



27  
6

# Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE INGENIERIA

POTENCIALES ELECTRICOS DE  
CAPAS PARALELAS

T E S I S

Que para obtener el título de  
INGENIERO GEOFISICO  
*presenta*

DIEGO GARCIA JARA

FALLA DE ORIGEN

México, D. F.

1989



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

		Página.
	Prólogo .....	1
	Generalidades .....	5
I.1	Introducción .....	6
I.2	Ecuaciones Básicas .....	9
I.2.1	Ecuación General .....	11
	Breve solución a la ecuación de Laplace en coordenadas polares cilíndricas .....	15
	Ecuación diferencial de Laplace para un cam po potencial con simetría cilíndrica y su - solución general .....	20
I.2.3	Ecuación de Poisson .....	27
I.2.4	Condiciones de fronteras .....	29
I.2.5	La función Kernel y sus relaciones para pa rametros en el subsuelo .....	38
	Derivación de la relación de recurrencia de Flathe .....	41
	Derivación de la relación de recurrencia de Pekeris o relaciones de recurrencia de Sunde	47
I.3	Comentario .....	51
II	Fuente en la primera capa .....	53
II.1	Disertación para encontrar el potencial en la primera capa .....	54
II.2	Comentario .....	56'
III	Fuente en la segunda capa .....	57
III.1	Disertación para encontrar el potencial en la segunda capa .....	58
III.2	Comentario .....	54'
IV	Fuente en cualquier capa .....	65
IV.1	Disertación para el caso de "n" capas .....	66

	Página.
IV.2 Comentarios .....	71'
V Capas cilíndricas .....	72
V.1 Medio con fronteras coaxiales cilíndricas ...	73
V.2 Comentarios .....	79
Conclusiones .....	80
Apéndices .....	81
Apéndice A .....	82
Apéndice B .....	86
Apéndice C .....	88
Apéndice D .....	90
La diferencial exacta y su integración .....	92
Apéndice E .....	96
Bibliografía .....	98

## PROLOGO

Captar datos y sistematizar la información obtenida por métodos indirectos de los fenómenos que ocurren, en los diferentes medios, del habitat del hombre, es la labor del Ingeniero Geofísico; que le interesa estudiar y analizar para sacar conclusiones útiles y revertir algo provechoso de lo ya existente en la naturaleza, por su importancia los medios que se estudian son: La atmósfera, la litósfera, la hidrósfera y el espacio interestelar.

Los fenómenos que se producen en dichos medios, algunos son intrínsecos, otros triviales, pero no por eso menos difíciles, en los que interviene un gran número de variables, traduciéndolas luego a algoritmos matemáticos o bien partiendo de estos desarrollos matemáticos, tratar de darles una interpretación física. En Geofísica se ha logrado esto gracias a la incesante tenacidad de perfeccionamiento que ha buccado el Ingeniero, en su formación académica y profesional, consciente de la contribución vital que requiere el país y su sociedad en pleno desarrollo, en el cual él mismo está inmerso y que va en busca de la verdad, que ésta sólo se encuentra y se logra a la luz de la asimilación, comprensión y aplicación de las materias básicas con las que cuenta la ciencia y la tecnología, dos principalmente con las que han servido a la formación del pensamiento del hombre, estas son como es sabido la matemática, lenguaje maravilloso universal por excelencia, creado por la mente y la inteligencia humana, y la física que ha estado presente en la naturaleza desde su origen.

En la Ingeniería Geofísica existen diferentes métodos in directos de exploración o de investigación para el estudio de diversos fenómenos, por nombrar algunos: sismología, gravimetría, radiometría, percepción remota, eléctrica, etc., entre otros, y que es a partir de ellos en donde se apoya el Ingeniero Geofísico para emitir sus juicios, directrices y soluciones a seguir ante cualquier problema planteado.

Es también un hecho que el Ingeniero Geofísico se vale para sus investigaciones, de estudio o medición de campos físicos naturales, como son el de la gravedad terrestre y el geomagnético, mientras que por otro lado en el eléctrico y en el sísmico es el propio prospector el que crea artificialmente el campo físico que va a estudiar y analizar. Siendo la prospección eléctrica, uno de los métodos resolutivos de mayor apoyo a las demás prospecciones de estudio e investigación por su gran versatilidad y vitalidad económica.

En las siguientes páginas se expone el estudio de los potenciales eléctricos de capas paralelas; que se relaciona íntimamente con la prospección eléctrica y que tiene como objetivo encontrar el potencial eléctrico en cualquier capa.

Como el potencial hallado en un campo eléctrico es una magnitud aditiva se podrá hacer la integración de todos y cada uno de los potenciales captados, posteriormente encontrando la anomalía, se procede, a su interpretación.

En la matemática como en otras ciencias consta de diversas ramas, que para este propósito se tocan sólo algunas fases de ella, como: la aritmética, el álgebra, el cálculo, el cálculo diferencial integral, las ecuaciones diferenciales, hasta la moderna álgebra vectorial, conjugando todos estos conocimientos se pasa a los algoritmos matemáticos que sirven y son empleados para la solución más eficiente y rápida de problemas complicados, por medio de la informática se facilita el trabajo y la interpretación de datos.

Hecho esto como un esbozo general, se realiza una incursión conjunta a P. S. Laplace con sus estudios y análisis matemáticos, que son una contribución inapreciable no sólo a la Geofísica sino a diferentes ramas de la ciencia y de la Ingeniería.

En la física, partiendo de los estudios hechos por J. C. Maxwell con su teoría electromagnética, que es aplicada, acertadamente por numerosos investigadores, científicos e ingenieros a los fenómenos Geoelectricos.

Mencionando algunos aspectos interesantes desde las etapas tempranas hasta la madurez de la Geofísica se hace indispensable una lista de nombres no menos ilustres que le han dado un lugar especial entre las ciencias y que día a día estas contribuciones son más apreciadas por los investigadores porque incrementa la visión de los científicos e ingenieros en las ciencias que se someten encargandose de resolver y estudiar los problemas, con mejores horizontes y soluciones que atañen directa o indirectamente al universo en su conjunto.

Los métodos Geoelectricos se remontan al siglo XVIII así lo hace saber ( E. Orellana ) con los trabajos de Gray y Wheeler (1720) que tratan sobre la resistividad de las rocas, les sigue Watson (1746) que describe que el suelo es conductor posteriormente el inglés Robert Fox describe en (1815) el fenómeno de la polarización espontánea, a R. Fox, se le considera como " el abuelo de los Geofísicos ". Sin embargo el primer éxito Geofísico se le atribuye al ingeniero en minas alsaciano Conrad Schlumberger " padre de la prospección eléctrica " (1913) descubriendo un yacimiento de sulfuros en Bor ( Serbia ) por polarización espontánea, hallazgo Geofísico de mineral no magnético.

Siguiendo con esta lista de personajes tan variados en especialidades como en nacionalidades y credos estan Brown, Daft, Williams, Schilowsky, Frank Wenner, Sabba, S. Stefanescu, Raymond Maillet, G. Kunetz, Petrowsky, D. V. Golubonikov, Geneslay, Yarishev, Kraev, Semenov, I. V. Nazarenko, L. Cagniard, Tikhonov, Gish, Rooney, Slichter, Orellana, Mooney, Vanyan, Wetzel, G. V. Keller, Zohdy, Yungkil, ... , y otros tantos investigadores que han contribuido al desarrollo integral de la prospección eléctrica.

A este estudio que se expone y que tiene relación íntima con la prospección eléctrica y que tiene como objetivo encontrar el potencial eléctrico en cualquier capa, en terreno estratificado, se le ha denominado " POTENCIALES ELECTRICOS DE CAPAS PARALELAS ".



## I. GENERALIDADES

## I.1 INTRODUCCION

Existen problemas Geológicos y Geotécnicos con los que el Ingeniero Geofísico ha de enfrentarse, deducir y resolver, partiendo de datos obtenidos en campo por medio de métodos indirectos utilizados en prospección Geofísica, usados desde la superficie terrestre o bien por sondas bajadas a las profundidades en pozos.

Dos maneras de solución son sugeribles para abordar estos problemas:

Solución del Problema Directo, es determinar la curva de resistividades aparentes que se obtiene con algún dispositivo determinado, sobre el subsuelo cuya distribución de resistividades ya se conoce.

El problema directo en la prospección Geoeléctrica sobre medios estratificados, se refiere a la determinación del potencial producido en una zona considerada de interface.

Solución del Problema Inverso, es inferir la distribución vertical de resistividades aparentes, obtenidas en campo, colocando estos datos en un algoritmo o programa apropiado de filtraje se confrontan y se comparan con curvas patrón aproximando la solución en la interpretación.

Un ejemplo típico es el potencial producido en la superficie límite aire-tierra por una fuente puntual de corriente situada en dicha superficie, una vez hallada la solución puede extenderse, por superposición, al caso de varias fuentes puntuales o (electrodos de emisión), y en ge-

neral a cualquier dispositivo electródico.

Dos son los métodos principales que se han utilizado para dar solución al problema propuesto, los cuales son equivalentes en última instancia. El primero de ellos, cronológicamente, es el método de las imágenes empleado ya para medios estratificados, por J. C. Maxwell (1891) y aplicado a la prospección Geoeléctrica por el Geofísico alemán J. N. Hummel en (1929).

El segundo método es lo que se conoce como la integración de la ecuación de Laplace aplicada a casos de medios estratificados.

No se hace necesario describir y explicar aquí el método de las imágenes, ampliamente usado en la teoría de la electricidad. Debido a su amplitud y extensión que requeriría prácticamente desglosarlo como un tratado el cuál sale del objetivo de este análisis.

No obstante se toca someramente para fines de ilustración en el caso de dos capas en el apartado II.2

Por otro lado se establecen sólo algunas expresiones como: La solución de la ecuación de Laplace, en su forma de coordenadas cilíndricas, en forma general, dando paso a su aplicación en la Geofísica, además se exponen las coordenadas cartesianas junto con otras bases matemáticas importantes, al final del estudio, como apartados o apéndices.

Otra expresión que se utiliza y se establece es una con-  
secuencia de la ecuación de Laplace y ésta se le conoce co-  
mo ecuación de Poisson. Siendo ésta expresión más general  
a la solución de la ecuación de Laplace, para el potencial,  
tomando en consideración que se toma la divergencia de " $\rho$ "  
en función del campo " $\phi$ " y que éste a su vez está en fun-  
ción del potencial " $\phi$ ".

Siguiendo este orden se amplía el estudio a condiciones  
de frontera buscando solución para problemas que se presen-  
tan como: Fuente en la primera capa, fuente en la segunda  
capa, fuente en cualquier capa, finalizando con capas ci-  
líndricas.

## 1.2 ECUACIONES BASICAS

En el estudio y análisis del problema directo en la prospección Geoeléctrica se parte de:

Las ecuaciones de Maxwell en su forma vectorial.

