^n I(W_1, W_2; Y_k, Y_{1k} | Y_1^{k-1}, Y_1^{k-1}). \quad (3.20)$$

Por la independencia condicional de  $(W_1, W_2)$  y  $X_{3k}$  dado  $(Y_1^{k-1}, Y_1^{k-1})$ , tenemos

$$\begin{aligned} I(W_1, W_2; Y^n) &\leq \sum_{k=1}^n I(W_1, W_2; Y_k, Y_{1k} | Y_1^{k-1}, Y_1^{k-1}, X_{3k}) \\ &\leq \sum_{k=1}^n I(W_1, W_2, X_{1k}, X_{2k}; Y_k, Y_{1k} | Y_1^{k-1}, Y_1^{k-1}, X_{3k}) \\ &\leq \sum_{k=1}^n I(X_{1k}, X_{2k}; Y_k, Y_{1k} | X_{3k}), \end{aligned} \quad (3.21)$$

Aplicando las cotas anteriores a (3.13), obtenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} R_1 &\leq \min \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(X_{1k}, X_{3k}; Y_k | X_{2k}), \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(X_{1k}; Y_k, Y_{1k} | X_{2k}, X_{3k}) \right\} + \epsilon_n \\ R_2 &\leq \min \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(X_{2k}, X_{3k}; Y_k | X_{1k}), \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(X_{2k}; Y_k, Y_{1k} | X_{1k}, X_{3k}) \right\} + \epsilon_n \\ R_1 + R_2 &\leq \min \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(X_{1k}, X_{2k}, X_{3k}; Y_k), \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(X_{1k}, X_{2k}; Y_k, Y_{1k} | X_{3k}) \right\} + \epsilon_n \end{aligned}$$

Ahora si definamos

$$X_1 \triangleq X_{1T}, \quad X_2 \triangleq X_{2T}, \quad X_3 \triangleq X_{3T}, \quad Y \triangleq Y_T, \quad Y_1 \triangleq Y_{1T},$$

donde  $T$  es una variable aleatoria discreta, uniformemente distribuida en el conjunto de los enteros  $\{1, 2, \dots, n\}$  e independiente de  $(W_1, W_2, X_1^n, X_2^n, X_3^n, Y^n, Y_1^n)$ , las cotas anteriores aún pueden acotarse

superiormente como en (3.10) con caracterizaciones de una sólo letra (single letter characterization).

Esto implica que cualquier par de tasas alcanzables  $(R_1, R_2)$  (por definición  $P_e^n \rightarrow 0$ , por lo cual  $c_n \rightarrow 0$ ) de cualquier código  $(M_1, M_2, n)$  para el MARC general tiene que satisfacer la restricción de (3.10) del teorema 3.2. Por lo tanto  $\mathcal{R}_0$  es una cota exterior de la región de capacidad del canal. La razón de tomar la unión únicamente sobre las distribuciones de  $(X_{1k}, X_{2k}, X_{3k})$  que tengan formas de  $p(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}) = p(x_{1k})p(x_{2k})p(x_{3k} | x_{1k}, x_{2k})$  se debe a que cualquier distribución conjunta  $p(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k})$  siempre puede escribirse como  $p(x_{3k} | x_{1k}, x_{2k})p(x_{1k}, x_{2k})$ , pero por la independencia de  $W_1$  y  $W_2$ , tenemos  $p(x_{1k}, x_{2k}) = p(x_{1k})p(x_{2k})$ . Esto completa la demostración del teorema 3.2. ■

### 3.4 CANAL CON RUIDO ADITIVO GAUSSIANO Y BLANCO

En esta sección se considera un MARC con ruido aditivo Gaussiano y blanco (abreviado MARC AWGN), donde el resultado de alcanzabilidad obtenido en la sección 3.2 puede interpretarse mejor. La Fig.3.3 muestra un MARC AWGN degradado, donde las entradas y salidas del canal  $X_1, X_2, X_3, Y, Y_1$  son señales reales. En cada instante discreto del tiempo, las salidas están dadas por

$$Y_1 = X_1 + X_2 + Z_1, \quad Y = X_1 + X_2 + X_3 + Z_1 + Z_2 = Y_1 + X_3 + Z_2;$$

los ruidos (estacionarios por supuesto)  $Z_1, Z_2$  son variables aleatorias independientes, Gaussianas con medias cero y variancias  $N_1$  y  $N_2$ , independientes también de las entradas  $X_1, X_2$  y  $X_3$ . Existen también restricciones de potencia promedio  $P_1, P_2$  y  $P_3$  en las secuencias codificadas, es decir,

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_{i,t}^2 \leq P_i, \quad i=1, 2, 3. \quad (3.22)$$

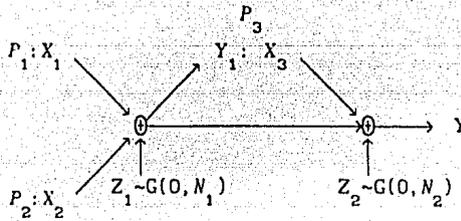


Fig. 3.3 MARC AWGN degradado

Con la misma definición de código para el MARC dada previamente y las restricciones adicionales de (3.22), tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 3.3:** Una región de tasas alcanzables para el MARC AWGN degradado está dada por

$$\mathcal{R}_G = \bigcup_{\substack{0 \leq \alpha_i \leq 1 \\ i=1,2,3}} \left\{ (R_1, R_2) : 0 \leq R_1 \leq \min \left\{ \mathcal{E} \left[ \frac{P_1 + \alpha_3 P_3 + 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_3 P_1 P_3}}{N_1 + N_2} \right], \mathcal{E} \left[ \frac{\alpha_1 P_1}{N_1} \right] \right\}, \right. \\ \left. 0 \leq R_2 \leq \min \left\{ \mathcal{E} \left[ \frac{P_2 + \alpha_3 P_3 + 2\sqrt{\alpha_2 \alpha_3 P_2 P_3}}{N_1 + N_2} \right], \mathcal{E} \left[ \frac{\alpha_2 P_2}{N_1} \right] \right\}, \right. \\ \left. R_1 + R_2 \leq \min \left\{ \mathcal{E} \left[ \frac{P_1 + P_2 + P_3 + 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_3 P_1 P_3} + 2\sqrt{\alpha_2 \alpha_3 P_2 P_3}}{N_1 + N_2} \right], \mathcal{E} \left[ \frac{\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2}{N_1} \right] \right\} \right\} \quad (3.23)$$

donde  $\bar{\alpha}_i \triangleq 1 - \alpha_i$  y  $\mathcal{E}(x) \triangleq \frac{1}{2} \log(1+x)$ .

**Demostración:** ver apéndice 3.1.

**Nota 1:** Si  $\frac{P_1 + P_2}{N_1} \leq \frac{P_3}{N_2}$ ,  $\mathcal{R}_G$  se convierte en  $\mathcal{R}'_G = \left\{ (R_1, R_2) : R_1 \leq \mathcal{E} \left[ \frac{P_1}{N_1} \right], R_2 \leq \mathcal{E} \left[ \frac{P_2}{N_1} \right], R_1 + R_2 \leq \mathcal{E} \left[ \frac{P_1 + P_2}{N_1} \right] \right\}$ , la cual es igual a la región de capacidad de un MAC AWGN con potencias promedio de las entradas  $P_1$  y  $P_2$ , y potencia del ruido  $N_1$ . Es decir, el canal parece ser libre del ruido después del relevo.

**Nota 2:** Si  $P_2 = 0$ , esta región de tasas alcanzables se reduce a la capacidad de un canal de relevo AWGN [34], i.e.,

$$C = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \min \left\{ \mathcal{E} \left\{ \frac{P_1 + P_3 + 2\sqrt{\alpha P_1 P_3}}{N_1 + N_2} \right\}, \mathcal{E} \left\{ \frac{\alpha P_1}{N_1} \right\} \right\}$$

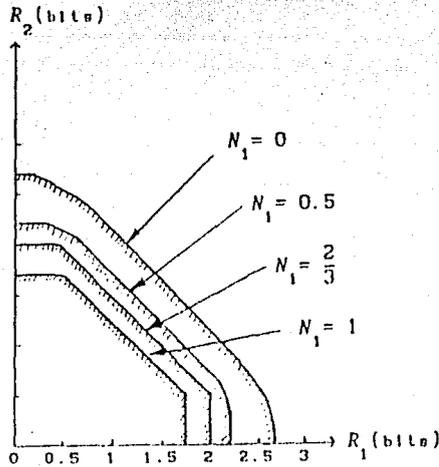


Fig. 3.4 Región de tasas alcanzables de un MARC AWGN degradado con  $P_1 = P_2 = P_3 = 10$  y  $N_1 + N_2 = 1$ .

Para ver los efectos del relevo en un canal de multiacceso y las variaciones de las tasas de transmisión en diferentes condiciones de ruido, graficamos en la Fig. 3.4 esta región alcanzable para  $P_i = 10$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $N = N_1 + N_2 = 1$ , y diferentes valores de  $N_1$  y  $N_2$ . Se puede observar que la región aumenta conforme  $N_1$  está disminuyendo (sujepto a  $N_2 = N - N_1$ ). También notamos que cuando  $N_1$  varía entre  $[\frac{2}{3}, 1]$ ,  $\mathcal{R}_G$  coincide con la región de capacidad de un MAC AWGN de potencias  $P_1 = P_2 = 10$ , y ruido  $N_1$  (ver la nota 1). Para  $N_1 = N_2 = 0.5$ , la región equivale más o menos a la región de capacidad de un MAC AWGN con potencias  $P_1 = P_2 = 20$  y ruido 1, i.e. casi el doble de la razón total de señal a ruido (SNR) del canal sin relevo (un MAC simplemente). Para el caso extremo  $N_1 = 0$  y  $N_2 = 1$ , lo cual corresponde a la situación donde el relevo puede cooperar totalmente con ambos transmisores, la región de tasas es comparable con la región de capacidad de un MAC con potencias  $P_1 = P_2 = 40$  y ruido 1; casi se cuadruplica la SNR total del caso sin relevo.

### 3.5 DISCUSION

El concepto de multiacceso con relevo es muy interesante y también novedoso tanto en la práctica como en la teoría. El objetivo de este capítulo es dar algunas implicaciones del problema de transmisión de información en este tipo de canales. Hemos observado que en un MARC Gaussiano, un relevo podría elevar hasta cuatro veces la razón de señal a ruido total de los transmisores, con la misma potencia que cada uno de los transmisores. Este fenómeno se puede explicar si tomamos en cuenta que en dicho caso (el ruido  $N_1=0$ ), el relevo coopera (con una unidad de tiempo de retardo en nuestro caso, debido a la causalidad) totalmente con los transmisores, y según van der Meulen [2], la capacidad de un canal de multiacceso AWGN con la cooperación total entre los dos transmisores (sin retardo), es

$$C \stackrel{\Delta}{=} R_1 + R_2 = \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1 P_2}}{N} \right],$$

con lo cual no es difícil explicar el aumento de la SNR total en caso de un MAC con relevo. Este estudio es el primer paso hacia el completo entendimiento de tal situación de comunicación. Desafortunadamente, como la mayoría de los canales de multiusuario con información lateral o canal lateral, el problema de la caracterización simple de la región de capacidad no ha sido resuelto en su totalidad. A pesar de eso, hemos obtenido algunos resultados interesantes, especialmente para el caso de MARC AWGN. Las regiones alcanzables obtenidas, aunque no se ha mostrado que son regiones de capacidad, coinciden por lo menos para el caso de un sólo transmisor ( $R_2=0$ ), i.e., para el caso de un canal con relevo.

También hemos obtenido algunos resultados sobre MARC con realimentación, es decir, existen realimentaciones de la salida  $Y$  para el relevo y realimentaciones de ambas salidas ( $Y, Y_1$ ) para cada transmisor. Obviamente, las funciones de codificación (3.1) y (3.2) se cambian para este caso a

$$x_{1k} = f_{1k}(\omega_1, y_1^{k-1}, y_1^{k-1}), \quad x_{2k} = f_{2k}(\omega_2, y_2^{k-1}, y_1^{k-1}), \quad x_{3k} = f_{3k}(y_1^{k-1}, y_1^{k-1})$$

donde  $k=1, 2, \dots, n$  y  $\omega_k \in [1, M_k]$  son mensajes a transmitir. Los resultados se pueden resumir en el siguiente teorema cuya demostración es similar a la de MARC dm de las secciones 3.2 y 3.3 (ver [48] para mayor detalle):

**Teorema 3.4:** Para el MARC dm con realimentación, sea  $\mathcal{R}(P)$  el par de tasas  $(R_1, R_2)$  que satisfacen

$$\begin{aligned} 0 \leq R_1 &\leq I(X_1; Y, Y_1 | X_2, X_3), & 0 \leq R_2 &\leq I(X_2; Y, Y_1 | X_1, X_3), \\ R_1 + R_2 &\leq \min\{I(X_1, X_2, X_3; Y), I(X_1, X_2; Y, Y_1 | X_3)\}, \end{aligned}$$

para una distribución conjunta  $P$  en  $(X_1, X_2, X_3)$ . Entonces

1) Una región alcanzable es  $\mathcal{R}_{\text{IF}} = \cup \mathcal{R}(P)$ , donde la unión es sobre todas las  $P$  de forma  $p(x_1, x_2, x_3) = p(x_3)p(x_1|x_3)p(x_2|x_3)$ .

2) Una cota exterior de la región de capacidad es  $\mathcal{R}_{\text{OF}} = \cup \mathcal{R}(P)$ , donde la unión es sobre cualquier  $P$ .

## APENDICE 3.1

### Demostración del Teorema 3.3:

Demostremos aquí la alcanzabilidad de  $\mathcal{R}_G$  para el MARC AWGN degradado utilizando un método similar al del caso dm (SBME y decodificación regresiva).

Denotamos primero  $\mathcal{R}_G = \cup \mathcal{R}(\underline{\alpha})$ , donde la unión es sobre todas  $\underline{\alpha} \triangleq \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \in [0, 1]^3$  y  $\mathcal{R}(\underline{\alpha})$  es la región definida por (3.23). Se puede ver fácilmente que

$$\mathcal{R}(\underline{\alpha}) = \mathcal{R}'(\underline{\alpha}) \cap \mathcal{R}''(\underline{\alpha}), \quad (3.30)$$

donde  $\mathcal{R}'(\underline{\alpha})$  y  $\mathcal{R}''(\underline{\alpha})$  son regiones cuyas tasas ( $R_1, R_2$ ) son restringidas por los primeros y segundos términos dentro de  $\min(\cdot, \cdot)$  en (3.23), respectivamente. Observe que si  $\mathcal{R}''(\underline{\alpha})$  es alcanzable para el proceso de decodificación en el relevo y  $\mathcal{R}'(\underline{\alpha})$  es alcanzable en la decodificación regresiva del receptor (suponiendo que la decodificación en el relevo fue correcta), la intersección de ellas también es alcanzable para este esquema.

Para facilitar la demostración bajo nuestro esquema, supongamos, sin perder generalidad, que el mensaje del primer transmisor consiste en dos componentes

$$W_1 = (W_1^{(1)}, W_1^{(2)}), \quad \text{donde } W_1^{(1)} \in [1, M_1^{(1)} = \exp(nR_1^{(1)})],$$

y  $M_1 = \exp(nR_1) = M_1^{(1)} \times M_1^{(2)}$ . También definimos que la información de resolución  $S_2$  consiste en

$$S_2 = (S_2^{(1)}, S_2^{(2)}), \quad \text{donde } S_2^{(1)} \in [1, M_2^{(1)} = \exp(nR_2^{(1)})],$$

y  $M_2 = \exp(nR_2) = M_2^{(1)} \times M_2^{(2)}$ .

Generamos ahora independientemente las siguientes secuencias iid de acuerdo a la distribución Gaussiana con media cero y variancia unitaria:

$$u(s_1), \tilde{v}(s_2^{(1)}), \hat{v}(s_2^{(2)}), \tilde{x}_1(\omega_1^{(1)}, s_1), \hat{x}_1(\omega_1^{(2)}, s_1), \tilde{x}_2(\omega_2, s_2^{(1)}), \hat{x}_2(\omega_2, s_2^{(2)})$$

donde

$$\omega_1^{(1)} \in [1, M_1^{(1)}], \quad \omega_1^{(2)} \in [1, M_1^{(2)}], \quad \omega_2 \in [1, M_2],$$

$$s_2^{(1)} \in [1, M_2^{(1)}], \quad s_2^{(2)} \in [1, M_2^{(2)}], \quad s_1 \in [1, M_1].$$

Las palabras del código se forman como sigue:

$$x_1(\omega_1, s_1) = \sqrt{\alpha_1 P_1} \left\{ \sqrt{\beta} \tilde{x}_1(\omega_1^{(1)}, s_1) + \sqrt{\alpha} \hat{x}_1(\omega_1^{(2)}, s_1) \right\} + \sqrt{\alpha_1 P_1} u(s_1) \quad (3.31)$$

$$x_2(\omega_2, s_2) = \sqrt{\gamma} \left\{ \sqrt{\alpha_2 P_2} \tilde{x}_2(\omega_2, s_2^{(1)}) + \sqrt{\alpha_2 P_2} \tilde{v}(s_2^{(1)}) \right\} \\ + \sqrt{\gamma} \left\{ \sqrt{\alpha_2 P_2} \hat{x}_2(\omega_2, s_2^{(2)}) + \sqrt{\alpha_2 P_2} \hat{v}(s_2^{(2)}) \right\}, \quad (3.32)$$

$$x_3(s_1, s_2) = \sqrt{\alpha_3 P_3} u(s_1) + \sqrt{\alpha_3 P_3} \left\{ \sqrt{\gamma} \tilde{v}(s_2^{(1)}) + \sqrt{\gamma} \hat{v}(s_2^{(2)}) \right\}, \quad (3.33)$$

donde  $\beta, \gamma \in [0, 1]$  son parámetros que se introducen para evitar el uso del compartimiento de tiempo. Nótese que las palabras del código generadas satisfacen las restricciones de potencia promedio.

