Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

Deformación de foliaciones holomorfas con primera integral.

TESIS
Que para obtener el título de
Doctor en Ciencias
(Matemáticas)
presenta :

Jesús Ruperto Muciño Raymundo

México D. F. **1989.**

INDICE

INTRODUCCION

Uno de los problemas clásicos de Sistemas Dinámicos es el estudio del comportamiento de ciclos límites para ecuaciones diferenciales. J. Iliasenko desarrolló una serie de técnicas para estudiar el comportamiento de ciclos límites en ecuaciones diferenciales complejas en $\mathbb{C}^2$, ver [I1].

Motivados por ese trabajo, nosotros presentamos ahora una extensión de sus técnicas para el caso *más* general de ciclos límites de foliaciones holomorfas con singularidades en variedades complejas, particularmente en $\mathbb{C}P^2$.

Una foliación holomorfa con singularidades en $\mathbb{C}P^2$, es una descomposición del plano proyectivo (excepto en un subconjunto analítico, llamado el conjunto singular de la foliación), en superficies de Riemann disjuntas entre sí y tal que satisface una condición de trivialidad local; que para todo punto en el plano proyectivo que no está en el conjunto singular existe un biholomorfismo local a un abierto de $\mathbb{C}^2$ tal que hace corresponder la descomposición con aquella en $\mathbb{C}^2$ inducida por lineas horizontales. A las superficies de Riemann las llamamos las hojas de la foliación. Ejemplos naturales de tales objetos pueden obtenerse a partir de tomar las curvas integrales de campos vectoriales ó bien considerando las fibras de aplicaciones racionales en $\mathbb{C}P^2$.

En el capítulo I el primer problema que atacamos es el de clasificar las foliaciónes holomorfas con singularidades en $\mathbb{C}P^2$. Podemos decir de manera muy informal que para nosotros dos foliaciónes son distintas si las descomposiciones asociadas son distintas contando las hojas con multlipicidades (en el sentido de Geometría Algebraica), aún si las descomposiciones asociadas difieren por un automorfismo complejo de $\mathbb{C}P^2$. El primer hecho a que llegamos es que las foliaciones holomorfas con singularidades forman de manera natural familias holomorfas $Fol(-e)$ que están clasificadas por un invariante discreto dado por una clase de Chern $-e < 0$ y que cada una de estas familias es un espacio proyectivo complejo. En este caso el invariante discreto $-e$ mide la complejidad de las foliaciones análogamente a como sucede con el grado para objetos algebraicos, esto es, mientras más grande es la clase de Chern, las hojas de las foliaciónes correspondientes tienen genéricamente topología más complicada y por otra parte el número de singularidades de la foliación crece o bien se hacen más degeneradas. A manera de ejemplo de foliaciones hacemos un pequeño estudio de aquellas foliaciones que están construidas a partir de aplicaciones racionales. Todo ello es el contenido del capítulo I.

En la primera parte del capítulo II conociendo las familias $Fol(-e)$ resulta bastante sencillo hablar de teoría de deformación de foliaciones holomorfas con singularidades, ya que para deformar una foliación bastará con considerar una aplicación holomorfa de algún espacio analítico al espacio de foliaciones correspondientes. Un caso particularmente importante de deformación de foliaciones es cuando sólo contamos con información a primer orden respecto a la deformación de la foliación, en cuyo caso diremos que tenemos una deformación infinitesimal de la foliación, esto es tenemos simplemente un vector tangente a alguna familia $Fol(-e)$. Mostramos que aún en está situación podemos hablar de una familia de foliaciones y en particular podemos construir submersiones que definan a la familia, es decir, tenemos un teorema de Frobenius infinitesimal.

Con el fin de extender el concepto de aplicación de primer retorno de Poincaré a foliaciones introducimos la holonomía de la foliación. Dado un lazo cerrado en una hoja podemos tomar una transversal local a la foliación por algún punto del lazo y seguir las hojas de la foliación a lo largo de una vecindad del lazo, con ello obtenemos una aplicación de la transversal en sí misma que nos mide qué tan distinta es la foliación de un fibrado trivial en la vecindad del lazo. En particular si la aplicación es la identidad la foliación es un fibrado trivial con fibra una vecindad tubular del lazo en la hoja que lo contiene y base la transversal local a la foliación. En caso contrario decimos que el lazo es un ciclo límite para la foliación. Si tenemos una deformacion de una foliación que está parametrizada por $\mathbb{C}$ entonces podemos considerar que tenemos una foliación de codimensión dos en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}P^2$, tomando la unión de todas las foliaciones en la deformación (pensando la deformación como una familia de foliaciones). Una pequeña transversal a un lazo en alguna hoja se puede extender a una transversal a la foliación de codimensión dos. Esto nos permite hablar de holonomía para deformación de foliaciones. El resultado principal del capítulo (Teorema 2.15), es una fórmula que nos permite hallar la derivada de la holonomía en el caso de una deformación infinitesimal, esto es, sólo teniendo información a primer orden de la deformación. Como una aplicación de esto tenemos criterios bajo los cuales un lazo cuya holonomía es la identidad persiste bajo una deformacíon, esto es, que existe una familia continua de lazos en las hojas de las foliaciones cercanas bajo la deformación de tal forma que den origen al lazo original. Esta es la segunda parte del capítulo II.

Un caso particularmente simple de foliaciones son aquellas que están descritas por las fibras de alguna aplicación racional en cuyo caso decimos que la foliación tiene una primera integral. Un cálculo sencillo nos muestra que las foliaciones con primera integral forman, restringidas a cierta condición de genericidad, subvariedades de las las familias $Fol(-e)$. En el caso de que una foliación admita una primera integral es bien conocido que todas las holonomías de lazos en sus hojas son la identidad. El teorema principal del capítulo III (Teorema 3.1), nos muestra que: una deformación infinitesimal de una foliación con primera integral es tal que su holonomía infinitesimal es la identidad para todo lazo contenido en las hojas de la foliación, si y sólo si la deformación infinitesimal asociada es un vector tangente a la subvariedad de foliaciones con primera integral genérica. Donde genérica significa que las hojas genéricas de la foliación sean irreducibles. Este teorema nos da pues una caracterización infinitesimal de aquellas deformaciones que tienen primeras integrales. La prueba de este teorema

CAPITULO I

FAMILIAS DE FOLIACIONES

En este primer capítulo se da un resumen breve de foliaciones en $\mathbf{C}P^2$. Nuestro primer objetivo será parametrizar las foliaciones en $\mathbf{C}P^2$ en familias que tienen asociado de manera natural un invariante discreto dado por una clase de Chern.

Consideremos L un haz de líneas sobre $\mathbf{C}P^2$ con clase de Chern c y homomorfismos holomorfos $\omega : L \to T^*\mathbf{C}P^2$, donde $T^*\mathbf{C}P^2$ es el has cotangente de $\mathbf{C}P^2$, con $\omega(p) : L_p \to T_p^*\mathbf{C}P^2$ la función lineal asociada en $p \in \mathbf{C}P^2$. Decimos que dos homomorfismos holomorfos ω, ω' de L en $T^*\mathbf{C}P^2$ son equivalentes si existe λ en $\mathbf{C}^*$ tal que $\omega = \lambda\omega'$, con esto establecemos:

1.1 DEFINICION. Una foliación holomorfa F en $\mathbf{C}P^2$ con singularidades es una clase de equivalencia de homomorfismos holomorfos $\omega : L \to T^*\mathbf{C}P^2$ tal que ω no sea idénticamente nula. El conjunto analítico dado por $Sing(F) = \{p \in \mathbf{C}P^2 | \omega(p) = 0\}$ es llamado el conjunto singular de F. En $\mathbf{C}P^2 - Sing(F)$ el núcleo de ω es 1-dimensional y determina una distribución integrable, cuyas variedades integrales son superficies de Riemann y las llamaremos las hojas de F.

Para mayores detalles sobre la definición ver [GM-M] ,[GM-O] .

Aplicando ahora el teorema de Cartan-Serre que garantiza la finitud de grupos de cohomología de una gavilla coherente en una variedad compacta (ver [G-H] pág.152), a la gavilla de secciones del haz $Hom(L, T^*\mathbf{C}P^2)$ se concluye que el conjunto:

$$E(L) = H^0(\mathbf{C}P^2, Hom(L, T^*\mathbf{C}P^2)) = \{\omega : L \to T^*\mathbf{C}P^2 | \textit{homomorfismo holomorfo}\}$$

es un $\mathbf{C}$ espacio vectorial de dimensión finita. Para ello recordemos que $Hom(L, T^*\mathbf{C}P^2)$ es una gavilla coherente ya que para todo $p \in \mathbf{C}P^2$ existe una vecindad U de p y un número finito de secciones locales $\omega_0, ..., \omega_n$ de $Hom(L, T^*\mathbf{C}P^2)$ sobre U tales que generan a la gavilla como módulo sobre las funciones holomorfas de U y las relaciones entre ese conjunto de generadores son a su vez finitamente generadas sobre U, ver [G-H] pag. 696.

El espacio de foliaciones holomorfas con singularidades en $\mathbf{C}P^2$ con haz cotangente L, que denotamos por $Fol(\mathbf{C}P^2, L)$ es el espacio proyectivo sobre $E(L)$.

Como los haces de líneas sobre $\mathbb{C}P^2$ están clasificados modúlo equivalencia analítica por su clase de Chern $c(L) \in \mathbb{Z} = H^2(\mathbb{C}P^2, \mathbb{Z})$ ver por ejemplo [G-H] pag. 144, entonces las familias $Fol(\mathbb{C}P^2, L)$ son clasificadas simplemente por su clase de Chern asociada $c(L)$.

En todo este trabajo usaremos la siguientes convenciones. Sea $L(-e)$ el has de líneas sobre $\mathbb{C}P^2$ con clase de Chern $-e < 0$. Como aquí sólo trabajamos foliaciones en $\mathbb{C}P^2$, abreviaremos $Fol(\mathbb{C}P^2, L(-e))$ simplemente por $Fol(-e)$.

Damos ahora una descripción más explícita de estas familias de foliaciones.

1.2 PROPOSICION. a).- Existe una correspondencia uno a uno entre aplicaciones ω en $E(L(-e))$ y 1-formas polinomiales en una carta afín $\mathbb{C}^2$ de $\mathbb{C}P^2$ con coordenadas (w_1, w_2), de la forma $\omega = \omega_{e-1} + \omega_{e-2} + ... + \omega_0$ tál que cada ω_j es una 1-forma polinomial homogénea de grado j y el término de grado superior se anula en el campo radial:

$$\omega_{e-1}(w_1\frac{\partial}{\partial w_1} + w_2\frac{\partial}{\partial w_2}) = 0.$$

b).- $Fol(-e)$ es un espacio proyectivo complejo de dimensión $e^2 - 2$.

Demostración. Primero estudiamos cómo se transforma una 1-forma polinomial bajo un cambio de coordenadas homogéneas en $\mathbb{C}P^2$.

Sean U_0, U_1 planos abiertos afines en $\mathbb{C}P^2$ con coordenadas $(z_1, z_2), (w_1, w_2)$ respectivamente y con función de transición ϕ, para $z_1 \neq 0$ dada como:

$$\phi(z_1, z_2) = [\frac{1}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}] = (w_1, w_2).$$

Sea ω una 1-forma polinomial en U_1 de grado menor o igual a $e - 1$, dada como $\omega = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=0}^{e-1} a_{ij} dw_i$ con a_{ij} polinomios homogéneos de grado j en las variables w_1, w_2. Calculando:

$$\phi^*\omega = \sum_{j=0}^{e-1}[a_{1j}(\frac{1}{z_1}, \frac{z_2}{z_1})(\frac{-dz_1}{z_1^2}) + a_{2j}(\frac{1}{z_1}, \frac{z_2}{z_1})(\frac{z_1dz_2 - z_2dz_1}{z_1^2})]$$

$$= \sum_{j=0}^{e-1}[(-a_{1j}(1, z_2) - a_{2j}(1, z_2)z_2)(\frac{dz_1}{z_1^{j+2}}) + a_{2j}(1, z_2)(\frac{dz_2}{z_1^{j+1}})]$$

por lo que $\phi^*\omega$ tiene un polo de orden $e+1$ en $\mathbb{C}P^2 - U_1$ a menos que el primer término entre paréntesis sea igual a cero para el término de grado máximo,

$$a_{1,e-1}(1, z_2) + a_{2,e-1}(1, z_2)z_2 = 0 \qquad (i)$$

en cuyo caso hay un polo de orden más pequeño.