	Dónde:	B	Inducción Magnética
		E	Campo eléctrico
$\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t}$	}	J	Densidad de corriente
		H	Campo magnético
$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$	}	U	Potencial eléctrico
		$\rho$	Densidad
		t	Tiempo
		D	Desplazamiento eléctrico

..... 1.1

Por tratarse de un campo estacionario. Habrán de anularse las derivadas temporales y tendremos.

$$\nabla \times E = 0 \quad \dots\dots\dots 1.2$$

$$\nabla \times H = J \quad \dots\dots\dots 1.3$$

La ecuación 1.2 nos dice que el campo eléctrico E es conservativo e irrotacional, por lo que deriva de un potencial escalar "U". Es decir que:

$$E = -\nabla U \quad \dots\dots\dots 1.4$$

Por otra parte, habrá de cumplirse la ley de Ohm, en su forma diferencial, para medios "Isotrópicos".

$$J = \sigma E \quad \dots\dots\dots 1.5$$

La cual nos dice que la densidad de corriente J en un punto, tiene la misma dirección y sentido que el campo E en el mismo punto y es proporcional a él. El factor de proporcio-

nalidad es la "Conductividad", " $\sigma$ " que no es otra cosa que la inversa de resistividad " $\rho$ ".

Como en ningún punto del medio conductor puede haber aparición ni desaparición de cargas, salvo en las fuentes de energía que se consideren, ocurrirá que.

..... I.10

### I.2.1 ECUACION GENERAL

Combinando la ecuación I.10 con las anteriores tendremos que:

$$\dots\dots\dots I.11$$

Que es la ecuación general de la prospección eléctrica con corriente continua que desarrollandola se obtienen:

$$\dots\dots\dots I.12$$

### I.2.2 ECUACION DE LAPLACE

El teorema de Gauss establece que el volumen integral de la divergencia de la corriente que atraviesa una región dada es igual al total de la carga encerrada, tal que para este caso se tiene.

Tomando  $V$  como un volumen infinitesimal encerrado en un punto dado; dando para este punto la siguiente expresión.

entonces

Si la conductividad que atraviesa es constante, el primer término desaparece y entonces se tiene la ecuación que

es conocida como la ecuación de Laplace, esta expresión representa un potencial armónico.

$$\nabla^2 U = 0$$

ó

$$\nabla^2 V = 0$$

} ..... I.13

La cual será válida en todo semiespacio conductor, pero no en donde hacen contacto los electrodos, ni en las superficies de discontinuidad de la resistividad, que aparecen en ciertos casos.



Una explicación válida para lo que ocurre en el punto de contacto y en la superficie de contacto es lo siguiente:

Si trazamos al rededor de un electrodo " A " y dentro del semiespacio inferior una superficie semiesférica, en cualquier punto de ella, por razones de simetría, la densidad de corriente  $\vec{j}$  tendrá el mismo valor, y estará dirigida radialmente.

La integral de  $\vec{j}$  sobre la superficie semiesférica será igual a  $I$  por lo que si el radio es " r " se tendrá.

$$\int \vec{j} \cdot d\vec{S} = I \quad \dots\dots\dots I.14$$

y por lo tanto:

$$j \cdot 2\pi r^2 = I \quad \dots\dots\dots I.15$$

de donde

$$j = \frac{I}{2\pi r^2} \quad \dots\dots I.16$$

o sea que el campo  $\vec{E}$  de un electrodo puntual es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia " r ".

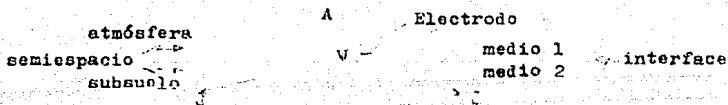


Fig.I.1 Vectores de densidad de corriente en un semiespacio homogéneo con electrodo puntual en la superficie límite.

Por lo que la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera M y N vendrá dada, según se deduce:

Cuando  $E = -\nabla U$  y resulta entonces que:

$$V_M - V_N = \int_N^M E \cdot dl \quad \dots\dots\dots I.17$$

Donde el camino de integración de la ecuación I.17 es indiferente, pues como se ha visto, el campo  $\vec{E}$  es conservativo; es decir al intercambiar los límites de integración sólo cambiará de signo la operación.

Y entonces, si son  $r_1$  y  $r_2$  las distancias respectivas de los puntos M y N al electrodo " A " tendremos.

$$V_M - V_N = U_M - U_N = \frac{10}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_2}^{r_1} \frac{1}{r^2} dr = \frac{10}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad \dots\dots\dots I.18$$

Si en vez de considerar diferencias de potencial queremos considerar potenciales absolutos, habrá que atribuir a un punto determinado el potencial cero.

Por convención se toma como origen de potencial un punto situado a una distancia infinita de la fuente de energía, por lo que hallaremos el potencial absoluto en el punto M calculando el límite de la expresión.

Para el potencial como sigue:

$$U_N^M = \frac{1}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \dots\dots I.18$$

para  $r_2 \rightarrow \infty$  que es:

$$\int_{r_1 \rightarrow \infty}^{\infty} U_N^M = \frac{1}{2\pi} \int_{r_1 \rightarrow \infty}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{\infty} \right) \dots\dots I.19$$

$$U_M = \frac{1}{2\pi} \sum \frac{I_i}{r_i} \dots\dots I.20$$

Como el potencial es una magnitud aditiva, si son varios los manantiales, o fuentes habrá que sumar algebraicamente los potenciales respectivos, de modo que:

$$U = \sum \frac{I_i}{r_i} \dots\dots I.21$$

Donde  $r_i$  es la distancia del manantial o fuente de índice "i" al punto considerado, e " $I_i$ " la intensidad de corriente que entra o sale por él, con su signo correspondiente.

Por otro lado si sucediera que  $\vec{E}$  variara en magnitud y dirección de un punto a otro a lo largo de la curva, la integral.

$$U_N^M = - \int_N^M \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_N^M E \cos \theta dl \dots\dots I.22$$

Sería una expresión muy semejante a la integral de línea a lo largo de la curva M, N.

Pero en el caso que estamos analizando es una integral cerrada, por ser un campo conservativo.

**BREVE SOLUCION A LA ECUACION DE LAPLACE EN COORDENADAS POLARES CILINDRICAS.**

La ecuación de laplace en coordenadas polares cilíndricas se expresa como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots I.23$$

Busquemos una solución para la forma:

$$u(r, \theta, z) = R(r) \Theta(\theta) Z(z) \dots\dots\dots I.24$$

sustituyendo la ecuación I.24 en I.23 tenemos:

$$R'' \Theta Z + \frac{1}{r} R' \Theta Z + \frac{1}{r^2} R \Theta'' Z + R \Theta Z'' = 0$$

Ahora dividiendo todo por  $U(r, \theta, z) = R(r) \Theta(\theta) Z(z)$

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{R'(r)}{r R(r)} + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0$$

El último término es una función solamente de "z". Que dando tres términos que no contienen "z". Entonces el último término es una constante que llamaremos "λ"; esto es:

$$\frac{Z''}{Z} = \lambda \dots\dots\dots I.25$$

y

$$\frac{R''}{R} + \frac{R'}{r R} + \frac{\Theta''}{\Theta} + \lambda = 0$$

multiplicando la última ecuación toda por "r".

$$r \frac{R''}{R} + \frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} r + \lambda r = 0$$

los términos son ahora separables y  $\frac{\Theta''}{\Theta}$  es una constante - llamada  $\mu^2$  por lo que escribimos.

$$\dots I.26$$

$$y \dots I.27$$

Que esta última expresión es una de las formas de las ecuaciones o funciones de Bessel.

Por lo que las ecuaciones I.25 y I.26 tienen como solución.

$$\dots I.28$$

y

$$\dots I.29$$

Donde  $A, A', B, y C$ , son constantes. Sin embargo la solución de la ecuación I.27. Excepto para  $A=0$  no puede ser expresada en terminos de un número finito de una función racional o de una función trigonométrica y a la vez como función exponencial.

Las soluciones I.28 y I.29 nos permiten retornar y sustituir  $u, v$  en la ecuación I.24 y así obtener la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas polares cilíndricas. Por lo que seremos capaces de construir y resolver problemas con soluciones particulares de la misma manera como se resuelven usando coordenadas rectangulares cartesianas en los temas desarrollados en los apéndices (ver apéndice "A"). Mientras tanto notamos que si el problema es tal que las coordenadas de  $\rho$  cubre o compensa los rangos enteros de  $\theta$  para cualquier valor que fijemos de  $\phi$  y  $z$ , entonces, para la función  $\psi$  será un valor singular,  $\psi$  deberá tener el mismo valor para  $\theta = 0$  y  $\theta = 2\pi$  de la ecuación I.29

se requiere que " $\rho$ " sea integrable. Sin la perdida generalmente de " $\rho$ " puede tomarse como entero positivo o cero.

Esta condición es general, pero no siempre se cumple y mucho menos en algunos problemas prácticos.

Esta solución a la ecuación de Laplace la hace Koefoed, Otto en su libro Geosounding Principles 1 (Resistivity Sounding Measurements) más concisa. Como veremos más adelante - cuando veamos la ecuación Diferencial para un campo potencial con simetría cilíndrica y su solución general.

CONTINUANDO CON LA SOLUCION:

Encontramos anteriormente que la forma de la solución depende de los valores de las constantes  $\lambda$  y  $n$ . Pudiendo asumir los casos siguientes:

i).-  $\lambda = 0, n > 0$

$$V = I_0 \left[ \frac{r^n}{n} \cos n\theta + \frac{r^n}{n} \sin n\theta \right] \dots \dots \dots I.30$$

donde el miembro del lado derecho es puesto en forma abreviada para una combinación lineal de todos los valores posibles para  $V$  estos los podemos escribir como sigue:

$$V = A r^n \cos n\theta + B r^n \sin n\theta + C r^{-n} \cos n\theta + D r^{-n} \sin n\theta + E r^{2n} \cos n\theta + F r^{2n} \sin n\theta + G r^{-2n} \cos n\theta + H r^{-2n} \sin n\theta \dots \dots \dots I.31$$

ii).-  $\lambda = 0, n = 0$

$$V = \frac{1}{2} \left[ \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} \right] \dots \dots \dots I.32$$

iii).-  $\lambda > 0, n = 0$

$$V = \frac{1}{2} \left[ \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} \right] \dots \dots \dots I.33$$

iv).-  $\lambda > 0, n > 0$

$$V = \int_0^z (V - \lambda r^n) \left( \frac{1}{\text{sen } \lambda r} \right) C e^{i\lambda z} \dots I.34$$

v).-  $\lambda = 0, n > 0$

$$V = \int_0^z (V - \lambda r^n) \left( \frac{1}{r} \right) C e^{i\lambda z} \dots I.35$$

vi).-  $\lambda < 0, n > 0$

$$V = \int_0^z (V - \lambda r^n) \left( \frac{1}{\text{sen } \lambda r} \right) C e^{i\lambda z} \dots I.36$$

vii).-  $\lambda < 0, n = 0$

$$V = \int_0^z (V - \lambda r^n) \left( \frac{1}{\text{sen } \lambda r} \right) C e^{i\lambda z} \dots I.37$$

viii).-  $\lambda < 0, n = 0$

$$V = \int_0^z (V - \lambda r^n) \left( \frac{1}{r} \right) C e^{i\lambda z} \dots I.38$$

Estas son otras soluciones las cuales provienen de  $\lambda$  y/o "n". Siendo numeros complejos.

