UNIVERSIDAD AUTONOMA DE GUADALAJARA

Incorporada a la Universidad Nacional Autónoma de México

ESCUELA DE MATEMATICAS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE GUADALAJARA

fundada en 1935

FUNCIONES DE VARIACION ACOTADA:
DIFERENCIACION E INTEGRACION

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

ROBERTO LOPEZ GULLIVER

GUADALAJARA, JAL. 1988

INTRODUCCION.

Algún tiempo ha que la Matemática trata de encontrar algunas condiciones que sean necesarias, o — bien suficientes, para asegurar algunas conclusiones. El sentido analítico de la busqueda de tales — condiciones ha desatado un enorme caudal de nuevas teorías, muchas de las cuales surgieron sin aparente relación con el mundo que vivimos, pero que ya ahora se muestran como sólidos cimientos que soportan la mayoría de las verdades que aplicamos, a veces de manera mecánica, en nuestro fascinante mundo. Tan lleno este último de interrelaciones y armonías tan perfectas que, gracias a esta ciencia, han — podido ser descubiertas sin la necesidad, a veces imposible, de comprobarse de manera empírica.

No significo con ésto que el apoyo intuitivo en tal labor no sea de capital importancia; el comprobarlo experimentalmente nos da confianza y ánimos para seguir adelante donde nuestra lámpara es — nuestro raciocinio y nuestros únicos fusiles una pluma y un papel.

Aquí nos daremos a la tarea de analizar las características importantes de un tipo especial de funciones, de entre muchos otros, las funciones de VARIACION ACOTADA, nos familiarizaremos con ellas y veremos como se comportan sobre todo en cuanto a sucesiones, diferenciabilidad e integración sobre éstas.

En algunos momentos sacrificaremos el empleo conciso y elegante de conclusiones que requieran - de un conocimiento anterior de otras ramas de la Matemática diferentes a las nociones básicas de un - primer curso de Análisis Matemático; todo esto con el único propósito de que nuestra exposición, a — veces larga, sea comprendida totalmente y sin demasiados esfuerzos.

Intentaremos, hasta donde lo permita nuestra intuición, de ejemplificar los resultados que ob - tengamos a fin de " sentir en nuestras manos " lo que nuestro razonamiento deductivo concluye.

Los invito pues a sumergirnos en esta nueva aventura, donde ya muchos han estado, pero ahora — con el intinerario más accesible para nosotros, sin demasiados sobresaltos y aunque lentos, con la — firme seguridad de que nuestros objetivos sean alcanzados.

Quiero agradecer a todos aquellos que con su constante apoyo moral y humano colaboraron a que - este modesto trabajo vea por fin su terminación.

Gracias a todos pues!

R.L.G.

CONTENIDO

CAPITULO 1.

PROPIEDADES GENERALES

En este capítulo trataremos sobre las propiedades básicas de las funciones de variación acotada en un intervalo $[a,b]$, BV $[a,b]$.

Veremos, entre otras cosas, condiciones suficientes y necesarias para que una función pertenezca a BV a,b . Probaremos que BV a,b es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ e introduciremos una norma en éste. Además discutiremos brevemente la estrecha relación entre longitud de arco y variación total.

1.1 DEFINICION Y SUS PRIMERAS CONSECUENCIAS

DEFINICION 1.1 Sean $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $P=\{a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b\}$ una partición de $[a,b]$. Sea $v_f(P)$ definido por

$$v_f(P)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

Si el conjunto $A=\{v_f(P)\,|\,P$ una partición de $[a,b]\}$ está acotado, es decir $v_f(P)\leq M$ para toda partición P de $[a,b]$, diremos que f tiene VARIACION ACOTADA en $[a,b]$.

La colección de todas las funciones que tiene variación acotada en $[a,b]$ será denotada por BV $[a,b]$.

Si $f\in$ BV $[a,b]$ definimos

$$V_f[a,b]=\sup\{v_f(P)\,|\,P \text{ una partición de } [a,b]\}$$

Al número $V_f[a,b]$ lo llamaremos la VARIACION TOTAL de f en $[a,b]$.

El conjunto de todas las posibles particiones de $[a,b]$ será designado por $\mathcal{P}[a,b]$.
Algunas propiedades importantes de tales funciones son las siguientes.

TEOREMA 1.1 Si f es monótona, creciente o decreciente, en $[a,b]$ entonces — $f \in BV[a,b]$

DEMOSTRACION: Sean f monótona en $[a,b]$ y $P \in \mathcal{P}[a,b]$. Consideremos

$$v_f(P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$= \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - f(x_{k-1}), & \text{si } f \nearrow \text{ es creciente} \\ \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) - f(x_k), & \text{si } f \searrow \text{ es decreciente} \end{cases}$$

como estas dos sumas son telescópicas se tiene que

$$v_f(P) = \begin{cases} f(b) - f(a), & f \nearrow \text{ es creciente} \\ f(a) - f(b), & f \searrow \text{ es decreciente} \end{cases}$$

por lo que $V_f(P) = \sup\{v_f(P) \mid P \in \mathcal{P}[a,b]\} = \begin{cases} f(b) - f(a) \\ f(a) - f(b) \end{cases}$

según que f sea creciente ó decreciente en $[a,b]$. Así $f \in BV[a,b]$. **

Note que si f es constante en $[a,b]$, $V_f[a,b] = 0$

TEOREMA 1.2 Si $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ satisface la condición de Lipschitz, — $|g(x) - g(y)| \leq M|x-y|$ para toda $x, y \in [a,b]$ entonces $g \in BV[a,b]$ y en tal caso $V_g[a,b] \leq M(b-a)$
Además si $|f'(x)| \leq M$ para toda $x \in [a,b]$ entonces $f \in BV[a,b]$ y se tiene que $V_f[a,b] \leq M(b-a)$

DEMOSTRACION: Suponga que $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ satisface la condición del teorema. Entonces si — $P \in \mathcal{P}[a,b]$ se tiene.

$$v_f(P) = \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{n} M|x_k - x_{k-1}| = M(b-a)$$

por tanto $g \in BV[a,b]$ y $V_g[a,b] = \sup\{v_g(P), [a,b]\} \leq M(b-a)$
Ahora bien si $|f'(x)| \leq M$ para toda $x \in [a,b]$ por el teorema del valor medio se tendria — que

$$|f(x) - f(y)| = |h'(\xi)||x-y|, \quad \xi \text{ entre } x \text{ y } y$$

de lo que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y| \qquad \text{para toda } x, y \in [a,b].$$

y aplicando a f lo anterior se tiene

$$f \in BV[a,b] \text{ y } V_f[a,b] \leq M(b-a)_{**}$$

La condición anterior no es necesaria, sólo basta considerar $f(x)=\sqrt{x}$ que es creciente en $[0,1]$ y, según el teo. 1.1, $f \in BV[0,1]$, aún sin embargo

$$|f'(x)| = 1/2\sqrt{x} \quad \text{no está acotada en } [0,1]$$

Veamos algunos ejemplos en los cuales una función $f \notin BV[a,b]$ y donde la sola continuidad de f en $[a,b]$ no asegura que $f \in BV[a,b]$.

Sean $f(x) = \begin{cases} 0 & , x=0 \\ \operatorname{sen}(1/x) & , x \in (0, 2/\pi] \end{cases}$

y $P_n = \left\{ 0, \frac{2}{(2n+1)\pi} = x_1, \frac{2}{(2n)\pi} = x_2, \frac{2}{(2n-1)\pi} = x_3, \ldots, \frac{2}{\pi} = x_{2n+2} \right\}$

entonces $$v_f(P_n) = \sum_{k=1}^{2n+2} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$
$$= \sum_{k=1}^{2n+2} |\operatorname{sen}(1/x_k) - \operatorname{sen}(1/x_{k-1})|$$
$$= \sum_{k=1}^{2n+2} |1-0|$$
$$= 2(n+1)$$

por lo que la sucesión $\{ v_f(P_n) \mid P_n \text{ como se dió} \}$ no está acotada por ningún $M \geq 0$, simplemente tómese $n \ni 2(n+1) > M$, y de lo cual $\{ v_f(P) \mid P \in \mathcal{P}[a,b] \}$ no lo está.
Así $f \notin BV[0, 2/\pi]$

Ahora considere $g(x) = x f(x)$, $x \in [0, 2/\pi]$, g es contínua en $[0, 2/\pi]$ ya que

$$0 \leq |g(x)| = |x f(x)| = |x \operatorname{sen} 1/x| \leq |x|, \quad x \in [0, 2/\pi]$$

de lo que según el teorema de estricción, se tendría

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0 \quad \text{y así} \quad g \in C[0, 2/\pi]$$

Sin embargo si P_n es como anteriormente se dió

$$v_g(P_n) = \sum_{k=1}^{2n+2} |g(x_k) - g(x_{k-1})|$$
$$= 2/\pi + 2/3\pi + \cdots + 2/(2n+1)\pi$$
$$= 2/\pi \left[1 + 1/3 + 1/5 + \cdots + 1/2n+1 \right]$$
$$= 2/\pi \sum_{k=0}^{n} 1/(2k+1)$$

y como la suma $\sum_{k=0}^{n} 1/(2k+1)$ no está acotada para toda n, se tiene que $g \notin BV[0, 2/\pi]$

Notemos que si $h(x) = x^2 f(x)$, $x \in [0, 2/\pi]$,

se tiene
$$h'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \operatorname{Sen} 1/x - 0}{x - 0} = 0$$

$$\wedge \quad |h'(x)| = |2x \operatorname{Sen} 1/x - \operatorname{Cos} 1/x|, \quad x \in (0, 2/\pi]$$
$$\leq 2|x \operatorname{Sen} 1/x| + |\operatorname{Cos} 1/x|$$
$$\leq 2(2/\pi)\cdot 1 + 1 \leq 3$$

y según el teorema 1.2 $h \in BV[0, 2/\pi]$.