Dividiendo por z_1^e la expresión (i) y usando que a_{ij} son polinomios homogéneos, la expresión se transforma a coordenadas w_1, w_2 como:

$$\sum_{i=1,2} a_{i,e-1}(w_1, w_2) w_i = (\sum_i a_{i,e-1} dw_i)(\sum_i w_i \frac{\partial}{\partial w_i}) = 0$$

que es la condición de que ω_{e-1} anule al campo radial.

Con ello tenemos que una 1-forma polinomial en U_1 se puede extender a $\mathbf{C}P^2$ como una aplicación holomorfa de $L(-e)$ en $T^*\mathbf{C}P^2$ si y sólo si se extiende como una 1-forma meromorfa con un polo en $\mathbf{C}P^2 - U_1$ de orden igual a e. Lo cual demuestra el inciso a).

Para el inciso b), basta calcular la dimensión de las 1-formas polinomiales descritas en a). Dicha dimensión es igual al doble de la dimensión del espacio de los polinomios homogéneos de grado $e-1$ en tres variables menos la dimensión que corresponde a la condición de que ω_{e-1} anule el campo radial, con lo cual tenemos que:

$$dim E(L(-e)) = 2\binom{e+1}{e-1} - \binom{e+1}{e} = e^2 - 1$$

de donde

$$dim(Fol(-e)) = dim E(L(-e)) - 1 = e^2 - 2.$$

$\square$

Es posible construir familias holomorfas de foliaciones para $\mathbf{C}P^n$ con $n > 2$ y para otras variedades complejas, ver [GM1] y [GM2].

Estudiamos ahora el caso particular de foliaciones con primera integral. Para ello recordemos que una aplicación racional de grado $e > 0$ está dada por $\frac{P}{Q} : \mathbf{C}P^2 \to \mathbf{C}P^1$ donde P, Q son polinomios homogéneos de grado e. Más adelante discutiremos qué condiciones en P y Q son interesantes para nosotros, en particular suponemos siempre que $\frac{P}{Q}$ es no constante. Entonces podemos pensar a las fibras de $\frac{P}{Q}$ como las hojas de alguna foliación en $\mathbf{C}P^2$. Para formalizar esta última afirmación, en el sentido de la Definición 1.1 tenemos el siguiente:

1.3 LEMA. Dada $\frac{P}{Q}$ una aplicación racional de grado $e > 0$. La 1-forma $\{P, Q\} := QdP - PdQ$ representa una foliación en $F(-2e)$, donde dP denota la diferencial en alguna carta afín.

Demostración. Claramente $\{P, Q\}$ es una 1-forma polinomial de grado $2e-1$. Para mostrar que el término homogéneo de grado $2e-1$ anula al campo radial, se utiliza que la función:

$\{\ ,\ \} : P(e) \times P(e) \to \{1\text{-}formas\ de\ grado\ 2e-1\}$

(donde $P(e)$ es el espacio de los polinomios homogéneos de grado e en 3 variables) es $\mathbb{C}$-bilineal y como la condición de anular al campo radial es lineal, se puede calcular simplemente para los elementos de la base formada por monomios del espacio $P(e)$. De donde las 1-formas $\{P, Q\}$ son como las descritas en la Proposición 1.2 y con ello se tiene que definen una foliación en $F(-2e)$. $\square$

1.4 DEFINICION. Una foliación $\mathcal{F}$ en $F(-2e)$ se dice que tiene una primera integral racional de grado e, si existe una aplicación racional $\frac{P}{Q}$ tal que $\mathcal{F}$ está determinada por $\{P, Q\}$.

Describimos rápidamente la topología de estas foliaciones. Sea $\mathcal{F}$ una foliación con una primera integral racional $\frac{P}{Q}$ de grado e.

El conjunto singular $Sing(\mathcal{F})$ está formado por dos tipos de puntos.

(*i*) Los puntos de indeterminación de la aplicación racional, definidos por la intersección $\{P = 0\} \cap \{Q = 0\}$, que por el Teorema de Bezout (ver por ejemplo [G-H] pag. 172), son a lo más e^2 puntos contados con multiplicidades; en estos puntos la aplicación $\frac{P}{Q}$ no está bien definida como función y puede ser descrita, salvo cambio de coordenadas como $f(\frac{z}{w})$, para f una función holomorfa. De aquí se sigue que la aplicación $\frac{P}{Q}$ toma todos los valores de $\mathbb{C}P^1$ en una vecindad cualquiera de un punto de indeterminación.

(*ii*) Por otra parte, tenemos los puntos críticos de $\frac{P}{Q}$ como función meromorfa, que también están en $Sing(\mathcal{F})$.

Las hojas de la foliación son superficies de Riemann dadas por las ecuaciones $\{\mu P - \lambda Q = 0\}$ para $\frac{\lambda}{\mu}$ en $\mathbb{C}P^1$. Consideramos que las hojas son no compactas ya que a cada superficie de Riemann $\{\mu P - \lambda Q = 0\}$ (que es compacta), debemos de quitarle los puntos correspondientes a $Sing(\mathcal{F})$; en particular, los puntos de indeterminación. Observemos que todas las superficies $\{\mu P - \lambda Q = 0\}$ pasan por los puntos de indeterminación.

1.5 EJEMPLO. Sean $P = 0$ y $Q = 0$ las ecuaciónes de dos cónicas en $\mathbb{C}P^2$, irreducibles y distintas entre si. Se tiene entonces que la foliación $\mathcal{F}$ asociada a la aplicación $\frac{P}{Q}$ tiene la siguiente descripción:

La foliación $\mathcal{F}$ tiene cuatro puntos de indeterminación, dados por $\{P = 0\} \cap \{Q = 0\}$. Las hojas de la foliación son entonces cónicas que pasan por esos cuatro puntos. Todas las cónicas son no degeneradas excepto tres (estas constan cada una de dos rectas que se cortan), que están dadas por los tres pares de rectas que pasan por los puntos de indeterminación. Además, por cada uno de estos pares de rectas se obtienen otros tres puntos singulares de la foliación que son de tipo Morse para la aplicación $\frac{P}{Q}$ (donde decimos que $p \in \mathbb{C}P^2$ es un punto de tipo Morse para la aplicación $\frac{P}{Q}$ si existe una vecindad abierta U de p tal que $\frac{P}{Q}$ puede escribirse salvo un cambio de coordenadas como $f(z, w) = z^2 - w^2$ en U). En consecuencia, $Sing(\mathcal{F})$ consta entonces de siete puntos singulares; cuatro puntos de indeterminación y tres de tipo Morse.

1.6 LEMA. Las foliaciones con primera integral racional de grado $e > 0$ forman de manera natural, una variedad grassmanniana $G(P(e), \mathbb{C}^2)$, de 2-planos sobre el espacio $P(e)$ de polinomios homogéneos de grado e en tres variables. Además, la dimensión de esta grassmaniana es igual a $e^2 + 3e - 2$.

Demostración. Basta observar que dos aplicaciones racionales $\frac{P}{Q}$ y $\frac{R}{S}$, de grado e determinan la misma foliación, si y sólo si, difieren como aplicaciones por un cambio de coordenadas en $\mathbb{C}P^1$, que son transformaciones de Möbius. De donde:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\alpha(\frac{R}{S}) + \beta}{\gamma(\frac{R}{S}) + \delta} = \frac{\alpha R + \beta S}{\gamma R + \delta S}$$

Con lo que se tiene que dos parejas de polinomios P, Q y R, S determinan la misma foliación si y sólo si generan el mismo dos plano en el espacio $P(e)$. Usando la definición de variedad grasmanniana es fácil calcular su dimensión. □

Se tiene entonces una inclusión $I : G(P(e), \mathbb{C}^2) \to Fol(-2e)$ cuya imagen la denotaremos por $FI(-2e)$, las foliaciones que tienen primera integral racional de grado e, las propiedades de esta inclusión las estudiaremos en la Proposición 3.7 .

Observemos que las familias $Fol(-e)$ contienen foliaciones que tienen primera integral racional si y sólo si $-e$ es un número par negativo. Por otra parte, el hecho de que una foliación en $Fol(-2e)$ tenga primera integral es no genérico en el sentido de Sistemas Dinámicos, ya que $FI(-2e)$ tiene codimensión grande en $Fol(-2e)$. Por ejemplo, para $e = 2$ tenemos que $dimFol(-2e) = 14$ mientras que $dimFI(-2e) = 8$.

1.7 OBSERVACION. A veces dos aplicaciones racionales de grado e pueden determinar la misma descomposición de $\mathbb{C}P^2$ mediante sus fibras en un sentido puramente conjuntista y sin embargo, no determinan la misma foliación en $Fol(-2e)$. Por ejemplo las foliaciones asociadas a:

$$\frac{P}{Q} = \frac{z^2}{w^2} \quad y \quad \frac{R}{S} = \frac{z^2 + zw + w^2}{w^2},$$

tienen como hojas uniones de rectas por el punto $(0,0)$ en $\mathbb{C}^2 = \{(z, w)\}$ y sin embargo $\{P, Q\} \neq \{R, S\}$. En este caso las aplicaciones $\frac{P}{Q}$ y $\frac{R}{S}$ se obtienen de componer la aplicación racional $\frac{z}{w}$ con funciones polinomiales de segundo grado. Con el fin de evitar estos casos degenerados podemos restringirnos a estudiar ciertas subfamilias.

1.8 DEFINICION. Decimos que una primera integral racional $\frac{P}{Q}$ es genérica si sus fibras genéricas son irreducibles, esto es, los valores en $\mathbb{C}P^1$ correspondientes a las fibras reducibles forman un conjunto discreto de puntos en $\mathbb{C}P^1$.

Por un resultado de Geometría Algebraica (ver [G-D], teorema 12.2.4), se tiene que las primeras integrales racionales genéricas de grado e, forman un abierto de Zariski en la variedad de primeras integrales racionales $G(P(e), \mathbb{C}^2)$. Una subfamilia bien conocida de estas primeras integrales genéricas son los llamados pinceles de Lefschetz, que son aplicaciones $\frac{F}{G}$ de grado e con e^2 puntos distintos de indeterminación, el resto de los puntos singulares son de tipo Morse y tal que todas las fibras críticas tienen valores distintos. Para más detalle sobre los pinceles de Lefschetz, ver [A-F] y [GM-M].

CAPITULO II

DEFORMACION DE FOLIACIONES Y HOLONOMIA

En este capítulo empezaremos por construir la teoría de deformación de foliaciones holomorfas en $\mathbb{C}P^2$ con singularidades. Utilizaremos el hecho de que conocemos explícitamente las familias $Fol(-e)$ y de que $\mathbb{C}P^2$ sólo tiene una estructura compleja, para estudiar la teoría de deformación de foliaciones.

Con el fin de desarrollar una teoría de deformación de foliaciones lo más completa posible utilizaremos el concepto de espacio analítico complejo. Recordemos que un espacio analítico complejo es una pareja $S = (|S|, O_S)$, donde $|S|$ es un espacio topológico tal que todo $p \in \bar{S}$ tiene una vecindad homeomorfa a $U \cap \{f_1 = 0, ..., f_k = 0\}$, para U un abierto de $\mathbb{C}^n$ con $f_1, ..., f_k$ funciones holomorfas en U y O_S es la gavilla de funciones holomorfas dada localmente por $O_{S,p} = O_U/\{f_1, ..., f_k\}$ para O_U las funciones holomorfas en U. Una aplicación holomorfa entre espacios analíticos complejos es una pareja $f = (|f|, f^*) : (|S|, O_S) \to (|R|, O_R)$ con $|f| : |S| \to |R|$ una función continua tal que $f^* : O_R \to |f|_* O_S$ es un homomorfismo de gavillas, donde $|f|_* O_S$ es la gavilla sobre $|R|$ que a cada abierto $V \subset |R|$ le asocia las funciones $O_S|_{f^{-1}(V)}$. Un caso particular de espacios analíticos complejos son las variedades complejas con sus gavillas de funciones holomorfas, en este caso el concepto de función holomorfa entre variedades complejas coincide con el de aplicación holomorfa entre espacios analíticos, para más detalles véase [F]. Si no hay necesidad de especificar la pareja $(|S|, O_S)$ por simplicidad escribiremos solamente S y lo mismo para aplicaciones holomorfas f.