El comportamiento de las diferentes funciones para cuando toma el valor de cero y frecuentemente tendiendo a infinito dan un cambio a las soluciones en un problema dado. Supongamos que insistimos que  $V$  deba ser finita para todos los valores de las variables independientes  $r$  y  $z$  inclusive  $r=0$  y  $z \rightarrow \infty$  y quisieramos tratar con una solución de la forma de la ecuación.

$$V = \int_0^z (V - \lambda r^n) \left( \frac{1}{\text{sen } \lambda r} \right) C e^{i\lambda z} \dots I.39$$

La única solución permitida deberá ser de la forma:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\sqrt{\lambda r}) e^{-\sqrt{\lambda z}} \dots I.40$$

Los términos contenidos  $Y_n(\sqrt{\lambda r})$  son excluidos porque  $Y_n(\rho) \rightarrow \infty$  como  $\rho \rightarrow 0$  y los términos contenidos en  $e^{-\sqrt{\lambda z}}$  son excluidos por que  $e^{-\sqrt{\lambda z}} \rightarrow \infty$  como  $z \rightarrow \infty$ .



## LA ECUACION DIFERENCIAL DE LAPLACE PARA UN CAMPO POTENCIAL CON SIMETRIA CILINDRICA Y SU SOLUCION GENERAL.

Anteriormente empezamos la derivación de la expresión para el campo potencial, y acordando para las condiciones descritas y partiendo de las ecuaciones de Maxwell. Definimos algunos conceptos que son específicamente relevantes para el flujo de corriente eléctrica en un medio de grandes dimensiones.

La densidad de corriente, denotada por  $\vec{j}$ , está definida como el cociente de la diferencial de la intensidad de corriente que pasa por un área orientada por ángulos rectos en la dirección del flujo de corriente, con respecto al lado de esa área.

La resistividad, denotada por  $\rho$ , está definida como la resistencia ofrecida por un volumen infinitesimal de una cara de un cubo al flujo de la corriente en una dirección perpendicular a un par de estas caras o caras, multiplicada por la dimensión longitudinal de ese cubo. Este deberá ser tomado en consideración posteriormente porque la resistencia ofrecida por un cuerpo aumenta cuando la longitud de el cuerpo esta en la dirección del flujo de la corriente, y decrece cuando la sección transversal del cuerpo es perpendicular al incremento del flujo de corriente. La dimensión física de la resistividad es por lo tanto, la resistencia a lo largo del tiempo, y sus unidades estan dadas en OHM-METRO.

La densidad de corriente está relacionada con la inten-

idad del campo eléctrico  $E$ , por la relación  $E = -\nabla V$ .

La cual es la ley Ohm, para el flujo de corriente eléctrica en un medio de grandes dimensiones.

El potencial eléctrico, denotado por  $V$ , en corriente directa satisface las condiciones de la ecuación diferencial de LAPLACE. La cual se escribe como:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Sin embargo, en el caso considerado en esta sección, las condiciones son tales que el campo potencial puede tener simetría cilíndrica con respecto a la línea vertical que viene desde la fuente de corriente para poder utilizar la expresión para la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas  $z$ ,  $r$ , y  $\theta$ ; "z" es la coordenada en la dirección vertical, y el sentido de las coordenadas  $r$  y  $\theta$  se muestran en la figura I.2 como elementos de las coordenadas cilíndricas la ecuación de Laplace por tanto quedará expresada como:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0$$



"z" en el eje perpendicular al círculo

Fig I.2 Elementos en coordenadas cilíndricas  
( Ver apéndice B ).

Si la solución es simétrica con respecto al eje vertical de coordenadas, entonces la primera y segunda derivada, del potencial con respecto a  $\theta$ , pueden ser cero. La ecuación simplificada es:

$$\dots\dots\dots I.41$$

Un procedimiento que frecuentemente se aplica para la solución de ecuaciones diferenciales parciales es que primeramente se buscan soluciones particulares y posteriormente la solución general se obtiene como una combinación lineal de soluciones particulares.

Las soluciones particulares como hemos visto se pueden expresar de diferente manera con diferente notación inclusive como para la ecuación. I.41 cuando no esta en función de "Z" en un supuesto caso esta sería expresada como:

Son obtenidas de este modo con el hecho de asumir la existencia de soluciones que tenga la forma; por ejemplo para nuestro caso del problema directo.

$$\dots\dots\dots I.42$$

Estas son soluciones que son un producto de una función de "r" solamente y funciones de "z" solamente. Con este paso la ecuación diferencial parcial I.41 puede ser sepa-

rada en dos ecuaciones diferenciales "ordinarias" de el mismo orden. Esto es efectuando lo siguiente:

Si sustituimos I.42 en I.41 y dividiendo todo sobre  $UW$ , entonces obtenemos.

$$\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{Ur} \frac{dU}{dr} + \frac{1}{W} \frac{d^2 W}{dz^2} = -\lambda$$

Esta ecuación es satisfecha si:

$$\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} = -\lambda \quad \dots\dots\dots \text{I.43}$$

y

$$\frac{1}{W} \frac{d^2 W}{dz^2} = \lambda \quad \dots\dots\dots \text{I.44}$$

donde " $\lambda$ " es una constante real arbitraria.

Las soluciones de la ecuación anterior es bien conocida y se expresa como:

$$W = C e^{-\lambda z} \quad \dots\dots\dots \text{I.45}$$

$$W = C e^{+\lambda z}$$

La ecuación diferencial similar para la ecuación I.41 - está dada por el desarrollo de la teoría de clase especial las cuales son llamadas funciones de Bessel.

En particular la solución a la ecuación I.43 puede escribirse como:

$$U = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r) + \dots\dots\dots \text{I.46}$$

En esta ecuación " $J_0$ " es la "función de Bessel de orden cero".

Fig. I.3 Ilustración gráfica de las funciones de Bessel de orden cero y orden uno.

Ahora combinando I.45 y I.46 obtenemos una solución particular de la ecuación diferencial I.41 resulta.

$$V = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r) + \dots \dots \dots I.47$$

$$V = C_1 J_1(\lambda r) + C_2 Y_1(\lambda r) + \dots \dots \dots I.47$$

En estas ecuaciones  $C$  y  $\lambda$  son constantes arbitrarias sin embargo cualquier combinación lineal de las soluciones son también una solución de la ecuación diferencial I.41 . Entonces para que  $\lambda$  valga para todo valor positivo desde cero a infinito damos dos constantes la oportunidad de variar en dependencia de  $\lambda$  , obtenemos la solución general de la ecuación I.41 .

$$V = \int_0^m [ J_0(\lambda r) + Y_0(\lambda r) ] d\lambda \dots \dots \dots I.48$$

En esta ecuación ambas  $J$  y  $Y$  son funciones arbitrarias de  $\lambda$  ; la forma especial de esas funciones se asumen o se toman en cualquier problema físico específico, dichas funciones se controlan por las condiciones de frontera.

La solución de la ecuación I.48 es generada apartir de la ecuación I.41 en el sentido de que todas contienen posibles soluciones para problemas específicos.

Por lo que habiendo encontrado la ventaja de escribir la ecuación I.48 en una forma en la cual contiene como termino separable " El Potencial " generado por una fuente puntual de corriente y de intensidad " I " localizado en la superficie de una tierra homogénea electricamente su potencial está expresado por:

$$V = \frac{F_1 I}{2\pi \rho_1 \sqrt{r^2 + z^2}} \dots\dots\dots \text{I.49}$$

Donde  $\rho_1$  es la resistividad del terreno homogéneo e " I " es la intensidad de corriente la ecuación I.49 puede ser escrita en forma similar por la ecuación I.48 por lo que es la bien conocida ecuación de la teoría de las funciones de Bessel y se le conoce como la INTEGRAL de LIPSCHITZ.

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \dots\dots \text{I.50}$$

Usando esta ecuación podemos escribir la ecuación I.49 en la forma:

$$V = \frac{F_1 I}{2\pi \rho_1} \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda \dots\dots\dots \text{I.49a}$$

La solución general de la ecuación diferencial 1.48 es por lo tanto escrita en la forma:

$$V = \int_0^{\infty} [C_1 e^{-\lambda z} + \Theta(\lambda) e^{-\lambda z} + \chi(\lambda) e^{-\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda \dots 1.51$$

donde  $\Theta(\lambda)$  y  $\chi(\lambda)$  son funciones arbitrarias de  $\lambda$ ; las soluciones para la forma de la ecuación 1.51 son válidas en todas las capas del subsuelo, pero las funciones  $\Theta(\lambda)$  y  $\chi(\lambda)$ , no necesariamente son las mismas en las diferentes capas - del subsuelo. En el caso de un punto cuyo origen de corriente está situado en la superficie del terreno de capas horizontales; podemos entonces escribir separadamente las expresiones para la solución en los diferentes sustratos como:

$$V_i = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} [C_i e^{-\lambda z} + \Theta_i(\lambda) e^{-\lambda z} + \chi_i(\lambda) e^{-\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda \dots 1.52$$

donde la "i" se refiere a las varias capas del subsuelo. sea  $i = 1, 2, 3, 4, \dots$

### I-2.3 ECUACION DE POISSON .

Si se expresa la divergencia de  $\mathbf{J}$  en función del campo  $\mathbf{E}$  y éste a su vez, en función del potencial  $V$  resulta.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot (\sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_f) = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{J}_f$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\sigma \nabla \cdot \nabla V + \nabla \cdot \mathbf{J}_f$$

de donde resulta y se obtiene

$$\nabla^2 V = -(\nabla \cdot \mathbf{J}_f - \sigma \nabla \cdot \nabla V) \dots \dots \dots \text{I.53}$$

Por lo que esta nueva expresión más general es llamada ecuación de POISSON, resolviendo y hallando el potencial tenemos.

$$V = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}}{r_1} du - \int \frac{\rho \nabla \cdot \nabla V}{r_2} du \dots \text{I.54}$$

Donde la primera integral representa el potencial primario en un medio homogéneo de resistividad  $\rho_1$  producido por las fuentes situadas a la distancia  $r_1$  del punto donde se calcula el potencial, ya que aquellos son los únicos puntos donde no se anula  $\nabla \cdot \mathbf{J}$ . La segunda integral representa una distribución de cargas, a las distancias  $r_2$  de donde se calcula el potencial de densidad,  $\rho \nabla \cdot \nabla V$  que es nula fuera de las superficies de discontinuidad de la resistividad.

La ecuación I.53 denota en su primer miembro del lado



izquierdo la ecuación de Laplace en su caso homogéneo, decimos  $\nabla^2 V = 0$ ; ecuación diferencial parcial homogénea de segundo orden primer grado, integrable para su solución y función vectorial continua para potenciales newtonianos y otras aplicaciones a la prospección eléctrica, y que expresada - además en forma más general genera la ecuación de Poisson cuyo miembro del lado derecho expresa ya lo no homogéneo, esperando por resultado al resolverla la forma  $V_{\Sigma} = V_H + V_P$ . Que es la solución general, que nos expresa la solución a la Homogénea más una solución particular que dependerá de las condiciones iniciales o condiciones de frontera como es en el caso del Problema Directo aplicado el potencial a capas paralelas como veremos a continuación.

#### I.2.4 CONDICIONES DE FRONTERA.

En el caso de un campo potencial determinado antes por una fuente puntual de corriente para la superficie de un terreno estratificado horizontalmente, las siguientes condiciones de frontera se deben de satisfacer.