TEOREMA 1.3 Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $P \wedge Q \in \mathcal{P}[a,b]$
Entonces $P \supseteq Q \to v_f(P) \geq v_f(Q)$. Además si $f \in BV[a,b]$ existe una sucesión (P_n) en $\mathcal{P}[a,b]$ tal que
$$V_f[a,b] = \lim_n v_f(P_n)$$

DEMOSTRACION: Suponga que $P \supseteq Q$ y por simplicidad que P y Q difieren por sólo uno de sus puntos. Así $Q = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$
$$P = \{x_0, x_1, \ldots, c, \ldots, x_n\}$$
donde $c \in (x_r, x_{r+1})$. Ahora bien
$$v_f(Q) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(c) - f(x_r)| + |f(x_{r+1}) - f(c)|$$
$$= v_f(P).$$

Si $P \supseteq Q$ y éstas difieren en más de un punto, digamos n, entonces fórmese la cadena $Q = P_0 \subseteq P_1 \subseteq \ldots \subseteq P_n = P$ donde $P_k \wedge P_{k+1} \in \mathcal{P}[a,b]$ que difieren en sólo un punto.

Aplicando a ésta lo probado anteriormente tendremos $v_f(Q) \leq v_f(P_1) \leq \ldots \leq v_f(P)$ es decir $P \supseteq Q \Rightarrow v_f(P) \geq v_f(Q)$.

Para probar la otra parte definamos $A_n = \{P \mid P \in \mathcal{P}[a,b]$ con a lo más n puntos$\}$ y $P_n = \bigcup_n A_n \quad (\in \mathcal{P}[a,b])$

de aquí $A_n \subseteq A_{n+1}$ y también $P_n \subseteq P_{n+1}$, y consideremos la sucesión (P_n). Si $f \in BV[a,b]$ se tiene que $v_f(P_n) \leq v_f(P_{n+1})$ con lo que la sucesión $(v_f(P_n))$ es creciente y acotada por $V_f[a,b]$ y tendremos que

$$\lim_n v_f(P_n) = \sup\{v_f(P_n) \mid P_n \text{ como antes}\} = V_f[a,b]. \;\#\#$$

TEOREMA 1.4 Si $f \in BV[a,b]$ entonces f está acotada en $I = [a,b]$ y se-tiene $\|f\|_I \leq |f(a)| + V_f[a,b]$.

DEMOSTRACION: Utilizando la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \\ &\leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \\ &\leq |f(a)| + v_f(P) \quad , \quad P = \{a, x, b\} \\ |f(x)| &\leq |f(a)| + V_f[a,b] \text{, para toda } x \in I \text{,} \end{aligned}$$

y así

$$\|f\|_I = \sup\{|f(x)| \mid x \in I\} \leq |f(a)| + V_f[a,b]. \quad \#\#$$

1.2 ESPACIO VECTORIAL Y NORMA PARA BV $[a,b]$.

Veamos ahora que BV $[a,b]$ es un espacio vectorial de funciones sobre $\mathbb{R}$, bajo la suma y multi plicación escalar ordinarias. Incluso bajo algunas suposiciones veremos que el producto y cociente — de funciones en BV $[a,b]$ es de nuevo un elemento de BV $[a,b]$. Además aquí introduciremos una norma - en BV $[a,b]$, $\| \;\|_{BV}$, bajo la cual discutiremos convergencia en BV $[a,b]$ en el capítulo siguiente.

TEOREMA 1.5 Si $f, g \in BV[a,b]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces αf y $f+g \in BV[a,b]$.

Además

$$V_{\alpha f}[a,b] = |\alpha| V_f[a,b]$$

y

$$V_{f+g}[a,b] \leq V_f[a,b] + V_g[a,b]$$

DEMOSTRACION: Suponga que $f, g \in BV[a,b]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$.

$$\begin{aligned} v_{\alpha f}(P) &= \sum_{k=1}^{n} |\alpha f(x_k) - \alpha f(x_{k-1})| = |\alpha| \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ &= |\alpha| v_f(P) \end{aligned}$$

de lo que

$$\sup\{v_{\alpha f}(P) \mid P \in \mathcal{P}[a,b]\} = |\alpha| \; V_f[a,b].$$

es decir

$$V_{\alpha f}[a,b] = |\alpha| \cdot V_f[a,b]$$

Ahora considere
$$v_{f+g}(P)=\sum_{k=1}^{n}|(f+g)(x_k)-(f+g)(x_{k-1})|$$
$$=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})+g(x_k)-g(x_{k-1})|$$
$$\leq\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})|$$
$$\leq V_f[a,b]+V_g[a,b]$$

por consiguiente
$$f+g\in BV[a,b] \text{ y } V_{f+g}[a,b]\leq V_f[a,b]+V_g[a,b]. \ ***$$

TEOREMA 1.6 Si $f, g\in BV[a,b]$ entonces $f\cdot g\in BV[a,b]$ y se tiene
$$V_{fg}[a,b]\leq \|f\|_I V_g[a,b]+\|g\|_I V_f[a,b].$$

si además
$$0<m\leq f(x) \quad \text{para toda } x\in I=[a,b] \text{ entonces}$$
$$1/f\in BV[a,b] \text{ y } V_{1/f}[a,b]\leq V_f[a,b]/m^2$$

DEMOSTRACION: Suponga que $f, g\in BV[a,b]$ y $P\in \mathcal{P}[a,b]$.

Consideremos
$$v_{fg}(P)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)g(x_k)-f(x_{k-1})g(x_{k-1})|$$
$$=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]+g(x_{k-1})[f(x_k)-f(x_{k-1})]|$$
$$\leq\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)||g(x_k)-g(x_{k-1})|+\sum_{k=1}^{n}|g(x_{k-1})||f(x_k)-f(x_{k-1})|$$
$$\leq \|f\|_I V_g(P)+\|g\|_I V_f(P)$$

De aquí
$$\in BV[a,b] \text{ y } V_{fg}[a,b]\leq \|f\|_I V_g[a,b]+\|g\|_I V_f[a,b]$$

Note que aquí asumimos el hecho de que $\|f\|_I$ y $\|g\|_I$ son finitos debido al teorema 1.4

Para probar la otra afirmación suponga que $f\in BV[a,b]$ y $0<m\leq f(x)$ para toda $x\in[a,b]$

como

$$\begin{aligned} v_{1/f}(P) &= \sum_{k=1}^{n} \left| 1/f(x_k) - 1/f(x_{k-1}) \right| , \quad P \in \mathcal{P}[a,b] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}{|f(x_k) \cdot f(x_{k-1})|} \\ &\leq \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ &= \frac{1}{m^2} v_f(P) \leq \frac{1}{m^2} V_f[a,b] \end{aligned}$$

con lo que

$$1/f \in BV[a,b] \text{ y } \quad V_{1/f}[a,b] \leq \frac{1}{m^2} V_f[a,b] \qquad **$$

El siguiente ejemplo muestra la necesidad de la condición añadida a la última parte del teorema anterior.

Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \begin{cases} 0 , & x = 0 \\ 1 , & x \in (0,1] \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -1 , & x = 0 \\ x , & x \in (0,1] \end{cases}$$

consideremos $(f/g)(x) = \begin{cases} 0 , & x = 0 \\ 1/x , & x \in (0,1] \end{cases}$

y escojamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \{0, 1/n, 1/n-1, \ldots, 1/2, 1\} \in \mathcal{P}[a,b]$, entonces.

$$\begin{aligned} v_{f/g}(P_n) &= \sum_{k=1}^{n+1} \left| (f/g)(x_k) - (f/g)(x_{k-1}) \right| \\ &= n + \sum_{k=2}^{n+1} 1 \\ &= 2n \end{aligned}$$

por lo que $\{ v_{f/g}(P_n) \mid n \in \mathbb{N} \}$ no está acotado y así $f/g \notin BV[0,1]$ a pesar de que f y $g \in BV[0,1]$.

TEOREMA 1.7 La función $f \to \|f\|_{BV} = |f(a)| + V_f[a,b]$ es una norma dentro del espacio vectorial BV $[a,b]$.

DEMOSTRACION: Sólo debemos probar que, si $f, g \in BV[a,b]$.

i) $\|f\|_{BV} \geq 0$ y $\|f\|_{BV} = 0 \leftrightarrow f$ es la función cero.
ii) $\|\alpha f\|_{BV} = |\alpha| \|f\|_{BV}$
iii) $\|f+g\|_{BV} \leq \|f\|_{BV} + \|g\|_{BV}$

i) Como $\|f\|_{BV} = |f(a)| + V_f[a,b]$ se tiene que $\|f\|_{BV} \geq 0$

Si $\|f\|_{BV} = 0 \leftrightarrow |f(a)| = 0 \wedge V_f[a,b] = 0$

$\leftrightarrow f(a) = 0 \wedge f$ es constante en $[a,b]$.

$\leftrightarrow f(x) = 0 \ , \ \forall \in [a,b]$.

Las demostraciones de ii) e iii) se siguen del teorema 1.4 ##

1.3 CARACTERIZACION DE BV $[a,b]$.

Hasta aquí nuestra discusión de $V_f[a,b]$ se ha hecho considerando un intervalo fijo $[a,b]$, ahora veamos las propiedades de $V_f[a,b]$ en función del intervalo manteniendo a f fija. Se tendrá que las funciones pertenecientes a BV $[a,b]$ son aquellas, y sólo aquellas, que pueden expresarse como la diferencia de dos funciones crecientes.

Se analizarán brevemente algunos aspectos sobre la continuidad dentro de BV $[a,b]$.

TEOREMA 1.8 Sean $f \in BV[a,b]$ y $c \in (a,b)$

Entonces $f|_{[a,c]}$ y $f|_{[c,b]} \in BV[a,c] \wedge BV[c,b]$

respectivamente. Además $$V_f[a,b] = V_f[a,c] + V_f[c,b]$$

e inversamente.

DEMOSTRACION: Suponga que $f \in BV[a,b]$ y $c \in (a,b)$

Sean $P_1 \wedge P_2$ particiones cualesquiera de $[a,c]$ y $[c,b]$ respectivamente; y sea $P = P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$. Entonces por definición

$$v_f(P) = v_f(P_1) + v_f(P_2) \leq V_f[a,b]$$

de aquí $v_f(P_1) \leq V_f[a,b]$ y $v_f(P_2) \leq V_f[a,b]$.

