

1076

CONTROL ADAPTABLE DE MANIPULADORES ROBOTICOS

Ricardo Carelli A.

Tesis Doctoral (Ing. Eléctrica)
Mayo de 1989.

Jurado:

Profesores doctores,

Federico Kuhlmann R.

Rafael Kelly M. (D)

Mark Spong

Juan M. Ibarra Z.

Romeo Ortega M. (D)

Benjamin Kuchen

Rogelio Alcántara S.

D: directores de tesis

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

División de Estudios de Posgrado

Facultad de Ingeniería

Sección Eléctrica.

Apdo. Postal 70-256

04510 México D.F., MEXICO.



DEPT

T. UNAM

1 9 8 9

CAR

ABSTRACT

This thesis is about the adaptive control of unconstrained and constrained rigid robot manipulators. Adaptive control is considered to attain high performance control under uncertainty in dynamic robot and environment parameters.

The thesis consists of three parts. The first part is an introductory one which contains a general introduction, some mathematical preliminaries and the rigid robot models with their relevant properties. In the second part, the unconstrained robot adaptive control is treated. There, an input-output approach to adaptive motion control design is presented which is based on passivity theory. A new control law is analyzed using the proposed general analysis framework. In the third part, the constrained robot adaptive control is studied. Adaptive control algorithms are proposed to solve different constrained robot control objectives, as impedance control, hybrid impedance/force, constrained control with singular models and pure force control. In all cases, the full nonlinear rigid robot model is considered. Global asymptotic convergence to the control objectives is proven by using nonlinear continuous time stability theory. Computer simulations are always included, to show the stability and performance properties of the proposed algorithms. Each chapter in parts two and three includes an additional abstract. Also, general conclusions are given in chapter eleven.

The following papers are related to this thesis: "Input-output analysis of an adaptive robot controller" (in Spanish), R. Kelly, R. Ortega, R. Carelli, VI AMCA Symposium, México, 1987; "On the properties of Cartesian robot model and its relations to control" (in Spanish), R. Carelli, R. Kelly, VII AMCA Symposium, México, 1988; "Finite time identification of the continuous robot model" (in Spanish), R. Carelli, R. Kelly, XIV Congress of the Engineering Mexican Academy, 1988; "Unified approach to adaptive control of robotic manipulators", R. Kelly, R. Carelli, Proc. of the 27th Conf. on Decision and Control, Austin, Tx, Dec. 1988; "Adaptive

motion control design of robot manipulators: an input-output approach", R. Kelly, R. Carelli, R. Ortega, Int. Journal of Control (in press); "On adaptive impedance control of robot manipulators", R. Kelly, R. Carelli, M. Améstegui, R. Ortega, IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Scottsdale Az., May 1989; "Adaptive force control of single link mechanical devices for robots", R. Carelli, R. Kelly, R. Ortega, American Control Conference, Pittsburgh, June 1989; "On adaptive control of constrained robots", R. Carelli, R. Kelly, submitted; "Adaptive force control of robot manipulators", R. Carelli, R. Kelly, R. Ortega, submitted; "Hybrid impedance/force control of robots", R. Carelli, R. Kelly, submitted.

Keywords. Robot control, adaptive control, nonlinear system theory.

CONTENIDO

PARTE I: PRELIMINARES

1	Introducción	15
2.	Preliminares matemáticos	17
2.1	Introducción	17
2.2	Matrices definidas positivas	19
2.3.	Estabilidad de entrada-salida	20
2.3.1	Normas de vectores y matrices	20
2.3.2	Espacios de funciones	23
2.3.3	Definiciones de estabilidad entrada-salida	28
2.3.4	Teorema de pequeñas ganancias	29
2.3.5	Pasividad	31
2.4.	Estabilidad de Lyapunov	35
2.4.1	Ecuaciones diferenciales. Existencia y unicidad de soluciones	35
2.4.2	Definiciones de estabilidad	39
2.4.3	Teoremas de estabilidad	41
2.5.	Otras definiciones y lemas útiles	44
2.5.1	Funciones positivas reales	44
2.5.2	Lema de Kalman-Yacubovich	47
2.5.3	Lema "Swapping"	48
3.	Modelo y propiedades de manipuladores rígidos	49
3.1	Introducción	49
3.2.	Modelo en coordenadas articulares	50
3.2.1	Modelo	50
3.2.2	Propiedades	50
3.2.3	Incorporación de la dinámica de los actuadores	53
3.3.	Modelo en coordenadas cartesianas	54

3.3.1	Modelo	54
3.3.2	Propiedades	56
3.4.	Ejemplos	59
3.4.1	Ejemplo 1	59
3.4.2	Ejemplo 2	60
3.4.3	Ejemplo 3	60
3.5	Modelo del medio	64
3.6	Manipulador con interacción con el medio	64

**PARTE II: CONTROL ADAPTABLE DE MANIPULADORES SIN INTERACCION CON
EL MEDIO**

4	Introducción a la parte II	69
5.	Control adaptable de movimiento	71
5.1	Resumen (Abstract)	71
5.2	Preliminares	71
5.3.	Diseño del control adaptable de movimiento	73
5.3.1	Modelo y propiedades	73
5.3.2	Estructura general de la ley de control	75
5.3.3	Ecuación del error	77
5.3.4	Ley de adaptación general	78
5.3.5	Interconexión de realimentación	79
5.4.	Nueva estructura de control	81
5.4.1	Ley de control	81
5.4.2	Leyes de adaptación	83
5.4.3	Análisis de estabilidad	84
5.4.4	Resultados de simulación	89
5.A	Apéndice: Prueba del teorema 5.1	93
5.B	Apéndice: Prueba de la propiedad 5.1	94

**PARTE III: CONTROL ADAPTABLE DE MANIPULADORES EN INTERACCION
CON EL MEDIO**

6	Introducción a la parte III	99
7.	Control adaptable de impedancia	103
7.1	Resumen (Abstract)	103
7.2	Formulación del problema	103
7.3.	Controlador adaptable de impedancia I	104
7.3.1	Ley de control I	105
7.3.2	Ley de adaptación	106
7.3.3	Resultados principales	106
7.4.	Controlador adaptable de impedancia II	108
7.4.1	Ley de control II	108
7.4.2	Ley de adaptación	109
7.4.3	Resultados principales	110
7.5	Resultados de simulación	111
8.	Estructura unificada de control adaptable	117
8.1	Resumen (Abstract)	117
8.2.	Control adaptable híbrido impedancia/fuerza	118
8.2.1	Formulación del problema	118
8.2.2	Controlador adaptable	121
8.2.3	Modelo del error	125
8.2.4	Resultados principales	127
8.2.5	Resultados de simulación	129
8.3.	Estructura unificada de control	133
8.3.1	Formulación del problema	133
8.3.2	Controlador unificado	134
8.3.3	Resultados principales	137
8.3.4	Casos particulares	137

9. Control adaptable de manipuladores descritos por sistemas singulares	145
9.1 Resumen (Abstract)	145
9.2. Modelo del manipulador restringido y propiedades	145
9.2.1 Modelo en coordenadas articulares	145
9.2.2 Modelo expresado como sistema singular	146
9.3. Control adaptable	149
9.3.1 Formulación del problema	149
9.3.2 Controlador adaptable	150
9.3.3 Resultados de estabilidad	152
9.4. Estudios de robustez	155
9.4.1 Efectos de incertidumbres en las restricciones	155
9.4.2 Consideración de fuerzas tangenciales no modeladas	157
9.4.3 Efectos de fuerzas de perturbación	160
9.5 Resultados de simulación	161
10. Control adaptable de fuerza pura	167
10.1 Resumen (Abstract)	167
10.2 Formulación del problema	167
10.3. Control no adaptable	169
10.3.1 Controlador	170
10.3.2 Estabilidad	171
10.3.3 Motivación para el control adaptable	171
10.4. Control adaptable	171
10.4.1 Controlador adaptable	172
10.4.2 Resultados principales (Estabilidad)	174
10.5. Caso de un grado de libertad	176
10.5.1 Modelo y formulación del problema	176
10.5.2 Controlador no adaptable	178
10.5.3 Controlador adaptable	179
10.6 Estudios de robustez	181
10.7. Resultados de simulación	184
10.7.1 Manipulador de dos grados de libertad	184
10.7.2 Eslabón simple de revolución	189

Contenido	11
10.A Apéndice: Prueba de la propiedad 10.2.	191
11. Conclusiones (Conclusions)	193
Referencias	197

PARTE I:
PRELIMINARES

1 INTRODUCCION

La tendencia actual hacia la *automatización y flexibilización* de la producción industrial, así como la necesidad de disponer de un sustituto físico del hombre en tareas difíciles y de alto riesgo, origina el interés por el desarrollo de los manipuladores robóticos.

Un *manipulador robótico* es un dispositivo mecánico destinado a ejecutar una diversidad de tareas. El mecanismo consiste comunmente en eslabones articulados de modo que el extremo del último eslabón es donde se ejecuta la tarea. Los manipuladores actualmente disponibles presentan una variedad de configuraciones de diseño, aunque sus capacidades son todavía limitadas. Para que el impacto de la robótica sea aún mayor que el actual, deberá ampliarse la capacidad de tareas así como de precisión y desempeño de los manipuladores. En adelante se usará el término manipulador como sinónimo de robot.

El robot puede *ejecutar tareas* de dos maneras: desplazándose libremente en el espacio de trabajo, o interactuando con el medio. En el primer caso es suficiente el control de movimiento para ejecutar tareas, en el segundo es necesario agregar el control de la fuerza de interacción con el medio. De este modo el control de manipuladores puede *clasificarse* como: control de robots libres que no interactúan con el medio y control de robots restringidos o en interacción con el medio. El segundo es un campo de investigación indudablemente menos desarrollado.

La *dinámica* de los manipuladores se describe por ecuaciones diferenciales no lineales y multivariables. Se sabe que esta dinámica puede linealizarse por retroalimentación usando el control de dinámica inversa o de par calculado. Sin embargo para alcanzar alto desempeño, debe cancelarse con exactitud la dinámica no lineal. Esto no ocurre en la práctica. Incertidumbre en las propiedades inerciales de la herramienta o la carga manipulada y en su posición exacta en la garra del robot, así como en las características del medio con el cual interactúa, introduce una importante

incertidumbre en los parámetros del modelo. Esto motiva el interés en aplicar técnicas de *control adaptable* que permitan adecuar el controlador automáticamente a esos parámetros inciertos. Obviamente, la naturaleza no lineal del modelo dificulta la aplicación de estas técnicas, bien desarrolladas para sistemas lineales.

Esta *tesis* trata el control adaptable de manipuladores robóticos rígidos sin interacción y en interacción con el medio. La tesis consta de tres partes. Esta primera parte es introductoria y presenta algunos preliminares matemáticos así como los modelos asociados a manipuladores rígidos y sus propiedades. Las partes II y III contienen los *aportes* de esta tesis. En la segunda parte se trata el control adaptable de manipuladores sin interacción con el medio. Allí se presenta un método de diseño de controladores adaptables de movimiento, el cual se basa en la teoría de pasividad. También se analiza una nueva ley de control usando este marco de estudio. En la tercera parte se estudia el control adaptable de manipuladores en interacción con el medio. Se proponen algoritmos de control adaptable para resolver diferentes objetivos de control de robots restringidos como: control de impedancia, control híbrido impedancia/fuerza, control usando modelos singulares, control de fuerza pura. En todos los casos se considera el modelo no lineal del manipulador rígido. Además se prueba la convergencia asintótica global a los objetivos de control, usando análisis de sistemas no lineales continuos, como análisis de Lyapunov y de entrada-salida. Cada controlador se ilustra con resultados de simulación para mostrar las propiedades de estabilidad y desempeño del sistema de control. En el capítulo once se dan conclusiones generales.

Al comienzo de las partes II y III se presentan introducciones más detalladas que incluyen referencias bibliográficas así como los *aportes* alcanzados en cada parte.

2. PRELIMINARES MATEMATICOS

2.1 INTRODUCCION

En este capítulo se presentan los elementos matemáticos fundamentales que son utilizados en el desarrollo de los capítulos subsiguientes, donde el problema central es probar la estabilidad de sistemas dinámicos no lineales. Para ello se utilizan definiciones y resultados provenientes de dos metodologías de análisis: *estabilidad de Lyapunov* y *estabilidad de entrada-salida*. Ambas están cimentadas en distintas vertientes matemáticas, Lyapunov en el estudio de las ecuaciones diferenciales y entrada-salida en el análisis funcional.

La primera se basa en la descripción del sistema por ecuaciones diferenciales, que describen la evolución temporal de las variables de estado. La segunda asume que el sistema está descrito por un mapa (operador) entrada-salida y, en la descripción de sistemas complejos, se pone énfasis en la interconexión de operadores. Ambas metodologías proveen resultados de estabilidad que provienen del análisis del sistema desde distintas perspectivas. Es útil por consiguiente disponer de ambos recursos de análisis, cuyas definiciones y resultados básicos se dan en las secciones 2.3 y 2.4 respectivamente.

El material presentado en este capítulo está tomado esencialmente de los textos de Vidyasagar (1978), Desoer y Vidyasagar (1975), Anderson et al. (1986), Sastry y Bodson (1989) como también de publicaciones citadas oportunamente. No se presentan las demostraciones de las proposiciones, lemas y teoremas citados, quedando las mismas referidas a la bibliografía.

Para facilitar la lectura de este trabajo se da a continuación la notación usada y también un glosario de los términos cuya traducción del inglés no es estándar.

Notación.

$[a, b]$	intervalo cerrado $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
$(a, b]$	intervalo $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
\mathbb{C}	campo de los números complejos
\mathbb{R}	campo de los números reales
\mathbb{R}_+	intervalo real $[0, \infty)$
\mathbb{Z}	anillo de los números enteros
\mathbb{Z}_+	conjunto de los números naturales
\mathbb{R}^n	espacio lineal de n-adas en \mathbb{R}
$\mathbb{R}^{n \times m}$	anillo de matrices reales (nxm)
$\mathbb{R}(s)$	campo conmutativo de funciones racionales en \mathbb{R}
$\mathbb{R}_{(s)}^{n \times m}$	matrices de funciones racionales en \mathbb{R}
$A = \{a_{ij}\}$	matriz de elementos a_{ij}
I_n	matriz identidad nxn
A^T	matriz A traspuesta
A^*	matriz A conjugada traspuesta
$h * u$	producto de convolución entre las funciones $h(t)$ y $u(t)$.
$\lambda(A)$	valores propios (autovalores) de la matriz A
$\sigma(A)$	valores singulares de la matriz A
$\gamma(G)$	ganancia del operador G
C	espacio de las funciones continuas
\dot{f}	df/dt
\hat{f}	transformada Fourier de la señal $f(t)$
$ \cdot $	valor absoluto
$\ \cdot\ $	norma
θ	elemento nulo de un espacio vectorial
\triangleq ó $:=$	definido como

Glosario

matriz,		definida positiva		positive definite
---------	--	-------------------	--	-------------------

función	semidefinida positiva positiva real estrictamente positiva real	positive semidefinite positive real strictly positive real
sistema	pasivo de entrada pasivo de salida	input pasive output pasive
	estabilidad de Lyapunov estabilidad de entrada-salida	Lyapunov stability input-output stability

2.2 MATRICES DEFINIDAS POSITIVAS

Definición 2.1 (*Matrices semidefinidas positivas*). Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es semidefinida positiva ($A \geq 0$) si $x^T A x \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Definición 2.2 (*Matrices definidas positivas*). Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es definida positiva ($A > 0$) si existe una constante $\alpha > 0$ tal que $x^T A x \geq \alpha x^T x = \alpha \|x\|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

La matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es *negativa semidefinida* ($A \leq 0$) si $-A$ es positiva semidefinida.

Definición 2.3 (*Matrices simétricas semidefinidas positivas*). Una matriz es simétrica semidefinida positiva si $A = A^T$ y $A \geq 0$.

Definición 2.4 (*Comparación de matrices*). Dadas dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétricas, se dice que $A \geq B$ si $A - B \geq 0$.

Propiedades 2.1 Dadas matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- a) Si $A \geq 0$, $B \geq 0$, luego $A+B \geq 0$.
- b) $A \geq 0$, $B \geq 0$ no implica $AB \geq 0$.

- c) $A = A^T \geq 0$, $B = B^T \geq 0$ no implica $AB \geq 0$ ni $AB = (AB)^T$. Sin embargo AB tiene todos sus autovalores reales positivos.
- d) Si $A = A^T \geq 0$, entonces
- $$\lambda_{\min}(A) \|x\|^2 \leq x^T A x \leq \lambda_{\max}(A) \|x\|^2$$
- donde $\lambda(A)$ representa autovalores de A .

Proposición 2.1 (Autovalores).

- a) Si $A \geq 0$, los autovalores de A , $\lambda(A)$, verifican,
 $\text{Re} [\lambda(A)] \geq 0$.
- b) Si $A \leq 0$, los autovalores verifican,
 $\text{Re} [\lambda(A)] \leq 0$.
- c) Si $A = A^T$, sus autovalores son reales.

2.3. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

2.3.1 Normas de vectores y de matrices.

Considérese el espacio lineal real n -dimensional $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ o simplemente \mathbb{R}^n constituido de los vectores $x \in \mathbb{R}^n$ y definido sobre el campo de los reales \mathbb{R} . Sobre él pueden definirse funciones denominadas normas.

Definición 2.5 (Norma en \mathbb{R}^n). Se dice que la función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una norma en \mathbb{R}^n si y sólo si,

- N1. $x \in \mathbb{R}^n$ y $x \neq \theta \Rightarrow \|x\| > 0$
- N2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$
- N3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (desig. del triángulo).

Aquí se expresa con $|\cdot|$ el valor absoluto y θ representa el elemento nulo del espacio lineal.

Una norma define una *métrica* d sobre $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ dada por,

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

que se denomina la métrica inducida por la norma. El espacio $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ es un espacio normado completo (completo en la métrica definida por la norma), o sea un espacio de Banach.

Ejemplo 2.1 (*Normas en \mathbb{R}^n*). Las siguientes funciones son normas sobre \mathbb{R}^n :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^n (x_i)^p \right]^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|. \quad (2.2)$$

La norma $\|x\|_2$ es la norma Euclideana.

Teorema 2.1 (*Equivalencia de normas*). Dado un espacio lineal de dimensión finita, todas las normas son equivalentes. O sea para dos normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_0$ existen constantes positivas a, b tal que

$$a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0$$

para todo vector x en el espacio lineal X de dimensión finita.

En particular, para \mathbb{R}^n todas sus normas son equivalentes y por consiguiente definen la misma topología.

Considérese ahora el espacio lineal de matrices reales $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Una tal

matriz define un *operador* $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mediante,

$$y = Ax$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$.

A es un *operador lineal*, ésto es

OL1. El dominio es un espacio vectorial y el rango está en un espacio vectorial definido sobre el mismo campo.

OL2. Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y escalar α ,

$$A(x+y) = Ax + Ay$$

$$A(\alpha x) = \alpha Ax$$

Definición 2.6 (*Norma inducida de una matriz real*). Para las matrices $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ puede también definirse normas del siguiente modo,

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.3)$$

o equivalentemente,

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_p .$$

Claramente, la definición de la norma de la matriz depende de la elección de la norma vectorial. Por ello la norma $\|A\|_p$ se denomina norma inducida por $\|x\|_p$.

Ejemplos 2.2 (*Normas inducidas*). Las normas inducidas por las normas

vectoriales definidas en (2.2), son las siguientes:

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_j \sum_i |a_{ij}| && \text{(suma de columnas)} \\ \|A\|_2 &= \left[\max_i \lambda_i(A^T A) \right]^{1/2} && \lambda: \text{autovalor} \\ \|A\|_\infty &= \max_i \sum_j |a_{ij}| && \text{(suma de filas)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde $A = \{a_{ij}\}$.

Propiedades 2.2 (Operadores matriciales reales). Para operadores $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, vector $x \in \mathbb{R}^n$ y escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, se verifican las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \|Ax\| &\leq \|A\| \|x\| \\ \|\alpha A\| &= |\alpha| \|A\| \\ \|A+B\| &\leq \|A\| + \|B\| \\ \|AB\| &\leq \|A\| \|B\|. \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.3.2 Espacios de funciones

Una función $f(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *medible* si es continua excepto en un conjunto $S \in \mathbb{R}$ de medida nula. Un conjunto $S \in \mathbb{R}$ tiene medida nula si sus elementos son contables.

Definición 2.7 (Espacios L_p). El espacio lineal de funciones $L_p[0, \infty)$, $1 \leq p < \infty$, está definido del modo siguiente,

$$L_p[0, \infty) = \left\{ f(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \text{ medibles } \mid \int_0^\infty |f(t)|^p dt < \infty \right\}. \quad (2.6)$$

Esto es, el espacio de funciones medibles cuyas potencias p son absolutamente integrables en el sentido de integral de Lebesgue. Si la función es continua, la integral de Lebesgue puede pensarse como integral de Riemann.

Definición 2.8 (Espacio L_∞). También puede definirse el siguiente espacio:

$$L_\infty[0, \infty) = \left\{ f(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \text{ medibles } \mid \text{ess. sup}_{t \in [0, \infty)} |f(t)| < \infty \right\}. \quad (2.7)$$

Por esencial (ess) se comprende que la propiedad se verifica en todo $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ excepto en un subconjunto de medida nula. En lo sucesivo se supone implícitamente que las funciones están definidas en el rango $[0, \infty)$ y por consiguiente $L_p[0, \infty)$ se expresará simplemente por L_p .

Definición 2.9 (Normas L_p y L_∞). Las siguientes normas se definen naturalmente asociadas a L_p y L_∞ :

$$\|f(\cdot)\|_p = \left[\int_0^\infty |f(t)|^p dt \right]^{1/p} \quad f \in L_p, \quad 1 \leq p < \infty \quad (2.8)$$

$$\|f(\cdot)\|_\infty = \text{ess. sup}_{t \in [0, \infty)} |f(t)| \quad f \in L_\infty. \quad (2.9)$$

Se sabe que los espacios lineales L_p ($1 \leq p < \infty$) y L_∞ con sus correspondientes normas constituyen espacios normados completos, o sea espacios de Banach.

Las siguientes *desigualdades* son útiles.

D1. Desigualdad de Minkowski:

$$\text{Para } p \in [1, \infty] \text{ y } f(\cdot), g(\cdot) \in L_p \\ \| (f+g)(\cdot) \|_p \leq \| f(\cdot) \|_p + \| g(\cdot) \|_p.$$

D1 expresa simplemente el axioma N3 (definición 2.5) de la desigualdad del triángulo.

D2. Desigualdad de Holder:

Para $p, q \in [1, \infty]$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si $f(\cdot) \in L_p$ y $g(\cdot) \in L_q$ entonces,

$$\|f(\cdot)g(\cdot)\|_1 \leq \|f(\cdot)\|_p \|g(\cdot)\|_q.$$

Propiedad 2.3 (*Relación entre espacios*). Dada la función $f(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L_1 \cap L_\infty$, entonces $f \in L_p$, $1 \leq p < \infty$.

Es útil la siguiente *observación*. El conjunto C_p de las funciones continuas cuya potencia p es absolutamente integrable es un subconjunto de L_p . Más aún, constituye un subespacio de L_p . Sin embargo el espacio normado $(C_p, \|\cdot\|_p)$ no es completo. Su completación es el espacio $(L_p, \|\cdot\|_p)$.

Lema 2.1 (*Barbalat*). Si una función $f(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua y tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(\tau) d\tau$$

existe y es finito, entonces

$$f(t) \rightarrow 0 \text{ con } t \rightarrow \infty$$

Corolario 2.1 Si $\dot{f} \in L_\infty$ y $f \in L_p$ con $1 \leq p < \infty$ entonces

$$f(t) \rightarrow 0 \text{ con } t \rightarrow \infty.$$

Definición 2.10 (*Espacios L_p^n , L_∞^n*). Considérense la definición de los siguientes espacios de n -adas de funciones $f(\cdot) = (f_1(\cdot), \dots, f_n(\cdot))^T$,

$$L_p^n = \left\{ f(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ medibles } \mid \int_0^\infty \|f(t)\|^p dt < \infty \right\} \quad (2.10)$$

$$L_\infty^n = \left\{ f(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ medibles } \mid \text{ess. sup.}_{t \in [0, \infty)} \|f(t)\| < \infty \right\}. \quad (2.11)$$

En (2.10) y (2.11), $\|\cdot\|$ indica alguna norma en L_p , $1 \leq p \leq \infty$.

Definición 2.11 (Normas L_p^n y L_∞^n). Las normas correspondientes a L_∞^n ($1 \leq p < \infty$) y L_∞^n quedan naturalmente definidas como,

$$\|f(\cdot)\|_p = \left[\int_0^\infty \|f(t)\|^p dt \right]^{1/p} \quad f \in L_p^n, \quad 1 \leq p < \infty \quad (2.12)$$

$$\|f(\cdot)\|_\infty = \text{ess. sup.}_{t \in [0, \infty)} \|f(t)\| \quad f \in L_\infty^n. \quad (2.13)$$

Definición 2.12 (Función truncada). Sea $f(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Para todo $T \in \mathbb{R}_+$, la función truncada $f_T(\cdot)$ es,

$$f_T(t) = \begin{cases} x(t), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & T < t. \end{cases} \quad (2.14)$$

Definición 2.13 (Espacios extendidos). Asociados a los espacios L_p^n con ($1 \leq p < \infty$) y L_∞^n , $n=1,2,\dots$ pueden definirse los correspondientes espacios extendidos,

$$L_{pe}^n = \left\{ f(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ medibles } \mid f_T \in L_p^n, \forall T \in \mathbb{R}_+ \right\}. \quad (2.15)$$

Definición 2.14 (Causalidad). Un operador $G: L_{pe}^n \rightarrow L_{pe}^n$ es causal si

$$(Gf)_T = (Gf_T)_T \quad \forall T \in \mathbb{R}_+, f \in L_{pe}^n. \quad (2.16)$$

Definición 2.15 (*Ganancia de un operador*). Dado el operador $G: L_{pe} \rightarrow L_{pe}$ ($1 \leq p \leq \infty$), supóngase que hay números $\gamma, \beta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\|(Gf)_T\|_p \leq \gamma \|f_T\|_p + \beta, \quad \forall f \in L_{pe}, \forall T \in \mathbb{R}_+. \quad (2.17)$$

La ganancia $\gamma(G)$ del operador G está definida por,

$$\gamma_p(G) = \inf \{ \gamma \in \mathbb{R}_+ \mid \text{se verifica (2.17)} \}.$$

$\gamma(G)$ mide la amplificación del operador G en L_p .

Lema 2.2 (*Ganancia de operadores*).

- El operador lineal $G: L_{pe} \rightarrow L_{pe}$ tal que $G: u \rightarrow y$ está definido por $y(t) = g(t)u(t)$ con $g(t) \in L_\infty$, tiene ganancia $\gamma_p(G) = \|g(\cdot)\|_\infty$, $1 \leq p \leq \infty$.
- El operador $G: L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ lineal invariante tal que $G: u \rightarrow y$ está definido por $y(t) = (g * u)(t)$ (convolución), tiene ganancia $\gamma_p(G) \leq \|g(\cdot)\|_1$, $1 \leq p \leq \infty$.
- El operador no anticipativo $G: L_{pe} \rightarrow L_{pe}$ con respuesta al impulso o kernel $F(t, \tau)$ que satisface,

$$F(t, \tau) \leq K e^{-a(t-\tau)}, \quad t > \tau, \quad a > 0, \quad K \geq 0$$

$$\text{tiene ganancia } \gamma_p(G) \leq \frac{K}{a}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

- El operador lineal, causal, estable e invariante $G: L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ con transformada de Laplace $G(s)$ y respuesta al impulso $g(t)$ tiene ganancia,

$$\gamma_\infty(G) = \int_0^\infty |g(\tau)| d\tau$$

y

$$\gamma_2(G) = \max_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega)| \leq \gamma_\infty(G).$$

Teorema 2.2 (*Sistemas con función de transferencia racional*). Sea el operador lineal $G: u \rightarrow y$ con función de transferencia matricial $G(s) \in \mathbb{R}^{n \times n}(s)$ exponencialmente estable y estrictamente propia. Si $u \in L_2^n \cap L_\infty^n$, luego $y, \dot{y} \in L_2^n \cap L_\infty^n$ y $y(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$.

2.3.3 Definiciones de estabilidad de entrada-salida

Definición 2.16 (*Estabilidad L_p de un operador*). Dado el operador $G: L_{pe}^n \rightarrow L_{pe}^m$, se dice que G es L_p -estable si

- a) $Gf \in L_p^m \quad \forall f \in L_p^n$
 b) Existen $k, b \in \mathbb{R}$ tal que,
- $$\|Gf\|_p \leq k\|f\|_p + b \quad \forall f \in L_p. \quad (2.18)$$

Definición 2.17 (*Estabilidad L_p de malla cerrada*). Sea el sistema interconectado compuesto del operador en malla directa G_1 y el operador de retroalimentación G_2 , y con entradas u_1, u_2 y salidas y_1, y_2 descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} y_1 &= G_1 (u_1 - y_2) \\ y_2 &= G_2 (u_2 + y_1). \end{aligned}$$

Se dice que el sistema en malla cerrada es L_p -estable si para $u_1, u_2 \in L_p^n$ se tiene que todo y_1, y_2 que satisface el sistema pertenece a L_p^n y además existen constantes $k, b \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \|y_1\|_p &\leq k(\|u_1\|_p + \|u_2\|_p) + b \\ \|y_2\|_p &\leq k(\|u_1\|_p + \|u_2\|_p) + b. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Teorema 2.3 (*Operador convolución*). Considérese el operador lineal invariante $G: u \rightarrow Gu \triangleq g*u$, donde g es la respuesta al impulso de G ,

$$(Gu)(t) = \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

Además se asume que $g \in L_1$. Entonces,

a) $G: L_\infty \rightarrow L_\infty$ y

$$\|g*u\|_\infty \leq \|g\|_1 \|u\|_\infty$$

O sea G es L_∞ -estable.

b) $G: L_2 \rightarrow L_2$ y

$$\|g*u\|_2 \leq \left(\max_{\omega \in \mathbb{R}} |g(j\omega)| \right) \|u\|_2$$

O sea G es L_2 estable.

2.3.4 Teorema de pequeñas ganancias

Teorema 2.4 (*Pequeñas ganancias*). Considérese un sistema interconectado como el descrito en la definición 2.17.

Supóngase que $G_1, G_2: L_{pe} \rightarrow L_{pe}$ y que $e_1, e_2 \in L_{pe}$ ($1 \leq p \leq \infty$)

$$e_1 = u_1 - y_2$$

$$e_2 = u_2 + y_2$$

Supóngase que existen constantes reales $\beta_1, \beta_2, \gamma_1 \geq 0, \gamma_2 \geq 0$, tal que,

$$\begin{aligned} \|y_{1T}\|_p &\leq \gamma_1 \|e_{1T}\|_p + \beta_1 \\ \|y_{2T}\|_p &\leq \gamma_2 \|e_{2T}\|_p + \beta_2 \quad \forall T \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

o sea G_1, G_2 son operadores de ganancia finita. Bajo estas condiciones, si $\gamma_1\gamma_2 < 1$, entonces

$$a) \quad \|e_{1T}\|_p \leq (1-\gamma_1\gamma_2)^{-1} (\|u_{1T}\|_p + \gamma_2\|u_{2T}\|_p + \beta_2 + \gamma_2\beta_1)$$

$$\|e_{2T}\|_p \leq (1-\gamma_1\gamma_2)^{-1} (\|u_{2T}\|_p + \gamma_1\|u_{1T}\|_p + \beta_1 + \gamma_1\beta_2) \quad \forall T \in \mathbb{R}_+$$

- b) si además $\|u_1\|_p, \|u_2\|_p < \infty$, luego e_1, e_2, y_1, y_2 tienen norma finita y la norma de los errores $\|e_1\|_p, \|e_2\|_p$ está acotada por las expresiones a) sin considerar el subíndice T.

Corolario 2.2 ($u_2 \equiv 0$). Considérese el sistema del teorema 2.4 con $u_2 \equiv 0$,

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 + G_2 e_2 \\ e_2 &= G_1 e_1 \end{aligned}$$

y $G_1, G_2: L_{pe} \rightarrow L_{pe}$, $e_1 \in L_{pe}$. Supóngase que existen constantes reales $\beta_{21}, \beta_1, \gamma_{21} \geq 0, \gamma_1 \geq 0$ tal que,

$$\|(G_2 G_1 e_1)_{1T}\|_p \leq \gamma_{21} \|e_{1T}\|_p + \beta_{21}$$

$$\|(G_1 e_1)_{1T}\|_p \leq \gamma_1 \|e_{1T}\|_p + \beta_1, \quad \forall T \in \mathbb{R}_+$$

Bajo estas condiciones, si $\gamma_{21} < 1$, entonces

$$\|e_{1T}\|_p \leq [1/(1-\gamma_{21})] (\|u_{1T}\|_p + \beta_{21})$$

$$\|y_{1T}\|_p \leq [\gamma_1/(1-\gamma_{21})] (\|u_{1T}\|_p + \beta_{21}) + \beta_1.$$

O sea, el sistema de malla cerrada tiene ganancia finita. Si además $\|u_1\|_p$

$< \infty$, luego $e_1, y_1 \in L_p$ y sus normas están acotadas por las expresiones anteriores sin considerar el subíndice T.

2.3.5 Pasividad

Definición 2.18 (*Producto escalar en L_2*). Considérese el espacio lineal L_2 .

La función $\langle f|g \rangle: L_2 \times L_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\langle x|y \rangle = \int_0^\infty x(t)y(t)dt$ se denomina producto escalar en L_2 y como tal satisface los siguientes axiomas $\forall x, y, y' \in L_2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$$E1. \quad \langle x|y+y' \rangle = \langle x|y \rangle + \langle x|y' \rangle$$

$$E2. \quad \langle x|y \rangle = \langle y|x \rangle$$

$$E3. \quad \langle x|\lambda y \rangle = \lambda \langle x|y \rangle$$

$$E4. \quad \langle x|x \rangle > 0 \Leftrightarrow x \neq \theta.$$

El espacio lineal L_2 con el producto escalar definido en él constituye un espacio de Hilbert (completo).

Propiedades 2.4 (*Del producto escalar*). Las siguientes propiedades del producto escalar en L_2 son importantes.

P1. Para $x \in L_2$, la función $x \rightarrow \langle x|x \rangle^{1/2}$ constituye la norma L_2 de x , $\|x\|_2$.

P2. Desigualdad de Schwartz,

$$|\langle x|y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 \quad \forall x, y \in L_2. \quad (2.20)$$

Definición 2.19 (*Producto escalar truncado*). El producto escalar truncado $\langle \cdot | \cdot \rangle_T$ se define para $T \in \mathbb{R}_+$ como,

$$\langle x(\cdot) | y(\cdot) \rangle_T = \int_0^T x(t)y(t)dt. \quad (2.21)$$

Propiedades 2.5 (Del producto escalar truncado).

- P1. $\langle x | x \rangle_T = \langle x_T | x_T \rangle = \|x_T\|_2^2, \forall x \in L_{2e}$
- P2. La función $T \rightarrow \|x_T\|_2^2, \forall x \in L_{2e}, \forall T \in \mathbb{R}_+$, es monótonamente creciente.
- P3. $\lim_{T \rightarrow \infty} \|x_T\|_2 = \|x\|, \forall x \in L_2.$
- P4. $\langle x_T | y_T \rangle = \langle x_T | y \rangle = \langle x | y_T \rangle = \langle x | y \rangle_T.$

Teorema 2.5 (Parseval). Si $k, y \in L_2$, entonces

a) $\widehat{x^*y} = \widehat{x}^* \widehat{y}$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)dt = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}^*(j\omega) \widehat{y}(j\omega) d\omega$

c) $\|x\|_2 = (1/2\pi)^{1/2} \|\widehat{x}\|_2.$

donde $\widehat{x}(j\omega)$ indica la transformada Fourier de $x(t)$ y $\widehat{x}^*(j\omega)$ es la conjugada de $\widehat{x}(j\omega)$.

Definición 2.20 (Pasividad). Considere el operador $G: L_{2e}^n \rightarrow L_{2e}^n$ y las constantes reales μ, ρ con $\mu > 0$. Luego, $\forall u \in L_{2e}^n, \forall T \in \mathbb{R}_+$:

- D1. G es pasivo si,

$$\langle u | Gu \rangle_T \geq \rho \quad (2.22)$$

D2. G es estrictamente pasivo de entrada si,

$$\langle u | Gu \rangle_T \geq \rho + \mu \|u\|_{2,T}^2 \quad (2.23)$$

D3. G es estrictamente pasivo de salida si,

$$\langle u | Gu \rangle_T \geq \rho + \mu \|Gu\|_{2,T}^2 \quad (2.24)$$

Las constantes ρ, μ no son las mismas en todos los casos.

Lema 2.3 (Pasividad de sistemas lineales invariantes). Considérese el operador lineal invariante $G: L_{2e}^n \rightarrow L_{2e}^n$ definido por

$$Gu = g^*u, \quad u \in L_{2e}^n.$$

Entonces,

a) G es pasivo si y sólo si $\text{Re}[\hat{g}(j\omega)] \geq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$

b) G es estrictamente pasivo si y sólo si $\exists \delta > 0$ tal que,

$$\text{Re}[\hat{g}(j\omega)] \geq \delta, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Lema 2.4 (Pasividad de sistemas lineales invariantes multivariados, véase Kosut, Friedlander, 1985). Considérese el operador matricial $G(n \times n): L_{2e}^n \rightarrow L_{2e}^n$ definido por $Gu = G^*u, \forall u \in L_{2e}^n$. Entonces:

a) G es pasivo si y sólo si la matriz Hermitiana $\hat{G}(j\omega) + \hat{G}^*(j\omega)$ es semidefinida positiva $\forall \omega \in \mathbb{R}$.

b) G es estrictamente pasivo si y sólo si $\exists \delta > 0$ tal que,

$$\lambda_{\min} [\hat{G}(j\omega) + \hat{G}^*(j\omega)] \geq \delta > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

donde λ_{\min} significa el autovalor mínimo.

Teorema 2.6 (*Pasividad, versión simple*). Considérese el mismo sistema realimentado descrito en la definición 2.17, con $u_2=0$,

$$\begin{aligned} e_1 &= u_1 - G_2 e_2 \\ e_2 &= G_1 e_1 \end{aligned}$$

donde $G_1, G_2: L_{2e} \rightarrow L_{2e}$. Asíumase que para cualquier $u_1 \in L_2$, hay soluciones $e_1, e_2 \in L_{2e}$. Bajo estas condiciones, si G_1 es pasivo, G_2 es estrictamente pasivo de entrada y $u_1 \in L_2$, entonces $y_1 = e_2 = G_1 e_1 \in L_2$

Se puede hacer la siguiente *observación* al teorema 2.6:

Para asegurar además que las señales $e_1, y_2 \in L_2$ debe asumirse que G_1, G_2 son operadores de ganancia finita.