- a).- Para cada uno de los planos de las fronteras en la superficie del contacto el potencial debe de ser -- continuo.
- b).- Para cada uno de los planos de las fronteras en su superficie la componente vertical de la densidad de corriente debe de ser continua.
- c).- Para el plano de la superficie la componente vertical de la densidad de corriente, y la intensidad del campo eléctrico debe de ser cero en cualquier lado excepto en una vecindad infinitesimal alrededor de la fuente de corriente; la razón para ello es que la densidad de corriente es cero, en vista y consideración de la condición (b) la componente vertical de la densidad de corriente deberá ser también cero en la tierra o terreno para una profundidad cero.
- d).- Cerca de la fuente de corriente el potencial deberá aproximarse infinitamente a:

$$\frac{\int_0^z \frac{1}{z''} \sqrt{r^2 + z''^2} dz''$$

- e).- A profundidad infinita el potencial deberá ser aproximadamente cero.

Acordándose para la condición mencionada en (a) para la profundidad de la íesima capa con plano de frontera,  $h_1$ , la

expresión para el potencial, ecuación I.52 en el ítem cál  
culo y en la (i+1) capa deberá ser el mismo. En primer tér-  
mino para la ecuación:

$$\int_0^{\infty} [e^{-\lambda_i z} + \alpha_i e^{-\lambda_{i+1} z} - \chi_i(\lambda) e^{-\lambda_i z}] J_i(\lambda) \lambda d\lambda = \int_0^{\infty} [e^{-\lambda_i z} + \alpha_{i+1}(\lambda) e^{-\lambda_{i+1} z} - \chi_{i+1}(\lambda) e^{-\lambda_{i+1} z}] J_{i+1}(\lambda) \lambda d\lambda.$$

Esta ecuación es solamente satisfecha para valores de  
"r" si los integrandos por ambos lados de la ecuación son  
iguales. Por lo que obtenemos la ecuación:

$$\alpha_i e^{-\lambda_i z} + \alpha_{i+1}(\lambda) e^{-\lambda_{i+1} z} - \chi_{i+1}(\lambda) e^{-\lambda_{i+1} z} = \dots \text{I.54}$$

con relación a las condiciones mencionadas antes en el inci-  
so (b) notamos que la componente vertical de la densidad de  
corriente es igual a la derivada de el potencial con respecto  
a "z" dividida por la resistividad bajo la capa considera-  
da. Usando la expresión para el potencial de la ecuación -  
I.52 la primera condición se cumple hasta aquí para la ecua-  
ción.

$$\int_0^{\infty} [(1 + \alpha_i(\lambda)) e^{-\lambda_i z} - \chi_i(\lambda) e^{-\lambda_i z}] J_i(\lambda) \lambda d\lambda = \int_0^{\infty} [(1 + \alpha_{i+1}(\lambda)) e^{-\lambda_{i+1} z} - \chi_{i+1}(\lambda) e^{-\lambda_{i+1} z}] J_{i+1}(\lambda) \lambda d\lambda.$$

Nuevamente, ésta ecuación sólo es satisfecha por los va-  
lores de "r" si los integrandos de ambos lados de la ecua-  
ción son iguales, por lo que obtenemos la ecuación.

$$\frac{1}{r} \left[ (1 - B_1(\lambda)) e^{-\lambda z} - X_1(\lambda) e^{-\lambda h} \right]$$

$$= \frac{1}{r} \left[ (1 - B_2(\lambda)) e^{-\lambda z} - X_2(\lambda) e^{-\lambda h} \right] \dots 1.55$$

Para satisfacer la condición mencionada bajo el inciso (c) primeramente diferenciamos la expresión para el potencial en la primera capa, ecuación 1.52 con respecto a "z" y entonces sustituimos z = 0. Entonces ahora obtenemos la ecuación:

$$\int_0^{\infty} \left[ -1 - B_1(\lambda) + X_1(\lambda) \right] C_1 e^{-\lambda h} \lambda d\lambda = 0$$

Para este punto necesitamos no hacer caso del primer término del integrando en esta ecuación, este término define el campo que puede existir en un terreno homogéneo, a el cual nos referimos como campo primario y a este primer campo automáticamente, satisface las condiciones de frontera. Sin embargo, tenemos que poner atención para el siguiente segundo término del integrando, el cual simultáneamente define la perturbación en el campo eléctrico. La componente vertical de la intensidad de el campo y la perturbación del campo deberá ser cero para la superficie y para todo valor de "r" incluyendo para la fuente u origen donde se encuentra la fuente puntual de localización de corriente considerada. Esta condición es satisfecha si el segundo término de el integrando es simultáneamente cero. Y resulta la ecuación:

$\chi(x, z)$  ..... I.56

Las condiciones mencionadas bajo el inciso (d) es la que automáticamente satisface la expresión primaria del potencial. Por lo que podremos asegurar solamente que la perturbación del potencial es finita para el origen y por lo tanto no tiene influencia de manera muy prolongada en la cuál el potencial total se tenga de forma infinita. Estas se encuentran analizando la Relaciones de Recurrencia (éstas se encuentran ampliamente tratadas en la Sec. 3.4 del Geosounding Principles 1, Koefoed pags. 35-36. Para la función:

$$D_1(x) = \chi_1(x)$$

es finita através del rango de integración y aproximadamente a cero cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Esto viene de la ecuación I.52 que indica la perturbación potencial que no puede ser infinita para el origen. Por lo que la condición (d) es satisfecha.

La condición mencionada en (e) requiere que en la capa más profunda indicada por la suscrita "n" o enésima capa la función  $\chi$  puede o debe en un momento dado ser cero, por que por otro lado el factor  $e^{-\lambda z}$  viene dando el potencial para un valor infinito para una profundidad infinita. De esta consideración resulta la ecuación.

$$\chi_n(x, z) = 0 \dots \dots \dots I.57$$

colocando la ecuación I.54 y I.57 da un sistema de  $2n$  ecuaciones en  $2n$  incógnitas o funciones desconocidas  $\Theta_{n+1}$  y  $X_{n+1}$ . En principio, tal sistema de ecuaciones es compatible y determinado o sea que tiene solución de el sistema  $(u_{n+1}, X_{n+1})$ , el cuál acordamos de la ecuación I.52 define el potencial - en la primera capa, incluyendo la superficie del terreno en donde la medición es hecha.

Para obtener su solución sustituimos primeramente las - ecuaciones I.56 en las primeras ecuaciones I.54 y I.55 y sustituimos la ecuación I.57 en la última de las ecuaciones I.54 y I.55 Para abreviar daremos la siguiente notación.

$$\begin{aligned} u_i &= \Theta_i \\ v_i &= \frac{1}{h_i} = \Theta_i^{(1)} \\ w_i &= \Theta_i / \sigma_i \end{aligned} \quad \dots\dots\dots \text{I.58}$$

El sistema de ecuaciones entonces queda:

$$\begin{aligned} (u_1 - v_1) \Theta_1 + u_1 \Theta_2 - v_1 X_2 &= 0 \\ (v_1 - u_1) \Theta_1 + p_1 u_1 \Theta_2 - p_1 w_1 X_2 &= (1 - p_1) u_1 \\ u_2 \Theta_1 + v_2 X_2 - u_2 \Theta_2 - v_2 X_2 &= 0 \\ -u_2 \Theta_1 + v_2 X_2 + p_2 u_2 \Theta_2 - p_2 w_2 X_2 &= (1 - p_2) u_2 \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} u_{n+1} \Theta_{n+1} + v_{n+1} X_{n+1} - u_{n+1} \Theta_n &= 0 \\ u_{n+1} \Theta_{n+1} + v_{n+1} X_{n+1} + p_{n+1} u_{n+1} \Theta_n &= (1 - p_{n+1}) u_{n+1} \end{aligned} \quad \dots\dots \text{I.59}$$

la solución de éste sistema de ecuaciones para  $\hat{Q}$ , se obtiene aplicando la regla de Cramer. Recordando que la regla de Cramer para  $\hat{Q}$ , es obtenida como el cociente de dos determinantes. El denominador es el determinante de la matriz - que está formado por los coeficientes de  $\hat{Q}$  y  $\hat{X}$  del lado de recho del sistema de ecuaciones. El numerador es el determinante de la misma matriz con los elementos de la primera columna reemplazada por los coeficientes del lado izquierdo del sistema de ecuaciones; entonces el denominador queda: " $\hat{Q}$ "

$$\begin{array}{l}
 (U_1 + V_1) - U_1 - V_1 \\
 (V_1 - U_1) + P_1 U_1 - P_1 V_1 \\
 + U_2 - V_2 - U_2 - V_2 \\
 - U_2 + V_2 + P_2 U_2 - P_2 V_2 \\
 \dots\dots\dots I.60 \\
 + U_{n-1} - V_{n-1} - U_{n-1} \\
 - U_{n-1} + V_{n-1} + P_{n-1} U_{n-1}
 \end{array}$$

y el numerador, el cual denotamos " $\hat{P}$ ".

$$\begin{array}{l}
 0 - U_1 - V_1 \\
 (1 - P_1) U_1 + P_1 U_1 - P_1 V_1 \\
 0 + U_2 + V_2 - U_2 - V_2 \\
 (1 - P_2) U_2 - U_2 - V_2 + P_2 U_2 - P_2 V_2 \\
 \dots\dots\dots I.61 \\
 0 + U_{n-1} + V_{n-1} - U_{n-1} \\
 (1 - P_{n-1}) U_{n-1} - U_{n-1} + V_{n-1} + P_{n-1} U_{n-1}
 \end{array}$$

El determinante para " $\tilde{P}$ " puede ser simplificado por adición toda columna par a la primera columna una operación la cuál no cambia el valor del determinante y esto resulta.

$$\begin{array}{r}
 -U_1 - U_2 - U_3 \\
 +U_1 - U_2 + U_3 \\
 0 + U_2 + U_3 - U_1 - U_2 \\
 0 - U_2 + U_3 + U_2 - U_3
 \end{array}
 \dots\dots\dots \text{I.61}$$

Este ejemplo nos da una idea clara para trabajar alguna configuración de una sola capa; para el caso de dos capas, las matrices para  $\tilde{P}$  y  $\tilde{S}$  son restringidas a cuatro elementos en la parte superior izquierda de las ecuaciones I.60 y I.61 expandiendo los determinantes obtenemos.

$$\begin{array}{l}
 \tilde{S} = \dots\dots\dots \\
 \tilde{P} = \dots\dots\dots
 \end{array}$$

Dividiendo numerador y denominador por  $(1+r_1)$  y sustituyendo para  $U_1$  la expresión acordada para la ecuación I.58 - obtenemos el caso de dos capas.

$$R_{12} = \frac{-k_2 \frac{e^{-2\gamma_2 h_2}}{1 - k_2 e^{-2\gamma_2 h_2}}}{1 - k_2 e^{-2\gamma_2 h_2}} \dots\dots\dots \text{I.62}$$

donde  $k_2$  es el coeficiente de reflexión  $\frac{(S_2 - P_2)}{(S_2 + P_2)}$ .