Empezaremos por introducir una estructura adicional en las familias $Fol(-e)$.

Sea L un haz de líneas holomorfo sobre $\mathbb{C}P^2$ con clase de Chern $-e < 0$ y $H(-1)$ el haz de Hopf sobre el espacio proyectivo complejo $Fol(-e)$. Este haz de Hopf está determinado por asociar a cada punto en $\mathbb{C}P^{e^2-2}$ la línea compleja en $\mathbb{C}^{e^2-1}$ determinada por él (para mayores detalles véase [G-H] pag. 145). Sean Π_1 y Π_2 las proyecciones del espacio $Fol(-e) \times \mathbb{C}P^2$ sobre cada uno de los factores, $\tilde{\Pi}_1$ y $\tilde{\Pi}_2$ las proyecciones del espacio $E(L) \times \mathbb{C}P^2$ sobre cada uno de los factores.

2.1 LEMA. Existe un homomorfismo holomorfo en $Fol(-e) \times \mathbb{C}P^2$

$$\Omega : \Pi_1^* H(-1) \otimes \Pi_2^* L \to \Pi_2^* T^* \mathbb{C}P^2$$

tal que para cada $[\omega]$ en $Fol(-e)$, la restricción de Ω a $\{[\omega]\} \times \mathbb{C}P^2$ es la aplicación dada por $[\omega]$.

Demostración. La idea es primero realizar la construcción sobre $E(L) \times \mathbb{C}P^2$ y luego proyectarla sobre $Fol(-e) \times \mathbb{C}P^2$. Sea $\omega_0, \ldots, \omega_n$ una base del espacio $E(L)$ con coordenadas asociadas $(a_0, \ldots, a_n)$. Podemos considerar un homomorfismo holomorfo de haces

$$\tilde{\Omega} : \Pi_2^* L \to \Pi_2^* T^* \mathbb{C}P^2$$

$$\tilde{\Omega}(a_0, \ldots, a_n : p) = \sum_{i=0}^{n} a_i \omega_i(p) : L_p \to T_p^* \mathbb{C}P^2 \ ,$$

donde $p \in \mathbb{C}P^2$ y claramente el anterior homomorfismo holomorfo determina un único homomorfismo holomorfo de $\Pi_2^* L$ en $\Pi_2^* T^* \mathbb{C}P^2$, identificando $\Pi_2^* L|_{(a_0, \ldots, a_n : p)}$ con L_p y $\Pi_2^* T^* \mathbb{C}P^2|_{(a_0, \ldots, a_n : p)}$ con $T_p^* \mathbb{C}P^2$.

Para $\lambda \in \mathbb{C}$ observemos que $\tilde{\Omega}(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n : p) = \lambda \tilde{\Omega}(a_0, \ldots, a_n : p)$ por lo que $\tilde{\Omega}$ no desciende a un homomorfismo holomorfo en $Fol(-e) \times \mathbb{C}P^2$. Consideremos ahora la proyección natural

$$\Pi : E(L) - \{0\} = E(L)_0 \to Fol(e) \ .$$

Existe una sección natural σ del haz de lineas $\Pi^* H(-1)$ sobre $E(L)_0$, tal que $\sigma(\omega) = \omega$ como elemento de $\Pi^* H(-1)_\omega = \mathbb{C} \cdot \omega$. Esta sección tiene la propiedad de que $\sigma(\lambda\omega) = \lambda\sigma(\omega)$. De donde el homomorfismo holomorfo de haces sobre $E(L)_0 \times \mathbb{C}P^2$, dado por

$$\frac{1}{\sigma}\tilde{\Omega} : \Pi^* H(-1) \otimes \Pi_2^* L \to \Pi_2^* T^* \mathbb{C}P^2$$

sobre $E(L)_0 \times \mathbb{C}P^2$, es invariante bajo multiplicación por λ en $\mathbb{C}^*$. Usando

$$\Pi : E(L)_0 \times \mathbb{C}P^2 \to Fol(-e) \times \mathbb{C}P^2$$

$$(\omega, p) \mapsto ([\omega], p) \ ,$$

es posible llevar este homomorfismo holomorfo $\frac{1}{\sigma}\tilde{\Omega}$ sobre $Fol(-e) \times \mathbb{C}P^2$, de donde se tiene el homnomorfismo holomorfo Ω a que se refiere el Lema. □

Sea S un espacio analítico y Λ_1 y Λ_2 las proyecciones de $S \times \mathbb{C}P^2$ sobre cada uno de los factores y J un haz de lineas sobre $S \times \mathbb{C}P^2$.

2.2 DEFINICION. Una familia $\tilde{F}$ de foliaciones holomorfas en $\mathbb{C}P^2$ con espacio cotangente J parametrisada por un espacio analítico S, es un un homomorfismo holomorfo de haces sobre $S \times \mathbb{C}P^2$

$$\Theta : J \to \Lambda_2^* T^* \mathbb{C}P^2 \ .$$

Observemos que para cada $t \in S$ fijo, tenemos un homomorfismo holomorfo $\Theta(t,p) : J_{(t,p)} \to \Lambda_2^* T^*_{(t,p)} \mathbf{C}P^2$ E identificando $\Lambda_2^* T^*_{(t,p)} \mathbf{C}P^2$ con $T_p^* \mathbf{C}P^2$ y como $J_{(t,p)}$ es un haz de lineas sobre $\{t\} \times \mathbf{C}P^2 \subset S \times \mathbf{C}P^2$ la clase de equivalencia de Θ determina una foliación holomorfa en $\{t\} \times \mathbf{C}P^2$, si $\Theta(t,p)$ no es identicamente nulo para $p \in \mathbf{C}P^2$.

Tenemos ahora un Corolario del Lema 2.1.

2.3 COROLARIO. Sea F en $Fol(-e)$ una foliación representada por ω en $E(L)_0$. Dado un espacio analítico S con un punto marcado $o \in |S|$ y una aplicación holomorfa

$$f : (S, o) \to (Fol(-e), \omega)$$

donde $|f|(o) = \omega$. Se tiene asociada una única familia de foliaciones dada por el homomorfismo holomorfo sobre $S \times \mathbf{C}P^2$ determinado por

$$f^*\Omega : f^*(\Pi_1^* H(-1) \otimes \Pi_2^* L) \to \Pi_2^* T^* \mathbf{C}P^2.$$

□

A la familia de foliaciones dada por f la llamaremos una deformación de F.

Los homomorfismos holomorfos Ω son conocidos como familias universales en el sentido de Geometría Algebraica, ver [GM2] o [N] pag. 23.

Construimos ahora de manera explícita los vectores tangentes a los espacios $Fol(-e)$ de tal forma que se representen como 1-formas, esto nos será de utilidad para estudiar las deformaciones de foliaciones de una manera infinitesimal. Para esto empezamos por recordar la definición de espacio tangente a un espacio analítico.

Sea $S = (|S|, O_S)$ un espacio analítico y sea p un punto marcado en $|S|$ y sea $O_{S,p}$ el álgebra local de gérmenes de funciones holomorfas de S en p con m_p, el ideal maximal asociado a p. Entonces el espacio tangente a S en p es $T_pS = Hom_{\mathbf{C}}(m_p/m_p^2, \mathbf{C})$, ver por ejemplo [S] pag. 75 o [F] pag. 77.

Deformar infinitesimalmente una foliación holomorfa con singularidades, dada localmente por una 1-forma ω, puede pensarse como dar una colección de 1-formas locales $\{\omega + t\eta\}$ que dependen del parámetro $t \in \mathbf{C}$ hasta primer orden y tal que cuando t es igual a cero se obtiene ω. Es por esto que estamos interesados en estudiar expresiones de la forma $\omega + t\eta$.

Para formalizar la idea anterior sea A el espacio analítico que consta solamente de un punto $|A| = \{o\}$ y cuya gavilla O_A de funciones holomorfas es isomorfa a $\mathbf{C} \oplus \mathbf{C} \cdot t$, con $t^2 = 0$, este es el conjunto $\{a + bt \mid a, b \in \mathbf{C}\}$ donde las operaciones de adición y producto son como en el espacio de polinomios haciendo $t^2 = 0$, ver [Hr] pag. 265 .

2.4 LEMA. Existe una correspondencia uno a uno entre vectores en T_pS y aplicaciones holomorfas $\phi = (|\phi|, \phi^*) : A \to S$ con $|\phi|(o) = p$.

Demostración. Una aplicación holomorfa $\phi : A \to S$ con $|\phi|(o) = p$ está determinada por el morfismo local de $\mathbf{C}$-álgebras que induce $\phi^* : O_{S,p} \to \mathbf{C} \oplus \mathbf{C} \cdot t$, ya que el morfismo es local, esto es, $\phi^{*-1}(\mathbf{C}\cdot t) = m_p$, ver [Hr] pag. 73. Por ello se tiene que $\phi^* : m_p \to \mathbf{C}\cdot t$ y $\phi^*(m_p^2) \subset \phi^*(m_p)^2 = 0$, de tal forma que ϕ^* induce una aplicación $\phi^* : m_p/m_p^2 \to \mathbf{C}\cdot t$ que da lugar a un elemento en $Hom_{\mathbf{C}}(m_p/m_p^2, \mathbf{C})$. Inversamente dada una aplicación $\mathbf{C}$-lineal $\mathbf{A} : m_p/m_p^2 \to \mathbf{C}$ construimos el morfismo local de álgebras $\lambda^* : O_{S,p} \to \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}\cdot t$ como $\lambda^*(f) = f(0) + \mathbf{A}\circ\Pi(f - f(0))\cdot t$, donde $\Pi : m_p \to m_p/m_p^2$ es la aplicación cociente. □

El producto $A \times \mathbf{C}P^2$ puede pensarse como una familia de planos proyectivos parametrizados por el espacio analítico A. Este producto $A \times \mathbf{C}P^2$ como espacio analítico tiene el mismo espacio topológico asociado que $\mathbf{C}P^2$, con su topología usual de variedad compleja pero sus funciones holomorfas son diferentes. Si U es un abierto de $\mathbf{C}P^2$ y O_U es su correspondiente gavilla de funciones holomorfas, entonces la gavilla de funciones holomorfas en $A \times U$ está dada por $O_U \oplus tO_U$ con $t^2 = 0$.

Fijo L un has de líneas holomorfo sobre $\mathbf{C}P^2$, definido sobre $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta, por cociclos $\{\xi_{\alpha\beta}\}$. Entonces si $\Pi_2 : A \times \mathbf{C}P^2 \to \mathbf{C}P^2$ es la proyección sobre el segundo factor tenemos que $\Pi_2^* L$ es un has de líneas holomorfo en $A \times \mathbf{C}P^2$ definido en la cubierta $\{A \times U_\alpha\}$ por cociclos $\{\xi_{\alpha\beta}\cdot Id\}$, donde Id es la matriz identidad de dos por dos. Más específicamente, en U_α éste es el has $U_\alpha \times (\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}\cdot t)$. Con ello tenemos que $\Pi_2^* L = L \oplus tL$. El has $\Pi_2^* T^*\mathbf{C}P^2$ sobre $A \times \mathbf{C}P^2$ llamado el has cotangente relativo a la proyección $A \times \mathbf{C}P^2 \to \mathbf{C}P^2$, es isomorfo a $T^*\mathbf{C}P^2 \oplus tT^*\mathbf{C}P^2$. Finalmente observemos que si $f + tg$ es una función holomorfa en $A \times U_\alpha$ y $\omega + t\eta$ es una 1-forma relativa , entonces $(f + tg)(\omega + t\eta) = f\omega + t(g\omega + f\eta)$.

Un homomorfismo holomorfo de haces $\Theta : L \oplus tL \to T^*\mathbf{C}P^2 \oplus tT^*\mathbf{C}P^2$ sobre $A \times \mathbf{C}P^2$ es un homomorfismo holomorfo entre haces de líneas sobre $\mathbf{C}P^2$ que tiene la propiedad de ser $(O_U \oplus tO_U)$-lineal sobre cualquier abierto U. Como $L \oplus tL$ es localmente isomorfo a $(O_U \oplus tO_U)$ podemos encontrar una cubierta U_α de $\mathbf{C}P^2$ donde L está descrito por cociclos $\{\xi_{\alpha\beta}\}$ y de acuerdo a esta descripción Θ está dada en U_α por la 1-forma $\omega_\alpha + t\eta_\alpha$. Por las condiciones de cociclo tenemos que ω_α y η_α pegan dando lugar a aplicaciones de haces $\omega, \eta : L \to T^*\mathbf{C}P^2$, con lo que $\Theta = \omega + t\eta$.