Teorema 2.7 (*Pasividad, versión general*). Considérese el mismo sistema realimentado descrito en la definición 2.17,

$$\begin{aligned} e_1 &= u_1 - G_2 e_2 \\ e_2 &= u_2 + G_1 e_1 \end{aligned}$$

con $G_1, G_2: L_{2e} \rightarrow L_{2e}$. Asíumase que para cualquier $u_1, u_2 \in L_2$ existen soluciones $e_1, e_2 \in L_{2e}$. Supóngase que existen constantes reales $\gamma_1, \beta_1, \delta_1, \beta'_1, \varepsilon_2$ y β'_2 tales que $\forall x \in L_{2e}, \forall T \in \mathbb{R}$,

$$\|G_1 x\|_T \leq \gamma_1 \|x\|_T + \beta_1 \quad (G_1 \text{ es de ganancia finita})$$

$$\langle x | G_1 x \rangle_T \geq \delta_1 \|x\|_T^2 + \beta'_1$$

$$\langle x | G_2 x \rangle_T \geq \varepsilon_2 \|G_2 x\|_T^2 + \beta'_2.$$

Bajo estas condiciones, si $\delta_1 + \varepsilon_2 > 0$ entonces $u_1, u_2 \in L_2$ implica que $e_1, e_2, y_1 = G_1 e_1, y_2 = G_2 e_2 \in L_2$.

Puede hacerse la siguiente *observación*. Si $\varepsilon_2 = 0$ se requiere que $\delta_1 > 0$, luego el teorema se enuncia para G_1 estrictamente pasivo de salida y G_2 pasivo.

Corolario 2.3 (*Estabilidad L_2*). Si para el teorema 6 se tiene $\beta_1 = \beta'_1 = \beta'_2 = 0$, luego los mapas $(u_1, u_2) \rightarrow (e_1, e_2)$ y $(u_1, u_2) \rightarrow (G_1 e_1, G_2 e_2)$ son L_2 -stables.

2.4. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

2.4.1 Ecuaciones diferenciales. Existencia y unicidad de soluciones.

Considérese ecuaciones diferenciales no lineales del tipo

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (2.25)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}_+$, $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definición 2.21 (*Autonomía*). El sistema descrito por (2.25) se dice autónomo si f no depende explícitamente de t , o sea

$$\dot{x}(t) = f(x(t)). \quad (2.26)$$

Definición 2.22 (*Punto de equilibrio*). Un vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio de (2.25) en $t_0 \in \mathbb{R}_+$ si

$$f(t, \bar{x}) = 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

Si el sistema es autónomo -(2.26)-, entonces el punto de equilibrio es

independiente del tiempo.

Definición 2.23 (*Solución de (2.25)*). Una solución de (2.25) en el intervalo $[0, T]$ es un elemento $x(\cdot) \in C^n[0, T]$ (vectores de n funciones continuas) tal que,

- a) $x(\cdot)$ es diferenciable casi dondequiera en $[0, T]$ (o sea $\dot{x}(\cdot)$ está definida excepto en un conjunto numerable de puntos de $[0, T]$).
- b) La ecuación (2.25) se verifica donde $\dot{x}(t)$ está definida.

Teorema 2.8 (*Existencia y unicidad local de soluciones*). Supóngase que f en (2.25) es continua en t, x y satisface las siguientes condiciones. Existen constantes, T, r, h, k tales que,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k\|x - y\|, \quad \forall x, y \in B, \quad \forall t \in [0, T]$$

(Lipschitz local) y,

$$\|f(t, x_0)\| \leq h, \quad \forall t \in [0, T]$$

donde B está definida en \mathbb{R}^n por,

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}.$$

Luego (2.25) tiene exactamente una solución en $[0, \delta]$ siempre que,

$$h \delta e^{k\delta} \leq r$$

y

$$\delta \leq \min \left[T, \frac{\rho}{k}, \frac{r}{h+kr} \right]$$

para algún valor $\rho < 1$.

Teorema 2.9 (*Existencia y unicidad global de soluciones*). Supóngase que

para cualquier $T \in [0, \infty)$ existen constantes k_T y h_T tales que,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k_T \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in [0, T]$$

(Lipschitz global) y,

$$\|f(t, x_0)\| \leq h_T, \quad \forall t \in [0, T].$$

Luego (2.25) tiene exactamente una solución sobre $[0, T]$, $\forall T \in [0, \infty)$.

Proposición 2.2 (*Acotamiento de soluciones*). Supóngase que $x=0$ es un punto de equilibrio de (2.25), y f satisface la siguiente condición. Existen constantes positivas h, ℓ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \ell \|x - y\| \tag{2.27}$$

para $x, y \in B_h$, $B_h = \{x \mid \|x\| \leq h\}$, $t \geq 0$, (0 sea f es localmente Lipschitz). Además f es continua por tramos con respecto a t . Luego, la solución $x(t)$ de (2.25) satisface,

$$\|x_0\| e^{\ell(t-t_0)} \geq \|x(t)\| \geq \|x_0\| e^{-\ell(t-t_0)}$$

mientras $x(t)$ permanece en B_h .

La proposición 2.2 implica lo siguiente:

- a) Soluciones que comienzan en B_h permanecen en B_h por lo menos durante un tiempo finito. O bien, dado un intervalo de tiempo, las soluciones permanecen en B_h al menos ese tiempo suponiendo que las condiciones iniciales son suficientemente pequeñas.
- b) Si f es globalmente Lipschitz ((2.27) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$) entonces $x \in L_{\infty}^{\omega}$, o sea las soluciones no pueden tener tiempo de escape finito.

c) Las soluciones $x(t)$ no pueden tender a cero más rápido que exponencialmente.

Teorema 2.10 (*Dos soluciones no se intersectan*). Supóngase que f en (2.25) satisface las hipótesis del teorema 2.9. Luego, para cada $z \in \mathbb{R}^n$ y cada $T \in [0, \infty)$ existe exactamente un elemento $z_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que la única solución sobre $[0, T]$ de la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t)], \quad x(0) = z_0$$

satisface

$$x(T) = z.$$

Teorema 2.11 (*Dependencia continua de la solución con las condiciones iniciales*). Supóngase que f en (2.25) satisface las hipótesis del teorema 2.9. Supóngase además que $T \in [0, \infty)$ está especificado y $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ son dos funciones en $C^n[0, T]$ que satisfacen,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f[t, x(t)], & x(0) &= x_0 \\ \dot{y}(t) &= f[t, y(t)], & y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

Luego, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta(\varepsilon, T) > 0$ tal que

$$\|x(\cdot) - y(\cdot)\| < \varepsilon \quad \text{si} \quad \|x_0 - y_0\| < \delta(\varepsilon, T).$$

Los teoremas 2.10 y 2.11 admiten una *interpretación geométrica* en términos del flujo de la ecuación (2.25). Considérese el mapa del flujo $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow C^n[0, T]$ que asocia las condiciones iniciales x_0 en \mathbb{R}^n con las soluciones únicas de (2.25). El teorema (2.11) establece que ϕ es uniformemente continuo en \mathbb{R}^n . Si ahora se considera $\phi_T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, el mapa de las condiciones iniciales $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a la evaluación en el instante T de las

soluciones únicas de (2.25), el teorema 2.10 establece que ϕ_T es una función uno a uno y sobre (el rango de ϕ_T es \mathbb{R}^n). Más aún, el teorema 2.11 muestra que ϕ_T y su inversa ϕ_T^{-1} son continuas.

2.4.2 Definiciones de estabilidad

Aquí se supondrá que el origen es un equilibrio de (2.25) en el sentido de la definición 2.22, o sea $\bar{x} = \theta$. Esto no implica pérdida de generalidad, ya que mediante cambio de coordenadas un equilibrio de (2.25) puede trasladarse al origen.

Definición 2.24 (*Equilibrio estable*). El origen es un equilibrio estable de (2.25) en t_0 si, dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tal que,

$$\|x(t_0)\| < \delta(t_0, \varepsilon) \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

El equilibrio es *uniformemente estable* sobre $[t_0, \infty)$ si, dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon), \quad t_1 \geq t_0 \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_1.$$

O sea δ puede elegirse independientemente de t_0 .

Definición 2.25 (*Equilibrio inestable*). El origen es inestable en t_0 si no es estable en t_0 .

Definición 2.26 (*Equilibrio asintóticamente estable*). El origen es un equilibrio asintóticamente estable de (2.25) en t_0 si

- a) es un equilibrio estable en t_0 .
- b) existe un número $\delta_1(t_0) > 0$ tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta_1(t_0) \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ con } t \rightarrow \infty.$$

El origen es un equilibrio *uniformemente asintóticamente estable* sobre $[t_0, \infty)$ si

- a) es un equilibrio uniformemente estable sobre $[t_0, \infty)$,
- b) existe un número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|x(t_1)\| < \delta_1, \quad t_1 \geq t_0 \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ con } t \rightarrow \infty.$$

En este caso la convergencia es uniforme con respecto a t_1 .

Definición 2.27 (*Equilibrio globalmente asintóticamente estable*). El origen es un equilibrio en t_0 globalmente asintóticamente estable de (2.25) si,

- a) es un equilibrio estable,
- b) $x(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty \quad \forall x_0, t_0$.

En este caso el único equilibrio es el origen y la propiedad de estabilidad se atribuye al sistema.

Definición 2.28 (*Equilibrio exponencialmente estable*). El origen es un equilibrio exponencialmente estable de (2.25) en t_0 si existen constantes positivas α, β, δ tal que si $\|x_0\| < \delta$ entonces

$$\|x(t)\| < \alpha \|x_0\| e^{-\beta(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

El origen es *globalmente exponencialmente estable* si es exponencialmente estable para toda condición inicial x_0 .

2.4.3 Teoremas de estabilidad

Definición 2.29 (*Función localmente definida positiva*). Una función escalar $W: \Omega \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente definida positiva si

- a) $W(x)$ es continua así como sus primeras derivadas parciales en una cierta región abierta $\Omega \in \mathbb{R}^n$ alrededor del origen.
- b) $W(\theta) = 0$
- c) $W(x) > 0 \quad \forall x \neq \theta, \quad x \in \Omega.$

Definición 2.30 (*Función globalmente definida positiva*). Si las condiciones de la definición 2.29 se verifican para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y además

- c) $W(x) \rightarrow \infty$ con $\|x\| \rightarrow \infty.$

entonces $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es globalmente definida positiva.

Definición 2.31 (*Función temporal localmente definida positiva*). Una función escalar $V: (\Omega \in \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es localmente definida positiva si

- a) $V(x, t)$ está definida en una región abierta $\Omega \in \mathbb{R}^n$.
- b) $V(\theta, t) = 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad t \geq 0$
- c) $V(x, t) \geq W(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad t \geq 0$
con $W(x)$ dada por la definición 2.29.

Definición 2.32 (*Función temporal globalmente definida positiva*). Si las condiciones de la definición 2.31 se verifican para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $V: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es globalmente definida positiva.

Definición 2.33 (*Función candidata de Lyapunov*). Una función $V: (\Omega \in \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es una función candidata de Lyapunov si,

- a) $V(x, t)$ es una función definida positiva en Ω ,

- b) $\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}$ existe en Ω y es una función continua con respecto a x y t .
- c) $\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}$ existe en Ω y es una función continua con respecto a x y t .

En adelante supóngase que está resuelto el problema de existencia y unicidad de soluciones de (2.25) en un conjunto abierto $\Omega \in \mathbb{R}^n$ y para $t \geq 0$. Además se supone que el origen $x = \theta$ es un equilibrio de (2.25) para todo $t \geq 0$.

Proposición 2.3 (*Derivada de una función candidata de Lyapunov*). Sea $V(x,t)$ una función candidata de Lyapunov, la derivada de $V(x,t)$ a lo largo de las trayectorias de (2.25) está dada por

$$\dot{V}(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} f(t,x) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = \text{grad } V \cdot f + \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (2.28)$$

Definición 2.34 (*Función de Lyapunov*). Una función candidata de Lyapunov $V(x,t)$ para (2.25) es una función de Lyapunov para (2.25) si

$$\dot{V}(x,t) \leq 0 \text{ en } \Omega. \quad (2.29)$$

Teorema 2.12 (*Estabilidad*). En relación a la ecuación (2.25), si existe en alguna vecindad abierta del origen $\Omega \in \mathbb{R}^n$ una función $V(x,t)$ de Lyapunov, entonces el origen es un equilibrio estable.

Teorema 2.13 (*Estabilidad asintótica*). Si existe en alguna vecindad abierta del origen $\Omega \in \mathbb{R}^n$ una función $V(x,t)$ de Lyapunov tal que $-\dot{V}(x,t)$ sea definida positiva en Ω , entonces el origen es un equilibrio asintóticamente estable.

Teorema 2.14 (*Estabilidad exponencial*). Si existe en alguna vecindad

abierta del origen $\Omega \in \mathbb{R}^n$ una función $V(x,t)$ candidata de Lyapunov y existen constantes positivas α, β, γ tal que,

$$a) \quad \alpha \|x\|^2 \leq V(x,t) \leq \beta \|x\|^2$$

$$b) \quad \dot{V}(x,t) \leq -\gamma \|x\|^2 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

entonces el origen es un equilibrio asintóticamente estable.

La verificación de las condiciones de los teoremas 2.12, 2.13 y 2.14 para $\Omega \equiv \mathbb{R}^n$ conduce a conclusiones globales de estabilidad.

Teorema 2.15 (Sistemas lineales). Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, todos sus autovalores tienen parte real negativa si y sólo si para toda matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica definida positiva, la ecuación de Lyapunov

$$A^T P + P^T A = -Q \tag{2.30}$$

tiene solución única $P=P^T$ definida positiva.

Aplicación 2.1 (Estabilidad de sistemas lineales). Considérese el sistema lineal invariante,

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}. \tag{2.31}$$

Tómese la función candidata de Lyapunov

$$V(x) = x^T P x$$

con P dado por el teorema 2.15. Resulta

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x$$

donde Q es la matriz asociada a P en la ecuación de Lyapunov. Si Q es

definida positiva entonces $-\dot{V}$ es una función definida positiva y el sistema (2.31) es asintóticamente estable. Esto ocurre por el teorema 2.15 si y sólo si A tiene sus autovalores con parte real estrictamente negativa.

Teorema 2.16 (Extensión de LaSalle). Supóngase que el sistema (2.25) sea autónomo y que existe una función de Lyapunov $V(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ asociada al mismo. Sea E el subconjunto de \mathbb{R}^n donde $\dot{V}=0$ y M el mayor invariante (conjunto tal que si la condición inicial está en él, las trayectorias permanecen en él) contenido en E . Luego, todas las soluciones acotadas para $t>0$ tienden a M con $t \rightarrow \infty$.

Si M es el origen, entonces puede concluirse que $x(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$, o sea la estabilidad es asintótica.

2.5. OTRAS DEFINICIONES Y LEMAS UTILES

2.5.1 Funciones positivas reales

Definición 2.35 (Funciones positivas reales). Una función racional $h(s)$ de variable compleja $s = \sigma + j\omega$ es positiva real (PR, "positive real") si,

- a) $h(s)$ es real para s real,
- b) $\text{Re} [h(s)] \geq 0$ para $\text{Re}[s] > 0$.

O equivalentemente,

- a) $h(s)$ es real para s real,
- b) $h(s)$ es analítica en $\text{Re}[s]>0$ y los polos en el eje $j\omega$ son simples y tales que el residuo asociado es no negativo,
- c) para todo valor real de ω tal que $j\omega$ no sea un polo de $h(j\omega)$ se verifica,

$$\operatorname{Re}[h(j\omega)] \geq 0.$$

Definición 2.36 (*Funciones estrictamente positivas reales*). Una función racional $h(s)$ de variable compleja que no sea idénticamente nula para todo s es estrictamente positiva real (SPR, "strictly positive real") si existe una constante $\epsilon > 0$ tal que $h(s-\epsilon)$ es PR.

A continuación se da un teorema que provee condiciones para que una función sea SPR, las cuales pueden ser más fáciles de verificar que las provistas por la definición 2.36.

Teorema 2.17 (SPR, Ioannou, Tao, 1986). Sea n^* el grado relativo de $h(s) = n(s)/d(s)$. Asuma que $h(s)$ no es idénticamente cero para todo s . Luego $h(s)$ es SPR si y sólo si,

- a) $h(s)$ es analítica en $\operatorname{Re}[s] \geq 0$,
- b) $\operatorname{Re}[h(j\omega)] > 0, \forall \omega \in (-\infty, \infty)$,
- c) i) $\lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \omega^2 \operatorname{Re}[h(j\omega)] > 0$ cuando $n^* = 1$
- ii) $\lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \operatorname{Re}[h(j\omega)] > 0, \lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \frac{h(j\omega)}{j\omega} > 0$ cuando $n^* = -1$.

Si $n^* = 0$, a) y b) constituyen condiciones necesarias y suficientes de $h(s)$ para ser SPR.

Proposición 2.4 (*Sobre funciones PR y SPR*).

- a) La función de transferencia racional $h(s)$ es PR si y sólo si $1/h(s)$ es PR.
- b) $h(s)$ es SPR si y sólo si $1/h(s)$ es SPR.
- c) Si $h(s)$ es SPR entonces los ceros y polos de $h(s)$ están en $\operatorname{Re}[s] < 0$.

Lema 2.5 (*Sistema lineal pasivo*). Un sistema lineal cuya función de transferencia es PR, es pasivo.

Lema 2.6 (*Sistema lineal estrictamente pasivo de salida*). Un sistema lineal cuya función de transferencia es SPR, es estrictamente pasivo de salida.

Lema 2.7 (*Ecuaciones del error, sistemas adaptables*). Dadas las siguientes ecuaciones dinámicas,

$$\dot{x} = M(p) \phi^T y$$

$$\dot{y} = -\Gamma \phi x$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $\phi(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $\Gamma > 0$. Si $M(p)$, $p=d/dt$ describe una función de transferencia SPR, entonces

- a) $y \in L_\infty^m$
- b) $x \in L_\infty^1$
- c) $x(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$.

A continuación se definen los conceptos de PR y SPR para funciones de transferencia matriciales según Kosut y Friedlander (1985).

Definición 2.37 (*Función matricial PR*). La función de transferencia matricial $G(s) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es PR si,

- a) no tiene polos en $\text{Re}(s) > 0$,
- b) los polos en el eje $j\omega$ son simples y con residuo no negativo,
- c) para todo $\omega \in \mathbb{R}$ que no sea polo de $G(j\omega)$,

$$G(j\omega) + G(-j\omega)^T \geq 0.$$

Definición 2.38 (*Función matricial SPR*). Supóngase el conjunto de funciones de transferencia matriciales $G(s) \in \mathcal{S}^{n \times n} \subset \mathbb{R}(s)^{n \times n}$ cuyos polos tengan parte real negativa (estable). Cuando G es estrictamente pasivo de salida y de entrada (definición 2.20) se dice que G es SPR. Las caracterizaciones en el dominio frecuencial se dan a continuación. Para funciones de transferencia matriciales G estrictamente propias se define el conjunto SPR_+^n como,

$$\text{SPR}_+^n = \left\{ G \in \mathcal{S}^{n \times n} \mid \lambda_{\min} \left[\frac{1}{2} \left[G(j\omega) + G(-j\omega)^T \right] - \mu I_{n \times n} \right] \geq 0, \forall \omega \in \mathbb{R} \right\}$$

con $\mu > 0$, $I_{n \times n}$ la matriz unitaria $n \times n$, $\lambda(A)$ es autovalor de A .

Para funciones de transferencia G propias pero no estrictamente propias se define el conjunto SPR_0^n como,

$$\text{SPR}_0^n = \left\{ G \in \mathcal{S}_0^{n \times n} \mid \lambda_{\min} \left[\frac{1}{2} \left[G(j\omega) + G(-j\omega)^T \right] - \mu G(-j\omega)^T G(j\omega) \right] \geq 0, \forall \omega \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.5.2 Lema de Kalman-Yacubovich

Lema 2.8 (*Kalman-Yacubovich*). Considérese el sistema lineal invariante con una realización de estados,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{2.32}$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, A , B , C matrices reales de dimensión adecuada. Supóngase que (2.32) es completamente controlable y observable. Entonces la función de transferencia $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ es SPR si y sólo si existen matrices P , Q simétricas definidas positivas tal que,

$$A^T P + PA = -Q$$

$$B^T P = C.$$

2.5.3 Lema "Swapping"

Lema 2.9 ("Swapping"). Supóngase las funciones $f(\cdot)$, $g(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ con f diferenciable. Sea G una función de transferencia racional propia. Si G es estable con una realización mínima,

$$G = c^T (sI - A)^{-1} b + d,$$

luego,

$$Gg^T f - (Gg^T)f = G_c (G_b (g^T) \dot{f})$$

donde,

$$G_b = (sI - A)^{-1} b, \quad G_c = -c^T (sI - A)^{-1}.$$

3. MODELO Y PROPIEDADES DE MANIPULADORES RIGIDOS

3.1 INTRODUCCION

Los modelos dinámicos que caracterizan el comportamiento de los robots manipuladores rígidos son altamente complejos. Estos consisten en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias multivariantes y no lineales. Por otro lado, debido a la falta de conocimiento a priori del valor de la masa sujeta por el manipulador, algunos parámetros de dichas ecuaciones poseen valores desconocidos. Estos hechos dificultan enormemente el diseño de controladores con alto grado de desempeño.

Usualmente los modelos dinámicos de los robots manipuladores se expresan en términos de dos tipos de sistemas coordinados comúnmente denominados articular y cartesiano. El conocimiento de las propiedades de los modelos dinámicos tanto en coordenadas articulares como cartesianas es de un valor fundamental en el diseño de controladores. Paradójicamente, a pesar de tener ambos modelos estructura semejante, algunas propiedades resultan diferentes.

En este capítulo se presentan ambos modelos dinámicos y las propiedades principales asociadas a los mismos, en particular aquellas empleadas comúnmente en el diseño de controladores adaptables. El contenido del capítulo está asociado básicamente a las siguientes referencias bibliográficas: Asada, Slotine (1985); Craig (1986, 1988); Ortega, Spong (1988); Spong, Vidyasagar (1989), además de las citadas oportunamente en el texto.

3.2. MODELO EN COORDENADAS ARTICULARES

3.2.1 Modelo

En ausencia de fricción y otras perturbaciones, el modelo dinámico de un robot manipulador rígido de n grados de libertad en coordenadas articulares resulta,

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau. \quad (3.1)$$

En (3.1), $q \in \mathbb{R}^n$ es el vector de desplazamiento de las articulaciones, $\tau \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares o fuerzas aplicadas a las articulaciones, $H(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercias, $C(q, \dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares o fuerzas centrífugos y de Coriolis, $g(q) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares o fuerzas gravitacionales.

3.2.2 Propiedades

Propiedad 3.1 (Linealidad). La estructura dinámica (3.1) es lineal en función de un conjunto adecuadamente seleccionado de parámetros del manipulador y la carga,

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \phi(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta \quad (3.2)$$

con $\phi(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $\theta \in \mathbb{R}^m$ el vector de parámetros.

Propiedad 3.2 (Antisimetría). Para una matriz $C(q, \dot{q})$ adecuadamente seleccionada, las matrices $H(q)$ y $C(q, \dot{q})$ en (3.1) satisfacen,

$$x^T \left[\frac{d}{dt} H(q) - 2C(q, \dot{q}) \right] x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (3.3)$$

o sea $[\dot{H}-2C]$ es una matriz antisimétrica.

Propiedad 3.3 (*Propiedades de la matriz $H(q)$*).

a) $H(q)$ es simétrica y definida positiva,

$$H = H^T > 0.$$

b) $H(q)$ está acotada por abajo y si el manipulador es todo de revolución también por arriba, con constantes finitas y positivas α, β tal que se verifica,

$$\alpha I \leq H(q) \leq \beta I \tag{3.4}$$

donde I es la matriz unidad de dimensión adecuada.

De (3.4) puede obtenerse también,

$$\frac{1}{\beta} I \leq H^{-1}(q) < \frac{1}{\alpha} I. \tag{3.5}$$

Obsérvese que la expresión (3.4) es equivalente a,

$$\alpha \|x\|^2 \leq x^T H(q)x \leq \beta \|x\|^2 \tag{3.6}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$.

Propiedad 3.4 (*Propiedades de la matriz $C(q, \dot{q})$*).

a) $C(q, \dot{q})$ está relacionada con H mediante,

$$C = \dot{H} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^T H). \quad (3.7)$$

b) $C(q, \dot{q})\dot{q}$ es una forma cuadrática de \dot{q} ,

$$C\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}^T N_1(q)\dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T N_n(q)\dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}^T N_1(q) \\ \vdots \\ \dot{q}^T N_n(q) \end{bmatrix} \dot{q} \quad (3.8)$$

con,

$$N_i(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial q} & -\frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial q_i} \end{bmatrix}$$

h_i = filas o columnas de H

c) Las matrices $N_i(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de b) son simétricas y si el manipulador es todo de revolución están acotadas para todo q . En este si caso \dot{q} es acotado, entonces $C(q, \dot{q})$ es acotada para todo q .

Propiedad 3.5 (*Propiedad de $g(q)$*). Si el manipulador es todo de revolución, $g(q)$ es acotada para todo q .

Consecuencia 3.1 (*Para manipuladores de revolución*). Si \dot{q} , \ddot{q} son acotados, entonces la matriz $\phi(q, \dot{q}, \ddot{q})$ de la ec. 3.2 es una matriz acotada. Esto surge de las propiedades de acotamiento de H, C y g.

3.2.3 Incorporación de la dinámica de los actuadores.

El modelo dado por la ecuación (3.1) no incluye la dinámica de los actuadores. Sin embargo el vector de pares o fuerzas τ es producido por actuadores que tienen su propia dinámica, por lo que es útil saber cómo se modifica la ecuación (3.1) para incorporar esta dinámica. Tanto los actuadores eléctricos como hidráulicos pueden ser modelados aproximadamente por ecuaciones diferenciales de segundo orden. Siguiendo a Tourassis (1988), el modelo dinámico del actuador de la articulación i , con inercia J_i , coeficiente de fricción lineal f_i , relación de transmisión r_i y ganancia k_i , es

$$J_i \ddot{q}_i + f_i \dot{q}_i + \frac{\tau_i}{r_i^2} = k_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.9)$$

Aquí τ_i es el par/fuerza en la articulación i y v_i es la entrada del actuador. Para motores de corriente directa controlados por armadura y despreciando la inductancia de armadura, el modelo (3.9) relaciona el par τ_i efectivo del actuador con la tensión eléctrica v_i aplicada a la armadura.

El coeficiente de fricción f_i [Nms] y la ganancia k_i [Nm/V] están definidos por,

$$f_i = B + \frac{K_T K_B}{R_a}, \quad k_i = \frac{K_T}{r_i R_a} \quad (3.10)$$

donde B es la constante de amortiguamiento del motor [Nms], K_T es la constante de par [Nm/A], K_B es la constante de fuerza contraelectromotriz [Vs] y R_a es la resistencia de armadura [Ω].

Considerando los n actuadores, la ecuación (3.9) puede escribirse en forma

compacta como,

$$J\ddot{q} + F'\dot{q} + R\tau = Kv \quad (3.11)$$

donde $J = \text{diag}\{j_1\}$, $F' = \text{diag}\{f_1\}$, $R = \text{diag}\{1/r_1^2\}$ y $K = \text{diag}\{k_1\}$.

El modelo completo manipulador/actuador puede formularse ahora en base a las ecuaciones (3.1) y (3.11),

$$[RH(q)+J]\ddot{q} + RC(q,\dot{q})\dot{q} + Rg(q) + F'\dot{q} = Kv. \quad (3.12)$$

Como las relaciones de transmisión no son nulas, existe R^{-1} y la ecuación (3.12) puede escribirse

$$H'(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) + R^{-1}F'\dot{q} = R^{-1}Kv \quad (3.13)$$

donde $H'(q) = H(q) + R^{-1}J$. El modelo de la ecuación (3.13) tiene las siguientes propiedades.

Propiedad 3.6 (*Propiedad de H'*). $H'(q)$ es una matriz simétrica definida positiva. Esto se concluye de la propiedad 3.3 y observando que $R^{-1}J$ es simétrica y definida positiva.

Propiedad 3.7 (*Antisimetría*). $\dot{H}'(q) - 2C(q,\dot{q})$ es una matriz antisimétrica. Esto es directo de la propiedad 3.2 observando que $d/dt [R^{-1}J] = 0$.

3.3. MODELO EN COORDENADAS CARTESIANAS

3.3.1 Modelo

Considérese un manipulador no redundante de n articulaciones y denomínese por x el vector que representa la posición cartesiana y la orientación de

su extremo libre en relación a un sistema de coordenadas fijo a la base del robot. Como se asume no redundancia, x resulta un vector de dimensión n . Las siguientes relaciones cinemáticas serán útiles.

$$x = x(q) \quad (3.14)$$

$$\dot{x} = J\dot{q} \quad (3.15)$$

$$\ddot{x} = \dot{J}\dot{q} + J\ddot{q} \quad (3.16)$$

$$\ddot{q} = J^{-1} [\ddot{x} - \dot{J}\dot{q}] \quad (3.17)$$

con $J(q) = \partial x / \partial q$ el jacobiano del robot. La relación entre los vectores de pares articulares τ y de fuerzas/pares F_τ en el extremo del manipulador es,

$$F_\tau = J^{-T} \tau. \quad (3.18)$$

La siguiente relación para el jacobiano es útil,

$$\dot{J}^{-1} = J^{-1} \dot{J} J^{-1}. \quad (3.19)$$

A partir del modelo (3.1) y la hipótesis de no redundancia puede obtenerse el correspondiente modelo en coordenadas cartesianas (véase por ejemplo Khatib, Burdich (1986) y Slotine, Li (1987b)). Sustituyendo (3.15) y (3.17) en (3.1) resulta,

$$HJ^{-1} [\ddot{x} - \dot{J}\dot{q}] + CJ^{-1}\dot{x} + g = \tau.$$

Premultiplicando por J^{-T} ,

$$J^{-T} HJ^{-1} [\ddot{x} - \dot{J}\dot{q}] + J^{-T} CJ^{-1} \dot{x} + J^{-T} g = J^{-T} \tau.$$

Reagrupando y considerando (3.15) y (3.18),

$$[J^{-T}HJ^{-1}]\ddot{x} + [J^{-T}CJ^{-1} - J^{-T}HJ^{-1}\dot{J}J^{-1}]\dot{x} + J^{-T}g = F_{\tau}$$

o en forma compacta

$$H^*(x)\ddot{x} + C^*(x, \dot{x})\dot{x} + g^*(x) = F_{\tau} \quad (3.20)$$

con,

$$H^*(x) = J^{-T}HJ^{-1} \quad (3.21)$$

$$C^*(x, \dot{x}) = J^{-T}CJ^{-1} - J^{-T}HJ^{-1}\dot{J}J^{-1} \quad (3.22)$$

$$g^*(x) = J^{-T}g. \quad (3.23)$$

La existencia de J^{-1} se supone a partir de la hipótesis de no redundancia y de que el manipulador esté fuera de un entorno especificado de las posiciones denominadas singulares (donde $\det(J)=0$).

3.3.2 Propiedades

A continuación se presentan las propiedades del modelo dado por la ecuación (3.20). Véase la bibliografía citada en la obtención del modelo cartesiano.

Propiedad 3.8 (Linealidad). La dinámica (3.20) es lineal en términos del mismo conjunto de parámetros que la dinámica (3.1) según la propiedad 3.1,

$$F_{\tau} = \phi^*(x, \dot{x}, \ddot{x})\theta.$$

Propiedad 3.9 (Antisimetría). Las matrices $H^*(x)$ y $C^*(q, \dot{q})$ en (3.14) satisfacen,

$$x^T \left[\frac{d}{dt} H^*(x) - 2C^*(x, \dot{x}) \right] x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (3.24)$$

o sea $[\dot{H}^* - 2C^*]$ es una matriz antisimétrica.

Propiedad 3.9 (*Propiedades de la matriz $H^*(x)$*).

a) $H^*(x)$ es simétrica y definida positiva,

$$H^* = H^{*T} > 0. \quad (3.25)$$

b) $H^*(x)$ está acotada por abajo con una constante positiva α tal que se verifica

$$\alpha I \leq H^*(x)$$

donde $\alpha = \sup [\lambda_{\min}(H^*)]$, con $\lambda(H^*)$ autovalor de H^* .

H^* en general no está acotada por arriba. Esto ocurrirá si el manipulador es sólo rotacional y se mantiene fuera de un entorno de radio ε predeterminado de las posiciones singulares. En este caso,

$$H^*(x) \leq \beta(\varepsilon)I.$$

Propiedad 3.10 (*Propiedades de la matriz $C^*(x, \dot{x})$*).

a) $C^*(x, \dot{x})$ está relacionada con $H^*(x)$ mediante,

$$C^* = \dot{H}^* - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\dot{x}^T H^*). \quad (3.26)$$

b) $C^*(x, \dot{x})\dot{x}$ es una forma cuadrática de \dot{x} ,

$$C^*\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}^T N_1^*(x) \dot{x} \\ \vdots \\ \dot{x}^T N_n^*(x) \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}^T N_1^*(x) \\ \vdots \\ \dot{x}^T N_n^*(x) \end{bmatrix} \dot{x},$$

con,

$$N_i^*(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i^*}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial H^*}{\partial x_i} \end{bmatrix}$$

h_i^* : filas o columnas de H^* .

c) Las matrices $N_i^*(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de b) son simétricas pero no necesariamente acotadas. Si las siguientes condiciones se verifican, entonces la matriz $C^*(x, \dot{x})$ resulta acotada.

- 1) El manipulador es todo de revolución
- 2) \dot{x} es un vector acotado
- 3) J^{-1} (jacobiano inverso) es una matriz acotada

Propiedad 3.12 (*Propiedad de $g^*(x)$*). Para un manipulador todo de revolución, si J^{-1} es una matriz acotada, entonces $\ddot{g}^*(x)$ es un vector acotado para toda $x \in \mathbb{R}^n$.

Consecuencia 3.2 La matriz $\phi^*(x, \dot{x}, \ddot{x}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ de la propiedad 3.8 no es necesariamente acotada para valores acotados de x, \dot{x}, \ddot{x} . El acotamiento se verifica si no se invade un entorno de radio ε de los puntos singulares del jacobiano J .

3.4. EJEMPLOS

En esta sección se presentan los modelos correspondientes a tres manipuladores elementales, los cuales son usados en la simulación de sistemas de control propuestos en los capítulos siguientes.

3.4.1 Ejemplo 1

El siguiente ejemplo corresponde a un manipulador de un grado de libertad. Considérese el esquema de la figura 3.1 que representa un brazo articulado de longitud ℓ y masa m concentrada en su extremo. Resultan las siguientes relaciones.

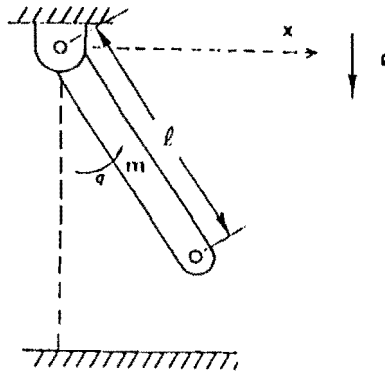


Figura 3.1 Mecanismo de un grado de libertad.

Relación geométrica:

$$x = \ell \sin(q) = x(q). \quad (3.27)$$

Relación cinemática:

$$\dot{x} = \ell \cos(q) \dot{q} = J(q) \dot{q}. \quad (3.28)$$

Relación dinámica:

$$\tau = \ell^2 m \ddot{q} + m g \sin(q) = h(q)\ddot{q} + g(q). \quad (3.29)$$

Comparando con las expresiones generales de los apartados 3.2 y 3.3 es claro que,

$$\begin{aligned} J(q) &= \ell \cos(q) & \dot{J}(q) &= -\ell \sin(q) \dot{q} \\ H(q) &= \ell^2 m & C(q) &= 0 & g(q) &= m g \sin(q). \end{aligned} \quad (3.30)$$

A partir de las relaciones (3.27), (3.28), (3.30) y las ecuaciones (3.21), (3.22) y (3.23), pueden obtenerse $H^*(x)$, $C^*(x, \dot{x})$ y $g^*(x)$ correspondientes al modelo en coordenadas cartesianas.

$$H^* = \frac{\ell^2 m}{(\ell^2 - x^2)} \quad (3.31)$$

$$C^*(x, \dot{x}) = \frac{\ell^2 m x \dot{x}}{(\ell^2 - x^2)^2} \quad (3.32)$$

$$g^*(x) = \frac{m g x}{\ell \sqrt{\ell^2 - x^2}}. \quad (3.33)$$

Puede observarse que los valores de q que hacen singular el jacobiano (en el caso escalar equivale a jacobiano nulo), son tales que resulta $x = \ell$.

3.4.2 Ejemplo 2

Considérese un manipulador de dos grados de libertad que le mueve en un plano horizontal, tal cual se presenta en Slotine-Li (1987a) y que se muestra en la figura 3.2.

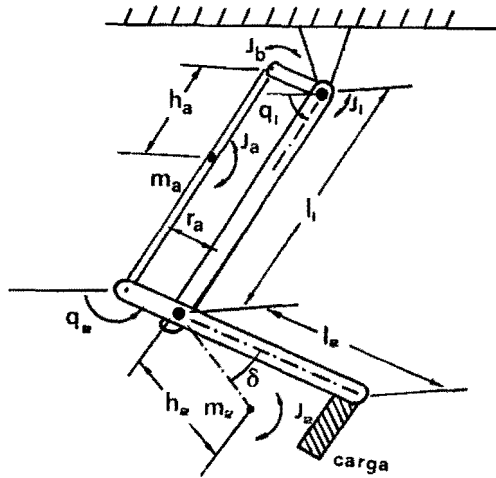


Figura 3.2 Manipulador de 2 grados de libertad.