Similarmemente, para el caso de tres capas las matrices de cuatro por cuatro en la parte superior izquierda de las ecuaciones



ciones I.60 y I.61 expandiendo los determinantes y dividiendo numerador y denominador entre  $(1+k_1)(1+k_2)$ , obtenemos para el caso de tres capas.

$$H(\lambda) = \frac{1 + k_1 k_2 e^{-2\lambda h_1} + k_1 e^{-2\lambda h_2} + k_2 e^{-2\lambda h_3}}{(1+k_1)(1+k_2) + k_1 k_2 e^{-2\lambda h_1} + k_1 e^{-2\lambda h_2} + k_2 e^{-2\lambda h_3}} \dots I.63$$

**RESUMEN.**

Por las ecuaciones I.52 y I.43 el potencial para la superficie del terreno en las condiciones especificas en la sección anterior es:

$$V = \frac{I}{2\pi h} \int_0^{\infty} (1 - H(\lambda)) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \dots I.64$$

En ésta ecuación  $V$  es el potencial para un punto en la superficie; donde  $I$  es la intensidad de corriente emitida por la fuente de corriente,  $h$ , la resistividad de la primera capa,  $\lambda$  una variable de integración,  $r$  la distancia de la fuente de corriente al punto de medición y  $J_0$  "La función de Bessel de orden cero", la cuál es ilustrada en la figura I.3 y finalmente,  $H(\lambda)$  es una función frecuentemente referida y llamada como la " función Kernnel " la cuál está en función de las resistividades de las capas subyacentes,  $k_1, k_2, \dots$ , y para las profundidades de los planos de fronteras,  $h_1, h_2, \dots$ , donde: La función Kernnel puede ser expresada en esa parte del subsuelo como un coeficiente de parametros de dos determinantes, los cuales estan dados en las ecuaciones I.60 ( El determinante formado por el denominador )

y I.61 ( El determinante formado como numerador ). En esas ecuaciones abreviamos con las siguientes notaciones.

$$u_i = e^{-\lambda t_i}$$

$$v_i = 1/u_i = e^{+\lambda t_i}$$

$$P_i = \frac{P_i}{P_{i+1}}$$

I.2.5 LA FUNCION KERNEL Y SUS RELACIONES PARA PARAMETROS EN EL SUBSUELO.

La expresión para el potencial en la superficie está dada por la ecuación I.64 y sugiere que puede ser considerada convenientemente como una función  $K(x)$ , que está definida como:

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_0(kr) J_0(kx)}{k} dk \dots\dots\dots I.65$$

así como la expresión para el potencial viene expresada como:

$$V = \frac{I \rho}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_0(kr) J_0(kx)}{k} dk \dots\dots\dots I.66$$

La función  $K(x)$  fue introducida en la teoría de sondas de resistividad, por Slichter (1933). Pero la función  $B(x)$  y la función  $K(x)$  son referidas frecuentemente como función Kernel. En las expresiones que hemos venido tratando nos vamos involucrados con la función  $K(x)$ ; me refiero a la función Kernel de Slichter. Para la función  $B(x)$ , me referiré a la función Kernel de Stefanescu.

Una expresión para la función Kernel de Slichter en la forma de un cociente de dos determinantes, como habíamos establecido ya anteriormente, y que son derivadas fácilmente de las ecuaciones I.65, I.60 y I.61

De estas ecuaciones tenemos:

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_0(kr) J_0(kx)}{k} dk$$



siguiente figura (I.4)



Fig. (I.4) Ilustración del significado de las relaciones de recurrencia: Izquierda modelo de la capa original; centro suma de una capa para la parte más inferior (relación de Plathe); derecha suma de una capa para la parte superior del corte (relación de recurrencia de Pekeris).

El diagrama de la izquierda ilustra una secuencia original de capa en el subsuelo. El diagrama del centro ilustra el efecto de la relación de recurrencia de Plathe, la cual es sumada a una nueva capa a la parte inferior del corte original. El diagrama de la derecha ilustra el efecto de la relación de recurrencia de Pekeris, la cual es sumada a una nueva capa en la parte superior de la secuencia original del corte, pero al mismo tiempo, dar paso a la configuración del arreglo electrónico de la parte superior de la reciente capa sumada.

Pero estas relaciones de recurrencia tienen sus aplicaciones específicas.

La relación de recurrencia de Pekeris puede también aplicarse en la dirección contraria; esto es. Para suprimir o





Donde  $D_n$  es el determinante de la matriz obtenida de  $\tilde{D}_n$  reemplazando los elementos correspondientes de su última columna por los elementos correspondientes de la segunda columna de la derecha de la matriz para  $\tilde{D}_n$ . comparandola con la ecuación 1.60 tenemos entonces:

$$D_n^* = \begin{vmatrix} (u_1 + \dots) & - & u_1 & - & \dots \\ (u_1 - u_1) & + & u_1 & - & (u_1 - u_1) \\ & + & u_2 & - & \dots - u_2 - \dots \\ & - & u_2 & - & \dots - u_2 - \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & + & u_{n-1} & + & \dots - \dots \\ & - & u_{n-1} & + & \dots - \dots \end{vmatrix} \dots 1.70$$

Estas representan una relación interesante entre  $D_n^*$  y  $\tilde{D}_n$ . Estas relaciones pueden ser clasificadas por los siguientes pasos.

1) Intercambiando todas las columnas pares en  $\tilde{D}_n$  (excepto para las últimas columnas) con las columnas impares inmediatas a ellas sobre sus lados derechos.

2) Cambiando los signos de los elementos de todas las columnas pares.

Para cada uno de esos puntos el signo del determinante es cambiado. Entonces el número de puntos es impar, por lo tanto la operación entera cambia el signo del determinante. El aspecto interesante de la operación es esa, cuando comprobamos y comparamos el resultado de la matriz con la matriz para  $\tilde{D}_n$ , entonces las dos matrices representan o



se asemejan, excepto en la parte de  $V$  y  $W$  que tienen que intercambiarse. Recordando que  $V$  entonces encontramos:

Donde  $U$  representa  $\epsilon$ . Sustituyendo los resultados en la ecuación I.69 obtenemos la relación de recurrencia para el denominador de la función Kernel de Slichter.

$$D_{n+1} = \dots \dots \dots I.71$$

Un razonamiento enteramente analogo puede ser aplicado para el numerador de la función Kernel de Slichter. Dada en la ecuación I.67 la sola diferencia con respecto a la derivación para el denominador de dicha expresión es eso, para establecer la correspondencia entre  $V$  y  $W$ , es requerido un punto adicional, nombrando el cambio de signos de los elementos de la primera columna. Entonces, el número total de puntos es parejo y el total de operaciones es no reversible el signo del determinante. La relación de recurrencia para el numerador de la función Kernel de Slichter viene dada por:

$$N_{n+1} = \dots \dots \dots I.72$$

Esta es ya una ventaja al introducir nuevas funciones,  $D_n(u)$  y  $N_n(u)$ , definidas por:

$$E_n(u) = \dots \dots \dots \text{I.73}$$

$$H_n(u) = \dots \dots \dots$$

Con estas definiciones la función Kernel de Slichter es también considerada como el cociente de  $N(u)$  sobre  $E(u)$ . Sustituyendo las ecuaciones I.73 y I.72 obtenemos la relación de recurrencia de Flathe como:

$$\begin{aligned} N_{n+1}(u) &= E_n(u) - k_n N_n(u) \\ N_{n+1}(u) &= N_n(u) + k_n E_n(u) \end{aligned} \dots \dots \text{I.74}$$

Donde:  $k_n = \frac{E_n(u)}{N_n(u)}$

La relación de recurrencia de Flathe esta dada en la literatura Geofísica en diferentes formas. La forma de la ecuación I.74 es esencialmente debida a Onoreda (1960). Flathe (1955) considera las funciones  $F(u)$  y  $R(u)$  que relacionan a las funciones  $E(u)$  y  $N(u)$ , usadas anteriormente por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} F(u) &= N(u) - E(u) \\ R(u) &= N(u) + E(u) \end{aligned} \dots \dots \text{I.75}$$

Por un método de analogía derivación usada anteriormente, puede mostrarnos que para esas funciones las siguientes relaciones de recurrencia son válidas:

..... I.76

$H_{n+1}(x)$

Para saber aplicar las relaciones de recurrencia, deberemos de conocer las expresiones para las funciones con subíndice uno, esto es, las funciones correspondientes para un terreno homogéneo. El camino más conveniente para encontrar dichas expresiones es encontrar primero la expresión para  $S_2$  y  $N_2$  por expansión del cuarto elemento de la esquina superior izquierda de los determinantes de las ecuaciones I.60 y I.67. Utilizando también la ecuación I.73 obtenemos.

$$S_2 = \dots, N_2 = \dots$$

De la relación de recurrencia I.74 encontramos:

$$S_1 = N_1 = 1 \dots \dots \dots I.77$$

Finalmente, de las ecuaciones I.75 encontramos:

$$S_n = \dots, N_n = \dots$$

DERIVACION DE LA RELACION DE RECURRENCIA DE PEKERIS O  
RELACIONES DE RECURRENCIA DE SUNDE.

La relación de recurrencia de Pekeris es derivada por un método similar al que se usó en la sección anterior. El método involucra la expansión de determinantes adecuados, acordando para los sub-determinantes son formados por los elementos de los elementos de sus primeros renglones. Esto es lo más conveniente, sin embargo, muestran un procedimiento diferente.

Para este fin sumamos  $D_{n-1}$ , en ambos miembros de las condiciones de frontera, ecuación I.54, y dividimos esos miembros entre los correspondientes miembros de la ecuación I.55 y esto da.

$$\frac{1 - \alpha_1 e^{-\beta_1 h} + \alpha_2 e^{-\beta_2 h}}{1 - \beta_1 \alpha_1 e^{-\beta_1 h} - \beta_2 \alpha_2 e^{-\beta_2 h}} = \frac{1 - \beta_1 \alpha_1 e^{-\beta_1 h} + \beta_2 \alpha_2 e^{-\beta_2 h}}{1 - \beta_1 \alpha_1 e^{-\beta_1 h} - \beta_2 \alpha_2 e^{-\beta_2 h}} \dots I.78$$

Ahora introducimos una nueva función en cada una de las capas, las cuales denotamos como  $k_i$  y la que quedará definida como:

$$k_i(\lambda) = \frac{1 + \beta_i(\lambda)}{1 - \beta_i(\lambda)} \dots I.79$$

Esto debe ser notificado en la capa superior, donde  $h_{n-1}$  es cero y además  $\beta_i(\lambda) = X_i(\lambda)$ , la función  $k_i$  toma la for-

$$k_i(\lambda) = 1 + 2\beta_i(\lambda)$$

y entonces es igual a la función Kernel de Slichter, definida como la ecuación I.65 .

Por la definición de la función  $K$  (ecuación I.79) el miembro del lado derecho de la ecuación I.78 es igual a  $\int_0^{\infty} K(x) dx$ . Para obtener la relación entre el miembro del lado izquierdo de la ecuación I.78 y  $K$ , primero dividimos el numerador y el denominador del miembro del lado derecho de la ecuación I.79 entre  $X_1$  y entonces resolvemos esta ecuación para

$$1 + \theta_1 \left( \frac{1}{X_1} \right) = \dots$$

Esto da.

$$(1 + \theta_1) / X_1 = e^{2\lambda_1 X_1} (K_1) \dots \text{I.80}$$

Ahora dividimos numerador y denominador del lado izquierdo de la ecuación I.78 por  $X_1$  y sustituimos dentro de la ecuación I.80 y entonces la ecuación I.78 da.

$$\frac{(1 + \theta_1) e^{2\lambda_1 X_1} + (1 - \theta_1) e^{-2\lambda_1 X_1}}{(K_1 + X_1 e^{2\lambda_1 X_1} - K_1 - \theta_1) e^{2\lambda_1 X_1}} = \dots$$

Dividiendo numerador y denominador de el lado izquierdo de esta ecuación por  $e^{2\lambda_1 X_1}$ , introducimos la notación  $\tau$ , para representar el espesor de la capa la cual es igual a  $(X_1 - X_1)$ , y la notación  $P$  para  $\lambda_1 / \dots$ . La susodicha ecuación esta dada como.

