

26 y



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

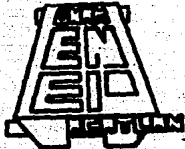
Escuela Nacional de Estudios Profesionales
" A C A T L A N "

" DISTRIBUCION DEL VALOR EXTREMO COMO MODELO DE FALLA "

T E S I S

Que para obtener el título de:
**LICENCIADO EN MATEMATICAS
APLICADAS Y COMPUTACION**

P R E S E N T A N:
OLIVARES PRADO ANA CELIA
PEREZ RAMIREZ ROSA



Santa Cruz Acatlán, Edo. de Méx.

1989

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

	Introducción	
Capítulo 1	Conceptos y Medidas de Confiabilidad	
	1 Antecedentes	.. 1
	2 Conceptos y medidas de Confiabilidad	.. 2
	3 Confiabilidad de Sistemas	.. 8
Capítulo 2	Teoría del Valor Extremo	
	1 Antecedentes	..13
	2 Teoría de Extremos	..14
	3 Distribuciones Asintóticas de Extremos	..16
	4 Aplicaciones	..22
Capítulo 3	Distribución del Valor Extremo como Modelo de Falla	
	1 Modelo de Falla	..24
	2 Distribución del Valor Extremo como Modelo de Falla	..25

Capítulo 4	Estimación de Parámetros	
	1 Conceptos	.. 40
	2 Estimación de Parámetros por Máxima Verosimilitud	.. 47
	3 Estimación de Parámetros por el Método de Momentos	.. 51
	4 Estimación de Parámetros por Regresión Lineal	.. 61
Capítulo 5	Simulación del Modelo de Gumbel	
	1 Descripción del problema de interés	.. 68
	2 Modelo específico. Alternativas de solución	.. 74
	Conclusiones	
	Bibliografía	
	Apéndice	

INTRODUCCION

La formulación de un modelo que represente un problema real, se hace de acuerdo a un intervalo confiable de solución de dicho problema, utilizando la teoría estadística, sin embargo, la Teoría de la Confiabilidad trata de determinar cuando fallará dicho sistema, para disminuir esta posibilidad.

La Teoría de la Confiabilidad es relativamente nueva. Surge en la primera mitad del siglo XX, pero no ha tenido una difusión tan amplia como la que han tenido la Investigación de Operaciones y la computación. Es hasta esta década cuando se ha incrementado el conocimiento de esta área de las matemáticas, cabe agregar que esto se debe en parte al auge de la computación que facilita los cálculos onerosos.

Se sabe que las fallas de un sistema se rigen por una función de probabilidad, con la cual se puede formular un Modelo de Falla para el sistema en estudio. Entre las diferentes distribuciones de probabilidad que se utilizan para la determinación de dichos modelos se encuentra la llamada "Distribución del Valor Extremo o de Gumbel", y es esta distribución la que es presentada para

estudiarla por sus singulares aplicaciones.

El objetivo de esta tesis es formular y analizar la Distribución del Valor Extremo; estimar numericamente sus parámetros y aplicarla en Teoría de la Confiabilidad como un Modelo de Falla, y su contenido se puede describir brevemente de la siguiente forma:

El Capítulo I está formado por un conjunto de conceptos que forman parte de la Teoría de la Confiabilidad, tales como: Función de Confiabilidad, Tasa de Azar, Tasa de Falla, Tiempo Medio entre Fallas, Función de Estructura en Serie y en Paralelo.

El Capítulo II presenta dos aspectos principales: primero, la Teoría del Valor extremo, en qué consiste y cómo surge y segundo, las distribuciones que integran la familia de Distribuciones Extremas; dentro de esta, los Teoremas de Gnedenko que fundamentan a cada una de ellas, ayudados por el concepto de Dominios de Atracción también enunciado por Gnedenko.

En el Capítulo III se presentan los conceptos introducidos en el Capítulo I, aplicados a la familia de Distribuciones Extremas; se define el concepto de Modelo de Falla y se enuncia un Modelo de Falla utilizando la Distribución del Valor Extremo; se enumeran también, algunas de las posibles aplicaciones de la Teoría de Extremos.

A través del Capítulo IV se establecen las ecuaciones para determinar los parámetros de la familia de Distribuciones Exponenciales por los Métodos de Momentos y Máxima Verosimilitud, que son los métodos de estimación puntual más conocidos; se determinan las transformaciones que se deben aplicar a cada una de las Distribuciones Exponenciales, para que estas queden expresadas en forma lineal y poder así utilizar Regresión Lineal para estimar los parámetros.

Finalmente, el Capítulo V es la presentación de un Modelo de Falla en el área de Ingeniería, en donde se presentan dos estructuras simples, cuyo diseño es por viento, y utilizando Análisis Estructural, se determina la posible falla en la estructura; definiendo falla como el momento en que la resistencia en un punto determinado, sea menor que la carga asignada en ese punto.

Durante el desarrollo de este trabajo, se encontraron muchas perspectivas de aplicación, algunas de ellas se mencionan en las conclusiones.

... YO NO SE NADA ES VERDAD.
TAN SOLO DIJO LO QUE HE VISTO...
LEON FELIPE.

CAPITULO 1

Conceptos y Medidas de Confiabilidad.

1. ANTECEDENTES

El campo de la confiabilidad es de origen reciente. Con el crecimiento de la manufactura y el uso creciente de sofisticado equipo mecánico, eléctrico y electrónico durante este siglo, surge la necesidad de utilizar técnicas más precisas para determinar la confiabilidad de dichos equipos.

Hasta antes de 1940, la mayoría de las investigaciones que ahora conciernen a la Teoría de la Confiabilidad, se enfocaban al control de calidad y a problemas de mantenimiento de máquinas.

Al final de los 30's y durante los 40's comienzan a aparecer las familias de distribuciones paramétricas que podrían usarse como: "Modelos de Tiempo de Vida". Algunas de estas son: La Distribución del Valor Extremo (Gumbel 1955) y la Distribución Weibull (1939).

Es hasta la Segunda Guerra Mundial, impulsada por el surgimiento de equipo más complejo en la milicia, cuando la

Confiabilidad es identificada como un campo específico. Al principio de los 50's florece la Confiabilidad en Ingeniería, varios grupos comienzan estudios formales sobre las probabilidades de confiabilidad, lo que ha tenido un efecto duradero en el tratamiento estadístico del área.

La mayoría de los trabajos estadísticos en confiabilidad se han enfocado al tiempo de vida de piezas de equipo o sistemas, en un principio, estos trabajos tendieron a usar métodos actuariales. Se hace necesario entonces definir el concepto de Confiabilidad.

2. CONCEPTOS Y MEDIDAS DE CONFIABILIDAD

La palabra CONFIABILIDAD significa la probabilidad de que un dispositivo o sistema funcione adecuadamente, bajo condiciones específicas en un intervalo de tiempo $(0, t]$.

Como los dispositivos o sistemas pueden tener diferentes objetivos, se definen diferentes medidas de Confiabilidad.

2.1 FUNCION DE CONFIABILIDAD.

Sea T una variable aleatoria que denota el tiempo de falla de un sistema, donde

$f(t)$ denota la función de probabilidad de T

$F(t)$ la función acumulativa.

La Probabilidad de Falla para una función de tiempo se define como:

$$PCT(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau = F(t) \quad (1.1)$$

entonces, la Función de Confiabilidad se define como:

$$R(t) = PCT > t) = \int_t^{\infty} f(\tau) d\tau = 1 - F(t) \quad (1.2)$$

que representa la probabilidad de que el sistema funcione adecuadamente al menos hasta el tiempo t .

$R(t)$ tiene las siguientes propiedades:

$$\lim_{t \rightarrow 0} R(t) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0$$

2.2 TASA DE FALLA

La tasa de falla se define como la probabilidad de que ocurra una falla por unidad de tiempo en el intervalo $[t_1, t_2]$, dado que la falla no ocurrió antes de t_1 , matemáticamente:

$$r(t_1, t_2) = \frac{R(t_1) - R(t_2)}{R(t_1) \cdot (t_2 - t_1)} \quad (1.3)$$

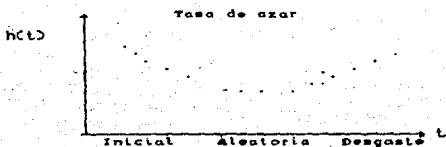
2.3 TASA DE AZAR

La tasa de azar es el límite de la tasa de falla, cuando t_2 tiende a t_1 , también se conoce como fuerza de mortalidad o función de intensidad, matemáticamente:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t) - R(t+\Delta t)}{R(t)\Delta t} = \frac{1}{R(t)} \left[\frac{-dR(t)}{dt} \right] = \frac{F'(t)}{1 - F(t)}$$
$$= \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad (1.4)$$

En la tasa de azar típica se distinguen tres regiones:

- i) Región de Falla Inicial que se caracteriza por una tasa de falla decreciente.
- ii) Región de Falla Aleatoria que se caracteriza por una tasa de falla casi constante.
- iii) Región de Falla de Desgaste que se caracteriza por un incremento en la tasa de falla, resultado del deterioro del equipo.



2.4 TIEMPO MEDIO PARA FALLAS (MTTF)

Es la esperanza matemática del tiempo para fallar de un sistema o vida esperada, y se define como:

$$E(t) = \int_0^{\infty} t f(t) dt \quad (1.5)$$

como $f(t) = R'(t)$ y $F(t) = 1 - R(t)$, además $F'(t) = -R'(t)$

entonces $f(t) = -R'(t)$, por lo que la expresión 1.5 se convierte en:

$$E(t) = - \int_0^{\infty} t R'(t) dt$$

integrando por partes

$u = t$, $du = dt$ y $dv = R'(t)$, $v = R(t)$, luego

$$E(t) = - tR(t) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} R(t) dt$$

utilizando las propiedades de $R(t)$ al evaluar la primera parte del segundo miembro, se tiene que esta es igual a cero, de esta forma

$$E(t) = \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (1.6)$$

2.5 TIEMPO MEDIO ENTRE FALLAS (MTBF)

En algunos casos, especialmente cuando se analiza la vida útil de partes electrónicas y sistemas complejos, donde la tasa de falla es aproximadamente constante, es común utilizar el Tiempo Medio entre Fallas, más que la confiabilidad.

Sean e el Tiempo Medio entre Fallas

λ la Tasa constante de Falla

entonces $e = \frac{1}{\lambda}$ (1.7)

Para ilustrar el concepto anterior, supongase un elemento particular, que tiene una tasa de falla constante de 0.002 por hora; si se desea realizar una prueba a este elemento, con el fin de reemplazarlo cada vez que falle, se espera que esto ocurra dos veces cada mil horas en promedio, i.e., una vez por quinientas horas, por lo tanto,

$$MTBF = e = \frac{1}{0.002} = 500 \text{ hrs.}$$

2.6 MEDIDAS DE CONFIABILIDAD EN PRUEBAS DE VIDA

Si se llevan a cabo pruebas de vida de diferentes partes de un equipo, a los resultados obtenidos se les conoce como Datos de Vida, esto es, N piezas del equipo se ponen en operación simulando su uso verdadero y se registra el tiempo de falla de cada una de dichas piezas.

Sea $n(t)$ el número de piezas del equipo que siguen funcionando en el tiempo t ; la Tasa de Falla se expresa como:

$$r(t) = -\frac{dn(t)}{dt} \quad (1.8)$$

De acuerdo con los conceptos de probabilidad, la Función de Confiabilidad, queda expresada por

$$R(t) = \frac{N_f(t)}{N} \quad (1.8)$$

que representa el número de casos favorables entre el número de casos posibles.

La Tasa de Azar mide la tasa promedio a la cual una sola pieza del equipo va a fallar y se define como

$$h(t) = \frac{r(t)}{n(t)} \quad (1.10)$$

$h(t)$ puede expresarse en términos de $R(t)$ y $F(t)$ haciendo el siguiente desarrollo:

Utilizando las expresiones 1.2 y 1.9 se tiene que $n(t) = N(1 - F(t))$, sustituyendo en la expresión 1.8, se tiene que

$$r(t) = \frac{d}{dt} [N(1 - F(t))] = -NF'(t) = -Nf(t)$$

sustituyendo $r(t)$ y $n(t)$ en 1.10, entonces

$$h(t) = \frac{-Nf(t)}{N(1 - F(t))} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

integrando ambas partes de 0 a t

$$\int_0^t h(x) dx = \int_0^t \frac{f(x)}{1 - F(x)} dx$$

si $u = 1 - F(x)$ entonces

$$\int_0^1 h(t) dt = - \ln(1 - F(t)) \Big|_0^1 = - \ln(1 - F(1)) + \ln(1 - F(0))$$

$$= \ln \frac{1 - F(0)}{1 - F(1)}$$

aplicando exponencial

$$\Rightarrow \int_0^1 h(t) dt = \frac{1 - F(0)}{1 - F(1)} = \frac{1 - F(0)}{R(t)}$$

$$\Rightarrow - \int_0^1 h(t) dt = \frac{F(t)}{1 - F(0)}$$

como $F(0) = 0$, entonces

$$\Rightarrow - \int_0^1 h(t) dt = R(t) \tag{1.11}$$

2. CONFIABILIDAD DE SISTEMAS

La definición de Confiabilidad dada anteriormente se encuentra en forma general, por lo que para hablar de Confiabilidad de Sistemas hay que particularizar tal definición, ya que de no hacerlo, el estudio teórico sería muy complicado; para facilitar, se formulan las siguientes hipótesis:

H₁) Los sistemas solo tienen dos posibles estados:

1) Que el sistema funcione bien.

2) Que el sistema falle.

H₂) El sistema puede descomponerse en n componentes, de tal forma que:

- Cada componente, en un instante dado, está en buen estado o ha fallado; el estado del sistema depende solo del estado del conjunto de sus componentes.

H₃) Cada componente, e_i , $i = 1, \dots, n$ del sistema tiene un tiempo de vida aleatorio t_i , i.e., está en buen estado en el intervalo $[0, t_i)$ y ha fallado después del instante t_i .

H₄) Las variables aleatorias t_i son independientes.

Formalmente la Confiabilidad de un Sistema puede definirse como:

"La Confiabilidad de un Sistema que satisface las hipótesis H₁, H₂, H₃ y H₄, es la probabilidad de que dicho sistema, esté continuamente en buen estado en el intervalo $[0, t]$, donde t es un tiempo fijo".

Un sistema se puede representar por un diagrama de bloques, cada bloque simboliza una componente del sistema. El propósito del mismo es pasar flujo y cada bloque es un contacto de relé.

Existen dos prototipos de diagramas de bloques: cuando los componentes están en paralelo o en serie.

3.1 FUNCION DE ESTRUCTURA

Considere un sistema S compuesto de r componentes e_i los cuales tienen asociado cada uno, una variable de estado x_i tal que

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } e_i \text{ funciona} \\ 0 & \text{si } e_i \text{ falla} \end{cases}$$

y sea

$$y = \begin{cases} 1 & \text{si el sistema funciona} \\ 0 & \text{si el sistema falla} \end{cases}$$

Entonces y es una función de $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ se denota como:

$$y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_r)$$

Esta función se llama Función de Estructura del Sistema

3.1.1 Función de Estructura de Sistemas en Serie

Si se tiene un sistema en serie, la función de estructura asociada a tal sistema es:

$$y = f(x) = \prod_{i=1}^r x_i \quad (1.12)$$

Esta función corresponde a un sistema que funciona solamente si todos sus componentes funcionan.

3.1.2 Función de Estructura de un Sistema en Paralelo.

La función de estructura de un sistema en paralelo está dada por:

$$y = f(x) = 1 - \prod_{i=1}^r (1 - x_i) \quad (1.13)$$

que corresponde a un sistema que funciona bajo la condición de que al menos uno de sus componentes funcione.

3.2 FUNCIÓN DE CONFIABILIDAD

Sea $p_i = R_i(t)$ la probabilidad de que el componente e_i esté en buen estado en el instante t .

La función de estructura puede considerarse como una variable aleatoria, y su esperanza matemática es:

$$E\{f(x)\} = 1 \cdot P\{f(x)=1\} + 0 \cdot P\{f(x)=0\} = P\{f(x)=1\}$$

entonces $E\{f(x)\}$ es la función de confiabilidad del sistema.

Puesto que las x_i son independientes

$$\begin{aligned} E(x_1, \dots, x_r) &= E(x_1) \cdot E(x_2) \dots E(x_r) \\ &= P_1 \cdot P_2 \dots P_r \end{aligned} \quad (1.14)$$

Además $f(x)$ toma la forma de un polinomio, entonces se puede calcular $E(f(x))$ reemplazando x_i por P_i , es decir:

para un sistema en serie la Funcion de Confiabilidad es:

$$E(f(x)) = \prod_{i=1}^r P_i \quad (1.15)$$

Para un sistema en paralelo

$$E(f(x)) = 1 - \prod_{i=1}^r (1 - P_i) \quad (1.16)$$

...TENEMOS A NUESTRO ALCANCE
LOS MEDIOS DE AFRONTAR NUESTROS
PROBLEMAS EN FORMA EFECTIVA...
P. M. HAUSER.

CAPITULO 2

Teoría del Valor Extremo

1. ANTECEDENTES.

La Teoría del Valor Extremo y las Distribuciones del Valor Extremo, juegan un papel importante en la Estadística teórica y aplicada.

Los valores extremos están ligados a las probabilidades pequeñas, dada esta particularidad se puede mencionar la "ley de Poisson" como antecedente de la Teoría del Valor Extremo puesto que ésta trata de probabilidades pequeñas y da el número de eventos raros, mientras que la Teoría de Extremos considera su tamaño.

En 1925 Tippett calculó las probabilidades de los valores normales mayores para diferentes tamaños de muestras. El primer artículo basado en el concepto de un tipo de distribuciones iniciales diferentes a la Normal fue realizado por Fréchet (1927). También fue el primero en obtener la Distribución Asintótica para el mayor valor y mostró que los valores mayores

tomados de diferentes distribuciones iniciales, comparten una propiedad comun, que tienen una distribución asintótica comun. Introdujo el "postulado de estabilidad", de acuerdo al cual, la Distribucion del Valor Mayor, sería igual a una Distribución inicial, excepto por una transformación lineal.

Fisher y Tippet publicaron al año siguiente un artículo básico dentro de la Teoría de Valores Extremos. Usando el mismo "postulado de estabilidad" de Fréchet encontraron otras dos distribuciones asintóticas a las que encontró este, validas también para otros tipos iniciales.

En 1936 von Mises clasificó las distribuciones iniciales que poseen distribuciones asintóticas del mayor valor y dio condiciones suficientes bajo las cuales las tres distribuciones asintóticas son validas.

En 1943 Gnedenko dio las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de las mismas.

En 1948 G. Elving y Gumbel derivaron, casi al mismo tiempo las relaciones de la distribución asintótica del campo normal para ciertas funciones Bessel.

2. TEORIA DE EXTREMOS

Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de acuerdo a una función de

distribución $F(x)$ que se supone continua. La Teoría de Valores Extremos concierne a la distribución de menores y mayores valores de X_1, X_2, \dots, X_n ; i.e., si

$$X_{1:n} = \min (X_1, X_2, \dots, X_n) = X_{(1)}$$

y
$$X_{n:n} = \max (X_1, X_2, \dots, X_n) = X_{(n)}$$

entonces, conociendo $F(x)$ se puede decir algo acerca de:

$$L_n(x) = P (X_{(1)} \leq x)$$

y
$$H_n(x) = P (X_{(n)} \leq x)$$

Las variables aleatorias $X_{(1)}, X_{(n)}$ se conocen como valores extremos.