Recordamos primero que las salidas del canal están dadas por

$$y_1 = x_1 + x_2 + z_1, \quad y = x_1 + x_2 + x_3 + z_1 + z_2;$$

$y_1$  y  $y$  son variables aleatorias Gaussianas debido a que las entradas y los ruidos son variables aleatorias Gaussianas. En el proceso de decodificación en el relevo, conociendo  $(s_1, s_2)$ , el relevo puede substraer primero los vectores  $u$ ,  $\tilde{v}$ , y  $\hat{v}$  de la señal recibida  $y_1$  y luego decodificar el mensaje  $\omega_1^{(1)}$  (considerándose otros vectores aún no conocidos como ruidos Gaussianos adicionales [10]). Del teorema estándar [33] sabemos que  $\omega_1^{(1)}$  se puede decodificar con probabilidad de error arbitrariamente pequeña si

$$R_1^{(1)} \leq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{\bar{\beta} \alpha_1 P_1}{N_1 + \alpha_2 P_2 + \beta \alpha_1 P_1} \right]. \quad (3.34)$$

Conociendo  $\omega_1^{(1)}$ , se puede substraer también el vector  $\tilde{x}_1$  y decodificar ahora  $\omega_2$ . Eso requiere que

$$R_2 \leq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{\alpha_2 P_2}{N_1 + \beta \alpha_1 P_1} \right]. \quad (3.35)$$

Finalmente,  $\omega_1^{(2)}$  se decodifica con probabilidad de error arbitrariamente pequeña si

$$R_1^{(2)} \leq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{\beta \alpha_1 P_1}{N_1} \right]. \quad (3.36)$$

Sumando (3.34) y (3.36) se obtiene

$$R_1 \triangleq R_1^{(1)} + R_1^{(2)} \leq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{\alpha_1 P_1 (\beta \alpha_1 P_1 + \beta \alpha_2 P_2 + N_1)}{N_1 (N_1 + \alpha_2 P_2 + \beta \alpha_1 P_1)} \right]. \quad (3.37)$$

Nótese que para cualquier  $0 \leq \beta \leq 1$  tenemos siempre (sumando (3.35) y (3.37))

$$R_1 + R_2 \leq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2}{N_1} \right], \quad \forall 0 \leq \beta \leq 1.$$

Por lo anterior y variando  $\beta$  entre  $[0, 1]$ , se puede ver claramente que  $R''(\underline{\alpha})$  es alcanzable en el proceso de decodificación del relevo.

Consideramos ahora la decodificación regresiva. En cada etapa, el decodificador conoce  $\omega_1$  y  $\omega_2$  debido a nuestro esquema. Entonces se decodifica primero  $s_2^{(1)}$  de la señal  $y$ . Con un argumento similar podemos mostrar que si

$$R_2^{(1)} \leq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{\bar{\gamma} S_2}{N + S_1 + \bar{\gamma} S_2} \right], \quad (3.38)$$

donde  $S_1 \triangleq P_1 + \alpha_3 P_3 + 2\sqrt{\bar{\alpha}_1 \alpha_3 P_1 P_3}$  y  $S_2 \triangleq P_2 + \bar{\alpha}_3 P_3 + 2\sqrt{\bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3 P_2 P_3}$ ,  $s_2^{(1)}$  se puede decodificar con probabilidad de error arbitrariamente pequeña. Substrayendo todos los vectores conocidos de  $y$ , se puede decodificar  $s_1$ . Esto necesita que

$$R_1 \leq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{S_1}{N + \bar{\gamma} S_2} \right]. \quad (3.39)$$

Finalmente el receptor decodifica  $\omega_2^{(2)}$  substrayendo los vectores conocidos de

y. Sabemos que este mensaje se puede decodificar con probabilidad de error arbitrariamente pequeña si

$$R_2^{(2)} \leq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{\gamma S_2}{N} \right]. \quad (3.40)$$

(3.38) y (3.40) resultan en

$$R_2 \triangleq R_2^{(1)} + R_2^{(2)} \leq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{S_2(N + \gamma(S_1 + S_2))}{N(N + S_1 + \gamma S_2)} \right]. \quad (3.41)$$

y consecuentemente de (3.39) y (3.41) concluimos

$$R_1 + R_2 \leq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{S_1 + S_2}{N} \right], \quad \forall 0 \leq \gamma \leq 1. \quad (3.42)$$

Las desigualdades (3.39), (3.41) y (3.42) implican la alcanzabilidad de  $\mathcal{R}'(\underline{\alpha})$  en la decodificación regresiva del receptor. Como la prueba es válida para cualquier  $\underline{\alpha} \in [0, 1]^3$ , la región  $\mathcal{R}_C$  es alcanzable para el MARC AWGN degradado. ■

---

## CAPITULO 4

---

### CANAL DE MULTIACCESO GAUSSIANO DE TIEMPO DISCRETO CON MEMORIA

---

En este capítulo estudiamos los MACs Gaussianos de tiempo-discreto, con memoria finita y restricciones en las entradas. Se describe en la sección 4.1 el canal y las restricciones de las entradas. En la sección 4.2 presentamos una nueva definición de la región de capacidad basada en procesos, en lugar de la definición estándar. Con esta definición y algunas propiedades sencillas de tasas de entropía de los procesos estacionarios, derivamos en la sección 4.3 algunas caracterizaciones simples de la región de capacidad para el caso de la restricción de potencias promedio. En la sección 4.4 consideramos el caso de la restricción de pico de amplitud sobre las entradas, obteniendo algunas regiones alcanzables. La conclusión está en la sección 4.5.

#### 4.1 MODELO DEL CANAL Y RESTRICCIONES DE ENTRADA

Con la excepción de los canales con ruido aditivo Gaussiano y blanco (AWGN), la mayoría de los canales prácticos exhibe dependencias estadísticas entre las transmisiones sucesivas de símbolos. Esto es particularmente cierto para *canales con desvanecimiento* (fading channels) cuando el devanecimiento varía lentamente comparado con el tiempo de un símbolo. Estos canales con memoria degradan el desempeño de los códigos diseñados para operar en los canales sin memoria [44]. En este capítulo estudiamos los MACs de tiempo discreto con ruidos aditivos Gaussianos y con interferencia entre símbolos.

El modelo del canal se muestra en la Fig.4.1, donde suponemos que el ruido aditivo Gaussiano  $Z = \{z_n\}$ ,  $-\infty < n < \infty$ , es un proceso aleatorio Gaussiano y estacionario con media cero y densidad espectral de potencia  $N(f)$ , i.e.,

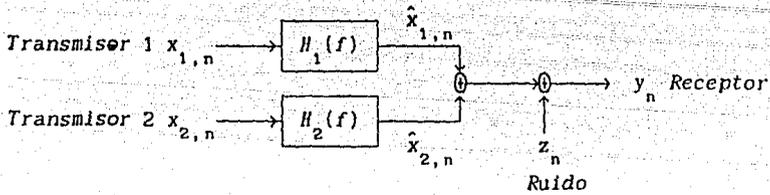


Fig.4.1 Modelo del MAC Gaussiano de tiempo discreto

$$E\{z_n\} = 0, \quad y \quad N(f) \triangleq \sum_k E\{z_n z_{n+k}\} e^{-j2\pi f k};$$

$E\{\cdot\}$  denota el valor esperado. También suponemos que  $Z$  es un *proceso regular*, y por lo tanto

$$\int_0^1 |\log N(f)| df < \infty.$$

Las interferencias entre símbolos se modelan por medio de dos filtros lineales e invariantes en el tiempo con funciones de transferencia ( $i=1, 2$ )

$$H_i(f) = \sum_{k=0}^{h_i} h_{ik} e^{-j2\pi f k}; \quad (j \triangleq \sqrt{-1})$$

donde las secuencias de longitud finita  $\{h_{i0}, h_{i1}, \dots, h_{ih_i}\}$ , con  $h_{i0}=1$  y  $h_{ih_i} \neq 0$ , son respuestas de una muestra unitaria de los filtros del canal. Nótese que  $H_i(f)$  son periódicas en  $f$  con periodo unitario (sin perder la generalidad podemos suponer  $f \in [0,1)$ ), causales y estables, i.e.,

$$\int_0^1 \log |H_i(f)| df$$

siempre son finitas.

Las entradas del canal  $X_1 = \{x_{1,n}\}$  y  $X_2 = \{x_{2,n}\}$  son secuencias reales, las cuales producen en la salida una secuencia real  $Y = \{y_n\}$ , dada por

$$y_n = \hat{x}_{1,n} + \hat{x}_{2,n} + z_n; \quad -\infty < n < \infty \quad (4.1)$$

donde

$$\hat{x}_{1,n} = \sum_{k=0}^{M_1} h_{1,k} \cdot x_{1,n-k}, \quad -\infty < n < \infty.$$

Como consecuencia del filtrado lineal, las muestras de la entrada se interrelacionan por lo que se produce interferencia entre símbolos. Estos canales con memoria se dice que tienen *memoria finita* siempre y cuando

$$\infty > M \triangleq \max\{M_1, M_2\} > 0; \quad (4.2)$$

y el canal es sin memoria si  $M = 0$ .

Naturalmente, las señales de entrada prácticas tienen que satisfacer algunas limitaciones físicas. Dos importantes tipos de restricciones se consideran aquí:

1) Restricción de potencia promedio (por símbolo)

$$E\{x_{1,n}^2\} \leq P_1, \quad \text{para cada } n, \quad y \quad (4.3)$$

2) restricción de pico de amplitud (por símbolo)

$$|x_{1,n}| \leq \sqrt{P_1}, \quad \text{para cada } n. \quad (4.4)$$

En otras palabras,  $P_1$  y  $\sqrt{P_1}$  son las máximas potencias promedio o los picos de amplitud permisibles para la entrada  $i$  ( $i=1, 2$ ).

La región de capacidad se define usualmente como la cerradura de todos los pares de tasas alcanzables  $(R_1, R_2)$ , para la cual existe un esquema de codificación (satisface ciertas restricciones de entradas) y un esquema de decodificación con tasas  $(R_1, R_2)$ , tal que la probabilidad de error es arbitrariamente pequeña. Un ejemplo bien conocido es la región de capacidad de un MAC AWGN de tiempo discreto, dada explícitamente en funciones de las potencias promedio de las entradas permisibles  $P_1$  y  $P_2$ , y la variancia del ruido de canal (con media cero)  $\sigma^2$  [10]:

$$\mathcal{C}_{\text{AWGN}} = \left\{ (R_1, R_2) : \begin{aligned} 0 \leq R_1 \leq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{P_1}{\sigma^2} \right], \quad 0 \leq R_2 \leq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{P_2}{\sigma^2} \right], \\ R_1 + R_2 \leq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{P_1 + P_2}{\sigma^2} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (4.5)$$

Uno de los objetivos de este capítulo es extender este resultado al modelo más general donde el ruido aditivo Gaussiano no necesariamente tiene que ser blanco y se podría presentar interferencia entre símbolos.

En la siguiente sección presentamos una definición alternativa de la región de capacidad para este canal, la cual es paralela a la definición con procesos de Khinchine para canales clásicos punto a punto [42].

## 4.2 DEFINICION CON PROCESOS PARA LA REGION DE CAPACIDAD

Sean primero  $\mathcal{X}_1$ ,  $\mathcal{X}_2$  y  $\mathcal{Y}$  cualesquiera conjuntos finitos, y  $M > 0$ , cualquier entero finito. Sea  $p^*(y|x_1^M, x_2^M)$  una distribución de probabilidad condicional definida sobre  $\mathcal{Y} \times \mathcal{X}_1^M \times \mathcal{X}_2^M$ . Un MAC discreto (en ambos: tiempo y alfabeto) con memoria finita está caracterizado por sus alfabetos de entrada  $\mathcal{X}_1$  y  $\mathcal{X}_2$ , alfabeto de salida  $\mathcal{Y}$ , y por su probabilidad de transición

$$\Pr\left\{Y_n = y \mid X_1, X_2\right\} = p^*(y|x_{1,n-M}^n, x_{2,n-M}^n),$$

donde

$$X_1 \triangleq (\dots, x_{1,-1}, x_{1,0}, x_{1,1}, \dots) \in \mathcal{X}_1^\infty,$$

$$y \quad x_{1,n-M}^n \triangleq (x_{1,n-M}, \dots, x_{1,n}).$$

Esto es, la distribución de probabilidad de la salida del canal en cualquier instante  $n$ ,  $Y_n = y$ , dadas las secuencias enteras de entradas  $X_1$  y  $X_2$ , sólo depende de los  $M$  valores más recientes de las entradas  $x_{1,n-M}^n$  y  $x_{2,n-M}^n$ . Nótese que el canal es estacionario o invariante en el tiempo debido a que  $p^*(\cdot|\cdot, \cdot)$  no depende del índice de tiempo  $n$ .

Las definiciones estándares de código de bloque así como las tasas alcanzables y la región de capacidad para este canal son similares a las que hemos dado previamente. Ahora introducimos otra definición de la región de capacidad para el canal, en lugar de la definición estándar, y mostraremos sus equivalencias.

Del resultado de MAC dm del capítulo 2, uno podría sugerir a considerar el siguiente conjunto como un posible candidato de la región de capacidad del

MAC con memoria finita.

$$\bigcup_{X_1^n, X_2^n} \left\{ (R_1, R_2): 0 \leq R_1 \leq \frac{1}{n} I(X_1^n, Y^n | X_2^n), 0 \leq R_2 \leq \frac{1}{n} I(X_2^n, Y^n | X_1^n), \right. \\ \left. \text{y } R_1 + R_2 \leq \frac{1}{n} I(X_1^n, X_2^n; Y^n) \right\}.$$

donde la unión es sobre todas las distribuciones de probabilidad de entradas independientes  $p_i(x_i^n)$ ,  $i=1, 2$ , cuando la longitud del bloque  $n$  es suficientemente grande. Este razonamiento heurístico nos motiva a analizar la siguiente llamada definición con procesos de la región de capacidad.

Sean  $X_1 = \{x_{1,n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$  y  $X_2 = \{x_{2,n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$  dos procesos aleatorios conjuntamente estacionarios que toman valores en  $\mathcal{X}_1^{\infty}$  y  $\mathcal{X}_2^{\infty}$ , respectivamente;  $Y = \{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ , la secuencia de la salida del canal que toma su valor en  $\mathcal{Y}^{\infty}$  cuando  $X_1$  y  $X_2$  se conectan a las terminales de entrada del MAC. Como el canal es estacionario,  $Y$  es conjuntamente estacionario con los procesos de entrada. Definamos ahora las tasas de información mutua (promedio) como sigue

$$\bar{I}(X_1; Y | X_2) \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} I(X_1^n; Y^n | X_2^n),$$

$$\bar{I}(X_2; Y | X_1) \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} I(X_2^n; Y^n | X_1^n),$$

$$\text{y} \quad \bar{I}(X_1, X_2; Y) \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} I(X_1^n, X_2^n; Y^n).$$

Estos límites siempre existen debido a la estacionaridad conjunta de los procesos involucrados. Veamos ahora la región  $\mathcal{C}_p$  definida con procesos, donde

$$\mathcal{C}_p \triangleq \bigcup_{X_1, X_2} \left\{ (R_1, R_2): 0 \leq R_1 \leq \bar{I}(X_1; Y | X_2), 0 \leq R_2 \leq \bar{I}(X_2; Y | X_1), \right. \\ \left. \text{y } R_1 + R_2 \leq \bar{I}(X_1, X_2; Y) \right\}, \quad (4.6)$$

y la unión se toma sobre todos los procesos de entrada  $X_1$  y  $X_2$ , conjuntamente estacionarios e independientes uno de otro.

Sería natural preguntar si  $\mathcal{C}_p$ , tal como se definió en (4.6), coincide con la definición estándar de la región de capacidad  $\mathcal{C}$ . Obviamente, esto es el caso cuando los canales no tienen memoria. La respuesta para los casos generales está en el siguiente lema básico:

**Lema 4.1:** La definición con procesos de la región de capacidad para MAC de tiempo discreto con memoria finita es equivalente a la definición estándar, i.e.,

$$\mathcal{C}_p = \mathcal{C}. \quad (4.7)$$

$\mathcal{C}_p \subseteq \mathcal{C}$  es más obvio, porque sólo los procesos conjuntamente estacionarios están involucrados en la definición de  $\mathcal{C}_p$ .  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_p$  es más difícil de demostrar, y la técnica consiste en concatenar secuencias aleatorias y correr aleatoriamente el origen del tiempo para obtener los procesos estacionarios deseados. Como nuestra demostración usa efectivamente la suposición de memoria finita, ella no se puede extender directamente a canales con memoria infinita. Sin embargo, los canales con memoria infinita siempre se pueden aproximar apropiadamente con los de memoria finita, y por lo tanto el modelo no es tan restrictivo. Como la demostración no se necesitará más adelante, la ubicamos en el apéndice 4.1.

Se puede modificar de la manera obvia el resultado anterior a los casos de alfabetos continuos (y con restricciones de entradas). Por conveniencia, ponemos formalmente este resultado como una definición.