El modelo dinámico correspondiente es el siguiente:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \theta_1 \ddot{q}_1 + (\theta_3 C_{21} + \theta_4 S_{21}) \ddot{q}_2 - \theta_3 S_{21} \dot{q}_2^2 + \theta_4 C_{21} \dot{q}_2^2 \\ \tau_2 &= (\theta_3 C_{21} + \theta_4 S_{21}) \ddot{q}_1 + \theta_2 \ddot{q}_2 + \theta_3 S_{21} \dot{q}_1^2 - \theta_4 C_{21} \dot{q}_1^2\end{aligned}\quad (3.34)$$

con q_1 , q_2 , \dot{q}_1 , \dot{q}_2 , \ddot{q}_1 , \ddot{q}_2 las correspondientes posiciones, velocidades y aceleraciones angulares; τ_1 , τ_2 los pares en las articulaciones; $S_1 = \sin(q_1)$, $C_1 = \cos(q_1)$, $C_{21} = \cos(q_2 - q_1)$, $S_{21} = \sin(q_2 - q_1)$. Además θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 son constantes que dependen en forma no lineal de los parámetros inerciales, de masa y geométricos del manipulador y la carga. Los parámetros están dados por las siguientes expresiones (ver fig. 3.2),

$$\begin{aligned}\theta_1 &= J_1 + J_a + m_2 \ell_1^2 & \theta_2 &= J_2 + J_b + m_a r_o^2 \\ \theta_3 &= m_2 h_2 \ell_1 \cos \delta - m_a h_a r_a & \theta_4 &= m_2 h_2 \ell_1 \sin \delta\end{aligned}\quad (3.35)$$

J: momento de inercia.

La propiedad (3.1) de parametrización lineal se verifica con las siguientes

ecuaciones:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \phi_{11} \ddot{\theta}_1 + \phi_{13} \ddot{\theta}_3 + \phi_{14} \ddot{\theta}_4 \\ \tau_2 &= \phi_{22} \ddot{\theta}_2 + \phi_{23} \ddot{\theta}_3 + \phi_{24} \ddot{\theta}_4\end{aligned}\quad (3.36)$$

donde,

$$\begin{aligned}\phi_{11} &= \ddot{q}_1; & \phi_{13} &= C_{21} \ddot{q}_2 - S_{21} \dot{q}_2^2; & \phi_{14} &= S_{21} \ddot{q}_2 + C_{21} \dot{q}_2^2 \\ \phi_{22} &= \ddot{q}_2; & \phi_{23} &= C_{21} \dot{q}_1 + S_{21} \dot{q}_1^2; & \phi_{24} &= S_{21} \dot{q}_1 + C_{21} \dot{q}_1^2.\end{aligned}$$

3.4.3 Ejemplo 3

Considérese el manipulador de dos grados de libertad que se mueve en un plano vertical, tal cual se muestra en la figura 3.3. El manipulador se modela como dos eslabones de longitud unitaria con masas puntuales m_1 y m_2 en sus extremos.

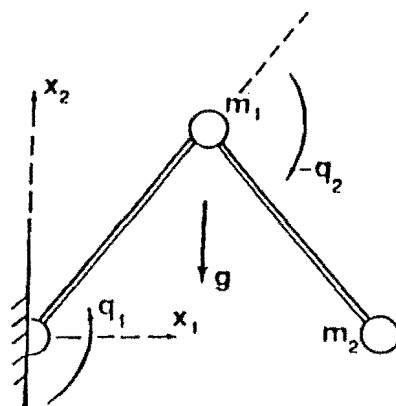


Figura 3.3 Manipulador de dos grados de libertad.

El modelo dinámico correspondiente es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= m_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 C_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + (m_1 + m_2)\ddot{q}_1 - m_2 S_2 \dot{q}_2^2 \\
&\quad - 2m_2 S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_2 g S_{12} + (m_1 + m_2)g S_1 \\
\tau_2 &= m_2 C_2 \ddot{q}_1 + m_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 S_2 \dot{q}_1^2 + m_2 g S_{12}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

con el mismo significado de las variables que en el ejemplo 2. Considérese $\theta_1 = m_1$ y $\theta_2 = m_2$. La propiedad (3.1) de parametrización lineal se verifica con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \phi_{11} \theta_1 + \phi_{12} \theta_2 \\
\tau_2 &= \phi_{21} \theta_1 + \phi_{22} \theta_2
\end{aligned} \tag{3.38}$$

donde,

$$\begin{aligned}
\phi_{11} &= \ddot{q}_1 + g S_1; & \phi_{12} &= 2(1+C_2)\ddot{q}_1 + (1+C_2)\ddot{q}_2 - 2S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + g S_{12} + g S_1 \\
& & & \quad - S_2 \dot{q}_2^2 \\
\phi_{21} &= 0; & \phi_{22} &= (1+C_2)\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + S_2 \dot{q}_1^2 + g S_{12}.
\end{aligned}$$

El jacobiano $J(q) = \{j_{ik}; i, k = 1, 2\}$ está dado por:

$$\begin{aligned}
j_{11} &= C_1 + C_{12} \\
j_{12} &= C_{12} \\
j_{21} &= S_1 + S_{12} \\
j_{22} &= S_{12}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

3.5 MODELO DEL MEDIO

Hay diversas tareas en robótica en las cuales el manipulador, mediante su extremo, interactúa mecánicamente con el medio. Entre estas tareas pueden mencionarse operaciones de ensamble y de manufactura. Para encarar el control de estas tareas se requiere, en general, un modelo del medio. Se puede plantear modelos relativamente complejos, véase por ejemplo Eppinger, Seering, (1987); Judd, Pertunnen, Mousseau (1987); Fukuda, Kitamura, Tanie (1987). Sin embargo se reconoce (An, Hollerbach, 1987) que para propósitos de análisis de estabilidad, el efecto de rigidez es el más importante. Por ello y por simplicidad de análisis se considerará en general un modelo elástico puro.

Asumiendo que el manipulador hace contacto con el medio en un punto x_e -correspondiente a la posición del medio sin deformar- dado en las coordenadas cartesianas descritas en 3.3, si la posición del extremo es x en las mismas coordenadas, la fuerza (pares) de interacción ejercido por el extremo del manipulador sobre el medio elástico es,

$$F = K_e [x - x_e], \quad F, x, x_e \in \mathbb{R}^n. \quad (3.40)$$

En (3.40), $K_e \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de rigidez del medio la cual es no singular, y en general se la considerará diagonal y constante.

3.6 MANIPULADOR CON INTERACCION CON EL MEDIO

Cuando el manipulador interacciona con el medio, en su extremo se genera un vector de fuerzas/pares de interacción, que expresado en las coordenadas cartesianas se denominará F . El vector F puede estar generado, por ejemplo, por un modelo del medio como el de la ecuación 3.40.

Para el manipulador en coordenadas articulares (3.1), el modelo del

manipulador con interacción está dado por,

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + J^T F = \tau. \quad (3.41)$$

Para el manipulador en coordenadas cartesianas (3.20), el modelo del manipulador en interacción con el medio es,

$$H^*(x)\ddot{x} + C(x, \dot{x})\dot{x} + g^*(x) + F = J^{-T}\tau. \quad (3.42)$$

Los modelos y propiedades expuestos en este capítulo serán referenciados repetidamente en el resto del trabajo.

PARTE II:

CONTROL ADAPTABLE DE MANIPULADORES SIN INTERACCION CON EL MEDIO

4 INTRODUCCION A LA PARTE II

El control adaptable es una técnica de diseño adecuada para aplicaciones que requieren alto desempeño y con incertidumbres del sistema que pueden concentrarse en unos pocos parámetros constantes desconocidos, mientras la información estructural es considerable. El problema de control de movimiento de manipuladores pertenece a esta categoría, pues los modelos dinámicos del robot son descriptos por ecuaciones diferenciales no lineales bien estructuradas y con algunos parámetros inciertos, por ejemplo la carga, las inercias de los eslabones, etc. Se sabe (Spong, Vidyasagar, 1989), que la dinámica del robot es linealizable por realimentación a través del control de dinámica inversa (también denominado por calculado). Para alcanzar alto desempeño en diseños no adaptables, el controlador de dinámica inversa debe asegurar la cancelación exacta de las dinámicas no lineales y por consiguiente no resulta robusto. Esta situación motiva el interés en el control adaptable de manipuladores robóticos.

En esta Parte II del trabajo, se encara el problema de establecer un marco de análisis y diseño de controladores adaptables para el control de movimiento de manipuladores rígidos. El problema de control puede establecerse del siguiente modo: Dado el modelo dinámico del robot con ciertos parámetros constantes inciertos y una trayectoria deseada de movimiento, encontrar un controlador de estructura parametrizada y una ley de adaptación para calcular las acciones de control, tal que se obtenga seguimiento asintótico de posición. Si éste objetivo se alcanza para toda condición inicial y toda trayectoria deseada acotada, entonces el sistema de control es globalmente convergente.

El primer controlador adaptable globalmente convergente para manipuladores robóticos se debe a Craig et al. (1986). Un punto clave en ese trabajo fue el uso de una parametrización lineal de las ecuaciones del robot en términos de un conjunto adecuadamente seleccionado de parámetros del robot y la carga. La posibilidad de esta parametrización fue señalada por Khosla y Kanade (1985). En base a esa parametrización se propuso un controlador de

par calculado que requiere medición de la aceleración y la inversión de una matriz función de los parámetros estimados. Un esquema que no requiere la inversión matricial se da en Améstegui et. al. (1987). La necesidad de medición de la aceleración es obviada mediante filtrado en el trabajo de Middleton y Goodwin (1986). Slotine y Li (1986) y Sadegh y Horowitz (1987) obtienen un esquema de control globalmente convergente usando la relación entre las matrices de inercia y de fuerzas de Coriolis y centripetas del robot, presentada por Arimoto y Miyazaki (1984) y Koditschek (1984). Más detalles bibliográficos pueden consultarse en Ortega y Spong (1988).

El objetivo de esta Parte II es presentar un marco alternativo de análisis y diseño de controladores adaptables de movimiento para manipuladores robóticos rígidos. El mismo está basado en la formulación de la teoría de estabilidad de entrada-salida (Willems, 1971; Desoer y Vidyasagar, 1975). La teoría de entrada-salida, en contraste con el análisis de Lyapunov, es más global ya que deliberadamente se descarta información para producir resultados más generales que son más fáciles de usar. El esquema de entrada-salida ayuda a pensar en términos de la estructura del sistema y darse cuenta que el patrón de interconexiones es más importante que el comportamiento detallado de los componentes. Los resultados analíticos disponibles en la teoría de entrada-salida proveen un marco adecuado de estudio de estabilidad de controladores adaptables para manipuladores. Algunos trabajos previos en esta línea han sido reportados por Kelly y Ortega (1988) y Landau y Horowitz (1988). En el capítulo 5 se presenta un marco de análisis y diseño general y adecuado para manipuladores y su utilidad se ilustra con una ley de control nueva, que consiste en un par calculado con precompensación. Se muestra que este esquema, conjuntamente con una ley de adaptación proporcional e integral o compuesta (Slotine y Li, 1987c), resulta ser globalmente convergente.

5. CONTROL ADAPTABLE DE MOVIMIENTO

5.1 RESUMEN (ABSTRACT)

Resumen. En este capítulo se presenta una técnica de diseño entrada-salida de controladores adaptables de movimiento para manipuladores robóticos. La misma está basada en la teoría de pasividad. Esta formulación provee un marco adecuado para el diseño de nuevas leyes de control y adaptación. Usando esta técnica se presenta y analiza una nueva ley de control que consiste en una parte de par calculado y otra de precompensación.

Abstract. An input-output approach to adaptive motion control design of robot manipulators is presented. The main technical device in our approach, is the passivity theory. This formulation provides a framework suitable for the design of new control and adaptation laws. A new control law which consists of a computed torque part and a feedforward compensation part is analyzed using this approach.

5.2 PRELIMINARES

En el presente capítulo se hará referencia a definiciones y teoremas dados en 2.3 (Preliminares matemáticos). En esta sección se presentan otros preliminares necesarios.

La parte principal de las pruebas de estabilidad es una versión simplificada del teorema de pasividad, adecuadamente presentado para el análisis de controladores adaptables para manipuladores. Esta versión se da a continuación.

Teorema 5.1 Considérese el sistema realimentado de la figura 5.1 con $u_1 = u_2 = 0$ de modo que

$$e_1 = -H_2 e_2 \quad (5.1a)$$

$$e_2 = H_1 e_1. \quad (5.1b)$$

Aquí H_1 y H_2 son mapas de L_{2e}^n en L_{2e}^n . Asúmase que hay soluciones e_1, e_2 en L_{2e}^n . Supóngase que hay constantes positivas β_1, β_2 , y μ_2 tales que

$$\langle u | H_1 u \rangle_T \geq -\beta_1 \quad (5.2)$$

$$\langle u | H_2 u \rangle_T \geq -\beta_2 + \mu_2 \|H_2 u\|_{2,T}^2 \quad (5.3)$$

para toda $u \in L_{2e}^n$, $T \in [0, \infty)$, luego $e_1 \in L_{2e}^n$.

∇∇∇

Prueba. Ver el apéndice 5.A.

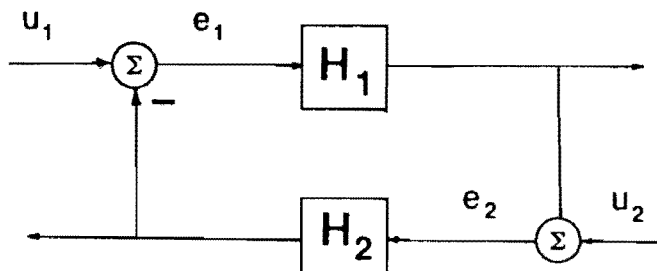


Figura 5.1 Sistema realimentado.

Observación 5.1 El teorema 5.1 es un caso particular de los teoremas más generales de pasividad (Desoer y Vidyasagar, 1975). Las desigualdades (5.2) y (5.3) significan que H_1 es pasivo y H_2 es estrictamente pasivo de salida. El teorema es aún válido para constantes β_1 y β_2 tales que $\beta_1 + \beta_2 > 0$. ∇∇∇

La idea clave en el análisis del control adaptable de robots usando la técnica de entrada-salida, es describir el sistema de malla cerrada como la

interconexión de realimentación de dos operadores dinámicos, H_1 and H_2 en la figura 5.1. H_1 y H_2 son operadores no lineales variantes en el tiempo definidos por el estimador de parámetros y la ley de control respectivamente. Este procedimiento permite separar efectivamente el problema de diseñar un estimador y el de seleccionar la estructura del controlador. Esta es la principal ventaja de la formulación de entrada-salida. En el desarrollo de este capítulo se asume que todos los operadores de interés representan un mapa de L_{2e}^n en L_{2e}^n y su interconexión está bien formulada (véase por ej. Willems, (1971)).

5.3. DISEÑO DEL CONTROL ADAPTABLE DE MOVIMIENTO

5.3.1 Modelo y propiedades

Se considera el control adaptable de manipuladores rígidos de n grados de libertad descritos por (ec. 3.1),

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (5.4)$$

con las propiedades mencionadas en 3.2.2. A continuación se dan otras propiedades que aquí resultan de gran interés (Ortega y Spong, 1988).

Propiedad 5.1 Considérese la ecuación dinámica del robot (5.4). El operador,

$$\begin{aligned} H_R: L_{2e}^n &\rightarrow L_{2e}^n \\ &: \tau \rightarrow \dot{q} \end{aligned}$$

es pasivo.

VVV

Prueba. Ver el apéndice 5.B.

Observación 5.2 Esta propiedad fundamental de los manipuladores rígidos fue establecida por Kelly y Ortega (1988) y Landau y Horowitz (1988) para el caso particular de $g(q)=0$. La prueba para el caso general se da en Ortega y Spong (1988) usando una formulación con el Hamiltoniano. También ha sido derivada sin referencia explícita a pasividad por Khorrami y Ozgüner (1988) para probar que es posible la regulación PI sin cancelación de la gravedad. Es importante observar que la propiedad es aún válida en presencia de fuerzas de fricción disipativa.

El siguiente corolario se obtiene directamente de la propiedad 5.1.

Corolario 5.1 Considérese la ecuación diferencial,

$$H(q)\dot{v} + C(q, \dot{q})v = \varphi_0$$

donde $H(q)$, $C(q, \dot{q})$ son como en la ecuación 5.4. Luego, para todo v , $\varphi_0 \in L_{2e}^n$ el operador

$$\begin{aligned} H_E : L_{2e}^n &\rightarrow L_{2e}^n \\ &: \varphi_0 \rightarrow v \end{aligned}$$

es pasivo. Más aún, si φ_0 se genera como (ver Fig. 5.2)

$$\varphi_0 = \varphi - H_F v$$

entonces el operador de malla cerrada

$$\begin{aligned} H_2 : L_{2e}^n &\rightarrow L_{2e}^n \\ &: \varphi \rightarrow v \end{aligned}$$

es estrictamente pasivo de salida para todo operador $H_F : L_{2e}^n \rightarrow L_{2e}^n$ estrictamente pasivo de entrada. VVV

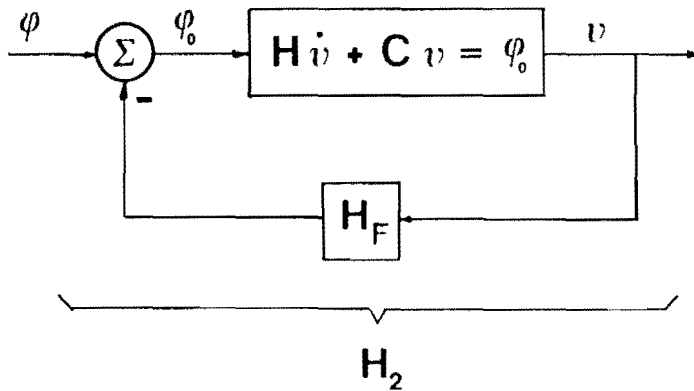


Figura 5.2 Interconexión de operadores.

5.3.2 Estructura general de la ley de control

Considérese una estructura general de la ley de control dada por

$$\tau = \hat{H}(q)f_1 + \hat{C}(q, \dot{q})f_2 + \hat{g}(q) - K_D f_3 \quad (5.5)$$

donde

$$f_1 = F_1(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) \in \mathbb{R}^n \quad (5.6)$$

$$f_2 = F_2(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) \in \mathbb{R}^n \quad (5.7)$$

$$f_3 = F_3(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) \in \mathbb{R}^n \quad (5.8)$$

son funcionales a ser elegidos por el diseñador y $\hat{H}(\vec{q})$, $\hat{C}(q, \dot{q})$ y $\hat{g}(q)$ tienen la misma forma funcional que $H(q)$, $C(q, \dot{q})$ and $g(q)$ respectivamente con parámetros estimados $\hat{\theta}$. Además $K_D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $q_d \in \mathbb{R}^n$ es el vector de las trayectorias de referencia deseadas.

Observación 5.3 La ley de control propuesta por Slotine y Li (1987b) puede ser obtenida de (5.5) eligiendo

$$f_1 = \ddot{q}_d - \Lambda \dot{\tilde{q}} = \dot{f}_2$$

$$f_2 = \dot{q}_d - \Lambda \tilde{q}$$

$$f_3 = \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} = \dot{q} - f_2$$

$$K_D > 0$$

donde $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz cuyos autovalores están estrictamente en el semiplano complejo derecho y $\tilde{q} = q - q_d$. La ley de control propuesta por Sadegh y Horowitz (1987) viene dada por la ecuación (5.5) con

$$f_1 = \ddot{q}_d - K_1 \int_0^t \tilde{q}(\alpha) d\alpha - K_p \tilde{q} - K_d \dot{\tilde{q}} = \dot{f}_2$$

$$f_2 = \int_0^t f_1(\alpha) d\alpha$$

$$f_3 = \int_0^t f_1(\alpha) d\alpha - \dot{q}$$

$$K_D > 0$$

donde K_1 , K_p , K_d son matrices $n \times n$ definidas positivas.

Usando la propiedad 3.1, la ecuación (5.5) puede ser expresada en términos de un conjunto adecuadamente seleccionado de parámetros del robot y la carga como,

$$\tau = \phi(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) \hat{\theta} - K_D f_3 \quad (5.9)$$

donde

$$\phi(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) \hat{\theta} = \hat{H}(q) f_1 + \hat{C}(q, \dot{q}) f_2 + \hat{g}(q) \quad (5.10)$$

$\phi(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de parámetros estimados.

5.3.3 Ecuación del error

Como es usual en la teoría del control adaptable, resulta conveniente expresar las ecuaciones del sistema en términos del error paramétrico (véase por ej. Anderson et al., 1986). Para este fin se usará la siguiente simbología: $\tilde{\theta} \triangleq \hat{\theta} - \theta$, $\tilde{H}(q) \triangleq \hat{H}(q) - H(q)$, $\tilde{C}(q, \dot{q}) \triangleq \hat{C}(q, \dot{q}) - C(q, \dot{q})$ y $\tilde{g} \triangleq \hat{g}(q) - g(q)$. De la ec. (5.10) se tiene

$$\phi(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) \tilde{\theta} = \tilde{H}(q) f_1 + \tilde{C}(q, \dot{q}) f_2 + \tilde{g}(q) \quad (5.11)$$

y la ec. (5.9) conduce a

$$\tau = [\tilde{H}(q) + H(q)] f_1 + [\tilde{C}(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q})] f_2 + [\tilde{g}(q) + g(q)] - K_D f_3. \quad (5.12)$$

Las ecuaciones de malla cerrada se obtienen de las ecuaciones (5.4) y (5.12),

$$H(q)(\ddot{q} - f_1) + C(q, \dot{q})(\dot{q} - f_2) = \tilde{H}(q) f_1 + \tilde{C}(q, \dot{q}) f_2 + \tilde{g}(q) - K_D f_3$$

y usando la ec. (5.11) se tiene

$$H(q)(\ddot{q} - f_1) + C(q, \dot{q})(\dot{q} - f_2) = \phi(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) \tilde{\theta} - K_D f_3. \quad (5.13)$$

De la ecuación de malla cerrada (5.13) se definirá un operador denotado por H_2 con entrada $\phi(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) \tilde{\theta}$ y salida v

$$H_2 : L_{2e}^n \rightarrow L_{2e}^n \quad (5.14)$$

$$: \phi_{\tilde{\theta}} \rightarrow \nu$$

donde $\nu = \nu(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)$ es una señal medible elegida por el diseñador.

El operador H_2 define un mapa no lineal variante en el tiempo que depende sólo del modelo del robot (5.4) y la ley de control, pero es independiente de la ley de adaptación.

Observación 5.4 El interés en definir tal operador radica en que el mismo posee buenas propiedades de pasividad. Por ejemplo, del corolario 5.1 puede fácilmente establecerse que H_2 es un operador estrictamente pasivo de salida para una selección de f_1 , f_2 y f_3 correspondiente al esquema de Slotine y Li (1987) con

$$\nu = f_3.$$

En este caso H_F (Fig. 5.2) es un operador K_D de ganancia constante.

5.3.4 Ley de adaptación general

La ley de control (5.5), escrita en una forma de parametrización explícita en (5.9), emplea un vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ para calcular los pares τ . Los parámetros estimados $\hat{\theta}$ son ajustados en línea por la ley de adaptación. Se considerará una estructura general de ley de adaptación dada por

$$\hat{\theta} = \Theta(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, \hat{\theta}, t) \quad (5.15)$$

donde $\Theta(\cdot)$ es un funcional elegido por el diseñador.

La mayoría de las leyes de adaptación usadas en sistemas adaptables de tiempo continuo, como del tipo gradiente, proporcional e integral, mínimos cuadrados, etc. pueden escribirse en la forma de la ec. (5.15).

Usando el vector de error paramétrico $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$, la ec. (5.15) puede escribirse como

$$\tilde{\theta} = \Theta(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, \tilde{\theta} + \theta, t) - \theta. \quad (5.16)$$

De la ecuación (5.16) se definirá un operador H_1 que es un mapa de $-v$ a $\phi(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)\tilde{\theta}$,

$$\begin{aligned} H_1 : L_{2e}^n &\rightarrow L_{2e}^n \\ &: -v \rightarrow \phi\tilde{\theta}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Las propiedades de entrada-salida del mapa H_1 no lineal variante en el tiempo son definidas solamente por el funcional $\Theta(\cdot)$ y su relación con v .

5.3.5 Interconexión de realimentación

El comportamiento en malla cerrada del sistema de control adaptable de movimiento presentado en las secciones anteriores, puede analizarse como la interconexión de operadores H_1 y H_2 como se muestra en la figura 5.3.

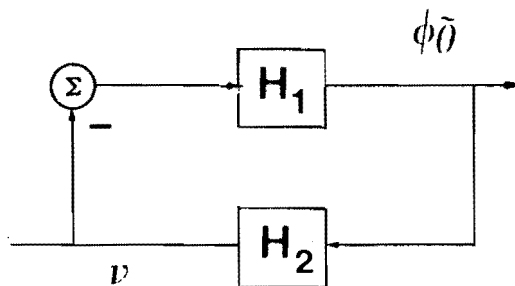


Figura 5.3 Modelo del error.

Para realizar el análisis de estabilidad por la teoría de pasividad, se requiere probar algunas propiedades de entrada-salida de los mapas H_1 y H_2

para funciones f_i ($i = 1, 2, 3$) y ν adecuadamente seleccionadas. A continuación se dan los resultados principales.

Teorema 5.2 Considérese el problema de control adaptable de movimiento del modelo (5.4) usando la ley de control (5.5) -que se da en forma parametrizada en la ec. (5.9)- y la ley de adaptación (5.15). Tómnese los operadores H_1 y H_2 definidos en (5.17) y (5.14) respectivamente. Asíumase que ν y $\phi\tilde{\theta}$ están en L_{2e}^n . Si f_i ($i=1,2,3$) y ν se eligen tal que

$$\langle -\nu | \phi\tilde{\theta} \rangle_T \geq -\beta_1 \quad (5.18)$$

$$\langle \phi\tilde{\theta} | \nu \rangle_T \geq -\beta_2 + \mu_2 \|\nu\|_{2,T}^2 \quad (5.19)$$

con $T \in [0, \infty)$ y constantes positivas β_1 , β_2 y μ_2 , entonces

$$(i) \quad \nu \in L_2^n.$$

Si además, ν se define de modo que existe un operador estable, invariante en el tiempo, estrictamente propio $F(p)$, $p \triangleq d/dt$, tal que $q_d - q = F(p)\nu$, entonces

$$(ii) \quad (\dot{q}_d - \dot{q}) \in L_2^n$$

$$(iii) \quad (q_d - q) \in L_2^n \cap L_\infty^n$$

$$(iv) \quad q_d(t) - q(t) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty.$$

∇∇∇

Prueba. La conclusión (i) es inmediata del teorema 5.1 y (ii)-(iv) se obtienen a partir del teorema 2.2.

Observación 5.5 Es digno de mencionarse que, con la formulación del teorema 5.2, también es posible demostrar la anulación asintótica del error

de velocidad y acotamiento de todas las señales internas, cuando q_d , \dot{q}_d , \ddot{q}_d están acotadas. La prueba requiere argumentos del tipo de Lyapunov los cuales caen fuera del objetivo de este capítulo.

Observación 5.6 Para analizar dentro de este marco el controlador de Slotine y Li (1987b) elíjase

$$F(p) = - (pI + \Lambda)^{-1}$$

con $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz Hurwitz. Para el esquema de Sadegh y Horowitz (1987) hágase

$$F(p) = - \left[pI + K_d + \frac{1}{p} K_p + \frac{1}{p^2} K_1 \right]^{-1}$$

donde K_d , K_p , $K_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se eligen para asegurar la estabilidad de $F(p)$.

5.4. NUEVA ESTRUCTURA DE CONTROL

En esta sección se presenta el análisis de entrada-salida de un sistema de control de movimiento. El controlador adaptable consiste de una estructura de par calculado con precompensación. Para mostrar la generalidad de la formulación se consideran dos leyes de adaptación diferentes: proporcional e integral y el estimador compuesto de Slotine y Li (1988).

5.4.1 Ley de control

Se propone la estructura de controlador

$$\tau = \hat{H}(q) [\ddot{q}_d + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q}] + \hat{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \hat{g}(q) - C(q, \dot{q}) \nu \quad (5.20)$$

donde $\tilde{q} = q_d - q$, $\hat{H}(q)$, $\hat{C}(q, \dot{q})$ and $\hat{g}(q)$ son los estimados de $H(q)$, $C(q, \dot{q})$ $g(q)$ respectivamente y ν está dado por

$$\nu = - \frac{1}{p+\lambda} [\ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + k_p \tilde{q}] \quad (5.21)$$

con $\lambda \in \mathbb{R}_+$ y K_v , K_p matrices $n \times n$ definidas positivas. Obsérvese que

$$\dot{\nu} + \lambda \nu = - (\ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q}) \quad (5.22)$$

y también

$$\nu = - \frac{p}{p+\lambda} \dot{\tilde{q}} - \frac{1}{p+\lambda} [K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q}]. \quad (5.23)$$

Nótese de (5.23) que no se requiere la medición de aceleración para calcular la ley de control (5.20).

Observación 5.7 La ley de control propuesta (5.20) puede expresarse en términos de la ley de control general (5.5) con

$$f_1 = \ddot{q}_d + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q}$$

$$f_2 = \dot{q} - \nu$$

$$f_3 = 0, \quad K_D = 0$$

Nótese que, de la propiedad 3.1 y de (5.10), se puede escribir el control

como

$$\tau = \hat{H}(q)\dot{f}_1 + \hat{C}(q, \dot{q})f_2 + \hat{g}(q) = \phi(q, \dot{q}, f_1, f_2)\hat{\theta}. \quad (5.24)$$

Observación 5.8 Es interesante destacar que el controlador propuesto puede relacionarse con el de Slotine y Li (1987b), el que por conveniencia es reescrito como

$$\tau = \hat{H}(q)\dot{f}_2 + \hat{C}(q, \dot{q})f_2 + \hat{g}(q) - K_D f_3, \quad K_D > 0$$

con f_2 y f_3 de acuerdo a la observación 5.3. Por otra parte, el nuevo controlador puede expresarse como

$$\tau = \hat{H}(q)\dot{f}_2 + \hat{C}(q, \dot{q})f_2 + \hat{g}(q) - \lambda H(q)\nu$$

con f_2 y ν dados en la observación 5.7. Aún cuando ambos controladores comparten la misma estructura, la restricción de que K_D sea definida positiva impuesta en el primer controlador no es tal en el nuevo controlador, desde que $\hat{H}(q)$ puede no ser definida positiva.

5.4.2 Leyes de adaptación

Para actualizar el vector de parámetros estimados se considera primero la ley de adaptación denominada proporcional e integral,

$$\hat{\theta}(t) = -K_1 \int_0^t \phi^T(q, \dot{q}, f_1, f_2) \nu \, d\tau - K\phi^T(q, \dot{q}, f_1, f_2) \nu + \hat{\theta}(0) \quad (5.25)$$

donde K_1 y K son matrices $m \times m$ definidas positivas (Landau, 1979 y Landau y Horowitz, 1988). Obsérvese que para $K=0$, esta ley de adaptación corresponde a la de tipo gradiente usada en Slotine y Li (1986) y Sadegh y Horowitz (1987). También se considerará la ley de adaptación compuesta de Slotine y

Li (1987c),

$$\dot{\hat{\theta}} = -F \left[\phi^T(q, \dot{q}, f_1, f_2) \nu + \phi_f^T(q, \dot{q}, f_1, f_2) \varepsilon \right] \quad (5.26a)$$

$$\dot{F}^{-1} = \phi_f^T \phi_f(q, \dot{q}, f_1, f_2), \quad F(0) = F(0)^T > 0 \quad (5.26b)$$

$$\varepsilon = -\phi_f(q, \dot{q}, f_1, f_2) \hat{\theta} + \tau_f \quad (5.26c)$$

donde se ha usado la siguiente notación

$$(\cdot)_f \triangleq \frac{\omega}{p+\omega} (\cdot), \quad \omega > 0$$

y τ está definida por (5.24).

Observación 5.9 Las leyes anteriores presentan los siguientes aspectos interesantes. Las leyes de adaptación con un término proporcional se han usado por largo tiempo, Landau (1979). Sin embargo no se ha investigado completamente su papel en , por ejemplo, el mejoramiento de la robustez. En una publicación reciente, Tomizuka (1988) muestra que su inclusión es esencial para establecer algunos resultados interesantes de robustez de sistemas adaptables. Por otra parte, la ley de adaptación compuesta usa tanto el error de seguimiento como el de predicción y la dirección descendente la da una métrica de mínimos cuadrados. Por consiguiente, al menos localmente, es de esperar mejores propiedades de convergencia. En la observación 5.10 se dan más comentarios.

5.4.3 Análisis de estabilidad

Para llevar a cabo el análisis de estabilidad se establecerán primero las propiedades de entrada-salida del mapa H_1 (5.17) y H_2 (5.14) para la presente selección de las leyes de control y adaptación. Luego, se prueba la convergencia global del esquema adaptable invocando el teorema general de estabilidad 5.2 para la interconexión de realimentación.

A. Propiedades de H_2 .

Reemplazando f_1 , f_2 y f_3 en (5.13) se obtiene la ecuación del error

$$H(q) [\ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q}] - C(q, \dot{q})v = -\phi(q, \dot{q}, f_1, f_2)\tilde{\theta}. \quad (5.27)$$

Sustituyendo (5.22) se tiene

$$H(q) (\dot{v} + \lambda v) + C(q, \dot{q})v = \phi(q, \dot{q}, f_1, f_2)\tilde{\theta}. \quad (5.28)$$

La ecuación (5.28) define un mapa

$$\begin{aligned} H_2 : L_{2e}^n &\rightarrow L_{2e}^n \\ &: \tilde{\theta} \rightarrow v \end{aligned} \quad (5.29)$$

cuyas propiedades se resumen a continuación.

Proposición 5.1 Considérese el mapa H_2 definido en la ec. (5.29). El operador H_2 es *estrictamente pasivo de salida*, ésto es

$$\langle u | H_2 u \rangle_T \geq -\beta_2 + \mu_2 \|H_2 u\|_{2,T}^2, \quad \forall u \in L_{2e}^n, \quad \forall T \in \mathbb{R}_+$$

donde $\mu_2 = \lambda\alpha > 0$ y $\beta_2 = [v^T(0) H(q(0)) v(0)]/2$. \(\nabla\nabla\nabla\)

Prueba. La prueba se obtiene inmediatamente del corolario 5.1 eligiendo $H_F = \lambda H(q)$ y observando que, de acuerdo a la propiedad 3.3-ec. 3.4, éste define un operador estrictamente pasivo de entrada. Una prueba alternativa es la siguiente. Considérese la función de tiempo no negativa

$$V(t) = \frac{1}{2} [v^T H v] \geq 0$$

cuya derivada temporal a lo largo de las trayectorias de (5.28) es

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \nu^T [\dot{H} - 2C] \nu + \nu^T \phi \tilde{\theta} - \lambda \nu^T H \nu.$$

De la propiedad 3.2

$$\dot{V} = \nu^T \phi \tilde{\theta} - \lambda \nu^T H \nu.$$

Integrando de 0 a T,

$$V(T) - V(0) = - \int_0^T \lambda \nu^T H \nu \, d\tau + \int_0^T \nu^T \phi \tilde{\theta} \, d\tau$$

$$\text{y observando que } \langle u | H_2 u \rangle_T = \langle \nu | \phi \tilde{\theta} \rangle_T = \int_0^T \nu^T \phi \tilde{\theta} \, d\tau$$

$$\langle u | H_2 u \rangle_T \geq -V(0) + \lambda \int_0^T \nu^T H \nu \, d\tau.$$

Por la propiedad 3.3-ec. 3.4, existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha \|x\|^2 \leq x^T H x$ para todo $t \geq 0$, entonces

$$\langle u | H_2 u \rangle_T \geq -V(0) + \lambda \alpha \int_0^T \nu^T \nu \, d\tau.$$

Como $\|H_2 u\|_{2,T}^2 = \|\nu\|_{2,T}^2 = \langle \nu, \nu \rangle_T = \int_0^T \nu^T \nu \, dt$, esto prueba la proposición.

□

B. Propiedades de H_1

Las leyes de adaptación (5.25) y (5.26) con el vector de error paramétrico $\tilde{\theta}$ definen un operador

$$\begin{aligned} H_1 : L_{2e}^n &\rightarrow L_{2e}^n \\ &: -\nu \rightarrow \phi \tilde{\theta} \end{aligned} \tag{5.30}$$

cuyas propiedades se resumen a continuación.

Proposición 5.2 Considérese el mapa H_1 definido por las ecuaciones (5.25) y (5.30). El operador H_1 es *pasivo*, ésto es

$$\langle u | H_1 u \rangle_T \geq -\beta_3 \quad \forall u \in L_{2e}^n \quad \forall T \in \mathbb{R}_+$$

donde

$$\beta_3 = \frac{\lambda_{\max}(K_1^{-1})}{2} \tilde{\theta}(0)^T \tilde{\theta}(0).$$

□□□

Prueba. Véase Landau y Horowitz (1988).

Proposición 5.3 Considérese el mapa H_1 definido por (5.26) y (5.30). El operador H_1 es *pasivo*, ésto es

$$\langle u | H_1 u \rangle_T \geq -\beta_3, \quad \forall u \in L_{2e}^n, \quad \forall T \in \mathbb{R}_+$$

donde

$$\beta_3 = \frac{1}{2} \tilde{\theta}(0)^T F^{-1}(0) \tilde{\theta}(0).$$

Prueba. Tómesese

$$v = \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T F^{-1} \tilde{\theta}$$

cuya derivada temporal a lo largo de las trayectorias de (5.26) es

$$\dot{V} = - \tilde{\theta}^T \phi_f^T \nu - \tilde{\theta}^T \phi_f^T \epsilon + \frac{1}{2} \| \tilde{\theta}^T \phi \|^2. \tag{5.31}$$

Ahora, combinando (5.24) y (5.26c) se obtiene

$$\epsilon = - \phi_f \tilde{\theta}. \tag{5.32}$$

La prueba se completa reemplazando (5.32) en (5.31) e integrando para obtener

$$\langle \phi \tilde{\theta} | -v \rangle_T \geq \frac{1}{2} \| \phi_f \tilde{\theta} \|_{2,T}^2 - \beta_3 \geq \beta_3. \tag{5.33}$$

VVV

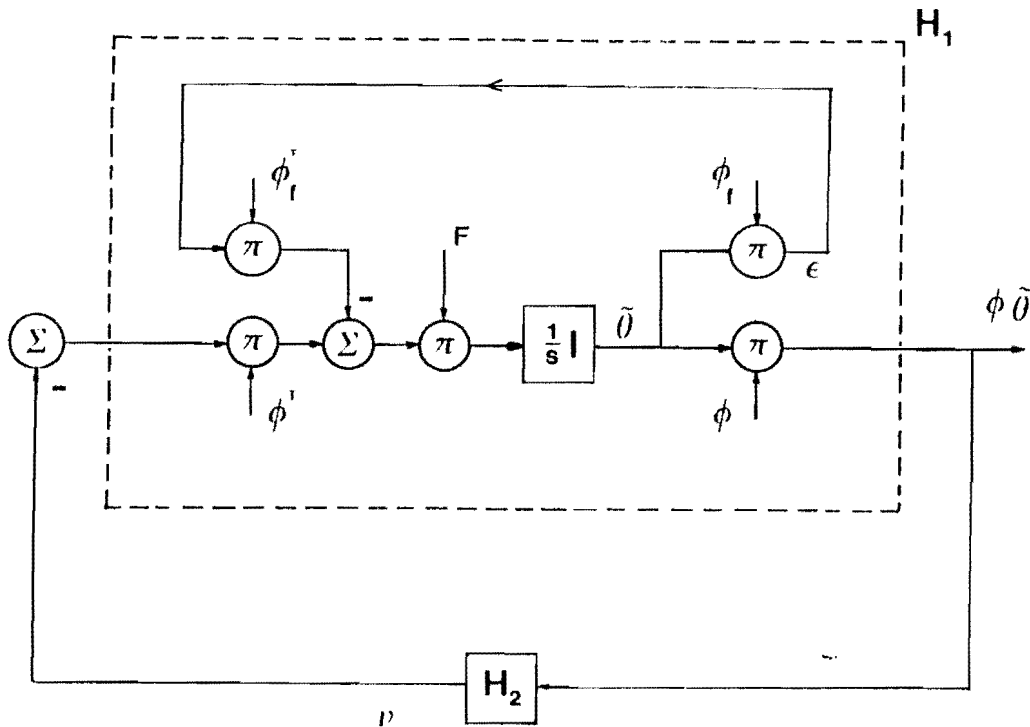


Figura 5.4 Modelo del error.