Así
$$L_n(x) = P(X_{(1)} \leq x) = 1 - P(X_{(1)} > x)$$

$$= 1 - P(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x)$$

i.e., la probabilidad de que el menor valor sea mayor que x es igual a la probabilidad de que todas las observaciones sean mayores que x ; por la independencia

$$L_n(x) = 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > x) = 1 - (1 - F(x))^n$$

puesto que las n observaciones tienen una distribución común $F(x)$.

Análogamente
$$H_n(x) = P(X_{(n)} \leq x) = (F(x))^n$$

Así, bajo independencia, cuando $F(x)$ está completamente especificada, se puede encontrar la distribución de $X_{(1)}$ y $X_{(n)}$.

pero generalmente no sucede esto, i.e., casi nunca se conoce la distribución inicial de $X_{(1)}$ y $X_{(n)}$. Es ahí la importancia de las distribuciones asintóticas, que permiten el cálculo de probabilidades de dichas variables, sin la necesidad de conocer su distribución inicial.

Por ejemplo, si $F(x)$ es una distribución exponencial con $\lambda > 0$, i.e., si $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ entonces $L_n(x) = 1 - e^{-n\lambda x}$.

Las distribuciones $L_n(x)$ y $H_n(x)$ cuando $n \rightarrow \infty$ se conocen como las "Distribuciones Asintóticas de Valores Extremos" y la Teoría asociada con su estudio se conoce como la "Teoría Asintótica de Extremos".

3. LAS DISTRIBUCIONES ASINTÓTICAS DE EXTREMOS

Una finalidad de la Teoría Asintótica de valores extremos es especificar las condiciones para las cuales existen las constantes $\alpha_n, \beta_n > 0$ y $\gamma_n, \delta_n > 0$ y determinar las funciones de distribuciones

límites $L(x)$ y $H(x)$ donde:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{X(n) - \alpha_n}{\beta_n} < x \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\alpha_n + \beta_n x) = L(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{X(n) - \gamma_n}{\delta_n} < x \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n(\gamma_n + \delta_n x) = H(x)$$

y las constantes $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ y δ_n se llaman constantes de Normalización.

Los estudios realizados por Gnedenko establecen que si

$$\left[\frac{X_{(n)} - \gamma_n}{\delta_n} \right]$$

tiene una distribución límite $H(x)$, entonces, $H(x)$ debe tener una de tres posibles formas y un resultado análogo también ocurre para

$$\left[\frac{X_{(1)} - \alpha_n}{\beta_n} \right]$$

La implicación inmediata de este resultado es que independientemente de la distribución asintótica de $X_{(n)}$, (si ésta existe) es una de tres formas posibles.

Así, la distribución de Valores Extremos es en algunos sentidos semejante a la distribución Normal para medias muestrales (Teorema del Límite Central).

Se pueden sintetizar los resultados de acuerdo con el siguiente Teorema (de Gnedenko).

Teorema 1

Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables independientes e idénticamente distribuidas con una función de distribución F , y sea $X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Supóngase que para algunas secuencias de constantes estandarizadas (γ_n) y $(\delta_n) > 0$ y algunas otras constantes $a \geq 0, b > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{X_{(n)} - \gamma_n}{\delta_n} \leq \frac{x - a}{b} \right] = H \left(\frac{x - a}{b} \right)$$

1 LA DEMOSTRACION DE ESTE TEOREMA SE ENCUENTRA EN LA REFERENCIA (GNEDKO)

para todos los puntos continuos de x donde $H(x)$ es una función de distribución no degenerada. Entonces, $H(x)$ puede pertenecer a uno de los siguientes "tres tipos de valores extremos"

Extremos Mayores

$$H^{(1)}\left(\frac{x-a}{b}\right) = \exp\{-\exp(-\frac{x-a}{b})\} \quad -\infty < x < \infty$$

$$H^{(2)}\left(\frac{x-a}{b}\right) = \begin{cases} 0 & x > a \\ \exp\left(-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{-\alpha}\right) & x \leq a, \alpha > 0 \end{cases}$$

$$H^{(3)}\left(\frac{x-a}{b}\right) = \begin{cases} 1 & x \geq a \\ \exp\left(-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{\alpha}\right) & x < a, \alpha > 0 \end{cases}$$

En las hipótesis del teorema anterior, existen ciertas secuencias $\{r_n\}$ y $\{s_n > 0\}$ que deben ser conocidas para determinar la distribución asintótica a la cual pertenece F .

Sin embargo, es posible determinar a cual tipo de distribución extrema pertenece F , basándose en un conocimiento limitado de F .

El siguiente teorema formaliza este hecho, y da condiciones necesarias y suficientes para ello, esto es

$$F \in \mathcal{D}(H^{(i)}, i = 1, 2, 3)$$

(éase F pertenece al dominio de atracción de $H^{(i)}, i = 1, 2, 3$).

Teorema

Sea $x_0 \leq \infty$ tal que $F(x_0) = 1$ y $F(x) < 1 \quad \forall x < x_0$ entonces

a) $F \in \mathcal{D}(H^{(1)})$ si y sólo si existe una función continua $A(x)$ tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} A(x) = 0$ y tal que para toda h

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 - F(x(1 + hA(x)))}{1 - F(x)} = e^{-h}$$

b) $F \in \mathcal{D}(H^{(2)})$ si y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(x)}{1 - F(kx)} = k^\alpha$$

para cada $k > 0$ y $\alpha > 0$

c) $F \in \mathcal{D}(H^{(3)})$ si y sólo si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - F(x_0 - kh)}{1 - F(x_0 - h)} = k^\alpha$$

para cada $k > 0$ y $\alpha > 0$.

Una propiedad que muestran las distribuciones extremas es que $H^{(i)}(\cdot)$, $i = 1, 2, 3$ pertenecen a su propio dominio de atracción, i.e. $H^{(i)} \in \mathcal{D}(H^{(i)})$ $i = 1, 2, 3$

Análogamente a los tres tipos de valores extremos para los valores mayores, dados en el primer teorema, se tienen tres tipos de valores extremos para valores menores X_n . Esto es, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{X_{(n)} - a_n}{\beta_n} \leq \frac{x - a}{b} \right] = L \left(\frac{x - a}{b} \right)$$

entonces $L(\cdot)$ debe pertenecer a uno de los siguientes tipos

Extremos Menores

$$L^{(1)}\left(\frac{x-a}{b}\right) = 1 - \exp(-\exp(\frac{x-a}{b})) \quad -\infty < x < \infty$$

$$L^{(2)}\left(\frac{x-a}{b}\right) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 - \exp(-(\frac{x-a}{b})^\alpha) & x \geq a, \alpha > 0 \end{cases}$$

$$L^{(3)}\left(\frac{x-a}{b}\right) = \begin{cases} 1 & x \geq a \\ 1 - \exp(-(\frac{x-a}{b})^{-\alpha}) & x < a, \alpha > 0 \end{cases}$$

Análogamente para los extremos menores, se puede determinar a cual tipo de distribución extrema pertenece F.

Sea $x_0 \geq -\infty$ tal que $F(x_0) = 0$ y $F(x) > 0 \quad \forall x > x_0$ entonces

a) $F \in \mathcal{D}(L^{(1)})$ si y sólo si existe una función continua $AC(x)$ tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} AC(x) = 0$ y tal que para toda h

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x(1+hAC(x)))}{F(x)} = e^h$$

b) $F \in \mathcal{D}(L^{(2)})$ si y sólo si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 - kh)}{F(x_0 - h)} = k^{-\alpha}$$

para cada $k > 0$ y $\alpha > 0$.

c) $F \in \mathcal{D}(L^{(3)})$ si y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{F(kx)} = k^{-\alpha}$$

para cada $k > 0$ y $\alpha > 0$

Las funciones de densidad de probabilidad para esta familia de distribuciones extremas son:

a) Mayores

$$H^{(1)}\left(\frac{x-a}{b}\right) = \frac{1}{b} \exp\left(-\frac{x-a}{b}\right) - \exp\left(-\frac{x-a}{b}\right) \quad -\infty < x < \infty$$

$$H^{(2)}\left(\frac{x-a}{b}\right) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{\alpha}{b} \exp\left(-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{-\alpha}\right) \left(\frac{x-a}{b}\right)^{-\alpha-1} & x \geq a, \alpha > 0 \end{cases}$$

$$H^{(3)}\left(\frac{x-a}{b}\right) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{\alpha}{b} \exp\left(-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{\alpha}\right) \left(\frac{x-a}{b}\right)^{\alpha-1} & x \geq a, \alpha > 0 \end{cases}$$

b) Menores

$$L^{(1)}\left(\frac{x-a}{b}\right) = \frac{1}{b} \exp\left(\frac{x-a}{b}\right) - \exp\left(\frac{x-a}{b}\right) \quad -\infty < x < \infty$$

$$L^{(2)}\left(\frac{x-a}{b}\right) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{\alpha}{b} \exp\left(-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{\alpha}\right) \left(\frac{x-a}{b}\right)^{\alpha-1} & x \geq a, \alpha > 0 \end{cases}$$

$$L^{(3)}\left(\frac{x-a}{b}\right) = \begin{cases} 0 & x \geq a \\ \frac{\alpha}{b} \exp\left(-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{-\alpha}\right) \left(\frac{x-a}{b}\right)^{-\alpha-1} & x \leq 0, \alpha > 0 \end{cases}$$

4. APLICACIONES

La distribución del valor extremo se ha utilizado en el estudio de resistencia de materiales, la ocurrencia de desbordamientos y sequías, la confiabilidad de sistemas complejos y en el análisis y evaluación de los niveles de contaminación del aire, entre otras cosas.

La distribución del tipo I para extremos mayores, puede describir las alturas extremas de ondas marítimas.

La distribución del tipo II, puede describir fenómenos extremos tales como la intensidad de terremotos, la velocidad de vientos y la precipitación pluvial.

La distribución del tipo III describe la fuerza de cuerpos metálicos y no metálicos y tiempos de falla para el caso en que el tiempo depende de la intensidad de fatiga.

Otras aplicaciones de la distribución del valor extremo se originan en el estudio de lo que conocemos como "records", especialmente lo que concierne al "rompimiento de records".

Para dar una justificación del por qué de las v.a. X_u y X_m y el interés de sus funciones de distribución considérense las siguientes situaciones:

1) Considere una cadena hecha de n ligas o eslabones. La cadena se rompe cuando cualquiera de los eslabones se rompe, si el primer eslabón se rompe, éste es el eslabón más débil, el cual tiene una resistencia menor, por lo tanto se asume que la resistencia del

i -ésimo eslabón X_i , donde $i = 1, 2, \dots, n$, es una v.a. con una función de distribución $F(x)$. Desde el momento en que el eslabón se rompe, esto es, el eslabón más débil falla, la resistencia de la cadena es por consiguiente descrita como una v.a.

$$X_{(n)} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

y entonces podemos aplicar algunas de las tres distribuciones de extremos para valores menores.

2) Considérese un sistema biológico o un sistema de ingeniería, los cuales constan de n componentes idénticos, todos pueden funcionar simultáneamente; por ejemplo, un gran aeroplano puede contener cuatro motores, los cuales pueden funcionar simultáneamente o del sistema respiratorio humano, el cual consiste de dos pulmones idénticos.

El sistema funciona como funcionen cualesquiera de sus componentes, tales sistemas son sistemas en paralelo y ocurren frecuentemente en la práctica.

Supóngase que el tiempo de falla del i -ésimo componente X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ es una v.a. con una función de distribución $F(x)$. Desde que el sistema falla al tiempo de falla del último componente; la longitud de vida del sistema está descrita por una v.a. $X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, la cual se distribuye siguiendo alguna de las tres funciones del valor mayor.

... CREES. A PESAR DE TU DOLOR,
PORQUE SABES QUE DIOS ESTA
CONTIGO...

ANONIMO

CAPITULO 3

Distribucion del Valor Extremo como Modelo de Falla

1. MODELOS DE FALLA

Un Modelo de Falla representa una tentativa para describir matematicamente la longitud de vida de un material, una estructura o un dispositivo.

Actualmente, no es posible aislar las causas fisicas que pueden ser responsables de una falla y explicar cuantitativamente cada una de ellas, lo que trae como consecuencia dificultades en la eleccion de un Modelo de Falla.

En vista de tales dificultades, la tasa de azar nos ayuda a distinguir entre las diferentes funciones de probabilidad que podrian representar al sistema en estudio, puesto que presenta características especiales en cada distribución de probabilidad. por ejemplo, en la exponencial, la tasa de azar es constante a través del tiempo, en la lognormal, semeja una campana de Gauss. Si se tienen datos de vida, se puede graficar la tasa de azar, y de acuerdo a sus características, determinar que distribución

podría adecuarse como Modelo de Falla.

Otra alternativa para facilitar la determinación de la distribución es cualesquiera de los siguientes puntos:

(j) Utilizar los conocimientos de Ingeniería

Por lo general, es la Ingeniería el área de aplicación de la Confiabilidad y son los ingenieros quienes están más familiarizados con el sistema en estudio. De ahí que sean ellos los que pueden indicar la frecuencia de las fallas.

(k) Aplicar Pruebas de Bondad de Ajuste.

Dados unos datos de vida, se puede suponer que siguen una cierta distribución, ajustar luego a éstos la distribución hipotética y hacer una prueba estadística para ver la bondad de tal ajuste.

2. DISTRIBUCIONES DEL VALOR EXTREMO COMO MODELOS DE FALLA.

Las distribuciones del Valor Extremo, a menudo se usan como Modelos de Falla para sistemas en Serie y en Paralelo, y en casos donde la falla es debido a procesos corrosivos. En general, su aplicabilidad puede justificarse cuando el fenómeno causante de la falla, depende del mayor o menor valor de una variable.

2.1 DESCRIPCION DE LAS MEDIDAS DE CONFIABILIDAD PARA LAS DISTRIBUCIONES DEL VALOR EXTREMO.

Los conceptos y Medidas dados en el capítulo 1. se obtendrán ahora para las seis distribuciones que conforman la familia de Distribuciones Extremas, y dadas las peculiares formas que toman, las diferentes expresiones se analizarán las parejas de cada tipo para los extremos menores y mayores respectivamente.

TIPO I

(1) Probabilidad de Falla

$$L_{(1)} = F(t) = 1 - \exp\left\{-\exp\left(\frac{t-a}{b}\right)\right\} \quad (3.1)$$

para el extremo menor, y

$$H_{(1)} = F(t) = \exp\left\{-\exp\left(\frac{t-a}{b}\right)\right\} \quad (3.2)$$

para el extremo mayor

i.e., la probabilidad de falla como función del tiempo con $-\infty < t < \infty$, se obtiene sustituyendo la variable t en la Función Acumulativa de Probabilidad.

(2) Función de Confiabilidad.

$R(t)$ que denota la función de Confiabilidad en el tiempo t , se define como:

$$R(t) = 1 - F(t)$$

así, para el extremo menor se tiene:

$$R(t) = R_{11} = 1 - [1 - \exp\left\{-\exp\left(\frac{t-a}{b}\right)\right\}]$$

$$= \exp\left(-\exp\left(\frac{t-a}{b}\right)\right) \quad (3.3)$$

y para el extremo mayor es:

$$R(t) = R_{un} = 1 - \left[\exp\left(-\exp\left(\frac{t-a}{b}\right)\right)\right] \quad (3.4)$$

Observando las expresiones (3.1) y (3.4) con (3.2) y (3.3), se tiene que la probabilidad de falla para el extremo menor (mayor), se parece a la función de Confiabilidad para el extremo mayor (menor), con la diferencia de signo para la variable aleatoria t , esto es:

$$\min\{\max\}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max\{\min\}(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$$

ya que la Teoría de los Valores Extremos mínimos es idéntica para los valores extremos máximos y viceversa.

(ii) Tasa de Falla

$r(t_1, t_2)$ denota la probabilidad de que ocurra una falla por unidad de tiempo y se define como:

$$r(t_1, t_2) = \left[\frac{R(t_1) - R(t_2)}{t_2 - t_1} \right] \frac{1}{(t_2 - t_1)}$$

Así, utilizando las expresiones (3.3) y (3.4) se tiene

$$r(t_1, t_2) = r_{1:1} \frac{\exp\left(-\exp\left(\frac{t_1-a}{b}\right)\right) - \exp\left(-\exp\left(\frac{t_2-a}{b}\right)\right)}{\exp\left(-\exp\left(\frac{t_1-a}{b}\right)\right)(t_2 - t_1)} \quad (3.5)$$

la anterior es la expresión (3.5) y es la tasa de falla para los extremos mínimos y

$$r(t_1, t_2) = r_{\text{m}} = \frac{\exp(-\exp(-\frac{t_2 - a}{b})) - \exp(-\exp(-\frac{t_1 - a}{b}))}{1 - \exp(-\exp(-\frac{t_1 - a}{b}))}(t_2 - t_1) \quad (3.6)$$

Que es la expresi3n (3.6) y representa la tasa de falla para los extremos m3ximos.

Esta medida permite obtener la Tasa de Azar, ya que es el l3mite de $r(t_1, t_2)$ cuando el $t_2 \rightarrow t_1$

iv) Tasa de Azar

Como se dijo anteriormente, la Tasa de Azar se deriva de la Tasa de Falla. As3

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)\Delta t} \right] = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

usando las correspondientes R_{m} y R_{m} , s3lo restar3a encontrar $L'_{(1)}$ y $H'_{(1)}$ para los extremos m3nimo y m3ximo, respectivamente.

$$\begin{aligned} L'_{(1)} = f(t) &= -\frac{1}{b} \exp(-\exp(-\frac{t - a}{b}))(-\exp(-\frac{t - a}{b})) \\ &= \frac{1}{b} \left[\exp(-\frac{t - a}{b}) - \exp(-\frac{t - a}{b}) \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}
 H'_{(a)} = f(t) &= \frac{1}{b} \exp(-\exp(-\frac{t-a}{b}))(-\exp(-\frac{t-a}{b})) \\
 &= \frac{1}{b} \left[\exp(-\frac{t-a}{b}) - \exp(-\frac{t-a}{b}) \right] \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

Usando las expresiones (3.3) y (3.7) se tiene la Tasa de Azar para el extremo mínimo.

$$\begin{aligned}
 h(t) = h_{\min} &= \frac{\frac{1}{b} \left[\exp(-\exp(-\frac{t-a}{b})) + (\frac{t-a}{b}) \right]}{\exp(-\exp(-\frac{t-a}{b}))} \\
 &= \frac{1}{b} \left[\exp(-\exp(-\frac{t-a}{b})) + (\frac{t-a}{b}) \right] \left[\exp(\exp(-\frac{t-a}{b})) \right] \\
 &= \frac{1}{b} \left[1 + \exp(\exp(-\frac{t-a}{b})) (\exp(-\frac{t-a}{b})) \right] \\
 &= \frac{1}{b} \left[1 + \exp(\frac{t-a}{b}) + \exp(\frac{t-a}{b}) \right] \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Usando las expresiones (3.4) y (3.8), se obtiene en forma análoga a la anterior, la tasa de azar para el extremo máximo.

$$h(t) = h_{\max} = \frac{\frac{1}{b} \left[\exp(-\frac{t-a}{b}) - \exp(-\frac{t-a}{b}) \right]}{\exp(-\exp(-\frac{t-a}{b}))} \quad (3.10)$$

v) Tiempo Medio para Fallar

La última medida a obtener es el tiempo medio para fallar (MTTF), que se define como:

$$E(t) = \int_0^{\infty} tR(t)dt = \int_0^t R(t)dt$$

La expresión a utilizar para las distribuciones de los extremos mínimo y máximo, respectivamente, son (3.7) y (3.8), entonces:

$$MTTF = \int_0^{\infty} \frac{1}{b} \left[\exp\left(-\exp\left(\frac{t-a}{b}\right)\right) + \left(\frac{t-a}{b}\right) \right] dt \quad (3.11)$$

para el extremo menor y

$$MTTF = \int_0^{\infty} \frac{1}{b} \left[\exp\left(-\exp\left(-\frac{t-a}{b}\right)\right) + \left(-\frac{t-a}{b}\right) \right] dt \quad (3.12)$$

para el extremo mayor.