2.5 LEMA. Sea $\omega : L \to T^*\mathbf{C}P^2$ una aplicación en $E(L)$. Existe una correspondencia uno a uno entre el espacio tangente $T_\omega E(L)$ y homomorfismos holomorfos de haces $\omega + t\eta : L \oplus tL \to T^*\mathbf{C}P^2 \oplus tT^*\mathbf{C}P^2$ en $A \times \mathbf{C}P^2$, con η en $E(L)$.

Demostración. Por el Lema 2.4 hay una correspondencia uno a uno entre los vectores en $T_\omega E(L)$ y las aplicaciones holomorfas $\phi : (A, 0) \to (E(L), \omega)$. Usando la familia $\tilde{\Omega}$ del Lema 2.1 análogamente a como se uso Ω en el Corolario 2.3, obtenemos para cada ϕ un homomorfismo holomorfo de haces sobre $A \times \mathbf{C}P^2$ como $(\quad) : L \oplus tL \to T^*\mathbf{C}P^2 \oplus tT^*\mathbf{C}P^2$ que necesariamente es de la forma $\omega + t\eta$ para η en $E(L)$. Por otra parte, usando la construcción de $\tilde{\Omega}$ y la descripción de los haces de linea sobre $A \times \mathbf{C}P^2$ es posible ver que si ϕ representa alguna η en $T_\omega E(L)$ entonces $\phi^*(\tilde{\Omega}) = \omega + t\eta$, lo que demuestra el Lema. □

Como consecuencia de lo anterior, tenemos:

2.6 COROLARIO. Sea $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}ol(-e)$ la foliación asociada a $\omega : L \to T^*\mathbb{C}P^2$. Existe una correspondencia uno a uno entre el espacio tangente $T_{\mathcal{F}}\mathcal{F}ol(-e)$ y los elementos del espacio cociente $E(L)/\mathbb{C}\cdot\omega$. Asociado a cada clase $[\eta]$ en $E(L)/\mathbb{C}\cdot\omega$ el homomorfismo holomorfo $\omega + t\eta : L \oplus tL \to T^*\mathbb{C}P^2 \oplus tT^*\mathbb{C}P^2$.

Demostración. Basta observar que si tomamos la proyección $\Pi : E(L)_0 \to \mathcal{F}ol(-e)$, entonces tenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathbb{C}\cdot\omega \to T_\omega E(L) \to T_{\mathcal{F}}\mathcal{F}ol(-e) \to 0 \ .$$

$\square$

2.7 DEFINICION. Si $[\eta] = \{\eta + t\omega |\ t \in \mathbb{C}\}$ es un vector en $T_{\mathcal{F}}\mathcal{F}ol(-e)$ decimos que es una deformación infinitesimal de la foliación $\mathcal{F}$.

En todo lo que sigue para simplificar nuestra notación escribiremos simplemente η para las clases $[\eta]$.

Observemos que una deformación infinitesimal es una familia de foliaciones parametrizada por el espacio analítico A.

Con el fin de estudiar la deformación de la holonomía de familias de foliaciones introducimos cartas adaptadas a la foliación.

Sea $\mathcal{F}$ una foliación determinada por $\omega : L \to T^*\mathbb{C}P^2$ y $M = \mathbb{C}P^2 - Sing(\mathcal{F})$, con $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de M y coordenadas $\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{C}^2$ y las funciones de transición asociadas $\phi_{\alpha\beta} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$. Suponemos además que estas cartas determinan a la foliación, esto es, $\mathcal{F}$ está descrita localmente por $\phi_\alpha^* dz_{\alpha 2}$ donde $(z_{\alpha 1}, z_{\alpha 2})$ son coordenadas para cada polidisco V_α. Observemos que cualquier 1-forma no idénticamente nula $f_\alpha(z_{\alpha 1}, z_{\alpha 2})dz_{\alpha 2}$ también define a la foliación y si nosotros pedimos que esta 1-forma sea cerrada entonces $f_\alpha(z_{\alpha 2})dz_{\alpha 2} = \omega_\alpha$, lo que implica que el cociclo $\xi_{\alpha\beta}$ tal que $\omega_\alpha = \xi_{\alpha\beta}\omega_\beta$ depende sólo de la variable $z_{\beta 2}$. Resumiendo, si la foliación está definida por 1-formas cerradas entonces los cociclos $\{\xi_{\alpha\beta}\}$ son constantes a lo largo de las hojas de la foliación.

Asociadas a las funciones de transición tenemos una familia de submersiones dadas como sigue. Sea Π_2 la proyección sobre la segunda coordenada en $\mathbb{C}^2$ y $W_\alpha = V_\alpha \cap \{(0,w)|w \in \mathbb{C}\}$, entonces las funciones $\tilde{\phi}_\alpha = \Pi_2 \circ \phi_\alpha : U_\alpha \to W_\alpha \subset \mathbb{C}$ son submersiones. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que cada $\tilde{\phi}_\alpha$ tiene fibras conexas con lo que tenemos funciones de transición $\tilde{\phi}_{\alpha\beta} : \tilde{\phi}_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \tilde{\phi}_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ para las submersiones $\{\tilde{\phi}_\alpha\}$.

Consideremos $\tilde{\mathcal{F}}$ una familia de foliaciones dada por $f : S \to \mathcal{F}ol(-e)$, donde S es una variedad compleja. El conjunto singular de la familia $\tilde{\mathcal{F}}$ es el subespacio analítico $Sing(\tilde{\mathcal{F}}) \subset S \times \mathbb{C}P^2$ y definido por $\{f^*\Omega = 0\}$. Podemos entonces aplicar el Teorema de integrabilidad de Frobenius (véase [Ch] pag. 89), para obtener una cubierta $\{U_\alpha\}$ de $(S \times \mathbb{C}P^2) - Sing(\tilde{\mathcal{F}})$ y biholomorfismos $\Phi_\alpha : U_\alpha \to S_\alpha \times V_\alpha \subset S \times \mathbb{C}^2$, donde

S_α y V_α son abiertos. Si (z, w) son coordenadas de $\mathbf{C}^2$, entonces la 1-forma $\Phi_\alpha^* dw$ define a $\tilde{F}$ en U_α. Por otra parte las funciones de transición $\Phi_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}$ son biholomorfismos locales de $S \times \mathbf{C}^2$ que no dependen de z. Poniendo en $S \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ la topología discreta en el primer y tercer factor y la topología euclidiana en el segundo obtenemos en $(S \times \mathbf{C}P^2) - Sing(\tilde{F})$ una estructura de uno variedad compleja formada por una unión no numerable de componentes conexas. Llamaremos a estas componentes conexas las hojas de la familia de foliaciones $\tilde{F}$. Observemos que cada una de estas hojas está contenida en algún subconjunto $\{t\} \times \mathbf{C}P^2 \subset S \times \mathbf{C}P^2$.

Podemos observar que las submersiones $\{\tilde{\phi}_\alpha\}$ determinan a la foliación. En el caso de una deformación parametrizada por una variedad compleja usando los biholomorfismos $\{\Phi_\alpha\}$ es posible construir submersiones que definan a la deformación $\tilde{F}$. El siguiente Lema nos muestra que para una deformación infinitesimal de la foliación también es posible definir submersiones que determinen a la deformación infinitesimal, podemos decir que es un Teorema de Frobenius para deformaciones infinitesimales.

2.8 LEMA. Para cada deformación infinitesimal dada por $\eta : L \to T^*\mathbf{C}P^2$ de la foliación F, existen aplicaciones holomorfas

$$\tilde{\phi}_\alpha + t\tilde{\psi}_\alpha : A \times U_\alpha \to A \times W_\alpha \subset \mathbf{C} \oplus \mathbf{C} \cdot t$$

con funciones de transición $\tilde{\phi}_{\alpha\beta} + t\tilde{\psi}_{\alpha\beta}$ y tales que las aplicaciones holomorfas

$$\{(\tilde{\phi}_{\alpha\beta} + t\tilde{\psi}_{\alpha\beta})^* dz_{\alpha 2}\}$$

determinan a la deformación infinitesimal dada por η .

Demostración. Sean $\omega_\alpha = \phi_\alpha^* dz_{\alpha 2}$ las 1-formas que definen a la foliación F y η_α las 1-formas que definen a la deformación infinitesimal, dando lugar a aplicaciones $\{\omega_\alpha + t\eta_\alpha\}$. Por otro lado para cada función holomorfa f_α en U_α la deformación infinitesimal también puede ser definida por $(1 + tf_\alpha)(\omega_\alpha + t\eta_\alpha) = \omega_\alpha + t(\eta_\alpha + f_\alpha\omega_\alpha)$, el término $f_\alpha\eta_\alpha$ no tiene ninguna contribución. Y si en particular tenemos otra 1-forma $\tilde{\eta}_\alpha$ tal que $\tilde{\eta}_\alpha - \eta_\alpha = f_\alpha\omega_\alpha$ llegamos a:

2.9 OBSERVACION. Cualquier otra 1-forma $\tilde{\eta}_\alpha$ tal que su restricción en las hojas de F coinciden con las de la 1-forma η_α define la misma deformación infinitesimal η en U_α.

Elegimos ahora una colección $\{\Sigma_\alpha\}$ de secciones transversales a la foliación en cada U_α y definimos

$$\tilde{\psi}_\alpha(p) = \int_{\delta(p)} \eta_\alpha \ ,$$

donde cada $\delta(p)$ es una curva contenida en la hoja $K(p) \subset (\mathbf{C}P^2 - Sing(F))$ de F que contiene a p y que une el punto $\Sigma_\alpha \cap K(p)$ con p. Observemos que las integrales no dependen de las curvas $\delta(p)$ ya que sin perdida de generalidad podemos suponer que las intersecciones $U_\alpha \cap K(p)$ son Superficies de Riemann simplemente conexas y las

1-formas η_α son holomorfas. Claramente $d\tilde{\psi}_\alpha$ coincide con η_α restringida a las hojas de la foliación, de donde

$$(\tilde{\phi}_{\alpha\beta} + t\tilde{\psi}_{\alpha\beta})^* dz_{\alpha 2} = \omega_\beta + t\tilde{\psi}_\beta^* dz_{\beta 2}$$

define a η en U_α. Podemos entonces definir $\psi_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{C}^2$ como $\psi_\alpha(p) = (0, \tilde{\psi}_\alpha(p))$ con ello tenemos que

$$\phi_\alpha + t\psi_\alpha : A \times U_\alpha \to A \times \mathbf{C}^2 = \mathbf{C}^2 \oplus \mathbf{C}^2 \cdot t$$

es una aplicación holomorfa. No es difícil ver que las correspondientes funciones de transición $\phi_{\alpha\beta} + t\psi_{\alpha\beta}$ preservan las foliaciones en $A \times U_\alpha$ dadas por $\omega_\alpha + t\eta_\alpha$, lo que termina la demostración del Lema. □

Utilizando lo anterior podemos ahora hablar de deformación de holonomía para deformaciones infinitesimales de foliaciones. Primeramente recordamos el concepto de holonomía para foliaciones.

Sea F una foliación definida por submersiones $\tilde{\phi}_\alpha = \Pi_2 \circ \phi_\alpha : U_\alpha \to W_\alpha \subset \mathbf{C}$, se tiene entonces una colección de biholomorfismos locales de $\mathbf{C}$ dada por $\{\tilde{\phi}_\alpha \circ \tilde{\phi}_\beta^{-1}\}$. Dada una curva δ en alguna hoja de F, mostramos como asociarle una composición de elementos en $\{\tilde{\phi}_\alpha \circ \tilde{\phi}_\beta^{-1} = \tilde{\phi}_{\alpha\beta}\}$.