Por lo que las restricciones

$$f|_{[a,c]} \in BV[a,c] \wedge f|_{[c,b]} \in BV[c,b]$$

Aún más $V_f[a,c] + V_f[c,b] \leq V_f[a,b]$

La desigualdad en el otro sentido se probará como sigue:

Sea $Q = \{x_0, x_1, x_2, \dots x_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$ y considere $P = Q \cup \{c\}$, suponga que $c \in [x_{r-1}, x_r]$

Entonces, ya que $P \geq Q$, $v_f(P) \geq v_f(Q)$

Sean $P_1 = P \cap [a,c]$ y $P_2 = P \cap [c,b]$ entonces $v_f(P) = v_f(P_1) + v_f(P_2)$

y así
$$v_f(Q) \leq v_f(P_1) + v_f(P_2)$$
$$\leq V_f[a,c] + V_f[c,b]$$

por tanto $V_f[a,b] \leq V_f[a,c] + V_f[c,b]$. De lo que se concluye
$$V_f[a,b] = V_f[a,c] + V_f[c,b]$$

De la última parte de la demostración vemos que

$$g \in BV[a,c] \cap BV[c,b] \rightarrow g \in BV[a,b] \quad **$$

TEOREMA 1.9 Sea $f \in BV[a,b]$. Definimos
$$P_f(x) = \begin{cases} 0 & , x = a \\ V_f[a,x] & , x \in (a,b] \end{cases}$$
y se tiene que $P_f \nearrow$ es creciente — en $[a,b]$. Además $N_f = P_f - f$ también lo es.

DEMOSTRACION: Sean $a < x_1 \leq x_2 \leq b$ entonces $P_f(x_2) - P_f(x_1) = V_f[a,x_2] - V_f[a,x_1] \geq 0$ porque el teorema anterior asegura que $V_f[a,x_2] \geq V_f[a,x_1]$.

Así $P_f(x_2) \geq P_f(x_1)$ por consiguiente $P_f \nearrow$ en $[a,b]$.

Ahora bien
$$N_f(x_2) - N_f(x_1) = P_f(x_2) - P_f(x_1) - [f(x_2) - f(x_1)]$$
$$= V_f[x_1, x_2] - [f(x_2) - f(x_1)]$$

y por el teorema anterior

y como $|f(x_2) - f(x_1)| \leq V_f[x_1, x_2]$ se tiene $N_f(x_2) \geq N_f(x_1)$
así $N_f \nearrow$ en $[a,b]$ **

LEMA 1.10 Sea $f \in BV[a,b]$ contínua por la derecha en $c \in [a,b)$. Para $\epsilon > 0$ dado existe $\delta > 0$ y una partición $Q = \{c, x_1, \dots x_n = b\}$, suficientemente fina de $[c,b]$ con $x_1 - c < \delta$ tal que
$$V_f[c,b] - \epsilon/2 \leq \epsilon/2 + \sum_{k=2}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \epsilon/2 + V_f[x_1, b]$$

de lo que se sigue: $V_f[c,x_1] = V_f[c,b] - V_f[x_1,b] \leq \epsilon$

DEMOSTRACION: Suponga que $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f(c) \wedge f \in BV[a,b]$ entonces

a) Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$c < x < c+\delta \to |f(x) - f(c)| < \epsilon/2 \quad \text{y}$$

b) $V_f[a,b] = \text{supremo} \{ v_f(P) \mid P \in \mathcal{P}[a,b] \}$

De b) y las propiedades del supremo se sigue que para todo $\epsilon > 0$ existe $Q \in \mathcal{P}[c,b]$ tal que

$$V_f[c,b] - \epsilon/2 \leq v_f(Q) \qquad (1)$$

Sea $P = Q \cup \{x_1\}$, $x_1 \in (c, c+\delta)$, una nueva partición de $[c,b]$ es claro que $P \supseteq Q$ y por tanto, según (1), que

$$\begin{aligned} V_f[c,b] - \epsilon/2 &\leq v_f(P) \\ &= \sum^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ &= \sum_{k=2}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(x_1) - f(c)| \end{aligned}$$

y por a) para ese $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\leq \epsilon/2 + \sum_{k=2}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ &\leq \epsilon/2 + V_f[x_1, b] \end{aligned}$$

por lo que se obtiene lo que queríamos **

TEOREMA 1.11 Sea $f \in C[a,b]$. $f \in BV[a,b]$ si y sólo si f es la diferencia de dos funciones continuas crecientes.

DEMOSTRACION: Veamos que f contínua por la derecha en $c \in [a,b)$ implica que p_f, y por consiguiente n_f, también lo es.

Sea $\epsilon > 0$ dado, del teorema anterior existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} c < x < c+\delta &\to |V_f[c,b] - V_f[x,b]| < \epsilon \\ &\to |V_f[c,x]| < \epsilon \\ &\to |p_f(x) - p_f(c)| < \epsilon \end{aligned}$$

por tanto p_f es contínua por la derecha en c.

Siguiendo la demostración del lema 1.10 se puede probar de manera similar que f contínua a la -

izquierda de C implica que p_f también lo es.

Así $f \in C[a,b]$ implica $p_f \wedge n_f \in C[a,b]$.

y como $f = p_f - n_f$ la conclusión del teorema es obvia. **

Note que la descomposición de una $f \in BV[a,b]$ contínua está dada por dos funciones crecien - tes $n_f \wedge p_f$ también contínuas.

TEOREMA 1.12 Si $f \in BV[a,b]$ y $c \in (a,b)$ entonces $\lim_{x \to c^+} f(x) \wedge \lim_{x \to c^-} f(x)$ existen. Además estos límites son iguales excepto, posiblemente, por una colección contable de puntos en $[a,b]$.

DEMOSTRACION: Basta probar el caso en que $f \nearrow$ en $[a,b]$, pues si ésto pasa y $g \in BV[a,b]$ entonces $g = p_g - n_g$ donde $p_g \nearrow \wedge n_g \nearrow$ en $[a,b]$ y aplicando lo anterior a ésta se tendría que g satisfacerá también nuestras afirmaciones.

Bien,

Sea $(x_n) \to c$ una sucesión creciente entonces la sucesión $\{f(x_n)\}$ es creciente y acotada por $f(c)$ por lo que

$$\{f(x_n)\} \to \sup \{f(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = L$$

Notemos que L es independiente de la sucesión (x_n) escogida ya que si (y_n) es otra — tal y $L_y = \sup\{f(y_n) \mid n \in \mathbb{N}\} > L$ entonces existiría $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(y_{n_0}) > L \qquad (1)$$

y la nueva sucesión que consiste de y_{n_0} y todos los valores x_n de $\{x_n\}$ mayores o iguales a éste tienen también como supremo a L contradiciendo (1).

Ahora bien, sea $(x_n) \to c \wedge x_n < c$ probaremos que

$$\lim_n f(x_n) = L$$

De (x_n) extraigamos una sucesión $(x_{n_k}) \to c$ creciente, para ésta se tiene

$\lim f(x_{n_k}) = L$ es decir para todo $\epsilon > 0$ dado existe $N_1 > 0$ tal que $n_k > N_1 \to |f(x_{n_k}) - L| < \epsilon$ (2)

y para este mismo ϵ existe $N_2 > 0$ tal que

$$n > N_2 \to c - x_n < \epsilon$$

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Si para algún $r > N$ se tuviera $|f(x_r) - L| > \epsilon$ esto contradiciría (2) pues x_r puede ser escogido dentro de nuestra sucesión (x_{n_k})

Por lo anterior concluimos que $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = f(c^+)$

La prueba de que $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = f(c^-)$ existe es similar.

Para probar nuestra última afirmación, procedamos como sigue;

Sea $j_c = f(c^+) - f(c^-)$ donde $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = f(c^-)$

consideremos

$$S_n = \{ c \in (a,b) \mid j_c > 1/n \}$$

es finito, ya que si no fuera así sería al menos contable y para tales C se tendría

$$\sum_{c=1}^{\infty} j_c > \sum_{c=1}^{\infty} 1/n \to \infty$$

que contradice el hecho de que

$$\sum_{c} j_c < f(b) - f(a) \qquad \text{(finito)}$$

Como el conjunto de discontinuidades de f es

$S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ y siendo ésta la unión contable de conjuntos-finitos, S también es contable. **

Nota: Más adelante en el capítulo 3 introduciremos el concepto de medida cero con el cual el - teorema anterior puede enunciarse como sigue;

TEOREMA 1.12 El conjunto de discontinuidades para $f \in BV[a,b]$ tiene medida-cero.

1.4 LONGITUD DE ARCO Y BV $[a,b]$.

Aquí veremos la relación entre las funciones de BV $[a,b]$ y las curvas rectificables, es decir - aquellas con longitud de arco finita.

DEFINICION 1.2 Sea $\bar{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continua y $P \in \mathcal{P}[a,b]$

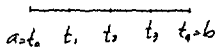
Definimos

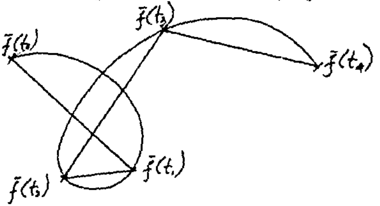
$$\Lambda_f(P) = \sum_{k=1}^{n} \| \bar{f}(t_k) - \bar{f}(t_{k-1}) \|$$

si $\Lambda_f(P) \leq M$ y toda $P \in \mathcal{P}[a,b]$ diremos que f es una curva RECTIFICABLE y su — LONGITUD DE ARCO, denotada por $\Lambda_f[a,b]$ se define por

$$\Lambda_f[a,b] = \text{supremo}\left\{\Lambda_f(P) \,\Big|\, P \in \mathcal{P}[a,b]\right\}$$

La idea geométrica de lo anterior consiste en aproximar la longitud de la curva mediante polígonos — inscritos en ella; por ejemplo:





TEOREMA 1.13 Sea $\bar f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continua, con sus componentes f_k dadas por $\bar f = (f_1, f_2, \dots f_n)$

Entonces $\bar f$ es rectificable si y sólo si cada componente $f_k \in BV[a,b]$ en tal caso

$$V_{f_k}[a,b] \le \Lambda_f[a,b] \le \sum_{k=1}^{n} V_{f_k}[a,b] \quad , k = 1,2, \dots m$$

DEMOSTRACION: Si $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} |f_k(t_i) - f_k(t_{i-1})| \le \Lambda_f(P) \le \sum_{i,j}^{n,m} |f_j(t_i) - f_j(t_{i-1})| \quad (1)$$

por lo que todas las afirmaciones del teorema se siguen de (1) . **

CAPITULO 2

SUCESIONES Y CONVERGENCIAS EN BV.