Ambas expresiones son una misma para el valor de t y $-t$, y para el valor de a ; es precisamente esta similitud la que permitirá la estimación de los parámetros discutidos en el capítulo 4.

Tal como se procedió para la distribución del tipo I de los extremos mayores y menores, se hará para los tipos II y III.

HIPÓ II

(i) Probabilidad de Falla:

$$L_{1/2} = F(t) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\alpha}\right) \quad \text{para } t \geq a \text{ y } \alpha > 0 \quad (3.13)$$

para el mínimo y

$$H_{1/2} = F(t) = \exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^{-\alpha}\right) \quad \text{para } t \geq a \text{ y } \alpha < 0 \quad (3.14)$$

para el extremo máximo.

(ii) Función de Confiabilidad:

Para el extremo menor es:

$$\begin{aligned} R(t) = R_{21} &= 1 - \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\alpha}\right)\right) \\ &= \exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\alpha}\right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

y para el extremo mayor es:

$$R(t) = R_{22} = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^{-\alpha}\right) \quad (3.16)$$

nuevamente las expresiones (3.14) y (3.15), así como las expresiones (3.13) y (3.16), son las mismas excepto por el parámetro α , que posee signo diferente.

(ii) Tasa de Falla.

Para el extremo mínimo

$$\begin{aligned}
 r(t_1, t_2) &= r_{21} = \left[\frac{R2:n(t_2) - R2:n(t_1)}{R2:n(t_1)} \right] \frac{1}{(t_2 - t_1)} \\
 r_{21} &= \frac{\exp(-(\frac{t_1 - a}{b})^\alpha) - \exp(-(\frac{t_2 - a}{b})^\alpha)}{\exp(-(\frac{t_1 - a}{b})^\alpha)(t_2 - t_1)} \\
 &= \frac{[\exp(-(\frac{t_1 - a}{b})^\alpha) - \exp(-(\frac{t_2 - a}{b})^\alpha)] \exp(\frac{t_1 - a}{b} \alpha)}{(t_2 - t_1)} \\
 &= \frac{1 - \exp(-(\frac{t_2 - a}{b})^\alpha + (\frac{t_1 - a}{b})^\alpha)}{(t_2 - t_1)} \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

y para el extremo máximo

$$\begin{aligned}
 r(t_1, t_2) &= r_{2n} = \left[\frac{R2:n(t_2) - R2:n(t_1)}{R2:n(t_2)} \right] \frac{1}{(t_2 - t_1)} \\
 &= \frac{(1 - \exp(-(\frac{t_1 - a}{b})^\alpha)) - (1 - \exp(-(\frac{t_2 - a}{b})^\alpha))}{(1 - \exp(-(\frac{t_1 - a}{b})^\alpha))(t_2 - t_1)} \\
 &= \frac{\exp(-(\frac{t_2 - a}{b})^\alpha) - \exp(-(\frac{t_1 - a}{b})^\alpha)}{(1 - \exp(-(\frac{t_1 - a}{b})^\alpha))(t_2 - t_1)} \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

3.17 Tasa de Azar

Para la obtención de la Tasa de Azar de las distribuciones del tipo II es necesario obtener las derivadas de $L_{(2)}$ y $H_{(2)}$ de esta forma:

$$\begin{aligned} L'_{(2)} = f(t) &= -\exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^\alpha\right) \alpha \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{b}\right) \\ &= \frac{\alpha}{b} \left[\exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^\alpha\right) \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\alpha-1} \right] \quad (3.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H'_{(2)} = f(t) &= \exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^\alpha\right) \alpha \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{b}\right) \\ &= \frac{\alpha}{b} \left[\exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^\alpha\right) \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\alpha-1} \right] \quad (3.20) \end{aligned}$$

Así, usando las expresiones (3.15) y (3.19), se obtiene la tasa de azar para el extremo menor

$$\begin{aligned} h(t) = h_{2:n} &= \frac{\frac{\alpha}{b} \left[\exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^\alpha\right) \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\alpha-1} \right]}{\exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^\alpha\right)} \\ &= \frac{\alpha}{b} \left[\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\alpha-1} \right] \quad (3.21) \end{aligned}$$

De manera similar, utilizando las expresiones (3.16) y (3.20), se tiene la tasa de azar para el extremo mayor.

$$h(t) = h_{2:n} = \frac{\frac{\alpha}{b} \left[\exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^\alpha\right) \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\alpha-1} \right]}{1 - \exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^\alpha\right)} \quad (3.22)$$

La última medida a obtener para el par de distribuciones que forman el tipo II es

(2) El Tiempo Medio para Fallar

Para el extremo menor:

$$\begin{aligned} \text{MTTF} &= \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} t \left[\frac{\alpha}{B} \exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\alpha}\right) \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\alpha-1} \right] dt \\ &= \frac{\alpha}{B} \int_0^{\infty} t \left[\exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\alpha}\right) \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\alpha-1} \right] dt \end{aligned} \quad (3.23)$$

Utilizando la expresión (3.19). Para el extremo mayor se utiliza la expresión (3.20), con la que se obtiene:

$$\text{MTTF} = \int_0^{\infty} t \left[\frac{\alpha}{B} \exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^{-\alpha}\right) \left(\frac{t-a}{b}\right)^{-\alpha-1} \right] dt \quad (3.24)$$

Al igual que con las expresiones del tipo I, la expresión del Tiempo Medio para Fallar de este par de distribuciones, que conforman el tipo II, es la misma, la diferencia radica en el signo del parámetro α .

TIPO III

Ahora, solo faltan las medidas del par de distribuciones que conforman el tipo III; el procedimiento es exactamente el mismo que se utilizó para las parejas del tipo I y del tipo II.

(3) Probabilidad de Falla.

La probabilidad de Falla para el extremo menor es:

$$L_{(3)} = F(t) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^c\right) \quad \text{para } t \geq a \text{ y } t > 0 \quad (3.25)$$

y para el extremo mayor es:

$$H_{(3)} = F(t) = \exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^c\right) \quad \text{para } t \geq a \text{ y } t > 0 \quad (3.26)$$

(4) Funcion de Confiabilidad

Las correspondientes funciones de Confiabilidad para este tipo son:

$$\begin{aligned} R(t) = R_{s1} &= 1 - \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^c\right)\right) \\ &= \exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^c\right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} R(t) = R_{s2} &= 1 - \left(\exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^c\right)\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^c\right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Al igual que ha sucedido con las parejas de los tipos I y II, las expresiones que denotan la probabilidad de Falla se asemejan con las funciones de Confiabilidad, para estas ultimas las expresiones (3.25) y (3.26), así como las expresiones (3.25) y (3.27), son las mismas excepto por el signo de a .

(iii) Tasa de Falla.

$$r(t_1, t_2) = r_{fa} = \left[\frac{R_2:1(t_1) - R_2:1(t_2)}{R_2:1(t_1)} \right] \frac{1}{(t_2 - t_1)}$$

$$r_{fa} = \frac{\exp\left(-\left(\frac{t_1 - a}{b}\right)^{-\alpha}\right) - \exp\left(-\left(\frac{t_2 - a}{b}\right)^{-\alpha}\right)}{\exp\left(-\left(\frac{t_1 - a}{b}\right)^{-\alpha}\right)(t_2 - t_1)}$$

$$= \frac{1 - \exp\left[\left(\frac{t_2 - a}{b}\right)^{-\alpha} - \left(\frac{t_1 - a}{b}\right)^{-\alpha}\right]}{(t_2 - t_1)} \quad (3.29)$$

para el extremo menor

$$r(t_1, t_2) = r_{am} = \left[\frac{R_2:n(t_1) - R_2:n(t_2)}{R_2:n(t_1)} \right] \frac{1}{(t_2 - t_1)}$$

$$= \frac{(1 - \exp\left(-\left(\frac{t_1 - a}{b}\right)^\alpha\right)) - (1 - \exp\left(-\left(\frac{t_2 - a}{b}\right)^\alpha\right))}{(1 - \exp\left(-\left(\frac{t_1 - a}{b}\right)^\alpha\right))(t_2 - t_1)}$$

$$= \frac{\exp\left(-\left(\frac{t_2 - a}{b}\right)^\alpha\right) - \exp\left(-\left(\frac{t_1 - a}{b}\right)^\alpha\right)}{(1 - \exp\left(-\left(\frac{t_1 - a}{b}\right)^\alpha\right))(t_2 - t_1)} \quad (3.30)$$

para el extremo mayor

(iv) Tasa de Azar

Como se ha visto en el cálculo de la Tasa de Azar de las cuatro distribuciones anteriores, es necesario encontrar las

derivadas de las funciones de probabilidad, para que estas sean sustituidas en las expresiones correspondientes, así, se tiene que para el extremo menor

$$L'_{(a)} = f(t) = \frac{\alpha}{b} \left[\exp\left(-\frac{t-a}{b}\right) - \exp\left(-\frac{t-a}{b}\right) \right]^{-\alpha-1} \quad (3.31)$$

y para el extremo mayor

$$H'_{(b)} = f(t) = \frac{\alpha}{b} \left[\exp\left(-\frac{t-a}{b}\right) - \exp\left(-\frac{t-a}{b}\right) \right]^{-\alpha-1} \quad (3.32)$$

Con las expresiones (3.27) y (3.31), se obtiene la Tasa de Azar para el extremo menor del tipo III.

$$h(t) = h_{\text{min}} = \frac{\frac{\alpha}{b} \left[\exp\left(-\frac{t-a}{b}\right) - \exp\left(-\frac{t-a}{b}\right) \right]^{-\alpha-1}}{\exp\left(-\frac{t-a}{b}\right) - \exp\left(-\frac{t-a}{b}\right)} \\ = \frac{\alpha}{b} \left[-\frac{t-a}{b} \right]^{-\alpha-1} \quad (3.33)$$

Procediendo de manera análoga y utilizando las expresiones (3.28) y (3.32), se obtiene la Tasa de Azar para el extremo mayor del tipo III.

$$h(t) = h_{\text{max}} = \frac{\frac{\alpha}{b} \left[\exp\left(-\frac{t-a}{b}\right) - \exp\left(-\frac{t-a}{b}\right) \right]^{-\alpha-1}}{1 - \exp\left(-\frac{t-a}{b}\right)} \quad (3.34)$$

Como se ha podido observar hasta el momento, para el cálculo de la Tasa de Azar de la familia de Distribuciones

del extremo menor, se tiene una expresión reducida y pareciera fácil de calcular, mientras que para la Tasa de Azar de la familia de extremos mayores, las expresiones se vuelven tan extensas que dificultan su cálculo. Sin embargo, como se mencionó al principio de este tema, el cálculo de la Tasa de Azar permite encontrar la distribución que sigue la falla del sistema en estudio, y dadas las estrechas relaciones que siguen, cada una de las distribuciones para los extremos menores con las de los extremos mayores, permiten deducir que estas últimas pueden tomar una forma más simple, sin embargo, es en el capítulo siguiente donde se analiza un poco más esta relación para facilitar la estimación de parámetros.

v) Tiempo Medio Para Fallar.

Resta ahora obtener el Tiempo Medio para Fallar para el tercer tipo (MTTF). Utilizando la expresión (3.31), se tiene que para el extremo menor

$$\begin{aligned}
 \text{MTTF} &= \int_0^{\infty} t r(t) dt = \int_0^{\infty} t \left[\frac{a}{b} \exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^a\right) \left(\frac{t-a}{b}\right)^{a-1}\right] dt \\
 &= \frac{a}{b} \int_0^{\infty} t \left[\exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^a\right) \left(\frac{t-a}{b}\right)^{a-1}\right] dt \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

y para el extremo mayor utilizando la expresión (3.32), se tiene

$$\begin{aligned}
 MTF &= \int_0^{\infty} t \left[\frac{\sigma}{b} \exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\alpha}\right) \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\alpha-1} \right] dt \\
 &= \frac{\sigma}{b} \int_0^{\infty} t \left[\exp\left(-\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\alpha}\right) \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\alpha-1} \right] dt
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

que como se observa, las expresiones (3.35) y (3.36) son la misma, y la diferencia radica en el signo del parámetro a .

3.2.2 Un Modelo de Falla utilizando la Distribución del Valor Extremo.

Considere una estructura arquitectónica, cuya resistencia puede medirse en infinidad de puntos de la misma.

Considere así mismo, que la resistencia en cada punto es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal.

Puede decirse que el tiempo de vida de la estructura es proporcional a la resistencia inicial en cada punto.

Sean r_i la resistencia inicial en el punto i , con $i=1,2,\dots,n$.

t_i el tiempo de falla del i -ésimo punto, $i=1,2,\dots,n$
entonces

$t_i = k r_i$; donde k es una constante de proporción.

El problema de interés es determinar la distribución del tiempo de falla. Se tiene que:

$$P\{t_i \leq \tau\} = P\{k t_i \leq \tau\} = P\{t_i \leq \tau/k\} \quad (2.37)$$

pero como se supuso que $t_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$P\{t_i \leq \tau\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\tau/k} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2} dx = F(\tau) \quad (2.38)$$

De acuerdo con el Teorema fundamental del cálculo

$$F'(\tau) = \frac{1}{k\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\tau/k - \mu}{\sigma} \right)^2} \quad (2.39)$$

Esta expresión es para cada punto de la estructura, ahora bien, la falla en la estructura ocurre cuando la falla ocurre en cualquier punto.

Sea T el tiempo de falla de la estructura, entonces

$$T = \min\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$$

Si t_i se distribuye como una $N(\mu, \sigma^2)$, entonces

t_i se distribuye también como una Normal

$$t_i \sim N(\mu, k\sigma^2)$$

Utilizando los teoremas de Dominio de Atracción y por [MANNBO], pp. 9, si F es una distribución Normal, entonces, para su extremo mínimo F pertenece al Dominio de Atracción de L_{II} .

Entonces

T se distribuye como una Gumbel mínima o Distribución del Valor Extremo Menor del Tipo I.

$$F(T) = 1 - \exp\left\{-\exp\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\right\} \quad (3.40)$$

que denota la probabilidad de falla de un punto de la estructura.

... LAS COSAS MARCHAN MAL PERO.
TU SIGUES CON EL MISMO ESPIRITU
EMPRENDEDOR...

ANONIMO

CAPITULO 4

Estimación de Parámetros

1. CONCEPTOS

El objeto de la Estadística es hacer inferencia sobre una población en base a una muestra.

Las diversas medidas que describen una población se llaman parámetros.

La inferencia estadística consiste en inferir con una muestra para una población dando una medida de la incertidumbre con la cual se hace la inferencia. De aquí se desprenden las dos partes de la estadística inferencial: Estimación y Pruebas de Hipótesis. La Estimación se puede hacer en forma puntual o por intervalos de confianza.

Esta inferencia se puede abordar de tantas maneras como escuelas de la estadística hay. Típicamente se distingue entre estadística objetiva y estadística subjetiva; dentro de la primera se tienen la estadística clásica o paramétrica, la estadística no paramétrica y la secuencial, en cambio en la estadística subjetiva

se tienen la estadística Bayesiana y la decisional o Teoría de las Decisiones.

El problema de interés, en primera instancia, es con la estadística clásica o paramétrica, donde se suponen muestras grandes y que se conoce la distribución de la población subyacente a las observaciones.

En teoría de estimación puntual se trata con dos problemas: Obtener un estimador mediante algún método: Máxima Verosimilitud, Momentos, Mínimos Cuadrados y escoger el estimador que mayores propiedades tenga.

(1) Propiedades de los Estimadores:

- El Estimador depende del Parámetro.
- Insesgamiento. - Se le llama sesgo de un estimador a la diferencia

$$b(\hat{\theta}) = E\hat{\theta} - \theta$$

donde θ es el parámetro y $\hat{\theta}$ es el estimador

Si $b(\hat{\theta}) = 0$ se dice que el estimador es INSESGADO

$$+ E\hat{\theta} = \theta$$

- Insesgamiento Asintótico

$$\begin{matrix} E\hat{\theta} & \rightarrow & \theta \\ n & \rightarrow & \infty \end{matrix}$$

- Consistencia. -

Si $\hat{\theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta \rightarrow \hat{\theta}$ es CONSISTENTE

es decir $PCO \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\hat{\theta}} \theta \rightarrow 1$

- Eficiencia (Varianza Mínima). - El coeficiente de varianza relativa es:

$$Ef = \frac{\text{Var } \hat{\theta}_1}{\text{Var } \hat{\theta}_2}$$

El estimador de Varianza Mínima está dado por la cota de CRAMER - RAO, cuando el estimador es insesgado.

■ En el caso continuo

$$\begin{aligned} \sigma^2(\hat{\theta}) &= E \left[(\hat{\theta} - \theta)^2 \right] \geq \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta} \right]^2 f(x, \theta) dx \\ &\geq \frac{1}{n E \left[\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta} \right]^2} \end{aligned}$$

■ En el caso discreto

$$\sigma^2(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{n E \left[\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta} \right]^2}$$

ii) Estimación Puntual

■ Método de Máxima Verosimilitud

Sea una población que se distribuye $f(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$

donde θ_i son los parámetros, los cuales se desconocen. Se

desea encontrar el estimador de cada θ , que se realiza mediante los siguientes pasos:

* Se exige una muestra aleatoria de n variables independientes x_1, x_2, \dots, x_n

* Se calcula la función de verosimilitud como

$$L(\theta) = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \dots f(x_n, \theta) \\ = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

El valor de θ que maximiza la función de verosimilitud es el estimador de Máxima Verosimilitud.

Sea $K(\theta) = \ln L(\theta)$

Maximizar $L(\theta)$ es equivalente a maximizar $K(\theta)$, por lo que se procede a hacer lo siguiente:

$$* \quad \frac{\partial K(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

* Se despeja θ .

* Se verifica que $\hat{\theta}$ sea un punto máximo

Si cumple, se puede decir que $\hat{\theta}$ es un estimador de Máxima Verosimilitud (EMV).

■ Método de Momentos.

Sea X una variable aleatoria que se distribuye como $f(X, \theta)$, donde θ es el parámetro desconocido.

Sea M_1, M_2, \dots, M_k los momentos poblacionales con respecto al origen.

$$m_2 = ECX^2, m_3 = ECX^3, \dots, m_k = ECX^k$$

Sean m_1, m_2, \dots, m_k los momentos muestrales con respecto al origen (centrales)

$$m_1 = \frac{\sum x_i}{n}, m_2 = \frac{\sum x_i^2}{n}, \dots, m_k = \frac{\sum x_i^k}{n}$$

entonces, el valor de θ que satisface

$$m_1 = M_1$$

es el estimador $\hat{\theta}$.