Denotamos  $\bar{I}(\cdot; \cdot)$  y  $\bar{I}(\cdot; \cdot | \cdot)$  como tasas de información mutua y tasas de información mutua condicional, definidas para los procesos aleatorios conjuntamente estacionarios  $X_1 = \{x_{1,n}\}$  y  $Y = \{y_n\}$ , cuyos componentes son variables aleatorias reales con variancias finitas. Entonces, tenemos la siguiente definición:

**Definición 4.1:** La región de capacidad de un MAC de tiempo discreto con memoria finita es la cobertura convexa del conjunto

$$\bigcup_{X_1, X_2} \left\{ (R_1, R_2): 0 \leq R_1 \leq \bar{I}(X_1; Y | X_2), \quad 0 \leq R_2 \leq \bar{I}(X_2; Y | X_1), \right. \\ \left. \text{y } R_1 + R_2 \leq \bar{I}(X_1, X_2; Y) \right\}, \quad (4.8)$$

donde la unión es sobre todos los procesos  $X_1$  y  $X_2$ , conjuntamente estacionarios e independientes uno del otro y del proceso del ruido del canal  $Z$  (en nuestro caso), que satisfagan algunas restricciones apropiadas de las entradas del canal.

### 4.3 REGION DE CAPACIDAD CON POTENCIA PROMEDIO

Usando la definición anterior, derivamos en esta sección algunas caracterizaciones de la región de capacidad para el MAC Gaussiano de la Fig.4.1 donde las entradas deben satisfacer las restricciones de potencia promedio (4.3). Antes de proceder a las derivaciones, resumimos aquí algunas propiedades básicas de las tasas de entropía y de información mutua de los procesos aleatorios y estacionarios, las cuales vamos usar con frecuencia.

Tasas de entropía de los procesos aleatorios y estacionarios: Sea  $X = \{x_n\}$  un proceso estacionario con media cero y densidad espectral de potencia  $S(f)$ , i.e.,

$$E\{x_n\} = 0, \quad \text{y} \quad S(f) = \sum_k E\{x_n x_{n+k}\} e^{-j2\pi f k}.$$

Denótese  $h(X^n)$  la *entropía diferencial* de una secuencia (o vector) aleatoria  $X^n = (x_1, \dots, x_n)$ ; la *tasa de entropía* del proceso  $X$  se define como

$$\bar{h}(X) \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h(X^n).$$

Es bien conocido de que el límite anterior siempre existe para los procesos estacionarios con potencias finitas.

Si  $X$  se pasa por un filtro lineal e invariante en el tiempo con función de transferencia  $H(f)$ , se puede mostrar que el proceso resultante  $\hat{X} = \{\hat{x}_n\}$  es estacionario con la densidad espectral de potencia  $\hat{S}(f) = S(f) |H(f)|^2$  y la tasa de entropía

$$\bar{h}(\hat{X}) = \bar{h}(X) + \frac{1}{2} \int_0^1 \log |H(f)|^2 df,$$

siempre y cuando la última integral sea finita.

Por ejemplo, la tasa de entropía de un proceso Gaussiano  $X$  con media cero y densidad espectral de potencia  $S(f)$  es

$$\bar{h}(X) = \frac{1}{2} \log(2\pi e) + \frac{1}{2} \int_0^1 \log S(f) df.$$

Debido a la linealidad y a la invariancia en el tiempo del filtro, el proceso filtrado  $\hat{X}$  es también Gaussiano, y la tasa de entropía es por lo tanto

$$\begin{aligned}\bar{h}(\hat{X}) &= \frac{1}{2} \log(2\pi e) + \frac{1}{2} \int_0^1 \log \left[ |H(f)|^2 S(f) \right] df \\ &= \bar{h}(X) + \frac{1}{2} \int_0^1 \log |H(f)|^2 df.\end{aligned}$$

Supongamos ahora que  $X$  consiste en variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid), con una distribución uniforme en el intervalo  $[-\sqrt{P}, \sqrt{P}]$ . La tasa de entropía de un proceso iid es igual simplemente a la entropía diferencial de una sola letra (o índice de tiempo), y en el caso de la distribución uniforme

$$\bar{h}(X) = \frac{1}{2} \log(4P).$$

Consecuentemente, la tasa de entropía del proceso de salida  $\hat{X}$  del filtro lineal  $H(f)$ , cuando se aplica dicho proceso de entrada  $X$ , es

$$\bar{h}(\hat{X}) = \frac{1}{2} \log(4P) + \frac{1}{2} \int_0^1 \log |H(f)|^2 df. \quad (4.9)$$

**Tasas de información (mutua) de los procesos conjuntamente estacionarios:** La tasa de la información mutua entre dos procesos conjuntamente estacionarios  $X$  y  $Y$  se define como

$$\bar{I}(X; Y) \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} I(X^n; Y^n).$$

La tasa de información mutua condicional se puede definir de manera similar.

Si  $Y = X_1 + X_2 + Z$ , donde  $X_1$ ,  $X_2$  y  $Z$  son procesos independientes, entonces

$$\begin{aligned}\bar{I}(X_1; Y | X_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} I(X_1^n; Y^n | X_2^n), \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ h(X_1^n + Z^n) - h(Z^n) \right] = \bar{h}(X_1 + Z) - \bar{h}(Z); \quad i \neq j\end{aligned}$$

$$y \quad \bar{I}(X_1, X_2; Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} I(X_1^n, X_2^n; Y^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ h(Y^n) - h(Z^n) \right] = \bar{h}(Y) - \bar{h}(Z).$$

Algunas desigualdades que involucran tasas de entropía y de información: Es bien conocido de que la tasa de entropía de un proceso  $X$  con una densidad espectral de potencia  $S(f)$  siempre está acotada superiormente por la de un proceso Gaussiano con media cero y la misma densidad espectral de potencia, i.e.,

$$\bar{h}(X) \leq \frac{1}{2} \log(2\pi e) + \frac{1}{2} \int_0^1 \log S(f) df.$$

Otra desigualdad útil, llamada *desigualdad de potencia de entropía* (la cual se necesitará en la siguiente sección) es [40]

$$\exp[2h(X^n+Y^n)/n] \geq \exp[2h(X^n)/n] + \exp[2h(Y^n)/n]. \quad (4.10)$$

Si las tasas de entropía respectivas existen, tomando el límite  $n \rightarrow \infty$  obtendremos una versión de esta desigualdad que involucra las tasas de entropía, i.e.,

$$\exp[2\bar{h}(X+Y)] \geq \exp[2\bar{h}(X)] + \exp[2\bar{h}(Y)],$$

lo cual se puede expresar también como

$$\bar{I}(X+Y; X) \geq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \exp(2[\bar{h}(Y) - \bar{h}(X)]) \right]. \quad (4.11)$$

Ahora presentamos nuestros resultados principales para el canal de la Fig. 4.1.

**Teorema 4.1:** La región de capacidad del MAC Gaussiano de la Fig. 4.1 con entradas restringidas en potencia promedio es la cobertura convexa del siguiente conjunto de pares de tasas

$$\begin{aligned} \bigcup_{S_1, S_2} \left\{ (R_1, R_2) : 0 \leq R_i \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \log \left[ 1 + \frac{|H_1(f)|^2 S_1(f)}{N(f)} \right] df, \quad i = 1, 2, \right. \\ \left. \text{y } R_1 + R_2 \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \log \left[ 1 + \sum_{i=1}^2 \frac{|H_1(f)|^2 S_i(f)}{N(f)} \right] df \right\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde la unión se toma sobre todas las densidades espectrales de potencia permisibles  $S_i(f) \geq 0$  que satisfacen

$$\int_0^1 S_1(f) df = P_1, \quad J = 1, 2. \quad (4.13)$$

Este resultado no es aún una caracterización simple de la región de capacidad, debido a la dificultad de tomar la unión sobre los posibles espectros de entradas  $S_1(f)$ . Uno podría preguntar si existen algunos espectros "óptimos"  $S_1^*(f)$  de tal manera que la región resultante cubre toda la región de capacidad. Este problema por lo pronto no tiene una solución general a menos que los filtros del canal  $H_1(f)$  tengan formas particulares (por ejemplo  $H_1(f) = H_2(f)$ ; ver teorema 4.2 para mayor detalle). Demostramos en seguida este teorema.

Prueba: La región de capacidad de este canal está dada por la definición 4.1; lo que queda es evaluar las tasas de información mutua en (4.8). Para dos procesos estacionarios cualesquiera  $X_i = \{x_n\}$ ,  $i = 1, 2$ , independientes uno de otro e independientes del ruido del canal  $Z$ , con media cero y densidades espectrales de potencia  $S_i(f)$ , las restricciones de potencias promedio (por símbolo)  $E\{x_{1,n}^2\} = P_1$  implican (4.13) porque  $E\{x_{1,n}^2\} = \int_0^1 S_1(f) df$ .

Observe que  $\hat{X}_1$ , los procesos de salidas de los filtros del canal  $H_1(f)$ , tienen densidades espectrales  $\hat{S}_1(f) = S_1(f) |H_1(f)|^2$ . Como los procesos  $X_1$  y  $Z$  son independientes,  $\hat{X}_1$  y  $Z$  también lo son. Por lo tanto,  $\hat{X}_1 + Z$  y  $Y = \hat{X}_1 + \hat{X}_2 + Z$  tienen densidades espectrales de potencia

$$N(f) + S_1(f) |H_1(f)|^2, \quad \text{y} \quad N(f) + \sum_{i=1}^2 S_i(f) |H_i(f)|^2,$$

respectivamente. De las propiedades de las tasas de entropía dadas previamente, tenemos

$$\begin{aligned} \bar{h}(Z) &= \frac{1}{2} \log(2\pi e) + \frac{1}{2} \int_0^1 \log N(f) df, \\ \bar{h}(\hat{X}_1 + Z) &\leq \frac{1}{2} \log(2\pi e) + \frac{1}{2} \int_0^1 \log \left[ N(f) + S_1(f) |H_1(f)|^2 \right] df, \quad \text{y} \\ \bar{h}(Y) &\leq \frac{1}{2} \log(2\pi e) + \frac{1}{2} \int_0^1 \log \left[ N(f) + \sum_{i=1}^2 S_i(f) |H_i(f)|^2 \right] df; \end{aligned}$$

con igualdades si y sólo si  $X_1$  y  $X_2$  son procesos Gaussianos. Esto implica que

$$\begin{aligned} \bar{I}(X_1; Y|X_j) &= \bar{h}(\hat{X}_1 + Z) - \bar{h}(Z) \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 \log \left[ 1 + \frac{|H_1(f)|^2 S_1(f)}{N(f)} \right] df; \quad \text{para } j=1,2 \end{aligned}$$

y

$$\bar{I}(X_1, X_2; Y) = \bar{h}(Y) - \bar{h}(Z) \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \log \left[ 1 + \sum_{i=1}^2 \frac{|H_i(f)|^2 S_i(f)}{N(f)} \right] df,$$

donde las igualdades se logran con procesos Gaussianos.

Por lo anterior podemos concluir que la región de capacidad tiene la forma de (4.12), y las igualdades se pueden alcanzar si y sólo si  $X_1$  son Gaussianos. Compartimiento de tiempo permite que cualquier  $(R_1, R_2)$  en la cobertura convexa sea alcanzable, eso demuestra el teorema. ■

Para el caso de dos filtros del canal iguales  $H_1(f) = H_2(f)$ , obtenemos una caracterización simple de la región de capacidad. El resultado es una consecuencia del teorema anterior, el cual también se puede ver como una generalización de la bien conocida región de capacidad de un MAC AWGN de tiempo discreto, dada en (4.5).

**Teorema 4.2:** Si  $H_1(f) = H_2(f) \triangleq H(f)$ , la región de capacidad del canal  $\mathcal{C}$  está dada por

$$\left\{ (R_1, R_2): 0 \leq R_i \leq C_i^* \triangleq \frac{1}{2} \int_0^1 \log \max \left[ 1, \theta_i \frac{|H(f)|^2}{N(f)} \right] df; \quad i=1,2 \right. \\ \left. R_1 + R_2 \leq C_{12}^* \triangleq \frac{1}{2} \int_0^1 \log \max \left[ 1, \theta \frac{|H(f)|^2}{N(f)} \right] df \right\}, \quad (4.14)$$

donde los parámetros  $\theta_1$  y  $\theta$  son soluciones de

$$\int_0^1 \max \left[ 0, \theta_1 - \frac{N(f)}{|H(f)|^2} \right] df = P_1, \quad (4.15)$$

y

$$\int_0^1 \max \left[ 0, \theta - \frac{N(f)}{|H(f)|^2} \right] df = P_1 + P_2. \quad (4.16)$$

Esta región de capacidad está dada por el pentágono definido por los vértices  $(0,0)$ ,  $(C_1^*, 0)$ ,  $(C_1^*, \hat{C}_2^*)$ ,  $(\hat{C}_1^*, C_2^*)$  y  $(0, C_2^*)$  tal como se ilustra en la Fig.4.2, donde  $\hat{C}_1^* \triangleq C_{12}^* - C_1^*$ ,  $i, j = 1, 2, i \neq j$ .

Prueba: Un problema bien conocido en la optimización es maximizar

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \log \left[ 1 + \frac{|H(f)|^2 S(f)}{N(f)} \right] df$$

sujeto a  $\int_0^1 S(f) df = P$ . El maximizante  $S^*(f)$  está dado paramétricamente por (aplicando el teorema de Kuhn-Tucker)

$$S^*(f) = \max \left[ 0, \theta - \frac{N(f)}{|H(f)|^2} \right],$$

donde el parámetro  $\theta$  se escoge de tal manera que satisfaga la restricción de potencia. Dicha solución tiene una interpretación llamada "water-filling" (llenado con agua) la cual explotamos en el capítulo 5 con más detalle.

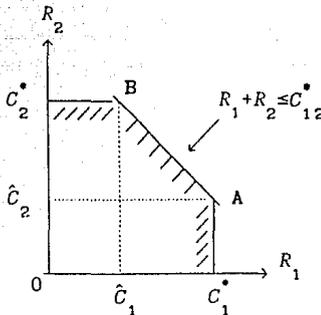


Fig. 4.2 Región de Capacidad de MAC Gaussiano

Ahora veamos la región de capacidad dada en el teorema 4.1. El máximo de  $R_1$  es  $C_1^*$  dado por (4.14), lo cual se puede alcanzar con el  $S_1^*(f)$  maximizante dado por el integrando de (4.15). Similarmente, como  $H_1(f) = H_2(f)$ , el máximo de la suma  $R_1 + R_2$  es  $C_{12}^*$ , dado por (4.14), con el maximizante  $S_{12}^*(f)$  dado por el integrando de (4.16).

El par de tasas  $(C_1^*, \hat{C}_2)$ , indicado como vértice "A" en la Fig. 4.2, puede ser alcanzado aplicando  $S_1(f) = S_1^*(f)$  y  $S_2(f) = S_{12}^*(f) - S_1^*(f)$ . Nótese que  $S_2(f)$  está bien definido porque  $\theta \geq \theta_1$ , y  $R_2 \leq C_{12}^* - C_1^*$  es siempre una

restricción activa. El vértice "B" es alcanzable por la misma razón. Como cualquier par de tasas  $(R_1, R_2)$  en la línea A-B puede ser alcanzado por medio de compartimiento de tiempo, y cualquier par de tasas fuera del pentágono de la Fig. 4.2 no es alcanzable, el pentágono es la región de capacidad. ■

#### 4.4 CANAL CON AMPLITUD LIMITADA

Analizamos ahora el MAC Gaussiano de tiempo discreto donde las amplitudes de las entradas son limitadas por (4.4). En lugar de la región de capacidad actual, tenemos además las cotas interiores y exteriores. La cota exterior consiste en la región de capacidad del canal correspondiente a la restricción de potencias promedio derivada previamente. Esto se debe a que con las mismas  $P_i$ , el canal con restricciones de picos de amplitud es un caso especial del que tiene restricciones de potencia promedio. El siguiente teorema nos da una cota interior de la región de capacidad.

**Teorema 4.3:** El siguiente conjunto de pares de tasas es alcanzable para el canal de la Fig. 4.1 con amplitud limitada:

$$\left\{ (R_1, R_2): 0 \leq R_i \leq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{2P_i}{\pi e \hat{\sigma}_i^2} \right], \quad i = 1, 2, \right. \\ \left. \text{y } R_1 + R_2 \leq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \sum_{i=1}^2 \frac{2P_i}{\pi e \hat{\sigma}_i^2} \right] \right\}, \quad (4.17)$$

donde

$$\hat{\sigma}_i^2 = \exp \left[ \int_0^1 \log \left[ N(f) / |H_i(f)|^2 \right] df \right], \quad i = 1, 2. \quad (4.18)$$

**Prueba:** La región de capacidad de este canal está dada por (4.8) donde la unión es sobre todas las entradas independientes  $X_{i,n}$  que satisfagan  $|x_{i,n}| \leq \sqrt{P_i}$ ,  $i=1, 2$ , las restricciones de amplitud. Vamos a acotar inferiormente los términos de los lados derechos de (4.8) con dos entradas especiales  $X_i$  las cuales son uniformemente distribuidas en el intervalo  $[-\sqrt{P_i}, \sqrt{P_i}]$  (por lo tanto se satisfacen las restricciones de amplitud). Eso constituye obviamente

una cota interior de la región de capacidad, y por lo tanto una región alcanzable.