Dados dos puntos p y q en la hoja K de la foliación F y una curva continua $\delta : [0,1] \to K$ satisfaciendo que $\delta(0) = p$ y $\delta(1) = q$. Consideramos una partición $0 = t_0 < t_1 <, \ldots, < t_r = 1$ del intervalo $[0,1]$ tal que tiene asociados elementos de una cubierta $\{U_0, \ldots, U_{r-1}\}$ tal que $\delta([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ para $i = 0, \ldots, r-1$. Podemos ahora componer los elementos asociados en $\{\tilde{\phi}_\alpha \circ \tilde{\phi}_\beta^{-1} = \tilde{\phi}_{\alpha\beta}\}$ a la colección $U_0, \ldots, U_{r-1}$ respetando el orden, con lo que obtenemos un biholomorfismo local de $\mathbf{C}$ que denotamos por

$$h_\delta : \tilde{\phi}_0(U_0) \to \tilde{\phi}_{r-1}(U_{r-1})$$
$$h_\delta(z) = [\tilde{\phi}_{r-1\ r-2} \circ \ldots \circ \tilde{\phi}_{2\ 1} \circ \tilde{\phi}_{1\ 0}](z) \ .$$

2.10 DEFINICION. La colección de biholomorfismos locales de $\mathbf{C}$ generada por composiciones de elementos de $\{h_\delta\}$, con dominios de definición los abiertos máximos donde las composiciones tengan sentido, es llamado el pseudogrupo de holonomía de la foliación F.

Muchas de las propiedades de las funciones h_δ y por lo tanto del pseudogrupo de holonomía no dependen de las elecciones hechas en la construccíon, en particular h_δ sólo depende de la clase homotopía de δ en la superficie de Riemann K. Una discusión amplia de esto puede hallarse en [H].

Si hacemos $p = q$ en la hoja K y $U_0 = U_{r-1}$ obtenemos :

2.11 DEFINICION. La representación asociada

$$h : \pi_1(K, p) \to Bihol(\mathbf{C}, \tilde{\phi}_0(p)) \ ,$$

$$\delta \mapsto h_\delta .$$

la llamaremos la holonomía de la hoja K con punto base p. A su derivada calculada en $\tilde{\phi}_1(p)$,

$$Dh : \pi_1(K, p) \to \mathbb{C} ,$$
$$\delta \mapsto Dh_\delta$$

la llamaremos la holonomía lineal de la hoja K con punto base p.

Obsérvese que el concepto de holonomía puede definirse para foliaciones reales de cualquier dimensión. Es desde ese punto de vista una generalización de la aplicación de primer retorno de Poincaré para órbitas cerradas de campos vectoriales, ver por ejemplo [GM-O] .

Como un ejemplo de lo anterior podemos recordar el siguiente hecho que es bien conocido.

2.12 LEMA. Sea una foliación F tal que tiene una primera integral racional. Entonces para toda hoja K y todo punto base P la correspondiente holonomía

$$h : \pi_1(K, p) \to Bihol(\mathbb{C}, \tilde{\phi}_0(p))$$

es trivial, esto es $h_\delta = Identidad$ para todo δ.

Demostración. Basta observar que si $\frac{P}{Q}$ es una primera integral de la foliación, entonces ella misma puede tomarse como una submersión que define a F globalmente, de donde las composiciones $\{\tilde{\phi}_\alpha \circ \tilde{\phi}_\beta^{-1}\}$ son siempre la identidad, con lo que el resultado sigue. □

Extendemos ahora los anteriores conceptos para el caso de familias de foliaciones, obsérvese que utilizamos los términos familia y deformación indistintamente.

Consideremos $\tilde{F}$ una deformación de la foliación F parametrizada por una variedad compleja S o bien por el espacio analítico A, que por comodidad denotaremos también por S. Sea $\{\tilde{U}_\alpha\}$ una cubierta abierta de $(S \times \mathbb{C}P^2) - Sing(\tilde{F})$ con biholomorfismos asociados $\Phi_\alpha : \tilde{U}_\alpha \to S \times V_\alpha \subset S \times \mathbb{C}^2$, si $\Pi_2 : S \times \mathbb{C}^2 \to S \times \mathbb{C}$ es la identidad en S y la proyección sobre la segunda coordenada de $\mathbb{C}$, entonces las funciones $\tilde{\Phi}_\alpha = \Pi \circ \Phi_\alpha : \tilde{U}_\alpha \to S \times \widetilde{W}_\alpha$ son submersiones que definen a $\tilde{F}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que cada una de esa submersiones tiene fibras conexas con lo que están bien definidas sus composiciones y obtenemos una familia de biholomorfismos locales de $S \times \mathbb{C}$ determinada por $\{\tilde{\Phi}_\alpha \circ \tilde{\Phi}_\beta^{-1}\}$.

Dada una curva δ contenida en alguna hoja de $\tilde{F}$ podemos asociarle un biholomorfismo local H_δ de $S \times \mathbb{C}$ análogamente a como se hizo para la Definición 2.9.

2.13 DEFINICION. La colección de biholomorfismos locales de $S \times \mathbb{C}$ generada por composiciones de elementos de $\{H_\delta\}$, con dominios de definición los abiertos máximos donde las composiciones tengan sentido, es llamado el pseudogrupo de holonomía de la familia $\tilde{F}$.

Procediendo como antes es fácil generalizar la Definición 2.9 a :

2.14 DEFINICION. La representación asociada ,

$$H : \pi_1(K,p) \to Bihol(S \times \mathbb{C}, \tilde{\Phi}_0(p)) ,$$
$$\delta \mapsto H_\delta$$

la llamaremos la holonomía de la hoja K con punto base p con respecto a la familia $\tilde{F}$. A su derivada calculada en $\tilde{\Phi}_0(p)$,

$$DH : \pi_1(K,p) \to \{ \begin{pmatrix} Id_n & v \\ 0 & z \end{pmatrix} | v \in \mathbb{C}^n, z \in \mathbb{C}^* \} \subset GL(n+1,\mathbb{C}) ,$$
$$\delta \mapsto DH_\delta$$

donde n es la dimensión de S y Id_n es la matriz identidad, la llamaremos la holonomía lineal de la hoja K con punto base p con respecto a la familia $\tilde{F}$.

Llegamos ahora al resultado principal del capítulo.

2.15 TEOREMA. Sea una foliación F dada por $\omega : L \to T^*\mathbb{C}P^2$ y una carta abierta U de $\mathbb{C}P^2$ tal que ahí F está definida por una 1-forma ω_1. Sea δ un lazo contenido en U y en una hoja K de F, con holonomía asociada $h_\delta = Identidad$. Entonces dada una deformación infinitesimal η de F, definida como $\omega_1 + t\eta_1$ en U, la holonomía lineal de la hoja K con respecto a la familia $\tilde{F}$ inducida por η toma la forma

$$DH_\delta = \begin{pmatrix} 1 & \int_\delta \eta_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de U con submersiones asociadas $\tilde{\phi}_\alpha : U_\alpha \to W_\alpha$ que definen localmente a F y funciones de transición $\tilde{\phi}_{\alpha\beta}(z_{\alpha 2}) = z_{\beta 2} + c_{\alpha\beta}$, podemos elegir $c_{\alpha\beta}$ constantes en $\mathbb{C}$ pues $h_\delta = Identidad$. Como $\omega_\alpha = \omega_\beta$ en $U_\alpha \cap U_\beta$ entonces, las funciones de transición para L en esta cubierta son $\xi_{\alpha\beta} = 1$, por lo que la deformación está descrita en U por una 1-forma η_1 con $\eta_\alpha = \eta_1|_{U_\alpha}$. Como en la prueba del Lema 2.8 hacemos

$$\tilde{\psi}_\alpha(p) = \int_{p_\alpha}^{p} \eta_\alpha ,$$

donde esta integral está calculada usando curvas contenidas en las hojas de F. Entonces $\tilde{\phi}_\alpha + t\tilde{\psi}_\alpha$ son submersiones que definen a la deformación infinitesimal en U_α. Si tenemos que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces las funciones de transición $(Id + c_{\alpha\beta}) + t\tilde{\psi}_{\alpha\beta}$ satisfacen para p en $U_\alpha \cap U_\beta$ que :

$$\tilde{\phi}_\alpha(p) + t\int_{p_\alpha}^{p} \eta_\alpha = [(Id + c_{\alpha\beta}) + t\tilde{\psi}_{\alpha\beta}][\tilde{\phi}_\beta(p) + t\int_{p_\beta}^{p} \eta_\beta]$$

$$= [\tilde{\phi}_\beta(p) + c_{\alpha\beta}] + t[\int_{p_\beta}^{p} \eta_\beta + \tilde{\psi}_{\alpha\beta}(\tilde{\phi}_\beta(p))] ,$$

y como $\tilde{z}_\alpha(p) = \tilde{z}_\beta(p) + c_{\alpha\beta}$

$$= \tilde{z}_\alpha(p) + t[\int_{p_\beta}^{p} \eta_\beta + \tilde{\psi}_{\alpha\beta}(\tilde{z}_\beta(p))] \; .$$

usando que $\eta_\alpha = \eta_1|_{U_\alpha}$ y $\eta_\beta = \eta_1|_{U_\beta}$ obtenemos que

$$\tilde{\psi}_{\alpha\beta}(\tilde{z}_\beta(p)) = \int_{p_\alpha}^{p} \eta_\alpha - \int_{p_\beta}^{p} \eta_\beta = \int_{p_\alpha}^{p_\beta} \eta_1 \; .$$

Con esto tenemos que las funciones de transición son

$$[Id + t\int_{p_\alpha}^{p_\beta} \eta_1] + c_{\alpha\beta} \; .$$

Por ello la aplicación de holonomía a lo largo de δ es :

$$z \longmapsto z + t\int_{\delta(z)} \eta_1 \; .$$

donde cada $\delta(z)$ se obtiene mediante trasladar δ a las hojas vecinas, uniendo adecuadamente los puntos correspondientes en Σ_α. Derivando con respecto a t esta expresión para la holonomía el resultado sigue. □

Como una primera aplicación de este resultado podemos ahora estudiar el comportamiento de clases de homotopía en las hojas de una foliación bajo deformación.

Si δ es un lazo en alguna hoja K de la foliación F y si su holonomía h_δ es la identidad, entonces en una vecindad de ese lazo la foliación puede verse como un fibrado trivial, con fibra una vecindad tubular de de δ en K y base una sección local transversal a la foliación. En particular es posible trasladar δ a las hojas vecinas de K salvo homotopía. Decimos entonces que δ es un ciclo constante para la foliación. Mientras que si h_δ tiene como punto fijo aislado al correspondiente a la intersección de δ con la transversal, entonces decimos que δ es un ciclo límite. Veamos qué pasa con estos conceptos para el caso de familias de foliaciones.

Sea F_o una foliación y $\tilde{F} = \{F_t\}$ una deformación parametrizada por el espacio analítico S, donde F_o corresponde al punto o en S. Tenemos además, una clase libre de homotopía δ en una hoja de F_o. Entonces dada una transversal local a F_o en algún punto de δ, tenemos asociada la aplicación de holonomia :

$$H_\delta : (S \times \mathbf{C}, (o,0)) \longrightarrow (S \times \mathbf{C}, (o,0))$$

$$H_\delta(t,z) = (t, h_\delta(t,z)) \; .$$

Para cada punto $(\tilde{t},\tilde{z})$ en el conjunto analítico dado por $Z = \{(t,z)/h_\delta(t,z) = z\} \subset S \times \mathbf{C}$ tenemos una clase libre de homotopía $\delta_{(\tilde{t},\tilde{z})}$ en la correspondiente hoja de $\tilde{F}$.

2.16 DEFINICION. Decimos que $\delta_{(t,z)}$ es obtenida a partir de seguir δ bajo la deformación $\tilde{F}$. Si Z tiene codimensión uno en $S \times \mathbf{C}$ y además $Z \cap \{(o,z)|z \in \mathbf{C}\}$ tiene a $(o,0)$ como punto aislado, entonces decimos que δ es un ciclo límite para la deformación $\tilde{F}$ y la multiplicidad de la intersección en $(o,0)$ es la multiplicidad del ciclo límite.

Observemos que Z sólo puede tener codimensión uno o cero y si es cero entonces la familia $\tilde{F}$ es localmente un fibrado trivial alrededor de de δ. Por otra parte si δ es un ciclo límite para la deformación $\tilde{F}$, entonces la proyección canónica de Z en S es una aplicación holomorfa finita y la suma de las multiplicidades de las preimágenes de algún punto s en una vecindad de o en S, es la multiplicidad del ciclo límite.