■ Regresión Lineal Simple

Sea X una variable independiente no aleatoria, sea Y una variable aleatoria dependiente de X , y supóngase que $Y \sim NC(\mu_y, \sigma_y^2)$

Entonces, se supone que existe una relación lineal entre X y Y , que está dada por:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

Donde ε es una variable aleatoria que se distribuye como una $NC(0,1)$, y que representa al error debido a causas aleatorias.

Se tiene entonces que

$$E(Y) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$$

$$\therefore E(Y) \sim NC(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X, \sigma_y^2)$$

Si se tiene una muestra aleatoria de tamaño n , (x_i, y_i) ,

$(x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ pueden obtenerse estimadores de β_0 y β_1 por el método de Máxima verosimilitud.

- Si Y no está expresada en forma lineal, se le aplica una transformación tal, que se obtenga \tilde{Y} expresada en la forma deseada. Se calculan los parámetros de \tilde{Y} y se regresa a la forma original, obteniéndose así los parámetros deseados.

2. ESTIMACION DE PARAMETROS POR MAXIMA VEROSIMILITUD.

Utilizando el método de Máxima verosimilitud descrito anteriormente, se determinarán los sistemas de ecuaciones a resolver, para obtener el valor de los parámetros de cada una de las seis distribuciones que forman la familia de Valores Extremos.

2.1 TIPO I

a) Mayor

$$F(x) = \exp\{-\exp(-\frac{x-a}{b})\}$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{b} \exp\{-\exp(-\frac{x-a}{b})\} \cdot \exp(-\frac{x-a}{b})$$

$$L(a, b) = \frac{1}{b} \exp\left\{\sum \left[-\frac{x_i - a}{b} - \exp\left(-\frac{x_i - a}{b}\right)\right]\right\}$$

$$K = \ln L(a, b) = -n \ln b - \sum \left(-\frac{x_i - a}{b}\right) - \sum \exp\left(-\frac{x_i - a}{b}\right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial a} = \frac{n}{b} - \sum \exp\left(-\frac{x_i - a}{b}\right) \left(\frac{1}{b}\right) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial K}{\partial b} = \frac{-n}{b} + \sum \left(\frac{x_i - a}{b^2}\right) + \sum \exp\left(-\frac{x_i - a}{b}\right) \left(-\frac{x_i - a}{b^2}\right) = 0 \quad (4.2)$$

b) Menor

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\exp\left(\frac{x - a}{b}\right)\right)$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{b} \exp\left(-\exp\left(\frac{x - a}{b}\right)\right) + \frac{x - a}{b}$$

$$L(a, b) = \frac{1}{b^n} \exp\left(\sum \left[\frac{x_i - a}{b} - \exp\left(\frac{x_i - a}{b}\right)\right]\right)$$

$$K = \ln L(a, b) = -n \ln b + \sum \left(\frac{x_i - a}{b}\right) - \sum \exp\left(\frac{x_i - a}{b}\right) \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial K}{\partial a} = n - \sum \exp\left(\frac{x_i - a}{b}\right) = 0$$

$$\frac{\partial K}{\partial b} = \frac{-n}{b} \sum \left(\frac{x_i - a}{b^2}\right) + \sum \exp\left(\frac{x_i - a}{b}\right) \left(\frac{x_i - a}{b^2}\right) = 0$$

$$= -nb + \sum \exp\left(\frac{x_i - a}{b}\right) (x_i - a) - \sum (x_i - a) = 0 \quad (4.4)$$

2.2 TIPO II

a) Mayor

$$F(x) = \exp\left(-\left(\frac{x - a}{b}\right)^{-\alpha}\right)$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{\alpha}{b} \exp\left(-\left(\frac{x - a}{b}\right)^{-\alpha}\right) \left(\frac{x - a}{b}\right)^{-\alpha-1}$$

$$L(a, b, \alpha) = \left(\frac{\alpha}{b}\right)^n \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i - a}{b}\right)^{-\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x_i - a}{b}\right)^{-\alpha}\right)$$

$$K = \ln L(a, b, \alpha) = n \ln c \frac{c}{b} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - a}{b} \right)^{-\alpha} + \sum (\alpha - 1) \ln c \frac{x_i - a}{b}$$

$$\frac{\partial K}{\partial a} = -\frac{\alpha}{b} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - a}{b} \right)^{-\alpha-1} + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i - a} = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial K}{\partial b} = -\frac{n}{b} + (\alpha - 1) \frac{n}{b} - \frac{\alpha}{b} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - a}{b} \right)^{-\alpha} = 0$$

$$= n - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - a}{b} \right)^{-\alpha} = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n \ln c \frac{x_i - a}{b} \left[\left(\frac{x_i - a}{b} \right)^{-\alpha} - 1 \right] = 0 \quad (4.7)$$

b) Meyer

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x-a}{b}\right)^\alpha\right)$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{\alpha}{b} \exp\left(-\left(\frac{x-a}{b}\right)^\alpha\right) c \left(\frac{x-a}{b}\right)^{\alpha-1}$$

$$L(a, b, \alpha) = \left(\frac{c}{b}\right)^n \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i - a}{b}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x_i - a}{b}\right)^\alpha\right)$$

$$K = \ln L(a, b, \alpha) = n \ln c \frac{c}{b} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - a}{b} \right)^\alpha + \sum (\alpha - 1) \ln c \frac{x_i - a}{b}$$

$$\frac{\partial K}{\partial a} = \alpha \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - a}{b} \right)^{\alpha-1} + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i - a} = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial K}{\partial b} = -\frac{nb}{\alpha} \left(\frac{-\alpha}{b^2} \right) \alpha \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - a}{b} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{x_i - a}{b} \right) +$$

$$(\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \left[\frac{b}{x_i - a} \left(-\left(\frac{x_i - a}{b} \right)^\alpha \right) \right] = 0$$

$$= \sum \frac{x_i - a}{b} \alpha - n = 0 \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum \ln \left(\frac{x_i - a}{b} \right) \left[\left(\frac{x_i - a}{b} \right)^\alpha - 1 \right] = 0 \quad (4.10)$$

TIPO III

a) Mayor

$$F(x) = \exp(-(\frac{x-a}{b})^\alpha)$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{\alpha}{b} \exp(-(\frac{x-a}{b})^\alpha) (\frac{x-a}{b})^{\alpha-1}$$

$$L(a, b, \alpha) = \left(\frac{n}{b}\right)^\alpha \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i - a}{b}\right)^{\alpha-1} \exp(-(\frac{x_i - a}{b})^\alpha)$$

$$K = \ln L(a, b, \alpha) = n \ln \left(\frac{n}{b}\right) - \sum \left(\frac{x_i - a}{b}\right)^\alpha + \sum (\alpha-1) \ln \left(\frac{x_i - a}{b}\right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha} = \frac{\alpha}{b} \sum \left(\frac{x_i - a}{b}\right)^{\alpha-1} + (\alpha-1) \sum \left(\frac{x_i - a}{b}\right) = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial K}{\partial b} = \frac{n}{b} + (\alpha-1) \frac{n}{b} - \frac{\alpha}{b} \sum \left(\frac{x_i - a}{b}\right)^\alpha = 0$$

$$= n(\alpha - 2) + \sum \left(\frac{x_i - a}{b}\right)^{-\alpha} = 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum \ln \left(\frac{x_i - a}{b}\right) \left[\left(\frac{x_i - a}{b}\right)^\alpha - 1 \right] = 0 \quad (4.13)$$

b) Menor

$$F(x) = 1 - \exp(-(\frac{x-a}{b})^\alpha)$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{n}{b} \exp\left(-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{-\alpha}\right) \left(\frac{x-a}{b}\right)^{-\alpha-1}$$

$$L(a, b, \alpha) = \left(\frac{\alpha}{b}\right)^n \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i - a}{b}\right)^{-\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x_i - a}{b}\right)^{-\alpha}\right)$$

$$K = -\ln L(a, b, \alpha) = n \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right) - \sum \left(\frac{x_i - a}{b}\right)^{-\alpha} + \sum (\alpha-1) \ln\left(\frac{x_i - a}{b}\right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial a} = \alpha \sum \left(\frac{x_i - a}{b}\right)^{-\alpha-1} - (\alpha-1) \sum \left(\frac{1}{x_i - a}\right) = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial K}{\partial b} = n + \sum \left(\frac{x_i - a}{b}\right)^{-\alpha} = 0 \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum \ln\left(\frac{x_i - a}{b}\right) \left[\left(\frac{x_i - a}{b}\right)^{-\alpha} - 1 \right] = 0 \quad (4.16)$$

Es claro que los sistema obtenidos, son ecuaciones no lineales, cuya resolución requiere de un método numérico.

3. ESTIMACION DE PARAMETROS POR EL METODO DE MOMENTOS.

Haciendo uso de método de Momentos, citado en la primera parte de este capítulo, se procederá a determinar las ecuaciones para encontrar los parámetros de cada distribución del Valor Extremo.

3.1 TIPO I

Para este Tipo se desea encontrar los parámetros a y b , por lo que solo se requerirán dos ecuaciones para determinarlos, i.e., se necesitarán el primer y segundo momento.

a. Mayor

Para esta Distribución se tienen ya la media y la Varianza (segundo momento no central), aun cuando esta no es el segundo momento central, de igual forma puede ser utilizada para estimar los parámetros

$$F_{n+1}(x) = \exp(-\exp(-\frac{x-a}{b})) - \exp(-x) \quad (x < \infty)$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{b} \exp(-\exp(-\frac{x-a}{b})) \exp(-\frac{x-a}{b})$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp(-\exp(-\frac{x-a}{b})) \exp(-\frac{x-a}{b}) dx \\ &= a + b\gamma \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde γ es la constante de Euler y cuyo valor es

$$\gamma = 0.57724$$

$$E(X - \mu)^2 = \frac{\pi^2 b^2}{6} \quad (4.18)$$

Si siguiendo el metodo, se igualan las ecuaciones (4.17) y (4.18) a sus estimadores poblacionales, de esta forma se obtiene

$$a + b\gamma = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad (4.19)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \mu^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{n-1} \quad (4.20)$$

Es claro que en la expresión (4.20) se obtiene un estimador para b y sustituyendo éste en (4.19) se obtiene un estimador para a .

b) Menor.

$$F_{1,1}(x) = 1 - \exp\left(-\exp\left(\frac{x-a}{b}\right)\right) \quad -\infty < x < \infty$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{b} \exp\left(-\exp\left(\frac{x-a}{b}\right)\right) + \left(\frac{x-a}{b}\right)$$

procediendo de manera similar al mayor

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\exp\left(-\exp\left(\frac{x-a}{b}\right)\right) + \left(\frac{x-a}{b}\right) \right) dx$$

haciendo $u = -x$ $du = -dx$

$$E(X) = -\frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} u \left(\exp\left(-\exp\left(\frac{-u-a}{b}\right)\right) + \left(\frac{-u-a}{b}\right) \right) (-du)$$

$$= \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} u \left(\exp\left(-\exp\left(\frac{x+a}{b}\right)\right) - \left(\frac{x+a}{b}\right) \right) du$$

Esta forma es idéntica a la expresión (4.17), excepto que $a = -a$.

$$E(x) = -(-a + by) = a - by \quad (4.21)$$

Siguiendo este procedimiento, el valor para la varianza es la misma que la del valor mayor.

$$E(x - \mu) = \frac{\pi^2 b^2}{6} \quad (4.22)$$

de esta manera las ecuaciones a resolver son:

$$a + by = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \quad (4.23)$$

$$\frac{n^2 b^2}{3} = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{X})^2}{n} \quad (4.24)$$

Procediendo de manera similar a las expresiones (4.19) y (4.20) se pueden obtener los estimadores para a y b .

3.2 TIPO II

Para las distribuciones de este Tipo, al igual que las del Tipo III, se requiere estimar tres parámetros: a, b , y α .

a) Distribución del Valor Mayor

$$F_{n;2}(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \exp\left(-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{-\alpha}\right) & x \geq a, \alpha > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\alpha}{b} \left(\frac{x-a}{b}\right)^{-\alpha-1} \cdot \exp\left(-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{-\alpha}\right)$$

$$E(x) = \int_a^{\infty} x \, dF_{n;2}(x)$$

$$\text{Haciendo } R_{n;2}(x) = 1 - F_{n;2}(x); \quad dR_{n;2}(x) = -dF_{n;2}(x)$$

$$\rightarrow E(x) = - \int_a^{\infty} x \, dR_{n;2}(x)$$

Integrando por partes

$$u = x \quad dv = dR_{n;2}(x)$$

$$du = dx \quad v = R_{n;2}(x)$$

$$E(X) = -x R_{n+1}(x) \Big|_a^{\infty} + \int_a^{\infty} R_{n+1}(x) dx = a + \int_a^{\infty} (1 - \exp(-c(\frac{x-a}{b})^{-b}))^{-n} dx$$

introduciendo logaritmo en la expresion anterior

$$E(X) = a + \int_a^{\infty} (1 - \exp(-\exp(-a \ln(\frac{x-a}{b}))))^{-n} dx$$

haciendo $u = \ln(\frac{x-a}{b})$

$$du = \frac{dx}{(x-a)} \rightarrow dx = du(x-a)$$

por otro lado, $e^u = \frac{x-a}{b}$, por lo que $(x-a) = \frac{be^u}{b}$

$$\therefore dx = \frac{1}{b} \exp(u) du$$

$$\therefore E(X) = a + \int_{-\infty}^{\infty} b e^u (1 - e^{-e^{-au}})^{-n} du$$

La expresion $(1 - \exp(-\exp(-au)))$ tiene la forma del complemento de $F(x)$ para la distribucion del Mayor Valor del Tipo I, (R_{n+1}) , donde $a \cong \frac{1}{b}$, $u \cong x$; y como no se tiene la diferencia, $a \cong 0$.

Asi

$$E(X) = a + b \int_{-\infty}^{\infty} e^u R_{n+1}(u) du$$

integrando por partes

$$u = R_{n+1}(u)$$

$$v = e^u$$

$$du = dR_{n+1}(u)$$

$$dv = e^u du$$

$$E(x) = a + b \left[e^{u} R_{n+1}(u) \right]_{-\infty}^x - b \int_{-\infty}^x e^{u} dR_{n+1}(u) du$$

tomando $dR_{n+1}(u) = -dF_{n+1}(u)$, se tiene

$$E(x) = a + b \int_{-\infty}^x e^{u} dF_{n+1}(u) du$$

pero

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ut} dF(u) du = E(e^{ut})$$

entonces se puede utilizar la función Generatriz de Momentos para F_{n+1} , puesto que la integral de la expresión para $E(x)$ es la Función Generatriz en el momento $t=1$

$$\therefore E(x) = a + b \left(1 - \frac{1}{x} \right) \quad (4.25)$$

Para el segundo momento

$$E(x^2) = - \int_a^{\infty} x^2 dR_{n+2}(x)$$

integrando por partes

$$\begin{aligned} dv &= dR_{n+2}(x) & u &= x^2 \\ v &= R_{n+2}(x) & du &= 2x dx \end{aligned}$$

$$E(x^2) = -x^2 R_{n+2}(x) \Big|_a^{\infty} + 2 \int_a^{\infty} x R_{n+2}(x) dx \quad (4.26)$$

Es claro que la integral de esta expresión, no puede resolverse analíticamente, y por esta causa, el segundo momento no puede ser obtenido.

Es posible que los estudiosos de la Teoría de Extremos,

entre ellas Pólya y Snedden, se enfrentaran a este mismo hecho y que por ello considerarían el parámetro $\lambda = 0$, lo cual parece razonable, puesto que λ es solo un límite inferior o superior para las distribuciones del Tipo II y Tipo III.

Suponiendo $\lambda=0$ y de acuerdo con [MANN80], es posible establecer relaciones entre los parámetros de las seis distribuciones, de tal forma que solo sea necesario estimar los parámetros para las dos distribuciones del Tipo I.

Las relaciones encontradas son las siguientes:

a) De H_2 a H_1

$$\text{Sabemos que } H_2 = e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} \quad \text{para } \lambda = 0$$

$$\text{y que } H_1 = e^{-e^{\left(\frac{-x+c}{b}\right)}}$$

haciendo

$$x = e^u \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} H_2 &= e^{-\left(\frac{e^u}{b}\right)^a} \\ &= e^{-\left(e^{-au} b^{-a}\right)} \\ &= e^{-\left(e^{-au} e^{a \ln b}\right)} \\ &= e^{-\left(-au + a \ln b\right)} \\ &= e^{-\left(a(-u + \ln b)\right)} \end{aligned}$$

como se ve H_2 tiene la forma de H_1 con

$$a = \ln b$$

$$b = a^{-1}$$

o.e.

$$H_2(x, b, \infty) \xrightarrow{a} H_1(x, \ln b, \infty^{-1})$$

b) De L_2 a L_1

$$L_1 = 1 - e^{-x} \left(\frac{x - a}{b} \right)$$

y

$$L_2 = 1 - e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^2} \text{ para } a = 0$$

haciendo $x = e^u$ y sustituyendo en L_2

$$\begin{aligned} L_2 &= 1 - e^{-\left(\frac{e^u}{b}\right)^2} \\ &= 1 - \exp\left[-\left(\exp(u) / b\right)^2\right] \\ &= 1 - e^{-\left[e^{2u} / b^2\right]} \\ &= 1 - e^{-\left[e^{2u} \cdot \ln(b^{-2})\right]} \\ &= 1 - e^{-\left[2u - \ln b\right]} \\ &= 1 - e^{-\left[2u - \ln b\right]} \end{aligned}$$

como se ve L_2 tiene ya la forma de L_1 con

correcto funcionamiento, ni su estabilidad. Debe definirse por tanto cuales son en cada caso los límites admisibles de la respuesta estructural.

Se llama estado límite de una estructura, a cualquier etapa de su comportamiento, a partir de la cual su respuesta se considera inaceptable.

El objetivo del Diseño Estructural es proporcionar una seguridad adecuada ante la aparición de estados límites de falla, para las acciones más desfavorables que puedan presentarse durante la vida útil de la construcción, y procurar que en las condiciones normales de operación no se sobrepasen los estados límites de servicio.