Obsérvese primero que  $Y = \hat{X}_1 + \hat{X}_2 + Z$ , y

$$\bar{I}(X_1; Y|X_2) = \bar{h}(Y|X_2) - \bar{h}(Y|X_1, X_2) = \bar{h}(\hat{X}_1 + Z) - \bar{h}(Z).$$

utilizando la desigualdad de la potencia de entropía dada por (4.11), tenemos

$$\bar{I}(X_1; Y|X_2) \geq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \exp(2[\bar{h}(\hat{X}_1) - \bar{h}(Z)]) \right].$$

La entrada  $X_1 = \{x_{1,n}\}$  se escoge de tal manera que es iid y uniforme en  $[-\sqrt{P_1}, \sqrt{P_1}]$ , y por lo cual  $\bar{h}(X_1) = \frac{1}{2} \log(4P_1)$ . Como

$$\bar{h}(Z) = \frac{1}{2} \log(2\pi e) + \frac{1}{2} \int_0^1 \log N(f) df,$$

y

$$\bar{h}(\hat{X}_1) = \frac{1}{2} \log(4P_1) + \frac{1}{2} \int_0^1 \log |H_1(f)|^2 df,$$

donde la última igualdad es una consecuencia de (4.9), se obtiene

$$\bar{I}(X_1; Y|X_2) \geq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{2P_1}{\pi e} \exp \left[ - \int_0^1 \log \left[ N(f) |H_1(f)|^{-2} \right] df \right] \right],$$

la cual es la primera desigualdad deseada en (4.17). Podemos acotar también  $\bar{I}(X_1; Y|X_2)$  con  $X_2$  que es iid y uniforme en  $[-\sqrt{P_2}, \sqrt{P_2}]$ .

Finalmente, utilizando la siguiente desigualdad generalizada de potencia de entropía

$$\exp[2\bar{h}(Y)] = \exp[2\bar{h}(\hat{X}_1 + \hat{X}_2 + Z)] \geq \exp[2\bar{h}(\hat{X}_1)] + \exp[2\bar{h}(\hat{X}_2)] + \exp[2\bar{h}(Z)],$$

obtenemos fácilmente

$$\begin{aligned} \bar{I}(X_1, X_2; Y) &= \bar{h}(Y) - \bar{h}(Z) \\ &\geq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \exp[2\bar{h}(\hat{X}_1) - 2\bar{h}(Z)] + \exp[2\bar{h}(\hat{X}_2) - 2\bar{h}(Z)] \right] \end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \sum_{i=1}^2 \frac{2P_i}{\pi e} \exp \left[ - \int_0^1 \log \left( N(f) |H_i(f)|^{-2} \right) df \right] \right],$$

lo cual completa la demostración del teorema 4.3. ■

Se puede obtener un resultado simplificado del anterior para el caso especial  $H_1(f) = H_2(f)$ .

**Teorema 4.4:** Si  $H_1(f) = H_2(f) \triangleq H(f)$ , entonces el siguiente conjunto de pares de tasas

$$\left\{ (R_1, R_2): 0 \leq R_i \leq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{2P_i}{\pi e \hat{\sigma}^2} \right], \quad i=1, 2, \right. \\ \left. R_1 + R_2 \leq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + |\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}|)^2}{2\pi e \hat{\sigma}^2} \exp \left\{ \frac{(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} - |\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}|)}{(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + |\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}|)} \right\} \right] \right\} \quad (4.19)$$

es alcanzable, donde  $\hat{\sigma}^2$  se define similarmente como en (4.18) para  $H(f)$ .

La última desigualdad en (4.19) se puede simplificar todavía más si aplicamos la desigualdad  $\exp(x) \geq 1+x+x^2/2$  (para  $x \geq 0$ ). Esto es

$$R_1 + R_2 \leq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{2P_1 + 2P_2 + \bar{P}}{\pi e \hat{\sigma}^2} \right],$$

donde  $\bar{P} = \Delta \min\{P_1, P_2\}$ .

**Prueba:** Sólo la última desigualdad de (4.19) se necesita comprobar. Aplicando la desigualdad de potencia de entropía tenemos

$$\exp\{2\bar{h}(Y)\} \geq \exp\{2\bar{h}(\hat{X}_1 + \hat{X}_2)\} + \exp\{\bar{h}(Z)\}.$$

Esta desigualdad implica que

$$\bar{I}(X_1, X_2; Y) = \bar{h}(Y) - \bar{h}(Z) \\ \geq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \exp\{2\bar{h}(\hat{X}_1 + \hat{X}_2) - 2\bar{h}(Z)\} \right], \quad (4.20)$$

Como  $H_1(f) = H_2(f)$ ,

$$\bar{h}(\hat{X}_1 + \hat{X}_2) = \bar{h}(X_1 + X_2) + \frac{1}{2} \int_0^1 \log |H(f)|^2 df. \quad (4.21)$$

Sean  $X_1$  y  $X_2$  dos procesos independientes que consisten en variables aleatorias iid  $x_1$  y  $x_2$ , y uniformemente distribuidas en  $[-\sqrt{P_1}, \sqrt{P_1}]$  y  $[-\sqrt{P_2}, \sqrt{P_2}]$ , respectivamente. Después de un cálculo se puede mostrar que<sup>1</sup>

$$\bar{h}(X_1 + X_2) = h(x_1 + x_2) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{P_1 + \sqrt{P_2}} - |\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}|}{\sqrt{P_1 + \sqrt{P_2}} + |\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}|} + \log(\sqrt{P_1 + \sqrt{P_2}} + |\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}|).$$

Sustituyendo esta expresión a (4.21) y luego a (4.20), obtenemos la desigualdad deseada. ■

El significado de este resultado se puede ver claramente, si comparamos este resultado con la cota exterior correspondiente (región de capacidad de potencia limitada), suponiendo que el canal es sin memoria con un ruido Gaussiano y blanco (i.e.,  $N(f) = \sigma^2$ ), y  $P_1 = P_2 = P$ . La región alcanzable en (4.19) se convierte en

$$\{(R_1, R_2): 0 \leq R_1 \leq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{2}{\pi e} \frac{P}{\sigma^2} \right], R_1 + R_2 \leq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{1}{\pi} \frac{2P}{\sigma^2} \right]\}. \quad (4.22)$$

Comparando esta región con  $\mathcal{C}_{\text{AWGN}}$  dada por (4.5) podemos ver que la pérdida de SNR efectiva debida al uso de restricciones más fuertes (i.e., restricciones de picos de amplitud en lugar de restricciones de potencia promedio) es más o menos por un factor de  $1/\pi$ .

<sup>1</sup> La densidad de probabilidad de la suma de dos variables aleatorias independientes es igual a la convolución de sus densidades, y en este caso es un trapecioide.

## 4.5 CONCLUSION Y COMENTARIOS

Mediante la definición para la región de capacidad del MAC con memoria finita basada en procesos, hemos derivado algunas caracterizaciones de la región de capacidad del canal Gaussiano para el caso de entradas restringidas en potencia promedio, y tasas alcanzables en el caso de entradas limitadas en amplitud. Esta definición es novedosa para el MAC, y nos permite simplificar las derivaciones usando sólo propiedades sencillas de las tasas de entropía de los procesos estacionarios. Este resultado generaliza los resultados clásicos de los canales Gaussianos [33, 41] a los canales de multiacceso Gaussiano con memoria finita. El problema de la determinación de las regiones de capacidad para el caso de  $\|f\|_1 \neq \|f\|_2$  con potencias restrictivas y para el caso de amplitud limitada sigue estando abierto.

En el siguiente capítulo extendemos nuestro análisis al modelo de tiempo continuo, donde las entradas no solamente son limitadas en potencia o amplitud, sino también en espectro de frecuencias.

## APENDICE 4.1

**Demostración del lema 4.1:**  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_p$

a)  $\mathcal{E}_p \subseteq \mathcal{E}$ . Supongamos  $(R_1, R_2) \in \mathcal{E}_p$ , queremos mostrar que  $(R_1, R_2) \in \mathcal{E}$ , o sea, la alcanzabilidad de  $(R_1, R_2)$ .

Dada  $\epsilon > 0$ , sean  $X_1$  y  $X_2$  dos procesos estacionarios independientes que producen

$$R_1 \leq \bar{I}(X_1; Y | X_2) + \epsilon, \quad R_2 \leq \bar{I}(X_2; Y | X_1) + \epsilon, \quad \text{y} \quad R_1 + R_2 \leq \bar{I}(X_1, X_2; Y) + \epsilon,$$

donde  $Y$  es el proceso de salida del canal correspondiente, y la  $\epsilon$  adicional es necesaria porque podrían no existir procesos que produzcan exactamente  $(R_1, R_2)$ . Como la memoria del canal ( $M$ ) es finita, podemos encontrar un  $N$  suficientemente grande tal que

$$\bar{I}(X_1; Y | X_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} I(X_1^n; Y^n | X_2^n) \leq \frac{1}{N} I(X_1^N; Y^N | X_2^N) + \epsilon \leq \frac{1}{N+M} I(X_1^N; Y^N | X_2^N) + 2\epsilon,$$

$$\bar{I}(X_2; Y | X_1) \leq \frac{1}{N+M} I(X_2^N; Y^N | X_1^N) + 2\epsilon,$$

$$\text{y} \quad \bar{I}(X_1, X_2; Y) \leq \frac{1}{N+M} I(X_1^N, X_2^N; Y^N) + 2\epsilon.$$

lo cual implica que

$$R_1 - 3\epsilon \leq \frac{1}{N+M} I(X_1^N; Y^N | X_2^N), \quad R_2 - 3\epsilon \leq \frac{1}{N+M} I(X_2^N; Y^N | X_1^N)$$

$$\text{y} \quad R_1 + R_2 - 3\epsilon \leq \frac{1}{N+M} I(X_1^N, X_2^N; Y^N). \quad (4.23)$$

Demostramos a continuación que los lados derechos de (4.23) forman una cota interior de un par de tasas alcanzables. Este par de tasas alcanzables se genera de la siguiente manera. Sea  $B=N+M$ , donde  $N$  es el mismo como el anterior de tal manera que satisfaga (4.23). Las palabras del código de las entradas con longitud de bloque  $B$  se escogen como abajo se muestra:

$$X_i^B = (x_{i1}, \dots, x_{iN}, 0, \dots, 0), \quad i=1, 2$$

con los últimos  $M$  símbolos iguales a cero. Nótese que dicha codificación hace la salida del canal correspondiente  $Y^B$  independiente de las entradas de

los bloques (de longitud  $B$ ) previos. El canal con dichas entradas puede verse como un canal sin memoria (a nivel de  $B$ -bloque), y del teorema de codificación del MAC sin memoria (teorema 2.1 del capítulo 2) tenemos que el par de tasas  $(r_1, r_2)$  con

$$r_1 \leq \frac{1}{B} I(X_1^B; Y^B | X_2^B), \quad r_2 \leq \frac{1}{B} I(X_2^B; Y^B | X_1^B), \quad \text{y} \quad r_1 + r_2 \leq \frac{1}{B} I(X_1^B, X_2^B; Y^B)$$

es alcanzable para dicho canal, i.e.,  $(r_1, r_2) \in \mathcal{C}$ . Observe que

$$R_1 - 3\epsilon \leq \frac{1}{B} I(X_1^N; Y^N | X_2^N) \leq \frac{1}{B} I(X_1^B; Y^B | X_2^B),$$

$$R_2 - 3\epsilon \leq \frac{1}{B} I(X_2^N; Y^N | X_1^N) \leq \frac{1}{B} I(X_2^B; Y^B | X_1^B),$$

$$R_1 + R_2 - 3\epsilon \leq \frac{1}{B} I(X_1^N, X_2^N; Y^N) \leq \frac{1}{B} I(X_1^B, X_2^B; Y^B),$$

y la demostración es válida para todas las  $\epsilon > 0$ , por lo tanto  $(R_1, R_2) \in \mathcal{C}$ .

b)  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_p$ . Supongamos  $(R_1, R_2) \in \mathcal{C}$ , queremos demostrar que  $(R_1, R_2) \in \mathcal{C}_p$ .

Como  $(R_1, R_2)$  es un par de tasas alcanzables, de la definición estándar sabemos que para cualquier  $\epsilon > 0$  y todas las  $N$  suficientemente grandes, existen códigos de bloque  $(M_1, M_2, N)$  con tasas  $(\frac{1}{N} \log M_1, \frac{1}{N} \log M_2)$ , tal que

$$\frac{1}{N} \log M_1 \geq R_1 - \epsilon, \quad \text{y} \quad \frac{1}{N} \log M_2 \geq R_2 - \epsilon, \quad (4.24)$$

y la probabilidad de error  $P_e^N \leq \epsilon$ .

Supongamos que los mensajes  $W_1 \in [1, M_1]$  y  $W_2 \in [1, M_2]$  son independientes e igualmente probables en sus respectivos conjuntos y denotamos las secuencias de entrada como  $X_i^N = f_i(W_i)$ ,  $i=1,2$ , y  $Y^N$ , la salida correspondiente del canal (nótese que  $(W_1, W_2) \rightarrow (X_1^N, X_2^N) \rightarrow Y^N$  forman una cadena de Markov). La desigualdad de Fano implica que

$$H(W_1, W_2 | Y^N) \leq P_e^N \log(M_1 M_2 - 1) + h_b(P_e^N) \leq N[\epsilon_N^1 \log(M_1 M_2) + \frac{1}{N} h_b(\epsilon)] \triangleq N \epsilon_N,$$

siendo  $P_e^N \leq \epsilon$ . Nótese que  $\epsilon_N \rightarrow 0$  si  $\epsilon \rightarrow 0$ . Tenemos por consiguiente

$$H(W_i | Y^N) \leq N \epsilon_N; \quad i=1, 2.$$

Observe ahora que

$$\log(M_1) = H(W_1) = H(W_1 | Y^N) + I(W_1; Y^N) \leq Nc_N + I(X_1^N; Y^N) \leq Nc_N + I(X_1^N; Y^N | X_2^N),$$

donde la primera desigualdad usa el teorema de procesamiento de datos y la segunda es por la independencia de  $X_1^N$  y  $X_2^N$ . Sustituyendo el anterior en (4.24), tenemos

$$R_1 \leq \frac{1}{N} \log M_1 + c \leq \frac{1}{N} I(X_1^N; Y^N | X_2^N) + c_N + c. \quad (4.25a)$$

Similarmente podemos mostrar que

$$R_2 \leq \frac{1}{N} \log M_2 + c \leq \frac{1}{N} I(X_2^N; Y^N | X_1^N) + c_N + c, \quad (4.25b)$$

y

$$R_1 + R_2 \leq \frac{1}{N} \log(M_1 M_2) + 2c \leq \frac{1}{N} I(X_1^N, X_2^N; Y^N) + c_N + 2c. \quad (4.25c)$$

El resto de la tarea es encontrar dos procesos estacionarios independientes  $\bar{X}_1$  y  $\bar{X}_2$ , tal que

$$\begin{aligned} \bar{I}(\bar{X}_1; \bar{Y} | \bar{X}_2) &\geq \frac{1}{N} I(X_1^N; Y^N | X_2^N), \\ \bar{I}(\bar{X}_2; \bar{Y} | \bar{X}_1) &\geq \frac{1}{N} I(X_2^N; Y^N | X_1^N), \\ \bar{I}(\bar{X}_1, \bar{X}_2; \bar{Y}) &\geq \frac{1}{N} I(X_1^N, X_2^N; Y^N). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Para tal efecto, primero permitimos que  $\hat{X}_1 = \{\hat{X}_{1,n}\}$  y  $\hat{X}_2 = \{\hat{X}_{2,n}\}$  sean dos procesos formados por la concatenación de las copias independientes de  $X_1^N$  y  $X_2^N$ , respectivamente. Esto es, para  $kN+1 \leq n \leq (k+1)N$ ,

$$\hat{X}_{1,n} = [X_1^N]_{1, n-kN}, \quad \text{y} \quad \hat{X}_{2,n} = [X_2^N]_{1, n-kN},$$

donde  $[X]_i$  denota la  $i$ -ésima componente del vector  $X$ . A pesar de que  $\hat{X}_1$  y  $\hat{X}_2$  no son estacionarios, ellos son ciclo-estacionarios con periodo  $N$ , y pueden modificarse para ser estacionarios si recorremos aleatoriamente el origen del tiempo de dichos procesos. Esto es, sea  $L$  un entero aleatorio independiente, uniformemente distribuido en  $\{0, 1, \dots, N-1\}$ , y definimos los procesos

$$\bar{X}_1 = \{\hat{X}_{1, n+L}\} \quad \text{y} \quad \bar{X}_2 = \{\hat{X}_{2, n+L}\};$$

entonces  $\bar{X}_1$  y  $\bar{X}_2$  son por lo tanto procesos estacionarios. Denótese con  $\bar{Y}$  el proceso de la salida correspondiente, conjuntamente estacionario con  $\bar{X}_1$  y  $\bar{X}_2$ . Entonces para  $n = kN+j$ , ( $j=0, 1, \dots, N-1$ ),

$$\begin{aligned}
I(\bar{X}_1; \bar{Y} | \bar{X}_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} I(\bar{X}_1^n, \bar{Y}^n | \bar{X}_2^n) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kN+j} E_1 \left[ I(\hat{X}_{1,1+L}^{kN+j+L}; \hat{Y}_{1+L}^{kN+j+L} | \hat{X}_{2,1+L}^{kN+j+L}) \right] \\
&\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kN+j} I(\hat{X}_{1,N+1}^{kN}; \hat{Y}_{N+1}^{kN} | \hat{X}_{2,N+1}^{kN}).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