En particular, si S es $\mathbf{C}$ y δ es un ciclo constante de F_o, entonces tenemos

$$h_\delta(t,z) = z + \frac{\partial h_\delta}{\partial t}\, t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_\delta}{\partial t^2}\, t^2 + \ldots$$
$$h_\delta(t,z) - z = tg(t,z)$$

para g una función holomorfa.

2.17 DEFINICION. Si $g(o,0) = 0$ y t no divide a g entonces decimos que δ es un ciclo persistente bajo la deformación $\tilde{F}$. De otra manera decimos que es no persistente.

2.18 LEMA. Sea $\tilde{F}$ una deformación uno dimensional de la foliaciòn F_o y δ un ciclo constante de F_o. Si δ es un ciclo persistente bajo la deformación $\tilde{F}$ entonces el conjunto analítico Z es de codimensión uno y tiene una componente distinta de $\{(o,z)|z \in \mathbf{C}\}$.

Demostración. Es una aplicación del Teorema de preparación de Weierstrass (ver [G-H] pag. 8). Como la holonomía de δ es la identidad, tenemos que $h_\delta(t,z) - z = tg(t,z)$, desarrollando en serie de potencias tenemos que

$$h_\delta(t,z) - z = tg(t,z) = t[\frac{\partial h_\delta}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_\delta}{\partial t^2}\, t + \ldots]$$

por la hípotesis de que δ es persistente. En particular, se tiene que $g(t,z)$ no es idénticamente nula en $\{(o,z)|z \in \mathbf{C}\}$. Aplicando el Teorema de preparación a g, tenemos que $g = f_1 f_2$, para f_1 y f_2 funciones holomorfas con f_1 no nula en una vecindad de $(o,0)$ y

$$f_2(t,z) = z^d + a_{d-1}(t)z^{d-1} + \ldots + a_0(t) \qquad , \; a_i(0) = 0,$$

para $a_i(t)$ funciones holomorfas. Para $t \neq 0$ la función f_2 se anula en un número finito de puntos, por lo que g también se anula, el resultado sigue. □

Si η es la deformación infinitesimal asociada a $\tilde{F}$, de acuerdo al cálculo del Teorema 2.15, tenemos que la holonomía de δ es $H_\delta = Id + t\int_{\delta(o,z)} \eta$ de donde tenemos que

$$\frac{\partial h_\delta}{\partial t}(o,z) = \int_{\delta(o,z)} \eta \quad ,$$

donde $\delta(o,z)$ es la clase libre de homotopía en la hoja por (o,z) obtenida a partir de δ.

2.19 DEFINICION. El ciclo constante δ es infinitesimalmente persistente bajo la deformación infinitesimal η si $(o,0)$ es un cero aislado de $\int_{\delta(o,z)}\eta$, como función de z.

2.20 PROPOSICION. Sea $\tilde{\mathcal{F}}$ una deformación uno dimensional de la foliación $\mathcal{F}_o$ y δ un ciclo constante de $\mathcal{F}_o$. Entonces δ es persistente bajo $\tilde{\mathcal{F}}$ si y sólo si es infinitesimalmente persistente para la deformación infinitesimal asociada.

Demostración. Usando la notación previa tenemos que

$$\int_{\delta(o,z)}\eta = \frac{\partial h_t}{\partial t}(o,z) = g(o,z) \quad .$$

Si δ es persistente para η entonces $(o,0)$ es un cero aislado de $\int_{\delta(o,z)}\eta$ si y sólo si $g(o,0) = 0$ y t no divide a g. □

La importancia de esta proposición es que nos da un criterio infinitesimal para determinar si un ciclo constante persiste bajo deformaciones. Estos resultados son en cierto sentido similares a la fórmula de Liouville que permite calcular el determinante de la matriz de la diferencial de la aplicación de Poincaré de un campo vectorial, en términos únicamente de la divergencia del campo vectorial, sin conocer explícitamente el flujo, ver [M] pag. 41.

2.21 OBSERVACION. El Teorema 2.15 es cierto para foliaciones holomorfas de codimensión uno con singularidades en cualquier variedad compleja compacta, ver [GM-M].

2.22 OBSERVACION. Por otra parte un problema sumamente difícil e importante es estimar la multiplicidad de ciclos límites para ciertas deformaciones. En el caso de foliaciones que provienen de campos vectoriales holomorfos en $\mathbb{C}^2$ hay algunos resultados ver [I2] y [V]. En particular nosotros generalizando ideas de Iliasenko en [I1], hemos estudiamos la persistencia de ciclos en las hojas que proviene de las clases de homotopía dadas por los puntos de indeterminación, ver [GM-M] sección 4. Un proyecto a futuro será ampliar este estudio para otros tipos de lazos.

CAPITULO III

DEFORMACION DE FOLIACIONES CON PRIMERA INTEGRAL

En el presente capítulo se dará una caracterización de aquellas deformaciones de foliaciones en $\mathbb{C}P^2$ con primera integral que están contenidas en el subespacio de las foliaciones que tienen primera integral. El resultado que se expondrá será un criterio infinitesimal. Supongamos que tenemos una deformación, parametrizada por un espacio uno dimensional, de la foliación F_0 que tiene una primera integral racional. Si la deformación está dada por una familia de foliaciones con primera integral, entonces de acuerdo al Lema 2.12 , todas las holonomías deben ser la aplicación identidad. Por esto último deberemos esperar que la derivada de la holonomía con respecto a la deformación sea igual a la identidad, esto por el Teorema 2.15 significa que $\int_\delta \eta = 0$ donde η es la deformación infinitesimal asociada y δ es cualquier lazo contenido en las hojas de F_o. Con ello tenemos una motivación para nuestro teorema principal.

3.1 TEOREMA. Sea $-e < 0$ y F_o en $FI(-2e)$ una foliación en $\mathbb{C}P^2$ holomorfa con singularidades que tiene una primera integral racional genérica de grado e y η en $T_{F_o}Fol(-2e)$ una deformación infinitesimal de F_o . Entonces $\int_\delta \eta = 0$ para todo lazo contenido en las hojas de F_o si y sólo si η es un vector tangente a $FI(-2e)$.

Antes de iniciar la demostración del Teorema es conveniente hacer algunas observaciones :

3.2 OBSERVACION. Nuestro Teorema 3.1 es una generalización del siguiente Teorema de J. Iliasenko : Sea F una foliación en $\mathbb{C}^2$ dada por la 1-forma $\omega = dR$, donde R es un polinomio con de grado n con n^2 puntos críticos y con valores críticos distintos . Si η es una 1-forma polinomial de grado $n-1$ tal que $\int_\delta \eta = 0$ para todo lazo cerrado δ contenido en las hojas de F, entonces η es una 1-forma exacta. Ver [I1]. Nótese que aunque las hipótesis de trabajar con una foliación con primera integral y "genericidad" son análogas la conclusión es distinta ya que hemos sustituido "la exatitud de η" , por la condición de que "η sea tangente al espacio de primeras integrales". Esto tiene sus ráices en el hecho de los espacios $Fol(-2e)$ y $FI(-2e)$ son variedades que no son espacios vectoriales, hecho que sí sucede para el caso de foliaciones polinomiales (1-formas polinomiales) y foliaciones con primera integral polinomial (1-formas polinomiales exactas) en $\mathbb{C}^2$. Por otra parte podría hablarse de extensiones del Teorema de Iliasenko para "foliaciones no polinomiales", la dificultad aqui es que no es claro cómo conseguir familias de foliaciones. En nuestro caso de $\mathbf{C}P^2$ las familias $Fol(-e)$ están bien definidas y agrupan a todas las foliaciones en $\mathbf{C}P^2$ (esto es una consecuencia de la compacidad de $\mathbf{C}P^2$), podemos decir que el Teorema 3.1 está enunciado en su máxima generalidad posible .

Demostración de la parte "si" del Teorema 3.1 . Dada η podemos considerar $\tilde{F}$ una deformación 1-dimensional parametrizada por $S = (S, o)$, de F_o cuya deformación infinitesimal asociada es η es tangente a $FI(-2e)$. Calculamos la holonomía asociada a la familia $\tilde{F}$, como foliación de codimensión dos en $S \times \mathbf{C}P^2$. Entonces por el Teorema 2.15 sabemos que la deformación infinitesimal de la holonomía de $\tilde{F}$ a lo largo de un laso δ contenida en alguna hoja de la foliación F_o está dada por una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & \int_\delta \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como η es tangente a $FI(-2e)$, entonces $\tilde{F} = \{F_t\}$ puede elegirse de tal forma que todos sus elementos están en $FI(-2e)$, de donde por el Lema 2.12 la holonomía de cada foliación F_t es igual a la identidad. Con lo que $\int_\delta \eta = 0$, para todo laso δ contenido en las hojas de la foliación. $\square$

La demostración de la parte "sólo si" es más elaborada. Para ella necesitamos saber en qué puntos la inclusión $I : G(P(e), \mathbf{C}^2) \to Fol(-2e)$ es un encaje. Empezaremos por describir los vectores tangentes a la imagen de $G(P(e), \mathbf{C}^2)$ bajo I.

3.3 LEMA. Todo vector tangente a $FI(-2e)$ en el punto dado por la foliación F_o dada por la función racional $\frac{P}{Q}$ puede representarse como una 1-forma racional del tipo:

$$d\left(\frac{R}{Q}\right) + \left(\frac{S}{Q}\right)^2 d\left(\frac{P}{S}\right) \quad ,$$

donde R, S son polinomios homogéneos de grado e.

Demostración. Dados (P, Q) y (R, S) dos puntos en $G(P(e), \mathbf{C}^2)$, entonces podemos considerar la familia de aplicaciones racionales $\frac{P+tR}{Q+tS}$, para t en los números complejos, como una curva en el espacio de aplicaciones racionales de grado e. Vamos a calcular el vector tangente asociado al tiempo $t = 0$, en el espacio $T_{F_o} Fol(-2e)$; para ello primero consideramos la familia de 1-formas asociadas y desarrollamos hasta primer orden respecto a t, haciendo $t^2 = 0$. Entonces

$$d\left(\frac{P+tR}{Q+tS}\right) = \frac{(Q+tS)d(P+tR) - (P+tR)d(Q+tS)}{(Q+tS)^2}$$

y recordando que $\{P, Q\} = QdP - PdQ$ tenemos:

$$= \frac{\{P,Q\} + t(\{R,Q\} + \{P,S\})}{Q^2 + 2tQS} \qquad mod\ (t^2 = 0),$$

para dividir observemos que el inverso del denominador es $\frac{1}{Q^2}[1 - 2t\frac{S}{Q}]$ con lo que la expresión anterior se transforma en

$$= \frac{\{P,Q\}}{Q^2} + \frac{t}{Q^2}[\{R,Q\} + \{P,S\} - \frac{2S}{Q}\{P,Q\}] \qquad mod\ (t^2 = 0),$$

podemos ahora tomar la derivada en $t = 0$ con lo que se obtiene la 1-forma

$$d(\frac{P + tR}{Q + tS})|_{t=0} = d(\frac{R}{Q}) + (\frac{S}{Q})^2 d(\frac{P}{S}) - (\frac{2S}{Q})d(\frac{P}{Q}) \ .$$

Finalmente observemos que el último término es cero a lo largo de las hojas de $\mathcal{F}_o$, utilizando la Observación 2.9 obtenemos el resultado deseado. □

3.4 OBSERVACION. De acuerdo a la Proposición 1.2 las 1-formas del tipo anterior pueden expresarse como 1-formas polinomiales $\{R,Q\} + \{P,S\}$ en alguna carta afín. Estas 1-formas representan el vector 0 en $T_{\mathcal{F}_o}\mathcal{F}ol(-2e)$ dado por la foliación que tiene como primer integral a $\frac{P}{Q}$ si y sólo si se satisface que:

$$\{R,Q\} + \{P,S\} = \lambda\{P,Q\} \text{ para } \lambda \text{ en } \mathbb{C}.$$

3.5 LEMA. Si $\frac{P}{Q}$ y $\frac{R}{S}$ son primeras integrales genéricas, entonces $\{P,Q\} = \lambda\{R,S\}$ para algún λ en $\mathbb{C}^*$ si y sólo si $R = \alpha P + \beta Q$ y $S = \gamma P + \delta Q$ con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en $\mathbb{C}$, con $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Demostración. Para la parte "si" basta calcular

$$\{\alpha P + \beta Q, \gamma P + \delta Q\} \ ,$$

de hecho no es necesaria aquí la hipótesis de que las primeras integrales sean genéricas.