Aquí analizaremos algunas de las propiedades de $f \in BV[a,b]$ inherentes a sucesiones de éstas. Estableceremos que el espacio normado (ó métrico) $(BV, \| \ \|_{BV})$ es completo, es decir toda sucesión de Cauchy en BV converge a un elemento en BV.

Además probaremos dos teoremas de escogencia en BV sobre sucesiones en él.

2.1 COMPLETITUD DE BV a,b .

TEOREMA 2.1 Sea (f_n) una sucesión en BV $[a,b]$ convergente en cada punto de $[a,b]$ a una función f y suponga que para algún $M > 0$ se tiene $V_{f_n}[a,b] \leq M$ para toda $n \geq N$. Entonces $f \in$ BV $[a,b]$ y $V_f[a,b] \leq M$.

DEMOSTRACION: Suponga que $(f_n) \to f$ en $[a,b]$ y $V_{f_n}[a,b] \leq M$, $n \geq N$ de aquí se tiene que

$$\lim_n |f_n(x_1) - f_n(x_2)| = |f(x_1) - f(x_2)|, \quad x_1, x_2 \in [a,b].$$

Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{P}[a,b]$ entonces

$$\begin{aligned} v_f(P) &= \sum_{k=1}^{r} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ &= \lim_n \sum_{k=1}^{r} |f_n(x_k) - f_n(x_{k-1})| \\ &= \lim_n v_{f_n}(P) \\ &\leq \lim_n V_{f_n}[a,b] \\ &\leq M \end{aligned}$$

por consiguiente $f \in$ BV $[a,b]$ y $V_f[a,b] \leq M$. **

El siguiente ejemplo muestra la necesidad de la condición $V_{f_n}[a,b] \leq M$ aún a pesar de que la convergencia sea uniforme.

Sean $f_n(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [0, 1/n\pi] \\ x \operatorname{sen} 1/x & , x \in [1/n\pi, 1] \end{cases}$ para toda $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ x \operatorname{sen} 1/x & , x \in (0,1] \end{cases}$$

$f_n \in$ BV $[a,b]$ ya que $|f_n'(x)| = \begin{cases} 0 & , x \in [0, 1/n\pi] \\ \left| \frac{\cos 1/x}{x} + \operatorname{sen} 1/x \right| & , x \in (1/n\pi, 1] \end{cases}$

$$\leq \begin{cases} 0 & , x \in [0, 1/n\pi] \\ 1 + 1/x & , x \in (1/n\pi, 1] \end{cases} \leq 1 + n\pi$$

y el teorema 1.2 así lo aseguran. Además si consideramos

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |x \operatorname{sen} 1/x| \leq x \quad , \quad x \in [0, 1/n\pi]$$

$$\leq \frac{1}{n\pi}$$

$$< \epsilon \quad , \quad \text{si } n \to \infty$$

vemos que la convergencia es uniforme pero aún sin embargo $f \notin$ BV $[a,b]$ como ya vimos anteriormente.

TEOREMA 2.2 Completitud de BV $[a,b]$.

Sea (f_n) una sucesión en BV $[a,b]$ ∧ $\|f_n - f_m\|_{BV} \to 0$ si $m,n \to \infty$
Entonces existe una función $f \in$ BV $[a,b]$ para la cual $\|f_n - f\|_{BV} \to 0$ si $n \to \infty$

DEMOSTRACION: Suponga que (f_n) satisface lo anterior, es decir, para todo $\epsilon > 0$ dado existe $N(\epsilon)$ tal que

$$n,m \geq N(\epsilon) \rightarrow \|f_n - f_m\|_{BV} < \epsilon$$

Para cada $x \in I = [a,b]$ se tiene que si $n,m \geq N(\epsilon)$ entonces

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_I \leq \|f_m - f_n\|_{BV} < \epsilon \qquad (1)$$

de lo que $(f_n(x))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por tanto convergente a algún número, digamos, $f(x)$.

Definimos $f(x) = \lim_{n} f_n(x)$ para toda $x \in I = [a,b]$.
De (1) concluimos si $n \geq N(\epsilon)$ es fijo y $m \geq N(\epsilon)$ entonces

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| < \epsilon \qquad \text{para toda} \quad x \in I$$

tomando el límite sobre m se tiene que

$$m \geq N(\epsilon) \rightarrow \|f_m(x) - f(x)\| < \epsilon \quad , \quad x \in I$$

es decir $(f_n) \rightarrow f$; veamos que $f \in BV[a,b]$. De (1) fijemos $m_0 \geq N(\epsilon)$
y si $n \geq N(\epsilon) \rightarrow \|f_{m_0} - f_n\|_{BV} < \epsilon$

$\rightarrow \|f_n\|_{BV} \leq M$ donde $M = \epsilon + \|f_{m_0}\|_{BV}$

$\rightarrow V_{f_n}[a,b] \leq M$

y como $(f_{n \geq N(\epsilon)}) \rightarrow f$ aplicando el teorema 2.1 se tiene que f es de variación acotada en $[a,b]$

La prueba a nuestra última afirmación se sigue de que $f_n \rightarrow f$ si $n \rightarrow \infty$ y la continuidad de la norma $\| \ \|_{BV}$ ##

2.2 TEOREMA DE SELECCION.

LEMA 2.3 Sea (f_n) una sucesión de funciones crecientes definidas en $I = [a,b]$ tales, que $\|f_n\|_I \leq M$, ~~Sea~~ $n \in N$. Entonces se puede extraer una sucesión parcial de (f_n) convergente en cada punto de $I = [a,b]$.

DEMOSTRACION: Sean $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ todos los puntos racionales de $[a,b]$ es decir

$$S = \mathbb{Q} \cap [a,b] = \{r_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Como $\|f_n\|_I \leq M$, $n \in \mathbb{N}$, se tiene que la sucesión $(f_n(r_1))$ está acotada (por M) por lo que, según el teorema de Bolzano-Weirstrass, existe una subsucesión $(f_n^{(1)})$ de (f_n) convergente en r_1 .

Como también $(f_n^{(1)}(r_2))$ está acotada, de $(f_n^{(1)})$ escojamos la sucesión $(f_n^{(2)})$ convergente en r_2 (y, por supuesto, en r_1). De manera inductiva escójase $(f_n^{(n)})$, $n \geq 2$ de tal forma que ésta sea una subsucesión de $(f_n^{(n-1)})$ convergente en los puntos $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

$(f_n^{(n)})$ converge en S , ya que si $r_k \in S$ escojamos $n \geq K$ y tendremos que $(f_n^{(n)}(r_k))$ converge debido a la construcción de $(f_n^{(n)})$

Sea $f \ni (f_n^{(n)}) \rightarrow f$ en $S = \mathbb{Q} \cap [a,b]$

si $r_j < r_k \in S$ entonces $f_n^{(n)}(r_k) - f_n^{(n)}(r_j) \geq 0$

$\therefore \lim_{n} [f_n^{(n)}(r_k) - f_n^{(n)}(r_j)] = f(r_k) - f(r_j) \geq 0$ por lo que $f \nearrow$ en S. Ahora definamos a f en todo $[a,b]$ como sigue

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow x} f(r) \qquad \text{donde} \quad r \in S \wedge x \in I$$

este límite existe debido al teorema 1.12

Probaremos que la función no decreciente f, obtenida de esta forma, es en todos sus puntos de continuidad el límite de $(f_n^{(n)})$, es decir si c es uno de tales puntos

$$f(c) = \lim_n f_n^{(n)}(c) .$$

Bien, sea c un tal punto, entonces para cualquier $\epsilon > 0$ se puede escojer $\delta > 0$ tal que

$$|c-x| < \delta \Rightarrow |f(c) - f(x)| < \epsilon/6 \qquad (1)$$

Sean r_1 y $r_2 \in S$ tales que $c - \delta < r_1 < c < r_2 < c + \delta$ $\wedge$

$$n \geq N(\epsilon) \rightarrow |f_n^{(n)}(r_1) - f(r_1)| < \epsilon/6 \;,\; |f_n^{(n)}(r_2) - f(r_2)| < \epsilon/6 \qquad (2)$$

de (1) y (2) se tiene que:

$$\begin{aligned} |f_n^{(n)}(r_1) - f_n^{(n)}(r_2)| &\leq |f_n^{(n)}(r_1) - f(r_1)| + |f(r_1) - f(r_2)| + |f(r_2) - f_n^{(n)}(r_2)| \\ &\leq \epsilon/6 + 2\epsilon/6 + \epsilon/6 = 2\epsilon/3 \end{aligned}$$

como $f_n^{(n)} \nearrow$ en S tendremos que $f_n^{(n)}(r_1) \leq f_n^{(n)}(c) \leq f_n^{(n)}(r_2)$ y además

$$\begin{aligned} |f(c) - f_n^{(n)}(c)| &\leq |f(c) - f(r_1)| + |f(r_1) - f_n^{(n)}(r_1)| + |f_n^{(n)}(r_1) - f_n^{(n)}(c)| \\ &\leq \epsilon/6 + \epsilon/6 + |f_n^{(n)}(r_1) - f_n^{(n)}(r_2)| \\ &\leq \epsilon/3 + 2\epsilon/3 \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

de lo que concluimos que $f(c) = \lim_n f_n^{(n)}(c)$

Ahora bien, como $f \nearrow$ en $[a,b]$ se sigue del teo. 1.2 que el conjunto de discontinuidades para f es numerable digamos $D = \{ d_i \mid i \in N \} \subseteq [a,b]$.

En seguida consideremos la sucesión (g_n) donde $g_n = f_n^{(n)}$ vemos que $\|g_n\|_I \leq M, n \in N$

Aplicando a (g_n) el proceso (diagonal), dado anteriormente para (f_n), obtendremos una nueva sucesión $(h_n) = (g_n^{(n)})$ que converge a f en todos los puntos de D y por tanto que converja en todo $I = [a,b]$.

Así (h_n) es la sucesión de (f_n) deseada.

Ahora una de nuestras metas.

TEOREMA 2.4 Sea (f_n) una sucesión de funciones en BV $[a,b]$ tal que $\|f_n\|_{BV} \leq M$, $n \in N$. Entonces existe una subsucesión (h_n) de (f_n) la cual, converge en todo punto de $[a,b]$ a una función $f \in$ BV $[a,b]$ tal que $\|f\|_{BV} \leq M$.