La desigualdad anterior se demuestra por notar que para cualquier  $L \in \{0, \dots, N-1\}$ ,

$$\begin{aligned}
I(\hat{X}_{1,1+L}^{kN+j+L}; \hat{Y}_{1+L}^{kN+j+L} | \hat{X}_{2,1+L}^{kN+j+L}) &\geq I(\hat{X}_{1,N+1}^{kN}; \hat{Y}_{N+1}^{kN} | \hat{X}_{2,1+L}^{kN+j+L}) \\
&= I(\hat{X}_{1,N+1}^{kN}; \hat{Y}_{N+1}^{kN}, \hat{X}_{2,1+L}^{kN+j+L}, \hat{X}_{2,kN+1}^{kN+j+L} | \hat{X}_{2,N+1}^{kN}) - I(\hat{X}_{1,N+1}^{kN}; \hat{X}_{2,1+L}^{kN+j+L}, \hat{X}_{2,kN+1}^{kN+j+L} | \hat{X}_{2,N+1}^{kN}) \\
&\geq I(\hat{X}_{1,N+1}^{kN}; \hat{Y}_{N+1}^{kN} | \hat{X}_{2,N+1}^{kN}),
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es por la independencia de las entradas  $X_1^N$  y  $X_2^N$ , i.e.,  $I(\hat{X}_{1,N+1}^{kN}; \hat{X}_{2,1+L}^{kN+j+L}, \hat{X}_{2,kN+1}^{kN+j+L} | \hat{X}_{2,N+1}^{kN}) = 0$ . Denotando ahora

$$\hat{X}_{1,i} \triangleq \hat{X}_{1,1N+1}^{(i+1)N}, \quad \hat{X}_{2,i} \triangleq \hat{X}_{2,1N+1}^{(i+1)N}, \quad \hat{Y}_i \triangleq \hat{Y}_{1N+1}^{(i+1)N}, \quad \text{para } i=1, \dots, k-1,$$

(4.27) puede acotarse como sigue

$$\begin{aligned}
I(\bar{X}_1; \bar{Y} | \bar{X}_2) &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kN+j} \sum_{l=1}^{k-1} I(\hat{X}_{1,l}; \hat{Y}_l | \hat{X}_{2,l}^{k-1}, \hat{X}_1^{l-1}) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kN+j} \sum_{l=1}^{k-1} \left[ I(\hat{X}_{1,l}; \hat{Y}_l, \hat{X}_1^{l-1}, \hat{X}_2^{l-1}, \hat{X}_{2,1+1}^{k-1} | \hat{X}_{2,l}) \right. \\
&\quad \left. - I(\hat{X}_{1,l}; \hat{X}_1^{l-1}, \hat{X}_2^{l-1}, \hat{X}_{2,1+1}^{k-1} | \hat{X}_{2,l}) \right] \\
&\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kN+j} \sum_{l=1}^{k-1} I(\hat{X}_{1,l}; \hat{Y}_l | \hat{X}_{2,l}) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kN+j} \sum_{l=1}^{k-1} I(\hat{X}_{1,1N+1}^{(l+1)N}; \hat{Y}_{1N+1}^{(l+1)N} | \hat{X}_{2,1N+1}^{(l+1)N}) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N+j/k} \frac{k-1}{k} I(X_1^N; Y^N | X_2^N) \\
&= \frac{1}{N} I(X_1^N; Y^N | X_2^N),
\end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad es por el hecho de que

$$I(\hat{X}_{1,1}; \hat{X}_1^{1-1}, \hat{X}_2^{1-1}, \hat{X}_{2,1+1}^{K-1} | \hat{X}_{2,1}) = 0$$

debido a la independencia de  $X_1^N$  y  $X_2^N$  y la independencia entre  $N$ -bloques (recuerde que  $\hat{X}_1$  es la concatenación de las copias independientes de  $X_1^N$ ). Similarmente podemos mostrar que

$$\bar{I}(\bar{X}_2; \bar{Y} | \bar{X}_1) \geq \frac{1}{N} I(X_2^N; Y^N | X_1^N), \quad \text{y} \quad \bar{I}(\bar{X}_1, \bar{X}_2; \bar{Y}) \geq \frac{1}{N} I(X_1^N, X_2^N; Y^N).$$

Sustituyendo las desigualdades anteriores a (4.25), encontramos que

$$R_1 \leq \bar{I}(\bar{X}_1; \bar{Y} | \bar{X}_2) + \epsilon_N + \epsilon,$$

$$R_2 \leq \bar{I}(\bar{X}_2; \bar{Y} | \bar{X}_1) + \epsilon_N + \epsilon,$$

y

$$R_1 + R_2 \leq \bar{I}(\bar{X}_1, \bar{X}_2; \bar{Y}) + \epsilon_N + 2\epsilon.$$

Como  $\epsilon > 0$  es arbitrario (por lo cual  $\epsilon_N$  lo es), mostramos que  $(R_1, R_2) \in \mathcal{C}_p$ . ■

---

## CAPITULO 5

---

### CANAL DE MULTIACCESO GAUSSIANO DE TIEMPO CONTINUO

---

Consideramos aquí los MACs Gaussianos de tiempo continuo con entradas limitadas en potencia promedio o en picos de amplitud. La sección 5.1 introduce el canal y el método de expansión ortonormal de señales. Para encontrar la región de capacidad, presentamos primero (en la sección 5.2) un resultado sobre un conjunto de MACs paralelos de tiempo discreto. En la sección 5.3 determinamos la región de capacidad del MAC Gaussiano espectral de tiempo continuo (para restricción de potencia promedio) utilizando la técnica de expansiones ortonormales de señales, la cual permite descomponer el canal de tiempo continuo a un conjunto infinito de canales de tiempo discreto. La sección 5.4 discute los esquemas óptimos de codificación en un MAC por medio del argumento de "water-filling" (llenado con agua). Finalmente analizamos en la sección 5.5 el MAC Gaussiano espectral de tiempo continuo con restricción de pico de amplitud, encontrando algunas regiones de tasas alcanzables para ciertos filtros del canal.

#### 5.1 MAC DE TIEMPO CONTINUO Y LA EXPANSION ORTONORMAL DE SEÑALES

En el último capítulo hemos considerado un modelo de tiempo discreto del MAC Gaussiano con interferencia entre símbolos. Dicho modelo supone implícitamente que el canal tiene una sincronización perfecta de símbolos o fases entre los transmisores y el receptor. En este capítulo estudiamos los MACs Gaussianos espectrales donde las entradas y salidas son funciones del tiempo continuo (*i.e.*, señales analógicas). Este tipo de canales se conoce generalmente como canal de tiempo-continuo (o de forma de onda), lo cual se presenta frecuentemente en el mundo real, y por consiguiente el cálculo de la región de capacidad de estos canales es de gran importancia práctica.

El modelo del canal se presenta en la Fig.5.1 y el problema de comunicación sobre este canal se puede describir como sigue: suponiendo que dos usuarios 1 y 2 quieren comunicarse simultáneamente con un receptor a través de un canal con ruido aditivo Gaussiano; la suma de las señales de entradas codificadas  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  se pasa por un filtro lineal cuya respuesta al impulso es  $h(t)$ . La señal resultante se suma a un proceso estacionario de los ruidos Gaussianos  $n(t)$  con densidad espectral de potencia  $N(f)$ , y produce en la salida del canal una señal  $y(t)$ .

Generalmente, un canal físico tiene restricciones tanto en las potencias de transmisión (o amplitud) como en ancho de banda. En nuestro modelo, la restricción de potencia (o amplitud) es parte de los transmisores, y la restricción de ancho de banda es parte del canal (a través de un filtro lineal del canal) y por lo cual podemos suponer que no hay restricción de ancho de banda sobre las entradas. Se consideran dos tipos de restricciones:

1) Restricción de potencias promedio, i.e.,

$$\frac{1}{T} \int_0^T x_i^2(t) dt \leq P_i; \quad \text{para } T \text{ grande, y}$$

2) Restricción de pico de amplitud, i.e.,

$$|x_i(t)| \leq \sqrt{P_i}; \quad i=1, 2.$$

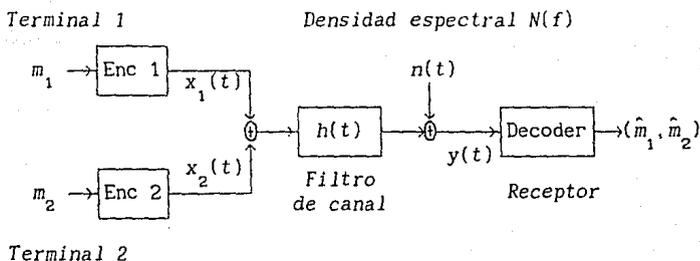


Fig.5.1 Modelo de MAC Gaussiano Espectral

Nótese que para alcanzar la capacidad del canal, los espectros de las señales de entradas deben de aparear ("match") de alguna manera al canal (mejor dicho, al filtro del canal), porque sólo aquellas componentes de frecuencia que están en la banda de paso del filtro van a aparecer en la salida. Ahora definimos la región de capacidad del canal.

Sean  $\{x_{1j}(t)\}$  y  $\{x_{2j}(t)\}$ , para  $0 \leq t \leq T$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, M_1\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, M_2\}$ , palabras del código para usuarios 1 y 2, con sus soportes en el intervalo  $[0, T]$  que satisfacen algunas restricciones apropiadas. Las tasas de este código están definidas por

$$R_i \triangleq \frac{\log M_i}{T} \text{ nats/s, } i=1, 2.$$

Un par de tasas  $(R_1, R_2)$  se dice que es alcanzable para este canal si para cualquier  $\epsilon > 0$  y todos los  $T$  suficientemente grandes, existen dos codificadores  $f_1$  y  $f_2$  que mapean

$$x_{im_i}(t) = f_i(m_i)$$

donde  $m_i \in \{1, 2, \dots, M_i\}$  es el mensaje del usuario  $i$ , y un decodificador  $g$  que mapea

$$(\hat{m}_1, \hat{m}_2) = g(y(t))$$

tal que  $\frac{1}{T} \log M_i \geq R_i$ ,  $i=1, 2$ , y la probabilidad de error promedio

$$\frac{1}{M_1 M_2} \sum_{m_1, m_2} \Pr\{(\hat{m}_1, \hat{m}_2) \neq (m_1, m_2)\} \leq \epsilon.$$

La región de capacidad  $\mathcal{C}$  se define como la cerradura del conjunto de todos los pares de tasas alcanzables.

Para entradas restringidas en potencia promedio, el método de la expansión ortonormal de señales se usa para encontrar la región de capacidad. La idea básica es la siguiente.

Sean  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  dos entradas  $\mathcal{L}_2$  para el MAC de tiempo continuo y  $y(t)$  la salida. Sean  $\{\phi_{1k}(t)\}$ ,  $\{\phi_{2k}(t)\}$ , y  $\{\psi_k(t)\}$ ,  $k=1, 2, \dots$ , tres conjuntos completos de funciones ortonormales definidas en el intervalo  $[0, T]$ .

Entonces podemos representar las entradas y la salida por medio de las siguientes expansiones (1=1, 2)

$$x_1(t) = \sum_k x_{1k} \phi_{1k}(t); \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$y(t) = \sum_k y_k \psi_k(t); \quad 0 \leq t \leq T,$$

donde  $x_{1k}$ ,  $y_k$  son los coeficientes de las series de expansiones dados por

$$x_{1k} = \int_0^T x_1(t) \phi_{1k}(t) dt, \quad y_k = \int_0^T y(t) \psi_k(t) dt.$$

Nótese que las señales aleatorias de entrada y salida se pueden caracterizar por las distribuciones conjuntas  $p(x_1^N)$  y  $p(y^N)$ , donde  $x_1^N = (x_{11}, \dots, x_{1N})$  y  $y^N = (y_1, \dots, y_N)$  son los vectores de los coeficientes de las expansiones en serie de las entradas y salida, y el canal puede describirse estadísticamente en términos de las densidades de probabilidad condicional conjunta  $p(y^N | x_1^N, x_2^N)$ , para todos los  $N$ . El canal resultante se puede ver por lo tanto como un canal "discreto en tiempo".

Una propiedad útil e interesante de este método es que la información mutua promedio entre entradas y salida (y consecuentemente, la capacidad del canal) son independientes de los conjuntos particulares de las funciones ortonormales que usan [33, 29]. Esto se debe a que si sabemos la expansión de una señal en un conjunto de funciones ortonormales, podemos determinar la expansión de esta señal en cualquier otro conjunto de funciones ortonormales sobre el mismo intervalo. La cuestión restante es cómo escoger los conjuntos de funciones ortonormales tal que faciliten el análisis.

## 5.2 CONJUNTO DE MACs GAUSSIANOS PARALELOS

Presentamos en esta sección un resultado sobre la región de capacidad de un conjunto de MACs Gaussianos paralelos (discreto en tiempo), lo cual se necesitará para la siguiente sección. El conjunto (finito o contable) de los

MACs paralelos con ruido aditivo Gaussiano se muestra en la Fig.5.2 y se puede describir como sigue.

Suponemos que las terminales 1 y 2 accesan  $N$  MACs paralelos simultáneamente como en la Fig.5.2, cada canal con ruido aditivo Gaussiano e independiente  $n_k$ ,  $k=1, \dots, N$ . Suponemos también que las entradas de cada terminal deben satisfacer una restricción de energía promedio

$$\sum_{k=1}^N E\{x_{ik}^2\} \leq E_i; \quad i=1, 2 \quad (5.1)$$

Denotamos  $R_1^{(k)}$  y  $R_2^{(k)}$ , las tasas individuales de las terminales 1 y 2 en  $k$ -ésimo canal, y definimos las tasas "totales" de cada terminal como

$$R_i \triangleq \sum_{k=1}^N R_i^{(k)}.$$

Entonces la región de capacidad "total" de este conjunto de canales es la cerradura del conjunto de todos los pares de tasas alcanzables  $(R_1, R_2)$ .

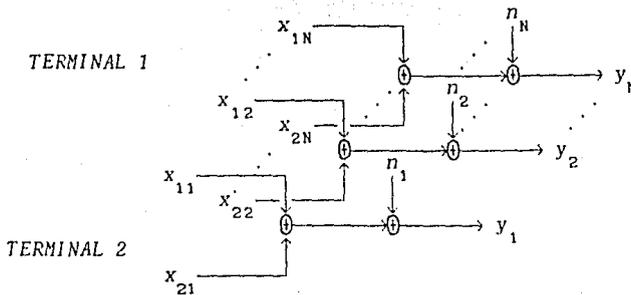


Fig.5.2 Conjunto de MACs Gaussianos Paralelos

La región de capacidad  $\mathcal{C}$  de este conjunto de MACs paralelos está dada por el siguiente teorema.

**Teorema 5.1:** Dado un conjunto de  $N$  MACs paralelos con ruido aditivo Gaussiano e independiente teniendo variancias  $\sigma_k^2$ ,  $k=1, \dots, N$ , y supongamos que las entradas tienen restricciones de (5.1). Entonces

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C} = \{ (R_1, R_2) : & 0 \leq R_1 \leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \log \left[ \max \{ 1, \theta_1 / \sigma_k^2 \} \right], \\
 & 0 \leq R_2 \leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \log \left[ \max \{ 1, \theta_2 / \sigma_k^2 \} \right], \\
 & R_1 + R_2 \leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \log \left[ \max \{ 1, \theta / \sigma_k^2 \} \right] \}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

donde los parámetros  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta$  son soluciones de

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \sum_{k=1}^N \max \{ 0, \theta_1 - \sigma_k^2 \}, \\
 E_2 &= \sum_{k=1}^N \max \{ 0, \theta_2 - \sigma_k^2 \}, \\
 E_1 + E_2 &= \sum_{k=1}^N \max \{ 0, \theta - \sigma_k^2 \},
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

respectivamente.

**Demostración:** Podemos suponer primero que las entradas del  $k$ -ésimo canal son restringidas por  $E\{x_{1k}^2\} \leq \epsilon_{1k}$ , donde  $\epsilon_{1k} \geq 0$  es arbitrario. Del resultado para MAC AWGN [9, 10] podemos mostrar fácilmente que la región de capacidad de estos canales paralelos es

$$0 \leq R_i \triangleq \sum_{k=1}^N R_i^{(k)} \leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \log(1 + \epsilon_{ik} / \sigma_k^2), \quad i=1, 2. \tag{5.4}$$

$$R_1 + R_2 = \sum_{k=1}^N R_1^{(k)} + R_2^{(k)} \leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \log(1 + [\epsilon_{1k} + \epsilon_{2k}] / \sigma_k^2),$$

y se alcanza cuando las entradas son variables aleatorias Gaussianas e independientes, con media cero y variancia  $\epsilon_{ik}$ , para  $i=1,2, k=1, \dots, N$ .