Recíprocamente, si suponemos que $\{P,Q\} = \lambda\{R,S\}$ entonces esto implica

$$Q^2 d(\frac{P}{Q}) = \lambda S^2 d(\frac{R}{S}) \ ,$$

utilizando la hipótesis de que las primeras integrales son genéricas podemos concluir que las foliaciones asociadas a $\frac{P}{Q}$ y $\frac{R}{S}$ tienen las mismas hojas como fibras irreducibles y reducibles respectivamente, en particular son la misma foliación $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}ol(-2e)$. Tomamos $T = \mathbb{C}P^1$ una recta proyectiva en $\mathbb{C}P^2$ que no pase por las singularidades de la foliación F asociada a $\frac{P}{Q}$. Restringimos las aplicaciones racionales a T, con lo que obtenemos dos funciones holomorfas que por abuso de notación denotamos por $\frac{P}{Q}: T \to CP^1$ y $\frac{R}{S}: T \to CP^1$, observemos que como las aplicaciones racionales son de grado e estas funciones de T en CP^1 son e a 1. Sea $T' \subset T$ la intersección de T con las hojas irreducibles de F, que son las fibras irreducibles de $\frac{P}{Q}$, entonces

$$(\frac{R}{S}) \circ (\frac{P}{Q})^{-1} : (\frac{P}{Q})(T') \subset CP^1 \to CP^1 ,$$

está bien definida, es holomorfa y univaluada. Como

$$T' = CP^1 - \{ \textit{ conjunto discreto de puntos } \} ,$$

donde ese conjunto corresponde a los valores de las fibras reducibles de $\frac{P}{Q}$ y que es discreto por la hipótesis de que $\frac{P}{Q}$ es genérica. Entonces la función $(\frac{R}{S})\circ(\frac{P}{Q})^{-1}$ tiene una extensión holomorfa y univaluada cuyo dominio es todo CP^1. Con lo que $(\frac{R}{S}) \circ (\frac{P}{Q})^{-1}$: $CP^1 \to CP^1$ está bien definida y es una transformación de Möbius, lo cual concluye la demostración. □

3.6 COROLARIO. La inclusión $I : G(P(e), \mathbb{C}^2) \to Fol(-2e)$ es uno a uno sobre su imagen cuando se restringe a las aplicaciones racionales genéricas. □

Podemos ahora calcular la diferencial de I, con ello tenemos:

3.7 PROPOSICION. La inclusión $I : G(P(e), \mathbb{C}^2) \to Fol(-2e)$ es un encaje restringida a las aplicaciones racionales genéricas.

Demostración. Sea $\frac{P}{Q}$ una aplicación racional genérica, tomamos una base de $P(e)$ dada por, $P, Q, R_1, \ldots, R_s$ tal que todas las aplicaciones $\frac{P}{R_i}$ y $\frac{R_i}{Q}$ son genéricas. Entonces dado $(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_s)$ en $\mathbb{C}^{2s}$ la aplicación

$$\Psi : \mathbb{C}^{2s} \to G(P(e), \mathbb{C}^2)$$

dada por

$$\Psi(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_s) = (P + x_1R_1 + \ldots + x_sR_s, Q + y_1R_1 + \ldots + y_sR_s)$$

forma una carta coordenada local para $G(P(e), \mathbb{C}^2)$ con $\Psi(0) = (P, Q)$. Podemos ahora considerar las curvas coordenadas dadas por:

$$x_i \mapsto (P + x_iR_i, Q)$$

$$y_j \mapsto (P, Q + y_j R_j)$$

con $i, j = 1, ..., s$.

Componiendo estas curvas con I obtenemos curvas Θ_k para $k = i, j$, cuya imagen está en el espacio $Fol(-2e)$ y pasan por el punto dado por (P, Q). Para mostrar que I es un encaje mostraremos que los vectores tangentes a las curvas Θ_k en el tiempo cero que llamaremos Θ'_k forman un conjunto linealmente independiente.

Primera parte: Los vectores Θ'_k son no nulos. Estos vectores se calculan utilizando el Lema 3.3 como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} d\left(\frac{P + x_i R_i}{Q}\right)\Big|_{x_i=0} = \frac{\{R_i, Q\} + \{P, Q\}}{Q^2}$$

Lo cual, por la Observación 3.4 se representa en el plano tangente $T_{F_0} Fol(-2e)$ como $\{R_i, Q\}$. Debemos entonces mostrar que

$$\{R_i, Q\} \neq \lambda \{P, Q\}$$

para λ en $\mathbb{C}$.

Primer caso: $\lambda = 0$. Esto implica que $Q^2 d(\frac{R_i}{Q}) = \{R_i, Q\} = 0$, lo cual no puede ser pues $\frac{R_i}{Q}$ no es una función constante.

Segundo caso: $\lambda \neq 0$. Entonces podemos suponer que $\lambda = 2\lambda'$

$$\{R_i, Q\} = -2\lambda' \{P, Q\}$$

lo cual, utilizando la bilinealidad de $\{\ ,\ \}$ es equivalente a:

$$\{R_i + \lambda' P, Q\} = -\lambda' \{P, Q\}\ ,$$

de donde nos dice, por el Lema 3.5 que $(R_i + \lambda' P, Q)$ y (P, Q) representan el mismo punto en la grassmanniana de aplicaciones racionales. Pero esto es imposible por la construcción de la carta coordenada Ψ, con lo que el vector $\{R_i, Q\}$ es no nulo en el espacio tangente; la demostración es análoga para las curvas de la forma

$$y_j \mapsto (P, Q + y_j R_j)\ .$$

Segunda parte: Mostramos que toda combinación lineal de los vectores Θ'_k igual a cero tiene necesariamente todos los coeficientes iguales a cero.

Sea una combinación lineal

$$a_1\{R_1, Q\} + ... + a_s\{R_s, Q\} + b_1\{P, R_1\} + ... + b_s\{P, R_s\}$$

$$= \{\sum a_i R_i, Q\} + \{P, \sum b_i R_i\} = \lambda\{P, Q\} .$$

Primer caso: $\lambda = 0$. Esto por el Lema 3.5 implica

$$\sum a_i R_i = \alpha P + \beta \sum b_i R_i$$

$$Q = \gamma P + \delta \sum b_i R_i$$

pero el segundo renglón no se satisface por ser $Q, P, R_1, \ldots, R_e$ una base. De donde la única posibilidad para que la igualdad sea cierta es que $a_i = b_j = 0$, para todo i y j.

Segundo caso: $\lambda \neq 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\lambda = 2\lambda'$, con lo que tenemos:

$$\{\sum a_i R_i, Q\} + \{P, \sum b_i R_i\} = 2\lambda'\{P, Q\}.$$

que es equivalente a:

$$\{\sum a_i R_i + \lambda' P, Q\} = -\{P, \sum b_i R_i + \lambda' Q\} .$$

Usando el Lema 3.5 y el hecho de que $Q, P, R_1, \ldots, R_e$ es una base de $P(e)$ y Ψ es una carta coordenada para la grassmanniana, se puede ver que lo anterior sólo es posible si $a_i = b_j = 0$ para todo i, j. Lo cual termina la demostración de la proposición.$\square$

Regresamos ahora a la demostración del Teorema 3.1. Recordemos que F_0 es una foliación fija con primera integral racional $\frac{P}{Q}$ genérica. Observemos que dado un vector tangente $\omega = A(z, w)dz + B(z, w)dw$ en $T_{F_o}Fol(-2e)$ (representado como una 1-forma polinomial de acuerdo al la Proposición 1.2 y el Corolario 2.6), estamos aceptando que tiene polo en la recta al infinito de alguna carta afín $\mathbb{C}^2$ de coordenadas (z, w). Podemos pues multiplicar la 1-forma por Q^{-2} y entonces su polo estará localizado en la superficie de Riemann $\{Q = 0\}$. Esto corresponde a cambiar la carta que trivializa al haz L usando en vez de la carta afín $\mathbb{C}^2$ la que tiene como dominio $\mathbb{C}P^2 - \{Q = 0\}$. En todo lo que sigue representaremos los vectores en $T_{F_o}Fol(-2e)$ vistos con el polo en la superficie de Riemann $\{Q = 0\}$ esto es,

$$T_{F_o}Fol(-2e) =$$

$$\{\frac{\omega}{Q^2} = \frac{A(z, w)dz + B(z, w)dw}{Q^2} \mid \omega \textit{ como en la Proposicion } 1.2\ ,\ modulo(\{P, Q\} = 0)\}.$$

El plan para la demostración de la parte "sólo si" del Teorema 3.1 es como sigue.

Definimos dos subespacios vectoriales del $T_{\mathcal{F}_e}Fol(-2e)$,

$$W(e)=\{\frac{\omega}{Q^2}\mid\int_\delta\frac{\omega}{Q^2}=0 \quad \textit{para todo lazo } \delta \textit{ contenido en las hojas de } F_e\}\ ,$$

$$V(e)=\{\frac{\omega}{Q^2}\mid\frac{\omega}{Q^2}=d(\frac{R}{Q})+(\frac{S}{Q})^2d(\frac{P}{S})\ ,\ R,S\in P(e)\}\ .$$

No es difícil mostrar que ambos conjuntos son subespacios vectoriales del espacio $T_{\mathcal{F}_e}Fol(-2e)$. Por otra parte debemos observar que $V(e)$ corresponde al espacio $T_{\mathcal{F}_e}FI(-2e)$ por el Lema 3.3. Para demostrar el Teorema 3.1 tenemos que llegar a que $W(e)=V(e)$. La parte "si" del Teorema 3.1 nos muestra que $V(e)$ es un subespacio vectorial de $W(e)$. Para mostrar la igualdad de $V(e)$ y $W(e)$ construimos una función lineal $\Phi: W(e)\longrightarrow M(e)$, para $M(e)$ cierto espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbf{C}$, mostramos que $\Phi(V(e))=\Phi(W(e))$ y que por otra parte el núcleo de Φ es igual a cero, de donde $V(e)=W(e)$.

Para construir Φ consideremos primero una recta proyectiva compleja T en $\mathbf{C}P^2$ que está en posición general con respecto a la foliación F_e; en particular, no pasa por las singularidades de la foliación. Dado p en $\mathbf{C}P^2-Sing(F_e)$, sea $K(p)$ la hoja de la foliación F_e que contiene a p. $K(p)$ es una superficie de Riemann no compacta que se obtiene de remover los puntos de $Sing(F_e)$ en la superficie de Riemann compacta $\{\mu P-\lambda Q=0\}$. La intersección $K(p)\cap T$ consta de e puntos (contados con sus multiplicidades), los cuales denotamos por $\{p_1,\ldots p_e\}$. Dado η en $W(e)$ entonces $\Phi(\eta)=F_\eta$ es una aplicación con valores en los números complejos dada como sigue:

$$F_\eta(p)=\sum_i\int_{p_i}^{p}\eta \qquad ,\ p\in\mathbf{C}P^2-Sing(F_e),$$

donde cada $\int_{p_i}^{p}\eta$ es la integral de línea calculada usando una curva contenida en la superficie de Riemann $K(p)$ que une p con p_i. Como una consecuencia de la hipótesis $\int_\delta\eta=0$ tenemos que:

3.8 LEMA. Cada F_η es una función holomorfa univaluada de $\mathbf{C}P^2-\{Q=0\}$ en $\mathbf{C}P^1$.

Demostración. Se usa que η es una 1-forma holomorfa excepto en $\{Q=0\}$ y la definición de F_η. □

3.9 OBSERVACION. El núcleo de Φ es igual a cero esto es, $F_\eta=0$ si y sólo si $\eta=0$ a lo largo de las hojas de la foliación F_e. En efecto, usando la definición de F_η mediante integrales y eligiendo adecuadamente la recta proyectiva T tenemos que si η no es cero existe al menos un punto p en $\mathbf{C}P^2-Sing(F_0)$ tal que $\sum_i\int_{p_i}^{p}\eta\neq 0$.

Los siguientes lemas describirán algebraicamente las aplicaciones F_η.