Observación 5.10 En la figura 5.4 se muestra un diagrama de bloques del modelo del error del sistema adaptable con la ley de adaptación compuesta. Es interesante destacar que el mapa $\nu \rightarrow \phi \tilde{\theta}$ tiene una propiedad que podría

ser útil para el mejoramiento de la robustez. Para verlo, nótese que

$$\phi_f \tilde{\theta} = \begin{bmatrix} \omega \\ p+\omega \end{bmatrix} \phi_{\tilde{\theta}}(t) + \frac{1}{\omega} \phi_f \dot{\tilde{\theta}} \quad (5.34)$$

lo cual, reemplazado en (5.32) da una especie de propiedad de sectoricidad.

Ahora puede presentarse el resultado principal de estabilidad del sistema de control adaptable de movimiento estudiado en esta sección.

Corolario 5.2 Considérese la ley de control (5.20) con las leyes de adaptación (5.25) ó (5.26) en malla cerrada con el modelo del manipulador (5.4). Asíumase que ν y $\phi_{\tilde{\theta}}$ están en L_{2e}^n . Entonces se verifica lo siguiente

- i) $\nu \in L_2^n$
- ii) $\dot{\tilde{q}} \in L_2^n$
- iii) $\tilde{q} \in L_2^n \cap L_\infty^n$
- iv) $\tilde{q}(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$.

vvv

Prueba. La prueba es directa considerando el teorema 5.2 con las proposiciones 5.1-5.3. \square

5.4.4 Resultados de simulación

Se realizaron simulaciones en computadora para mostrar la estabilidad y desempeño del nuevo controlador. El manipulador usado para las simulaciones es el brazo de dos grados de libertad que se mueve en un plano horizontal, descrito en 3.4.2.

Los valores numéricos de los parámetros son,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0.15 & \theta_2 &= 0.04 \\ \theta_3 &= 0.03 & \theta_4 &= 0.025. \end{aligned}$$

Para el diseño del controlador, las matrices K_p y K_v se eligen diagonales,

$$K_p = \text{diag}(K_{p1}, K_{p2}) \quad K_v = \text{diag}(K_{v1}, K_{v2}).$$

La ley de control $\tau = \hat{H} [\ddot{q}_d + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q}] + \hat{C}[\dot{q}-v] + \hat{g}$ puede ser escrita explícitamente en función del vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ como,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \phi_{11} \hat{\theta}_1 + \phi_{13} \hat{\theta}_3 + \phi_{14} \hat{\theta}_4 \\ \tau_2 &= \phi_{22} \hat{\theta}_2 + \phi_{23} \hat{\theta}_3 + \phi_{24} \hat{\theta}_4 \end{aligned} \tag{5.35}$$

donde

$$\phi_{11} = f_{11}; \quad \phi_{13} = C_{21} f_{12} - S_{21} \dot{q}_2 f_{22}; \quad \phi_{14} = S_{21} f_{12} + C_{21} \dot{q}_2 f_{22}$$

$$\phi_{22} = f_{22}; \quad \phi_{23} = C_{21} f_{11} + S_{21} \dot{q}_1 f_{21}; \quad \phi_{24} = S_{21} f_{11} - C_{21} \dot{q}_1 f_{21}$$

con

$$f_{11} = \ddot{q}_{d1} + k_{v1} \dot{\tilde{q}}_1 + k_{p1} \tilde{q}_1$$

$$f_{12} = \ddot{q}_{d2} + k_{v2} \dot{\tilde{q}}_2 + k_{p2} \tilde{q}_2$$

$$f_{21} = \dot{q}_1 - v_1$$

$$f_{22} = \dot{q}_2 - v_2.$$

Los parámetros desconocidos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ son actualizados usando una ley

de adaptación integral con $\Gamma = \text{diag}\{\gamma\}$,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}}_1 &= -\gamma\phi_{11}v_1 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= -\gamma\phi_{22}v_1 \\ \dot{\hat{\theta}}_3 &= -\gamma(\phi_{13}v_1 + \phi_{23}v_2) \\ \dot{\hat{\theta}}_4 &= -\gamma(\phi_{14}v_1 + \phi_{24}v_2)\end{aligned}\tag{5.36}$$

Las trayectorias deseadas duran dos segundos, el primer medio segundo para seguimiento desde las posiciones iniciales hasta las finales, el resto para regulación. Las trayectorias deseadas para la articulación 1 se muestran en la figura 5.5. Las correspondientes a la articulación 2 son constantes, $q_{d2} = 1.745$ rad, $\dot{q}_{d2} = 0$, $\ddot{q}_{d2} = 0$.

Las simulaciones muestran el desempeño del algoritmo de control de las ecuaciones (5.35) y (5.36). Resultados típicos se muestran en las figuras 5.6, 5.7, 5.8 y 5.9 usando los siguientes parámetros de control,

$$K_v = \text{diag}(2k_1, 2k_2); \quad K_p = \text{diag}(k_1^2, k_2^2)$$

con $k_1 = 20$, $k_2 = 30$, $\lambda = 30$ y $\gamma = 0.2$.

Las figuras 5.6 y 5.7 muestran los errores de posición y de velocidad que convergen a cero. Los pares en las articulaciones se muestran en la figura 5.8. Finalmente, la figura 5.9 muestra la evolución de las estimas paramétricas desde valores iniciales nulos.

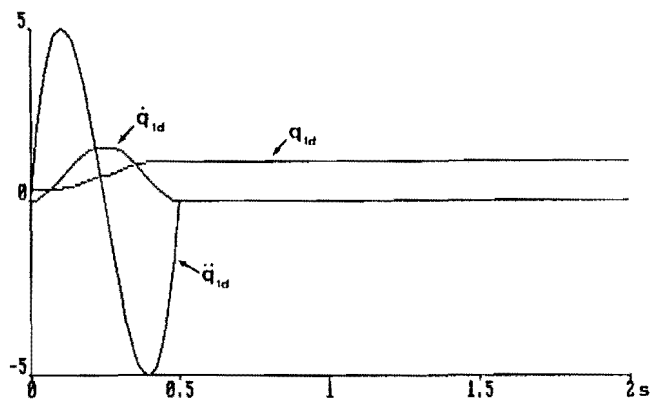


Figura 5.5 Trayectorias deseadas.

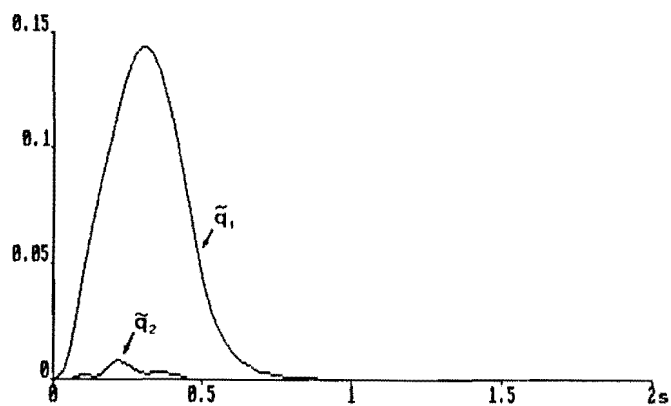


Figura 5.6 Errores de posición.

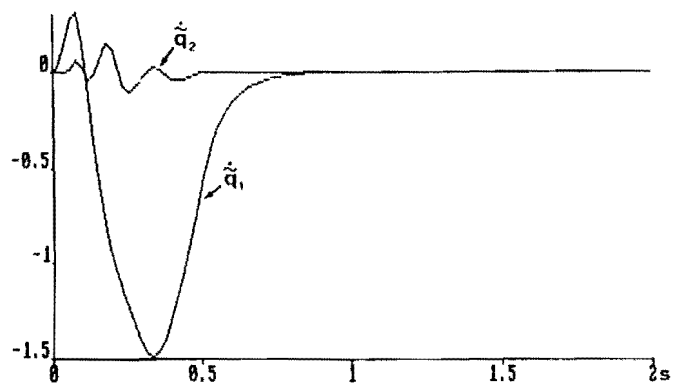


Figura 5.7 Errores de velocidad.

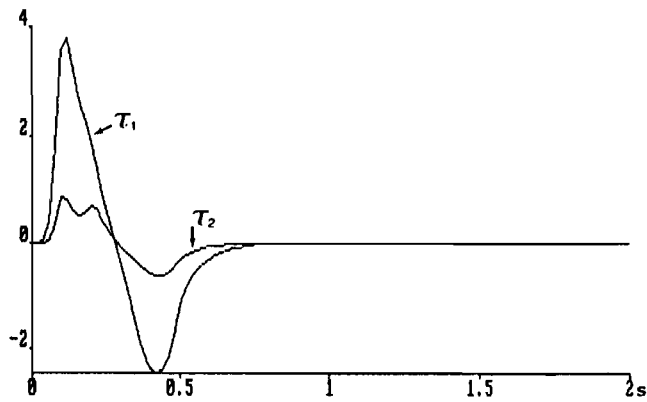


Figura 5.8 Pares articulares.

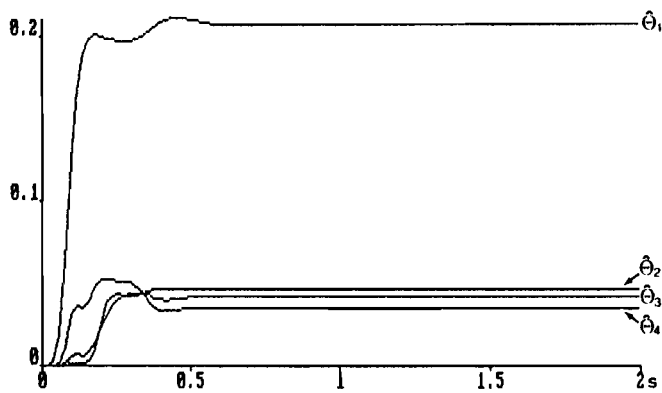


Figura 5.9 Estimaciones paramétricas.

5. A APENDICE: PRUEBA DEL TEOREMA 5.1

Usando (5.1), las ecuaciones (5.2) y (5.3) pueden ser escritas como

$$\langle e_1 | e_2 \rangle_T \geq -\beta_1 \quad (5.37)$$

$$\langle e_2 | -e_1 \rangle_T \geq -\beta_2 + \mu_2 \| -e_1 \|_{2,T}^2 \quad (5.38)$$

para todo $e_1, e_2 \in L_{2e}^n$ y $T \in [0, \infty)$.

Combinando las ecuaciones (5.37) y (5.38),

$$\frac{\beta_1 + \beta_2}{\mu_2} \geq \| -e_1 \|_{2,T}^2$$

donde $(\beta_1 + \beta_2)/\mu_2$ es una constante positiva. Entonces e_1 está en L_2^n . \square

5.B APENDICE: PRUEBA DE LA PROPIEDAD 5.1

Considérese

$$\langle \dot{q} | \tau \rangle_T = \int_0^T \dot{q}^T \tau \, dt = \int_0^T [\dot{q}^T H(q) \ddot{q} + \dot{q}^T C(q, \dot{q}) \dot{q} + \dot{q}^T g(q)] \, dt. \quad (5.39)$$

Obsérvese que

$$\dot{q}^T H(q) \ddot{q} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\dot{q}^T H(q) \dot{q}] - \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{H}(q) \dot{q}$$

donde el término en paréntesis cuadrados es la energía cinética del robot

$$K \triangleq \frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \dot{q} \geq 0.$$

Además, la energía potencial $V \geq 0$ satisface

$$\frac{dV}{dq} = g(q)$$

por consiguiente

$$\dot{q}^T g(q) dt = dV.$$

Reemplazando la ecuación previa en (5.39) y usando la propiedad 3.2 se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \dot{q} | \tau \rangle_T &= K(T) - K(0) + V(T) - V(0) \\ &\geq -K(0) - V(0) \end{aligned}$$

lo que completa la prueba. □

PARTE III:

CONTROL ADAPTABLE DE MANIPULADORES CON INTERACCION CON EL MEDIO

6 INTRODUCCION A LA PARTE III

El control de manipuladores robóticos se puede clasificar en dos categorías: control de manipuladores libres y control de manipuladores vinculados. El control de manipuladores libres, o control de *movimiento libre* es usado cuando el robot se mueve en un espacio libre sin interactuar con el medio. En este caso las especificaciones se dan en términos de una trayectoria de movimiento deseada. El control de manipuladores vinculados o control de *movimiento restringido* está relacionado a manipuladores cuyo extremo interactúa mecánicamente con el medio. La mayoría de las operaciones de ensamble y manufactura requieren interacciones mecánicas con el medio o con el objeto manipulado, así como movimiento rápido en el espacio libre. Se han propuesto diversas soluciones al control de movimiento restringido, como control de impedancia, control de fuerza y control híbrido posición/fuerza.

La idea principal del *control de impedancia*, debida a Hogan (1985), es que el sistema de control del manipulador sea diseñado más que para seguir una trayectoria de movimiento o fuerza puros, para regular la impedancia de interacción del manipulador con el medio. Las especificaciones del control de impedancia consisten en una trayectoria de movimiento deseada y en una relación dinámica deseada entre los errores de posición cartesiana del extremo y las fuerzas de interacción medidas en el extremo. Como referencia adicional véase Goldenberg (1988).

El método de control *híbrido posición/fuerza* fue propuesto por Raibert y Craig (1981). En el mismo la posición del extremo debe ser controlada en ciertas direcciones coordenadas del espacio de trabajo y la fuerza de interacción controlada en las restantes direcciones. Este método determina el control de cada articulación a partir de la combinación de los errores de posición y fuerza. Una matriz denominada de selección, selecciona las coordenadas en las que debe controlarse posición y aquellas que corresponden al control de fuerza. Para una referencia más reciente véase Judd, Perttunen y Mousseau (1987), también Yoshikawa, Sugie y Tanaka

(1987). Aspectos de estabilidad se tratan en Yabuta, Chona, Beni (1988).

En lo que respecta a control de fuerza pura (sin realimentación de posición), se han reportado varias implementaciones y analizado su estabilidad, véase por ejemplo Nevins y Whitney (1973), Eppinger y Seering (1987), An y Hollerbach (1987). Los efectos de fricción se analizan en Townsend y Salisbury (1987). Otros métodos para el control de manipuladores restringidos incluye control de acomodación -acomodation- (Whitney, 1977), control de compliancia -compliance- (Salisbury, 1980; Kazerooni et al., 1986).

El comportamiento dinámico de manipuladores rígidos se describe por ecuaciones diferenciales no lineales de cierto grado de complejidad. La mayoría de las estrategias de control avanzadas se basan en la cancelación exacta de la dinámica no lineal. Sin embargo existe alta incertidumbre en el conocimiento de algunos parámetros dinámicos del manipulador, por ejemplo la inercia de los eslabones, la masa y posición de la carga, (Asada y Slotine, 1985; Spong y Vidyasagar, 1989). La incertidumbre en estos parámetros conduce a una degradación del desempeño y aún a inestabilidades como se reporta en Eppinger y Seering (1987), An y Hollerbach (1987), Fukuda et al. (1987), Yabuta et al. (1988). Esto ha motivado la investigación de *controladores adaptables* para robots, que sean globalmente convergentes.

El control adaptable de movimiento libre fue considerado en la Parte II. En cuanto al control adaptable de manipuladores restringidos, este campo está considerablemente menos desarrollado. En An y Hollerbach (1987) se reconoce la posibilidad de identificar explícitamente la dureza del medio para sintonizar un controlador de fuerza, pero no se propone un algoritmo para hacerlo. En Fukuda et al. (1987) se considera un sistema adaptable de modelo de referencia de tiempo continuo para identificar la característica del medio, sin embargo se trata sólo el modelo lineal de un grado de libertad prismático. En Yabuta et al. (1988) se aplica control adaptable de modelo de referencia de tiempo discreto a un modelo lineal de manipulador

de un grado de libertad, con identificación de la dureza del medio.

En los capítulos correspondientes a esta Parte III se presentan las siguientes *contribuciones*. En el *capítulo 7* se considera el control adaptable de impedancia. Se presentan dos controladores, uno motivado por el algoritmo de control adaptable -par calculado con precompensación- de movimiento descrito en el *capítulo 5* y el otro es una extensión del controlador de Slotine y Li (1987 b'). Ambos controladores sólo requieren medición de posición, velocidad y fuerza. Se demuestra la convergencia global al objetivo de control. En el *capítulo 8* se propone un controlador adaptable híbrido de impedancia/fuerza. Las características principales del mismo son: i) alcanza un objetivo de impedancia en las direcciones libres y uno de fuerza en las direcciones restringidas; ii) se asume que los parámetros dinámicos del manipulador son desconocidos; iii) la adaptación de los parámetros es activada por ambos errores, de posición y de fuerza; iv) el esquema es globalmente convergente en el sentido que los errores de seguimiento convergen a cero. En el mismo capítulo y basado en el esquema anterior, se propone una estructura unificada de control adaptable de manipuladores, la cual mediante la selección adecuada de ciertas matrices puede reducirse a control de movimiento, control de impedancia, control de fuerza o control híbrido de impedancia/fuerza. En el *capítulo 9* se trata el control adaptable de manipuladores en contacto con el medio que son descritos mediante un modelo de sistemas singulares, como el presentado por McClamroch y Wang (1988). Se propone un algoritmo adaptable asumiendo incertidumbre en los parámetros dinámicos del manipulador y se prueban resultados de convergencia global del objetivo de movimiento y de acotamiento global del objetivo de fuerza. Finalmente, en el *capítulo 10* se presenta un controlador adaptable de fuerza pura que alcanza en forma asintótica global un objetivo de seguimiento de fuerza bajo las siguientes condiciones: i) se asume que los parámetros dinámicos del modelo no lineal del manipulador son desconocidos; ii) la dureza del medio es desconocida; iii) sólo se mide posición, velocidad y fuerza de interacción con el medio. Además de tratar el caso general de manipuladores de n grados de libertad, se presta particular atención al caso de un grado de libertad. Este caso,

además de no ser trivial, presenta un amplio campo de aplicaciones de interés, si se considera como la última articulación o simplemente la garra del manipulador.

7. CONTROL ADAPTABLE DE IMPEDANCIA

7.1 RESUMEN (ABSTRACT)

Resumen. Las especificaciones de impedancia para manipuladores robóticos se dan aquí en términos de una trayectoria de movimiento deseada y una relación dinámica entre los errores de posición y las fuerzas de interacción. En este capítulo se propone aplicar el control adaptable al control de impedancia de manipuladores, a fin de reducir la sensibilidad del diseño debida a incertidumbres paramétricas del modelo del robot. Se presentan dos controladores que alcanzan globalmente un objetivo de impedancia para el modelo dinámico no lineal de manipuladores rígidos.

Abstract. (*Adaptive impedance control*) Impedance control specifications for robot manipulators are given here in terms of a desired motion trajectory and a desired dynamic relationship between position errors and interaction forces. An adaptive implementation is proposed here as an alternative to reduce the design sensitivity due to model-manipulator parameter mismatch. Two adaptive controllers that globally achieve the impedance objective for the general nonlinear dynamic model are presented in this chapter.

7.2 FORMULACION DEL PROBLEMA

Para el diseño de los controladores en este capítulo, se considera el modelo cartesiano de manipuladores rígidos sin fricción de n grados de libertad y vinculados (ecuación 3.42), que incluye la fuerza F de interacción con el medio,

$$H^*(x)\ddot{x} + C^*(x, \dot{x})\dot{x} + g^*(x) + F = J^{-T}\tau \quad (7.1)$$

y las propiedades mencionadas en 3.3.2 del capítulo 3.

Ahora puede formularse el problema de control adaptable de impedancia del siguiente modo. Considérese el manipulador robótico descrito por (7.1). El vector de parámetros dinámicos θ -propiedad 3.8- del manipulador y la carga es constante y desconocido. La matriz jacobiana $J(q)$ se asume conocida y no singular. El conocimiento de $J(q)$ no es restrictivo pues no depende de los parámetros dinámicos del manipulador. Las especificaciones del control de impedancia se dan en términos de una trayectoria deseada de movimiento y una relación dinámica deseada entre el error de posición

$$e(t) \triangleq x_d(t) - x(t) \quad (7.2)$$

y la fuerza de interacción con el medio $F(t)$ medida en el extremo del manipulador. El manipulador puede o no interactuar con el medio. El problema de control de impedancia puede establecerse como el de diseñar un controlador que calcule los pares de acción de control τ en las articulaciones, de manera que se verifique el siguiente objetivo de control,

$$x_d(t) - x(t) \rightarrow - [p^2 M_m + p B_m + K_m]^{-1} F(t) \quad \text{con } t \rightarrow \infty$$

donde x_d es la trayectoria deseada de movimiento en el espacio cartesiano, $p=d/dt$, M_m , B_m y K_m son matrices diagonales $n \times n$ y definidas positivas de valor arbitrario. Si se define el error auxiliar ξ o error de impedancia como,

$$\xi = e + [p^2 M_m + p B_m + K_m]^{-1} F \quad (7.3)$$

entonces el objetivo de control se verifica si $\xi(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$.

7.3. CONTROLADOR ADAPTABLE DE IMPEDANCIA I

El controlador de impedancia I está motivado por el controlador de

movimiento presentado en el capítulo 5, sección 5.4.

7.3.1 Ley de control I

El controlador adaptable de impedancia que se propone para resolver el problema formulado en 7.2 consiste en una ley de control y una ley de adaptación. La ley de control está dada por,

$$\tau = J^T \left[\hat{H}(\ddot{x}_d + M_m^{-1}(B_m \dot{e} + K_m e + F)) + \hat{C}[\dot{x} - \nu] + \hat{g} + F \right] \quad (7.4)$$

$$\nu = -\frac{1}{p+\lambda} M_m^{-1} [M_m \ddot{\xi} + B_m \dot{\xi} + K_m \xi] \quad (7.5)$$

donde \hat{H} , \hat{C} y \hat{g} representan matrices con la misma estructura funcional que $H^*(x)$, $C^*(x, \dot{x})$ y $g^*(x)$ respectivamente pero evaluadas con el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$, λ es un escalar positivo y e es el error de seguimiento de posición en el espacio cartesiano, dado por (7.2). Nótese que de (7.5),

$$\dot{\nu} + \lambda \nu = -\ddot{\xi} - M_m^{-1} (B_m \dot{\xi} + K_m \xi). \quad (7.6)$$

Desde un punto de vista práctico, ν puede ser implementado por

$$\nu = -\frac{p}{p+\lambda} \dot{\xi} - \frac{1}{p+\lambda} M_m^{-1} (B_m \dot{\xi} + K_m \xi).$$

donde se ha obviado la medición de aceleración. De acuerdo a la propiedad 3.8, la ley de control (7.4) puede ser escrita como,

$$\tau = J^T [\phi \hat{\theta} + F] \quad (7.7)$$

con

$$\hat{\phi}\theta = \hat{H}\left[\ddot{x}_d + M_m^{-1}(B_m\dot{e} + K_m e + F)\right] + \hat{C}[\dot{x}-v] + \hat{g}. \quad (7.8)$$

En (7.8), ϕ es una matriz $n \times m$ cuyos elementos dependen de x , \dot{x} , x_d , \dot{x}_d , \ddot{x}_d , F y v . El vector de error paramétrico se denotará como $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$, donde θ contiene los parámetros dinámicos desconocidos y que son supuestos constantes.

7.3.2 Ley de adaptación

Para actualizar el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ se considerará una ley integral (Anderson et al., 1986),

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma\phi^T v \quad (7.9)$$

donde $\Gamma = \Gamma^T$ es la matriz $m \times m$ definida positiva de ganancia de adaptación. La ley (7.9) se usa en la mayoría de los sistemas adaptables de tiempo continuo (Anderson et al., 1986). También podría considerarse otras estructuras, como proporcional e integral (Landau y Horowitz, 1988) o compuesta (Slotine y Li, 1987c).

7.3.3 Resultados principales

A continuación se resumen las propiedades principales del controlador propuesto.

Proposición 7.1 Considérese la ley de control (7.4) con la ley de adaptación (7.9) en malla cerrada con el manipulador (7.1). Se verifican las siguientes propiedades.

a) $\tilde{\theta} \in L_\infty^m$

$$b) \nu \in L_2^n \cap L_\infty^n$$

$$c) \xi, \dot{\xi} \in L_2^n \cap L_\infty^n$$

$$d) \xi(t) \rightarrow 0 \text{ con } t \rightarrow \infty.$$

∇∇∇

Prueba. Para realizar el análisis de estabilidad se requiere expresar las ecuaciones del sistema en malla cerrada en forma de lo que se denomina modelo del error (Anderson et al., 1986). El sistema en malla cerrada se obtiene combinando (7.1) y (7.4),

$$H^*(x)\ddot{x} + C^*(x, \dot{x})\dot{x} + g^*(x) + F = \phi(\tilde{\theta} + \theta) + F. \quad (7.10)$$

En base a (7.8) se puede escribir $\phi\theta$ como

$$\phi\theta = H^* \left[\ddot{x}_d + M_m^{-1}(B_m \dot{e} + K_m e + F) \right] + C^*[\dot{x} - \nu] + g^*$$

por lo que (7.10) resulta

$$H^*(x)M_m^{-1}(M_m \ddot{e} + B_m \dot{e} + K_m e + F) - C^*(x, \dot{x})\nu = -\phi\tilde{\theta}. \quad (7.11)$$

Sustituyendo (7.3) y (7.6) en (7.11) se obtiene

$$H^*[\dot{\nu} + \lambda\nu] + C^*[\nu] = \phi\tilde{\theta}. \quad (7.12)$$

Ahora, de la ley de adaptación (7.9),

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma\phi^T\nu \quad (7.13)$$

pues θ es un vector constante. Las ecuaciones (7.12) y (7.13) definen el modelo del error. Considérese la función no negativa

$$V(t) = \frac{1}{2}[\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\tilde{\theta} + \nu^T H^*\nu] \quad (7.14)$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias de (7.12) y (7.13) es

$$\dot{V}(t) = -\lambda v^T \dot{H} v \leq 0 \quad (7.15)$$

donde se ha usado la propiedad 3.9 para eliminar el término $v^T(\dot{H}^*/2 - C^*)v$. Las ecuaciones (7.11) y (7.15) implican $\tilde{\theta} \in L_\infty^m$ y $v \in L_\infty^n$. Usando la propiedad 3.10-b y (7.15) se concluye que $v \in L_2^n$.

De (7.5) se tiene

$$\xi = - (p^2 M_m + p B_m + K_m)^{-1} M_m (p + \lambda) v. \quad (7.16)$$

Como se ha demostrado que $v \in L_2^n \cap L_\infty^n$ y la ecuación (7.16) representa un sistema estrictamente propio y exponencialmente estable, del teorema 2.2 se concluye que $\xi, \dot{\xi} \in L_2^n \cap L_\infty^n$ y $\xi(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$. \square

7.4. CONTROLADOR ADAPTABLE DE IMPEDANCIA II

El controlador adaptable de impedancia II está motivado por el controlador propuesto por Slotine y Li (1987b').

7.4.1 Ley de control II

La extensión de la ley de control de Slotine y Li (1987b') al control adaptable de impedancia es

$$\tau = J^T \left[\hat{H} \ddot{x}_r + \hat{C} \dot{x}_r + \hat{g} - K_D s + F \right] \quad (7.17)$$

$$s = - \left[\dot{\xi} + \Lambda \xi \right] \quad (7.18)$$

$$\dot{x}_r = \dot{x} - s \quad (7.19)$$

donde \hat{H} , \hat{C} y \hat{G} son los estimados de $H^*(x)$, $C^*(x, \dot{x})$ y $g^*(x)$ respectivamente, Λ es una matriz $n \times n$ cuyos valores propios están estrictamente en el semiplano complejo derecho, K_D es una matriz $n \times n$ definida positiva posiblemente variante en el tiempo y e está definido por (7.2).

Desde un punto de vista práctico, \dot{x}_r en (7.19) y \ddot{x}_r en (7.17) puede implementarse mediante

$$\dot{x}_r = \dot{x}_d + \Lambda e + (pI + \Lambda)(p^2 M_m + pB_m + K_m)^{-1} F$$

$$\ddot{x}_r = \ddot{x}_d + \Lambda \dot{e} + p(pI + \Lambda)(p^2 M_m + pB_m + K_m)^{-1} F.$$

Nótese que la ley de control (7.17) -semejantemente al controlador I- no requiere la medición de la aceleración.

El controlador (7.17)-(7.19) se reduce al controlador de movimiento propuesto en Slotine y Li (1987b') cuando $F(t) \equiv 0$, o sea cuando el robot se mueve en el espacio libre.

Debido a la propiedad 3.8, la ley de control (7.17) puede escribirse

$$\tau = J^T [\phi \hat{\theta} - K_D s + F]$$

con

$$\phi \hat{\theta} = \hat{H}[\ddot{x}_r] + \hat{C}[\dot{x}_r] + \hat{g}. \quad (7.20)$$

7.4.2 Ley de adaptación

Para actualizar el vector de estima paramétrica $\hat{\theta}$ se considerará, como para el controlador I, una ley de adaptación integral

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma \phi^T s \quad (7.21)$$

donde $\Gamma = \Gamma^T$ es la matriz $m \times m$ definida positiva de ganancia de adaptación.

7.4.3 Resultados principales

A continuación se dan las propiedades principales del controlador adaptable de impedancia II.

Proposición 7.2 Considérese la ley de control (7.17) y la ley de adaptación (7.21) en malla cerrada con el manipulador (7.1). Se verifican las siguientes propiedades.

a) $\tilde{\theta} \in L_{\infty}^m$

b) $s \in L_2^n \cap L_{\infty}^n$

c) $\xi, \dot{\xi} \in L_2^n \cap L_{\infty}^n$

d) $\xi(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$.

VVV

Prueba. El sistema en malla cerrada se obtiene combinando (7.1) y (7.17),

$$H^*(x)\ddot{x} + C^*(x, \dot{x})\dot{x} + g^*(x) + F = \phi(\tilde{\theta} + \theta) - K_D s + F. \quad (7.22)$$

En base a (7.20) se puede escribir $\phi\theta$ como

$$\phi\theta = H^*[\ddot{x}_r] + C^*[\dot{x}_r] + g^*.$$

Entonces, (7.22) queda

$$H^*[\ddot{x} - \ddot{x}_r] + C^*[\dot{x} - \dot{x}_r] + K_D s = \phi\tilde{\theta}$$

y usando (7.19) se obtiene

$$H^* \dot{s} + C^* s + K_D s = \phi \tilde{\theta}. \quad (7.23)$$

Ahora, observando que $\tilde{\theta} = \hat{\theta}$ desde que θ fue supuesto constante, la ley de adaptación (7.21) conduce a

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma \phi^T s. \quad (7.24)$$

Las ecuaciones (7.23) y (7.24) definen el modelo del error. Considérese la función no negativa

$$V(t) = \frac{1}{2} [\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + s^T H^* s] \quad (7.25)$$

cuya derivada temporal a lo largo de las trayectorias de (7.23) y (7.24) es

$$\dot{V}(t) = -s^T K_D s \leq 0 \quad (7.26)$$

donde se ha utilizado la propiedad 3.9 para eliminar el término $s^T (\dot{H}^*/2 - C^*)s$. Las ecuaciones (7.25) y (7.26) implican que $\tilde{\theta} \in L_\infty^m$ y $s \in L_\infty^n$. Como la matriz K_D fue elegida definida positiva, de (7.26) se concluye que $s \in L_2^n$. Ahora, de (7.18) se tiene

$$\xi = -(pI + \Lambda)^{-1} s \quad (7.26)$$

que describe un sistema estrictamente propio y exponencialmente estable. Finalmente, como $s \in L_2^n \cap L_\infty^n$, usando el teorema 2.2 y (7.26) se concluye que $\xi, \dot{\xi} \in L_2^n \cap L_\infty^n$ y $\xi(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$. \square

7.5 RESULTADOS DE SIMULACION

Se realizaron simulaciones en computadora para mostrar el desempeño del control. Para las simulaciones se utilizó un manipulador de dos grados de libertad que se mueve en un plano vertical, figura 7.1. Este manipulador es

descrito en la sección 3.4.3 del capítulo 3.

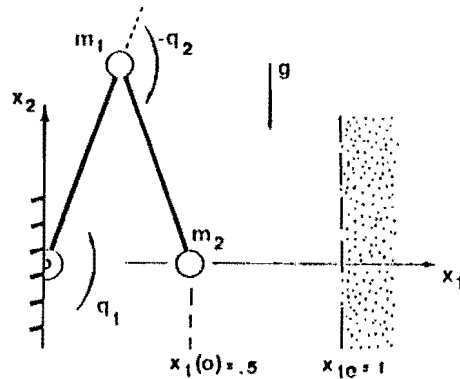


Figura 7.1 Manipulador y medio.

El modelo dinámico incluyendo la interacción con el medio es,

$$\begin{aligned} \tau_1 = & m_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 C_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + (m_1 + m_2)\ddot{q}_1 - m_2 S_2 \dot{q}_2^2 \\ & - 2m_2 S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_2 g S_{12} + (m_1 + m_2)g S_1 + J_{11} f_1 + J_{21} f_2 \\ \tau_2 = & m_2 C_2 \dot{q}_1 + m_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 S_2 \dot{q}_1^2 + m_2 g S_{12} + J_{12} f_1 + J_{22} f_2 \end{aligned} \quad (7.27)$$

donde f_1 , f_2 son los componentes cartesianos de la fuerza en el extremo del manipulador y J_{11} , J_{12} , J_{21} , J_{22} los elementos del jacobiano. Los valores numéricos de las masas se toman $m_1 = 4$ y $m_2 = 2$. Se asume que m_1 y m_2 son desconocidos.

El vector de la ley de control

$$\tau = \hat{H}J^{-1}[\ddot{x}_d + M^{-1}(B\dot{e} + Ke + F) - \dot{J}\dot{q}] + \hat{C}(\dot{q} - \nu) + \hat{g} + J^T F \quad (7.28)$$

puede escribirse explícitamente en términos del vector de parámetros $\hat{\theta} =$

$$[\hat{\theta}_1 \ \hat{\theta}_2]^T = [\hat{m}_1 \ \hat{m}_2]^T \text{ como,}$$

$$\tau_2 = \phi_{11}^{\wedge} \theta_1 + \phi_{12}^{\wedge} \theta_2 + j_{11} f_1 + j_{21} f_2$$

$$\tau_2 = \phi_{21}^{\wedge} \theta_1 + \phi_{22}^{\wedge} \theta_2 + j_{12} f_1 + j_{22} f_2 \quad (7.29)$$

donde

$$\phi_{11} = r_{11} + gS_1$$

$$\phi_{12} = 2(1+C_2)r_{11} + (1+C_2)r_{12} - S_2 \dot{q}_2 r_{21} - S_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) r_{22} + g(S_1 + S_{12})$$

$$\phi_{21} = 0$$

$$\phi_{22} = (1+C_2)r_{11} + r_{12} + S_2 \dot{q}_1 r_{21} + gS_{12}$$

Aquí, de acuerdo a la ecuación (7.28),

$$r_1 = [r_{11} \ r_{12}]^T = J^{-1}[\ddot{x}_d + M^{-1}(B\dot{e} + Ke + F) - \dot{J}\dot{q}]$$

$$r_2 = [r_{21} \ r_{22}]^T = (\dot{q} - v).$$

Los parámetros desconocidos θ_1 , θ_2 se actualizan usando una ley de adaptación integral con $\Gamma = \text{diag}(\gamma)$,

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma \phi_{11} v_1$$

$$\dot{\theta}_2 = -\gamma (\phi_{12} v_1 + \phi_{22} v_2). \quad (7.30)$$

La simulación está diseñada del siguiente modo, véase la figura 7.1. Las

trayectorias deseadas duran cuatro segundos, los primeros dos para movimiento en el espacio libre, los restantes para control de impedancia en condiciones de interacción. La interacción con el medio se modela como,

$$f_1 = - (b_e \dot{x}_1 + k_e (x_1 - x_{1e})) \text{ si } x_1 > x_0, \text{ de otro modo } f_1 = 0$$

$$f_2 = 0 \text{ (no hay interacción en el eje } x_2 \text{)}.$$

Para la simulación se utilizan los siguientes parámetros de diseño,

$$M = \text{diag}(m), \quad m=1$$

$$B = \text{diag}(b), \quad b=10$$

$$K = \text{diag}(k), \quad k=25$$

$$\Gamma = \text{diag}(\gamma), \quad \gamma=0.2.$$

Las condiciones iniciales del manipulador son

$$x(0) = [0.5 \ 0]^T \quad ; \quad \dot{x}(0) = 0 \quad ; \quad \ddot{x}(0) = 0.$$

Las trayectorias deseadas se muestran en la figura 7.2, conjuntamente con las trayectorias obtenidas con el control adaptable. Está claro que el objetivo de control de impedancia se reduce a uno de movimiento durante los primeros dos segundos de movimiento en el espacio libre. Luego, la trayectoria deseada x_{1d} diverge de la real x_1 de modo de alcanzar el objetivo de impedancia.

En las figuras 7.3 y 7.4 se muestra la convergencia a_cero del error de impedancia ξ y su derivada temporal $\dot{\xi}$. La figura 7.5 muestra los pares aplicados por los actuadores en las articulaciones. Finalmente la figura 7.6 representa la evolución temporal de los parámetros estimados $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ desde valores iniciales nulos.