DEMOSTRACION: Sea (f_n) como se supone en el teorema. Como $f_n \in BV[a,b]$.
$f_n = P_{f_n} - N_{f_n}$ donde P_{f_n} y $N_{f_n} \nearrow$ en $[a,b]$.
como

$$V_{P_{f_n}}[a,b] = V_{f_n}[a,b] \le \|f_n\|_{BV} \le M$$ se sigue del teorema 1.4 que

$$\|P_{f_n}\|_I \le M$$

Consideremos (P_{f_n}). Por el teorema anterior podemos escojer una subsucesión $(P_{f_{n_k}})$ que converge en todo $[a,b]$ a una cierta función, digamos P_f. De aquí también obtenemos la subsucesión (f_{n_k}) de (f_n). Así las funciones $N_{f_{n_k}} = P_{f_{n_k}} - f_{n_k}$ son también no decrecientes y

$$\|N_{f_{n_k}}\|_I \le \|P_{f_{n_k}}\|_I + \|f_{n_k}\|_I \le 2M$$, por lo que de $(N_{f_{n_k}})$ podemos extraer una subsucesión $(N_{f_{n_{k_l}}})$ que converge en todo $[a,b]$ a una cierta función, digamos N_f.

De tal forma que la subsucesión $(f_{n_{k_l}})$ de (f_n) converge en $[a,b]$ y además

$$(f_{n_{k_l}}) \to P_f - N_f = f$$

El hecho de que $f \in BV[a,b]$ y $\|f\|_{BV} \le M$ se sigue del teorema 2.1 **

CAPITULO 3

DIFERENCIACION EN BV $[a,b]$.

El propósito principal de este capítulo es el de establecer el hecho de que toda función de variación acotada en $[a,b]$, $f \in$ BV $[a,b]$ tiene derivada finita excepto, posiblemente, en un conjunto de medida cero. Probaremos aquí el caso en que $f \nearrow$ en $[a,b]$ de lo cual, según el teorema — 1.8, se seguirá nuestra afirmación.

3.1 LEMAS BASICOS.

DEFINICION 3.1 (medida según Lebesgue). Sea (a,b) un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ definimos la medida de $[a,b]$ según Lebesgue, $\mu(a,b)$, como sigue

$$\mu(a,b) = b - a$$

Si $A \subseteq \mathbb{R}$ definimos la medida exterior de A, $\mu^*(A)$, como:

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subseteq \bigcup_k B_k} \sum_k (b_k - a_k)$$

Donde el ínfimo se toma sobre todos los cubrimientos de A por un número contable de intervalos abiertos (a_k, b_k)

A su vez definimos la medida inferior de A, $\mu_*(A)$ como:

$$\mu_*(A) = \mu(B) - \mu^*(B - A) \quad \text{donde} \quad B \supseteq A$$

y diremos que A es medible según Lebesgue si

$$\mu_*(A) = \mu^*(A) = \mu(A)$$

Nota: Se puede probar que $A \subseteq \mathbb{R}$ es medible (según Lebesgue) si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe B abierto en $\mathbb{R}$ tal que

$$\mu^*(A \triangle B) < \epsilon$$

De aquí también es posible concluir que $S \subset \mathbb{R}$ tiene medida cero si para cada $\epsilon > 0$ existe un recubrimiento numerable de S por medio de intervalos abiertos, tales que la suma de sus longitudes sea menor que ϵ .

Como sabemos la derivada de una función f en x_0, $f'(x_0)$, está dada por

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Este límite puede, por supuesto, no existir. Sin embargo introduciremos algunos conceptos nuevos.

DEFINICION 3.2 Sea f una función definida en algún intervalo que contenga a x_0 . Consideremos el cociente

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ entonces definimos, para f

i) $\Lambda_d(x_0)$ que es el límite superior de g cuando x tiende a x_0 por la derecha $(x \to x_0^+)$, a este valor, finito o infinito lo llamaremos número derivado superior derecho.

ii) $\lambda_d(x_0)$ (número derivado inferior derecho) como el límite inferior de g cuando $x \to x_0^+$

iii) $\Lambda_i(x_0)$ (número derivado superior izquierdo) como el límite superior de g cuando $x \to x_0^-$

iv) $\lambda_i(x_0)$ (número derivado inferior izquierdo) como el límite inferior de g cuando $x \to x_0^-$

De esto se sigue que $\lambda_d \le \Lambda_d$, $\lambda_i \le \Lambda_i$ (1)

Además, si Λ_d , λ_d son finitos y coinciden su valor común es $f'(x_0) = \Lambda_d(x_0) = \lambda_d(x_0)$ similarmente se tiene para $f'(x_0^-)$. De lo cual concluimos que la existencia de $f'(x_0)$ (finita) equivale a que, en este punto, x_0 , son finitos y coinciden todos los números derivados de f.

Por tanto nuestro teorema lo podemos enunciar como sigue:

TEOREMA DE LEBESGUE: Para una función creciente en $[a,b]$, las relaciones

$$-\infty < \lambda_i = \lambda_d = \Lambda_i = \Lambda_d < \infty \qquad (2)$$

se cumplen en todos los puntos de $[a,b]$ excepto posiblemente en un conjunto de medida cero (ie "en casi" todos los puntos de $[a,b]$).

Para la demostración de éste necesitaremos algunos lemas importantes así como otras definiciones.

DEFINICION 3.3 Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función para la cual $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0^+)$ y $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0^-)$ existen.

Diremos que x_0 es un punto invisible por la derecha para f si existe $\xi\in[a,b]$ tal que $\xi>x_0$ y además

$$f(\xi)>\text{máx}\{f(x_0^-),f(x_0),f(x_0^+)\}=M_{x_0}$$

Note: que en el caso de $f\nearrow$ en $[a,b]$ o $f\in C[a,b]$, M_{x_0} será igual a $f(x_0^+)$ y $f(x_0)$ respectivamente.

LEMA 3.1 El conjunto de todos los puntos invisibles por la derecha para $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es la unión de no mas un número contable de intervalos abiertos disjuntos dos a dos, (a_k,b_k) en los cuales se tiene $f(a_k^+)\le\text{máx}\{f(b_k^-),f(b_k),f(b_k^+)\}$

DEMOSTRACION: Sea x_0 invisible por la derecha de f en $[a,b]$ es decir existe $\xi>x_0$ en $[a,b]$ tal que $f(\xi)>\text{máx}\{f(x_0^-),f(x_0),f(x_0^+)\}=M_{x_0}$ entonces $\epsilon=f(\xi)-M_{x_0}>0$ y para este $\epsilon>0$ existen $\delta_1,\delta_2>0$ tales que

$$x_0-\delta_1<x<x_0\to|f(x)-f(x_0^-)|<\epsilon \qquad (1)$$

y

$$x_0<x<x_0+\delta_2\to|f(x)-f(x_0^+)|<\epsilon$$

si $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\xi-x_0\}$

de aquí $x_0-\delta<x<x_0\to f(\xi)-f(x)>M_{x_0}-f(x_0^-)>0$

$$\to f(\xi)>f(x) \qquad (2)$$

y $x_0<x<x_0+\delta\to f(\xi)>f(x)$ con $\xi>x$,

Probaremos que para tales x, éstos también son puntos invisibles por la derecha para f.

Sean $(x_n)\to x$. $(y_n)\to y$ sucesiones en $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ creciente y decreciente respectivamente. Entonces se tiene que $f(x_n)<f(\xi)$ y $f(y_n)<f(\xi)$ para toda n de lo cual

$$\lim_n f(x_n)=f(x^-)<f(\xi)$$
$$\lim_n f(y_n)=f(x^+)<f(\xi) \qquad (3)$$

De (2) y (3) se tendría que para toda $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq[a,b]$ existe $\xi>x$ tal que

$$f(\xi)>\text{máx}\{f(x^-),f(x),f(x^+)\}$$

De lo anterior se tiene que el conjunto de puntos invisibles por la derecha de f, G, es abierto con lo que $G = \bigcup_{K\in J} (a_K, b_K)$, $J \subseteq \mathbb{N}$

Supongamos que $f(a_K^+) > \text{máx}\{f(b_K^-), f(b_K), f(b_K^+)\}$ para algún $K \in J$.

ie

$$f(a_K^+) > M_{b_K} \quad \text{p/algún } K \in J. \qquad (4)$$

entonces existiría $x_0 \in (a_K, b_K)$ tal que $f(x_0) > M_{b_K}$

Sean $B = \{x \in (a_K, b_K) \mid f(x) \geq f(x_0)\}$ $(\neq \phi)$ $\wedge$ $x^* = \sup B$

como $x^* \in (a_K, b_K)$ entonces x^* es invisible por la derecha para f, existe entonces $\xi > x^*$ tal que $f(\xi) > M_{x^*}$

Vemos que $\xi \notin (a_K, b_K)$ ya que si ésto sucediera se tendría que $f(\xi) > f(x^*) \geq f(x_0) > M$ $\wedge$ $\xi > x^*$ contrario a la definición de x^*.

Por otro lado si $\xi > b_K$ entonces $M_{b_K} < f(x_0) \leq f(x^*) < f(\xi)$ contradiciendo que b_K no es invisible por la derecha para f.

Además $\xi < b_K$ es imposible pues $f(\xi) > f(x^*) \geq M_{b_K}$

De lo anterior se tiene que (4) no puede cumplirse y así

$$f(a_K^+) \leq \text{máx}\{f(b_K^-), f(b_K), f(b_K^+)\}, \quad K \in J \qquad **$$

Nota: Un punto x_0 se llama invisible por la izquierda de para una función f cuando existe— $\xi < x_0$ tal que $f(\xi) > M_{x_0}$

Los mismos razonamientos pueden ser usados para concluir que el conjunto de estos puntos(invisi bles por la izquierda), G, es

$$G = \bigcup_{K\in J} (a_K, b_K), \quad J \subseteq \mathbb{N} \quad \text{donde } (a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \phi, \text{ si } i \neq j$$

y además $f(a_K^+) \geq M_{b_K}$, $K \in J$.

LEMA 3.2 Sea $f/$ en $[a,b]$ con λ_i y Λ_d dos de sus números derivados.