3.10 LEMA. Las aplicaciones F_η tienen un polo de orden dos en la superficie de Riemann $\{Q = 0\}$.

Demostración. Para calcular el orden del polo, bastará hacerlo localmente. Sea U una vecindad de algún punto q en $\{Q = 0\} \cap T$ y $\varphi : U \to \mathbf{C}^2$ una carta coordenada tal que trivializa a la foliación con $\varphi(q) = (0,0)$ y $\varphi^{-1}(\{w = 0\}) = \{Q = 0\} \cap U$, $\varphi^{-1}(\{z = 0\}) = T \cap U$. Por otra parte, tenemos que η cumple que $\varphi_* \eta$ tiene la forma

$$\frac{A(z,w)dz + B(z,w)dw}{w^2}$$

con A y B funciones holomorfas. Entonces para puntos p en U, podemos convenir que p_1 está dado por $K(p) \cap T \cap U$. Calculamos entonces el polo correspondiente al primer sumando de:

$$F_\eta(p) = \sum_i \int_{\varphi(p_i)}^{\varphi(p)} \varphi_* \eta,$$

usando una trayectoria que una $\varphi(p)$ con $\varphi(p_1)$ contenida en U. El cálculo del orden del polo para los otros puntos $\varphi(p_i)$ es análogo usando colecciones de cartas coordenadas que cubran las trayectorias que unen los puntos p con p_i.

Si $\varphi(p) = (z_0, w_0)$ entonces podemos hacer que p tienda a $\{Q = 0\}$ mediante la familia de puntos (z_0, ϵ) cuando ϵ tiende a cero. Sea una familia de trayectorias $\alpha_\epsilon : [0,1] \to \mathbf{C}^2$ dadas por: $\alpha_\epsilon(t) = ((1-t)z_0, \epsilon)$ que une los puntos $\varphi(p)$ dados por (z_0, ϵ) con los correspondientes puntos $\varphi(p_1) = (0, \epsilon)$. Entonces

$$\lim_{p \to \{Q=0\}} \int_{\varphi(p_1)}^{\varphi(p)} \varphi_* \eta = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{(0,\epsilon)}^{(z_0,\epsilon)} \frac{A(z,w)dz + B(z,w)dw}{\epsilon^2}$$

que al calcularse con las trayectorias $\alpha_\epsilon(t)$ nos da:

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^1 \frac{A((1-t)z_0, \epsilon)dt}{\epsilon^2}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^1 A((1-t)z_0, \epsilon)dt.$$

y como A es holomorfa concluimos que F_η tiene un polo de orden dos en $\{w = 0\}$. $\square$

3.11 LEMA. Las funciones F_η tienen puntos de indeterminación en

$$\{Q = 0\} \cap \{P = 0\}.$$

Demostración. De acuerdo a la descripción local de los puntos de indeterminación para aplicaciones racionales, bastará mostrar que alrededor de $p \in \{Q = 0\} \cap$

$\{P = 0\}$, la aplicación F_η, toma todos los valores de CP^1. Dado p tomamos coordenadas locales (z, w) en CP^2 con p correspondiendo a $(0,0)$, cada pendiente $\frac{w}{z}$ en CP^1 tiene asignada de manera natural una hoja en la foliación F_η, llamémosla $K(z,w)$. Observemos que p puede pensarse como un punto en cada hoja $K(z,w)$.

Definimos ahora $f_\eta : CP^1 \rightarrow CP^1$ tal que $f_\eta(z,w) = F_\eta(p)$ donde $F_\eta(p)$ está calculada usando la hoja $K(z,w)$. Como f_η es holomorfa y para $\eta \neq 0$, f_η es no constante, se sigue que la imagen de f_η es todo CP^1, con lo que necesariamente F_η tiene como punto de indeterminación a p. □

Con todo lo anterior se tiene:

3.12 COROLARIO. Las aplicaciones F_η son aplicaciones racionales de grado $2e$. □

Mas aún:

3.13 LEMA. Las funciones F_η pueden escribirse como $\frac{RQ+SP}{Q^2}$ para R y S polinomios homogéneos de grado e.

Demostración. Como las aplicaciones F_η son racionales deben de tener una expresión de la forma $\frac{M}{N}$, para M, N polinomios homogéneos de grado $2e$. Por el Lema 3.10, sabemos que podemos tomar $N = Q^2$ y por el Lema 3.11, tenemos que M debe de anularse en los puntos de $\{Q = 0\} \cap \{P = 0\}$. Aplicando el Teorema "AF + BG" de Noether (ver por ejemplo [G-H], pag. 703), M debe escribirse como $PQ + SP$, para R, S polinomios homogéneos de grado e. □

Con esto podemos tomar como codominio de la aplicación Φ:

$$M(e) = \{\frac{RQ + SP}{Q^2} | R, S \in P(e)\}.$$

Claramente $M(e)$ es un espacio vectorial de dimensión finita sobre C y Φ es una función lineal.

3.15 LEMA. La dimensión de la imagen de $\Phi(W(e))$ es menor o igual a e^2+3e-2.

Demostración. Primeramente acotamos la dimensión de $M(e)$. Para ello, sea $I \subset O$ la gavilla de ideales determinada por $\{Q = 0\} \cap \{P = 0\}$, donde O es la gavilla de funciones holomorfas de CP^2. Si $O(e)$ es la gavilla de secciones locales del haz de lineas con clase de Chern e, entonces tenemos una sucesión exacta:

$$0 \rightarrow O(0) \rightarrow O(e) \oplus O(e) \rightarrow I(2e) \rightarrow 0 \ ,$$

donde $I(2e) = I \oplus_{O} O(2e)$ y las funciones es esta sucesión estan dadas por

$$\rho \mapsto \rho P \oplus -\rho Q \quad \rho \in O(0)$$

$$\xi \oplus \psi \mapsto Q\xi + P\psi \quad \xi, \psi \in O(e),$$

donde P y Q son considerados como secciones globales de $O(e)$. Ver por ejemplo [G-H] pags. 606 y 703. Esto induce la siguiente sucesión exacta en cohomología

$$0 \to H^0(\mathbb{C}P^2, O(0)) \to H^0(\mathbb{C}P^2, O(e)) \oplus H^0(\mathbb{C}P^2, O(e))$$
$$\to H^0(\mathbb{C}P^2, I(2e)) \to 0$$

ya que $H^1(\mathbb{C}P^2, O(e)) = 0$ para todo número entero positivo e, ver [G-H] pag. 703.

El espacio $H^0(\mathbb{C}P^2, I(2e))$ son las secciones globales del ideal determinado por $\{Q = 0\} \cap \{P = 0\}$. De lo anterior concluimos que:

$$dim(M(e)) \leq dim H^0(\mathbb{C}P^2, I(2e))$$

$$= 2 dim H^0(\mathbb{C}P^2, O(e)) - dim H^0(\mathbb{C}P^2, O(0))$$

$$= 2(\frac{e^2 + 3e + 2}{2}) - 1 = e^2 + 3e + 1.$$

Ahora observemos que si $\eta \neq 0$, entonces por la forma en que se definió F_η usando integrales, F_η no puede ser constante a lo largo de las hojas de la foliación. Por esto funciones de la forma : $a(\frac{P}{Q})^2 + b(\frac{P}{Q}) + c$ no pueden obtenerse como funciones F_η, esto es no están en la imagen $\Phi(W(e))$. Como esta familia de funciones tiene tres parámetros a, b, c tenemos que :

$$\dim \Phi(\mathrm{W(e)}) \leq \dim(\mathrm{M(e)}) - 3 \leq \mathrm{e}^2 + 3\mathrm{e} - 2.$$

□

3.16 COROLARIO. Si la primera integral $\frac{P}{Q}$ es genérica entonces:

$$\Phi(V(e)) = \Phi(W(e)).$$

Demostración. Basta observar que por la Proposición 3.7, si $\frac{P}{Q}$ es genérica entonces la dimensión de la variedad grassmaniana de primeras integrales es igual a la dimensión de $V(e)$ y la dimensión de esta grassmaniana es $e^2 + 3e - 2$. □

Fin de la demostración de la parte "sólo si" del Teorema 3.1. Como $V(e) \subset W(e)$, tienen la misma imagen bajo Φ y además el núcleo de Φ es igual a cero, se concluye que $V(e) = W(e)$ lo cual demuestra el Teorema 3.1 . $\square$

3.17 OBSERVACION. El Teorema 3.1 es cierto en cualquier espacio CP^n y la prueba es esencialmente la misma (no publicada). Un proyecto futuro será extender el Teorema 3.1 para otros tipos de variedades complejas, por ejemplo para variedades proyectivas sin singularidades. Una dificultad adicional es que en este caso al deformar la foliación puede suceder que también se deforme la variedad (en el sentido de deformación de variedades complejas). Esto último no sucede en nuestro caso pues CP^n solo tiene una estructura compleja.

3.18 OBSERVACION. Un resultado interesante que es consecuencia del Teorema 3.1 en CP^n para $n \geq 3$, es que las foliaciones con primera integral que son pinceles de Lefschetz forman componentes irreducibles en los espacios de foliaciones correspondientes. Esto intuitivamnente significa que todo pincel de Lefschetz en CP^n para $n \geq 3$, tiene cerca de si sólo pinceles de Lefschetz, en particular los pinceles de Lefschetz son estructuralmente estables como foliaciones si $n \geq 3$. Este resultado ha sido probado usando otras técnicas por X. Gómez-Mont y A. Lins-Neto en [GM-LN].

REFERENCIAS.

[A-F] A. Andreotti, Th. Frankel; The Second Lefschets Theorem of Hyperplane Sections, Global Analysis papers in honor of K.Kodaira, University of Tokyo, 1969, pp. 1-20.

[Ch] C. Chevalley; Theory of Lie Groups, Princeton University Press, Princeton, 1946.

[F] G. Fischer; Complex Analytic Geometry, SLN Num. 538, Springer Verlag, 1976.

[G-D] A. Grothendieck, J. Dieudonné; Éléments de Géométrie Algébrique, IHES, Num. 28, 1961.

[G-H] Ph. Griffiths, J. Harris; Principles of Algebraic Geometry, John Wiley & Sons, Pure and Applied Mathematics, 1978.

[GM1] X. Gómez-Mont; On Families of Rational Vector Fields, Aportaciones Matemáticas, Notas de Investigación Num. 1, Sociedad Matemática Mexicana, 1985.

[GM2] X. Gómez-Mont; Universal Families of Foliations by Curves, Astérisque 1987, pp. 150-151.

[GM-LN] X. Gómez-Mont, A. Lins-Neto; Structural Stability of Singular Holomorphic Foliations having a Meromorphic First Integral. Versión preliminar 1988.

[GM-M] X. Gómez-Mont, J. Muciño; Persistent Cycles for Holomorphic Foliations having a Meromorphic First Integral SLN Num. 1345, Springer Verlag 1988.

[GM-O] X. Gómez-Mont, L. Ortiz; Sistemas Dinámicos Holomorfos en Superficies. Por aparecer en Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 1989.

[H] A. Haefliger; Groupoides d'Holonomie et Classifiants, Astérisque 116, 1984, 70-97.

[Hr] R. Hartshorne; Algebraic Geometry, Springer Verlag, 1977.

[I1] J. Iliasenko; The Origin of Limit Cycles under Perturbations of the Equation $dw/dz = -Rz/Rw$, where $R(z,w)$ is a Polynomial, Math. USSR Sbornik 7, 1969 , pp. 353-364.

[I2] J. Iliasenko; The Multiplicity of Limits Cycles Arising from Perturbations of the Form $w' = P_2/Q_1$ of a Hamilton Equation in the Real and Complex Domain, Amer. Math. Soc. Transl. 2, 118, 1982, pp. 191-202.

[M] R. Mañé; Introducão à Teoria Ergódica, IMPA, Río de Janeiro, 1983.

[N] P. E. Newstead; Lectures on Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces, Tata Instutute of Fundamental Research, Bombay, Springer Verlag, 1978.

[S] S. Shafarevich; Basic Algebraic Geometry, Springer Verlag, 1985.

[V] A.N. Varchenko; Estimate The Number of Zeros of An Abelian Integral Depending on a Parameter and Limit Cycles, Funct. Analysis and their Applications, Vol.18, Num.2, 14-25, Plenum Publishing Corp. 1984.