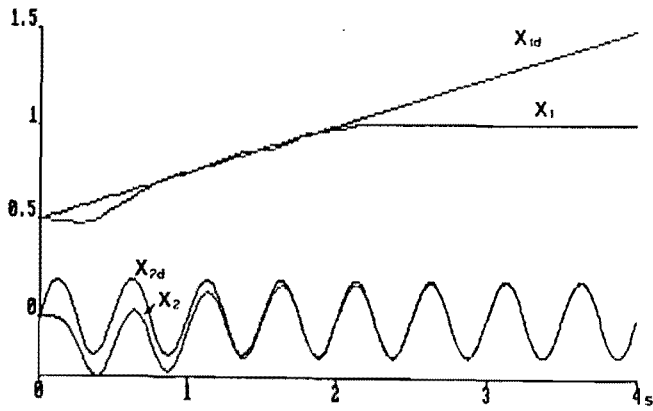


Figura 7.2 Trayectorias deseadas y reales.

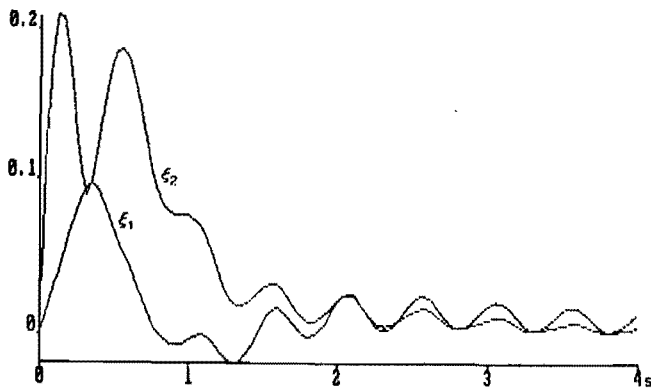


Figura 7.3 Evolución del error de impedancia.

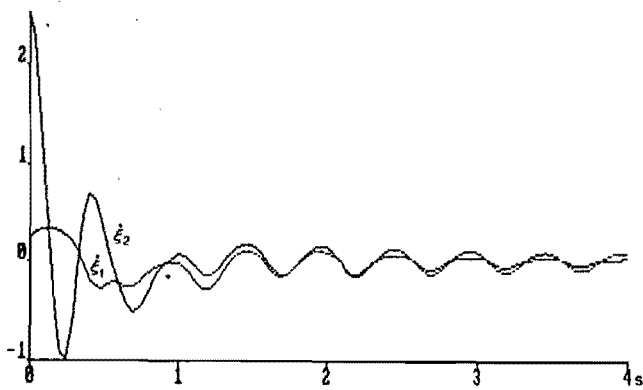


Figura 7.4 Evolución de la derivada del error de impedancia.

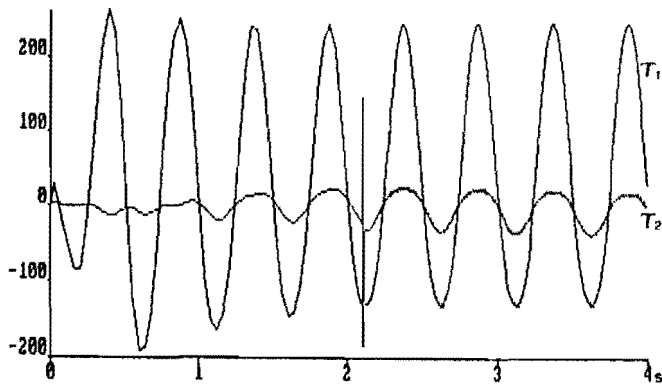


Figura 7.5 Pares aplicados.

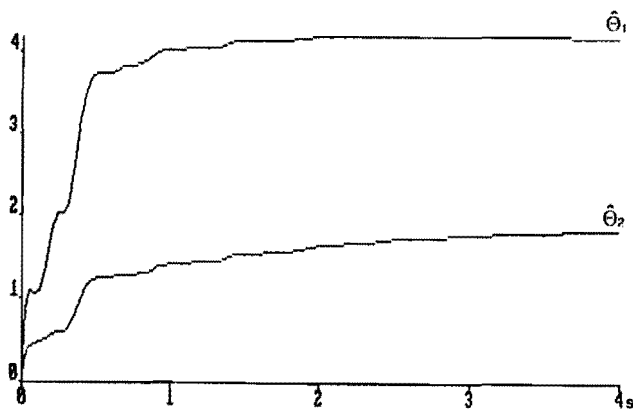


Figura 7.6 Estimias paramétricas.

8. ESTRUCTURA UNIFICADA DE CONTROL ADAPTABLE

8.1 RESUMEN (ABSTRACT)

Resumen. Este capítulo contiene dos contribuciones. Primero, se presenta un controlador adaptable híbrido de impedancia/fuerza para manipuladores rígidos. El sistema de control híbrido puede alcanzar objetivos de control de impedancia en las direcciones de movimiento libre y de fuerza en las direcciones restringidas, con incertidumbre en los parámetros dinámicos del manipulador. Se demuestra que el esquema propuesto es asintóticamente convergente en el sentido que los objetivos de control se alcanzan asintóticamente. En segundo término, se presenta un esquema unificado para el control adaptable de manipuladores. Se propone una estructura general de control la que, por selección adecuada de matrices de diseño, puede reducirse a control adaptable de movimiento, de impedancia, de fuerza o híbrido.

Abstract. This chapter presents two contributions. First, an adaptive hybrid impedance/force controller for rigid robot manipulators is presented. The hybrid control system is able to accomplish impedance objectives in free directions and force objectives in constrained directions under parametric uncertainty in robot dynamics. The proposed scheme is shown to achieve the control objectives asymptotically. As a second contribution -based on the first one-, an unified approach for adaptive control of robotic manipulators is presented. A general control law structure is proposed which reduces, by a suitable choice of some design matrices, to adaptive motion, impedance, force or dynamic hybrid control.

8.2. CONTROL ADAPTABLE HIBRIDO IMPEDANCIA/FUERZA

8.2.1 Formulación del problema

En este capítulo se considera el *modelo* dinámico cartesiano de manipuladores rígidos de n grados de libertad, sin fricción y restringidos (ec. 3.42),

$$H^*(x)\ddot{x} + C^*(x, \dot{x})\dot{x} + g^*(x) + F = J^{-T}\tau. \quad (8.1)$$

La interpretación de la ecuación 8.1 así como las *propiedades* de este modelo se dan en 3.3 y 3.6 del capítulo 3.

Siguiendo a Raibert y Craig (1981) y a Slotine y Li (1987b'), se definen dos sistemas coordenados. El primero -ya definido para el modelo (8.1)- es el *sistema de referencia* R_o fijo en la base del robot, el que define un espacio cartesiano denominado el espacio operacional. En este espacio se representa la configuración del extremo del manipulador mediante el vector x , compuesto de la posición cartesiana y de los ángulos de Euler del extremo. El segundo sistema coordenado es el *sistema de las restricciones* o coordenadas de las restricciones R_c ("constraint coordinates"), el que define el espacio de tareas y es usado para describir las tareas del robot. Este sistema está naturalmente definido por las así denominadas restricciones naturales, de modo que las coordenadas están asociadas con las direcciones de movimiento libre y de movimiento restringido en el espacio de trabajo. Sin pérdida de generalidad, se asume que ambos sistemas coordenados R_o y R_c tienen el mismo origen. En general el sistema R_c puede ser variante con el tiempo. Ahora las especificaciones pueden darse en las coordenadas de las restricciones: especificaciones de movimiento en las direcciones libres y especificaciones de fuerza en las direcciones restringidas.

A continuación se da la *nomenclatura* que se usa en este capítulo. Se denomina por x , \dot{x} , \ddot{x} la posición, la velocidad y la aceleración del extremo

del robot especificados en el sistema R_o . F es la fuerza de interacción entre el medio y el extremo especificada en el mismo sistema R_o . Nótese que por *posición* se interpreta posición y orientación y por *fuerza*, fuerza y par. En el sistema de restricciones R_c , la posición, la velocidad y la aceleración se expresan mediante x_c , \dot{x}_c , \ddot{x}_c y la fuerza por F_c . Las referencias de posición y de fuerza especificadas en el mismo sistema se representan por x_{cd} , \dot{x}_{cd} , \ddot{x}_{cd} , F_{cd} , \dot{F}_{cd} , \ddot{F}_{cd} .

Para las derivaciones que se harán más adelante, se requiere definir una *matriz de transformación* $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ entre los sistemas de coordenadas operacional y de restricciones. Esta matriz, una matriz de rotación, está definida por la superficie de interacción y es provista por el *planeador de tareas*. En general, $R=R(t)$ es variante con el tiempo y se asume que R y \dot{R} están acotadas y que R tiene su valor singular mínimo fuera de un entorno de cero (lo último implica que $R^{-1}=R^T$ está acotada). También se asume que \dot{R}^T y \ddot{R}^T existen y están acotadas. La última condición se satisface naturalmente si la superficie de restricción es suave. Se verifican las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned} x_c &= R^T(t) x \\ \dot{x}_c &= \dot{R}^T(t) x + R^T(t) \dot{x} \\ \ddot{x}_c &= \ddot{R}^T(t) x + 2 \dot{R}^T(t) \dot{x} + R^T(t) \ddot{x} \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$\begin{aligned} F_c &= R^T(t) F \\ \dot{F}_c &= \dot{R}^T(t) F + R^T(t) \dot{F}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Para la formulación del problema, $R(t)$ se asume perfectamente conocida.

También se define la *matriz de selección* (Raibert y Craig, 1981) $S = \text{diag}_{(n \times n)} \{s_i\}$, que es constante y sirve para especificar cuáles coordenadas en R_c están bajo control de fuerza (indicado por $s_i=0$), y cuáles bajo control de impedancia (indicado por $s_i=1$). La matriz S premultiplicando un vector en coordenadas de restricciones, preserva sus componentes en las

direcciones libres y anula los otros. El efecto complementario es producido por la matriz $S'=(I_n-S)$, donde I_n representa la matriz unitaria $n \times n$.

Ahora es necesario considerar el modelo de interacción que genera las fuerzas de reacción en el extremo del manipulador (véase 3.5). El medio es modelado mediante una matriz de rigidez K_e como,

$$F_c = K_e [x - x_e]_c \quad (8.4)$$

donde $x_e(t)$ es la posición del punto de contacto del extremo con el medio sin deformar. Se asume que K_e es conocida. Similarmente, podría considerarse el medio rígido, como es el caso en aplicaciones de ensamble o de pulido. En éste caso el modelo (8.4) está asociado con el sensor de fuerza cuya matriz de rigidez es K_e . Tomando las derivadas temporales de (8.4) se obtiene,

$$\dot{F}_c = K_e (\dot{x}_c - \dot{x}_{ec}) \quad (8.5)$$

$$\ddot{F}_c = K_e (\ddot{x}_c - \ddot{x}_{ec}). \quad (8.6)$$

A continuación se formula el *problema de control adaptable híbrido* de impedancia/fuerza. Considérese el manipulador descrito por (8.1). El vector de parámetros dinámicos θ -de la propiedad 3.8, cap. 3- del manipulador y la carga es constante pero desconocido. La matriz jacobiana del robot $J(q)$ se asume conocida. El conocimiento de $J(q)$ no es restrictivo pues ésta no depende de los parámetros dinámicos. Las especificaciones de control híbrido de impedancia/fuerza están dadas en términos de la trayectoria de movimiento deseada $x_{cd}(t)$ y una relación dinámica deseada entre el error de posición y la fuerza medida en el extremo del robot -si existe- en las direcciones libres, así como de una trayectoria deseada de fuerza $F_{cd}(t)$ en las direcciones restringidas. El problema de control adaptable híbrido se establece como el de diseñar una ley de control y una ley de adaptación de parámetros para calcular los pares de acción de control τ en las articulaciones, tal que se verifiquen los siguientes

objetivos de control,

$$a) S(x_{cd}(t) - x_c(t)) \rightarrow -[M_m p^2 + B_m p + K_m]^{-1} S F_c(t) \text{ con } t \rightarrow \infty \quad (8.7)$$

$d = d/dt$

en las direcciones no restringidas, y

$$b) S'(F_{cd}(t) - F_c(t)) \rightarrow 0 \text{ con } t \rightarrow \infty. \quad (8.8)$$

en las direcciones restringidas.

Observación 8.1 El objetivo de control a) representa un objetivo de impedancia, donde M_m , B_m , K_m son matrices diagonales definidas positivas que especifican la relación dinámica deseada entre las fuerzas de interacción -si existen- y los errores de posición en las direcciones no restringidas. El controlador híbrido de impedancia/fuerza es una extensión del controlador de movimiento/fuerza en el sentido de que el primero contempla fuerzas de interacción que eventualmente pueden aparecer en las direcciones (supuestas) no restringidas, especificando un objetivo como a). Si no aparecen fuerzas en esas direcciones, el controlador híbrido se reduce a uno de movimiento/fuerza. □

8.2.2 Controlador adaptable

Considérese la estructura de controlador de la figura 8.1. Aquí se reconocen dos mallas de realimentación independientes: una para controlar impedancia en las direcciones libres del sistema de restricciones R_c , y la otra para controlar fuerza en las direcciones restringidas. Aún cuando esta idea básica se debe a Raibert y Craig (1981), la estructura particular presentada aquí permite la extensión al caso de control adaptable.

El controlador adaptable para resolver el problema de control híbrido de impedancia/fuerza consta de una ley de control y una ley de adaptación de

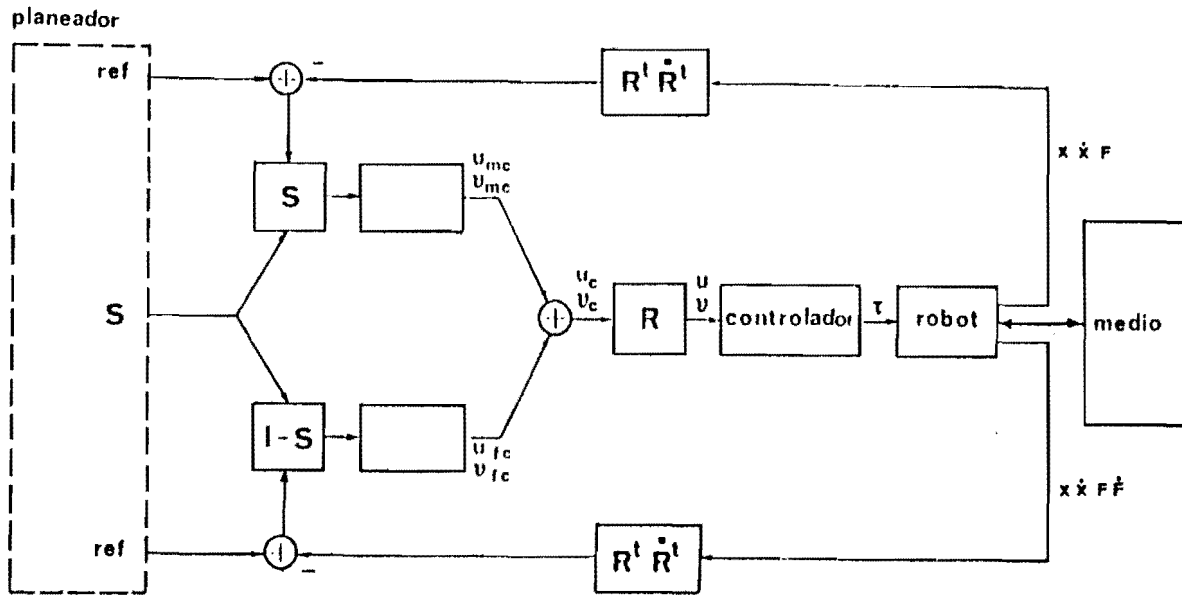


Fig. 8.1 Estructura de control.

parámetros. La ley de control es,

$$J^{-T} \tau := \hat{H}[u - R\hat{R}^T x - 2R\hat{R}^T \dot{x} - \dot{R}\hat{R}^T v] + \hat{C}[\dot{x} - v] + \hat{g} + F \quad (8.9)$$

donde \hat{H} , \hat{C} , \hat{G} tienen la misma estructura funcional que $H(x)$, $C(x)$ and $g(x)$ respectivamente aunque calculadas con los parámetros estimados $\hat{\theta}$. Los vectores de señal u , v están relacionados con los correspondientes vectores expresados en el sistema de restricciones R_c por la transformación R ,

$$\begin{aligned} u &= R(t) u_c \\ v &= R(t) v_c \end{aligned} \quad (8.10)$$

donde u_c y v_c se obtiene de los lazos de control de impedancia y fuerza como,

$$\begin{aligned} u_c &= u_{mc} + u_{fc} \\ v_c &= v_{mc} + v_{fc} \end{aligned} \quad (8.11)$$

Los vectores u_{mc} , v_{mc} se definen como,

$$u_{mc} := \ddot{x}_{cd} + M_m^{-1} [B_m \dot{e}_{xc} + K_m e_{xc} + S F_c] \quad (8.12)$$

$$v_{mc} := -(p+\lambda)^{-1} M_m^{-1} [M_m \ddot{\xi} + B_m \dot{\xi} + K_m \xi] \quad (8.13)$$

con el error de impedancia,

$$\xi = e_{xc} + [M_m p^2 + B_m p + K_m]^{-1} S F_c. \quad (8.14)$$

Asimismo, los vectores u_{fc} , v_{fc} se calculan como,

$$u_{fc} = S' K_e^{-1} [\ddot{F}_{cd} + K_e S' \ddot{x}_{ec} + M_f^{-1} (B_f \dot{e}_{fc} + K_f e_{fc})] \quad (8.15)$$

$$v_{fc} = -(p+\lambda)^{-1} S' K_e^{-1} M_f^{-1} [M_f \ddot{e}_{fc} + B_f \dot{e}_{fc} + K_f e_{fc}] \quad (8.16)$$

donde $x_{ec}(t)$ representa la posición del punto de la restricción (sin deformar) que está interactuando con el extremo del manipulador, expresado en las coordenadas de las restricciones R_c . Se asume que el mismo es conocido. En Judd et al. (1987) se presenta una metodología para determinar x_{ec} . En las expresiones (8.11)-(8.16), $e_{xc} = S(x_{cd} - x_c)$ y $e_{fc} = S'(F_{cd} - F_c)$ son los errores de posición y fuerza respectivamente, expresados en las coordenadas de las restricciones. Además λ es un escalar positivo de diseño y M_m , B_m , K_m , M_f , B_f , K_f son matrices de diseño $n \times n$ diagonales y definidas positivas. K_e representa la matriz $n \times n$ de rigidez. Nótese que x_c , \dot{x}_c , F_c , \dot{F}_c se obtienen de los valores medidos q , \dot{q} , F , \dot{F} usando la relación -conocida- $x=f(q)$ entre x y q , y las ecuaciones (8.2) y (8.3). Debido a la propiedad 3.8, la ley de control (8.9) puede expresarse como

$$J^{-T} \tau = \phi(x, \dot{x}, u, v, R, R^T, \hat{R}^T) \hat{\theta} + F \quad (8.17)$$

donde $\phi \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es una matriz de señales (regresor) y $\theta \in \mathbb{R}^m$ es el vector de estima de parámetros. En (8.17), τ representa la acción de control, esto

es, los pares por aplicar en las juntas del robot.

Para actualizar el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$, se considera una ley de adaptación del tipo gradiente o integral,

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma \phi^T(x, \dot{x}, u, v, R, \dot{R}^T, \ddot{R}^T)v \quad (8.18)$$

donde $\Gamma = \Gamma^T$ es la matriz $m \times m$ definida positiva de ganancia de adaptación. La estructura de (8.18) es usada en la mayoría de los sistemas adaptables continuos (Anderson et al., 1986).

Observación 8.2 Los vectores v_{mc} , v_{fc} en (8.13) y (8.16) pueden escribirse,

$$v_{mc} = -[p/(p+\lambda)]\dot{\xi} - [1/(p+\lambda)]M_m^{-1}[B_m\dot{\xi} + K_m\xi]$$

$$v_{fc} = -[p/(p+\lambda)]S'K_e^{-1}\dot{e}_{fc} - [1/(p+\lambda)]S'K_f^{-1}M_f^{-1}[B_f\dot{e}_{fc} + K_f e_{fc}].$$

De estas expresiones y de (8.9) se observa que el cálculo de τ requiere el conocimiento de la posición del extremo del robot x , su velocidad \dot{x} , la fuerza F y su derivada \dot{F} (no se requiere medida de la aceleración \ddot{x}). \dot{F} podría obtenerse usando el modelo de rigidez (8.5). \square

Observación 8.3 Los vectores u_{mc} , v_{mc} definidos en (8.12) y (8.13) sólo tienen componentes en las direcciones no restringidas, mientras que los vectores u_{fc} , v_{fc} en (8.15) y (8.16) sólo tienen componentes en las direcciones restringidas. Esto se debe a la aplicación de las matrices de selección S y S' , las que seleccionan las componentes de las direcciones de control de impedancia y de control de fuerza. Consecuentemente u_{mc} , u_{fc} así como v_{mc} , v_{fc} representan una partición de u_c y v_c respectivamente. \square

8.2.3 Modelo del error

Antes de realizar el análisis de estabilidad es necesario obtener el denominado *modelo del error* (Anderson et al., 1986), el cual relaciona dinámicamente el vector ν con el vector de error de estimación paramétrica $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$.

Igualando el modelo del robot (8.1) con la ley de control (8.17) se obtiene,

$$H^* \ddot{x} + C^* \dot{x} + g^* + F = \phi \hat{\theta} + F. \quad (8.19)$$

Sustituyendo $\hat{\theta} = \tilde{\theta} + \theta$ y observando de (8.17) y (8.9) que,

$$\phi \theta = H^* [u - RR^T \ddot{x} - 2RR^T \dot{x} - \dot{R} \nu_c] + C^* [\dot{x} - \nu] + g^*$$

la ecuación de malla cerrada (8.19) resulta,

$$H^* [\ddot{x} - u'] + H^* \dot{R} \nu_c + C^* \nu = \phi \tilde{\theta} \quad (8.20)$$

con,

$$u' = u - RR^T \ddot{x} - 2RR^T \dot{x}.$$

Ahora corresponde evaluar $[\ddot{x} - u']$,

$$[\ddot{x} - u'] = RR^T [\ddot{x} - u']$$

donde,

$$R^T [\ddot{x} - u'] = R^T \ddot{x} - R^T u + \dot{R}^T \dot{x} + 2\dot{R}^T \dot{x}.$$

De las relaciones (8.2) y (8.10),

$$R^T [\ddot{x} - u'] = \ddot{x}_c - u_c.$$

Considérese ahora las siguientes particiones en las direcciones libres y restringidas,

$$\ddot{\mathbf{x}}_c = \ddot{\mathbf{x}}_{mc} + \ddot{\mathbf{x}}_{fc}$$

$$\mathbf{u}_c = \mathbf{u}_{mc} + \mathbf{u}_{fc}$$

$$\text{con } \ddot{\mathbf{x}}_{mc} = \mathbf{S}\ddot{\mathbf{x}}_c, \quad \ddot{\mathbf{x}}_{fc} = \mathbf{S}'\ddot{\mathbf{x}}_c.$$

Entonces,

$$\mathbf{R}^T[\ddot{\mathbf{x}}-\mathbf{u}'] = \ddot{\mathbf{x}}_c - \mathbf{u}_c = (\ddot{\mathbf{x}}_{mc} - \mathbf{u}_{mc}) + (\ddot{\mathbf{x}}_{fc} - \mathbf{u}_{fc}). \quad (8.21)$$

La utilización de (8.12), (8.13), (8.15), (8.16) y el modelo de rigidez (8.4) conduce a,

$$\ddot{\mathbf{x}}_{mc} - \mathbf{u}_{mc} = \dot{\mathbf{v}}_{mc} + \lambda \mathbf{v}_{mc}$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_{fc} - \mathbf{u}_{fc} = \dot{\mathbf{v}}_{fc} + \lambda \mathbf{v}_{fc}.$$

Luego, (8.21) puede escribirse como,

$$\mathbf{R}^T[\ddot{\mathbf{x}}-\mathbf{u}'] = (\dot{\mathbf{v}}_{mc} + \dot{\mathbf{v}}_{fc}) + \lambda(\mathbf{v}_{mc} + \mathbf{v}_{fc})$$

y considerando la partición (8.11),

$$\mathbf{R}^T[\ddot{\mathbf{x}}-\mathbf{u}'] = \dot{\mathbf{v}}_c + \lambda \mathbf{v}_c.$$

Ahora, de (8.10) y

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}(t) \mathbf{v}_c$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{v}_c + \mathbf{R}(t)\dot{\mathbf{v}}_c$$

resulta,

$$[\ddot{x}-u'] = RR^T[\ddot{x}-u'] = R[\dot{v}_c + \lambda v_c] = \dot{v} + \lambda v - \dot{R}v_c.$$

Retornando a la ecuación (8.20), se obtiene

$$H^*[\dot{v} + \lambda v] + C^*v = \phi\tilde{\theta}. \quad (8.22)$$

Finalmente, de la ley de adaptación (8.18) y observando que $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\hat{\theta}}$ pues θ se asume constante,

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma \phi^T v. \quad (8.23)$$

Las ecuaciones (8.22) y (8.23) describen las denominadas ecuaciones del modelo del error.

8.2.4 Resultados principales

A continuación se establecen las propiedades principales del controlador adaptable propuesto.

Proposición 8.1 Considérese la ley de control (8.9) con la ley de adaptación (8.18) en malla cerrada con el manipulador (8.1). Se verifica lo siguiente,

a) $\tilde{\theta} \in L_\infty^m$

b) $v \in L_2^n \cap L_\infty^n$

c) $v_{mc}, v_{fc} \in L_2^n \cap L_\infty^n$

d) $\xi, \dot{\xi} \in L_2^n \cap L_\infty^n, \xi(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$.

e) $e_{fc}, \dot{e}_{fc} \in L_2^n \cap L_\infty^n$, $e_{fc}(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$. ▽▽▽

Teniendo en cuenta (8.14), claramente $\xi(t) \rightarrow 0$ implica que se verifica el objetivo de control (8.7). Entonces d) y e) en la proposición 8.1 asegura que se verifican los objetivos de control (8.7) y (8.8).

Prueba. Considérese las ecuaciones del modelo del error (8.22), (8.23) y la siguiente función temporal no negativa,

$$V(t) = [\nu^T H^* \nu + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}] / 2 \quad (8.24)$$

cuya derivada temporal a lo largo de las trayectorias de (8.22) y (8.23) es,

$$\dot{V}(t) = -\lambda \nu^T H^* \nu \leq 0 \quad (8.25)$$

donde se ha usado la propiedad 3.9 para eliminar el término $\nu^T (\dot{H}/2 - C)\nu$. La ecuación (8.25) es no positiva porque λ es positiva y H^* es definida positiva (propiedad 3.10). Entonces las ecuaciones (8.24) y (8.25) implican que $\tilde{\theta} \in L_\infty^m$, $\nu \in L_\infty^n$. También la matriz H^* está acotada por abajo como se establece en la propiedad 3.10. Entonces $\nu \in L_2^n$. Esto prueba a) y b). Ahora, de (8.11) y de la observación 8.3, se puede escribir la siguiente partición,

$$R(t)^T \nu = \nu_c = \nu_{mc} + \nu_{fc}$$

y recordando que R se asumió acotada, de b) se concluye inmediatamente c). Finalmente, como $\nu_{mc}, \nu_{fc} \in L_2^n \cap L_\infty^n$, de (8.13), (8.16) y el teorema 2.2, se deriva d) y e). □

8.2.5 Resultados de simulación

Se realizaron simulaciones en computadora con el objeto de mostrar el desempeño del algoritmo de control. En las simulaciones se utilizó el manipulador de dos grados de libertad ubicado en un plano vertical que se muestra en la figura 8.2 y se describe en 3.4.3.

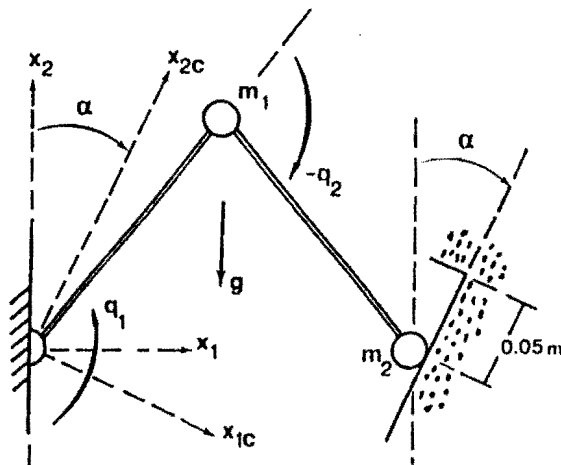


Figura 8.2 Manipulador y su restricción.

En este caso particular R es una matriz constante y vale

$$R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}; \quad \alpha = 30^\circ.$$

La matriz de selección queda especificada por $S = \text{diag}\{0, 1\}$. El modelo dinámico del manipulador con interacción con el medio es,

$$\begin{aligned} \tau = & m_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 C_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + (m_1 + m_2) \ddot{q}_1 - m_2 S_2 \dot{q}_2^2 \\ & - 2m_2 S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_2 g S_{12} + (m_1 + m_2) g S_1 + j_{11} f_1 + j_{21} f_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & m_2 C_2 \ddot{q}_1 + m_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 S_2 \dot{q}_1^2 + m_2 g S_{12} + \\ & + j_{12} f_1 + j_{22} f_2 \end{aligned} \quad (8.26)$$

donde $q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2$ son las posiciones, velocidades y aceleraciones angulares de las correspondientes articulaciones; τ_1, τ_2 los pares aplicados en las articulaciones; f_1, f_2 los componentes cartesianos de la fuerza F en el extremo del robot; $J_{11}, J_{12}, J_{21}, J_{22}$ los elementos del Jacobiano del robot, cuyas expresiones están dadas en 3.4.3. El escalar g representa la aceleración de la gravedad. Los valores numéricos de las masas de los eslabones son $m_1=4, m_2=2$. A los efectos del control se asume que éstas masas son desconocidas.

La ley de control de la ecuación 8.17 puede escribirse como,

$$\tau = J^T \phi \hat{\theta} + J^T F = \Phi \hat{\theta} + J^T F \quad (8.27)$$

donde el vector de parámetros estimados es $\hat{\theta} = [\hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2]^T = [\hat{m}_1 \hat{m}_2]^T$ y $\Phi = J^T \phi$.

Las expresiones escalares correspondientes a (8.27) son,

$$\begin{aligned} \tau_1 = & \Phi_{11} \hat{\theta}_1 + \Phi_{12} \hat{\theta}_2 + j_{11} f_1 + j_{21} f_2 \\ \tau_2 = & \Phi_{21} \hat{\theta}_1 + \Phi_{22} \hat{\theta}_2 + j_{12} f_1 + j_{22} f_2, \end{aligned} \quad (8.28)$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi_{11} = & (j_{11} u_1 + j_{12} u_2) - (j_{11} w_1 + j_{12} w_2) + g S_1 \\ \Phi_{12} = & 2(1+C_2) (j_{11} u_1 + j_{12} u_2) + (1+C_2) (j_{21} u_1 + j_{22} u_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2(1+C_2) (j_{id_{11} w_1} + j_{id_{12} w_2}) - (1+C_2) (j_{id_{21} w_1} + j_{id_{22} w_2}) \\
& - S_2 \dot{q}_2 (j_{i_{11} w_1} + j_{i_{12} w_2}) - S_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (j_{i_{21} w_1} + j_{i_{22} w_2}) \\
& + g S_1 + g S_{12}.
\end{aligned}$$

$$\Phi_{21} = 0$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{22} &= (1+C_2) (j_{i_{11} u_1} + j_{i_{12} u_2}) + (j_{i_{21} u_1} + j_{i_{22} u_2}) \\
& - (1+C_2) (j_{id_{11} w_1} + j_{id_{12} w_2}) - (j_{id_{21} w_1} + j_{id_{22} w_2}) \\
& + S_2 \dot{q}_1 (j_{i_{11} w_1} + j_{i_{12} w_2}) + g S_{12}.
\end{aligned}$$

En las expresiones anteriores $u = (u_1, u_2)^T$ está definido como en (8.9) -en el ejemplo R es una matriz constante-, $w = (w_1, w_2)^T = \dot{x} - v$ y,

$$J(q) = \{j_{k,1}\}, \quad k,1 = 1, 2$$

$$J^{-1}(q) = \{j_{i_{k,1}}\}, \quad k,1 = 1, 2$$

$$\frac{d}{dt} J^{-1}(q) = \{j_{id_{k,1}}\}, \quad k,1 = 1, 2.$$

Los parámetros desconocidos θ_1, θ_2 son actualizados usando la ley de tipo gradiente de (8.18) con $\Gamma = \text{diag}(\gamma)$.

La trayectoria de movimiento a lo largo de la superficie de restricción se especifica como $x_{cd}(t) = [0.05 + 0.1 \cos(\pi/2 t)]m$ y la fuerza normal a la superficie de restricción se especifica que sea igual a 10 Nt. La simulación se realiza usando los siguientes parámetros de diseño: $M_m = \text{diag}\{1\}$, $B_m = \text{diag}\{10\}$, $K_m = \text{diag}\{25\}$, $M_f = \text{diag}\{0.1\}$, $B_f = \text{diag}\{10\}$, $K_f = \text{diag}\{250\}$, $\Gamma = \text{diag}\{\gamma\}$, $\gamma = 0.5$, $\lambda = 30$ (en las ecuaciones 8.13 y 8.16). La rigidez del sensor de fuerza es $K_e = 1000 \text{Nt/m}$.

En una primera simulación no se consideran fuerzas en las direcciones no restringidas. En este caso el movimiento es libre y el objetivo de impedancia se reduce a uno de movimiento puro. La figura 8.3 muestra la evolución de los errores de fuerza e_{fc1} en la dirección restringida y $\xi_2 = e_{xc2}$ en la dirección libre. La figura 8.4 representa la evolución de los parámetros estimados $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ a partir de valores iniciales $\hat{\theta}_1(0)=3$, $\hat{\theta}_2(0)=1$. Nótese que las estimas se aproximan asintóticamente a sus valores ciertos.

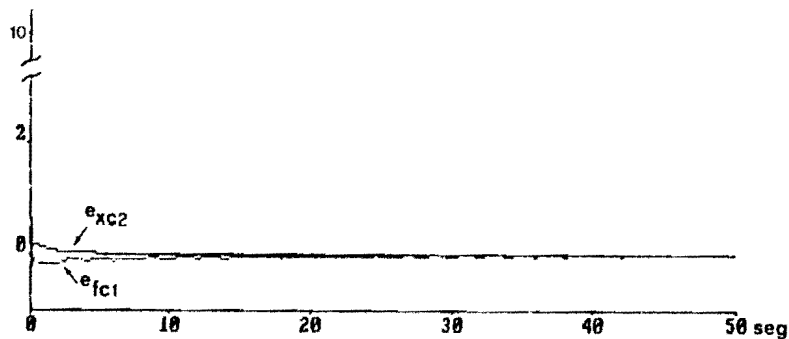


Figura 8.3 Errores de posición y fuerza.

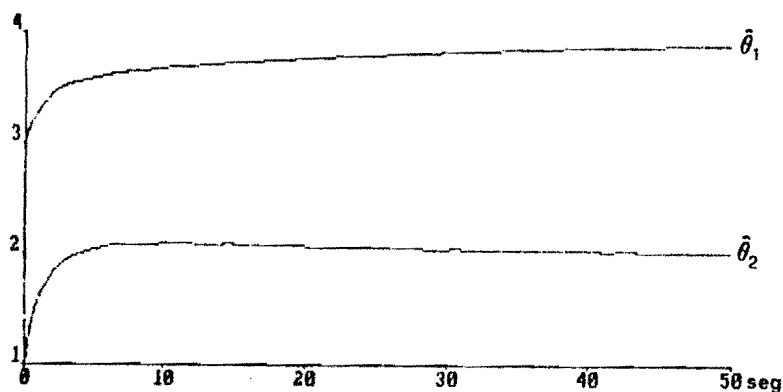


Figura 8.4 Parámetros estimados.

Finalmente, para mostrar cómo se desempeña el control de impedancia en presencia de fuerzas inesperadas en las direcciones no restringidas,

considérese una restricción al movimiento libre como se muestra en la figura 8.2. La figura 8.5 representa para este caso la evolución de los errores de impedancia ξ_2 y de posición e_{xc2} en la dirección no restringida. Nótese que el error de posición e_{xc2} no converge a cero y evoluciona de modo de alcanzar la dinámica de interacción especificada con la fuerza inesperada (objetivo de impedancia). Como se preveía, el error $\xi_2 \rightarrow 0$, lo que muestra que se cumple el objetivo de impedancia.

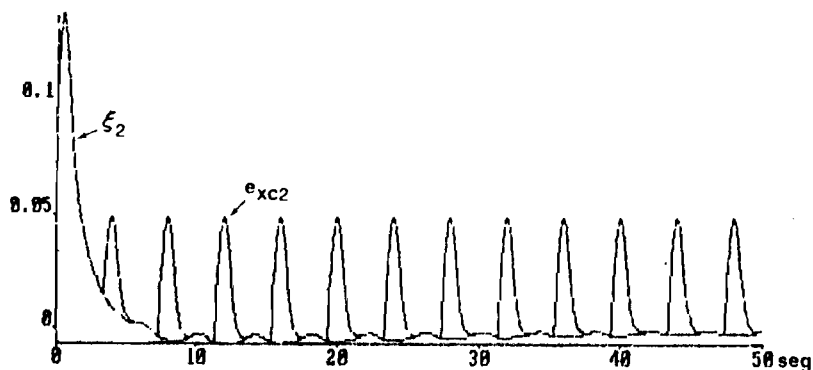


Figura 8.5 Errores de posición y de impedancia.

8.3. ESTRUCTURA UNIFICADA DE CONTROL

En esta sección, basado en los resultados de 8.2, se presenta una estructura de control adaptable que unifica diversas estrategias de control aplicadas a manipuladores robóticos.