Sigue:

$$K_{1+1} = \frac{K_1 (\tau + 1) - (e^{-\tau} - 1)}{e^{2\tau} (\tau + 1) - K_1 (e^{2\tau} - 1)} \dots \text{I.81}$$

notamos más ampliamente que, por la definición de la Tangente Hiperbólica, tenemos.

$$\frac{e^{2At} - 1}{e^{2At} + 1} = \tanh(At)$$

Entonces la ecuación I.81 queda.

$$1 - K_1 = \frac{K_1 - \tanh(At)}{1 + K_1 \tanh(At)}$$

Resolviendo esta ecuación para  $K_1$  obtenemos.

$$K_1 = \frac{K_{n+1} + \tanh(At)}{1 + K_{n+1} \tanh(At)} \dots \text{I.82}$$

La ecuación I.82 puede ser usada en el determinante de la función Kernel de Slichter en la capa superficial cuando los parámetros de la distribución del corte en las capas son conocidos. Puede saberse esto, encontrando primero una expresión para la función  $k$  en el sustrato, indicado por el subíndice "n". Esta expresión puede obtenerse de la definición de la función  $K$  ecuación I.79 combinada con las condiciones de frontera,  $Y_n = 0$  en el sustrato. acordado en la ecuación I.57 por lo que obtenemos.

$$k_n = \dots \text{I.83}$$

Partiendo de estas expresiones para la función  $k$  en el sustrato, podemos encontrar la función  $K$  en cualquiera de las otras capas por la aplicación y recurrencia de la ecuación

ción I.82 finalmente llegamos a  $K_1$ , la cual es la función Kernel de Slichter definida en la ecuación I.65 y relacionada con el potencial de superficie denotada por la ecuación I.66 .

Será necesario notar que la aplicación de recurrencia de la ecuación I.82 podrá suprimirse para cualquier valor de subíndice " i " . En general, por lo tanto,  $K_1$  representa la función Kernel de Slichter que obtuvimos si la íesima capa superior donde estuviese y las mediciones donde estuviesen acarreadas fuera sobre sus superficies. La aplicación de la ecuación I.82 o sea esta cantidad, al sumarse a la nueva capa para complementar la secuencia de la capa superior.

### I.3 COMENTARIO.

Para entender la relación entre cantidades que son medidas y los parámetros que definen la resistividad en el subsuelo estratificado, y así ir preparando el camino a la interpretación cuantitativa de las mediciones, es necesario encontrar las relaciones para el potencial eléctrico en la superficie del terreno. La derivación de estas relaciones serán considerablemente simples si consideramos primero el campo potencial para la superficie de una fuente puntual de corriente.

El potencial de la superficie en el caso realístico donde se consideran dos electrodos de corriente, es encontrado por adición algebraica, para un electrodo puntual o aislado.

El caso para el cuál el potencial es derivado en ésta parte está definido por las especificaciones siguientes:

- 1).- El subsuelo consiste en un número considerado en un momento dado como finito de capas separadas una de otra por fronteras planas horizontales. La profundidad de las capas tienen espesores finitos.
- 2).- Cada una de las capas es electricamente homogénea así como electricamente isotrópica.
- 3).- El campo es generado por una fuente puntual de corriente que está localizada para la superficie del terreno.
- 4).- La corriente emitida por la fuente es corriente directa.

Las especificaciones respecto a la constitución del sub



suelo dado anteriormente, es comunmente usado como base para la interpretaci3n de los datos de los sondeos de resistividad. No obstante es generalmente, reconocido que esas especificaciones no son m3s que una esquematizaci3n de las condiciones reales del subsuelo, las cuales son considerablemente m3s complejas.

## II. FUENTE EN LA PRIMERA CAPA

## II.1 DISERTACION PARA ENCONTRAR EL POTENCIAL EN LA PRIMERA CAPA.

Como se ha visto en las secciones anteriores existen algunas variantes entre los métodos que se usan, donde se observan, las ventajas y desventajas de los algoritmos que con frecuencia se emplean y que muchas de las veces facilitan o dificultan el camino de cálculo, por lo que se deben de tomar en cuenta los parámetros necesarios, para hallar su solución.

Sean  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  las resistividades de las dos primeras capas, el espesor de la primera, y  $r$  la distancia del punto de observación  $M$  al electrodo de emisión, y al electrodo  $A$  situado en la superficie del terreno y considerando como fuente puntual de corriente ver la Figura (II.1). En la ausencia de la segunda capa, el potencial  $V_m$  observado en el punto  $M$  sería.

$$V_m = \frac{I \rho_1}{2\pi R} \frac{1}{r} = \frac{e}{r} \dots\dots\dots II.1$$

donde se ha representado por "e" (la emisividad) a la fracción que multiplica a la inversa de  $r$ .

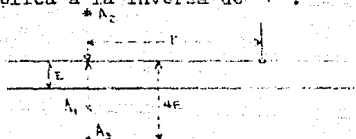


Figura (II.1) Cálculo del potencial en la superficie de un corte de dos capas, por el método de las imágenes.

El efecto de la segunda capa se suele calcular en el má todo de las imágenes mediante la inclusión de una fuente ficticia o imagen , de ubicación simétrica de la de , respecto del contacto entre las dos capas, y de emisividad donde es el llamado factor de reflexión.

..... II.2

Pero, por existir dos superficies límites, A, se reflejará en la del terreno produciendo una fuente ficticia A<sub>1</sub>, - simétrica respecto de dicha superficie, la cual se reflejará a su vez en el contacto entre las dos capas y así sucesivamente, obteniendo la serie infinita de imágenes emuncia da.

Las distancias de estas imágenes al punto M pueden calcularse mediante la expresión general.

..... II.3

donde  $h_n$  es la distancia  $h_0$ , pues las distancias verticales al suelo se incrementan a cada reflexión en el valor  $2h$ .

Por otra parte, las emisividades de las fuentes imagen se obtienen multiplicando por el mismo factor  $K$  cuando el reflector es el contacto entre las dos capas y por la unidad cuando se trate de la superficie tierra-aire. Por lo tanto la resistividad del aire se toma con un valor infinito, y las emisividades de las sucesivas fuentes imagen serán respectivamente.

Como sigue:

Observese que la distancia y emisividad de las fuentes  $q_1$  y  $q_2$  son iguales. El potencial en  $M$  será la suma de él debido a la fuente real y a todas las imágenes, las cuales pueden agruparse por pares, en virtud de lo anterior. De modo que se escribirá finalmente:

$$V_M = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \dots \right) \dots\dots II.5$$

Que es una serie que converge lentamente, pero que resuelve el problema propuesto. Cuando hay más de dos capas, como he situado anteriormente la cuestión se complica notablemente, por lo que es preferible obtener la solución por otro método.

Hasta aquí lo que puedo inferir respecto a una fuente en la primera capa.

## II.2 COMENTARIO

En el caso cuando tenemos un medio delimitado por un plano como frontera y es homogéneo e isótropo que separa a un semi-espacio o semi-infinito con diferentes resistividades  $\rho_1$  y  $\rho_2$  la función potencial puede ser determinada como se ha expuesto y es dada por dos alternativas.

Primero utilizando el método de las imágenes.

O bien expandiendo más fácilmente:

La serie expuesta por la expresión II.5 que aunque converge lentamente resuelve satisfactoriamente el problema planteado.

### III. FUENTE EN LA SEGUNDA CAPA

### III.1 DISERTACION PARA ENCONTRAR EL POTENCIAL EN LA SEGUNDA CAPA.

Abordando el problema ahora para dos capas, se emplea la ecuación de Laplace en su forma diferencial en coordenadas cilíndricas, hallando su solución por separación de variables. Sean  $r, z, \theta$  con su origen en el electrodo A. En todos los puntos del espacio, excepto en el origen, el potencial habrá de cumplir con la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 V = 0 \quad \dots\dots\dots I.13$$

La expresión en coordenadas cilíndricas y ya en forma simplificada, se escribe simplemente.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots\dots I.41$$

Ya que el término en  $\theta$  se anula por simetría del problema.

Como el Laplaciano del potencial no se anula en el origen, se trata de un problema no homogéneo, cuya solución será la suma de la solución general del problema homogéneo con una integral particular de la solución no homogénea. (Ecuación de Poisson).

Usando el método de separación de variables se tiene:

$$V = R(r) \cdot Z(z) \quad \dots\dots\dots I.42$$

sustituyendo esta expresión de  $V$  en la ecuación I.41 se llega

$$R(r) \left( \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + Z(z) \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad \dots\dots III.1$$



donde las derivadas parciales se han convertido en totales, por ser, tanto  $W$  como  $Z$ , funciones de una sola variable.

Para que se verifique la última ecuación, cuyos dos términos son independientes entre sí, por ser función de variables distintas, ambos términos habrán de ser iguales a un mismo parámetro, pero con signos opuestos. Sean  $A^2$  asignada a este parámetro.

Entonces:

$$W = A^2 Z \dots\dots\dots I.44$$

$$Z = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right) \dots\dots\dots I.43$$

cuyas soluciones respectivas ya conocemos.

$$\left. \begin{aligned} W &= 0 \\ W &= C_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots III.2$$

donde  $J_0(x)$  es, como de costumbre, la función de Bessel de primera especie y orden cero. Cualquier combinación lineal, de las dos soluciones será solución de la ecuación homogénea III.1, la combinación más general se obtendrá haciendo.

$$W = A_1 J_0(\sqrt{1-x^2}) + A_2 J_0(\sqrt{1-y^2}) \dots\dots\dots III.3$$

Y que los coeficientes arbitrarios  $A_1$  y  $A_2$  sean funciones del parámetro  $A_1$  e integrando respecto de esta variable desde cero hasta infinito y obtenemos.

$$V = \dots \text{I.48}$$

Para obtener la solución general del problema no homogéneo, sumaremos a la solución general I.48 de la homogénea una solución particular de la primera. Entre éstas, la más sencilla es la correspondiente a un semi-espacio uniforme de resistividad  $\rho_1$  ya estudiada y que es:

$$V = \dots \text{I.49}$$

O sea la expresión:

$$\dots \text{I.16}$$

Pero que ahora está en el sistema de coordenadas cilíndricas que estamos utilizando. A fin de poder expresar la suma de las dos soluciones en forma más compacta, utilizaremos la conocida integral de Weber- Lipschitz.

$$\dots \text{I.50}$$

Resulta entonces

$$V_1 = \frac{I \rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} \dots \text{I.51}$$

Siendo

$$\left. \begin{aligned} A'(\lambda) &= A(\lambda) \frac{1}{2\pi} \\ B'(\lambda) &= B(\lambda) \frac{1}{2\pi} \end{aligned} \right\} \dots \text{III.4}$$

El subíndice de  $V$  en la fórmula anterior alude a que esta es válida en la primera capa. Para la segunda, el potencial será análogamente

$$V_2 = \frac{I \rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} [C(\lambda)e^{-\lambda z} - D(\lambda)e^{-\lambda' z}] J_0(\lambda r) d\lambda \quad \dots \text{III.5}$$

donde no se incluye la solución particular, dado que en esta capa no hay fuentes de emisión, y por lo tanto, el problema es homogéneo. Conviene aclarar que la presencia en esta fórmula de la resistividad  $\rho_1$  de la primera capa, y no de la  $\rho_2$  obedece a razones de conveniencia, para la más sencilla aplicación de las condiciones de contorno. La validez de este cambio resulta de que aún no han sido determinadas las funciones  $C(\lambda)$  y  $D(\lambda)$ , por lo que puede introducirse en las fórmulas cualquier factor arbitrario, en este caso  $\rho_1/\rho_2$ .