Naturalmente, la región de capacidad de este canal con restricción (5.1) es la unión (o cobertura convexa) de todos los pares que satisfacen (5.4) sujeto a  $\epsilon_{ik} \geq 0$  y  $\sum_k \epsilon_{ik} = E_i$ . Mostramos ahora que la región de capacidad tiene la forma de (5.2). Observando primero que la región

$$0 \leq R_i \leq C_i \triangleq \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \log \left[ \max \{ 1, \theta_i / \sigma_k^2 \} \right], \quad i=1, 2,$$

$$R_1 + R_2 \leq C_{12}^* \triangleq \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \log \left[ \max\{1, \theta/\sigma_k^2\} \right],$$

donde  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta$  son soluciones de (5.3), es una cota exterior de (5.4) con las restricciones mencionadas (aplicando el teorema de Kuhn-Tucker a cada problema de optimización, o directamente usando el argumento de "water-filling"). Además, las igualdades se logran con

$$\begin{aligned} \epsilon_{1k}^* &= \max\{0, \theta_1 - \sigma_k^2\}, & \epsilon_{2k}^* &= \max\{0, \theta_2 - \sigma_k^2\}, \\ (\epsilon_{1k} + \epsilon_{2k})^* &= \max\{0, \theta - \sigma_k^2\}, \end{aligned}$$

respectivamente, donde  $(\epsilon_{1k} + \epsilon_{2k})^*$  significa la asignación óptima de energía para la suma de las entradas en  $k$ -ésimo canal. Esta cota exterior se puede ver en la Fig. 4.2 con dos esquinas  $A = (C_{11}^*, C_{12}^* - C_{11}^*)$  y  $B = (C_{12}^* - C_{22}^*, C_{22}^*)$ .

Ahora mostramos que los puntos A y B son alcanzables y por compartimiento de tiempo, esta región también es alcanzable, lo cual completará la demostración. El punto A se alcanza utilizando las siguientes asignaciones de energías:

$$\begin{aligned} \epsilon_{1k} &= \epsilon_{1k}^* = \max\{0, \theta_1 - \sigma_k^2\}, \\ \epsilon_{2k} &= (\epsilon_{1k} + \epsilon_{2k})^* - \epsilon_{1k}^* = \max\{0, \theta - \sigma_k^2\} - \max\{0, \theta_1 - \sigma_k^2\}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

Como  $\theta \geq \theta_1$ ,  $\epsilon_{2k}$  está bien definida, i.e.  $\epsilon_{2k} \geq 0$  y  $\sum_k \epsilon_{2k} = (E_1 + E_2) - E_1 = E_2$ . Sustituyendo (5.5) a (5.4) obtenemos que cualquier par de tasas que satisface

$$R_1 \leq C_{11}^*, \quad R_2 \leq \tilde{C}_2, \quad \text{y} \quad R_1 + R_2 \leq C_{12}^*$$

es alcanzable, donde

$$\tilde{C}_2 = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \log(1 + [(\epsilon_{1k} + \epsilon_{2k})^* - \epsilon_{1k}^*] / \sigma_k^2).$$

Nótese que  $\tilde{C}_2 \geq C_{12}^* - C_{11}^*$ , siendo el punto A por lo tanto alcanzable. El punto B se puede alcanzar similarmente; el teorema 5.1 queda así demostrado. ■

Estamos listos ahora para analizar MACs Gaussianos de tiempo continuo.

### 5.3 REGION DE CAPACIDAD CON RESTRICCIÓN DE POTENCIA PROMEDIO

Presentamos primero una derivación intuitiva (aunque menos rigurosa comparada con la demostración de Gallager) de la región de capacidad del MAC Gaussiano de tiempo continuo. Esta derivación es similar a la de Blahut en [45, capítulo 7] para los canales de un sólo usuario.

Para empezar, modificamos el canal de la Fig.5.1 a un canal equivalente como se muestra en la Fig.5.3 (es equivalente, excepto en aquellas frecuencias donde  $H(f)=0$ , la cual no tiene efecto porque encontraremos las densidades espectrales de potencias de las entradas  $S_i(f)=0$  en dichas frecuencias). El proceso del ruido Gaussiano equivalente  $n'(t)$  tiene una densidad espectral de potencia

$$N'(f) = N(f) / |H(f)|^2$$

y su función de autocorrelación  $\phi'(\tau)$  está dada por la transformada inversa de Fourier de  $N'(f)$ . Por medio de una expansión de Karhunen-Loeve [45] sabemos que los procesos del ruido  $n'(t)$  y de las entradas  $x_i(t)$  se pueden representar en el intervalo de tiempo  $[0, T]$  como siguen

$$n'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} n'_k \psi_k(t),$$

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{ik} \psi_k(t), \quad i=1, 2,$$

donde los coeficientes  $n'_k$  de la expansión de Karhunen-Loeve son variables

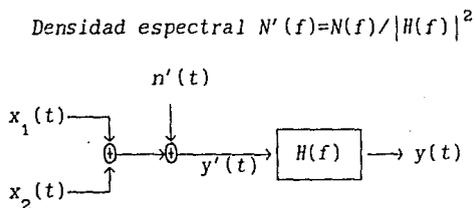


Fig.5.3 Representación Equivalente del Canal de la Fig.5.1

aleatorias Gaussianas e independientes con variancia  $\lambda_k$ ;  $\psi_k(t)$  y  $\lambda_k$ , para  $k=1, 2, \dots$ , son funciones y valores característicos (eigenfuncions y eigenvalues) de la siguiente ecuación integral

$$\int_0^T \phi'(t-s)\psi(s)ds = \lambda\psi(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Nótese que de esta forma el canal de tiempo continuo se ha descompuesto a un conjunto infinito pero contable de MACs Gaussianos  $y'_k = x_{1k} + x_{2k} + n'_k$ ,  $k=1, 2, \dots$  (se supone que  $y'_k$  se puede determinar únicamente conociendo  $y(t)$ ; ver Gallager [33] para mayor detalle). Entonces por el teorema 5.1, la región de capacidad (por unidad de tiempo) de este canal en  $[0, T]$  es

$$\mathcal{C}_T = \left\{ (R_1, R_2) : \begin{aligned} 0 \leq R_1 &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \log \left\{ \max\{1, \theta_1 / \lambda_k^2\} \right\}, \quad i=1, 2, \\ R_1 + R_2 &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \log \left\{ \max\{1, \theta / \lambda_k^2\} \right\} \end{aligned} \right\},$$

donde los parámetros  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta$  son soluciones de

$$\begin{aligned} TP_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \max\{0, \theta_1 - \lambda_k^2\}, \quad i=1, 2, \\ T(P_1 + P_2) &= \sum_{k=1}^{\infty} \max\{0, \theta - \lambda_k^2\}. \end{aligned}$$

Por la definición, la región de capacidad del canal (por unidad de tiempo) es

$$\mathcal{C} = \left\{ (R_1, R_2) : \begin{aligned} 0 \leq R_1 &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \log \left\{ \max\{1, \theta_1 / \lambda_k^2\} \right\}, \quad i=1, 2, \\ R_1 + R_2 &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \log \left\{ \max\{1, \theta / \lambda_k^2\} \right\} \end{aligned} \right\},$$

donde  $\theta_1$  y  $\theta$  se determinan por

$$\begin{aligned} P_i &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \max\{0, \theta_i - \lambda_k^2\}, \quad i=1, 2, \\ (P_1 + P_2) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \max\{0, \theta - \lambda_k^2\}. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de la distribución Toeplitz para procesos continuos

(ver, por ejemplo, [45]), obtenemos la región de capacidad, lo cual está resumido en el siguiente teorema de codificación.

**Teorema 5.2:** Para el MAC Gaussiano de tiempo continuo como se muestra en la Fig.5.1 con restricción de potencias promedio  $\frac{1}{T} \int_0^T x_i^2(t) dt \leq P_i$ ,  $i=1,2$ , supone que  $|H(f)|^2/N(f)$  es acotada e integrable, y  $\int N(f) df < \infty$  o  $N(f)$  es blanca. Entonces la región de capacidad está dada paramétricamente por

$$\mathcal{C} = \left\{ (R_1, R_2) : \begin{aligned} 0 \leq R_1 &\leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \log \left[ \max \left[ 1, \frac{\theta_1}{N(f)/|H(f)|^2} \right] \right] df \\ 0 \leq R_2 &\leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \log \left[ \max \left[ 1, \frac{\theta_2}{N(f)/|H(f)|^2} \right] \right] df \\ R_1 + R_2 &\leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \log \left[ \max \left[ 1, \frac{\theta}{N(f)/|H(f)|^2} \right] \right] df \end{aligned} \right\}$$

donde  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta$  satisfacen

$$P_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \max \left[ 0, \theta_1 - \frac{N(f)}{|H(f)|^2} \right] df, \quad P_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \max \left[ 0, \theta_2 - \frac{N(f)}{|H(f)|^2} \right] df,$$

$$P_1 + P_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \max \left[ 0, \theta - \frac{N(f)}{|H(f)|^2} \right] df.$$

**Comentario:** Para una demostración rigurosa, puede adoptarse el método de Gallager (demostración del teorema de codificación [33, teorema 8.5.1] para un canal Gaussiano de tiempo continuo de un sólo usuario). Algunos pasos claves se mencionan abajo (se necesita también el resultado de la sección anterior)

Supóngase que las entradas  $x_i(t)$  están restringidas al intervalo de tiempo  $[-T/2, T/2]$  y la salida  $y(t)$  se observa sobre un intervalo  $[-T_0/2, T_0/2]$ . Por el mismo argumento de [33], ignoraremos las interferencias entre símbolos de las sucesivas palabras del código (por cierto, el enfoque se llama "one-shot" análisis). Siguiendo el método de Gallager, podemos reducir el canal de tiempo continuo en la Fig.5.1 a una representación equivalente con un número infinito pero contable de MACs de tiempo discreto, similar como en la figura 8.5.7 de [33]. Ahora el resultado del teorema 5.1 de la última sección se puede aplicar (la restricción de energía  $E_i$  se reemplaza por  $TP_i$ )

lo cual nos da la región de capacidad para cualquier duración de la entrada  $T$  y el intervalo de observación  $T_0$ . Finalmente, la región de capacidad por unidad de tiempo cuando  $T = T_0 \rightarrow \infty$  puede obtenerse utilizando el lema 8.5.7 de [33] (similar al teorema de la distribución Toeplitz de procesos continuos [28]). Esto completa la demostración del teorema.

#### 5.4 "WATER-FILLING", INTERPRETACION Y CODIFICACION OPTIMA

Como hemos mencionado previamente, el resultado del teorema 5.2 tiene también una interpretación llamada "water-filling" para multiacceso, similar al caso de los canales clásicos Gaussianos. Esto es, podemos imaginar  $N(f)/|H(f)|^2$  como el fondo de un depósito o recipiente como se muestra en la Fig.5.4a. Para alcanzar el punto A de la región de capacidad como en la Fig.4.2, echamos primero una cantidad de agua  $P_1$  (es el área en la gráfica) al depósito que llega al nivel  $\theta_1$ , lo cual asume la figura o la forma del espectro de potencia "óptimo" de transmisión para el usuario 1

$$S_1^*(f) = \max\left\{0, \theta_1 - \frac{N(f)}{|H(f)|^2}\right\}.$$

Luego, echamos otra cantidad adicional  $P_2$  de agua al depósito (el nivel de agua llega a  $\theta$ ) lo cual asume la forma del espectro total de potencias "óptimo" de transmisión para usuarios 1 y 2

$$S_{12}^*(f) = \max\left\{0, \theta - \frac{N(f)}{|H(f)|^2}\right\},$$

de donde podemos obtener (de hecho se puede observar fácilmente en la gráfica) el espectro de potencia de transmisión del usuario 2 como

$$\tilde{S}_2(f) = S_{12}^*(f) - S_1^*(f).$$

La Fig.5.4b muestra esta asignación óptima de los espectros para alcanzar el punto A. Similarmente, para alcanzar el punto B, se llena primero una cantidad  $P_2$  de agua en el depósito de donde se asume la forma del espectro de potencia del usuario 2 (ver Fig.5.5a y 5.5b)

$$S_2^*(f) = \max\left\{0, \theta_2 - \frac{N(f)}{|H(f)|^2}\right\}$$

Otra cantidad  $P_1$  de agua se echa al depósito para que asume la forma del espectro de potencia del usuario 1

$$\hat{S}_1(f) = S_{12}^*(f) - S_2^*(f)$$

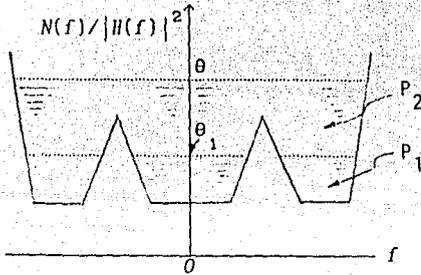


Fig. 5.4a El water-filling esquema para alcanzar el punto A

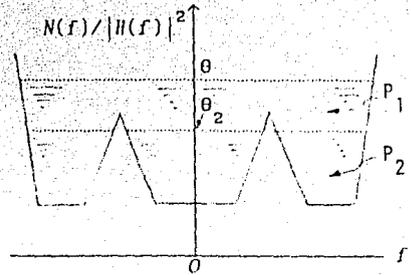


Fig. 5.5a El water-filling esquema para alcanzar el punto B

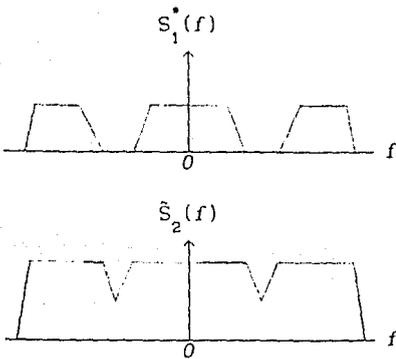


Fig. 5.4b Espectros óptimos para alcanzar el punto A

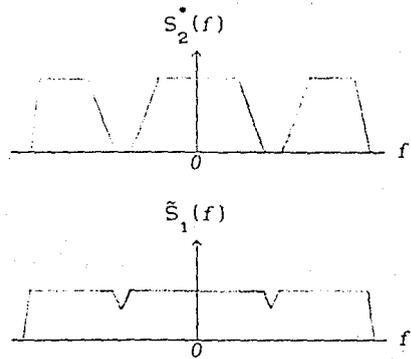


Fig. 5.5b Espectros óptimos para alcanzar el punto B

Una vez alcanzados los puntos A y B, cualquier punto sobre la línea A-B de la región de capacidad se puede alcanzar utilizando el método clásico de compartimiento de tiempo, aunque este no es el único ni el más "eficiente". Una alternativa sin usar el argumento de tiempo-compartido consiste en usar

los espectros de transmisiones los cuales son combinaciones convexas de  $S_1^*(f)$ ,  $\tilde{S}_1(f)$ , dados previamente. Esto es,

$$\begin{aligned} S_1(f) &= \alpha S_1^*(f) + (1-\alpha)\tilde{S}_1(f), \\ S_2(f) &= \alpha \tilde{S}_2(f) + (1-\alpha)S_2^*(f), \end{aligned}$$

donde  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Este método de codificación permite que se alcance cualquier punto sobre la línea A-B con una  $\alpha$  apropiada sin usar el compartimiento de tiempo, lo cual es mucho más simple que lo anterior.

Usando el argumento de water-filling derivado del teorema 5.2, podemos calcular fácilmente la región de capacidad del canal de la Fig.5.1 para diferentes filtros del canal (por simplicidad suponemos que el ruido Gaussiano es blanco  $N(f)=N_0/2$ ). Por ejemplo, para

a) Filtro pasobaja

$$H_L(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq W, \\ 0, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

donde  $\mathcal{R}(f)$  es la transformada de Fourier de  $h(t)$ , la región de capacidad con restricción de potencia está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = \left\{ (R_1, R_2) : 0 \leq R_1 \leq W \log \left[ 1 + \frac{P_1}{N_0 W} \right] \text{ nats/s,} \right. \\ \left. R_1 + R_2 \leq W \log \left[ 1 + \frac{P_1 + P_2}{N_0 W} \right] \text{ nats/s} \right\}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

b) Filtro pasobanda

$$H_B(f) = \begin{cases} 1, & |f \pm f_c| \leq W, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Como el ancho de banda efectivo de este filtro es  $2W$ , la región de capacidad es la misma que (5.6) excepto que en lugar de  $W$  se cambia a  $2W$ .

c) Filtro diferenciador-pasobaja

$$H_D(f) = \begin{cases} -j2\pi f, & \text{si } |f| \leq W, \\ 0, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

donde  $j \triangleq \sqrt{-1}$ , la región de capacidad tiene la forma

$$\begin{aligned} 0 \leq R_1 &\leq W \log \left[ \left[ \frac{1+2\pi\sqrt{P_1 W/N_0}}{e} \right]^2 + 2W \left[ \frac{1+2\pi\sqrt{P_1 W/N_0}}{e} \right] \right] \quad \text{nats/s,} \\ R_1 + R_2 &\leq W \log \left[ \left[ \frac{1+2\pi\sqrt{(P_1+P_2)W/N_0}}{e} \right]^2 + 2W \left[ \frac{1+2\pi\sqrt{(P_1+P_2)W/N_0}}{e} \right] \right] \quad \text{nats/s.} \end{aligned} \quad (5.7a)$$

Nótese que si  $P_1 W/N_0$  es grande, (5.7a) toma la siguiente forma

$$0 \leq R_1 \leq W \log \left[ \frac{4\pi^2 P_1 W}{e^2} \frac{P_1 W}{N_0} \right], \quad R_1 + R_2 \leq W \log \left[ \frac{4\pi^2 (P_1+P_2) W}{e^2} \frac{(P_1+P_2) W}{N_0} \right] \quad (5.7b)$$

Estas regiones de capacidad las vamos usar como cotas exteriores de las regiones de capacidad para los canales correspondientes al caso de amplitud limitada, lo cual estudiamos a continuación.