Dados cualquier $c, C \in \mathbb{Q}$ con $0 < c < C < \infty$ $\wedge$ $\rho = c/C$

definamos

$$E_\rho = \{x \in [a,b] \mid \lambda_i(x) < c \wedge \Lambda_d(x) > C\},$$

entonces

$$\mu[E_\rho \cap (\alpha, \beta)] \leq \rho(\beta - \alpha) \quad \text{para todo } (\alpha, \beta) \subseteq [a,b]$$

DEMOSTRACION: Sea $x_0 \in (\alpha,\beta)$ tal que $\lambda'(x_0) < c$, entonces por la definición de — $\lambda'(x_0)$, deberá existir $\xi < x_0$ tal que $\frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi - x_0} < c$

de lo que $f(\xi)-f(x_0) > c\xi - c x_0$ o bien $f(\xi)-c\xi > f(x_0) - c x_0$, $\xi < x_0$

Por tanto x_0 es invisible por la izquierda para la función $g(x)=f(x)-cx$. Del lema anterior el conjunto de tales puntos x_0, digamos G es igual a

$$G = \bigcup_{k\in J_0} (\alpha_k,\beta_k), \quad J_0 \subseteq \mathbb{N}$$

los (α_k,β_k) disjuntos dos a dos.
donde además $(\alpha_k,\beta_k) \subseteq (\alpha,\beta) \wedge f(\alpha_k) - c\alpha_k \geq f(\beta_k) - c\beta_k$, $k \in J_0$
o equivalentemente

$$f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leq c(\beta_k - \alpha_k) \qquad (1)$$

Sea $G_k = \{ x \in (\alpha_k,\beta_k) \mid \Lambda_d(x) > C \}$
Si $x_0 \in G_k$ entonces existe $\xi > x_0$ tal que $\frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi - x_0} > C$
de lo que $f(\xi) - C\xi > f(x_0) - Cx_0$

es decir x_0 es un punto invisible por la derecha de $g(x) = f(x) - Cx$ y por el lema- anterior se tiene que

$$G_k = \bigcup_{n\in J_1} (\alpha_{k_n},\beta_{k_n}), \quad J_1 \subseteq \mathbb{N}$$

donde $(\alpha_{k_n},\beta_{k_n})$ son disjuntos dos a dos y además $(\alpha_{k_n},\beta_{k_n}) \subseteq (\alpha_k,\beta_k)$ con

$$\beta_{k_n} - \alpha_{k_n} \leq \frac{1}{C}\left[f(\beta_{k_n}) - f(\alpha_{k_n})\right] \qquad (2)$$

de las definiciones de $G \wedge G_k$ se tiene que

$$E_f \cap (\alpha,\beta) \subseteq \bigcup_{k,n} (\alpha_{k_n},\beta_{k_n}) \qquad (3)$$

más aún de (2) y (3)

$$\sum_{k,n} (\beta_{k_n} - \alpha_{k_n}) \leq \frac{1}{C}\sum_{k,n}\left[f(\beta_{k_n}) - f(\alpha_{k_n})\right]$$

como $\bigcup_n (\alpha_{k_n},\beta_{k_n}) \subseteq (\alpha_k,\beta_k) \rightarrow \bigcup_n f[(\alpha_{k_n},\beta_{k_n})] \subseteq f(\alpha_k,\beta_k) \wedge$

$$\mu\left[\bigcup_n f(\alpha_{k_n},\beta_{k_n})\right] = \sum_n \mu\left[f(\alpha_{k_n},\beta_{k_n})\right]$$

pues $f\nearrow$ en $[a,b]$

$$= \sum_n \left[f(\beta_{k_n}) - f(\alpha_{k_n})\right]$$

$$\leq f(\beta_k) - f(\alpha_k)$$

se sigue que $\sum_{k,n}(\beta_{k_n}-\alpha_{k_n}) \leq \frac{1}{C}\sum_{k}[f(\beta_k)-f(\alpha_k)]$

según (1) $\leq \frac{c}{C}\sum_{k}(\beta_k-\alpha_k)$

$\leq \rho(\beta-\alpha)$

por lo que $\mu\,[E_\rho \cap (\alpha,\beta)] \leq \rho(\beta-\alpha)$.

**

3.2 TEOREMA DE LEBESGUE: En este momento pasaremos a la demostración del teorema — de Lebesgue que según vimos, equivale a probar que.

Para $f\nearrow$ en $[a,b]$ sus números derivados son iguales y finitos en casi todos los puntos de $[a,b]$

DEMOSTRACION AL TEOREMA DE LEBESGUE: Hagámos antes algunas observaciones. Sólo analizaremos — los puntos de continuidad para f en $[a,b]$ ya que el conjunto de todos los demás tiene medida cero — (teorema 1.12) Además, sólo basta probar que

$$\Lambda_d(x_0) < \infty \qquad (1)$$

y $\lambda_i(x_0) \geq \Lambda_d(x_0)$ (2) en casi todos los puntos x_0 de $[a,b]$

En efecto si consideramos $f^*(x) = -f(-x)$ definida en $[-b,-a]$, $f^*\nearrow$ en $[-b,-a]$ pues si $x_1 \leq x_2 \in [-b,-a]$

$\rightarrow -x_1 \geq -x_2$

$\rightarrow f(-x_1) \geq f(-x_2)$ pues $f\nearrow$ en $[a,b]$

$\rightarrow f^*(x_1) \leq f^*(x_2)$

y siendo $\Lambda_d^*(-x_0)$ y $\lambda_i^*(-x_0)$ los números derivados superior derecho e inferior izquierdo — para f^* en $-x_0$ respectivamente se tiene que

$$\Lambda_d^*(-x_0) = \Lambda_i(x_0) \quad \text{y} \quad \lambda_i^*(-x_0) = \lambda_d(x_0) \qquad (3)$$

Sólo probaremos una de las dos igualdades, la otra puede obtenerse de manera similar

$$\Lambda_d^*(-x_0) = \lim_{r\to 0} \sup\left\{\frac{f^*(x)-f^*(-x_0)}{x+x_0},\ -x_0 < x < -x_0+r\right\}$$

$$= \lim_{r\to 0} \sup\left\{\frac{-f(-x)+f(x_0)}{x+x_0},\ -x_0 < x < -x_0+r\right\}$$

$$= \lim_{r\to 0} \sup\left\{\frac{f(-x)-f(x_0)}{-x-x_0},\ -x_0 < x < -x_0+r\right\}$$

$$= \lim_{r\to 0} \sup\left\{ \frac{f(u)-f(x_0)}{u-x_0} \,\middle|\, x_0 - r < u < x_0 \right\}$$
$$= \Delta_i(x_0) \quad \text{para } f$$

Por esto suponiendo que (1) y (2) son válidas, aplicadas a f^* se tiene que

$$\lambda_i^*(-x_0) \geq \Delta_d^*(-x_0)$$

lo cual implicaría según(3) que

$$\lambda_d(x_0) \geq \Delta_i(x_0) \qquad (4)$$

De (1), (2), (3), (4), y la definición de números derivados se sigue

$$\Delta_d \leq \lambda_i \leq \Delta_i \leq \lambda_d \leq \Delta_d \qquad \text{en } x_0$$

con lo que

$\lambda_i = \lambda_d = \Delta_i = \Delta_d$ en x_0 y la afirmación de nuestro teorema se tiene.

Procedamos a la prueba de (1) y (2) .

(1) Si $\Delta_d(x_0) = +\infty$ para algún $x_0 \in [a,b]$, entonces dada cualquier $M > 0$ existe $\xi > x_0$ tal que

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} > M$$

de lo que $f(\xi) - M\xi > f(x_0) - Mx_0$, Así x_0 es un punto invisible por la derecha de la función $g(x) = f(x) - Mx$

Por lo que del lema 3.1

$$G = \left\{ x_0 \in [a,b] \,\middle|\, \Delta_d(x_0) = +\infty \right\} \subseteq \bigcup_{k\in J} (a_k, b_k) \quad , J \subseteq \mathbb{N}$$

donde los (a_k, b_k) son disjuntos dos a dos, y además

$$f(a_k) - Ma_k \leq f(b_k) - Mb_k \quad , \quad k \in J$$

o bien

$$b_k - a_k \leq [f(b_k) - f(a_k)]/M$$

sumando sobre $k \in J$

$$\sum_{k\in J} (b_k - a_k) \leq \sum_{k\in J} \frac{f(b_k) - f(a_k)}{M} < \frac{f(b) - f(a)}{M}$$

pues $f \nearrow$ en $[a,b]$. Pero M puede tomarse tan grande para que si $\epsilon > 0$ es dado

$$\sum_{k\in J} (b_k - a_k) < \frac{f(b) - f(a)}{M} < \epsilon .$$

por tanto $\mu(G) \leq \mu\left(\bigcup_{k\in J}(a_k,b_k)\right) = \sum_{k\in J}(b_k-a_k) < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$,
de lo cual $\mu(G) = 0$

Por consiguiente $\Lambda_d < +\infty$ en casí todas partes de $[a,b]$.
Note que $\Lambda_d = -\infty$ es imposible ya que $\dfrac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi - x_0} > 0$
si $\xi > x_0$ y $f\nearrow$ en $[a,b]$.

Para probar (2) procedamos como sigue. Sean c, C , ρ y el conjunto E_ρ como se daban en el lema 3.2. Se seguirá que $\lambda_i \geq \Lambda_d$ casi en todas partes de $[a,b]$ si probamos que — $\mu(E_\rho) = 0$ ya que el conjunto $A = \{x\in [a,b] \mid \lambda_i(x) < \Lambda_d(x)\} \subseteq \bigcup_{\rho\in\mathbb{Q}} E_\rho$
donde $\rho = c/C$, $c, C \in \mathbb{Q}$

Así A sería cubierto por un número contable de conjuntos de medida cero, por tanto

$$\mu(A) = 0 .$$

Bien, sea $\mu(E_\rho) = t$, entonces por la definición de medida de un conjunto en $\mathbb{R}$, se - tiene que para $\epsilon > 0$ dado existe un conjunto abierto $G = \bigcup_{k\in J}(a_k,b_k)$, $J\subseteq N$ donde (a_k,b_k) son disjuntos dos a dos, tal que

$$E_\rho \subseteq G \wedge \sum_{k\in J}(b_k - a_k) < t + \epsilon$$

Si $t_k = \mu[E_\rho \cap (a_k,b_k)]$ entonces $t = \sum_k t_k$ pero por el lema 3.2 si $k\in J$ $t_k \leq \rho(b_k - a_k)$ lo que implica que $t < \rho\sum_k(b_k - a_k) < \rho(t+\epsilon)$,
como $\epsilon > 0$ es arbitrario se sigue que $t \leq \rho t$ y así $0 \leq (\rho-1)t$ de donde $t = 0$ ya-que $0 < \rho < 1$

Así $\mu(E_\rho) = 0$, para toda $\rho = c/C$, $c, C \in \mathbb{Q}$
es decir.