Las soluciones generales I.51 y III.5 resolverán el problema propuesto, una vez que se determinen las funciones  $A(\lambda)$ ,  $E(\lambda)$ ,  $C(\lambda)$  y  $D(\lambda)$ .

Es de verse que desde el punto de vista práctico, sólo interesa el potencial en la superficie del terreno, único observable en general, y si se calcula el potencial en el interior de la segunda capa, es sólo por ser necesario para la resolución del problema propuesto.

Para la determinación de dichas funciones, se aplicarán las condiciones de contorno:

- a)  $V_2$  habrá de anularse en el infinito, por tratarse de

un potencial, luego entonces tendremos:

b) El campo eléctrico no puede tener componente normal a la superficie  $Z=0$ , ya que el semiespacio superior es aislante, luego entonces habrá de ser:

Como esta condición se cumple en la solución particular como condición de contorno, bastará con imponersela ahora a la general de la homogénea.

Y será.

$$\frac{\partial V_2}{\partial z} = [-\lambda A(\lambda) e^{-\lambda z} + \lambda C(\lambda) e^{\lambda z}] \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \rho(\lambda, \phi) d\lambda$$

que habrá de anularse para  $Z=0$ , y como es  $\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \rho(\lambda, \phi) d\lambda$  en general, habrá de ser

$$-\lambda A(\lambda) + \lambda C(\lambda) = 0$$

o sea

$$A(\lambda) = C(\lambda)$$

Las expresiones de los potenciales  $V_1$  y  $V_2$  quedarán ahora en la forma

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \left[ e^{-\lambda z} + e^{\lambda z} \right] \rho(\lambda, \phi) d\lambda \\ V_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \left[ e^{-\lambda z} - e^{\lambda z} \right] \rho(\lambda, \phi) d\lambda \end{aligned} \right\} \dots \text{III.6}$$

c) En el contacto entre ambas capas ( $z=0$ ) habrá de ser  $V_1 = V_2$  (continuidad del potencial, que incluye las condiciones de contorno), luego se tendrá:

$$e^{-\alpha_1 z} + A_1 e^{\alpha_1 z} = e^{-\alpha_2 z} + B_2 e^{\alpha_2 z} \quad \text{..... III.7}$$

d) La continuidad de las componentes normales del vector  $\vec{J}$  para  $z=0$  exige que sea:

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial V_2}{\partial z}$$

que aplicada a las ecuaciones III.6 da:

$$\rho_1 \alpha_1 (e^{-\alpha_1 z} - A_1 e^{\alpha_1 z}) = \rho_2 \alpha_2 (e^{-\alpha_2 z} + B_2 e^{\alpha_2 z}) \quad \text{..... III.8}$$

Eliminando  $A_1$  entre las ecuaciones III.6 y III.7 resulta:

$$A_1 (1 + \alpha_1) e^{\alpha_1 z} = B_2 (1 - \alpha_2) e^{\alpha_2 z}$$

$$\frac{(1 - \alpha_1) e^{-\alpha_1 z}}{(1 + \alpha_1) e^{\alpha_1 z}} = \frac{(1 - \alpha_2) e^{-\alpha_2 z}}{(1 + \alpha_2) e^{\alpha_2 z}} = e^{-2\alpha_2 z} \quad \text{..... III.9}$$

donde se ha puesto que

$$k = \frac{\rho_1 \alpha_1}{\rho_2 \alpha_2}$$

que el mismo factor de reflexión utilizado en el método de las imágenes.

Sustituyendo la expresión III.9 y haciendo  $z=0$  resulta finalmente

$$V_1 = \frac{III}{IV} \left( 1 + \frac{k \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) \quad \text{..... III.10}$$

y que puede escribirse también

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \dots \dots \dots \text{III.11}$$

que es la solución buscada para el potencial en la superficie límite tierra-aire.

La identidad de este resultado con la ecuación II.5 obtenida por el método de las imágenes se prueba fácilmente. Desarrollando en serie el integrando, por lo que se obtiene.

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{r'}{r} \cos\theta + \frac{1}{2} \left( \frac{r'}{r} \right)^2 (3\cos^2\theta - 1) + \dots \right]$$

Expresión que puede integrarse término a término, por medio de la fórmula de Weber-Lipschitz

$$\int_{\Sigma} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' = \int_{\Sigma} \rho(\mathbf{r}') \left[ \frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2} \cos\theta + \dots \right] d\tau' \dots \dots \dots \text{III.12}$$

volviéndose a encontrar así la ecuación II.5 lo que demuestra la equivalencia de ambos métodos.

### III.2 COMENTARIO

Para el análisis y estudio en el caso de hallar el potencial en la segunda capa, se realiza por medio de la ecuación de Laplace, en forma diferencial, encontrando su solución por separación de variables.

Hecho que se subraya con el empleo, de coordenadas cilíndricas y el encuentro de funciones que complementan la solución, al resolver las ecuaciones diferenciales, que se denominan funciones de Bessel de primera especie y de orden cero.

Cuyos coeficientes son encontrados, mediante la integral de Weber-Lipschitz. Que conduce a su vez a establecer la expresión del potencial en la capa deseada.

Dicha expresión tiene su relación con el factor de reflexión o coeficiente de reflectividad; utilizado también en el método de las imágenes, con lo que se viene a comprobar la equivalencia entre métodos, que se han analizado con anterioridad.

#### IV. FUENTE EN CUALQUIER CAPA



IV.1 DISERTACION PARA EL CASO DE " n " CAPAS.

El procedimiento de cálculo que se hace para dos capas es el mismo que para el caso de tres y cuatro capas, considerando los potenciales  $V_3$  , y  $V_4$  en el interior de las nuevas capas y aplicandoles las mismas condiciones de contorno (c) y (d) pero con los índices de cada capa correspondiente, y resolviendo el sistema de ecuaciones que resulta para las funciones  $A(x)$ ,  $B(x)$ , etc.

Como es obvio, la condición de contorno (a) es aplicable a la última capa. Este procedimiento puede extenderse sin dificultad para el caso general de "n" capas.

En resumen, el potencial en la superficie de un medio estratificado puede expresarse en la forma.

$$V = \frac{I_0}{2\pi} \int_0^{\infty} W_n(\lambda) J_0(\lambda r) \lambda^{-2} \dots \dots \dots \text{IV.1}$$

Donde  $W_n$  es una función de los espesores y resistividades de las capas del corte, así como el parámetro de integración  $\lambda$  y cuya expresión, para el caso de dos capas, aparece explícitamente en la ecuación III.11

Ahora haciendo extensivo el estudio para el caso de "n" capas resultan las siguientes expresiones:

"n" potenciales,  $V_1$  ,  $V_2$  , .....  $V_n$  .....  $V_n$  de la forma siguiente:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{I_0}{2\pi} \int_0^{\infty} [A_1 e^{-\lambda z} + A_2 e^{-\lambda z} + A_3 e^{-\lambda z}] J_0(\lambda r) \lambda^{-2} \dots \dots \dots \\ V_2 &= \frac{I_0}{2\pi} \int_0^{\infty} [A_1 e^{-\lambda z} + A_2 e^{-\lambda z}] J_0(\lambda r) \lambda^{-2} \dots \dots \dots \\ V_n &= \frac{I_0}{2\pi} \int_0^{\infty} [A_n e^{-\lambda z} + A_{n+1} e^{-\lambda z}] J_0(\lambda r) \lambda^{-2} \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \text{IV.2}$$

donde  $A_i$ ,  $B_i$  son funciones de  $r$  que han de determinarse por las condiciones de contorno.

La anulación del potencial en el infinito exige que  $A_i \rightarrow 0$ . Por otra parte, de la ausencia de componente normal del campo en la superficie  $r = a_i$ , se deduce que  $B_i = 0$ , del mismo modo que en el caso de dos capas. (Por la condición de (b))

Cada ecuación del sistema IV.2 tiene dos funciones por determinar, por lo que hay en total  $2n$  funciones, que quedan reducidas a  $(2n-2)$  por ser ya conocidas  $A_1$  y  $B_1$ , en virtud de las condiciones anteriores. Si para cada contacto o interfaz, (excepto para la que representa la superficie del terreno) se dan dos ecuaciones de condición, se tendrá entonces  $(2n-2)$  ecuaciones, con lo que el sistema quedará determinado. Tales ecuaciones de condición pueden establecerse para cada contacto, expresado por una parte, la continuidad del potencial, y por otra, la de la densidad de corriente normal al contacto.

La primera, para el contacto "i" exige la igualdad de los integrandos de  $V_i$  y  $V_{i+1}$  para la profundidad  $r_i$  de dicho contacto, por lo que se tendrá.

$$A_i(r_i) + B_i(r_i) = A_{i+1}(r_i) + B_{i+1}(r_i) \dots \dots \dots \text{IV.3}$$

En cuanto a la segunda, que se expresa, según la ecuación

$$J_i = J_{i+1} \dots \dots \dots \text{IV.4}$$

exige que:

$$\sum_{i=1}^n (A_i e^{-\lambda_i t} - A_i e^{-\lambda_i t}) = \sum_{i=1}^n (A_i e^{-\lambda_i t} - A_i e^{-\lambda_i t}) \dots IV.5$$

El sistema de ecuaciones será pues,

$$\begin{aligned} (1+A_1) e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t} - A_1 e^{-\lambda_1 t} - A_2 e^{-\lambda_2 t} &= 0 \\ \dots \dots \dots \\ A_1 e^{-\lambda_1 t} - A_1 e^{-\lambda_1 t} - A_2 e^{-\lambda_2 t} - A_2 e^{-\lambda_2 t} &= 0 \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n A_i e^{-\lambda_i t} - \sum_{i=1}^n A_i e^{-\lambda_i t} - \sum_{i=1}^n A_i e^{-\lambda_i t} + \sum_{i=1}^n A_i e^{-\lambda_i t} &= 0 \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n A_i e^{-\lambda_i t} + \sum_{i=1}^n A_i e^{-\lambda_i t} - \sum_{i=1}^n A_i e^{-\lambda_i t} &= 0 \end{aligned} \dots IV.6$$

Sustituyendo  $\lambda_i$  por  $A_i$ , poniendo  $V_i = e^{-\lambda_i t}$  y multiplicando cada ecuación por  $e^{\lambda_i t}$ , con el valor respectivo de  $\lambda_i$ , queda,

$$\begin{aligned} (1+A_1)V_1 + A_2 - A_2V_1 - A_2 &= 0 \\ \dots \dots \dots \\ A_1V_1 + A_2 - A_2V_1 - A_2 &= 0 \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n A_i V_i + \sum_{i=1}^n A_i - \sum_{i=1}^n A_i V_i - \sum_{i=1}^n A_i &= 0 \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n A_i V_i + \sum_{i=1}^n A_i - \sum_{i=1}^n A_i V_i - \sum_{i=1}^n A_i &= 0 \end{aligned} \dots IV.7$$

Este sistema es resuelto partiendo de las últimas ecuaciones hacia adelante, hasta determinar  $H_1$ , de donde se pasa directamente a la función característica de Slichter mediante la igualdad

$$H_0 = \dots + 2H_1 + \dots \dots \dots \text{IV.8}$$

Sin embargo existe un modo más comodo de cálculo empleando el algoritmo de Sunde y la fórmula de Vanyan.