## 5.5 TASAS ALCANZABLES PARA RESTRICCIÓN DE AMPLITUD

Analizamos ahora un caso más realista donde las amplitudes de las señales de entradas están restringidas por  $|x_i(t)| \leq \sqrt{P_i}$ ,  $i=1, 2$ . Este tipo de restricciones ha sido considerado por Shannon en su trabajo original [1]. Se obtienen en esta sección algunas regiones de tasas alcanzables para ciertos filtros de interés. A pesar de que suponemos por simplicidad que el ruido Gaussiano es blanco, los resultados pueden extenderse al caso de densidades espectrales de potencia arbitrarias como en el capítulo anterior. Los resultados obtenidos en esta sección son una generalización de aquellos derivados por Ozarow et al [43] para canales Gaussianos clásicos, i.e., si suponemos  $\sqrt{P_2} = 0$ , nuestro resultado coincide con lo de ellos.

Obsérvese que la salida del canal en la Fig.5.1 es

$$y(t) = (x_1 * h)(t) + (x_2 * h)(t) + n(t),$$

donde  $x * h$  denota la convolución de  $x(t)$  con  $h(t)$ , y  $n(t)$  es una realización del ruido Gaussiano blanco con densidad espectral  $N_0/2$ . Analizamos primero los filtros pasobajas.

### A. Filtros Pasobajas

**Teorema 5.3:** Para el canal como la Fig. 5.1 con entradas restringidas en pico de amplitud y filtro pasobaja  $H_1(f)$ , la siguiente región de tasas es alcanzable

$$\mathcal{R} = \left\{ (R_1, R_2) : \begin{aligned} 0 \leq R_i &\leq W \log \left[ 1 + \frac{2e^{-P_i}}{\pi^3 \frac{N_0 W}{P_i}} \right] \text{ nats/s, } i=1,2 \\ R_1 + R_2 &\leq W \log \left[ 1 + \frac{2e^{-P_1 - P_2 - \bar{P}/2}}{\pi^3 \frac{N_0 W}{\bar{P}}} \right] \text{ nats/s} \end{aligned} \right\}. \quad (5.8)$$

donde  $\bar{P} \triangleq \min\{P_1, P_2\}$ .

Notese que tenemos un término  $\bar{P}/2$  en la última desigualdad de (5.8), lo cual no se presenta usualmente en el caso de potencia restringida. La alcanzabilidad de esta región se demuestra utilizando una forma especial de modulación y demodulación en el intervalo de tiempo  $T \triangleq NT_s$  segundos, la cual describimos a continuación. Las señales de entrada se generan como sigue

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \sum_{\ell=0}^{N-1} a_\ell p(t - \ell T_s), \\ x_2(t) &= \sum_{\ell=0}^{N-1} b_\ell p(t - \ell T_s), \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde  $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_{N-1}]^T$  y  $\mathbf{b} = [b_0, b_1, \dots, b_{N-1}]^T$  son vectores aleatorios en  $[-\sqrt{P_1}, \sqrt{P_1}]^N$  y  $[-\sqrt{P_2}, \sqrt{P_2}]^N$ , respectivamente, independiente uno de otro, y  $T_s = 1/2W$ . El pulso  $p(t)$  tiene la forma

$$p(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T_s/2, \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Nótese que nuestras entradas satisfacen las restricciones  $|x_i(t)| \leq \sqrt{P_i}$ ,  $i=1, 2$ ; y la información está contenida en las variables aleatorias  $a$  y  $b$ . El receptor tiene ahora

$$y(t) = \sum_{\ell=0}^{N-1} (a_{\ell} + b_{\ell}) \tilde{p}(t - \ell T_s) + n(t),$$

donde  $\tilde{p}(t) = (p * h_L)(t)$ , el  $p(t)$  filtrado por pasobajas. Su transformada de Fourier está dada por

$$\tilde{P}(f) = \begin{cases} T_s \frac{\sin(\pi f T_s)}{\pi f T_s}, & |f| \leq W, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Si filtramos  $y(t)$  con un filtro pasobajas ideal de ancho de banda  $W$  y muestreamos en cada tiempo  $kT_s$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , obtendremos el siguiente vector de salida que consiste en  $N$  muestras

$$y = G[a+b] + n,$$

donde  $G$  es una matriz de  $N \times N$  cuyo  $(k, \ell)$ -ésimo elemento es

$$g_{k,\ell} = \tilde{p}((k-\ell)T_s),$$

$n$  es un vector de ruidos Gaussianos blancos con variancia  $E\{n_{\ell}^2\} = N_0 W$ , y  $a$ ,  $b$  son las mismas definidas anteriormente.

Observando ahora que el nuevo canal resultante de dicha modulación y demodulación es un canal "discreto en el tiempo", y según los resultados de MAC dm cualquier par de tasas  $(R_1, R_2)$  que satisface

$$R_1 \leq \frac{1}{N} I(a; y|b), \quad R_2 \leq \frac{1}{N} I(b; y|a), \quad R_1 + R_2 \leq \frac{1}{N} I(a, b; y) \quad \text{nats/symbol} \quad (5.10)$$

es alcanzable. Debido a la independencia entre  $a$ ,  $b$  y  $n$ , tenemos

$$\begin{aligned} I(a; y|b) &= h(y|b) - h(y|a, b) = h(Ga+n) - h(n), \\ I(b; y|a) &= h(y|a) - h(y|a, b) = h(Gb+n) - h(n), \\ I(a, b; y) &= h(y) - h(y|a, b) = h(G(a+b)+n) - h(n); \end{aligned} \quad (5.11)$$

La entropía diferencial del ruido Gaussiano blanco  $n$  es

$$h(n) = \frac{N}{2} \log(2\pi e N_0 W).$$

Los demás términos en el lado derecho de (5.11) pueden acotarse aplicando la desigualdad de potencia de entropía [40], i.e.,

$$e^{(2/N)h(Ga+n)} \geq e^{(2/N)h(Ga)} + e^{(2/N)h(n)} = e^{(2/N)\log|G| + h(a)} + e^{(2/N)h(n)}$$

donde  $|G|$  es el determinante de  $G$ . Lo cual implica que

$$\frac{1}{N} I(a; y|b) \geq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + (e^{(2/N)\log|G|} \cdot e^{(2/N)h(a)}) / 2\pi e N_0 W \right], \quad (5.12)$$

$$\frac{1}{N} I(b; y|a) \geq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + (e^{(2/N)\log|G|} \cdot e^{(2/N)h(b)}) / 2\pi e N_0 W \right],$$

$$\frac{1}{N} I(a, b; y) \geq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + (e^{(2/N)\log|G|} \cdot e^{(2/N)h(a+b)}) / 2\pi e N_0 W \right].$$

Si escogemos las variables aleatorias  $\{a_\ell\}$  y  $\{b_\ell\}$  de tal manera que son iid con distribuciones uniformes en  $[-\sqrt{P_1}, \sqrt{P_1}]$ ,  $i=1, 2$ , respectivamente, las cuales maximizan  $h(a)$  y  $h(b)$  sobre todas las distribuciones permisibles en  $a$  y  $b$ , obtenemos

$$h(a) = Nh(a_\ell) = N \log(2\sqrt{P_1}), \quad h(b) = Nh(b_\ell) = N \log(2\sqrt{P_2}),$$

$$h(a+b) = Nh(a_\ell + b_\ell) = N \log \left[ \sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + |\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}| \right] + \frac{N}{2} \frac{\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} - |\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}|}{\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + |\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}|}$$

Por otra parte, como  $G$  es una matriz Toeplitz, podemos aplicar el teorema de Szegő [28] para mostrar que cuando  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{1}{N} \log|G| \rightarrow \int_{-1/2}^{1/2} \log G(f) df, \quad \text{donde} \quad G(f) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{k,0} e^{j2\pi f k}.$$

Ozarrow et al [43] han mostrado que

$$G(f) = \frac{1}{T_s} \tilde{P}(f/T_s) = \frac{\sin \pi f}{\pi f}, \quad \text{y} \quad \int_{-1/2}^{1/2} \log G(f) df = \log \frac{e}{\pi}.$$

Por lo tanto, de la ecuación anterior y (5.12), tenemos para  $N \gg 0$

$$\frac{1}{N} I(\mathbf{a}; \mathbf{y} | \mathbf{b}) \geq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{2e}{\pi^3} \frac{P_1}{N_0 W} \right], \quad \frac{1}{N} I(\mathbf{b}; \mathbf{y} | \mathbf{a}) \geq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{2e}{\pi^3} \frac{P_2}{N_0 W} \right], \quad (5.13)$$

$$\frac{1}{N} I(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{y}) \geq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{(e/\pi)^2}{2\pi e N_0 W} (\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + |\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}|)^2 \exp \left\{ \frac{(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} - |\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}|)}{(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + |\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}|)} \right\} \right]$$

Utilizando la desigualdad  $e^x \geq 1 + x + x^2/2$  (for  $x \geq 0$ ), lo anterior se simplifica a

$$\frac{1}{N} I(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{y}) \geq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{2e}{\pi^3} \frac{P_1 + P_2 + 0.5\bar{P}}{N_0 W} \right] \text{ nats/símbolo}, \quad (5.14)$$

donde  $\bar{P} = \min(P_1, P_2)$ . Como cada símbolo (o transmisión) dura  $T_s = 1/2W$  segundos, el par de tasas  $(R_1, R_2)$  que satisface

$$R_1 \leq W \log \left[ 1 + \frac{2e}{\pi^3} \frac{P_1}{N_0 W} \right], \quad R_1 + R_2 \leq W \log \left[ 1 + \frac{2e}{\pi^3} \frac{P_1 + P_2 + 0.5\bar{P}}{N_0 W} \right] \text{ nats/s}$$

es alcanzable. Esto demuestra el teorema. ■

Comparando las tasas alcanzables (5.8) con la cota exterior (región de capacidad para restricción de potencias promedio) dada en (5.6), podemos observar que la disminución efectiva de SNR es aproximadamente por un factor de  $2e/\pi^3$ , con respecto al caso de restricción de potencias promedio.

## B. Filtros Pasobandas

**Teorema 5.4:** Para el canal de la Fig.5.1 con entradas limitadas en amplitud y filtro pasobanda  $H_B(f)$ , si  $f_c \gg W$ , cualquier par de tasas  $(R_1, R_2)$  con

$$R_1 \leq 2W \log \left[ 1 + \frac{e}{2\pi^2} \frac{P_1}{2N_0 W} \right], \quad R_1 + R_2 \leq 2W \log \left[ 1 + \frac{e}{2\pi^2} \frac{P_1 + P_2}{2N_0 W} \right] \text{ nats/s}, \quad (5.15)$$

es alcanzable.

Usamos las siguientes señales de entradas para demostrar el teorema

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k p(t-kT_s) \cos 2\pi f_c t + b_k p(t-kT_s) \sin 2\pi f_c t$$

$$x_2(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k p(t-kT_s) \cos 2\pi f_c t + d_k p(t-kT_s) \sin 2\pi f_c t,$$

donde  $\{a_k, b_k\}$  y  $\{c_k, d_k\}$  son variables aleatorias restringidas en los círculos  $a_k^2 + b_k^2 \leq P_1$  y  $c_k^2 + d_k^2 \leq P_2$ , respectivamente.  $T_s$  y  $p(t)$  son los mismos que en la demostración anterior. Nótese que nuestras señales satisfacen las restricciones de pico de amplitud pues

$$(\cos\theta + b\sin\theta)^2 = a^2 + b^2 - (a\sin\theta - b\cos\theta)^2 \leq a^2 + b^2,$$

y por lo tanto  $|x_1(t)| \leq \sqrt{P_1}$ ,  $\forall t$ . Las señales de entrada se pasan por el filtro pasobanda y aparecen en la salida con la presencia de ruido Gaussiano blanco. Si la frecuencia de la portadora  $f_c \gg W$ , donde  $W$  es la mitad del ancho de banda del filtro pasobanda, la señal de la salida  $y(t)$  podría aproximarse como

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N-1} [a_k \cos 2\pi f_c t + b_k \sin 2\pi f_c t + c_k \cos 2\pi f_c t + d_k \sin 2\pi f_c t] \tilde{p}(t-kT_s) + n(t)$$

donde  $\tilde{p}(t)$  es el  $p(t)$  filtrado con un filtro pasobajas de ancho de banda  $W$ . El proceso de ruido podría representarse también por

$$n(t) = n_c(t) \cos 2\pi f_c t + n_s(t) \sin 2\pi f_c t,$$

donde  $n_c(\cdot)$  y  $n_s(\cdot)$  son procesos independientes y Gaussianos, blancos en la banda de paso  $[-W, W]$ , cada uno con densidad espectral de potencia  $N_0$ . Demodulamos esta señal multiplicando por  $2\cos 2\pi f_c t$  (y  $2\sin 2\pi f_c t$ , respectivamente) y filtrando por el filtro pasobajas, obtendremos

$$y_c(t) = \sum_{k=0}^{N-1} (a_k + c_k) \tilde{p}(t-kT_s) + n_c(t), \quad y \quad y_s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} (b_k + d_k) \tilde{p}(t-kT_s) + n_s(t).$$

Ahora muestreando en los tiempos  $\ell T_s$ ,  $\ell=0, 1, \dots, N-1$ , tenemos

$$y_c = G[a+c] + n_c, \quad y_s = G[b+d] + n_s,$$

donde  $n_c$  y  $n_s$  son vectores Gaussianos blancos e independientes, cada elemento tiene la misma variancia  $2N_0W$ , y  $G$  es la misma matriz que usamos anteriormente. Por lo tanto, las tasas

$$R_1 \leq \frac{1}{N} I([a, b]; [y_c, y_s] | [c, d]), \quad R_2 \leq \frac{1}{N} I([c, d]; [y_c, y_s] | [a, b]),$$

$$R_1 + R_2 \leq \frac{1}{N} I([a, b], [c, d]; [y_c, y_s])$$

son alcanzables. El vector de dimensión  $2N$  de las salidas  $[y_c, y_s]$  está dado por

$$\begin{bmatrix} y_c \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_c \\ n_s \end{bmatrix}$$

Como  $h(y_c, y_s | c, d) = h(Ga+n_c, Gb+n_s)$ , y aplicando otra vez la desigualdad de potencia de entropía, obtenemos la siguiente desigualdad

$$\exp\left\{\frac{2}{2N}h(y_c, y_s | c, d)\right\} \geq \exp\left\{\frac{2}{2N}h(Ga, Gb)\right\} + \exp\left\{\frac{2}{2N}h(n_c, n_s)\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{N}(2\log|G| + h(a, b))\right\} + \exp\left\{\frac{1}{N}h(n_c, n_s)\right\}.$$

Ahora tomamos  $(a, b)$  como  $N$  copias iid del par  $(a, b)$ , uniformemente distribuido en el círculo de radio  $\sqrt{P_1}$ , entonces  $h(a, b) = Nh(a, b) = N \log(\pi P_1)$ . Como hemos mostrado anteriormente que

$$1/N \log|G| \rightarrow \log(e/\pi), \quad \text{as } N \rightarrow \infty, \quad \text{y } h(n_c, n_s) = 2N \frac{1}{2} \log(2\pi e 2N_0W),$$

lo cual implica que  $(N \rightarrow \infty)$

$$\frac{1}{N} I([a, b]; [y_c, y_s] | [c, d]) = \frac{1}{N} h(y_c, y_s | c, d) - \frac{1}{N} h(n_c, n_s)$$

$$\geq \log \left( 1 + \frac{e}{2\pi^2} \frac{P_1}{2N_0 W} \right) \text{ nats/símbolo.}$$

Similarmente podemos mostrar (tomando  $(c, d)$  como copias iid de  $(c, d)$ , uniformemente distribuido sobre el círculo de radio  $\sqrt{P_2}$ ) que

$$\frac{1}{N} I(\{c, d\}; \{y_c, y_s\} | \{a, b\}) \geq \log \left( 1 + \frac{e}{2\pi^2} \frac{P_2}{2N_0 W} \right) \text{ nats/símbolo.}$$

y aplicando la desigualdad generalizada de potencia de entropía,

$$\exp \left[ \frac{2}{2N} h(y_c, y_s) \right] \geq \exp \left[ \frac{2}{2N} h(G_a, G_b) \right] + \exp \left[ \frac{2}{2N} h(G_c, G_d) \right] + \exp \left[ \frac{2}{2N} h(n_c, n_s) \right],$$

de donde derivamos

$$\frac{1}{N} I(\{a, b\}, \{c, d\}; \{y_c, y_s\}) = h(y_c, y_s) - h(n_c, n_s) \geq \log \left( 1 + \frac{e}{2\pi^2} \frac{P_1 + P_2}{2N_0 W} \right) \text{ nats/símbolo.}$$

Dividiendo las ecuaciones anteriores por  $T_s = 1/2W$  segundos, obtenemos las tasas en nats/s. Esto completa la demostración del teorema 5.4. ■

De los teoremas 5.3 y 5.4, podemos notar que la razón entre SNRs efectivas del filtro pasobanda y del filtro pasobaja es aproximadamente  $\pi/4$ .