8.3.1 Formulación del problema

Considérese un manipulador descrito por (8.1). El vector de parámetros dinámicos θ del manipulador y la carga (propiedad 3.8) es constante pero desconocido. Bajo estas condiciones, el *problema de control* se formula del siguiente modo: diseñar un controlador que calcule los pares τ de acción de control en las articulaciones tal que se verifique alguno de los siguientes

objetivos de control.

a) *Control de movimiento*

$$x_d(t) - x(t) \rightarrow 0 \quad \text{con } t \rightarrow \infty$$

b) *Control de impedancia*

$$x_d(t) - x(t) \rightarrow - [p^2 M_m + p B_m + K_m]^{-1} F(t) \quad \text{con } t \rightarrow \infty$$

c) *Control de fuerza*

$$F_d(t) - F(t) \rightarrow 0 \quad \text{con } t \rightarrow \infty$$

d) *Control híbrido movimiento/fuerza*

$$S R^{-1} (x_d(t) - x(t)) \rightarrow 0 \quad \text{con } t \rightarrow \infty$$

$$(I-S) R^{-1} (F_d(t) - F(t)) \rightarrow 0 \quad \text{con } t \rightarrow \infty$$

e) *Control híbrido impedancia/fuerza*

$$S R^{-1} (x_d(t) - x(t)) \rightarrow - [p^2 M_m + p B_m + k_m]^{-1} S R^{-1} F(t) \quad \text{con } t \rightarrow \infty$$

$$(I-S) R^{-1} (F_d(t) - F(t)) \rightarrow 0 \quad \text{con } t \rightarrow \infty$$

con los símbolos definidos como en la sección 8.2. En general R es una matriz variante en el tiempo, sin embargo por simplicidad, en esta sección se considerará una matriz constante.

8.3.2 Controlador unificado

El controlador adaptable propuesto para resolver el problema de control

consiste en una ley de control y una ley de adaptación de parámetros. La ley de control es,

$$J^{-T}\tau := \hat{H}R \left[u_1 + u_2 \right] + \hat{C}[\dot{x}-v] + \hat{g} + F \quad (8.29)$$

donde

$$u_1 := S \left[R^{-1}\ddot{x}_d + M_m^{-1}(B_m R^{-1}\dot{e} + K_m R^{-1}e + \lambda R^{-1}F) \right]$$

$$u_2 := S' K_e^{-1} \left[R^{-1}\ddot{F}_d + M_f^{-1}(B_f R^{-1}\dot{\tilde{F}} + K_f R^{-1}\tilde{F}) \right].$$

El controlador incorpora la señal auxiliar v definida por

$$v := - \frac{1}{p+\lambda} R \left\{ S M_m^{-1} (M_m \ddot{\xi} + B_m \dot{\xi} + K_m \xi) + K_e^{-1} M_f^{-1} S' (M_f R^{-1} \ddot{\tilde{F}} + B_f R^{-1} \dot{\tilde{F}} + K_f R^{-1} \tilde{F}) \right\} \quad (8.30)$$

con

$$\xi := R^{-1}e + \lambda [p^2 M_m + p B_m + K_m]^{-1} R^{-1} F \quad (8.31)$$

donde $\hat{H}(x)$, $\hat{C}(x)$ y $\hat{g}(x)$ son los estimados de $H^*(x)$, $C^*(x, \dot{x})$ y $g^*(x)$ respectivamente, λ un escalar positivo, $e = x_d - x$ y $\tilde{F} = F_d - F$. Además M_m , B_m , K_m , M_f , B_f y K_f son matrices nxn de diseño diagonales y definidas positivas, K_e es la matriz nxn definida positiva de la rigidez del sensor de fuerza o del medio. Nótese que de (8.30),

$$\dot{v} + \lambda v = -R \left\{ S [\ddot{\xi} + M_m^{-1}(B_m \dot{\xi} + K_m \xi)] + K_e^{-1} S' [R^{-1} \ddot{\tilde{F}} + M_f^{-1}(B_f R^{-1} \dot{\tilde{F}} + K_f R^{-1} \tilde{F})] \right\}. \quad (8.32)$$

Desde el punto de vista de la implementación, v puede obtenerse por

$$\nu = - \left[\frac{p}{p+\lambda} RS \dot{\xi} + \frac{1}{p+\lambda} RSM_m^{-1} (B_m \dot{\xi} + K_m \xi) + \frac{p}{p+\lambda} RS' K_e^{-1} R^{-1} \dot{\tilde{F}} + \frac{1}{p+\lambda} RS' K_e^{-1} M_f^{-1} (B_f R^{-1} \dot{\tilde{F}} + K_f R^{-1} \tilde{F}) \right]. \quad (8.33)$$

Nótese que se ha obviado la medida de la aceleración. Sin embargo, para control de fuerza o híbrido, se requiere la medición de $\dot{F}(t)$ para calcular τ y ν .

Considerando la propiedad 3.8, la ley de control (8.29) puede ser escrita como

$$\tau = J^T [\phi \hat{\theta} + F] \quad (8.34)$$

donde

$$\phi \hat{\theta} = \hat{H} R \left\{ S \left[R^{-1} \ddot{x}_d + M_m^{-1} (B_m R^{-1} \dot{e} + K_m R^{-1} e + AR^{-1} F) \right] + S' K_e^{-1} \left[R^{-1} \ddot{F}_d + M_f^{-1} (B_f R^{-1} \dot{\tilde{F}} + K_f R^{-1} \tilde{F}) \right] \right\} + C[\dot{x} - \nu] + \hat{g}. \quad (8.35)$$

En (8.34), ϕ es una matriz $n \times m$ cuyos elementos dependen de x , \dot{x} , x_d , \dot{x}_d , \ddot{x}_d , F , \dot{F} , F_d , \dot{F}_d , \ddot{F}_d , ν . El vector de error paramétrico $\tilde{\theta}$ está definido por $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$.

Para actualizar el vector de estimación paramétrica $\hat{\theta}$ se considera una ley de adaptación del tipo gradiente o integral (Anderson et al., 1986),

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma \phi^T \nu \quad (8.36)$$

donde $\Gamma = \Gamma^T$ es la matriz $m \times m$ definida positiva de ganancia de adaptación. La ley (8.36) es usada en la mayoría de los sistemas adaptables de tiempo continuo (Anderson et al., 1986). También podrían considerarse otras estructuras, como la proporcional e integral (Landau y Horowitz, 1988) o la

compuesta (Slotine y Li, 1987c).

8.3.3 Resultados principales

A continuación se resumen las propiedades principales del controlador adaptable propuesto en 8.3.2.

Proposición 8.2 Considérese la ley de control (8.29) con la ley de adaptación (8.36) en malla cerrada con el manipulador (8.1). Se verifica lo siguiente.

a) $\tilde{\theta} \in L_{\infty}^m$

b) $\nu \in L_2^n \cap L_{\infty}^n$

c) $S\xi, S\dot{\xi} \in L_2^n \cap L_{\infty}^n$

d) $S'R^{-1}\tilde{F}, S'R^{-1}\dot{\tilde{F}} \in L_2^n \cap L_{\infty}^n$

e) $S\xi(t), S'R^{-1}\tilde{F}(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$.

∇∇∇

Prueba. Semejante a la demostración de la proposición 8.1.

Observación 8.4 También podría haberse diseñado una estructura de controlador general que alcance los objetivos de control propuestos en 8.3.1, en base al controlador presentado en Slotine y Li (1987b'), mediante una selección adecuada de la señal ν y el error de impedancia ξ .

8.3.4 Casos particulares

Control adaptable de movimiento

Las especificaciones de control de movimiento se dan en términos de la

trayectoria deseada de movimiento. Se asume que el manipulador se mueve en el espacio libre. El objetivo de control de movimiento está dado por a) en 8.3.1. De la ley general 8.29, eligiendo $S=I$, $\Lambda=0$ y $R=I$ se obtiene la ley de control adaptable de movimiento,

$$\tau = J^T \left[H \{ \ddot{x}_d + M_m^{-1} (B_m \dot{e} + K_m e) \} + \hat{C}(\dot{x} - v) + \hat{g} + F \right] \quad (8.37)$$

$$v = -\frac{1}{p+\lambda} M_m^{-1} (M_m \ddot{\xi} + B_m \dot{\xi} + K_m \xi) \quad (8.38)$$

$$\xi = e = x_d - x. \quad (8.39)$$

Como se asume movimiento en el espacio libre, la fuerza de interacción $F(t)$ es nula en la ecuación (8.37). La ley de control (8.37) puede escribirse como $\tau = J^T \hat{\phi} \theta$. El controlador (8.37)-(8.39) es la versión cartesiana del controlador adaptable propuesto en 5.4. Las propiedades principales se resumen a continuación.

Proposición 8.3 Considérese la ley de control de movimiento (8.37) con la ley de adaptación (8.36) en malla cerrada con el manipulador (8.1). Se verifica,

a) $\tilde{\theta} \in L_\infty^m$

b) $v \in L_2^n \cap L_\infty^n$

c) $e, \dot{e} \in L_2^n \cap L_\infty^n$

d) $e(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$.

VVV

Prueba. Directa de la proposición 8.2.

Control adaptable de impedancia

Las especificaciones del problema de control de impedancia se dan en términos de una trayectoria deseada de movimiento y de una relación dinámica deseada entre el error de posición $e(t)$ y la fuerza de interacción $F(t)$ medida en el extremo del manipulador. El manipulador puede o no interactuar con el medio. El objetivo de control de impedancia se da en b) de 8.3.1. A partir de la ley general (8.29), tomando $S=I$, $A=I$ y $R=I$ se obtiene la ley de control adaptable de impedancia,

$$\tau = J^T \left[\hat{H} \{ \ddot{x}_d + M_m^{-1} (B_m \dot{e} + K_m e + F) \} + \hat{C} [\dot{x} - \nu] + \hat{g} + F \right] \quad (8.40)$$

$$\nu = - \frac{1}{p+\lambda} M_m^{-1} [M_m \ddot{\xi} + B_m \dot{\xi} + K_m \xi] \quad (8.41)$$

$$\xi = e + [p^2 M_m + p B_m + K_m]^{-1} F \quad (8.42)$$

La ley de control (8.40) puede ser escrita como $\tau = J^T [\phi \hat{\theta} + F]$. Este controlador de impedancia fue propuesto en 7.3. Nótese que el objetivo de control b) de 8.3.1 se verifica si $\xi(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$. Las propiedades principales se resumen a continuación.

Proposición 8.4 Considérese la ley de control (8.40) con la ley de adaptación (8.36) en malla cerrada con el manipulador (8.1). Se verifica,

a) $\tilde{\theta} \in L_\infty^m$

b) $\nu \in L_2^n \cap L_\infty^n$

c) $\xi, \dot{\xi} \in L_2^n \cap L_\infty^n$

d) $e(t) \rightarrow -[p^2 M_m + p B_m + K_m]^{-1} F(t)$ con $t \rightarrow \infty$.

Prueba. Directa de la proposición 8.2.

Control adaptable de fuerza

Las especificaciones del control de fuerza se dan en términos de una trayectoria deseada de fuerza/par. Se asume un modelo elástico conocido, atribuible al sensor de fuerza o al medio y caracterizado por la matriz de rigidez K_e definida positiva. El objetivo de control de fuerza está dado por c) en 8.3.1. A partir de la ley general (8.29), eligiendo $S=0$, $\Lambda=0$ y $R=I$ puede obtenerse la ley de control adaptable de fuerza,

$$\tau = J^T \left[\hat{H} K_e^{-1} \{ \ddot{\tilde{F}}_d + M_f^{-1} (B_f \dot{\tilde{F}} + K_f \tilde{F}) \} + \hat{C} [\dot{x} - \nu] + \hat{g} + F \right] \quad (8.43)$$

$$\nu = -\frac{1}{p+\lambda} K_e^{-1} M_f^{-1} (M_f \ddot{\tilde{F}} + B_f \dot{\tilde{F}} + K_f \tilde{F}) \quad (8.44)$$

donde M_f , B_f , K_f son matrices $n \times n$ de diseño diagonales definidas positivas. Como τ , ν son funciones de $\dot{\tilde{F}}$, se requiere la medición de $\dot{\tilde{F}}$. La ley de control (8.43) puede ser escrita como $\tau = J^T [\phi \hat{\theta} + F]$. Las propiedades principales se resumen a continuación.

Proposición 8.5 Considérese la ley de control (8.43) con la ley de adaptación (8.36) en malla cerrada con el manipulador (8.1). Se verifica,

a) $\tilde{\theta} \in L_\infty^m$

b) $\nu \in L_2^n \cap L_\infty^n$

c) $\tilde{F}, \dot{\tilde{F}} \in L_2^n \cap L_\infty^n$

d) $\tilde{F}(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$.

vvv

Prueba. Directa de la proposición 8.2.

A pesar de que se reconoce la importancia del control de fuerza, se han reportado pocas contribuciones al problema (Fukuda et al., 1987, Liu et al., 1988, Yabuta et al., 1988). En el capítulo 10 se desarrollan controladores adaptables de fuerza que no requieren la medición de \dot{F} ni el conocimiento de la matriz de rigidez K_e .

Control adaptable híbrido de movimiento/fuerza

Esta técnica combina información de fuerza/par y de movimiento para satisfacer simultáneamente objetivos de control de movimiento en direcciones libres y de fuerza en direcciones restringidas del espacio de trabajo (Raibert y Craig, 1981). Las especificaciones están dadas en términos de una trayectoria deseada de movimiento $x_{dc}(t) = R^{-1}x_d(t)$ en las direcciones libres, una trayectoria deseada de fuerza $F_{dc}(t) = R^{-1}F_d(t)$ en las direcciones restringidas y una matriz de selección S de esas direcciones (Raibert y Craig, 1981). Los objetivos de control híbrido movimiento/fuerza se dan en d) de 8.3.1. A partir de la ley general (8.29), eligiendo $S' = (I - S)$ adecuadamente y $\Lambda = 0$ se obtiene la ley de control adaptable híbrido,

$$\tau = J^T \left[\hat{H} R \left\{ S \left[R^{-1} \ddot{x}_d + M_m^{-1} (B_m R^{-1} \dot{e} + K_m R^{-1} e) \right] + S' K_e^{-1} \left[R^{-1} \ddot{F}_d + M_f^{-1} (B_f R^{-1} \dot{\tilde{F}} + K_f R^{-1} \tilde{F}) \right] \right\} + \hat{C} [x - \dot{v}] + \hat{g} + F \right] \quad (8.45)$$

$$\dot{v} = -\frac{1}{p + \lambda} R \left\{ M_m^{-1} S (M_m \ddot{\xi} + B_m \dot{\xi} + K_m \xi) + K_e^{-1} M_f^{-1} S' (M_f R^{-1} \ddot{\tilde{F}} + B_f R^{-1} \dot{\tilde{F}} + K_f R^{-1} \tilde{F}) \right\} \quad (8.46)$$

$$\xi = R^{-1} e \quad (8.47)$$

donde M_m , B_m , K_m , M_f , B_f , K_f son matrices de diseño diagonales definidas positivas. Se asume que la matriz de rigidez $K_e > 0$ del sensor de fuerza o del medio es conocida y que se dispone de $\dot{F}(t)$. La ley de control (8.45)

puede escribirse $\tau = J^T[\phi\hat{\theta}+F]$. Las propiedades principales del controlador se dan a continuación.

Proposición 8.6 Considérese la ley de control (8.45) con la ley de adaptación (8.36) en malla cerrada con el manipulador (8.1). Se verifica,

- a) $\tilde{\theta} \in L_\infty^m$
- b) $v \in L_2^n \cap L_\infty^n$
- c) $SR^{-1}e, SR^{-1}\dot{e} \in L_2^n \cap L_\infty^n$
- d) $S'R^{-1}\tilde{F}, S'R^{-1}\dot{\tilde{F}} \in L_2^n \cap L_\infty^n$
- e) $SR^{-1}e(t), S'R^{-1}\tilde{F}(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$.

VVV

Prueba. Directa de la proposición 8.2.

Control adaptable híbrido de impedancia/fuerza

La técnica de control híbrido impedancia/fuerza es una extensión del control híbrido movimiento/fuerza. La misma consiste en el control de impedancia en las direcciones no restringidas y el control de fuerza en las direcciones restringidas del espacio de tareas, como se describe en 8.2. Esta constituye una estrategia muy general para el control de manipuladores. Las especificaciones de control se dan en términos de una trayectoria deseada de movimiento $x_{dc}(t) = R^{-1}x_d(t)$ y una relación dinámica deseada entre el error de posición y las fuerzas medidas, si existen, en las direcciones no restringidas, así como una trayectoria deseada de fuerza/par $F_{dc}(t) = R^{-1}F_d(t)$ en las direcciones restringidas. También se provee una matriz de selección S que especifica las direcciones no restringidas y restringidas. Los objetivos de control híbrido de impedancia/fuerza se dan en e) de 8.3.1. A partir de la ley general (8.29), eligiendo $S'=(I-S)$ adecuadamente y $\Lambda=I$ se obtiene la ley de control adaptable híbrido de impedancia/fuerza,

$$\tau = J^T \left[\hat{H} R \left\{ S \left[R^{-1} \ddot{x}_d + M_m^{-1} (B_m R^{-1} \dot{e} + K_m R^{-1} e + R^{-1} F) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. S' K_e^{-1} \left[R^{-1} \ddot{F}_d + M_f^{-1} (B_f R^{-1} \dot{\tilde{F}} + K_f R^{-1} \tilde{F}) \right] \right\} + \hat{C} [\dot{x} - v] + F \right] \quad (8.48)$$

$$v = - \frac{1}{p+\lambda} R \left\{ M_m^{-1} S (M_m \ddot{\xi} + B_m \dot{\xi} + K_m \xi) + \right. \\ \left. K_e^{-1} M_f^{-1} S' (M_f R^{-1} \ddot{\tilde{F}} + B_f R^{-1} \dot{\tilde{F}} + K_f R^{-1} \tilde{F}) \right\} \quad (8.49)$$

$$\xi = R^{-1} e + [p^2 M_m + p B_m + K_m]^{-1} R^{-1} F \quad (8.50)$$

donde M_m , B_m , K_m , M_f , B_f , K_f son matrices de diseño diagonales definidas positivas. Se asume que se conoce la matriz de rigidez K_e y que se dispone de $\dot{F}(t)$. La ley de control (8.48) puede escribirse en términos del vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ como $\tau = J^T [\phi \hat{\theta} + F]$. Las principales propiedades del controlador quedan especificadas por la proposición 8.2, ya que corresponden al controlador más general contemplado por la ley (8.29).

9. CONTROL ADAPTABLE DE MANIPULADORES RESTRINGIDOS DESCRIPTOS POR SISTEMAS SINGULARES

9.1 RESUMEN (ABSTRACT)

Resumen. En este capítulo se presenta un controlador adaptable de movimiento y fuerza para manipuladores restringidos, con incertidumbre en los parámetros del modelo dinámico del robot. El diseño del controlador se hace siguiendo el marco teórico propuesto por McClamroch y Wang (1988), donde se representa el manipulador restringido usando un modelo de sistemas singulares. Se verifica anulación asintótica global del error de movimiento y acotamiento práctico global del error de fuerza, con trayectorias de referencia de movimiento y de fuerza especificadas. También se presentan resultados de robustez y un ejemplo de simulación para ilustrar el desempeño del controlador adaptable.

Abstract. This chapter presents an adaptive controller for constrained robots with uncertain dynamic model parameters. The controller design has been made following a theoretical framework recently proposed by McClamroch and Wang (1988). It is shown that global tracking is verified in the sense that zero steady-state motion error and bounded force error are obtained. Some robustness results are also presented and a simulation example is given to illustrate the performance of the adaptive controller.

9.2. MODELO DEL MANIPULADOR RESTRINGIDO Y PROPIEDADES

9.2.1 Modelo en coordenadas articulares

En ausencia de fricción y otras perturbaciones, la dinámica de un manipulador rígido y restringido de n grados de libertad está descrita en coordenadas articulares por (ec. 3.42),

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = f + \tau \quad (9.1)$$

donde $f \in \mathbb{R}^n$ denota el vector de fuerzas de restricción generalizadas en coordenadas articulares y los demás símbolos están definidos en 3.2 y 3.6 del capítulo 3. Se considera que el manipulador descrito por (9.1) *no es redundante*. Se asume que el manipulador está equipado de sensores de posición y velocidad y de un sensor de fuerza en su extremo. Algunas *propiedades* fundamentales del modelo (9.1) se dan en 3.2.

9.2.2 Modelo expresado como sistema singular

Ahora, siguiendo a McClamroch y Wang (1988), considérese que las restricciones del medio son tales que la función de restricción $\phi(q): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ en coordenadas articulares es conocida y satisface la *ecuación de restricción*,

$$\phi(q) = 0. \quad (9.2)$$

Además, las fuerzas de restricción generalizadas están dadas por,

$$f = J^T(q) \lambda \quad (9.3)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}^m$ es el vector de multiplicadores generalizados asociado con las restricciones y $J(q) = \partial\phi(q)/\partial q$ una matriz jacobiana. Las restricciones dadas por (9.2) se asumen holonómicas y sin fricción. Como $\phi(q) \equiv 0$ implica que también $J^T(q)\dot{q} = 0$, las restricciones restringen la dinámica del robot a la variedad invariante de \mathbb{R}^{2n} definida por,

$$S = \{(q, \dot{q}) : \phi(q) = 0, J^T(q)\dot{q} = 0\}.$$

Asúmase que existe una función $\Omega(q_2): \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\phi(\Omega(q_2), q_2) = 0$ para todo $q_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$. Considérese la *transformación de coordenadas no lineal*

$$X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$x = X(q) = \begin{vmatrix} q_1 - \Omega(q_2) \\ q_2 \end{vmatrix}$$

y su transformación inversa $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$q = Q(x) = \begin{vmatrix} x_1 + \Omega(x_2) \\ x_2 \end{vmatrix}$$

donde se usan las particiones vectoriales $q^T = (q_1^T, q_2^T)$, $x^T = (x_1^T, x_2^T)$ con $q_1, x_1 \in \mathbb{R}^m$, $q_2, x_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$. Defínase también la matriz jacobiana $T(x) = \partial Q(x) / \partial x$, la que no es singular. Luego, la ecuación dinámica (9.1) puede expresarse en términos del vector x como,

$$\bar{H}(x)\ddot{x} + \bar{C}(x, \dot{x})\dot{x} + \bar{g}(x) = T^T(x)f + T^T(x)\tau \quad (9.4)$$

donde,

$$\bar{H}(x) = T^T(x)H(Q(x))T(x) \quad (9.5)$$

$$\bar{C}(x, \dot{x}) = T^T(x)C(Q(x), T(x)\dot{x})T(x) + T^T(x)H(Q(x))\dot{T}(x) \quad (9.6)$$

$$\bar{g}(x) = T^T(x)g(Q(x)). \quad (9.7)$$

Obsérvese que x no representa aquí la posición cartesiana del extremo del robot, como se utilizó en 3.3. No se ha cambiado de símbolo porque se prefiere conservar la nomenclatura del artículo de referencia.

Introduciendo una partición de la matriz $n \times n$ identidad $I_n = [E_1^T; E_2^T]$, donde E_1 es una matriz $m \times n$ y E_2 es una matriz $(n-m) \times n$, se obtienen las siguientes ecuaciones en forma reducida,

$$E_1 \bar{H}(x_2) E_2^T \ddot{x}_2 + E_1 \bar{C}(x_2, \dot{x}_2) E_2^T \dot{x}_2 + E_1 \bar{g}(x_2) = E_1 T^T f + E_1 T^T \tau \quad (9.8)$$

$$E_2 \bar{H}(x_2) E_2^T \ddot{x}_2 + E_2 \bar{C}(x_2, \dot{x}_2) E_2^T \dot{x}_2 + E_2 \bar{g}(x_2) = E_2 T^T \tau. \quad (9.9)$$

En (9.8) y (9.9) se ha usado el hecho de que $x_1=0$ (ecuación de la restricción en las coordenadas transformadas) y $E_2 T^T(x_2) f=0$ (para detalles véase McClamroch y Wang, 1988). Ahora se establecerá algunas propiedades fundamentales de la ecuación dinámica (9.4) -y (9.8),(9.9)-.

Propiedad 9.1 La matriz de inercia generalizada $\bar{H}(x)$ es simétrica y definida positiva. También, $E_2 \bar{H} E_2^T$ es simétrica y definida positiva. Existe una constante positiva α^* tal que,

$$\alpha^* I_n \leq \bar{H}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad \forall \forall \forall$$

Prueba. Es inmediata de la propiedad 3.3, la ecuación 9.5 y propiedades bien conocidas de matrices. \square

Propiedad 9.2 Si $C(q, \dot{q})$ está definida tal que se verifica la propiedad 3.2, $\bar{H}(x)$ y $\bar{C}(x, \dot{x})$ en la ecuación (9.4) satisfacen,

$$z^T (\dot{\bar{H}} - 2\bar{C}) z = 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

o sea $(\dot{\bar{H}} - 2\bar{C})$ es una matriz antisimétrica. $\forall \forall \forall$

Prueba. Usando (9.5) y (9.6) con $\bar{H}=\bar{H}(x)$, $\bar{C}=\bar{C}(x, \dot{x})$, $H=H(q)$, $C=C(q, \dot{q})$ y $T=T(x)$,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{H}} - 2\bar{C} &= \dot{T}^T H T + T^T \dot{H} T + T^T H \dot{T} - 2T^T C T - 2T^T H \dot{T} \\ &= T^T (\dot{H} - 2C) T + \dot{T}^T H T - T^T H \dot{T}. \end{aligned}$$

Dado que, de la propiedad 3.2, $(\dot{H} - 2C)$ es antisimétrica y que $(\dot{T}^T H T - T^T H \dot{T})$ es también una matriz antisimétrica, se concluye inmediatamente la

antisimetría de $(\bar{H}-2\bar{C})$. □

Propiedad 9.3 La estructura dinámica (9.4) es lineal en términos del mismo conjunto de parámetros dinámicos del robot y la carga que en la propiedad 3.1,

$$\bar{H}(x)\ddot{x} + \bar{C}(x, \dot{x})\dot{x} + \bar{g}(x) = Y(x, \dot{x}, \ddot{x})\theta$$

donde $Y(x, \dot{x}, \ddot{x}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ y $\theta \in \mathbb{R}^p$ es un vector que contiene los parámetros desconocidos del manipulador y la carga. También, las ecuaciones 9.8 y 9.9 pueden escribirse,

$$E_1 \bar{H}(x_2) E_2^T \ddot{x}_2 + E_1 \bar{C}(x_2, \dot{x}_2) E_2^T \dot{x}_2 + E_1 \bar{g}(x_2) = E_1 \xi(x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2) \theta$$

$$E_2 \bar{H}(x_2) E_2^T \ddot{x}_2 + E_2 \bar{C}(x_2, \dot{x}_2) E_2^T \dot{x}_2 + E_2 \bar{g}(x_2) = E_2 \xi(x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2) \theta$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^{n \times p}$. VVV

La propiedad 9.3 puede comprenderse fácilmente observando que las transformaciones (9.5) y (9.7) no destruyen la linealidad en términos de los parámetros constantes θ , establecida para el modelo (9.1) por la propiedad 3.1.

9.3. CONTROL ADAPTABLE

9.3.1 Formulación del problema

En esta sección 9.3 se presenta una solución al problema del control adaptable de manipuladores robóticos. El problema se formula en coordenadas articulares, definiendo una trayectoria de movimiento deseada como $q_d(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y una función de fuerza deseada como $f_d(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se requiere *consistencia* con las restricciones, ésto es $\phi(q_d)=0$ y $f_d=J^T(q_d)\lambda_d$ para el

multiplicador deseado $\lambda_d: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Ahora considérese el modelo de manipulador (9.4) o equivalentemente (9.8)-(9.9), y recuérdese la propiedad 9.3. El vector de parámetros dinámicos θ del manipulador y la carga es considerado constante y desconocido. Con incertidumbre en esos parámetros, el *problema de control adaptable* puede formularse como el de diseñar un controlador para calcular los pares de acción de control τ en las articulaciones, tales que se alcancen asintóticamente los objetivos de movimiento y de fuerza.

Se presenta un controlador adaptable que consiste en una ley de control con estructura de *par calculado más compensación*. El objetivo de control es alcanzado en el siguiente sentido: se obtiene asintóticamente el seguimiento exacto de la trayectoria deseada de movimiento y un error suficientemente pequeño de seguimiento de la función de fuerza deseada, permaneciendo todas las demás señales acotadas.

9.3.2 Controlador adaptable.

En relación al modelo dinámico de manipulador dado por (9.8) y (9.9), se propone la siguiente *ley de control*,

$$E_1 T^T(x_2) \tau := E_1 \hat{H}(x_2) E_2^T w + E_1 \hat{C}(x_2, \dot{x}_2) E_2^T \dot{x}_2 + E_1 \hat{g}(x_2) - E_1 T^T(x_2) J^T(x_2) \lambda_d + E_1 E_1^T G_f E_1 T^T(x_2) J^T(x_2) [\lambda - \lambda_d] \quad (9.10)$$

$$E_2 T^T(x_2) \tau := E_2 \hat{H}(x_2) E_2^T w + E_2 \hat{C}(x_2, \dot{x}_2) E_2^T z + E_2 \hat{g}(x_2) \quad (9.11)$$

donde \hat{H} , \hat{C} y \hat{g} tienen la misma forma funcional que \bar{H} , \bar{C} y \bar{g} respectivamente, con los parámetros estimados $\hat{\theta}$. Las señales w , z se definen como,

$$w := \ddot{x}_{2d} - G_v \dot{e}_2 - G_d e_2; \quad w \in \mathbb{R}^{n-m} \quad (9.12)$$

$$z := \dot{x}_2 - v; \quad z \in \mathbb{R}^{n-m} \quad (9.13)$$

$$v := (1/(p+\rho))[\ddot{e}_2 + G_v \dot{e}_2 + G_d e_2]; \quad p=d/dt; \quad \rho>0; \quad v \in \mathbb{R}^{n-m} \quad (9.14)$$

con $e_2(t)=x_2(t)-x_{2d}(t)$ y $x_{2d}(t)=E_2 X(q_d(t))$ usando la transformación de coordenadas correspondiente. G_v y G_d representan matrices $(n-m) \times (n-m)$ definidas positivas de ganancia de realimentación constante y G_f es una matriz $m \times m$ definida no negativa de ganancia de realimentación constante.

Observación 9.1 Debido a la propiedad 9.3, una parte de la ley de control (9.10)-(9.11) puede expresarse como,

$$E_1 \bar{H}(x_2) E_2^T w + E_1 \bar{C}(x_2, \dot{x}_2) E_2^T \dot{x}_2 + E_1 \bar{g} = E_1 \varphi(x_2, \dot{x}_2, w, y) \hat{\theta} \quad (9.15)$$

$$E_2 \bar{H}(x_2) E_2^T w + E_2 \bar{C}(x_2, \dot{x}_2) E_2^T z + E_2 \bar{g} = E_2 \varphi(x_2, \dot{x}_2, w, y) \hat{\theta} \quad (9.16)$$

con $\varphi \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $y = \dot{x}_2$ en (9.15), $y = z$ en (9.16) y $\hat{\theta}$ es el vector estimado de θ . VVV

Observación 9.2 Nótese de (9.14) que,

$$\dot{v} + \rho v = \ddot{e}_2 + G_v \dot{e}_2 + G_d e_2. \quad (9.17)$$

Desde un punto de vista práctico, v puede calcularse como,

$$v = (p/(p+\rho)) \dot{e}_2 + (1/(p+\rho)) [G_v \dot{e}_2 + G_d e_2].$$

Claramente, se ha obviado la medición de aceleración. VVV

Observación 9.3 La ley de control (9.10)-(9.11), aún cuando está basada en un concepto de par calculado, difiere de la propuesta por McClamroch y Wang (1988) en lo siguiente. Las matrices \bar{H} , \bar{C} y el vector \bar{g} (explícitamente

incorporados) son reemplazados por sus estimados \hat{H} , \hat{C} y \hat{g} . Además, una modificación clave en la estructura del controlador es la incorporación del vector de señal v , el que representa una compensación adicional y desempeña un importante papel en el análisis de estabilidad. En el capítulo 5 se propone una estructura similar para el controlador de movimiento puro. $\nabla\nabla\nabla$

Para actualizar el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ se considera una ley de adaptación integral o del tipo gradiente,

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma [E_2 \varphi(x_2, \dot{x}_2, w, z)]^T v \quad (9.18)$$

donde $\Gamma \in \mathbb{R}^{p \times p}$ es la matriz simétrica definida positiva de ganancia de adaptación. La ley de adaptación (9.18) se usa en la mayoría de los sistemas adaptables de tiempo continuo (Anderson et al., 1986).

9.3.3 Resultados de estabilidad.

A continuación se resumen las propiedades principales del controlador adaptable.

Proposición 9.1 Considérese la ley de control (9.10)-(9.11) con la ley de adaptación (9.18) en malla cerrada con el modelo de manipulador restringido expresado en la forma (9.8)-(9.9). Se verifica lo siguiente,

- a) $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta \in L_{\infty}^p$
- b) $v \in L_2^{n-m} \cap L_{\infty}^{n-m}$
- c) $e_2, \dot{e}_2 \in L_2^{n-m} \cap L_{\infty}^{n-m}$
- d) $e_2(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$, $q(t) \rightarrow q_d(t)$ con $t \rightarrow \infty$.
- e) $(f(t) - f_d(t))$ está acotado y el error de fuerza de estado permanente es

inversamente proporcional a la norma de la matriz de ganancia de realimentación de fuerza G_f . VVV

Prueba. Para realizar el análisis se requiere expresar las ecuaciones del sistema de malla cerrada en forma del denominado modelo del error (Anderson et al., 1986). El sistema de malla cerrada se obtiene combinando (9.8) con (9.10) y (9.9) con (9.11). Tomando primero (9.8) y (9.10), definiendo $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$ y considerando la observación 9.1 acerca de la parametrización lineal, se obtiene

$$E_1 \bar{H} E_2^T [\dot{\nu} + \rho \nu] - (I_m + G_f) E_1 T^T J^T [\lambda - \lambda_d] = E_1 \varphi(x_2, \dot{x}_2, w, y) \tilde{\theta} \quad (9.19)$$

En (9.19), I_m es la matriz identidad $m \times m$, además se ha usado $y = \dot{x}_2$, $f = J' \lambda$ así como la ecuación 9.17. Combinando ahora (9.9) con (9.11) se obtiene,

$$E_2 \bar{H} E_2^T [\dot{\nu} + \rho \nu] + E_2 \bar{C} E_2^T \nu = E_2 \varphi(x_2, \dot{x}_2, w, z) \tilde{\theta} \quad (9.20)$$

donde las variables ya han sido definidas. Finalmente, la ecuación trivial

$$e_1 = x_1 \equiv 0 \quad (9.21)$$

completa el sistema. Ahora, de la ley de adaptación (9.18) se tiene,

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma [E_2 \varphi(x_2, \dot{x}_2, w, z)]^T \nu \quad (9.22)$$

pues θ es un vector constante. Las ecuaciones (9.19)-(9.22) definen las *ecuaciones del modelo del error* que relaciona dinámicamente e_1 , e_2 y $\tilde{\theta}$.

Considérese la función no negativa,

$$V(t) = [\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \nu^T (E_2 \bar{H} E_2^T) \nu] / 2 \quad (9.23)$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias de (9.20) y (9.22) es,

$$\dot{V}(t) = -\rho v^T (E_2 \bar{H} E_2^T) v \leq 0 \quad (9.24)$$

donde se ha usado la propiedad 9.2 para eliminar el término $v^T E_2 (\bar{H}/2 - \bar{C}) E_2^T v$. Además, de la propiedad 9.1, \bar{H} y $E_2 \bar{H} E_2^T$ son simétricas y definidas positivas. Las ecuaciones 9.23 y 9.24 implican que $\tilde{\theta} \in L_\infty^p$, $v \in L_\infty^{n-m}$. Usando (9.24) y la propiedad 9.1 sobre el acotamiento de \bar{H} , se concluye que $v \in L_2^{n-m}$. Ahora, de (9.14) se tiene

$$e_2 = (p+\rho)[I_{n-m} p^2 + G_v p + G_d]^{-1} v. \quad (9.25)$$

Como ya se estableció que $v \in L_2^{n-m} \cap L_\infty^{n-m}$ y (9.25) representa un sistema lineal estrictamente propio y exponencialmente estable, del teorema 2.2 se concluye $e_2, \dot{e}_2 \in L_2^{n-m} \cap L_\infty^{n-m}$ y $e_2(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$. Lo último, conjuntamente con $e_1=0$ implica $q(t) \rightarrow q_d(t)$ con $t \rightarrow \infty$. Por consiguiente queda demostrado a), b) c) y d) de la proposición 9.1. Ahora corresponde analizar la ecuación 9.19. Asíumase que los jacobianos $T(x_2)$, $J(x_2)$ son matrices acotadas y también que x_{2d} , \dot{x}_{2d} , \ddot{x}_{2d} son funciones acotadas. Entonces, como e_2, \dot{e}_2 están acotadas, $\bar{H}(x_2)$, $\bar{C}(x_2, \dot{x}_2)$ y $\bar{g}(x_2)$ resultan acotadas. También $\varphi(x_2, \dot{x}_2, w, y)$ resulta acotada. Finalmente, como se probó que $\tilde{\theta}, v$ son funciones acotadas y puede mostrarse que \dot{v} es acotada de (9.20), $\lambda - \lambda_d$ en (9.19) permanece acotado. Recordando que $q \rightarrow q_d$, entonces $J(q) \rightarrow J(q_d)$ y por consiguiente el error de seguimiento de fuerza en estado permanente $f(t) - f_d(t)$ está acotado y es inversamente proporcional a la norma de la matriz de ganancia de realimentación de fuerza G_f . Esto prueba e) de la proposición 9.1. \square

Es importante hacer algunas observaciones.

Observación 9.4. De (9.10)-(9.11) y la observación 9.2 se nota que sólo se requiere la medición del desplazamiento q , la velocidad \dot{q} y la fuerza generalizada de restricción f . Las señales x_2, \dot{x}_2 se obtienen mediante la transformación de coordenadas $x_2 = E_2 X(q)$. $\nabla\nabla\nabla$

Observación 9.5 Nótese que no se asegura el cumplimiento de un objetivo de seguimiento perfecto de fuerza. Sin embargo, e) tiene un valor práctico, pues puede obtenerse suficiente exactitud en estado permanente tomando una ganancia de fuerza adecuada. Los resultados de simulación muestran que valores relativamente pequeños de ganancias en G_f conducen a seguimiento de fuerza prácticamente exacto. En el capítulo 8 se presenta un algoritmo con seguimiento exacto de la consigna de fuerza, sin embargo requiere la medición de la derivada de la fuerza. VVV

Observación 9.6 En el caso de conocimiento exacto de los parámetros dinámicos del robot, las ecuaciones del modelo del error (9.19), (9.20) y (9.22) se reducen con $\tilde{\theta}=0$. En este caso se prueba fácilmente que se obtienen los mismos objetivos de control de seguimiento que en McClamroch y Wang (1988), o sea

$$q(t) \rightarrow q_d(t) \text{ con } t \rightarrow \infty$$

$$f(t) \rightarrow f_d(t) \text{ con } t \rightarrow \infty.$$

VVV

9.4. ESTUDIOS DE ROBUSTEZ

En esta sección se analiza el comportamiento del sistema en malla cerrada ante la presencia de incertidumbres y perturbaciones. En particular es útil considerar los efectos de las incertidumbres en las restricciones y las perturbaciones debidas a fuerzas externas.