$\mu(A) = 0$ como se quería. **

CAPITULO 4

INTEGRACION EN BV $[a,b]$.

Ahora consideraremos la integral de Riemann-Stieltjes, una generalización de la integral de Riemann, algunas de sus propiedades más importantes y su relación con las funciones de variación acotada. En este capítulo probaremos la integrabilidad de las funciones de variación acotada según Riemann-Stieltjes en un intervalo $[a,b]$.

Además veremos que podemos reducir nuestro estudio al caso de integradores crecientes sin perder generalidad sobre los de variación acotada.

4.1 INTEGRAL RIEMANN-STIELTJES.

Sólo daremos algunas definiciones y enunciaremos algunas propiedades básicas.

De aquí en adelante supondremos que nuestras funciones son reales definidas y acotadas en un cierto intervalo, digamos $[a,b]$.

DEFINICION 4.1 Sea $P=\{x_0, x_1, \dots , x_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$ y sea $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ una suma de la forma

$$S(P,f,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k \qquad \text{donde} \qquad \Delta\alpha_k = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$$

se llama una suma de Riemann-Stieltjes de f respecto de α .

Diremos que f es Riemann-Integrable respecto de α en $[a,b]$, y escribiremos $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a,b]$, si existe un número I con la siguiente propiedad:

Para cada $\epsilon > 0$, existe una partición P_ϵ de [a,b] tal que, para cada partición $P \supseteq P_\epsilon$ y para cada elección de los puntos $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ se tiene

$$| S(P,f,\alpha) - I | < \epsilon$$

Cuando tal I existe éste es único y lo representaremos por $I = \int_a^b f\,d\alpha = \int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$ y diremos que existe la integral.

A las funciones f y α les llamaremos integrando e integrador respectivamente.

A partir de la definición anterior no es tarea difícil probar que la integral de Riemann-Stieltjes es un operador lineal sobre integrando, integrador e intervalo, Sólo enunciaremos éstas sin prueba alguna , ya que esto corresponde a la teoría de integración Riemann-Stieltjes y así, sólo nos concentraremos en las propiedades donde se discute la relevancia de las funciones de variación acotada en esta teoría.

Así pues:

TEOREMA 4.1 Si $f, g \in \mathcal{R}(\alpha)$ en [a,b] entonces $c_1 f + c_2 g \in \mathcal{R}(\alpha)$ en [a,b] y

$$\int_a^b [c_1 f + c_2 g]\,d\alpha = c_1 \int_a^b f\,d\alpha + c_2 \int_a^b g\,d\alpha, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

TEOREMA 4.2 Si $f \in \mathcal{R}(\alpha) \cap \mathcal{R}(\beta)$ en [a,b] entonces $f \in \mathcal{R}(c_1\alpha + c_2\beta)$ en [a,b] y

$$\int_a^b f\,d(c_1\alpha + c_2\beta) = c_1 \int_a^b f\,d\alpha + c_2 \int_a^b f\,d\beta$$

TEOREMA 4.3 Si $c \in (a,b)$ y dos de las integrales en (1) existen entonces la tercera también existe y

$$\int_a^c f\,d\alpha + \int_c^b f\,d\alpha = \int_a^b f\,d\alpha \qquad (1)$$

TEOREMA 4.4 (Integración por partes) Si $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en [a,b] entonces $\alpha \in \mathcal{R}(f)$ en [a,b] y

$$\int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b \alpha\,df = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a).$$

4.2 INTEGRALES SUPERIOR E INFERIOR Y CONDICION DE RIEMANN.

Por lo pronto, para simplificar nuestra discusión, trataremos la teoría de integración de Riemann-Stieltjes sólo para el caso de integradores monótonos crecientes. Veremos más adelante en el-teorema 4.7, que ésto es tan general como estudiar la teoría para integradores de variación acotada - es decir nuestros integradores podrán tener una forma más general que el ser necesariamente crecien - tes.

Para esto necesitaremos algunas definiciones.

DEFINICION 4.2 Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$ y sean

$$M_k(f) = \sup\{ f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

$$m_k(f) = \inf\{ f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

, los números

$$U(P,f,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta\alpha_k \quad \text{y} \quad L(P,f,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\Delta\alpha_k$$

se llaman respectivamente, sumas SUPERIOR e INFERIOR de Stieltjes de f con respecto a α para P.

Note que si $\alpha \nearrow [a,b]$ se tienen las desigualdades

$$L(P,f,\alpha) \le S(P,f,\alpha) \le U(P,f,\alpha), \quad P \in \mathcal{P}[a,b] \qquad (*)$$

Veamos algunas de sus consecuencias

TEOREMA 4.5 Sea $\alpha \nearrow [a,b]$ entonces

i) $P \subseteq P' \rightarrow U(P',f,\alpha) \le U(P,f,\alpha) \wedge L(P',f,\alpha) \ge L(P,f,\alpha)$

ii) si $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$,

$$L(P_1,f,\alpha) \le U(P_2,f,\alpha)$$

DEMOSTRACION: Para probar i) basta considerar sólo que P y P' difieren en sólo un punto, - digamos c. Si $c \in [x_{i-1}, x_i]$ se tiene

$$U(P',f,\alpha) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne i}}^{n} M_k(f)\Delta\alpha_k + M'[\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})] + M''[\alpha(x_i) - \alpha(c)]$$

donde $M' \wedge M''$ son el supremo de f en $[x_{i-1}, c]$ y $[x_i, c]$ respectivamente. - Como $M' \le M_i(f)$ y $M'' \le M_i(f)$

se tiene $U(P',f,\alpha) \le U(P,f,\alpha)$. Para las sumas inferiores la demostración es similar sólo hay que usar el hecho de que $m' \ge m_i(f)$ y $m'' \ge m_i(f)$

Para probar ii) sea $P = P_1 \cup P_2$ entonces, por i), se tiene

$$L(P_1,f,\alpha) \le L(P,f,\alpha) \le U(P,f,\alpha) \le U(P_2,f,\alpha). \quad **$$

DEFINICION 4.3 Sea $\alpha \nearrow [a,b]$. Las integrales SUPERIOR e INFERIOR de f respecto de α se definen, respectivamente, como:

$$\bar{I}(f,\alpha) = \bar{\int_a^b} f\,d\alpha = \inf\{U(P,f,\alpha) \mid P \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

y

$$\underline{I}(f,\alpha) = \underline{\int_a^b} f\,d\alpha = \sup\{L(P,f,\alpha) \mid P \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

De esta definición y la desigualdad (*) se tiene que para $\alpha \nearrow [a,b]$

$$\underline{I}(f,\alpha) \leq \bar{I}(f,\alpha)$$

Para analizar los teoremas de existencia ocuparemos, según lo sugieren las desigualdades (*), que la diferencia entre las sumas superiores e inferiores sea tan pequeña como sea posible y así conjeturar la existencia de $\int_a^b f\,d\alpha$. Por lo que daremos una definición concisa de esta idea.

DEFINICION 4.4 Condición de Riemann. Diremos que f satisface la condición de Riemann respecto de α en $[a,b]$ si, para cada $\epsilon > 0$, existe una partición $P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que

$$P \supseteq P_\epsilon \quad \text{implique} \quad 0 \leq U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon$$

Veamos que el que f satisfaga esta condición y $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a,b]$ son equivalentes si $\alpha \nearrow [a,b]$.

TEOREMA 4.6 Si $\alpha \nearrow [a,b]$ entonces las tres afirmaciones siguientes son equivalentes.

i) $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a,b]$

ii) f satisface la condición de Riemann respecto de α en $[a,b]$.

iii) $\underline{I}(f,\alpha) = \bar{I}(f,\alpha)$

DEMOSTRACION: Probaremos que i) $\rightarrow$ ii) $\rightarrow$ iii) $\rightarrow$ i).

Suponga que i) se cumple, entonces dado $\epsilon > 0$ sea $P_\epsilon \ni P \supseteq P_\epsilon$ implique que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k - A\right| < \epsilon/3 \qquad \text{donde } A = \int_a^b f\,d\alpha$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k')\Delta\alpha_k - A\right| < \epsilon/3 \qquad \text{y } t_k, t_k' \in [x_{k-1}, x_k]$$

combinando éstas se tiene $\left|\sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_k')]\Delta\alpha_k\right| < 2\epsilon/3$

y como $M_k(f)-m_k(f)=\sup\{f(x)-f(x') \mid x,x'\in[x_{k-1},x_k]\}$, se tiene que existen $t_k, t_k' \in [x_{k-1},x_k]$ tales que

$$f(t_k)-f(t_k') > M_k(f)-m_k(f)-h \quad \text{, con } \quad h = \epsilon/3\,[\alpha(b)-\alpha(a)]$$

Así

$$
\begin{aligned}
U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha) &= \sum_{k=1}^{n}[M_k(f)-m_k(f)]\Delta\alpha_k \\
&\le \sum_{k=1}^{n}[f(t_k)-f(t_k')]\Delta\alpha_k + h\sum_{k=1}^{n}\Delta\alpha_k \\
&\le 2\epsilon/3+\epsilon/3 = \epsilon
\end{aligned}
$$

$\therefore$ i) $\rightarrow$ ii)

Suponga que ii) se cumple, dado $\epsilon>0$ existe P_ϵ tal que $P \supseteq P_\epsilon$ implica

$$U(P,f,\alpha) < L(P,f,\alpha)+\epsilon \quad \text{por lo que para un tal } P,$$

$$\bar{I}(f,\alpha) \le U(P,f,\alpha) < L(P,f,\alpha)+\epsilon \le \underline{I}(f,\alpha)+\epsilon$$

es decir

$$\bar{I}(f,\alpha) \le \underline{I}(f,\alpha) \quad \text{y así} \quad \bar{I}(f,\alpha) = \underline{I}(f,\alpha),$$

por tanto ii) $\rightarrow$ iii).