### C. Filtros Diferenciador-Pasobajas

Teorema 5.5: Para el canal de la Fig.5.1 con entradas limitadas en amplitud y filtro diferenciador-pasobaja  $H_D(f)$ , la siguiente región es alcanzable

$$R_1 \leq W \log \left( 1 + \frac{8}{\pi e} \frac{W P_1}{N_0} \right), \quad R_1 + R_2 \leq W \log \left( 1 + \frac{8}{\pi e} \frac{W(P_1 + P_2 + 0.5\bar{P})}{N_0} \right) \text{ nat/s.} \quad (5.16a)$$

La demostración es muy similar a la de los filtros pasobajas. Usamos también las señales de entrada como en (5.9) y la suma se pasa por, en este caso, un filtro diferenciador-pasobaja lo cual produce

$$\tilde{p}(t) = (p * h)(t) = \frac{8}{\pi} \frac{t}{T_s^2 - 4t^2} \cos(\pi t / T_s).$$

Nótese que en este caso  $\tilde{p}(t)$  es impar y por lo tanto una aplicación directa del teorema de Szegö para calcular el determinante de la matriz de transmisión es inapropiada. Para resolver este problema, en lugar de muestrear la salida en los múltiplos de  $T_s$ , muestreemos en tiempo  $t_k = kT_s + T_s/2$ ,  $k=0, 1, \dots, N-1$ . Esto nos permite obtener el siguiente vector de salida

$$y = G'[a+b]+n$$

donde  $n$  es el mismo como antes con variancia  $N_0W$  para cada componente, y  $G'$  tiene la siguiente forma

$$g'_{k,1} = \tilde{p}((k-\ell)T_s + T_s/2) = \begin{cases} 1/T_s, & k=\ell \\ -1/T_s, & k=\ell+1 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Obsérvese que la matriz  $G'$  tiene  $1/T_s$  sobre su diagonal principal,  $-1/T_s$  sobre sus primeras subdiagonales (la superior y la inferior), y cero en las demás. Por lo tanto  $(1/N)\log|G'| = \log(1/T_s)$ . La ecuación (5.12) para este caso se convierte en

$$\frac{1}{N}I(a; y|b) \geq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{2P_1}{\pi e N_0 W T_s^2} \right] = \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{8}{\pi e} \frac{W P_1}{N_0} \right],$$

$$\text{y } \frac{1}{N}I(b; y|a) \geq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{8}{\pi e} \frac{W P_2}{N_0} \right], \quad \frac{1}{N}I(a, b; y) \geq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{8}{\pi e} \frac{W(P_1 + P_2 + 0.5\bar{P})}{N_0} \right].$$

Dividiendo por  $T_s = 1/2W$ , obtenemos las tasas alcanzables dadas en el teorema

5.5. ■

Cuando  $P_1W/N_0$  es grande, (5.16a) se convierte en

$$R_1 \leq W \log \left[ \frac{8}{\pi e} \frac{P_1 W}{N_0} \right], \quad R_1 + R_2 \leq W \log \left[ \frac{8}{\pi e} \frac{(P_1 + P_2 + 0.5\bar{P}) W}{N_0} \right]. \quad (5.16b)$$

Si comparamos las tasas alcanzables para amplitud limitada con la región de capacidad para potencia limitada, se puede notar que la razón de SNR efectiva de (5.16b) sobre la de (5.7b) es justamente  $2e/\pi^3$ , la misma que en el caso de filtros pasobajas.

## 5.6 CONCLUSION

En este capítulo hemos considerado los MACs de mayor importancia práctica: MACs de tiempo continuo con ruido Gaussiano espectral. Dos tipos de restricciones de entradas son analizadas: potencias promedio y pico de amplitud. Para el caso primero, hemos encontrado la región de capacidad utilizando la expansión ortonormal de señales. La interpretación de "water-filling" para las asignaciones "óptimas" de los espectros de potencia de las entradas es muy interesante y tiene implicaciones profundas para la codificación en un canal de multiacceso práctico. Para las entradas limitadas en sus amplitudes, obtenemos algunas tasas alcanzables para ciertos filtros las cuales son cercanas a las cotas exteriores. La capacidad del canal de comunicación con amplitud limitada sigue siendo un problema abierto.

---

## CAPITULO 6

### COMENTARIO FINAL

---

Hemos presentado un extenso estudio sobre canales de multiacceso desde el punto de vista de teoría de información. Hemos tratado problemas fundamentales de las comunicaciones confiables en los canales de multiacceso. Específicamente, nos interesa encontrar las caracterizaciones simples de la región de capacidad, así como los esquemas de codificación y de decodificación tales que se alcance la capacidad.

Cuatro diferentes modelos para los canales de comunicación de multiacceso han sido considerados. Los capítulos 2 y 3 se concentran en los MACs discretos sin memoria donde se dispone de un "canal lateral" tales como canal de realimentación o canal de relevo, mientras que los capítulos 4 y 5 analizan los MACs con ruido aditivo Gaussiano donde existe interferencia entre símbolos (por medio de los filtros del canal) y restricciones sobre las entradas. Los resultados obtenidos son muy interesantes y novedosos, los cuales extienden aquellos resultados de los canales punto a punto clásicos, proporcionando implicaciones útiles en las comunicaciones prácticas de multiacceso. Los principales resultados se resumen a continuación.

- Algunas regiones de tasas alcanzables para MAC dm con diferentes señales de realimentación y un método de demostración novedoso y simple.
- Un nuevo modelo para MAC con relevo y algunas cotas interiores y exteriores para las regiones de capacidad (casos de MARC dm, MARC AWGN y MARC con realimentación).
- Un nuevo modelo para MAC Gaussiano de tiempo discreto con memoria finita e interferencia entre símbolos.
- Una nueva definición alternativa con procesos para la región de capacidad de MAC Gaussiano de tiempo discreto con memoria finita.
- Región de capacidad para MAC Gaussiano de tiempo discreto con memoria

finita y entradas restringidas en potencias promedio (por símbolo).

- Una región de tasas alcanzables para MAC Gaussiano de tiempo discreto con memoria finita y entradas limitadas en amplitud.
- Un nuevo modelo para MAC Gaussiano de tiempo continuo con ancho de banda limitada y entradas restringidas en potencia promedio o en picos de amplitud.
- Región de capacidad para un conjunto de MACs paralelos Gaussianos.
- Región de capacidad para MAC Gaussiano espectral de tiempo continuo con entradas restringidas en potencia promedio.
- Interpretaciones de "water-filling" para la codificación óptima de multiacceso con y sin compartimiento de tiempo.
- Regiones alcanzables de MAC Gaussiano de tiempo continuo y con entradas limitadas en pico de amplitud para los filtros pasobajas, pasobanda y diferenciador-pasobajas ideales.

Algunos problemas que siguen estando abiertos después de esta investigación son:

- 1) Caracterización completa de las regiones de capacidades para los MACs con realimentación y con relevo.
- 2) Caracterización simple de la región de capacidad para MAC Gaussiano espectral con dos diferentes filtros del canal (i.e.,  $H_1(f) \neq H_2(f)$ ).
- 3) Región de capacidad para MAC Gaussiano espectral con entradas limitadas en pico de amplitud.

Según el autor, el primero y el tercero pertenecen a problemas que han estado abiertos durante mucho tiempo en la teoría de información. El segundo es meramente un problema de optimización.

Las regiones de capacidad de los canales de multi-terminal con canales laterales son generalmente difíciles de determinar debido a la información lateral que les proporcionan los canales laterales (y por lo cual los codificadores pueden cooperar de alguna manera). Se puede ver que la mayoría de los resultados para este tipo de canales han recurrido al uso de variables

aleatorias auxiliares para "simular" información lateral (y aumentar la región de tasas alcanzables). Codificación Markoviana de bloques sobrepuestos (SBME) es un método típico en el cual la información nueva y la información pasada (de los bloques previous) se encadenan o interrelacionan a fin de explotar la información lateral. Sin embargo, este proceso de "cooperación" sólo se realiza a nivel de bloque, o mejor dicho, las variables auxiliares se usan solamente para resumir la información lateral "útil" obtenida en el último bloque (en lugar de toda la información lateral disponible hasta el momento). Por otro lado, si simuláramos o explotáramos toda la información lateral disponible, ¿cuántas variables auxiliares se necesitan para hacerlo? (¿infinitas?) y ¿cuál es la información útil? a fin de tener una caracterización simple (single letter) de la región de capacidad.

Es del conocimiento común que generalmente existen caracterizaciones simples de las capacidades (o regiones de capacidad) para los canales discretos sin memoria (excepto algunos canales de multiterminal), y ¿por qué no existen (o son tan difíciles de encontrar) para los canales discretos sin memoria con información o canal lateral? Según la opinión del autor, esto se debe a que con la información lateral o canales laterales, estos canales se convierten implícitamente en canales "con memoria" (aunque originalmente sean discretos sin memoria), y las capacidades de los canales con memoria generalmente son difíciles de caracterizar con una sola letra.

Lo anterior no quiere decir que sea imposible encontrar caracterizaciones simples de las capacidades; lo que falta son herramientas y métodos nuevos.

Una técnica interesante que difiere un poco de las anteriores fue propuesta por Han en [46] para canales de dos direcciones.

---

## REFERENCIAS

---

- [1] C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication," *Bell Syst. Tech. J.*, vol.27, pp.379-423 and 623-656, July and Oct. 1948. Reprinted in *Key Papers in the Development of Information Theory*, New York: IEEE Press, 1974.
- [2] E. C. van der Meulen, "A survey of multi-way channels in information theory: 1961-1976," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.IT-23, pp.1-37, Jan. 1977.
- [3] A. El Gamal and T. M. Cover, "Multiple user information theory," *Proc. IEEE*, vol.68, pp.1466-1483, Dec. 1980.
- [4] R. G. Gallager, "A perspective on multiaccess channel," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.IT-31, pp.124-142, Mar. 1985.
- [5] C. E. Shannon, "Two-way communication channels," *Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Statist. and Prob.*, vol.1, pp.611-644, 1961. Reprinted in *Key Papers in the Development of Information Theory*, New York: IEEE Press, 1974.
- [6] R. Ahlswede, "Multi-way communication channels," in *Proc. 2nd Int. Symp. Inform. Theory*, Tsahkadsor, Armenian S.S.R., 1971, pp.23-52. Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, 1973.
- [7] H. Liao, "A coding theorem for multiple access communications," presented at *Int. Symp. on Inform. Theory*, Asilomar, 1972. Also *Ph.D. dissertation*, "Multiple Access Channels," Dept. of Elec. Eng., University of Hawaii, 1972.
- [8] M. L. Ulrey, "The capacity region of a channel with  $s$  senders and  $r$  receivers," *Inform. Contr.*, vol.29, pp.185-203, 1975.
- [9] T. M. Cover, "Some advances in broadcast channels," in *Advances in Communication Systems*, vol.4, New York: Academic Press, pp.229-260, 1975.

- [10] A. D. Wyner, "Recent results in the Shannon theory," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-20, pp.2-10, Jan. 1974.
- [11] C. E. Shannon, "The zero error capacity of a noisy channel," *IRE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-2, pp.8-19, Sept. 1956. Reprinted in *Key Papers in the Development of Information Theory*, New York: IEEE Press, 1974.
- [12] R. L. Dobrushin, "Information transmission in a channel with feedback," *Theory of Prob. and Appl.*, vol.34, pp.367-383, Dec. 1958. Reprinted in *Key Papers in the Development of Information Theory*, New York: IEEE Press, 1974.
- [13] N. T. Gaarder and J.K. Wolf, "The capacity region of a multiple-access discrete memoryless channel can increase with feedback," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-21, pp.100-102, Jan. 1975.
- [14] T. M. Cover and S.K. Leung, "An achievable rate region for the multiple-access channel with feedback," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-27, pp.292-298, May 1981.
- [15] G. Dueck, "Semi-feedback for multi-user channels," *Manuscript*, Universitat Bielefeld, Apr. 1979.
- [16] A.B. Carleial, "Multiple-access channels with different generalized feedback signals," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-28, pp.841-850, Nov. 1982.
- [17] F.M.J. Willems and E.C. van der Meulen, "Partial feedback for the discrete memoryless multiple access channel," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-29, pp.287-290, Mar. 1983.
- [18] F.M.J. Willems, "The feedback capacity region of a class of discrete memoryless multiple access channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-28, pp.93-95, Jan. 1982.
- [19] R. King, "Multiple-access channels with generalized feedback," *Inform. Syst. Lab.*, Stanford Univ., Stanford, CA, *Tech. Rep.* 6152-1, Mar. 1978.
- [20] F.M.J. Willems, E.C. van der Meulen, and J.P.M. Schalkwijk, "An achievable rate region for the multiple access channel with generalized feedback," *Proc. 21st Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing*, pp.284-292, Oct. 1983.

- [21] L. H. Ozarow, "The capacity of the white Gaussian multiple access channel with feedback," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.IT-30, pp.623-629, July 1984.
- [22] D. Slepian and J.K. Wolf, "A coding theorem for multiple access channels with correlated sources," *Bell Syst. Tech. J.*, vol.52, pp.1037-1076, Sept. 1973.
- [23] T.M. Cover, A. El Gamal, and M. Salehi, "Multiple access channels with arbitrary correlated sources," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.IT-26, pp.648-657, Nov. 1980.
- [24] F.M.J. Willems and E.C. van der Meulen, "The discrete memoryless multiple-access channel with cribbing encoders," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.IT-31, pp.313-327, May 1985.
- [25] T.M. Cover, R.J. McEliece, and E.C. Posner, "Asynchronous multiple-access channel capacity," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.IT-27, pp.409-413, July 1981.
- [26] J.Y.N. Hui and Humblet, "The capacity region of the totally asynchronous multiple access channel," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.IT-31, Mar. 1985.
- [27] G. Sh. Poltyrev, "Coding in an asynchronous multiple-access channel," *Problemy Peredachi Informatsii*, pp.12-21, July-Sept., 1983.
- [28] U. Grenander and G. Szegő, *Toeplitz Forms and Their Applications*. New York: Chelsea, 1984.
- [29] I. M. Gelfand and A. M. Yaglom, "Calculation of the amount of information about a random function contained in another such function," *Usp. Mat. Nauk*, 12, no.1, pp.3-52, 1957.
- [30] T. M. Cover, "Broadcast channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.IT-18, pp.2-14, Jan. 1972. Reprinted in *Key Papers in the Development of Information Theory*, New York: IEEE Press, 1974.
- [31] I. Csiszár and J. Körner, *Information theory: coding theorems for discrete memoryless systems*. New York: Academic, 1981.

- [32] T. M. Cover, "An achievable rate region for the broadcast channel," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.IT-21, pp.399-404, July 1975.
- [33] R. G. Gallager, *Information theory and reliable communication*. New York: Wiley, 1968.
- [34] T. M. Cover and A. El Gamal, "Capacity theorems for the relay channel," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.IT-25, pp.572-584, Sept. 1979.
- [35] A. B. Carlela, "On the capacity of multiple-terminal communication networks," *Tech. Rep. 6603-1*, Information System Lab., Center for Systems Research, Stanford Univ., Stanford, CA, Aug. 1975.
- [36] T. S. Han and K. Kobayashi, "A new achievable rate region for the interference channel," *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol.IT-27, pp.49-60, Jan. 1981.
- [37] R. Ahlswede and J. Körner, "Source coding with side information and a converse for degraded broadcast channels," *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol.IT-21, pp.629-637, Nov. 1975.
- [38] E.C. van der Meulen, "Three-terminal communication channels," *Adv. Appl. Prob.*, vol.3, pp.120-154, 1971.
- [39] D. Bertsekas and R. G. Gallager, *Data networks*. Prentice-Hall, Inc., 1987.
- [40] N. M. Blachman, "The convolution inequality for entropy powers," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.IT-11, pp.267-271, Apr. 1965.
- [41] W. Hirt and J. L. Massey, "Capacity of the discrete-time gaussian channel with intersymbol interference," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.IT-34, pp.380-388, May 1988.
- [42] A. Khinchine, *Mathematical foundations of information theory*, New York: Dover, 1957.
- [43] L.H.Ozarow, A.D.Wyner, and J.Ziv, "Achievable rates for a constrained gaussian channel," *IEEE Trans. Info. Theory*, vol.IT-34, pp.356-370, May 1988.
- [44] A.J. Viterbi and J.K. Omura, *Principle of digital communication and coding*. McGraw-Hill, 1979.

- [45] R. E. Blahut, *Principles and Practice of Information Theory*, Addison-Wesley, 1987.
- [46] T. S. Han, "A general coding scheme for the two-way channel," *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol.IT-30, pp.35-44, Jan. 1984.
- [47] C.-M. Zeng, F. Kuhlmann and A. Buzo, "New achievable rate region for a class of MAC with different generalized feedback," presented at 1988 *IEEE International Symposium on Information Theory*, Kobe, Japan, June 19-24, 1988, pp.82 of "Abstract of Papers".
- [48] C.-M. Zeng, F. Kuhlmann and A. Buzo, "Multiple-access channels with relay," presented at 1988 *IEEE International Symposium on Information Theory*, Kobe, Japan, June 19-24, 1988, pp.81 of "Abstract of Papers".
- [49] C.-M. Zeng, F. Kuhlmann and A. Buzo, "Achievability proof of some multi-user channel coding theorems using backward decoding," *IEEE Trans. on Inform. Theory*, to appear.
- [50] N. He, C.-M. Zeng and F. Kuhlmann, "Discrete-time Gaussian multiple access channel with constrained inputs," submitted to *IEEE Trans. on Inform. Theory*, Dec. 1988.
- [51] C.-M. Zeng, N. He and F. Kuhlmann, "Constrained continuous-time Gaussian multiple access channels," submitted to *IEEE Trans. on Inform. Theory*, Jan. 1989.
- [52] J.P.M. Schalkwijk and T. Kailath, "A coding scheme for additive noise channels with feedback- Part I: No bandwidth constraint," *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol.IT-12, pp.172-182, April 1966.
- [53] J.P.M. Schalkwijk, "A coding scheme for additive noise channels with feedback- Part II: Band-limited signals," *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol.IT-12, pp.183-189, April 1966.
- [54] C. Keilers, "The capacity of the spectral Gaussian multiple-access channel," Ph.D. dissertation, Dep. Elec. Eng., Stanford Univ., Stanford, CA, April 1976.