Para revisar si la respuesta de la estructura es adecuada a la aparición de un estado límite de falla, es necesario definir un índice de la respuesta que pueda compararse con las acciones que afectan la estructura. Con este objeto, se define como Resistencia de una estructura a la intensidad de la acción que conducen a la estructura a un estado límite de falla. Puede hablarse de tantas resistencias como estados límites puedan presentarse, y ésta se determina por métodos experimentales o analíticos en función de las propiedades mecánicas y geométricas de la estructura, con procedimientos que son peculiares de cada material estructural.

$$H_3(c, b, \omega) \xrightarrow{-e^{-u}} H_1(-\ln b, \omega^{-1}) \quad (4.35)$$

d) De L_3 a L_1

$$L_1 = 1 - e^{-\omega \left(\frac{u - \ln b}{b} \right)^{\alpha}}$$

$$L_3 = 1 - e^{-\left(\frac{u - \ln b}{b} \right)^{\alpha}} \quad \text{para } \omega = 1$$

haciendo $z = e^{-u}$ y sustituyendo en L_3

$$\begin{aligned} L_3 &= 1 - e^{-\left(\frac{e^{-u}}{b} \right)^{\alpha}} \\ &= 1 - \exp\left(-\left(\frac{e^{-u}}{b}\right)^{\alpha}\right) \\ &= 1 - e^{-\left(e^{\alpha u} b^{-\alpha}\right)} \\ &= 1 - e^{-\left(e^{\alpha u} \cdot \ln b^{\alpha}\right)} \\ &= 1 - e^{-e^{\alpha u} \ln b^{\alpha}} \\ &= 1 - e^{-e^{\alpha(u - \ln b)}} \\ &= 1 - e^{-e^{\alpha(u - \ln b)}} \end{aligned}$$

y se tiene ya la forma de L_1 con

$$a = -\ln b \quad (4.36)$$

$$b = \alpha^{-1} \quad (4.37)$$

$$L_3(c, b, \omega) \xrightarrow{-e^{-u}} L_1(-\ln b, \alpha^{-1}) \quad (4.38)$$

4. ESTIMACION DE PARAMETROS POR REGRESION LINEAL

Como se mencionó en la primera parte de este capítulo, si la variable dependiente no está expresada en forma lineal, se debe aplicar una transformación que la convierta a esta forma, que es precisamente lo que se hará a continuación.

4.1 TIPO I

a) Del Valor Mayor

$$H_1 = \exp(c - \exp(-\frac{K - a}{b}))$$

aplicando logaritmo natural

$$\ln(H_1) = -\exp(-\frac{K - a}{b})$$

luego

$$\frac{1}{\ln(H_1)} = -\exp(\frac{K - a}{b})$$

aplicando nuevamente logaritmo

$$\ln\left(\frac{1}{\ln(H_1)}\right) = -\left(\frac{K - a}{b}\right)$$

haciendo

$$Y = \ln\left(\frac{1}{\ln(H_1)}\right) \quad (4.39)$$

$$\beta_0 = -1/b \quad (4.40)$$

$$\beta_1 = a/b \quad (4.41)$$

entonces

$$Y = \beta_0 K + \beta_1 \quad (4.42)$$

podemos ahora estimar β_0 y β_1 por máxima verosimilitud.

b) Del Valor Menor

$$L_1 = 1 - \exp(-\exp(\frac{X - a}{b}))$$

aplicando logaritmo natural

$$\ln(L_1) = -\exp(\frac{X - a}{b})$$

$$\ln(L_1) = \exp(\frac{X - a}{b})$$

$$\ln(-\ln(L_1)) = (\frac{X - a}{b})$$

Si

$$Y = \ln(-\ln(L_1)) \quad (4.43)$$

$$\beta_0 = 1/b \quad (4.44)$$

$$\beta_1 = -a/b \quad (4.45)$$

entonces

$$Y = \beta_0 X + \beta_1 \quad (4.46)$$

y sólo resta ahora estimar β_0 y β_1 por máxima verosimilitud.

4.2 TIPO II

Al tratar de aplicar transformaciones a estas distribuciones para dejarlas en forma lineal, aparecen problemas algebraicos en relación al parámetro a , que impiden se obtenga la forma deseada. Por esta razón, y al igual que con el Método de Momentos, se supone al parámetro $a = 0$. De esta forma se tiene:

a) Del Valor Mayor

$$H_2 = \exp\left(-\left(\frac{x}{b}\right)^{-a}\right)$$

aplicando el inverso

$$\left(\frac{1}{H_2}\right) = \exp\left[\left(\frac{x}{b}\right)^{-a}\right]$$

aplicado logaritmo natural

$$\ln\left(\frac{1}{H_2}\right) = \left(\frac{x}{b}\right)^{-a}$$

aplicando nuevamente logaritmo

$$\begin{aligned}\ln\left(\ln\left(\frac{1}{H_2}\right)\right) &= -a \ln\left(\frac{x}{b}\right) \\ &= -a(\ln x - \ln b) \\ &= -a \ln x + a \ln b\end{aligned}$$

haciendo

$$Y = \ln\left(\ln\left(\frac{1}{H_2}\right)\right) \quad (4.47)$$

$$\beta_0 = -a \quad (4.48)$$

$$\beta_1 = a \ln b \quad (4.49)$$

$$X = \ln x \quad (4.50)$$

entonces

$$Y = \beta_0 X + \beta_1 \quad (4.51)$$

se tiene ahora la forma lineal deseada.

b) Del Valor Menor

$$L_2 = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{b}\right)^a\right]$$

aplicando logaritmo natural

$$\ln(L_2) = -1 - \left(\frac{K}{B}\right)^a$$

$$\ln(L_2) = \left(\frac{K}{B}\right)^a$$

aplicando logaritmo nuevamente

$$\begin{aligned}\ln(\ln(L_2)) &= \ln\left(\frac{K}{B}\right)^a \\ &= a \ln K - a \ln B\end{aligned}$$

haciendo

$$Y = \ln(\ln(L_2)) \quad (4.52)$$

$$\beta_0 = a \quad (4.53)$$

$$\beta_1 = -a \ln B \quad (4.54)$$

$$X = \ln K \quad (4.55)$$

entonces

$$Y = \beta_0 X + \beta_1 \quad (4.56)$$

4.3 TIPO III

a) Del Valor Mayor

$$H_3 = \exp\left(-\left(\frac{K}{B}\right)^a\right)$$

aplicando el inverso

$$\frac{1}{H_3} = \exp\left(\left(\frac{K}{B}\right)^a\right)$$

aplicado logaritmo natural

$$\ln\left(\frac{1}{H_3}\right) = \left(\frac{K}{B}\right)^a$$

aplicando nuevamente logaritmo

$$\begin{aligned}\ln\left(\ln\left(\frac{1}{H_{32}}\right)\right) &= \ln\left(-\frac{a}{b}\right) \\ &= \ln(-a) - \ln b \\ &= \ln(-a) - \ln b\end{aligned}$$

haciendo

$$Y = \ln\left(\ln\left(\frac{1}{H_{32}}\right)\right) \quad (4.57)$$

$$\beta_0 = a \quad (4.58)$$

$$\beta_1 = -\ln b \quad (4.59)$$

$$\beta_2 = \ln(-a) \quad (4.60)$$

entonces

$$Y = \beta_0 X + \beta_1 (4.57)$$

b) Del Valor Menor

$$L_3 = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{b}\right)^{-a}\right)$$

aplicando logaritmo natural

$$\ln(L_3) = \ln\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{b}\right)^{-a}\right)\right)$$

$$\ln(L_3) = \ln\left(\frac{x}{b}\right)^{-a}$$

aplicando logaritmo de nuevo

$$\begin{aligned}\ln(\ln(L_3)) &= -a \ln\left(\frac{x}{b}\right) \\ &= -a(\ln(x) - \ln b)\end{aligned}$$

haciendo

$$Y = \ln(-\ln(-\ln X)) \quad (4.62)$$

$$\beta_0 = -a \quad (4.63)$$

$$\beta_1 = a \ln b \quad (4.64)$$

$$X = \ln(-X) \quad (4.65)$$

entonces

$$Z = \beta_0 X + \beta_1 \quad (4.66)$$

Nótese que para las distribuciones de los Tipos II y III, además de hacer al parámetro $a = 0$, es necesario aplicarle una transformación a la variable X , que se hará a los datos antes de utilizar las expresiones finales.

5. COMENTARIOS ADICIONALES.

Los métodos presentados en este capítulo, para la estimación de parámetros de la familia de Distribuciones Extremas, no son los únicos que existen, pero sí los más conocidos y por tanto usados.

Sin embargo, aún cuando estas técnicas son simples, su aplicación dentro de Teoría de Extremos no es tan fácil dadas las características de las Distribuciones. Por este hecho, han surgido técnicas más sofisticadas como la "Técnica de Momentos Ponderados", que combina en una sola los tres posibles tipos de Distribuciones Límite para Valores Extremos.

Este método es una generalización del Método de Momentos ya conocido, y que proporciona estimadores comparables en eficiencia

y sesgo con los obtenidos por el Método de Máxima Verosimilitud,
pero aun con estas propiedades, su estudio teórico se complica por
el uso de una sola Distribución (NORMAL).

... EL INTENTAR ES UNA IDEA A LA
QUE TAMBIEN LE HA LLEGADO SU
HORA.

R. L. ACKOFF

CAPITULO V

Simulación del Modelo de Gumbel

1. DESCRIPCION DEL PROBLEMA DE INTERES.

En el Capítulo III se introdujo un Modelo de Falla en una estructura, en este Capítulo, se describirá el mismo modelo, pero desde un punto de vista de "Confiabilidad Estructural", área de estudio de la Ingeniería.

Para poder definir la falla en la estructura, es necesario conocer la función de la misma. De acuerdo con el Diseño Estructural, la función de la estructura es absorber las solicitaciones que se derivan del funcionamiento de la construcción; debe soportar una serie de acciones externas que le ocasionan deformaciones, desplazamientos, y ocasionalmente daños; todos ellos constituyen su respuesta a dichas acciones. Por acciones se entiende lo que generalmente se denomina cargas.

Para que la construcción cumpla con las funciones para las cuales está siendo proyectada, es necesario que la respuesta de la estructura se mantenga dentro de límites que no afecten su

$$x = \ln b \quad (4.30)$$

$$t = e^{-u} \quad (4.31)$$

$$L_2(x, b, \infty) \xrightarrow{e^{-u}} L_1(\ln b, \infty) \quad (4.32)$$

De H_2 a H_1

$$H_1 = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x \ln b - u}{b}} dx$$

$$H_2 = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x \ln b - u}{b}} dx \quad \text{para } u = 0$$

haciendo $-x = e^{-u}$ y sustituyendo en H_2

$$\begin{aligned} H_2 &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{x \ln b - u}{b}} dx \\ &= \exp(-\exp(-u) \ln b) \\ &= e^{-\exp(-u) \ln b} \\ &= e^{-\exp(-u) \ln b^{-1}} \\ &= e^{-\exp(-u) \ln b} \\ &= e^{-\exp(-u) \ln b} \\ &= e^{-\exp(-u) \ln b} \end{aligned}$$

se tiene ya la forma de H_1 con

$$a = -\ln b \quad (4.33)$$

$$b = a^{-1} \quad (4.34)$$

Dentro de las acciones que pueden afectar a la estructura se encuentran las llamadas "Acciones Accidentales", que son aquellas que no se deben al funcionamiento normal de la construcción y que pueden tomar valores significativos solo durante pequeñas fracciones de la vida útil de la estructura. Se incluyen en esta categoría acciones excepcionales como sismos, viento, oleaje y explosiones. Dentro de estas acciones accidentales, el enfoque del problema de interés es con respecto a viento.

Los vientos son movimientos horizontales de masas de aire debido a diferencias de presión en las distintas zonas de la atmósfera y a la rotación terrestre. Estos movimientos ocurren constantemente, sin embargo, para el diseño estructural interesan esencialmente los vientos que tienen velocidades muy grandes y que se asocian a fenómenos atmosféricos excepcionales.

El parámetro básico que se requiere estudiar para fijar la intensidad de la acción de diseño es, por tanto, la velocidad máxima con que el viento puede actuar sobre la estructura durante la vida útil de esta. De acuerdo a esto, la velocidad que debe usarse para diseño será aquella que tiene una probabilidad pequeña de ser excedida durante el periodo de interés.

Debido al gran número de variables que intervienen en el diseño y a las incertidumbres significativas de estas, que las estructuras reales son sistemas complejos, cuya posibilidad de

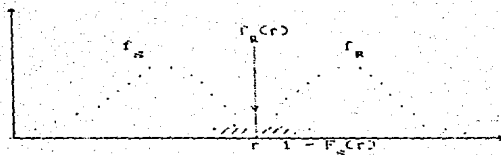
falla depende del comportamiento de un gran número de elementos ante diferentes combinaciones de acciones. El problema de determinar la probabilidad de falla de una estructura es muy complejo y no se presta a generalizaciones. Para los propósitos que se persiguen en este capítulo, bastará hacer un planteamiento muy simplista según el cual, la seguridad de una estructura depende de los valores relativos de sólo dos variables, una que representa la Resistencia del sistema, R ; y otra que es una medida del efecto de las acciones externas, en este caso viento, S . Ambas variables son aleatorias. Se presentará la falla si la resistencia R , resulta menor que el efecto de la acción S . En el diseño se pretende limitar la probabilidad de falla a un valor suficientemente pequeño $P_f = F$, que representa la probabilidad de que ocurra el evento $R < S$, i. e.,

$$P_{CSD} = P(R < S) \quad (5.1)$$

Para un valor particular de la resistencia $R = r$, la probabilidad de falla es igual a la probabilidad de que la variable S exceda el valor $S = r$, que vale $1 - F_S(r)$, donde $F_S(r)$ es la distribución acumulada de probabilidades de S hasta el valor r . Considerando que R puede tomar diversos valores, cada uno de ellos con una probabilidad definida por su distribución $f_R(r)$, se tiene que:

$$F_F = F = \int_0^{\infty} (1 - F_S(r)) f_R(r) dr \quad (5.2)$$

Para una mayor comprensión de la expresión 5.2, en forma gráfica:



i.e., el evento de interés $R < S$ ocurre cuando los eventos $f_R(r)$ y $1 - F_S(r)$ ocurren a la vez.

Para evaluar la expresión 5.2 es necesario saber quienes son $f_R(r)$ y $F_S(r)$ así como sus respectivos parámetros.

Una vez conocido lo anterior, se puede encontrar F_F , la probabilidad de falla, de esta forma y como se mencionó anteriormente S representa la acción del viento y de acuerdo con la referencia [RODR64] $F_S(r)$ es una distribución Extrema del tipo I; mientras que R que representa la resistencia es una distribución Normal, referencia [MELI85].

Entonces la expresión 5.2 queda:

$$P_F = \int_0^{91} 1 - \exp\left\{-\exp\left[\frac{r - \Delta}{b}\right]\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left[-\frac{(r - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dr =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_0^{91} \exp\left\{-\exp\left[\frac{r - \Delta}{b}\right] - \frac{(r - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dr \quad (5.3)$$

Es claro que la expresión 5.3 no es integrable analíticamente, por lo que su solución se obtendrá por un método numérico.

En lo que concierne a los parámetros a y b de la distribución Externa y cuya estimación se estudio en el capítulo anterior, se obtendrán utilizando el programa 5.1, que se encuentra al final de este capítulo para el cual se usan los datos de velocidades máximas de viento proporcionados por el observatorio meteorológico de Tacubaya y listados en el cuadro 5.1, mientras que los parámetros μ y σ serán estimados utilizando datos de resistencia de concreto listados en el cuadro 5.2.

Los resultados obtenidos son:

$$\hat{a} = 12.140102$$

$$\hat{b} = 2.477265$$

$$\bar{x} = 136.467$$

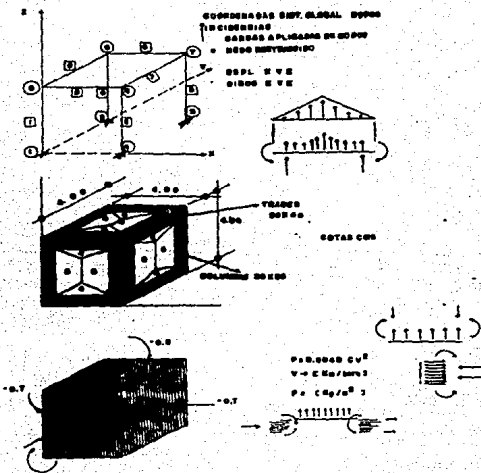
$$s^2 = 74.786$$

$$P_F = 0.0001$$

2. MODELO ESPECIFICO ALTERNATIVAS DE SOLUCION

La probabilidad de falla obtenida en el subcapitulo anterior, es general y no considera las propiedades fisicas de la estructura, por lo que se procede a plantear una forma alternativa de calcular la probabilidad de falla en un caso especifico.

Considerese la siguiente estructura.



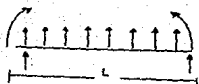
ELEMENTO I

Y-Z
b

$$F = 10.00481 (0.8) v^2 \text{ AREA}$$

$$M = \frac{10.00481 (0.8) v^2 L A}{12}$$

$$V = \frac{10.00481 (0.8) v^2 A}{2}$$

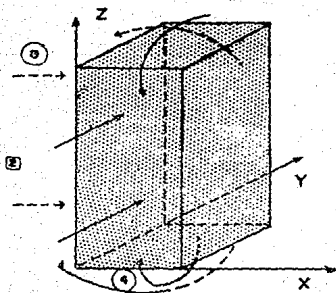
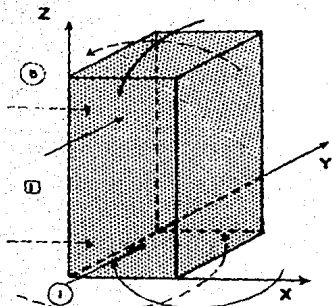


$$M_x = M_x = \frac{0.0084 v^2}{12} = 0.0072 v^2$$

$$V_y = 0.0096 v^2$$

$$M_y = 0.0063 v^2$$

$$V_x = 0.0084 v^2$$

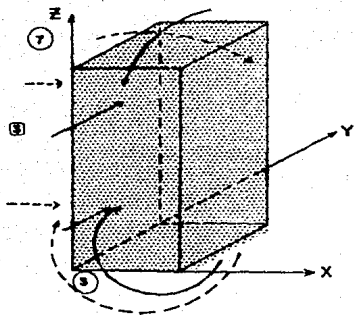


$$M_x = 0.0072 v^2$$

$$V_y = 0.0096 v^2$$

$$M_y = 0.0063 v^2$$

$$M_x = 0.0084 v^2$$

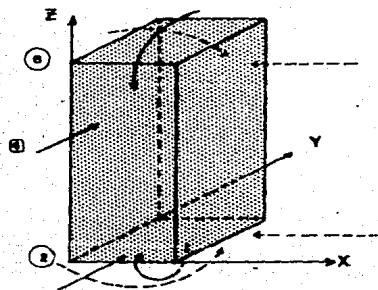


$$M_y = 0.0063 v^2$$

$$V_x = 0.0084 v^2$$

$$M_x = 0.0045 v^2$$

$$V_y = 0.0060 v^2$$

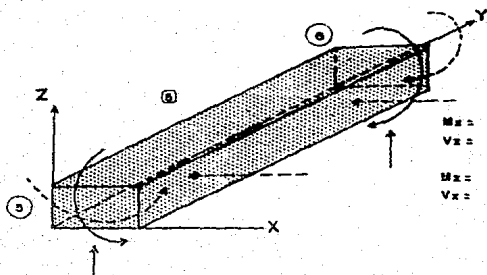


$$M_y = 0.0063 v^2$$

$$V_x = 0.0084 v^2$$

$$M_x = 0.0045 v^2$$

$$V_y = 0.0060 v^2$$

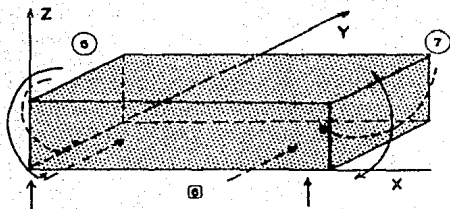


$$M_z = 0.0048 v^2$$

$$V_z = 0.0067 v^2$$

$$M_x = 0.0045 v^2$$

$$V_x = 0.0067 v^2$$

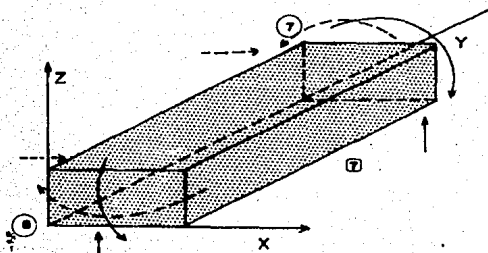


$$M_y = 0.0045 v^2$$

$$V_z = 0.0067 v^2$$

$$M_z = 0.0032 v^2$$

$$V_y = 0.0046 v^2$$

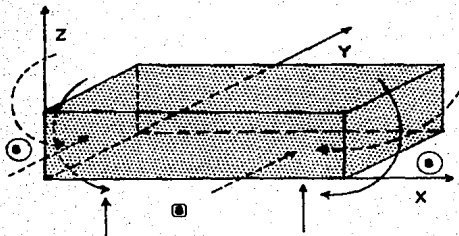


$$M_x = 0.0046 v^2$$

$$V_z = 0.0067 v^2$$

$$M_z = 0.0046 v^2$$

$$V_x = 0.0067 v^2$$



$$M_y = 0.0045 v^2$$

$$V_z = 0.0067 v^2$$

$$M_z = 0.0051 v^2$$

$$V_y = 0.0077 v^2$$

Es conveniente mencionar que como el objetivo de este trabajo no es diseñar propiamente la estructura el ejemplo presentado es relativamente simple, sin embargo cabe notar que la metodología usada es posible aplicarla a estructuras más complejas.