9.4.1 Efectos de incertidumbres en las restricciones

Por simplicidad de análisis considérese el problema bajo suposiciones particulares. Se asume que las *restricciones son lineales*, ésto es

$$\phi(q) = Jq \tag{9.26}$$

con J una matriz $m \times n$ constante. Los desarrollos previos son válidos con $Q(x) = Vx$, $X(q) = V^T q$ y $T(x) = V$, donde V es una matriz $n \times n$ ortogonal y constante. Supóngase que la incertidumbre en la función de restricción está dada por

$$Jq = \Delta$$

donde Δ es un vector $m \times 1$ constante de incertidumbre en la restricción. También, y esto es importante para robustificar el algoritmo, se introduce la medición de todo el vector x , no sólo de x_2 como en la ley de control (9.10)-(9.11). Entonces se reemplaza $\bar{H}(x_2)$, $\bar{C}(x_2, \dot{x}_2)$ y $\bar{g}(x_2)$ por $\bar{H}(x)$, $\bar{C}(x, \dot{x})$ y $\bar{g}(\bar{x})$ respectivamente. Nótese que $x_1 = (E_1 V^T J^T)^{-1} \Delta$ (McClamroch y Wang, 1988) es constante y por consiguiente $\dot{x}_1 = \ddot{x}_1 = 0$. Las ecuaciones en malla cerrada para el modelo del error resultan,

$$E_1 \bar{H}(x) E_2^T [\dot{v} + \lambda v] - (I_m + G_f) E_1 V^T [f - J^T \lambda_d] = E_1 \phi(x, \dot{x}_2, w, y) \tilde{\theta} \quad (9.27)$$

$$E_2 \bar{H}(x) E_2^T [\dot{v} + \lambda v] + E_2 \bar{C}(x, \dot{x}_2) E_2^T v = E_2 \phi(x, \dot{x}_2, w, z) \tilde{\theta} + E_2 V^T f_t \quad (9.28)$$

$$e_1 = (E_1 V^T J^T)^{-1} \Delta \quad (9.29)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma [E_2 \phi(x, \dot{x}_2, w, z)]^T v \quad (9.30)$$

donde $y = \dot{x}_2$ y f_t representa el componente de f que corresponde a la fuerza de interacción tangencial a la superficie de restricción ideal ($\phi(q) = 0$) para el valor actual de q . La señal v se define como en (9.14). Para f_t acotada, (9.28) constituye una ecuación del error con un término adicional $E_2 V^T f_t$ que es acotado. En éste caso no puede establecerse acotamiento de $\tilde{\theta}$. La literatura de control adaptable lineal provee soluciones para robustificar el algoritmo. Por ejemplo Kreisselmeier y Narendra (1982) introducen una ley de adaptación con una estimación restringida. Asumiendo una cota conocida M_0 de $\|\tilde{\theta}\|$, la búsqueda de parámetros queda confinada al conjunto $S = \{\hat{\theta}(t) : \|\hat{\theta}(t)\| \leq M_0\}$, donde $\|\cdot\|$ representa la norma euclídeana. Este

esquema conduce al acotamiento de todas las señales a pesar de la presencia de perturbaciones acotadas de medida desconocida y arbitraria.

Es interesante considerar una *particularización adicional*. Si la restricción real es paralela a la supuesta, entonces siempre $f_t=0$ y las ecuaciones del error (9.27), (9.28) y (9.30) resultan equivalentes a las del caso ideal. Este es el caso cuando en la función de restricción $\phi(q)$, q representa las coordenadas de la restricción, o si se está considerando un manipulador cartesiano. En forma similar al caso ideal, se puede concluir que $e_2 \rightarrow 0$ y que $f(t)-f_d(t)$ permanece acotado y con función de estado permanente inversamente proporcional a G_f . Por supuesto, $e_1=(E_1 V^T J^T)^{-1} \Delta \neq 0$, lo que conduce a un error de movimiento de estado permanente dado por,

$$q-q_d = V[(x_1, x_2)^T - (0, x_{2d})^T] \rightarrow V[x_1, 0]^T \quad \text{con } t \rightarrow \infty. \quad (9.31)$$

9.4.2 Consideración de fuerzas tangenciales no modeladas

Pueden aparecer fuerzas en las direcciones libres tangentes a la restricción, por ejemplo fuerzas de fricción o fuerzas debidas a restricciones no previstas en esas direcciones. Desde un punto de vista práctico sería deseable regular la relación dinámica entre los errores de posición y esas fuerzas cuando estén presentes. Como solución a este problema se usará el concepto de control de impedancia (Hogan, 1985). El problema de seguimiento puro se modifica de tal forma que se verifique el siguiente *objetivo de control de impedancia*,

$$e_2 \rightarrow -[p^2 M_m + pB_m + K_m]^{-1} E_2 T^T(x_2) f_t \quad \text{con } t \rightarrow \infty \quad (9.32)$$

donde $p=d/dt$, f_t representa la fuerza tangencial en coordenadas articulares del robot y M_m , B_m , K_m son matrices $(m-n) \times (m-n)$ de diseño diagonales y definidas positivas. Defínase el *error auxiliar* de impedancia ξ_2 como,

$$\xi_2 = e_2 + [p^2 M_m + pB_m + K_m]^{-1} E_2 T^T(x_2) f_t. \quad (9.33)$$

Entonces, el objetivo de control se verifica si $\xi_2(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$. Para este problema, las ecuaciones del manipulador en la forma de (9.8)-(9.9) resultan

$$E_1 \bar{H}(x_2) E_2^T \ddot{x}_2 + E_1 \bar{C}(x_2, \dot{x}_2) E_2^T \dot{x}_2 + E_1 \bar{g}(x_2) = E_1 T^T(x_2) f + E_1 T^T(x_2) \tau \quad (9.34)$$

$$E_2 \bar{H}(x_2) E_2^T \ddot{x}_2 + E_2 \bar{C}(x_2, \dot{x}_2) E_2^T \dot{x}_2 + E_2 \bar{g}(x_2) = E_2 T^T(x_2) f_t + E_2 T^T(x_2) \tau. \quad (9.35)$$

La ley de control adaptable de impedancia que se propone es

$$E_1 T^T(x_2) \tau := E_1 \hat{H}(x_2) E_2^T w + E_1 \hat{C}(x_2, \dot{x}_2) E_2^T \dot{x}_2 + E_1 \hat{g}(x_2) - E_1 T^T(x_2) J^T(x_2) \lambda_d + E_1 E_1^T G E_1 T^T(x_2) J^T(x_2) [\lambda - \lambda_d] - E_1 T^T(x_2) f_t \quad (9.36)$$

$$E_2 T^T(x_2) \tau := E_2 \hat{H}(x_2) E_2^T w + E_2 \hat{C}(x_2, \dot{x}_2) E_2^T z + E_2 \hat{g}(x_2) + E_2 T^T(x_2) f_t \quad (9.37)$$

donde,

$$w := \ddot{x}_{2d} - M_m^{-1} (B_m \dot{e}_2 + K_m e_2 + E_2 T^T(x_2) f_t)$$

$$z := \dot{x}_2 - v$$

$$v := (1/(p+\rho)) M_m^{-1} (M_m \ddot{\xi}_2 + B_m \dot{\xi}_2 + K_m \xi_2).$$

De la propiedad 9.3, se tiene nuevamente la parametrización lineal (9.15) y (9.16). Para actualizar el vector de estimas paramétricas $\hat{\theta}$ se considera la misma ley de adaptación integral de (9.18). A continuación se resumen las principales propiedades del controlador adaptable de impedancia.

Proposición 9.2 Considérese la ley de control (9.36)-(9.37) con la ley de adaptación (9.18) en malla cerrada con el manipulador restringido

(9.34)-(9.35). Se verifica lo siguiente,

$$a) \tilde{\theta} = (\hat{\theta} - \theta) \in L_{\infty}^p$$

$$b) \nu \in L_2^{n-m} \cap L_{\infty}^{n-m}$$

$$c) \xi_2, \dot{\xi}_2 \in L_2^{n-m} \cap L_{\infty}^{n-m}$$

$$d) \xi_2(t) \rightarrow 0 \text{ con } t \rightarrow \infty.$$

Adicionalmente, si x_{2d} , \dot{x}_{2d} , \ddot{x}_{2d} son funciones acotadas y f_t está también acotada, entonces

e) El error de fuerza en estado permanente está acotado y es inversamente proporcional a la norma de la matriz de ganancia de fuerza G_f . VVV

Prueba. Combinando (9.34) con (9.36) y (9.35) con (9.37), considerando la definición de ξ_2 y la ecuación (9.18), se obtienen las siguientes ecuaciones del modelo del error,

$$E_1 \bar{H}(x_2) E_2^T [\dot{\nu} + \lambda \nu] - (I_m + G_f) E_1 T^T(x_2) J^T(x_2) [\lambda - \lambda_d] = E_1 \varphi(x_2, \dot{x}_2, w, y) \tilde{\theta} \quad (9.38)$$

$$E_2 \bar{H}(x_2) E_2^T [\dot{\nu} + \lambda \nu] + E_2 \bar{C}(x_2, \dot{x}_2) E_2^T \nu = E_2 \varphi(x_2, \dot{x}_2, w, z) \tilde{\theta} \quad (9.39)$$

$$\tilde{\theta} = -\Gamma [E_2 \varphi(x_2, \dot{x}_2, w, z)]^T \nu \quad (9.40)$$

y la relación trivial

$$e_1 \equiv 0.$$

La prueba de estabilidad procede en la misma manera que para la proposición 9.1, considerando ahora la relación dinámica entre ν y ξ_2 , así como la suposición de acotamiento de f_t . □

9.4.3 Efectos de fuerzas de perturbación

Se considera finalmente el efecto de una fuerza externa *acotada* de perturbación, que se expresará τ' en coordenadas articulares del robot. Considerando que se verifican todas las demás suposiciones del caso ideal, las ecuaciones del modelo dinámico del robot en la forma de (9.8)-(9.9) resultan ahora,

$$E_1 \bar{H}(x_2) E_2^T \ddot{x}_2 + E_1 \bar{C}(x_2, \dot{x}_2) E_2^T \dot{x}_2 + E_1 \bar{g}(x_2) = \\ E_1 T^T(x_2) f + E_1 T^T(x_2) \tau + E_1 T^T(x_2) \tau' \quad (9.41)$$

$$E_2 \bar{H}(x_2) E_2^T \ddot{x}_2 + E_2 \bar{C}(x_2, \dot{x}_2) E_2^T \dot{x}_2 + E_2 \bar{g}(x_2) = \\ E_2 T^T(x_2) \tau + E_2 T^T(x_2) \tau' \quad (9.42)$$

Combinando (9.41)-(9.42) con las ecuaciones de la ley de control (9.10)-(9.11) y considerando (9.18) se obtienen las ecuaciones de malla cerrada del modelo del error,

$$E_1 \bar{H}(x_2) E_2^T [\dot{\nu} - \lambda \nu] - (I_m + G_f) E_1 T^T(x_2) J^T(x_2) [\lambda - \lambda_d] = E_1 \varphi(x_2, \dot{x}_2, w, y) \tilde{\theta} + \\ E_1 T^T(x_2) \tau' \quad (9.43)$$

$$E_2 \bar{H}(x_2) E_2^T [\dot{\nu} + \lambda \nu] + E_2 \bar{C}(x_2, \dot{x}_2) E_2^T \nu = E_2 \varphi(x_2, \dot{x}_2, w, z) \tilde{\theta} + E_2 T^T \tau' \quad (9.44)$$

$$e_1 = 0 \quad (9.45)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma [E_2 \varphi(x_2, \dot{x}_2, w, z)]^T \nu. \quad (9.46)$$

Comparando con el caso ideal, (9.43)-(9.44) tienen términos adicionales que están acotados. En este caso no puede establecerse acotamiento de $\tilde{\theta}$ y resultan válidos los mismos comentarios y conclusiones que para las

ecuaciones 9.27, 9.28 y 9.30.

9.5 RESULTADOS DE SIMULACION

En esta sección se considera un *ejemplo* para ilustrar los algoritmos de control adaptable presentados en la sección 9.3. También se presentan *simulaciones en computadora* para mostrar el desempeño del controlador adaptable. Se considera el manipulador cartesiano y la ecuación de restricción presentada por McClamroch y Wang (1988). Las ecuaciones dinámicas son,

$$m_1 \ddot{q}_1 = \tau_1 + f_1$$

$$m_2 \ddot{q}_2 = \tau_2 + f_2$$

con m_1 , m_2 las masas correspondientes a los ejes cartesianos q_1 y q_2 . En forma matricial se tiene,

$$H\ddot{q} = \tau + f$$

donde $H = \text{diag}(m_1, m_2)$ y $C(q, \dot{q}) = 0$, $g(q) = 0$. La ecuación de la restricción es,

$$\phi(q) = 4q_1^2 + q_2^2 - 1 = 0.$$

Entonces, las fuerzas de restricción están dadas por,

$$f_1 = 8q_1\lambda; \quad f_2 = 2q_2\lambda$$

donde λ es el multiplicador generalizado.

Las transformaciones no lineales y los jacobianos definidos en la sección 9.2 resultan,

$$J(q) = \partial\phi(q)/\partial q = (8q_1, 2q_2)$$

$$\Omega(q_2) = 0.5 [1 - q_2^2]^{1/2}$$

$$Q(x) = (x_1 + 0.5 [1 - x_2^2]^{1/2}, x_2)^T$$

$$T(x) = \partial Q/\partial x = \begin{vmatrix} 1 & -0.5[1-x_2^2]^{-1/2}x_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$x_2 = q_2$$

Ahora corresponde calcular las matrices $\bar{H}(x_2)$, $\bar{C}(x_2, \dot{x}_2)$ y el vector $\bar{g}(x_2)$. Usando la ecuaciones 9.5 a 9.7 se obtiene,

$$\bar{H}(x_2) = \{\bar{h}_{ij}\},$$

$$\text{con: } \bar{h}_{11} = m_1$$

$$\bar{h}_{12} = \bar{h}_{21} = -m_1 0.5 [1 - x_2^2]^{-1/2} x_2$$

$$\bar{h}_{22} = m_1 0.25 [1 - x_2^2]^{-1} x_2 + m_2$$

$$\bar{C}(x_2, \dot{x}_2) = \{c_{ij}\},$$

$$\text{con: } \bar{c}_{11} = 0$$

$$\bar{c}_{12} = -m_1 (0.5 [1 - x_2^2]^{-1/2} \dot{x}_2 - 0.5 [1 - x_2^2]^{-3/2} x_2^2 \dot{x}_2)$$

$$\bar{c}_{21} = 0$$

$$\bar{c}_{22} = m_1 (0.25 [1 - x_2^2]^{-1} x_2 \dot{x}_2 + 0.25 [1 - x_2^2]^{-1} x_2^3 \dot{x}_2)$$

$$\bar{g}(x_2) = 0.$$

Las ecuaciones dinámicas del robot en la forma de (9.8)-(9.9) resultan,

$$E_1 T^T(x_2) \tau = \tau_1 = E_1 \varphi(x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2) \theta - f_1$$

$$E_2 T^T(x_2) \tau = -0.5 [1 - x_2^2]^{-1/2} x_2 \tau_1 + \tau_2 = E_2 \varphi(x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2) \theta$$

con la siguiente definición de θ y φ ,

$$\theta = (m_1, m_2)^T$$

$$\varphi(x_2, \dot{x}_2, w, y) = \{\varphi_{ij}\}$$

$$\varphi_{11} = -0.5 [1 - x_2^2]^{-1/2} x_2 w - (0.5 [1 - x_2^2]^{-1/2} x_2 + 0.5 [1 - x_2^2]^{-3/2} x_2^2 \dot{x}_2) y$$

$$\varphi_{12} = 0$$

$$\varphi_{21} = -.25 [1 - x_2^2]^{-1} x_2^2 w + (.25 [1 - x_2^2]^{-1} x_2 \dot{x}_2 + .25 [1 - x_2^2]^{-2} x_2^3 \dot{x}_2) y$$

$$\varphi_{22} = w.$$

En las ecuaciones dinámicas del robot, $w = \ddot{x}_2$ $y = \dot{x}_2$.

El objetivo de *control de seguimiento* se especifica con las trayectorias deseadas de movimiento y fuerza, las que son consistentes con la restricción impuesta,

$$q_d = (q_{1d}, q_{2d})^T = (\Omega(q_{2d}), 0.2 \text{sen}(wt))^T, \quad w = 1.57079$$

$$f_d = (f_{1d}, f_{2d})^T = (\cos(\alpha_d), \text{sen}(\alpha_d))^T$$

$$\alpha_d = \arctg(2q_{2d}/8q_{1d})$$

$$x_{2d} = q_{2d}$$

El multiplicador λ_d resulta,

$$\lambda_d = f_{1d} (8q_{1d})^{-1}.$$

La ley de control adaptable que corresponde a las ecuaciones 9.10 y 9.11 resulta,

$$\tau_1 = E_1 \varphi(x_2, \dot{x}_2, w, \dot{x}_2) \hat{\theta} - 8q_1 \lambda_d + g_f [f_1 - 8q_1 \lambda_d]$$

$$\tau_2 = 0.5 [1 - x_2^2]^{-1/2} x_2 u_1 + E_2 \varphi(x_2, \dot{x}_2, w, z) \hat{\theta}$$

con,

$$w = [\ddot{x}_{2d} - g_v \dot{e}_2 - g_d e_2]; \quad e_2 = x_2 - x_{2d}$$

$$z = \dot{x}_2 - v$$

$$v = (1/(p+\rho)) [\ddot{e}_2 + g_v \dot{e}_2 + g_d e_2].$$

La ley de adaptación (9.18) resulta,

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma [E_2 \varphi(x_2, \dot{x}_2, w, z)]^T v.$$

En las figuras 9.1 y 9.2 se presentan *resultados de simulación* representativos con los siguientes parámetros del robot y de diseño,

$$m_1 = 2[\text{kg}]; \quad m_2 = 1[\text{kg}]$$

$$g_f = 25; \quad g_v = 10; \quad g_d = 25.$$

La función de error de fuerza se evalúa como,

$$e_f(t) = |f(t) - f_d(t)|$$

y la función de error de posición es $e_2(t)$.

La figura 9.1 representa las funciones de error de fuerza y posición para el algoritmo no adaptable ($\Gamma=0$, $\theta(0)=\theta_0$), cuando el vector de parámetros se asume como $\theta_0 = (m_{10}, m_{20})^T = (.4, .8)^T$ a los efectos del diseño del controlador, mientras su valor verdadero es $\theta = (m_1, m_2)^T = (1, 2)^T$. Se observa un error de posición persistente. La evolución de los correspondientes errores para el algoritmo de control adaptable se muestran en la figura 9.2. Los valores de estimas iniciales del vector de parámetros se toman $\theta(0) = (m_1(0), m_2(0))^T = (.4, .8)^T$. El parámetro de diseño ρ vale 30 y la matriz de ganancia de adaptación se toma $\Gamma = \text{diag}(20,20)$. De la figura 9.2 se concluye que se verifica seguimiento de posición y seguimiento de fuerza prácticamente exacto, aún con estimas iniciales erróneas de los parámetros dinámicos del manipulador.

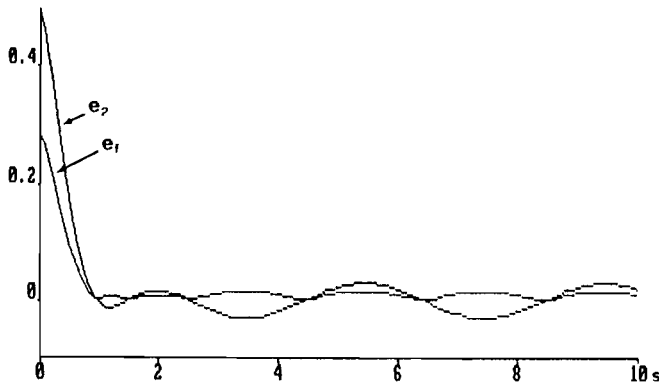


Figura 9.1 Evolución de los errores para el controlador fijo.

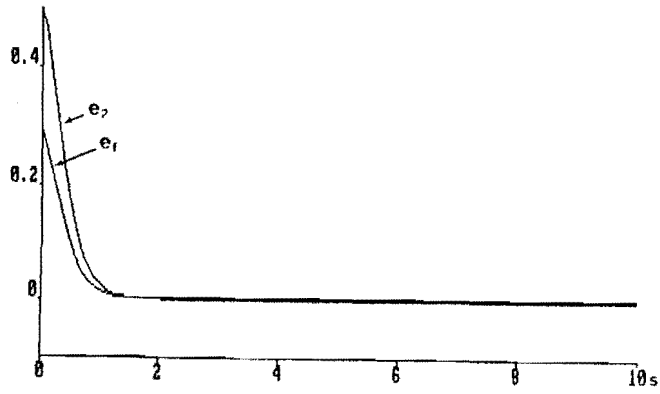


Figura 9.2 Evolución de los errores para el controlador adaptable.

10. CONTROL ADAPTABLE DE FUERZA PURA

10.1 RESUMEN (ABSTRACT)

Resumen. En este capítulo se presenta un controlador adaptable que alcanza un objetivo de seguimiento de fuerza pura para manipuladores con múltiples grados de libertad. Las principales características del algoritmo propuesto son: i) los parámetros dinámicos del robot se asumen desconocidos; ii) la rigidez del medio homogéneo se asume desconocida; iii) sólo se requiere medición de posición, velocidad y fuerza de interacción con el medio. Bajo la suposición práctica de que la matriz de inercia del robot permanece constante, se prueba que el error de seguimiento de fuerza converge globalmente a cero. La suposición puede removerse para dispositivos de un grado de libertad, lo que constituye la primera prueba de convergencia global de un controlador adaptable de fuerza que incluye la estimación de la dinámica del manipulador y del medio.

Abstract. An adaptive controller that achieves a pure tracking force objective for n-link robot manipulators is presented in this chapter. The main features of the proposed algorithm are: i) the dynamic parameters of the robot are assumed to be unknown, ii) environment stiffness is unknown, iii) only position, velocity and interaction force measurements are required. Under the practical assumption of constant robot inertia matrix, the scheme is shown to be globally convergent to zero force tracking error. This assumption can be removed for single link devices, thus providing the first proof of global convergence of an adaptive force controller that includes estimation of both, manipulator and environment dynamics.

10.2 FORMULACION DEL PROBLEMA

En ausencia de fricción y otras perturbaciones, la dinámica de un manipulador rígido de n grados de libertad y restringido, puede expresarse

en coordenadas articulares como (ec. 3.41),

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + J^T(q)F = \tau \quad (10.1)$$

con los símbolos definidos en 3.2 y 3.6 del capítulo 3. La matriz $n \times n$ jacobiana del robot $J(q)$ se asume *no singular*. F es el vector $n \times 1$ de fuerzas/momentos de interacción en el extremo del manipulador. Se considera que el manipulador descrito por (10.1) no es redundante, y que está provisto de sensores de posición, velocidad y fuerza en su extremo.

La dinámica (10.1) expresada en el espacio cartesiano (ec. 3.42) es,

$$H^*(x)\ddot{x} + C^*(x, \dot{x})\dot{x} + g^*(x) + F = J^{-T}\tau \quad (10.2)$$

con los símbolos definidos en 3.3 y 3.6 del capítulo 3. También en 3.3 se dan *propiedades* del modelo (10.2).

Se asume que el manipulador está en contacto con el medio, y la posición de contacto queda definida por el punto x_e correspondiente al medio sin deformar. Si la posición del extremo del robot es x , entonces la fuerza/par de interacción debida a un modelo puramente elástico del medio puede obtenerse como,

$$F = K_e [x - x_e] \quad (10.3)$$

donde se supone $K_e = k_e I_n$, con k_e el coeficiente de rigidez del medio homogéneo. Aún cuando podrían establecerse modelos de interacción más complejos, se reconoce (An y Hollerbach, 1987) que a los fines del análisis de estabilidad, la rigidez es la característica más importante. Por simplicidad, x_e se considerará constante. En el caso que $x_e = x_e(t)$, el análisis sigue siendo válido si $\dot{x}_e(t)$ y $\ddot{x}_e(t)$ son conocidos.

Observación 10.1 Es importante notar que $H^*(x)$, $C^*(x, \dot{x})$ y $g^*(x)$ en (10.2) incluyen la carga o herramienta adosada al extremo del robot. Como esa

carga o herramienta puede variar con la tarea, la inercia deberá considerarse como desconocida. También la rigidez K_e del medio puede variar notablemente. Como se reporta en Eppinger y Seering (1987), An y Hollerbach (1987), Fukuda et al. (1987), Yabuta et al. (1988), es difícil mantener la estabilidad del mecanismo con un control de ganancia fija cuando los parámetros dinámicos o de rigidez del medio varían considerablemente. Este hecho motiva el control adaptable. VVV

Ahora puede formularse el *problema de control adaptable de fuerza pura* como sigue. Considérese el manipulador descrito por (10.2), cuyo extremo está en contacto con el medio y la interacción está dada por (10.3). Los parámetros dinámicos del robot y la rigidez del medio se suponen desconocidos. El problema de control adaptable consiste en diseñar una ley de control y una ley de adaptación de parámetros, tales que la fuerza aplicada por el extremo sobre el medio pueda seguir con precisión una trayectoria de fuerza especificada. Formalmente, si $F_d(t)$ es la trayectoria de fuerza deseada -la que se asume una función continua- y $\tilde{F}(t) = F(t) - F_d(t)$ es el error de seguimiento de fuerza con $F(t)$ medida por el sensor de fuerza, el objetivo de control de fuerza consiste en asegurar que $\tilde{F}(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$. Nótese que en la formulación de fuerza pura no se consideran direcciones de movimiento libre. Esto naturalmente restringe el campo de las aplicaciones, pero constituye un paso previo en la formulación de objetivos del tipo híbrido. Se asumirá que el jacobiano $J(q)$ permanece fuera de un entorno de las singularidades del robot, o equivalentemente, que el robot permanece fuera de un entorno de las posiciones que hacen que $J(q)$ sea singular. Como estas posiciones pueden estar restringidas por el mismo medio, la condición sobre el jacobiano puede preservarse naturalmente.

10.3. CONTROL NO ADAPTABLE

Antes de tratar el controlador adaptable, se considerará el caso (ideal) en el cual el modelo dinámico del manipulador y la rigidez del medio se

conocen exactamente.

10.3.1 Controlador

Considérese el siguiente controlador de dinámica inversa o par calculado (Spong y Vidyasagar, 1989) para resolver el problema de control de fuerza,

$$J^{-T}\tau := H^* [K_e^{-1}(\ddot{F}_d - \alpha_D \dot{\tilde{F}} - \alpha_P \tilde{F})] + C^* \dot{x} + g^* + F \quad (10.4)$$

con $\tilde{F} = F - F_d$, $\alpha_D, \alpha_P > 0$.

Como \dot{F} no se asume medible, usando (10.3) la ecuación 10.4 puede escribirse,

$$J^{-T}\tau = H^* [K_e^{-1}(\ddot{F}_d + \alpha_D \dot{F}_d - \alpha_P \tilde{F}) - \alpha_D \dot{x}] + C^* \dot{x} + g^* + F \quad (10.5)$$

donde \dot{F} se expresa como $K_e \dot{x}$, ya que x_e se asume constante. Si x_e no es constante pero conocido, puede incluirse explícitamente en (10.5).

Propiedad 10.1 La ecuación (10.5) puede expresarse como una función lineal de una combinación adecuada de parámetros dinámicos del manipulador y de la rigidez del medio,

$$J^{-T}\tau = \varphi(x, \dot{x}, F, F_d, \dot{F}_d, \ddot{F}_d)\theta + F \quad (10.6)$$

donde $\varphi \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $\theta \in \mathbb{R}^m$ es el vector de parámetros. VVV

Observación 10.2 Está claro de (10.5) que para implementar la acción de control sólo se requiere la medición de q , \dot{q} , F . VVV

10.3.2 Estabilidad

Igualando la acción de control (10.4) con la dinámica del robot (10.2) y sustituyendo \ddot{x} usando la derivada segunda de (10.3) para x_0 constante, se obtiene

$$\ddot{\tilde{F}} + \alpha_D \dot{\tilde{F}} + \alpha_P \tilde{F} = 0.$$

Como $\alpha_D, \alpha_P > 0$, inmediatamente se concluye la estabilidad asintótica global, o sea $\tilde{F}(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$.

10.3.3 Motivación para el control adaptable

Para motivar el control adaptable se asume que hay incertidumbre en la rigidez del medio, o sea K_e es estimada por \hat{K}_e en la ley de control (10.5). En este caso, luego de cálculos directos, se obtiene la siguiente ecuación del error de fuerza

$$[\hat{K}_e K_e^{-1}] \ddot{\tilde{F}} + [\alpha_D \hat{K}_e K_e^{-1}] \dot{\tilde{F}} + \alpha_P \tilde{F} = [I - \hat{K}_e K_e^{-1}] \ddot{F}_d + \alpha_D [I - \hat{K}_e K_e^{-1}] \dot{F}_d.$$

Considerando el problema de seguimiento de fuerza, $\dot{F}_d(t)$ y eventualmente $\ddot{F}_d(t)$ son funciones no nulas y resulta obvio que en general el error de fuerza no converge a cero. Una solución para obtener mejor desempeño, consiste en incluir K_e entre los parámetros inciertos en un esquema de control adaptable.

10.4. CONTROL ADAPTABLE

En esta sección se trata el caso en que los parámetros dinámicos del robot y de rigidez del medio son desconocidos. Se propone un controlador adaptable de fuerza pura para resolver el problema de control de seguimiento formulado en 10.2. El controlador adaptable consiste en una ley

de control y una ley de adaptación de parámetros. Vale la pena observar que este controlador es una modificación no trivial del (10.4), con un espíritu similar a la modificación que es necesario introducir para el control adaptable de sistemas lineales de grado relativo dos, con el objeto de asegurar la convergencia global.

10.4.1 Controlador adaptable

Considérese la *ley de control*

$$J^{-T} \tau := F + \varphi(x, \dot{x}, F, F_d, \dot{F}_d, \ddot{F}_d) \hat{\theta} + \xi \dot{\hat{\theta}} \quad (10.7)$$

donde la matriz φ y el vector θ están definidos de igual manera que para (10.6), $\hat{\cdot}$ significa valor estimado y ξ está definido por

$$\xi = L^{-1}(p)\varphi; \quad p=d/dt$$

con $L(p)=p+\rho$. El escalar positivo ρ se elige junto con α_d , α_p de modo que $(s+\rho)/(s^2+\alpha_d s+\alpha_p)$ sea una función de transferencia estrictamente positiva real (SPR). El vector $\hat{\theta}$ contiene los parámetros estimados de la dinámica y la rigidez del medio.

Observación 10.3 Los dos primeros términos de (10.7) constituyen la estructura de dinámica inversa de (10.6). El tercer término es similar al usado en el control adaptable de sistemas lineales de orden relativo dos (Sastry y Bodson, 1989). Obsérvese que en el caso no adaptable, donde $\hat{\theta}$ es una estima a priori y fija de θ , se anula el tercer término de (10.7). VVV

Observación 10.4 La ley de control (10.7) es realizable. F , q , \dot{q} son medidos, $L^{-1}(p)$ es un filtro estable realizable y $\hat{\theta}$, $\dot{\hat{\theta}}$ están dados por la ley de adaptación. No se requiere medición de \dot{F} . F_d , \dot{F}_d y \ddot{F}_d son funciones acotadas especificadas por el planificador de tareas. VVV

Propiedad 10.2 (*Lema "swapping"*). Para los dos términos del lado derecho de (10.7) se verifica la siguiente relación,

$$\psi \hat{\theta} + \xi \dot{\hat{\theta}} = L(p) \xi \hat{\theta}. \quad \forall \forall \forall$$

Para la prueba, véase el apéndice 10.A.

Con el fin de actualizar el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ se considera una *ley de adaptación* de parámetros del tipo gradiente (Anderson et al., 1986),

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma \xi^T \tilde{F} \quad (10.8)$$

donde Γ es la matriz $m \times m$ definida positiva de ganancia de adaptación. La ley (10.8) se usa en la mayoría de los sistemas de control adaptable de tiempo continuo. Antes de pasar a los resultados principales, se presenta el siguiente lema.

Lema 10.1 Considérese las siguientes ecuaciones dinámicas,

$$e = M(p) \xi \tilde{\theta} \quad (10.9)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma \xi^T e \quad (10.10)$$

con $e(t) \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}^m$, $\xi \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ una matriz definida positiva de ganancia. Si $M(p)$ describe una matriz de función de transferencia SPR, se verifica

a) $\tilde{\theta} \in L_{\infty}^m$

b) $e \in L_{\infty}^n$.

c) $e(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$.

$\forall \forall \forall$

Para la prueba del lema 10.1, véase Anderson et al. (1986), pág.159.

10.4.2 Resultados principales (Estabilidad)

El siguiente teorema establece los resultados principales.

Teorema 10.1 Considérese la ley de control (10.7) con la ley de adaptación (10.8) en malla cerrada con el sistema combinado de manipulador y medio (10.2)-(10.3). Asumiendo que

- A.1) El punto de contacto x_e es constante,
- A.2) H^{*-1} es una matriz constante,

entonces se verifica,

a) $\tilde{\theta}$, \tilde{F} están acotados

b) $\tilde{F}(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$

o sea, se alcanza el objetivo de control.

VVV

Prueba. Primero se obtienen las denominadas ecuaciones del error. Usando la propiedad 10.2, la ley de control (10.7) puede escribirse como

$$J^{-T}\tau = F + L(p) \hat{\xi}\hat{\theta}. \quad (10.11)$$

Sustituyendo $\xi=L^{-1}(p)\varphi$ y usando la definición $\tilde{\theta} := \hat{\theta}-\theta$ (donde θ es constante), la (10.11) puede escribirse

$$J^{-T}\tau = F + \varphi\theta + L(p) \hat{\xi}\tilde{\theta}. \quad (10.12)$$

Ahora, la ecuación de malla cerrada puede obtenerse igualando (10.2) y (10.12),

$$\tilde{F} = [1/(p^2 + \alpha_D p + \alpha_P)] K_e H^{*-1}(x) [p + \rho] \xi \tilde{\theta}. \quad (10.13)$$

También, de (10.8) se obtiene

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma \xi^T \tilde{F}. \quad (10.14)$$

Considerando las suposiciones A1) y A2), la ecuación (10.13) puede escribirse

$$\tilde{F} = [(p + \rho)/(p^2 + \alpha_D p + \alpha_P)] K_e H^{*-1} \xi \tilde{\theta}. \quad (10.15)$$

donde H^{*-1} es una matriz constante. Comparando (10.14) y (10.15) con (10.9) y (10.10) del lema 10.1, la prueba se completa si se muestra que la matriz de función de transferencia

$$M(s) := [s + \rho / (s^2 + \alpha_D s + \alpha_P)] K_e H^{*-1}$$

es SPR. Esto es inmediato de Tao y Ioannou (1989), recordando que el operador $P(s) = [(s + \rho)/(s^2 + \alpha_D s + \alpha_P)]$ se ha diseñado para ser SPR y que $H^{*-1} \geq k_e \alpha I_n$ (propiedad 3.3 y $k_e > 0$) resulta positiva definida. \square

Observación 10.5 Una aproximación que suele hacerse en la literatura (por ej. Blauer y Belanger, 1987) para manipuladores restringidos es que \dot{x} es pequeño. Esto se justifica desde que se trata de pequeños movimientos de mecanismos pesados en contacto con otros objetos. Por consiguiente la suposición de que la matriz de inercia es constante está justificada para aplicaciones en las cuales \dot{x}_e sea pequeño o nulo y la mayor componente frecuencial de $F_d(t)$ también sea pequeña. También debe observarse lo siguiente: si K_e es una matriz que sólo se especifica como constante y definida positiva, el teorema 10.2 seguirá siendo válido si puede asegurarse de antemano que $K_e H^{*-1}$ es definida positiva. $\nabla \nabla \nabla$

10.5. CASO DE UN GRADO DE LIBERTAD

Esta sección se dedica al caso de una simple articulación. Se presta particular atención a los dispositivos de una sola articulación por las siguientes razones: i) Representa un amplio campo de interés práctico; el control de fuerza de estos dispositivos permite realizar tareas robóticas si se consideran como el último eslabón o la garra del manipulador. ii) Se pueden obtener los mismos resultados de estabilidad que para el caso de múltiples eslabones, aunque sin la suposición práctica sobre la matriz de inercia que se hace en el teorema 10.1.

Un aspecto interesante del esquema que se propone, es que se agrega al controlador un término (no lineal en los estados) para obtener una ecuación del error que es lineal en los estados, lo que permite el análisis de estabilidad.

10.5.1 Modelo y formulación del problema

Considérese el dispositivo restringido de un grado de libertad representado en la figura 10.1. Se utilizará el modelo en coordenadas articulares, o sea

$$\tau = \tau_F + j\ddot{q} + l_c m g \sin(q) \quad (10.16)$$

$$\tau_F = F l \cos(q) \quad (10.17)$$

donde m es la masa del eslabón, j es el momento de inercia, τ , τ_F son los pares en la junta debidos al actuador y a la interacción del extremo del eslabón con el medio respectivamente y los demás símbolos están representados en la figura 10.1. Se ha considerado una junta de revolución, pues el caso de una junta prismática conduce a un modelo lineal más fácil de tratar. La fuerza de interacción F se considera originada por el modelo puramente elástico,

$$F = k_e [l \operatorname{sen}(q) - x_e] \quad (10.18)$$

donde k_e es la constante de rigidez del medio y x_e es la posición del medio sin deformar. Por simplicidad, x_e se considera constante. Un análisis similar puede hacerse para el caso en que x_e fuera variante en el tiempo y conocido.

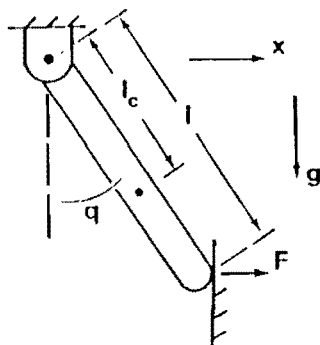


Figura 10.1 Mecanismo de un grado de libertad y el medio.