Ahora suponga que $\bar{I}(f,\alpha)=\underline{I}(f,\alpha)=A$. Dado $\epsilon>0$ sea P_ϵ' tal que si $P \supseteq P_\epsilon'$ se tenga $U(P,f,\alpha) > \bar{I}(f,\alpha)+\epsilon$

Así mismo sea $P_\epsilon'' \ni P \supseteq P_\epsilon''$ implique que

$$L(P,f,\alpha) > \underline{I}(f,\alpha)-\epsilon$$

Sea $P_\epsilon = P_\epsilon' \cup P_\epsilon''$ entonces si $P \supseteq P_\epsilon$ se tiene

$$A-\epsilon = \underline{I}(f,\alpha)-\epsilon < L(P,f,\alpha) \le S(P,f,\alpha) \le U(P,f,\alpha) < \bar{I}(f,\alpha)+\epsilon = A+\epsilon$$

por tanto

$|S(P,f,\alpha)-A| < \epsilon$ si $P \supseteq P_\epsilon$ de lo que se concluye que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a,b]$ y además $\int_a^b f\,d\alpha = A$ **

4.3 TEOREMAS DE EXISTENCIA

Veamos en este momento dos de nuestras metas : El analizar integrales con integradores crecientes no pierde generalidad sobre los de variación acotada, teorema 4.7. Además la integrabilidad según

Riemann de las funciones de variación acotada, teorema 4.9.

En el teorema 4.1 vimos que si $f \in \mathcal{R}(\alpha) \cap \mathcal{R}(\beta)$ entonces $f \in \mathcal{R}(\alpha-\beta)$ en $[a,b]$. Pero algunos ejemplos como el siguiente prueban que el recíproco no es, necesariamente, cierto. Veamos éste.

Si $f(x) = x$, $x \in [0,1]$, $\alpha(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \in \mathbb{Q}' \cap [0,1] \end{cases}$

$$\beta(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ -1, & x \in \mathbb{Q}' \cap [0,1] \end{cases}$$

entonces $(\alpha-\beta)(x) = 1$, $x \in [0,1]$ y por tanto $\int_0^1 f\,d(\alpha-\beta) = 0$

Aún sin embargo

$$\int_0^1 f\,d\alpha \quad \text{y} \quad \int_0^1 f\,d\beta \quad \text{no existen,}$$

ya que si esto pasara, según el teorema de integración por partes,

$\int_0^1 \alpha\,df$ existiría y como $M_k(\alpha) = 1$ y $m_k(\alpha) = 0$, para toda $P \in \mathcal{P}[a,b]$ se seguiría que

$$U(P,f,\alpha) = 1 \wedge L(P,f,\alpha) = 0 \quad \text{o bien} \quad \overline{\int_0^1} \alpha\,df = 1 \quad \text{y} \quad \underline{\int_0^1} f\,d\alpha = 0$$

contrario al hecho de que, según el teorema 4.6, éstas deberían ser iguales.

Veamos que en el caso de funciones de variación acotada existe una descomposición tal que el recíproco del teorema 4.1 es cierto.

TEOREMA 4.7 Supongamos que $\alpha \in BV[a,b]$ y que f está definida y acotada en $[a,b]$. Si $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a,b]$ entonces $f \in \mathcal{R}(p_\alpha)$ en $[a,b]$.

DEMOSTRACION: Recuerde que

$$p_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ V_\alpha[a,x], & x \in (a,b] \end{cases}$$

Si $p_\alpha(b) = 0$ entonces f es constante en $[a,b]$ y el resultado es inmediato. Por lo tanto sea $p_\alpha(b) > 0$. Supongamos que $\|f\|_{[a,b]} \le M$. Dado que $p_\alpha \nearrow$ en $[a,b]$ sólo tendremos que probar que f satisface la condición de Riemann respecto de p_α en $[a,b]$.

Dado $\epsilon > 0$ escojamos P_ϵ tal que $P \supseteq P_\epsilon$ implique

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k - A\right| < \epsilon/8 \quad \text{donde } A = \int_a^b f\,d\alpha$$

$$\text{y} \quad \left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k')\Delta\alpha_k - A\right| < \epsilon/8. \quad \text{y } t_k, t_k' \in [x_{k-1}, x_k]$$

y además $\quad p_\alpha(b) = V_\alpha[a,b] < \sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha_k| + \epsilon/4M$

combinando las dos primeras desigualdades tendríamos que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_k')] \Delta\alpha_k \right| < \epsilon/4 \quad , \quad t_k, t_k' \in [x_{k-1}, x_k]$$

Probaremos que $P \geq P_\epsilon$ implica

$$\sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)] (\Delta p_{\alpha_k} - |\Delta\alpha_k|) < \epsilon/2$$

y

$$\sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)] |\Delta\alpha_k| < \epsilon/2 \quad ,$$ que sumándolas se obtiene

$$U(P, f, p_\alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon$$

es decir f satisface la condición de Riemann respecto de p_α en $[a,b]$.

Para probar la primera desigualdad, sabemos que $\Delta p_{\alpha_k} \geq |\Delta\alpha_k|$ (teo 1.4) y así

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)] (\Delta p_{\alpha_k} - |\Delta\alpha_k|) &\leq 2M \sum_{k=1}^{n} (\Delta p_{\alpha_k} - |\Delta\alpha_k|) \\ &= 2M \left(V_\alpha[a,b] - \sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha_k| \right) \\ &< 2M \left(\epsilon/4M \right) = \epsilon/2 .\end{aligned}$$

Para la prueba de la desigualdad restante, consideremos $A(P) = \{ k \mid \Delta\alpha_k \geq 0 \}$

$$B(P) = \{ k \mid \Delta\alpha_k < 0 \}$$

y sea $\quad h = \epsilon / 4V_\alpha[a,b]$. Si $\quad k \in A(P)$ escojamos $t_k \wedge t_k'$ tales que

$$f(t_k) - f(t_k') > M_k(f) - m_k(f) - h$$

pero si $k \in B(P)$ escogemos $t_k \wedge t_k'$ tales que $\quad f(t_k') - f(t_k) > M_k(f) - m_k(f) - h$

Así

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)] |\Delta\alpha_k| &< \sum_{k \in A(P)} [f(t_k) - f(t_k')] |\Delta\alpha_k| + \\ &+ \sum_{k \in B(P)} [f(t_k) - f(t_k')] + h \sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha_k| \\ &< \epsilon/4 + h V_\alpha[a,b] \\ &= \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon/2\end{aligned}$$

todo esto prueba que $f \in \mathcal{R}(p_\alpha)$ en $[a,b]$. ###

TEOREMA 4.8 Sea α BV $[a,b]$ y suponga que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a,b]$. Entonces — $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en cada subintervalo $[c,d] \subseteq [a,b]$.

OBSERVACION: No probaremos el teorema. Como $\alpha = p_x - n_x$ y ambas $p_\alpha \nearrow$ y $n_x \nearrow$ en $[a,b]$, Por el teorema anterior $f \in \mathcal{R}(p_x)$ y por tanto $f \in \mathcal{R}(n_x)$. Por consiguiente si el teorema es verdadero para integradores crecientes se tendrá que $f \in \mathcal{R}(p_x) \cap \mathcal{R}(n_x)$ en $[c,d]$ luego $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[c,d]$

He aquí la relevancia del teorema anterior, sólo pruebe para $\alpha \nearrow$ $[a,b]$.

TEOREMA 4.9 Integrabilidad de $\alpha \in$ BV $[a,b]$. Si $f \in C[a,b]$ y $\alpha \in$ BV$[a,b]$ entonces $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a,b]$.

Nota: debido al teorema 4.4 tendremos que este teorema asegura que

$$\int_a^b \alpha(x)\,dx \qquad \text{existe.}$$

DEMOSTRACION: Como apuntamos arriba es suficiente probar el teorema para $\alpha \nearrow [a,b]$ con $\alpha(a) < \alpha(b)$

Como $f \in C[a,b]$ se tiene que f es uniformemente contínua en $[a,b]$, es decir, para $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|x-y| < \delta \rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon/A \qquad \text{donde} \qquad A = 2[\alpha(b)-\alpha(b)]$$

Si P_ϵ es tal que $\|P_\epsilon\| < \delta$ entonces $P \supseteq P_\epsilon$ implica

$$M_k(f) - m_k(f) \leq \epsilon/A$$

y multiplicando esto por $\Delta\alpha_k \geq 0$ y sumando sobre K se obtiene

$$\begin{aligned} U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) &< \epsilon/A \sum_{k=1}^{n} \Delta\alpha_k \\ &= \epsilon/2 \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

por lo que f satisface la condición de Riemann respecto de α en $[a,b]$, luego $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a,b]$.**

CONCLUSIONES

Hemos resumido aquí las propiedades más importantes de las funciones de VARIACION ACOTADA, tratando de que nuestro trabajo sólo reuniera en sí lo referente a diferenciación e integroción sobre — dichas funciones.

En el primer capítulo discutimos las propiedades básicas de BV $[a,b]$, como aquellas referentes a la manera alternativa de definirlas como las funciones tales que pueden ser expresadas como la diferencia de dos funciones crecientes. Además de aquellas que tienen longitud de arco finita.

Siguiendo nuestra discusión analizamos sucesiones en BV $[a,b]$ probamos la completitud de éste - último, hecho que permite establecer en BV $[a,b]$ todos los teoremas de topología que se refieren a - espacios completos.

Asimismo, probamos que el conjunto de discontinuidades de una función $f \in$ BV $[a,b]$ es de - medida cero, y aún más que tiene derivada finita en casi todos los puntos de $[a,b]$.

Para finalizar nuestra exposición vimos que este tipo de funciones son siempre integrables, — amén de ser de importancia vital al reducir integrabilidad a la condición de Riemann dada sólo para - el caso de integradores monótonos.

Las consecuencias de tales propiedades sólo fueron mencionadas dejando a un lado su aplicación- a una integral más general, la integral de Lebesgue, ésto debido a que estaba fuera de los objetivos- de este trabajo.

Espero se encuentren satisfechos con nuestro viaje que nos ha mostrado sólo parte de lo más importante sobre funciones de este tipo.

Gracias.

R.L.G.

BIBLIOGRAFIA

The elements of real analisis
Robert G. Bartle
Wiley International
1976

Elementos de la teoría de funciones
A.N. Kolmogorov y S.V. Fomín
Mir Moscú
1975

Análisis Matemático
Tom M. Apostol
Reverté
1981

Topology a first course
James R. Munkres
Prentice Hall
1975

Variables Reales
Murray R. Spiegel
Mc. Graw Hill
1976