La forma en que se calculara la probabilidad de falla será utilizando ensayos Bernoulli. Mediante la simulación se generaran valores de las variables R y S , al comparar ambos valores y utilizando análisis estructural se concluirá si hubo un éxito o fracaso en el ensayo, este proceso será repetitivo en un número de veces necesario hasta obtener una "buena estimación" de P_f .

2.1 METODOLOGIA

1.- Definición del problema.

Calcular la probabilidad de falla de la estructura ya descrita.

2.- Recolección de datos.

Los datos a utilizar se encuentran en las tabla 5.1 y 5.2.

3.- Formulación del modelo matemático.

Identificación de variables, identidades y relaciones entre variables.

c = Coeficiente de empuje = 0.7

ρ = Densidad del aire = 0.125 kg m^{-3}

v = Velocidad del viento

P = Presión originada por viento = $-\frac{1}{2} \rho v^2$

F_x = Fuerza en dirección x

F_y = Fuerza en dirección y

F_z = Fuerza en dirección z

M_x = Momento alrededor del eje x

M_y = Momento alrededor del eje y

$$= \frac{\rho v^2 L A}{13} \quad \text{donde } L = \text{Longitud del elemento}$$

A = Área transversal de la sección

E = Módulo de elasticidad del material

I_z = Momento de inercia alrededor de z

I_y = Momento de inercia alrededor de y

G = Módulo de elasticidad a cortante

$$= \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{donde } \nu = \text{Relación de Poisson} = \frac{\text{Deformación transversal}}{\text{Deformación longitudinal}}$$

J = Momento polar de inercia $I_x + I_y$

P_{ix} = Fuerzas concentradas en el nudo i respecto al eje global x' y es igual a la suma de las fuerzas que conciden en el nudo i alrededor del eje x global.

¹ Para fines de Ingeniería este valor es igual a 0.4E para concreto

P_{iy} = Fuerzas concentradas en el nudo i respecto al eje global y y es igual a la suma de las fuerzas que conciden en el nudo i alrededor del eje y global.

P_{iz} = Fuerzas concentradas en el nudo i respecto al eje global z y es igual a la suma de las fuerzas que conciden en el nudo i alrededor del eje z global.

M_{ix} = Momento aplicado al nudo i alrededor del eje x global y es la suma de momentos que conciden en el nudo i alrededor de x .

O_{ix} = Desplazamiento lineal sobre el eje x del nudo i .

O_{iy} = Desplazamiento lineal sobre el eje y del nudo i .

O_{iz} = Desplazamiento lineal sobre el eje z del nudo i .

I_{ix} = Giro o desplazamiento angular del nudo i alrededor del eje x global.

I_{iy} = Giro o desplazamiento angular del nudo i alrededor del eje y global.

I_{iz} = Giro o desplazamiento angular del nudo i alrededor del eje z global.

P_{ix} = Fuerza en el extremo i concentrada en el eje x local

P_{iy} = Fuerza en el extremo i concentrada en el eje y local

P_{iz} = Fuerza en el extremo i concentrada en el eje z local

El desplazamiento global se transforma en local y se multiplica por la matriz de rigidez de cada elemento.

M_{Lx} = Momento en el extremo x en el eje x local.

M_{Ly} = Momento en el extremo y en el eje y local.

M_{Lz} = Momento en el extremo z en el eje z local.

R_{Lx} = Reacción que deben tener los apoyos en el nudo x sobre el eje x global.

R_{Ly} = Reacción que deben tener los apoyos en el nudo y sobre el eje y global.

R_{Lz} = Reacción que deben tener los apoyos en el nudo z sobre el eje z global.

f'_c = Resistencia del concreto

f_y = Resistencia a tensión del acero.

Π = Porcentaje de acero mínimo que requieren las columnas
$$= \frac{20}{f_y}$$

k = Ordenada del diagrama de interacción.

bh = Dimensiones de la columna.

f'_c = Disminución de resistencia del concreto
$$= (0.8)(0.85)(f'_c) \quad \text{cuando } f'_c < 250 \text{ kg/cm}^2$$

M_y = Momento de resistencia
$$= RC(bh)^2 f'_c$$
 obtenida de los diagramas de interacción

V_{cr} = Cortante que toma el concreto
$$= bh(0.2 + 30M\sqrt{f'_c}) \quad \text{si } \Pi < 0.01$$

Π' = Porcentaje de refuerzo transversal
$$= (0.12)f'_c/f_y \quad \text{como mínimo}$$

V_s = Cortante que resiste el acero que forma los estribos.
 $V_s = \frac{A_v f_y b}{s}$ donde: A_v = Área de los estribos.
 s = Separación entre estribos.

Π_m = Porcentaje de refuerzo longitudinal mínimo para elementos sujetos a flexión simple.

Para vigas

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s}$$

4. - Estimación de Parámetros.

- De la Distribución extrema tipo I.

Los parámetros $\hat{\lambda}$ y \hat{L} calculados en la primera parte de este capítulo son para velocidades máximas mensuales de viento, pero debido a que la estructura está diseñada para un periodo de recurrencia de 20 años, se procede al cálculo de las velocidades a dicho periodo.

El proceso es como sigue:

1) Se calculan 240 variables aleatorias que representan velocidades de viento siguiendo la distribución extrema tipo I, una por cada mes del año, 12 por cada año, en veinte años hacen un total de 240 variables.

20) De estas variables, se toma la más alta para representar la velocidad máxima en 20 años.

30) El proceso anterior se repite en un número de veces suficiente para poder estimar los nuevos parámetros \hat{a} y \hat{b} .

Los programas que realizan el proceso anterior se encuentran en el anexo al final de esta tesis.

De esta forma los parámetros estimados son:

$$\hat{a} = 26.25649779616126$$

$$\hat{b} = 2.1609222738882$$

- De la Distribución normal,

Son los mismos obtenidos en la sección anterior:

$$\mu = 186.487$$

$$\sigma^2 = 74.782$$

B. - Evaluación del Modelo.

Es en este punto donde reside el interés de probar las suposiciones o entradas que se programarán.

En este modelo se utilizan dos funciones de probabilidad, la distribución extrema tipo I y la distribución normal. La primera describe el comportamiento de la v.a. fuerza del viento, mientras que la segunda describe la resistencia del concreto. Cabría entonces, una prueba estadística para verificar estas

suposiciones. sin embargo, esto se ha considerado innecesario, puesto que en la referencia [RODR84] se realiza un ajuste por mínimos cuadrados, y con ello verifica dicha suposición.

6.- Formulación del Programa por Computadora.

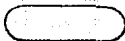
Para la realización del algoritmo de cómputo que realiza la simulación es necesario considerar lo siguiente:

1. Diseño Estructural Eólico.

La estructura prototipo diseñada para este fin y descrita en la primera parte de este subcapítulo, fue diseñada de acuerdo a lo establecido en el "Reglamento de Construcción para el Distrito Federal".

2. Se utilizó un programa de "Análisis Estructural", complementado con una interfase de programación, tratando de satisfacer las necesidades de dicho modelo. El siguiente diagrama especifica los pasos a seguir en este proceso.

SÍMBOLO

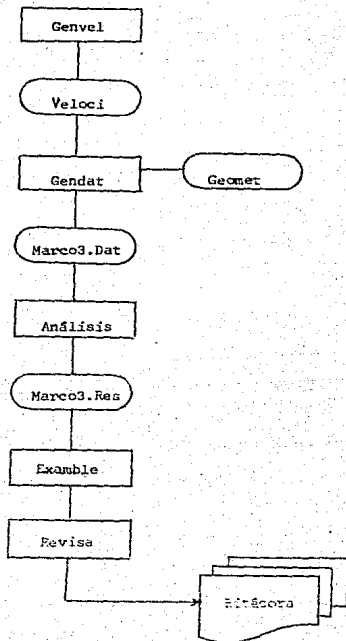


SIGNIFICADO

ARCHIVO

PROGRAMA

SIMULA



3. Breve Descripción de la Integración.

- **SIMULA.** - Es el programa que comprende la simulación del proceso que describe la probabilidad de falla de la estructura y esta compuesta por programas que generan archivos de datos, los cuales a su vez "alimentan" otros programas.

GenVel. - Es un programa que genera los datos que representan velocidades de viento, siguiendo la distribución extrema tipo I, utilizando los parámetros ya estimados de los datos reales.

Veloci. - Es un archivo que contiene los datos generados por el programa GenVel y que servirán de entrada al programa GenDat.

Geomet. - Es un archivo de datos que contiene la descripción geométrica de la estructura y es también datos de entrada para el análisis estructural.

GenDat. - Es un programa que toma los datos que le proporcionan Veloci y Geomet y después de algunas transformaciones envía dichos datos, a Marco3.Dat, con los formatos necesarios para ser leídos e interactuar con Análisis.

Marcos3.Dat. - Es un archivo que contiene los datos listos para ser procesados por Análisis.

Análisis. - Es un programa que realiza el análisis de la estructura, considerando las acciones proporcionadas y teniendo

como factor de interés y por lo tanto en forma variable a la velocidad del viento.

Marco3.Res. - Es un archivo que guarda las salidas generadas por análisis.

Ejemplo. - Utiliza los datos de Marco3.Res y evalúa los resultados.

Revisa. - Este programa sólo guardará en el Archivo Bitacora los resultados de cada corrida ó dará fin al proceso si así se desea.

Bitacora - Sólo guarda el resultado final cada corrida de simulación de la forma: "Fallo" ó "No Fallo" el sistema.

7.- Validación.

Es en esta parte donde se explicará la generación de variables aleatorias.

El proceso de simulación utiliza sólo dos variables obtenidas por el método de Montecarlo. La primera, la velocidad del viento, se obtuvo en el programa GenVel del proceso SIMLA y cuyos parámetros necesarios para su generación se calcularón de los datos reales proporcionados por el Observatorio de Tacubaya. La segunda, la resistencia del concreto, se obtuvo en el programa Ejemplo, también del proceso simula y cuyos parámetros necesarios

para su generación fueron calculados a partir de los datos proporcionados por los registros de pruebas de compresión simple en cilindros tomados de la obra FOVISSSTE.

La congruencia de los datos históricos con los datos generados es comprobable con la desigualdad de Chebyshev, cuya forma es:

$$P\{|x - \mu| \leq k\sigma\} \leq \frac{1}{k^2}$$

i.e.

$$P\{|x - \mu| \geq k\sigma\} = 1 - P\{|x - \mu| \leq k\sigma\} \leq 1 - \frac{1}{k^2}$$

B. - Diseño de Experimento

El proceso es como sigue:

1) Dado que la estructura es un continuo, se procedió a discretizarla en dieciséis puntos de interés, que son los extremos de cada una de las cuatro columnas y de las cuatro vigas.

2) En cada uno de estos puntos se asignó una resistencia aleatoria, con los parámetros estimados \bar{x} y s^2 , siguiendo una distribución normal. Esta consideración se realizó bajo el supuesto de que el concreto no es homogéneo en toda la estructura, dicha resistencia aleatoria es representada por f'_c .

3) En el caso del acero que refuerza la estructura de concreto, se asignó el refuerzo mínimo que requieren las columnas para una solicitación eólica de 80km/h.

4) Columnas.

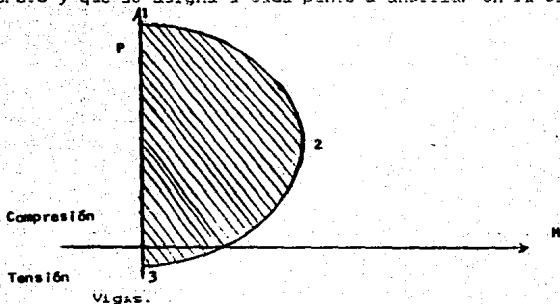
El programa Examble, del proceso SIMULA, representa el diagrama de interacción de cada columna, considerando flexión simple únicamente y define las combinaciones de carga (momento y carga axial) que resiste la columna. Esto lo hace considerando una parábola que pasa por tres puntos definidos de la siguiente forma:

Donde para asignar aleatoriamente la resistencia en cada extremo de la columna se tiene que valuar

Punto	P_x	M_y
1	$(-1.1)(35)^2(0.85)f'_c$	0
2	$(-0.5)(35)^2(0.85)f'_c$	$(0.15)(35)^3$
3	$(0.1)(35)^2(0.85)f'_c$	0

Con estos pares se define la resistencia en cada extremo de la columna para las direcciones y y z , realizándose dos veces por cada extremo de la columna o sea dieciséis veces. Después se procede a comparar los pares (M_y, P_x) , (M_z, P_x) y estos pares deben estar en el área sombreada, como se muestra en la siguiente figura, si caen fuera de esta área significa que la acción es mayor que la resistencia. Cabe recordar

que f'_c es la v.a. que representa la resistencia del concreto y que se asigna a cada punto a analizar en la estructura.



A diferencia de las columnas, para la evaluación de la resistencia de las vigas solo es necesario evaluar M_u y P_u . El momento aleatorio se asigna con:

$$M_R = (20)(0.37)^2 (0.00235)(42300) \left[1 - \frac{0.5(0.00235)(42300)}{0.85 f'_c} \right] (1.100)$$

ASÍ

$$M_y = (270249.6) \left[1 - \frac{7.25}{f'_c} \right] (1.100)$$

El momento valuada se asignara a M_u en el extremo de cada viga y se compara con el M_u actuante, a excepción de P_u , en las columnas las comparaciones se harán en valor absoluto.

5) Acero en columnas:

Por la fuerza resultante actuante en las columnas, se obtuvo en el análisis del diseño previo que la mayor es de 142 kg. de esta forma:

$$V_{cr} = (35)^2(1.2 + 30(0.005))(\sqrt{1800}) = 5423 \text{ Kg.}$$

Es así comprobado que no requiere estribos, sin embargo se asignan los mínimos especificados:

$$\rho' = (0.12) \frac{f_c'}{f_y} = 0.006$$

Se utilizó varilla de 3/8 # 17.5 en los extremos de las columnas.

La asignación aleatoria para V_y o V_z es:

$$V_{cr} = (35)^2(0.2 + 30(0.005))(\sqrt{f_c'})$$

El cortante que resisten los estribos es:

$$V_e = \frac{(1.42)(35)(24000)}{17.5} = 11928 \text{ kg.}$$

De tal forma que la comparación a realizar es:

$$P_y < 11928 + V_{cr}$$

$$P_z < 11928 + V_{cr}$$

Estas condiciones deben de cumplirse, de lo contrario significa que la resistencia del acero sucumbió a la acción del viento, es decir, la estructura falla.

Para las vigas, utilizando cartilla de Crib -
estribos se tiene que

$$V_a = \frac{(0.89)(3700)(400)}{20} = 7689.08 \text{ Kg.}$$

$$V_{a1} = (20)(3700)(.2+3000.00855)(\sqrt{1.1})$$

$$V_{a1} = 268.77(\sqrt{1.1})$$

procediendo de forma análoga a las columnas, la comparación para
las vigas será:

$$P_2 = 268.70(\sqrt{1.1}) + 7689.08$$

Bajo los mismos supuestos para la falla del sistema.

Como se mencionó anteriormente, este proceso de
evaluación, lo realiza el programa Examble y en él mismo se
encuentra la rutina que calcula la curva que pasa por los tres
puntos asignados que definen el diagrama de interacción

9.- Análisis de Resultados de Simulación.

Después de realizar el proceso de simulación descrito y
de un cuidadoso análisis de los resultados obtenidos en las
corridas se encontró lo siguiente:

1. La probabilidad de falla calculada por la expresión
E.2, no es aceptable ya que no se tiene la quinta potencia
máxima. (mínima cota superior) de viento para un intervalo
de integración.

2. El proceso de simulación corroborará lo anterior, ya que con las velocidades generadas el sistema nunca falla, lo cual significaría que su probabilidad de falla es cero.

3. Debido a lo anterior se asignarán valores arbitrarios de las velocidades de viento, llegando a asignar velocidades hipotéticas de hasta 360 m/s, lo cual es inaceptable, para que ocurra una falla en la estructura. Con este valor se integró la expresión 5.2, sin embargo proporciona una probabilidad de falla igual con cero, i.e., la probabilidad de falla es tan pequeña que, para la computadora toma el valor de cero.

4. Este valor de la probabilidad de falla se puede interpretar de la siguiente forma:

Se requeriría realizar el proceso de simulación en un número de veces extremadamente grande, (ni siquiera conocido), para que ocurriera una falla.

5. Por otro lado, el proceso de simulación tiene una duración aproximada de 55 segundos por evento, lo cual significa que realizar este proceso un gran número de veces, requiere un uso considerable de tiempo-máquina.

Por todo lo anterior y lo rescatable del trabajo realizado se puede concluir lo siguiente:

- La estructura prototipo idealizada para este proceso, no es el mejor ejemplo para probar una falla en el

diseño por viento, ya que este ejemplo no es tan susceptible a la acción del viento como se pretendía.

- De todo el trabajo realizado, el diseño del modelo sigue siendo válido para analizar otro tipo de estructuras más sensibles a viento.

Para confirmar lo anterior, se eligió otra tipo de estructura, más simple y susceptible al diseño estructural por viento y que se describe a continuación.

3. Modelo Específico 2.

El modelo que se presenta a continuación, es un caso real, cuyos datos fueron obtenidos al seleccionar uno de diferentes diseños preliminares de una estructura. Para este ejemplo, aún cuando ya no se realiza la discretización de la estructura como en el ejemplo anterior, este es un caso más adecuado para los fines de este trabajo.

La estructura a analizar es ahora, un anuncio publicitario con las siguientes características:

- Determinación del peso de la estructura.

Peso de lamina calibre no. 16	1411.22 kg.
Peso de las arandelas	3750.0 kg.
3 largueras de 16" x 1/2"	2333.0 kg.
3 largueras de 8" x 1/2"	661.0 kg.