Las siguientes relaciones (ver figura 10.1) serán útiles más adelante,

$$x = l \operatorname{sen}(q)$$

$$\dot{x} = l \cos(q) \dot{q}. \quad (10.19)$$

El *objetivo de control* se establece a continuación. Se considera una trayectoria de fuerza deseada $F_d(t)$, se miden q , \dot{q} , F , y se asume que los parámetros dinámicos del manipulador y la rigidez del medio son desconocidos y que el jacobiano del manipulador está fuera de un entorno de sus valores singulares. Bajo estas condiciones debe obtenerse el par τ de acción de control tal que

$$\tilde{F}(t) := F(t) - F_d(t) \rightarrow 0 \text{ con } t \rightarrow \infty$$

y todas las señales internas permanezcan acotadas.

10.5.2 Controlador no adaptable

Considérese el siguiente controlador de dinámica inversa,

$$\tau := \tau_F + j u + l_c m g \operatorname{sen}(q) \quad (10.20)$$

con

$$u := (\ddot{F}_d - \alpha_D \dot{\tilde{F}} - \alpha_P \tilde{F}) / (k_e l \cos(q)) + \operatorname{tg}(q) \dot{q}^2$$

donde α_D , α_P son constantes positivas de diseño.

Como se asume que \dot{F} no es medible, usando (10.17), u se expresa mejor con la siguiente ecuación

$$u = (\ddot{F}_d + \alpha_D \dot{F}_d - \alpha_P \tilde{F}) / (k_e l \cos(q)) - \alpha_D \dot{q} + \operatorname{tg}(q) \dot{q}^2 \quad (10.21)$$

donde \dot{F} se escribe como $k_e \dot{x}$, x_e se asume constante y además se usa (10.19).

Propiedad 10.3 La ecuación 10.20 puede expresarse como una función lineal de una combinación adecuada de los parámetros dinámicos de la junta y de la rigidez del medio,

$$\tau = \tau_F + \theta^T \varphi(q, \dot{q}, F, F_d, \dot{F}_d, \ddot{F}_d) \quad (10.22)$$

donde $\theta \in \mathbb{R}^m$ (el vector de parámetros) y $\varphi \in \mathbb{R}^m$ (un vector de señal) están definidos por,

$$\theta^T = \{j, j/k_e, l_c m\}$$

$$\varphi^T = \{\operatorname{tg}(q) \dot{q}^2 - \alpha_D \dot{q}, (\ddot{F}_d + \alpha_D \dot{F}_d - \alpha_P \tilde{F}) / l \cos(q), g \operatorname{sen}(q)\}. \quad \nabla \nabla \nabla$$

Para el análisis de estabilidad de malla cerrada, igualando la acción de control (10.20) y la dinámica del eslabón (10.16), se obtiene la siguiente ecuación del error,

$$\ddot{\tilde{F}} + \alpha_D \dot{\tilde{F}} + \alpha_P \tilde{F} = 0.$$

Como $\alpha_D, \alpha_P > 0$, se concluye inmediatamente la estabilidad asintótica, o sea $\tilde{F}(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$.

10.5.3 Controlador adaptable

Con el objeto de obtener una implementación adaptable del controlador de dinámica inversa (10.21) para el cual pueda establecerse la convergencia global, se introducen dos modificaciones. Primero, en forma similar al caso de múltiples eslabones, se agrega un término (que depende de un regresor filtrado y de la velocidad de cambio de los parámetros del controlador) de modo que, mediante el lema "swapping", se pueda obtener una ecuación del error de grado relativo uno. Segundo, este término debe pasarse por un filtro no lineal en los estados para linealizar las ecuaciones del error.

Considérese la ley de control,

$$\tau := \tau_F + \hat{\theta}^T \varphi + f(q) \hat{\theta}^T \xi \quad (10.23)$$

donde los vectores $\hat{\theta}, \varphi$ son definidos como para la ecuación 10.22 ($\hat{\theta}$ es el estimado de θ), $f(q) = [\text{lcos}(q)]^{-1}$ y $\xi = L^{-1}(p,q)\varphi$ con $L(p,q)$ y su inversa definidos por,

$$L(p,q) = [\text{lcos}(q)]^{-1} (p+\rho)$$

$$L^{-1}(p,q) = (p+\rho)^{-1} \text{lcos}(q).$$

El escalar positivo ρ se elige junto con α_D, α_P de modo que

$(s+\rho)/(s^2+\alpha_D s+\alpha_P)$ sea una función de transferencia SPR. El vector $\hat{\theta}$ contiene los parámetros estimados de la dinámica del mecanismo y la dureza del medio.

Observación 10.6 Nótese en (10.23) el uso de una transformación no lineal en q para definir el tercer término de la derecha. Como quedará claro más adelante, este término es necesario para linealizar las ecuaciones del error.

Propiedad 10.4 (*Lema "swapping" no lineal*) Para los dos términos de la derecha de la ecuación 10.23, se verifica la siguiente relación

$$\hat{\theta}^T \varphi + f(q) \dot{\hat{\theta}}^T \xi = L(p, q) \hat{\theta}^T \xi. \quad \forall \forall \forall$$

La prueba de la propiedad 10.4 sigue un camino similar que la del apéndice 10.A para la propiedad 10.2.

Para actualizar el vector de estimas paramétricas $\hat{\theta}$ se considera una *ley de adaptación* del tipo gradiente,

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma \xi \tilde{F} \quad (10.24)$$

donde Γ es una matriz 3x3 definida positiva de ganancia de adaptación.

El siguiente teorema establece los resultados principales.

Teorema 10.2 Considérese la ley de control (10.23) con la ley de adaptación (10.24) en malla cerrada con el sistema combinado mecanismo-medio de (10.16)-(10.18). Asúmase que el punto de contacto x_e es constante. Entonces se verifica,

- a) $\tilde{\theta}$, \tilde{F} están acotados
- b) $\tilde{F}(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$

o sea, se alcanza el objetivo de control.

VVV

Prueba. Usando la propiedad 10.4, la ley de control (10.23) puede escribirse como

$$\tau = \tau_F + L(p, q) \hat{\theta}^T \xi. \quad (10.25)$$

Aplicando la sustitución $\xi = L^{-1}(p, q)\varphi$ y usando la definición $\tilde{\theta} := \hat{\theta} - \theta$, donde θ es constante, (10.25) puede escribirse

$$\tau = \tau_F + L(p, q) \tilde{\theta}^T \xi + \hat{\theta}^T \varphi. \quad (10.26)$$

Ahora, la ecuación de malla cerrada puede obtenerse igualando (10.16) con (10.26),

$$[j/k_e] [\ddot{\tilde{F}} + \alpha_D \dot{\tilde{F}} + \alpha_P \tilde{F}] = (p + \rho) \tilde{\theta}^T \xi. \quad (10.27)$$

La ecuación (10.27) con la (10.24) producen las denominadas ecuaciones del modelo del error, que relacionan dinámicamente el error de seguimiento de fuerza \tilde{F} y el error paramétrico $\tilde{\theta}$,

$$\tilde{F} = [k_e/j] [(p + \rho)/(p^2 + \alpha_D p + \alpha_P)] \tilde{\theta}^T \xi \quad (10.28)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma \xi \tilde{F}. \quad (10.29)$$

Como $[(p+\rho)/(p^2+\alpha_D p+\alpha_P)]$ se ha diseñado para ser SPR, del lema 10.1 se concluye directamente que $\tilde{\theta} \in L_\infty^n$, $\tilde{F} \in L_\infty$ y $\tilde{F}(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$. \square

10.6 ESTUDIOS DE ROBUSTEZ

En esta sección se analiza cómo se comporta el sistema de malla cerrada en presencia de dinámicas no modeladas. En particular se considera los efectos

de dinámicas en la malla de realimentación de fuerza, tal como la dinámica del sensor de fuerza. Por simplicidad, el análisis se hace para el caso del mecanismo de un grado de libertad de la sección 10.5.

Supóngase que el sensor es modelado por la siguiente dinámica de primer orden,

$$\dot{\mu\hat{F}} = -\hat{F} + F. \quad (10.30)$$

donde \hat{F} es el valor medido de la fuerza de interacción. Como el sensor provee \hat{F} , el cálculo de u definido por (10.21) debe hacerse usando la siguiente definición del error de fuerza,

$$\tilde{F}' := \hat{F} - F_d. \quad (10.31)$$

La parametrización lineal de la ecuación (10.22) sigue siendo válida con el mismo vector de parámetros θ , aunque usando el siguiente vector φ' de señal,

$$\varphi' = \varphi + \{ 0, [\alpha_D / (1 \cos(q))] (F - \hat{F}), 0 \}.$$

El controlador adaptable de la ecuación (10.23) es ahora,

$$\tau := \hat{\tau}_F + \hat{\theta}^T \varphi' + f(q) \hat{\theta}^T \xi', \quad (10.32)$$

donde,

$$\hat{\tau}_F = \hat{F} / \cos(q)$$

$$\xi' = L^{-1}(p, q) \varphi'.$$

La ecuación de malla cerrada puede ser obtenida igualando (10.16) con (10.32). Considerando la propiedad 10.4 con φ' y ξ' , y la dinámica del sensor dada por (10.30), se obtiene la siguiente ecuación del modelo del

error

$$(k_e/j)\tilde{\theta}^T\xi' = N_\mu^{-1}\tilde{F} + \mu v \quad (10.33)$$

con,

$$N_\mu := [\mu p^3 + (1+\mu\alpha_p)p^2 + (\alpha_p+\mu\alpha_0)p + \alpha_D]^{-1}(p+\rho)$$

$$\alpha_0 := (k_e/j) l^2 \cos(q)^2$$

$$v := [(p^2+\alpha_p p+\alpha_0)/(p+\rho)]\dot{F}_d.$$

Compárese (10.33) con (10.28). Se observan dos modificaciones en la ecuación del error. Primero, un nuevo operador N_μ relaciona los errores de fuerza y de estimación paramétrica. Segundo, aparece un término forzante v en las tareas de seguimiento de fuerza. Obsérvese que α_0 es una función de q , por lo que N_μ es en general un operador no lineal. Para realizar un análisis de robustez se asumirá que, como en el caso de múltiples grados de libertad, q es constante. Con esta suposición, la ecuación del error es lineal en los estados. Para este caso son válidas las siguientes observaciones.

Observación 10.7 La ecuación 10.33 es la ecuación de un sistema de perturbación singular y se reduce a (10.28) si $\mu = 0$. Más aún, como la función de transferencia N_μ tiene orden relativo dos, no puede ser diseñada como SPR. Entonces, no puede asegurarse la estabilidad global del sistema de control adaptable. VVV

Observación 10.8 Es bien sabido (Anderson et al., 1986) que, supuesto N_μ estable y las señales persistentemente excitantes, puede aún preservarse algunas propiedades de estabilidad local de las ecuaciones (10.29) y (10.33). Por consiguiente, un aspecto de interés es si la presencia de polos parásitos pueden desestabilizar la función de transferencia N_μ . A continuación se muestra que éste no es el caso. VVV

Afirmación 10.1 Asúmase que α_0 es una constante positiva. Entonces, la función de transferencia N_μ es estable para valores positivos de α_D , α_P y μ , tales que $\alpha_P^2 > \alpha_D$. ∇∇∇

En vista de la afirmación anterior y del teorema 3.5 de Anderson et al. (1986), puede asegurarse que el sistema adaptable será localmente estable en condiciones de adaptación lenta (Γ pequeña) si el vector de señal ξ' es tal que no se exciten las altas frecuencias. En otras palabras, el sistema permanecerá estable, a pesar de las dinámicas parásitas de la medición de fuerza, si la trayectoria deseada de fuerza y la adaptación tienen variación lenta.

La siguiente afirmación, relativa a las propiedades de robustez del diseño con parámetros conocidos, puede establecerse a partir de la afirmación 10.1.

Afirmación 10.2 El controlador con parámetros conocidos (o sea $\tilde{\theta}=0$) es robusto con respecto a las dinámicas parásitas de medición de fuerza. Específicamente, todas las señales permanecen acotadas para todo valor de la constante de tiempo de dicha dinámica. ∇∇∇

10.7. RESULTADOS DE SIMULACION

Para la simulación se consideran dos casos. Primero, un manipulador de revolución de dos grados de libertad; segundo, un mecanismo de revolución de un grado de libertad.

10.7.1 Manipulador de dos grados de libertad

Aquí se considera un manipulador de dos grados de libertad que se mueve en un plano vertical, en contacto con el medio como se muestra en la

figura 10.2. El manipulador, descrito en 3.4.3, se modela como dos eslabones rígidos de longitud unidad con masas puntuales m_1 y m_2 en sus extremos. No se considera fricción en el modelo. Las ecuaciones dinámicas del manipulador con interacción con el medio son las siguientes,

$$\begin{aligned} \tau_1 = & m_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 C_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + (m_1 + m_2) \ddot{q}_1 - m_2 S_2 \dot{q}_2^2 \\ & - 2m_2 S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_2 g S_{12} + (m_1 + m_2) g S_1 + j_{11} f_1 + j_{21} f_2 \\ \tau_2 = & m_2 C_2 \ddot{q}_1 + m_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 S_2 \dot{q}_1^2 + m_2 g S_{12} + \\ & + j_{12} f_1 + j_{22} f_2 \end{aligned} \quad (10.34)$$

donde f_1 , f_2 representan las componentes cartesianas de la fuerza de interacción F en el extremo; $j_{11}, j_{12}, j_{21}, j_{22}$ son los elementos del jacobiano del robot y todos los demás símbolos se describen en 3.4.3. El medio se asume homogéneo con constante de rigidez k_e .

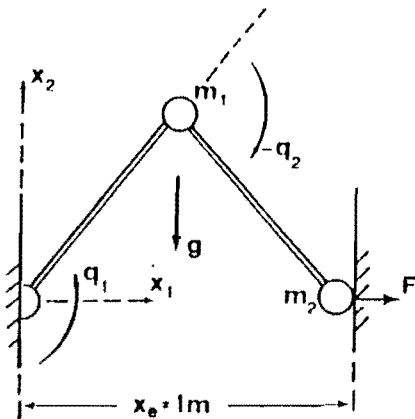


Figura 10.2 Manipulador de dos grados de libertad y el medio.

De (10.6), la ley de control puede escribirse

$$\tau = (J^T \phi) \hat{\theta} + J^T F = \Phi \hat{\theta} + J^T F$$

donde,

$$(J^T \phi) \hat{\theta} = \Phi \hat{\theta} = HJ^{-1} K_e^{-1} u_a + HJ^{-1} u_b + [-H\dot{J}^{-1} + CJ^{-1}] w + g \quad (10.35)$$

con,

$$u_a = \ddot{F}_d + \alpha_D \dot{F}_d - \alpha_P \ddot{F}$$

$$u_b = -\alpha_D \dot{x}$$

$$w = \dot{x}.$$

Véase (10.5) y las equivalencias (3.21)-(3.23).

Las expresiones escalares de (10.35) son,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \Phi_{11} \hat{\theta}_1 + \Phi_{12} \hat{\theta}_2 + \Phi_{13} \hat{\theta}_3 + \Phi_{14} \hat{\theta}_4 + j_{11} f_1 + j_{21} f_2 \\ \tau_2 &= \Phi_{21} \hat{\theta}_1 + \Phi_{22} \hat{\theta}_2 + \Phi_{23} \hat{\theta}_3 + \Phi_{24} \hat{\theta}_4 + j_{12} f_1 + j_{22} f_2, \end{aligned} \quad (10.36)$$

donde,

$$\Phi_{11} = (j_{i_{11} u_{b1}} + j_{i_{12} u_{b2}}) - (j_{i_{d_{11} w}} + j_{i_{d_{12} w}}) + g S_1$$

$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= 2(1+C_2) (j_{i_{11} u_{b1}} + j_{i_{12} u_{b2}}) + (1+C_2) (j_{i_{21} u_{b1}} + j_{i_{22} u_{b2}}) \\ &\quad - 2(1+C_2) (j_{i_{d_{11} w}} + j_{i_{d_{12} w}}) - (1+C_2) (j_{i_{d_{21} w}} + j_{i_{d_{22} w}}) \\ &\quad - S_2 \dot{q}_2 (j_{i_{11} w} + j_{i_{12} w}) - S_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (j_{i_{21} w} + j_{i_{22} w}) \\ &\quad + g S_1 + g S_{12}. \end{aligned}$$

$$\Phi_{13} = j_{i_{11} u_{a1}} + j_{i_{12} u_{a2}}$$

$$\Phi_{14} = 2(1+C_2) (j_{i_{11} u_{a1}} + j_{i_{12} u_{a2}}) + (1+C_2)(j_{i_{21} u_{a1}} + j_{i_{22} u_{a2}})$$

$$\Phi_{21} = 0$$

$$\begin{aligned} \Phi_{22} = & (1+C_2) (j_{i_{11} u_{b1}} + j_{i_{12} u_{b2}}) + (j_{i_{21} u_{b1}} + j_{i_{22} u_{b2}}) \\ & - (1+C_2) (j_{id_{11} w_1} + j_{id_{12} w_2}) - (j_{id_{21} w_1} + j_{id_{22} w_2}) \\ & + S_2 \dot{q}_1 (j_{i_{11} w_1} + j_{i_{12} w_2}) + g S_{12} \end{aligned}$$

$$\Phi_{23} = 0$$

$$\Phi_{24} = (1+C_2) (j_{i_{11} u_{a1}} + j_{i_{12} u_{a2}}) + (j_{i_{21} u_{a1}} + j_{i_{22} u_{a2}})$$

$$\hat{\theta}_1 = \hat{m}_1, \quad \hat{\theta}_2 = \hat{m}_2, \quad \hat{\theta}_3 = \hat{m}_1 / \hat{k}_e, \quad \hat{\theta}_4 = \hat{m}_2 / \hat{k}_e.$$

En las expresiones anteriores $u_a = \{u_{a1}, u_{a2}\}^T$, $u_b = \{u_{b1}, u_{b2}\}^T$, $w = \{w_1, w_2\}^T$ y además,

$$J(q) = \{j_{k,1}\}, \quad k,1 = 1, 2$$

$$J^{-1}(q) = \{j_{i_{k,1}}\}, \quad k,1 = 1, 2$$

$$\frac{d}{dt} J^{-1}(q) = \{j_{id_{k,1}}\}, \quad k,1 = 1, 2.$$

Del conocimiento de Φ , la matriz φ se obtiene fácilmente como $\varphi = J^{-T} \Phi$. Además, ξ se obtiene del filtrado $\xi = L^{-1}(p)\varphi$ con $L(p) = p + \rho$. Ahora, la ley de control adaptable (10.7) puede aplicarse como,

$$\tau = \hat{\Phi} \hat{\theta} + J^T [\hat{\theta}^T \xi^T]^T + J^T F.$$

Los parámetros desconocidos θ_1 se actualizan usando la ley gradiente de la ecuación 10.8 con $\Gamma = \text{diag}(\gamma)$.

Los valores numéricos de los parámetros dinámicos y de rigidez se toman: $m_1 = 4$ kg, $m_2 = 2$ kg, $k_e = 5 \cdot 10^3$ Nt/m. La posición del medio es fija y vale $x_e = 1$ m. Las condiciones experimentales se dan a continuación. La trayectoria de referencia de fuerza es $F_d = \{10 - 5 \sin(3.14159t)\}$, 0} Nt. Las constantes de diseño son $\rho = 15$, $\alpha_D = 50$, $\alpha_P = 100$ y la ganancia de adaptación es $\gamma = 0.0002$. Valores mayores de γ producen una convergencia más rápida del error a cero, aunque la respuesta transitoria es menos suave. Debido a que los resultados más significativos se obtienen cuando se considera incertidumbre en la rigidez del medio k_e , se presenta una simulación en la cual los parámetros dinámicos del robot se asumen conocidos, mientras que k_e se supone igual a $1 \cdot 10^4$ Nt/m siendo su valor real igual a $5 \cdot 10^3$ Nt/m (caucho siliconado).

La figura 10.3 muestra la evolución del error de fuerza para los casos de controlador fijo (no adaptable) y de controlador adaptable. Resulta obvia la ventaja de usar adaptación. La figura 10.4 muestra la evolución de los parámetros estimados $\hat{\theta}_1 = m_1 / \hat{k}_e$ ($\theta_1 = 0.0008$) y $\hat{\theta}_2 = m_2 / \hat{k}_e$ ($\theta_2 = 0.0004$). Se observa convergencia a valores próximos a los reales.

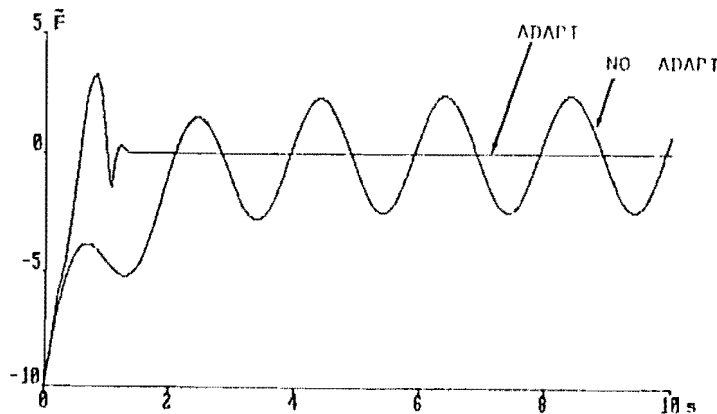


Figura 10.3 Error de fuerza; manipulador de dos grados de libertad.

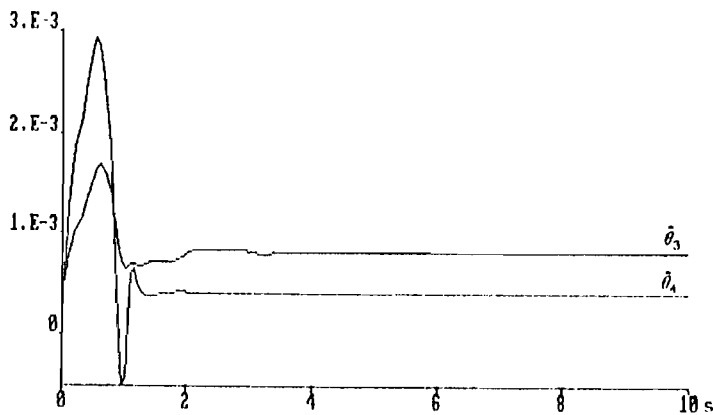


Figura 10.4 Parámetros estimados $\hat{\theta}_3$, $\hat{\theta}_4$; manipulador de dos grados de libertad.

10.7.2 Eslabón simple de revolución

Considérese el mecanismo simple de la figura 10.1. Los valores numéricos se seleccionan como $m=3\text{kg}$, $l=0.5\text{m}$, $l_c=0.25\text{m}$, $x_e=0.25\text{m}$. La masa m se asume uniformemente distribuida en la longitud del eslabón. A continuación se dan las condiciones experimentales. La trayectoria de fuerza deseada es $F_d(t)=[5+\text{sen}(3.14159t)]\text{Nt}$. Las constantes de diseño valen $\rho=15$, $\alpha_D=50$, $\alpha_P=100$ y la matriz de ganancia de adaptación se selecciona como $\Gamma=\text{diag}(\gamma)$, $\gamma=0.0002$. Valores mayores de γ producen una convergencia más rápida del error a cero, aunque ocasionan una respuesta transitoria menos suave. Nuevamente se considera incertidumbre en la rigidez del medio k_e . Se presentan simulaciones en las cuales j , m (parámetros dinámicos del mecanismo) se suponen conocidos, mientras que k_e se supone igual a $5 \cdot 10^4 \text{Nt/m}$ siendo su valor real igual a $5 \cdot 10^3 \text{Nt/m}$ (caucho siliconado).

La figura 10.5 muestra la evolución del error de fuerza para el controlador fijo (no adaptable) y el controlador adaptable. Nuevamente resulta obvia la ventaja de usar adaptación. La ecuación evolución del error resultante para el controlador no adaptable fue derivado en 10.3.3 y se repite aquí,

$$(\hat{k}_e/k_e)\ddot{\tilde{F}} + \alpha_D(\hat{k}_e/k_e)\dot{\tilde{F}} + \alpha_P\tilde{F} = (1-\hat{k}_e/k_e)\ddot{F}_d + \alpha_D(1-\hat{k}_e/k_e)\dot{F}_d.$$

Para el caso particular de la simulación ($\hat{k}_e/k_e=10$) y para $t \rightarrow \infty$,

$$\tilde{F} \cong -[0.5 \cos(3.142 t - 1.318)] Nt$$

lo cual coincide con el resultado de simulación de la figura 10.5. El objetivo de control de fuerza se verifica para el controlador adaptable, pues F_e converge a F_d y además presenta un transitorio aceptable.

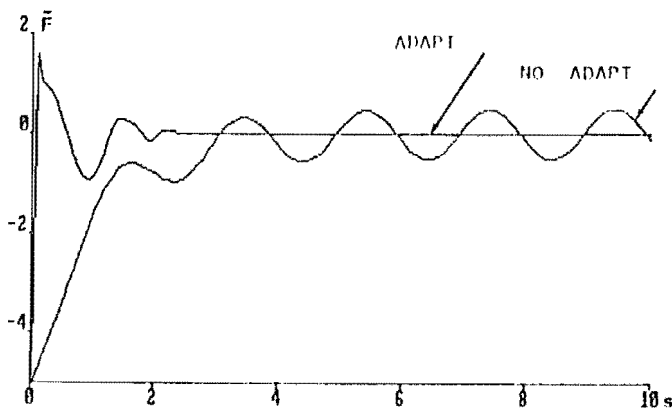


Figura 10.5 Error de fuerza; mecanismo de un grado de libertad.

Finalmente, la figura 10.6 muestra la evolución del parámetro estimado $\hat{\theta}_2 = j/k_e$ (su valor exacto es $0.05E-3$) de (10.22). La simulación muestra convergencia a un valor próximo al real.

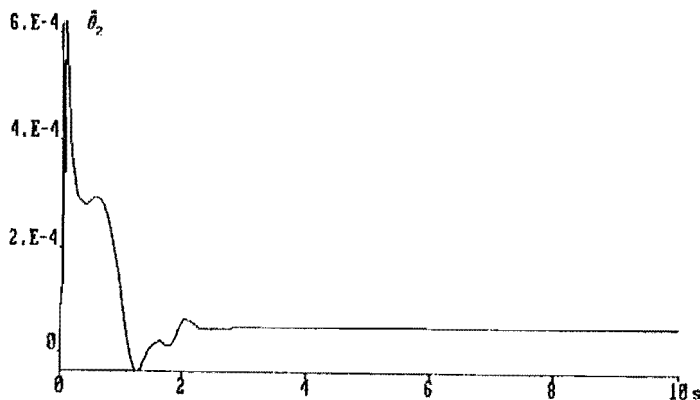


Figura 10.6 Parámetro estimado $\hat{\theta}_2$; mecanismo de un grado de libertad.

10.A APENDICE: Prueba de la propiedad 10.2

Expandiendo $L(p) \hat{\xi}\hat{\theta}$,

$$\begin{aligned} L(p) \hat{\xi}\hat{\theta} &= \dot{\hat{\xi}\hat{\theta}} + \hat{\xi}\hat{\theta} + \rho\hat{\xi}\hat{\theta} = \\ &= \dot{\hat{\xi}\hat{\theta}} + [L(p)\hat{\xi}]\hat{\theta} = \dot{\hat{\xi}\hat{\theta}} + \hat{\varphi}\hat{\theta} + \varepsilon(t) \end{aligned}$$

donde $\varepsilon(t)$ es un término que decae exponencialmente y depende de las condiciones iniciales de $L(p)$. □

11 CONCLUSIONES (CONCLUSIONS)

Conclusiones. En esta tesis se han propuesto algoritmos globalmente convergentes para resolver el problema de control adaptable de manipuladores robóticos con y sin interacción con el medio. En el planteo del problema se ha considerado incertidumbre en los parámetros dinámicos del manipulador y del medio con el cual interactúa. El desempeño de los algoritmos se ha ilustrado mediante ejemplos de simulación.

En la *parte II* se trata el problema relativo a manipuladores libres. Allí se ha establecido un marco general de análisis y diseño de controladores adaptables para el control de movimiento de manipuladores rígidos. La formulación del problema se hace en el campo de los sistemas de tiempo continuo. Es en este campo donde se han obtenido los primeros resultados rigurosos de estabilidad de sistemas de control adaptable para manipuladores, pues ofrece herramientas de análisis suficientemente desarrolladas. El esquema de estudio propuesto está basado en la teoría de pasividad y los conceptos de estabilidad de entrada-salida. El planteo de entrada-salida permite pensar el problema en términos de operadores y sus interconexiones, o sea de la estructura del sistema. Los resultados disponibles en el análisis de entrada-salida proveen un marco adecuado de estudio de estabilidad de controladores adaptables para manipuladores. Además, en la *parte II* se ha analizado un algoritmo nuevo de control adaptable de movimiento, el que resulta ser asintóticamente convergente al objetivo de control. Como futuras líneas de investigación, deberá estudiarse comparativamente el desempeño y robustez de distintos algoritmos propuestos en la literatura. La simulación y el análisis experimental sobre prototipos de laboratorio serán valiosos en este estudio.

En la *parte III* se ha tratado el control adaptable de manipuladores que interactúan con el medio. Partiendo del modelo cartesiano con fuerzas de interacción, se han propuesto algoritmos de control adaptable para resolver objetivos de control de impedancia, híbrido de impedancia/fuerza y de fuerza pura. En el primer caso no se incluye un modelo explícito del medio,

en el segundo se incluye un modelo de interacción (sensor de fuerza o medio) y en el tercero se incluye explícitamente el modelo del medio y se supone que los parámetros del mismo son desconocidos. En el capítulo 9 se ha considerado el control diseñado en base al modelo del manipulador descrito mediante sistemas singulares. A continuación se dan futuras líneas de trabajo en el tema. En relación a los controladores de fuerza será interesante, desde el punto de vista teórico, prescindir de suposiciones prácticas y de criterios de estabilidad práctica en las demostraciones de estabilidad. Esto podría estudiarse contemplando propiedades adicionales de pasividad relativas al manipulador como al modelo dinámico del medio. También resultará interesante incluir modelos más complejos asociados al medio. Otro campo de investigación de interés consiste en realizar estudios adicionales de robustez. Estos estudios deberán complementarse no sólo con simulaciones, sino fundamentalmente con observaciones experimentales en equipo prototipo de laboratorio. Efectos seguramente importantes presentes en el prototipo son la flexibilidad de juntas y eslabones, la fricción en las juntas y en el contacto del manipulador con el medio, la dinámica de sensores y actuadores, así como otras incertidumbres del manipulador y del medio y perturbaciones externas. Otro aspecto importante es la implementación discreta en tiempo y en amplitud de los algoritmos de control. Estos algoritmos resultan ser de alta complejidad de cálculo. Sin embargo las herramientas actualmente disponibles de cálculo y las previstas para un futuro cercano, permiten prever la factibilidad de implementación de los algoritmos incluso con pequeños intervalos de muestreo. Esto y una cierta robustez de los algoritmos, permitirán una aproximación suficiente a los resultados previstos en el análisis continuo desarrollado en esta tesis.

Conclusions. In this thesis some globally convergent algorithms for the adaptive control of unconstrained and constrained manipulators have been proposed. Adaptive control has been considered to attain high performance control under uncertainty in dynamic robot and environment parameters. Simulation results show good performance of the resulting adaptive control systems.

friction, sensor and actuators dynamics, other manipulator and environment uncertainties and external perturbations will be relevant. An important aspect is the discrete implementation of the control algorithms. Even though the algorithms are numerically complex, nowadays digital processors and the forthcoming ones, will allow their implementation. Small sample times and a certain robustness of the controllers can guarantee that discrete-time results approximate fairly well to the continuous-time results.

REFERENCIAS

Amestegui M., Ortega R., Ibarra J. (1987). "Adaptive linearizing-decoupling robot control: a comparative study of different parametrizations". Proc. 5th. Yale Workshop on Appl. of Adapt. Syst. Theory. Connecticut, NM.

An Ch., Hollerbach J. (1987). "Dynamic stability issues in force control of manipulators". Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Autom. Raleigh, CN, April.

Anderson B. et al. (1986). "Stability of adaptive systems: passivity and averaging analysis". MIT Press.

Arimoto S., Miyazaki F. (1984). "On the stability of PID feedback with sensory information". Int. Symp. Robotics Res., Betton Weeds, MIT Press.

Asada H., Slotine J.J. (1985). "Robot analysis and control". John Wiley.

Åström K., Wittenmark B. (1989). "Adaptive control". Addison-Wesley.

Blauer M., Bélanger P. (1987). "State and parameter estimation for robotic manipulators using force measurements". IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-32, No. 12, Dec.

Craig J. (1986). "Introduction to robotics", Addison-Wesley.

Craig J., Hsu P., Sastry S. (1986). "Adaptive control of mechanical manipulators". Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Autom. San Francisco, CA, April.

Craig J. (1988). "Adaptive control of mechanical manipulators". Addison-Wesley.

Desoer C., Vidyasagar M. (1975). *"Feedback systems: input-output properties"*. Academic Press.

Eppinger S., Seering W. (1987), *"Understanding bandwidth limitations in robot force control"*. Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Autom. Raleigh NC, April.

Fukuda T., Kitamura N., Tanie K. (1987). *"Adaptive force control of manipulators with consideration of object dynamics"*. Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Autom. Raleigh, NC, 1987.

Goldenberg A. (1988). *"Implementation of force and impedance control in robot manipulators"*. Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Autom. Philadelphia, PA. April.

Hogan N. (1985). *"Impedance control: an approach to manipulation. Parts I, II, III"*. ASME Journal of Dyn. Syst., Meas. and Control.

Ioannou P., Tao G. (1987). *"Frequency domain conditions for strictly positive real functions"*. IEEE Trans. on Autom. Control, Vol. AC-32, No. 1, January.

Judd R., Perttunen C., Mousseau C. (1987). *"Simultaneous force, torque, position and orientation control of a robot manipulator on a constrained surface incorporating force sensor feedback"*. Proc. American Contr. Conf., Minneapolis MN, June.

Kazerooni H., Sheridan T., Houpt P. (1986). *"Robust compliant motion for manipulators. Parts I and II"*. IEEE Journal of Robotics and Automation, Vol. RA-2, No. 2, June.

Kelly R., Ortega R. (1988). *"Adaptive control of robot manipulators: an input-output approach"*. Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Autom. Philadelphia, PA, April.

Khatib O., Burdick J. (1986). "*Optimization of dynamics in manipulator design: the operational space formulation*". IEEE Int. Journal of Robotics and Automation, Dec.

Khorrami F., Ozgüner V. (1988). "*Decentralized control of robot manipulators via state and proportional-integral feedback*". Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Autom. Philadelphia, PA, april.

Khosla P., Kanade R. (1985). "*Parameter identification of robot dynamics*", IEEE Conf. on Decision and Control. Fort Lauderdale, FL., Dec.

Kosut R., Friedlander B. (1985). "*Robust adaptive control: conditions for global stability*". IEEE Trans. on Autom. Control, Vol. AC-30, No. 7, July.

Kreisselmeier G., Narendra K. (1982). "*Stable model reference adaptive control in the presence of bounded disturbances*". IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-27, pp. 1169-75.

Landau I.D. (1979). "*Adaptive control: the model reference approach*". M. Dekker.

Landau I., Horowitz R. (1988), "*Synthesis of adaptive controllers for robot manipulators using a passive feedback system approach*". Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Autom. Philadelphia, PA, April.

La Salle J., Lefschetz S. (1961). "*Stability by Liapunov's direct method*". Academic Press.

Liu M., Chang W., Zhang L. (1988). "*Dynamic and adaptive force controllers for robotic manipulators*". Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Autom. Philadelphia, PA, April.

McClamroch N., Wang D. (1988). "Feedback stabilization of constrained robots", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 33, No. 5, pp. 419-426, May.

Middleton R., Goodwin G. (1986). "Adaptive computed torque control for rigid link manipulators". Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, Athens, Greece, Dec.

Nevins J., Whitney D. (1973). "The force vector assembler concept". Proc. 1st. CSIM-IFTOMM Symp. on theory and practice of robot manipulators (ASME). Udine, Italy, Sept.

Ortega R., Spong M. (1988). "Adaptive motion control of rigid robots: a tutorial". Proc. 1988 IEEE Conf. on Decision and Control, Austin, Dec.

Raibert M., Craig J. (1981). "Hybrid position/force control of manipulators". ASME Journal of Dyn. Syst., Meas. and Control.

Sadegh N., Horowitz R. (1987). "Stability analysis of an adaptive controller for robotic manipulators". Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Autom., Raleigh, C.N., April.

Salisbury J. (1970). "Active stiffness control of a manipulator in cartesian coordinates". Proc. 19th IEEE Conf. on Decision and Control, Dec.

Sastry Sh., Bodson M. (1989). "Adaptive control. Stability, convergence and robustness". Prentice Hall.

Slotine J., Li W. (1987a). "On the adaptive control of robot manipulators". Int. J. of Rob. Research, Vol. 6, No. 3.

Slotine J., Li W. (1987b). "Adaptive manipulator control: a case study". Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Raleigh, CN, March.

- Slotine J., Li W. (1987b'). "Adaptive strategies in constrained manipulation". Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Raleigh, CN, March.
- Slotine J., Li W. (1987c). "Adaptive robot control: a new perspective". Proc. 26th IEEE Conf. on Decision and Control, Los Angeles, CA, Dec.
- Spong M., Vidyasagar M. (1989). "Robot dynamics and control". John Wiley.
- Tao G., Ioannou P. (1988). "Strictly positive real matrices and the Lefschetz-Kalman-Yakubovich lemma". IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-33, No. 12, pp. 1183-1185.
- Tomizuka M. (1988). "On a relaxation of SPR condition in parallel MRAS-continuous-time case". IEEE Trans. on Autom. Control, Vol. 33, No. 10, October.
- Tourassis, V. (1988). "Principles and design of model-based robot controllers". Int. Journal of Control, Vol. 47, No. 5.
- Townsend W., Salisbury K. (1987). "The effect of Coulomb friction and stiction on force control". Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Autom., Raleigh, CN, April.
- Vidyasagar M. (1978). "Nonlinear systems analysis". Prentice-Hall, Inc.
- Vidyasagar M. (1986). "New directions of research in nonlinear system theory". Proc. of the IEEE, Vol. 74, No. 8, Aug.
- Whitney D. (1977). "Force feedback control of manipulator fine motions". ASME Journal of Dyn. Syst., Meas. and Control, Vol. 99, June.
- Willems J. (1971). "The analysis of feedback systems". MIT Press, Cambridge, MA.

Yabuta T. Chona A., Beni G. (1988). *"On the asymptotic stability of the hybrid position/force control scheme for robot manipulators"*. Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Autom., Philadelphia, PA, April.

Yoshikawa T., Sugie T., Tanaka M. (1987). *"Dynamic hybrid position/force control of robot manipulators -Controller design and experiment-"*. Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Autom., Raleigh, CN, April.