Peso de la columna	3455.22 kg.

Peso total de la estructura	15756.97 kg.

- Análisis por viento.

Los datos requeridos para este análisis fueron tomadas del "Reglamento de Construcción para el D.F."

Ubicación: Zona F
Tipo: 2
Grupo: B

- Variables.

Las variables utilizadas en este modelo y su significado son las siguientes:

C_z = Coeficiente de variación de presión con respecto a la altura.

p_0 = Presión Básica = 30 kg.m^2

K = Factor Topográfico.

FR = Factor de rifaga = 1.3

p_1 = Presión en la altura de 0 a 10m.

p_2 = Presión en la altura de 10 a 15m.

p_3 = Presión en la altura de 15 a 19m.

z = Altura del punto de interés.

v = Velocidad del viento.

F_1 = Fuerza en la columna a la altura de 0 a 10m.

F_2 = Fuerza en la columna a la altura de 10 a 15m.

F_3 = Fuerza en el anuncio a la altura de 15 a 19m.

Y_c = Punto de aplicación de la fuerza por viento.

M_R = Momento Resistente.

M_v = Momento de Volteo.

F_s = Factor de Seguridad.

A_i = Area i-ésimo

- Diseño de la estructura.

Nuevamente se considerará el diseño en función de la variable aleatoria, velocidad del viento, en este ejemplo se representa por v .

Para la determinación de C_z :

$$C_z = 1 \quad (0.10) \text{ metros de altura}$$

$$C_z = (z/10)^{2/4.5} \quad (10.10) \text{ metros de altura}$$

con $k = 1$

$$FR = 1.3$$

Presiones:

El cálculo de las presiones a las que está sujeta la estructura se dan por la siguiente expresión:

$$p = C_p C_z k \rho_0 Fr$$

donde:

$$C_p = (0.8) + (0.5) = 1.3 \quad (\text{en el anuncio})$$

$$C_p = 0.7 \quad (\text{en la columna})$$

a) En la columna

$$\rho_0 = (0.0055)(v^2)$$

Puesto que en la memoria de cálculo $\rho_0 = 30 \text{ kg/m}^2$ y el evento de interés es que las cargas estén en función de la velocidad del viento, se calculan las presiones:

$$\rho_1 = (0.7)(10)(1.3)(0.005)(v^2) = 0.005005 v^2$$

con un punto de aplicación $Y_1 = 5$ metros.

$$\begin{aligned} \rho_2 &= (0.7)(10)^2 \cdot 4.5(10)(0.005)(v^2)(1.3) \\ &= 0.0018 v^2 z^{2.5} \end{aligned}$$

cuyo punto de aplicación es $Y_2 = 12.5$ metros.

b) En el anuncio.

$$\begin{aligned} \rho_3 &= (1.3)(10)^2 \cdot 4.5(10)(0.005)(v^2)(1.3) \\ &= 0.0033 v^2 z^{2.5} \end{aligned}$$

y su punto de aplicación $Y_3 = 17.0$ metros

Fuerzas.

El cálculo de las fuerzas es

$$F_1 = \rho_1 A_1$$

de esta forma:

$$\begin{aligned} F_1 &= (0.0050050)(v^2)(0.91)(10) \\ &= 0.0045545 v^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2 &= (0.0018)(v^2)(0.91) \left(\int_{10}^{15} z^{2.5} dz \right) \\ &= 0.02812392 v^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3 &= (0.0033)(12)(v^2) \left(\int_{15}^{19} z^{2.5} dz \right) \\ &= 0.557568 v^2 \end{aligned}$$

El cálculo de los Momentos dado por la forma:

$$\text{Fuerza} \times \text{Punto de Aplicación} = \text{Momento}$$

y siguiendo la memoria de cálculo se tiene:

FUERZA	APUNTO DE APLICACION	MOMENTO
0.0455455 v^2	5	0.2277275 v^2
0.02512692 v^2	12.5	0.3140865 v^2
0.557568 v^2	17	9.478656 v^2
<u>0.62624042 v^2</u>		<u>10.020247 v^2</u>

De acuerdo con este diseño sólo se procederá a calcular la estabilidad del anuncio, ya que discretizar la estructura como en el ejemplo anterior haría de este caso un ejemplo más complicado, además por otro lado, la estructura de este modelo podría considerarse que falla, aún cuando el anuncio siga en pie, y sólo presente algún desnivel o inclinación, aunque en este caso la falla consiste en que la estructura se caiga. Por lo anterior sólo interesa calcular el Momento de Volteo:

$$\begin{aligned} M_v &= (10.02047) v^2 + 2.5(0.62624042) v^2 \\ &= (11.58084205) v^2 \end{aligned}$$

para un valor de $M_v = 90320$ kg.

- Experimento.

Para este modelo el experimento sólo consiste en asignar v.a., que representa la velocidad del viento generadas por el programa ya descrito, y que se encuentra en el apéndice de este trabajo, y sustituirlas en la forma de M_v , para después evaluar el cociente:

$$F_c = \frac{M_a}{M_v}$$

que representa el factor de seguridad. Cuando este cociente es menor que la unidad, significará que la acción efectuada es mayor que la resistencia y por lo tanto el sistema, en este caso la estructura falla.

Así

$$F_s = \frac{60320}{(11.56064805)^2}$$

El programa que realiza esta simulación se encuentra en el apéndice ya mencionado, de esta manera se tiene que la probabilidad de falla existe y es calculable.

- Análisis de Resultados.

La probabilidad de falla obtenida del proceso de simulación es:

$$P_f = 0.006$$

La probabilidad de falla calculada por la expresión 5.2 es:

$$P_f = 0.0067311869$$

El programa que realiza este cálculo también se encuentra en el apéndice citado.

Por otra parte de la expresión

$$F_s = \frac{M_R}{M_v}$$

requiere un valor mínimo unitario y despejando v^2 se obtiene que

$$v = 88.27 \text{ km/h.}$$

i.e., que con una velocidad de viento mayor a esta, la estructura falla, este valor no está alejado de ocurrir puesto que entre los valores generados es posible encontrar algunos que lo excedan.

Como se ha comprobado, este segundo modelo presentado para probar que la distribución del valor extremo representa un modelo de falla, es una mejor ejemplificación puesto que es más susceptible a la acción del viento.

Es necesario hacer notar que, este segundo ejemplo tomado de un diseño preliminar para un caso real, como se mencionó anteriormente, era efectivamente, un diseño con error, tal como fue corroborado por el diseñador.

CONCLUSIONES

Con frecuencia, cuando se habla de Confiabilidad, se tiene la idea del concepto de Confianza estudiado en probabilidad. Sin embargo, ambos conceptos: Confiabilidad, estudiado en el capítulo uno y Confianza se aplican en procesos diferentes.

La teoría de extremos no ha tenido gran difusión y por lo mismo sus aplicaciones han sido limitadas, cuando debería ocurrir lo contrario, ya que como se dijo en el capítulo dos, siempre que se esté interesado en la ocurrencia de un valor máximo y/o mínimo, se está hablando de teoría de extremos.

Cabe resaltar aquí, que la teoría de extremos tiene la ventaja de que no requiere conocer la distribución original de la variable, para obtener la distribución del valor extremo de la misma, ya que en muchos procesos no se tiene suficiente información sobre una posible distribución que la describa.

Para la estimación de parámetros que se requerían para el capítulo cinco, se utilizaron las ecuaciones de máxima verosimilitud; puesto que no es posible obtener en forma explícita los valores de los parámetros se recurrió a los métodos numéricos, específicamente Newton-Raphson encontrándose lo

diferentes nudos.

Este tipo de "experimentos" son una buena ayuda en el diseño estructural por viento, (o por otras variables aleatorias que sigan distribuciones extremas), puesto que aún cuando se cuentan con reglamentos y manuales para estos diseños, el poder contemplar con una simulación la posible ocurrencia de eventos en el problema de interés, es una forma de pronosticar para una buena toma de decisiones.

Para el caso del segundo modelo planteado en el capítulo 5 resultó ser más adecuado para ejemplificar el uso de las distribuciones extremas como modelos de falla.

Finalmente cabe agregar, que la ocurrencia de algunos fenómenos tales como: precipitación pluvial, granizo, sismos, desbordamiento de ríos, niveles de contaminación del aire, y en general todos aquellos casos en que la variable de interés es un máximo o un mínimo, pueden ser analizados con distribuciones del valor extremo, así como con técnicas de simulación.

BIBLIOGRAFIA

- CAPL72 CAPLEN, Rowland (1972)
"A practical approach to reliability"
Business Book limited
London, England
- ENSL77 ENSLEIN, Kurt. RALSTON, Anthony and WILF, Herbert S. (1977)
"Methods for Digital Computers"
Vol. III Of Mathematical Methods for Digital Computers
Wiley - Interscience Publication
E. U. A.
- GNED69 GNEDENKO, Boris V. (1969)
"Mathematical Methods of Reliability Theory"
Academic Press
New York, E. U. A.
- GORD78 GORDON, Geoffrey (1978)
"System simulation "
Prentice-Hall
E. U. A.

- GREEN, A. J. and BOWNE, J. (1972)
"Reliability Technology"
Wiley
London, England
- GUMBEL, E. J. (1959)
"Statistics of Extremes"
Columbia University Press
New York, E. U. A.
- HENLEY, Ernest (1981)
"Reliability Engineering and Risk Assessment"
Prentice-Hall
England.
- HILL, E. H. Earl and PRANE, W. Joseph (1985)
"Applied techniques in statistics for selected Industries
Coatings, Paints and Pigments"
Wiley Interscience
E. U. A.
- JARDINE, Andrew K. (1973)
"Maintenance, Replacement and Reliability"
Wiley
New York, E. U. A.

- KAHN56 KAHN, Herman (1950)
"Applications of Monte Carlo"
Research Memorandum
The RAND Co.
Sta. Monica, California
- KENNE86 KENNEDY, Jhon B. and NEVILLE, Adam M. (1980)
"Basic Statistical Methods for Engineers and
Scientistics"
Harper - Rosas
- LLY084 LLYOD, K. David (1964)
"Reliability: Management, Methods and Mathematics"
Prentice-Hall
- MANN74 MANN, N. R., SCHAFER, R.E. and STINGPURWALLA, N. D. (1974)
"Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life
Data"
Wiley
New York, E. U. A.
- MELI05 MELI, Peralta Roberto (1985)
"Diseño Estructural"
Limusa
México, México

MORG85

MORGAN, Byron J. T. (1985)
"Elements of Simulation"
London: Chapman and Hall
London, England

NABI79

NABIL, R. Adam (1979)
"Current Issues in Computer Simulation"
All Dogramaci
Academic Press
E. U. A.

OCON81

O'CONNOR, Patrick (1981)
"Practical Reliability Engineering"
Heyden
London, England

(Articulos)

BOOS84

BOOS, D. Denis (1984)
"Using Extreme - Value theory to estimate large percentiles"
Technometrics
Vol. 26 No. 1

ENGE82

ENGELHARDT, Max and BAIN, Lee J. (1982)
"On Prediction limits for samples from a Weibull or Extreme - Value Distribution"
Technometrics
Vol. 24 No. 2 pp 147-150

- HART68 HARTER, H. Leon and MOORE, Albert H. (1968)
"Maximum - likelihood estimation from doubly censored
samples, of the parameters of the First Asymptotic
Distribution of Extreme - Values"
Journal of the American Statistical Association
Vol. 63 No. 327 pp. 889-901
- HASS68 HASSANEIN, Khabat M. (1968)
"Analysis of Extreme - Value data by Samples Quantiles for
very large samples"
Journal of the American Statistical Association
Vol. 63 No. 327 pp. 877 - 888
- HASS72 HASSANEIN, Khabat M. (1972)
"Simultaneous estimation of the parameters of the Extreme-
Value Distribution by sample quantiles"
Technometrics
Vol. 14 No. 1 pp. 63 - 71
- HASS86 HASSANEIN, Khabat M. (1986)
"Estimation and testing of quantiles of the Extreme-Value
Distribution"
Journal of Statistical Planning and Inference
Vol. 14 No. 3 pp. 389- 400

- HOSK85 HOSKING, J. R. M., WALLIS, J. R. and WOOD, E. F. (1985)
"Estimation of the generalized Extreme-Value Distribution
by the method of probability weighted moments."
Technometrics
Vol. 27 No. 3 pp. 251-260
- MANN80 MANN, Nancy R. and SINGPURWALLA, Nozer D. (1980)
"Extreme-Value Distributions"
Technical Report for Office of Naval Research Operations
Research Program
Arlington, Virginia
- RODR84 RODRIGUEZ, Cuevas Neftali (1984)
"Aplicación de la Estadística de Extremos a la
determinación de velocidades del viento para diseños
estructurales"
Instituto de Ingeniería de la UNAM
Octubre No. 105
México, D. F.
- (Tesis)
- ARCE85 ARCE, León Carlos (1985)
"Fuerza del viento en Estructuras"
Tesis Profesional
Acatlán, México

A P E N D I C E

PROGRAMA 4.1 ESTIMACION DE PARAMETROS POR MAXIMA VEROSIMILITUD

Este programa obtiene los parametros a y b de la distribucion del valor extremo del tipo I para valores maximos. El procedimiento usado es: para encontrar el parametro b se resuelve una ecuacion por el metodo de Newton, y este valor se sustituye en la ecuacion que calcula el parametro a.

```

program extremol(input,output);
const
  n=100;
type
  parametro=double;
  vector=array[1..n] of double;
var
  x          :vector;
  b          :parametro;
  i,j,k      :integer;
  m,g,q      :double;
  ent        :text;
function f(b:parametro):double;
var
  l:integer;
  s:double;
begin
  s:=0;
  for l:=1 to n do
    s:=s+(x[l]+b-m)*exp(-x[l]/b);
  f:=s;
end;
function fl(b:parametro):double;
var
  l:integer;
  s:double;
begin
  s:=0;
  for l:=1 to n do
    s:=s+x[l]*(x[l]+b-m)*exp(-x[l]/b)/(b*b)+exp(-x[l]/b);
  fl:=s;
end;
function a(b:parametro):double;
var
  l:integer;
  s:double;
begin
  s:=0;
  for l:=1 to n do
    s:=s+exp(-x[l]/b);
  s:=ln(s/n);
  a:=-b*s;
end;
procedure media;
var
  l:integer;

```

```
begin
  m:=0;
  for i:=1 to n do
    m:=m+f(i);
  m:=m/n;
end;
begin
  assign(ent,'ext1.dat');reset(ent);
  for i:=1 to n do
    begin
      read(ent,x[i]);
      writeln('x(',i:2,')=',x[i]);
    end;
  media;
  write(m);
  read(q);
  k:=1;
  for i:=1 to n do
    if x[i]<x[i+1] then k:=i;
  b:=10;
  i:=1;
  while i<30 do
    begin
      writeln('iteracion :',i:2);
      g:=f(b);
      b:=b-g/f(i,b);
      writeln('funcion',g);
      writeln('b=',b);
      i:=i+1;
    end;
  writeln('a=',a(b));
  writeln('1/b=',1/b);
end.
```

PROGRAMA 4.2
ESTIMACION DE PARAMETROS POR MAXIMA VEROSIMILITUD

Este programa obtiene los parametros α , β , γ y δ de la distribución del valor extremo tipo II para valores máximos, resolviendo un sistema de ecuaciones simultáneas por el método de Newton-Raphson generalizado.

```

program extremo2(input,output);
const
  n=30;
  n1=5;
  m=4;
type
  vector=array[1..n] of double;
  parametro=array[1..3] of double;
  hess=array[1..3,1..3] of double;
var
  x          :vector;
  b1,y,y1,z  :parametro;
  hess       :hess;
  con,con1,con2:integer;
  g,g1       :double;
  con1       :text;
procedure borra(var uuhess);
var
  i,j:integer;
begin
  for i:=1 to n1 do
    for j:=1 to n1 do
      uuhess[i,j]:=0;
    end;
  end;
function f(w:parametro):double;
var
  i1:integer;
  s1,s2:double;
begin
  s1:=0;
  s2:=0;
  for i1:=1 to n do
    begin
      s1:=s1+exp(-w[3]*ln((x[i1]-w[1])/w[2]));
      s2:=s2+ln((x[i1]-w[1])/w[2]);
    end;
  f:=n*ln(w[3]/w[2]) - s1 - (w[3]+1)*s2;
end;
procedure gradiente(w:parametro;var usparametro);
var
  i1:integer;
  s1,s2,t1,t2:double;
begin
  s1:=0;
  t2:=0;
  for i1:=1 to n do
    begin

```

```

t1:=f11/w11);
t2:=t1/w21);
s1:=s1+exp(-(w13+1)*ln(t1));
(s1:=s1+1);
s2:=s2+1);
end;
u11:=-w13*s1/w11+(w13+1)*s2;
s1:=0;
for i1:=1 to n do
  s1:=s1+exp(-w13*ln((f11-w11)/w21));
u12:=n*w13/w11*(s1-w13/w21);
s1:=0;
for i1:=1 to n do
  s1:=s1+ln((f11-w11)/w21)*(exp(-w13*ln((f11-w11)/w21))-1);
u13:=n/w13*s1;
end;
procedure hessiano:=(parametros:var uu:table;
var
  i1:integer;
  s1,s2,s3:doubles;
  t1,t2:vector;
begin
  for i1:=1 to n do
    begin
      t1[i1]:=w11-w11;
      t2[i1]:=w11/w21);
    end;
    s1:=0;
    s2:=0;
    for i1:=1 to n do
      begin
        s1:=s1+exp(-(w13+2)*ln(t2[i1]));
        s2:=s2+1/(t1[i1]*t1[i1]);
      end;
      uu1,i1:=-w13*(w13+1)*s1/w11+(w13+1)*s2;
      s1:=0;
      for i1:=1 to n do
        begin
          s1:=s1+exp(-(w13+1)*ln(t2[i1]));
        end;
        uu1,2:=-w13*w13*s1/w11+(w13+1)*s2;
        uu2,i1:=uu2,i1;
        s1:=0;
        s2:=0;
        s3:=0;
        for i1:=1 to n do
          begin
            s1:=s1+exp(-w13*ln(t2[i1]));
            s2:=s2+exp(-w13*ln(t2[i1]))*ln(t2[i1]);
            s3:=s3+1/t1[i1];
          end;
          uu1,3:=-w13*w13*s1/w11+(w13+1)*s2;
          uu3,i1:=uu3,i1;
          s1:=0;
          for i1:=1 to n do

```



```

      s1:=s1+exp(-w[3]*ln(t2[i+1]));
uu[2,2]:=-n*w[3]/(w[2]*w[2])-w[3]*w[3]*n/(w[2]*w[2])+w[3]*s1/(w[
3*w[2]);
s1:=0;
s2:=0;
for i:=1 to n do
begin
  s1:=s1*exp(-w[3]*ln(t2[i+1]))*ln(t2[i+1]);
  s2:=s2+exp(-w[3]*ln(t2[i+1]));
end;
uu[2,3]:=n/w[2]-s2/w[2]+s1*w[3]/w[2];
uu[3,2]:=uu[2,3];
s1:=0;
for i:=1 to n do
begin
  s1:=s1+exp(-w[3]*ln(t2[i+1]))*ln(t2[i+1])*ln(t2[i+1]);
end;
uu[3,3]:=-n/(w[3]*w[3])-s1;
end;
procedure gauss(a:matrix;h:parameter;var b:parameter);
var
  a:array[1..n1,1..m] of double;
  i,j,k,i :integer;
  t       :boolean;
  c       :double;
begin
  for i:=1 to n1 do
    for j:=1 to n1 do
      a[i,j]:=a[i,j];
    for i:=1 to n1 do
      a[i,m]:=h[i];
    k:=1;
    t:=true;
    while t do
      begin
        l:=1;
        for j:=k+1 to n1 do
          if abs(a[j,k])>abs(a[l,k]) then l:=j;
          if a[l,k]<>0 then
            begin
              for j:=k to m do
                begin
                  c:=a[k,j];
                  a[k,j]:=a[l,j];
                  a[l,j]:=c;
                end;
              for i:=k+1 to n1 do
                for j:=k+1 to m do
                  a[i,j]:=a[k,k]*a[i,j]-a[k,j]*a[l,k];
                end;
              if a[l,k]=0 then t:=false;
              k:=k+1;
              if k=n1 then t:=false;
            end;
          if (k<>n1) or (a[n1,n1]=0) then
            begin

```

```

        writeln('No tiene solucion');
    end
else
    begin
        for i:=n1 downto 1 do
            begin
                b[i]:=a[i,m];
                for j:=i+1 to n1 do
                    b[i]:=b[i]-b[j]*a[i,j];
                b[i]:=b[i]/a[i,i];
            end;
            for i:=1 to n1 do writeln('b(',i:2,')=' ,b[i]);
        end;
    end;
end;
begin
assign(ent,'a.dat');reset(ent);
for con:=1 to n do
    begin
        read(ent,x[con]);
        writeln('x(',con:2,')=' ,x[con]);
    end;
read(q);
for con:=1 to n do
    y[1]:=y[1]+x[con];
y[1]:=1.965441401761125;
y[2]:=18.9569589766445;
y[3]:=10.8194307939391;
con:=1;
while con<200 do
    begin
        writeln('iteracion :',con:2);
        for con1:=1 to n1 do
            z[con1]:=0;
        gradient(y,z);
        for con1:=1 to n1 do
            begin
                writeln('f',con1:2,')=' ,z[con1]);
                z[con1]:=-z[con1];
            end;
        g:=f(y);
        writeln('funcion',g);
        {read(q);}
        borra(hes);
        hessiano(y,hes);
        {for con1:=1 to n1 do
            for con2:=1 to n1 do
                writeln('hes(',con1:2,',' ,con2:2,')=' ,hes[con1,con2]);}
        {read(q);}
        gausse(hes,z,b1);
        for con1:=1 to n1 do
            begin
                y[con1]:=y[con1]+b1[con1];
                writeln('y(',con1,')=' ,y[con1]);
            end;
        con:=con+1;
    end;
end;

```

PROGRAMA 5.1
 PROCESO SIMULA

A continuación se listan los programas del proceso de simulación descritos en el capítulo 5.

PROGRAM SIMU(INPUT,OUTPUT);

CONST

DO = 6;
 LO = 9;
 PAGINA = #12;

VAR

BETA, GAMA, X, Y, OMEGA : REAL;
 I, J, K, OP, L : INTEGER;
 WIND : IEXI;

PROCEDURE IMPRIME;

BEGIN

IF (I MOD 3)=1 THEN

BEGIN

WRITELN(' ');

WRITE('':5)

END;

WRITE('':10, Y:LO:DO);

WRITELN(WIND, 'SIMULACION NO.?? PRUEBA NO.??');

WRITELN(WIND, 3.6*Y:6:2, ' km/h');

END;

BEGIN

ASSIGN(WIND, 'A:VELOCI.DAT'); REWRITE(WIND);

RANDOMIZE;

CLRSKR;

GOTOXY(5, 5);

LOWVIDE0;

WRITELN('GENERACION DE VARIABLES ALEATORIAS PARA FUENCIONES EXTREMAS')

GOTOXY(15, 8); WRITELN(' [1] VALOR EXTREMO TIPO I');

GOTOXY(15, 9); WRITELN(' [2] VALOR EXTREMO TIPO II');

GOTOXY(15, 10); WRITELN(' [3] VALOR EXTREMO TIPO III');

GOTOXY(20, 15); WRITE('OPCION [SALE]...');

HIGHVIDE0; READLN(OP);

IF 'OP IN (1,2,3) THEN

BEGIN

CLRSKR;

LOWVIDE0;

GOTOXY(10, 5); WRITE('DAME EL PARAMETRO BETA=');

HIGHVIDE0; READLN(BETA);

LOWVIDE0;

GOTOXY(10, 6); WRITE('DAME EL PARAMETRO GAMA=');

HIGHVIDE0; READLN(GAMA);

LOWVIDE0;

GOTOXY(10, 7); WRITE('VARIABLES ALEATORIAS A GENERAR ...');

```
HIGHVIDEO;          READLN(K);
CLRSCR;
GOTOXY(28,10);     WRITELN('! ! FAVOR DE ESPERAR ! !');
GOTOXY(25,12);     WRITELN(' IMPRIMIENDO VALORES GENERADOS');
```

```
CASE OP OF
```

```
1: BEGIN
    WRITELN('':15,'BAJO LOS PARAMETROS BETA=',BETA:LO:DO,' GA
```

```
MA=',GAMA:LO:DO);
```

```
    WRITELN(' ');
    WRITELN('':20,'LAS VARIABLES ALEATORIAS GENERADAS SON');
    WRITELN(' ');
    WRITELN(' ');
    FOR I:=1 TO K DO
    BEGIN
        X:=RANDOM;
        Y:=BETA - ( 1 / GAMA ) * LN( - LN( X ) );
        IMPRIME;
    END;
    WRITELN(PAGINA)
END;      ( OP=1 )
```

```
2: BEGIN
    WRITELN('':15,'BAJO LOS PARAMETROS BETA=',BETA:LO:DO,' GA
```

```
MA=',GAMA:LO:DO);
```

```
    WRITELN(' ');
    WRITELN('':20,'LAS VARIABLES ALEATORIAS GENERADAS SON');
    WRITELN(' ');
    WRITELN(' ');
    FOR I:= 1 TO K DO
    BEGIN
        X:=RANDOM;
        Y:=BETA * ( EXP ( -(1/GAMA) * LN( -LN(X) ) ) );
        IMPRIME;
    END;
    WRITELN(PAGINA)
END;      ( OP=2 )
```

```
3: BEGIN
    LOWVIDEO;
    WRITE('DAME PARAMETRO OMEGA=');
    READLN(OMEGA);
    WRITELN('':15,'BAJO LOS PARAMETROS BETA =',BETA:LO:DO,'
```

```
GAMA = ',GAMA:LO:DO);
```

```
    WRITELN('                                OMEGA =',OMEGA:LO:DO);
    WRITELN(' ');
    WRITELN('':20,'LAS VARIABLES ALEATORIAS GENERADAS SON')
```

```
    WRITELN(' ');
    WRITELN(' ');
    FOR I:=1 TO K DO
    BEGIN
        X:=RANDOM;
        Y:= OMEGA - (OMEGA-BETA) * EXP(1/GAMA*LN(-LN(X)));
        IMPRIME;
    END;
    WRITELN(PAGINA)
END;      ( OP=3 )
```

```
ELSE      ( [SALE] )
END:      ( [CASE ] )
CLOSE(WIND);
END:
H(CORVIDE)
END.
```

```

{HC-U-R-K-}
Program GenDat;
Var
  Titulo,
  linea : string[80];
  fi,fj : text;
  v,v2 : real;
Begin
  LowVideo;
  Assign(fi,'Veloci.Dat'); Reset(fi);
  Readln(fi,Titulo);
  Readln(fi,v);
  Close(fi);

  writeln('GENDAT --- Velocidad viento km/h #',v/6:2);

  Assign(fj,'Geomet.Dat'); Reset(fj);
  Assign(fj,'Marco3.Dat'); Rewrite(fj);

  While not Eof(fi) Do
  Begin
    Readln(fi,linea);
    writeln(fj,linea)
  End;
  Close(fi);

```

```

      v2:=v*v;
      ( Gargas Coord.
s 1,5 y 8 )   writeln(fj,(-0.0084-0.0067)*v2);      ( P5x ) ( Confluyen lado
              writeln(fj,(+0.0096+0.0077)*v2);      ( P5y )
              writeln(fj,(+0.0067+0.0067)*v2-424); ( P5z )
              writeln(fj,(+0.0072+0.0045)*v2+141.33); ( M5x )
              writeln(fj,(+0.0063-0.0045)*v2+141.33); ( M5y )
              writeln(fj,(+0.0045+0.0051)*v2);      ( M5z )
s 4,5 y 6 )   writeln(fj,(-0.0084-0.0067)*v2);      ( P6x ) ( Confluyen lado
              writeln(fj,(+0.0060+0.0048)*v2);      ( P6y )
              writeln(fj,(+0.0067+0.0067)*v2-424); ( P6z )
              writeln(fj,(+0.0045-0.0045)*v2+141.33); ( M6x )
              writeln(fj,(+0.0063-0.0045)*v2+141.33); ( M6y )
              writeln(fj,(-0.0045+0.0032)*v2);      ( M6z )
s 3,6 y 7 )   writeln(fj,(+0.0084+0.0067)*v2);      ( P7x ) ( Confluyen lado
              writeln(fj,(+0.0060+0.0048)*v2);      ( P7y )
              writeln(fj,(+0.0067+0.0067)*v2-424); ( P7z )
              writeln(fj,(+0.0045-0.0045)*v2+141.33); ( M7x )
              writeln(fj,(-0.0063+0.0045)*v2-141.33); ( M7y )
              writeln(fj,(+0.0045-0.0032)*v2);      ( M7z )
s 2,7 y 8 )   writeln(fj,(+0.0084+0.0067)*v2);      ( P8x ) ( Confluyen lado
              writeln(fj,(+0.0096+0.0077)*v2);      ( P8y )
              writeln(fj,(+0.0067+0.0067)*v2-424); ( P8z )
              writeln(fj,(+0.0072+0.0045)*v2-141.33); ( M8x )
              writeln(fj,(-0.0063+0.0045)*v2-141.33); ( M8y )
              writeln(fj,(-0.0045-0.0051)*v2);      ( M8z )
      Close(fj);
End.

```

```

program excoible(input,output);
const
  med:=200;
  sigma:=8.6476;
var
  a,b,x1,x2,x3,y1,y2,y3,m,x,y,cero,v,valor:real;
  p:array[1..16,1..6] of real;
  c:array[0..3] of real;
  t,c:array[1..8] of real;
  i,j,k,indica,indical,q,l,pos:integer;
  etiqueta:boolean;
  ent,ent1,sal:text;
  registro,titulo:string[125];
  www:string[1];
  www1:string[20];

function parabola(x,y,x1,x2,x3,y1,y2,y3:real):real;
begin
  parabola:=y-y1*(x-x2)*(x-x3)/((x1-x2)*(x1-x3))+y2*(x-x1)*(x-x3)/
  ((x2-x1)*(x2-x3))+y3*(x-x2)*(x-x3)/((x3-x2)*(x3-x1));
end;

Function Busca:real;
Var
  r:real;
  err:integer;
Begin
  While registro[pos]<>' ' Do pos:=pos+1;
  pos:=pos+1;
  While registro[pos]=' ' Do pos:=pos+1;
  Val(Copy(registro,pos,12),r,err);
  Busca:=r;
  pos:=pos+err;
End;

begin
  assign(ent,'a:marco3.res');reset(ent);
  assign(ent1,'a:veloci.dat');reset(ent1);
  assign(sal,'a:bitacora.res');append(sal);
  randomize;
  for i:=1 to 107 do
    readln(ent,registro);
  for j:=1 to 16 do
    begin
      readln(ent,registro);
      indica:=1;
      indicial:=1;
      pos:=1;
      for k:=1 to 6 do p[j,k]:=Busca;
    end;
  for l:=1 to 16 do
    begin
      for j:=1 to 6 do
        write(p[l,j]:11:4);
        writeln;
      end;
    end;
end;

```

```

fc[1]:=187.79;fc[2]:=185.69;fc[3]:=184.60;fc[4]:=187.28;fc[5]:=183.3
3;fc[6]:=184.32;fc[7]:=181.88;fc[8]:=187.16;
etiqueta:=false;
for i:=1 to 8 do
begin
for j:=1 to 2 do
begin
x:=pf1,1; y:=abs(pf1,4+j);
x1:=-374*fc[1];x2:=-170*fc[1];x3:=34*fc[1];
y1:=0;y2:=10.2*fc[1];y3:=0;
cero:=parabola(0,0,x1,x2,x3,y1,y2,y3);
valor:=parabola(x,y,x1,x2,x3,y1,y2,y3);
if valor*cero<0 then etiqueta:=true;
if etiqueta then writeln(i,valor);
end;
end;
readln(ent1,titulo);
readln(ent1,v);
if etiqueta then writeln('***FALLO***') else writeln('.....NO FA
LLD.....');
if etiqueta then writeln(sal,'FALLO ',v) else writeln(sal,'NO FALLO
',v);
close(ent);
close(ent1);
close(sal);
end.

```


PROGRAMA 5.2
PROBABILIDAD DE FALLA

Este programa calcula la probabilidad de falla de acuerdo con la expresión (5.2) del capítulo 5.

```

programa integra(input,output);
uses
  printer;
const
  n=2000;
  a1+a=1.2140192497570E+0001;
  beta=2.4726492295986E+0000;
  miu=186.4867;
  sigma=74.7822;
  pi=3.1415926;
var
  i,j,k      :integer;
  a,b,dx,u,v :double;
function f(x:double):double;
var
  t      :double;
begin
  t:=1/(exp(0.5*ln(2*pi)));
  t:=t/sigma;
  f:=t*exp(-(x-miu)*(x-miu)/(sigma*sigma))*exp(-exp((x-alfa)/beta));
end;
begin
  n:=0;b:=25;
  u:=0;v:=0;
  dx:=(b-a)/n;
  for i:=1 to n do
    begin
      v:=f(a+dx*(i-1))+4*f(a+dx*(i-1/2))+f(a+dx*i);
      u:=u+v*dx/4;
    end;
  writeln(LST,'La probabilidad de falla es:',u);
  writeln(LST,'alfa es:',alfa);
  writeln(LST,'beta es:',beta);
  writeln(LST,'miu es:',miu);
  writeln(LST,'sigma es:',sigma);
end.

```

CUADRO 5.1
 VELOCIDADES MAXIMAS DE VIENTO MENSUALES
 REGISTROS DEL OBSERVATORIO DE TACUBAYA
 m/s

12.200000	11.800000	15.000000
16.100000	11.300000	12.100000
11.300000	14.300000	11.400000
10.400000	10.850000	10.400000
13.300000	14.200000	11.200000
21.100000	13.400000	16.200000
13.600000	10.800000	10.200000
10.500000	12.200000	10.600000
14.200000	16.100000	13.000000
12.300000	15.600000	18.000000
14.700000	9.000000	16.000000
10.900000	11.700000	12.000000
14.900000	16.700000	16.000000
15.500000	13.500000	10.700000
12.000000	16.500000	10.700000
10.900000	10.600000	15.100000
12.100000	12.200000	28.400000
15.000000	18.100000	12.100000
11.000000	13.400000	10.200000
9.500000	8.200000	18.100000
15.000000	13.800000	13.900000
23.300000	11.100000	14.900000
13.000000	8.200000	10.900000
9.900000	10.000000	17.000000
10.300000	11.200000	13.400000
15.000000	12.900000	11.800000
9.100000	11.000000	10.700000
10.000000	11.600000	12.000000
17.000000	14.800000	13.100000
9.000000	17.000000	8.100000
6.000000	7.000000	14.600000
16.000000	20.000000	22.200000
18.800000	18.000000	16.200000
19.000000	18.000000	19.000000
11.800000	16.500000	12.300000
14.700000	17.000000	16.600000
17.000000	18.000000	22.700000
12.800000	12.000000	14.550000
12.000000	12.000000	11.200000
10.000000	16.100000	13.500000

13.900000
13.000000
13.700000
11.400000
15.000000
11.400000
10.200000
12.900000
13.500000
21.000000
14.300000
11.300000
14.600000
13.500000
11.000000
12.600000
14.900000
16.100000
12.000000
14.800000
14.400000
19.200000
14.500000
12.300000
14.000000
12.700000
14.500000
10.500000
15.100000
18.300000
11.200000
12.800000
16.800000
13.700000
12.700000
9.900000
12.900000
13.700000
13.500000
9.900000

13.100000
13.900000
12.000000
10.000000
15.800000
10.800000
11.000000
10.900000
14.600000
10.700000
10.000000
10.800000
13.200000
12.000000
12.600000
13.100000
20.600000
21.000000
11.900000
16.100000
21.700000
13.300000
14.200000
11.700000
15.800000
17.000000
17.600000
14.500000
16.900000
12.000000
12.300000
12.900000
12.900000
17.700000
14.000000
12.700000
16.800000
18.200000
12.300000
10.600000
14.000000

16.900000
10.000000
10.000000
12.900000
14.700000
10.900000
12.000000
11.400000
17.900000
12.800000
9.400000
11.000000
15.200000
11.500000
12.200000
16.900000
18.800000
13.400000
12.600000
12.800000
16.900000
18.500000
14.300000
14.000000
19.600000
12.400000
15.900000
15.800000
17.000000
12.800000
18.500000
12.100000
13.600000
13.300000
13.300000
13.000000
15.800000
15.600000
15.000000
12.500000

13.000000	14.100000	12.600000
11.000000	14.900000	16.200000
12.100000	10.000000	9.100000
10.800000	10.000000	13.000000
11.100000	16.000000	11.000000
12.100000	11.500000	13.700000
10.400000	10.700000	11.000000
13.500000	11.400000	14.900000
17.000000	14.300000	17.000000
12.800000	10.300000	11.800000
9.900000	9.300000	10.000000
10.400000	11.400000	11.500000
10.700000	17.000000	11.100000
12.100000	8.700000	10.800000
13.000000	9.600000	12.100000
9.900000	12.600000	12.200000
12.100000	12.900000	9.200000
11.200000	13.700000	12.200000
13.400000	11.800000	13.200000
10.400000	15.400000	14.000000
17.900000	17.200000	13.400000
12.900000	13.400000	12.500000
11.500000	11.100000	16.800000
17.400000	17.900000	19.200000
17.900000	20.200000	13.400000
12.500000	14.600000	13.600000
11.000000	17.500000	12.300000
14.100000	17.100000	15.700000
15.400000		

CUADRO 5.2
RESISTENCIA DE CONCRETO
REGISTROS DE OBRA FOVISSSE
kg/cm²

180.000000	181.000000	183.000000
187.000000	200.000000	185.000000
187.000000	181.000000	185.000000
183.000000	182.000000	180.000000
185.000000	183.000000	184.000000
181.000000	181.000000	182.000000
182.000000	183.000000	184.000000
188.000000	182.000000	187.000000
184.000000	196.000000	197.000000
187.000000	144.000000	197.000000
212.000000	186.000000	204.000000
189.000000	191.000000	187.000000
188.000000	192.000000	187.000000
197.000000	200.000000	198.000000
190.000000	184.000000	187.000000
190.000000	184.000000	197.000000
179.000000	186.000000	182.000000
187.000000	189.000000	182.000000
185.000000	181.000000	184.000000
182.000000	185.000000	187.000000