Esta función característica incluye la solución fundamental y se expresa en función de las factores de reflexión  $r_i$  y de exponenciales de los espesores, incluyendo el potencial perturbador debido a la presencia de más de una capa, esto es:

$$1 + \dots = 1 + \dots \dots \dots \text{IV.9}$$

En la que la fracción que sigue al coeficiente 2 es la función característica utilizada por Stefanescu, que corresponde a dicho potencial perturbador, y que denominaremos por  $N_n$ . En el caso más general de "n" capas figura en la cantidad subintegral como una expresión de la forma:

$$1 + \dots = N_n \dots \dots \dots \text{IV.10}$$

Donde  $N_n$  es la función característica "completa", esto es, que incluye la solución fundamental ecuación VII.11 a la que se le denomina ecuación característica de Slichter, aunque la diferencia entre la función de Stefanescu  $N_n$ , y la de Slichter  $N_n$  parece trivial pero no es así. Ya que

la función característica de Slichter tiene propiedades semejantes a la curva de resistividades aparentes y otras - más.

Por lo tanto la función característica de Slichter admite, dos expresiones algebraicas equivalentes a ella, que son respectivamente de King y de Vanyan.

Por lo que Sunde las utiliza para cálculos de cortes de tres o más capas (1949) en el que parte del factor de reflexión  $K_{n-1}$  correspondiente a las dos últimas capas, y se van calculando sucesivamente las expresiones  $L_1, M_1, \dots, \dots, L_n, M_n$ , hasta llegar a  $M_{n-1} = M_n$ . Las fórmulas son por lo tanto las siguientes:

$$L_1 = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$M_1 = \frac{1 + L_1 e^{-2\lambda_1 z_1}}{1 - L_1 e^{-2\lambda_1 z_1}}$$

.....

$$L_i = \frac{Z_i - Z_{i+1} - L_{i+1} M_{i+1}}{Z_i + Z_{i+1} + L_{i+1} M_{i+1}} \dots \dots \dots \text{IV.11}$$

$$M_i = \frac{1 + L_i e^{-2\lambda_i z_i}}{1 - L_i e^{-2\lambda_i z_i}}$$

.....

$$K_{n-1} = \frac{Z_2 - Z_1 M_{n-1}}{Z_2 + Z_1 M_{n-1}}$$

$$M_{n-1} = \frac{1 + L_{n-1} e^{-2\lambda_{n-1} z_{n-1}}}{1 - L_{n-1} e^{-2\lambda_{n-1} z_{n-1}}}$$

.....

siguiendo este procedimiento puede calcularse, por ejemplo:

..... IV.12

Las expresiones así obtenidas para  $V_n$  en la forma de Slichter cumplen las condiciones siguientes:

- a)  $V_n$  tiene la forma de cociente entre dos sumas de términos del tipo.

donde

$$V_n = \frac{R_{1n} + S_{1n}}{R_{2n} + S_{2n}} \quad \text{..... IV.13}$$

- b) El número de términos del numerador igual al denominador, es  $2^{n-1}$  siendo  $n$  el número de capas del corte.
- c) Los términos del numerador están siempre afectados por signo positivo.
- d) Los términos del denominador son los mismos del numerador pero la mitad de ellos tienen signo negativo, siendo positivos los restantes.

Los términos negativos son los que contienen un número impar  $k_i$ .

## IV.2 COMENTARIO

En esta parte se hace patente que se da una extensión en el procedimiento de cálculo como fué visto para el caso de dos capas y que por consiguiente es el mismo para el caso de tres, cuatro, cinco o más capas, llegando a obtener una expresión más general que nos involucra ahora con las condiciones de contorno que se contemplan y se aplican al utilizar la expresión IV.1 que se hace extensiva a los "n" sus tratos que se tengan, formulando otras tantas para los potenciales que se deseen encontrar.

Es de hacer notar que es apartir de aquí donde se tiene por así decirlo la libertad de utilizar los diferentes algoritmos que mejor convenga a nuestras necesidades, como se ha observado existen muchas similitudes entre métodos - pero que cada uno guarda sus propias características.

Vistas estas desde las condiciones de contorno nos encontramos con los analisis hechos por Slichter, otro por Stefanescu y los no menos usados por Sunde y Flathe; que son utilizados ampliamente por su flexibilidad al manejar un gran número de datos en los algoritmos de computación y facilidad de cálculo. Esto ha implicado el estudio de algunas relaciones de recurrencia para facilitar más aún las expresiones que se manejan tanto en los determinantes como en las matrices, estos analisis han sido hechos por Slichter, Pekeris y Flathe, que en forma por demás formal vienen a complementar las soluciones a los problemas que se puedan plantear en la Prospección Eléctrica.

V. CAPAS CILINDRICAS



## V.1 MEDIO CON FRONTERAS COAXIALES CILINDRICAS

El problema teórico en la naturaleza se tiene presente al emplear funciones potenciales en un medio con fronteras coaxiales cilíndricas, como es el caso en el cual trata el problema de un pozo perforado de diámetro  $d_0$  y resistividad  $\rho_0$  penetrando una capa de espesor infinito y teniendo una resistividad,  $\rho_1$ .

En suma este puede ser una capa cilíndrica entre las  $p_1$  redes de una zona sana y la roca intacta, la cual tiene que venir saturada con lodo de perforación infiltrada por su porosidad, y también tenga una tercera resistividad,  $\rho_2$ .

Un bosquejo más exacto de la formulación del problema es como sigue: Teniendo un pozo perforado con radio  $d_0$ , y saturado con lodo de perforación que tiene una resistividad  $\rho_0$ , como aparece en la figura, (V.1).

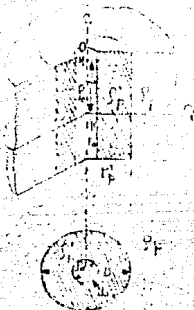


Figura (V.1) Geometría de un medio con fronteras cilíndricas coaxiales.

El cual está delimitado por un cilindro infinito de radio exterior,  $R_1$  y en el primer cilindro de roca teniendo una resistividad  $\rho_1$ , afuera en el segundo cilindro toda la roca tiene una resistividad  $\rho_2$ .

Donde encontramos el potencial a lo largo del eje del pozo, causado por una fuente de corriente localizada también en el eje de dicho pozo.

Usando un sistema de coordenadas cilíndricas; con el eje "Z" alineado a lo largo del eje del pozo, y con el origen de la fuente de corriente. Por conveniencia, definiremos las medidas longitudinales en términos del radio del pozo y esto es:

Las funciones potenciales  $V_1(r, z)$ ,  $V_2(r, z)$ , y  $V_3(r, z)$  para el trabajo de campo como en el pozo y en el medio circundante deberá satisfacer las siguientes condiciones.

- 1.- Deberá satisfacer la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 V = 0 \dots\dots\dots I.13$$

Para cada punto excepto el origen (La fuente de corriente).

Entonces tendremos simetría axial.

En este problema la ecuación de Laplace se reduce a la forma.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots I.41$$

2.- Para cada distancia grande,  $r \rightarrow \infty$ , el potencial será aproximadamente cero.

3.- Cerca de la fuente de corriente la función se aproximará al potencial debido a la fuente de corriente en un medio homogéneo e isotrópico teniendo una resistividad  $\rho_0$ :

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla^2 V = -j_0 \quad \text{..... V.1}$$

y donde  $V$  la función potencial tiende al infinito en el mismo orden como  $1/r$ . Entonces la función potencial tendrá la forma.

$$V_0 = V + V_0^* \quad \text{..... V.2}$$

donde  $V_0^*$  es finito y continuo que satisface la ecuación de Laplace para todos los puntos en el pozo perforado excepto en el origen, donde es cero.

4.- Para las fronteras entre los medios o planos frontera, deberá existir continuidad en el potencial.

$$V_1(r_0) = V_2(r_0) \quad \text{..... V.3}$$

$$V_1(r_0) = V_2(r_0) \quad \text{..... V.4}$$

5.- La componente normal de la densidad de corriente a través de las fronteras es continua.

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V_1}{\partial r} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial V_2}{\partial r} \quad \text{..... V.5}$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V_1}{\partial r} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial V_2}{\partial r} \quad \text{..... V.6}$$

6.- La función potencial es la misma para el valor negativo de "Z" como para valores positivos de "Z".

Usando el método de Fourier para resolver la ecuación - I.41, y dando una solución la cual es el producto de dos - funciones.

$$V = f_1(r) \cdot f_2(z) \dots \text{I.42}$$

donde  $f_1$  es una función solamente de "r", y  $f_2$  es una función solamente de "z", diferenciamos la solución propuesta y sustituimos en la ecuación I.41 dividiendo posteriormente por el producto de  $f_1$  y  $f_2$  tenemos:

$$\dots \dots \dots V.7$$

como anteriormente argumentamos, que el radio  $\frac{r}{a}$  deberá ser un término constante, por lo que se define la solución:

$$\dots \dots \dots$$

de las cuales se obtienen dos ecuaciones separando diferenciales.

$$f_1''(r) + \lambda^2 f_1(r) = 0$$

$$f_2''(z) - \lambda^2 f_2(z) = 0$$

La solución particular de la primera de estas ecuaciones contiene las funciones, también expresadas con la notación

de Fourier por contener los valores expresados en  $J_0(\lambda r)$  y  $J_1(\lambda r)$ , la forma compacta sería la de Euler, pero en este caso se prescinde de ella, para la segunda ecuación, las soluciones son funciones de Bessel de primera y segunda clase,  $J_0(\lambda r)$  y  $J_1(\lambda r)$ , de orden cero para pequeños argumentos. Por lo que la solución a la ecuación I.41 consistirá de los siguientes productos  $J_0(\lambda r) Z(\lambda z)$ ,  $J_1(\lambda r) Z(\lambda z)$ , como de  $Y_0(\lambda r) Z(\lambda z)$ , y de  $Y_1(\lambda r) Z(\lambda z)$ .

Por lo que una condición sería requerir que el potencial NO dependa del signo de "Z", por que la solución de la ecuación I.41 no puede contener términos de la forma siguiente:  $J_0(\lambda r) Z(\lambda z)$  y  $Y_0(\lambda r) Z(\lambda z)$ , además que sus coeficientes deberán ser cero.

Por lo que la solución completa a la ecuación I.41 queda:

$$V = \int_0^{\infty} A(\lambda) J_0(\lambda r) Z(\lambda z) d\lambda + \int_0^{\infty} B(\lambda) J_1(\lambda r) Z(\lambda z) d\lambda \dots \text{V.8}$$

donde:  $A(\lambda)$  y  $B(\lambda)$  son funciones de los parámetros " $\lambda$ ".

En un medio como (El pozo perforado), la función potencial deberá satisfacer las condiciones expresadas en las ecuaciones V.1 y V.2

$$V = \int_0^{\infty} A(\lambda) J_0(\lambda r) Z(\lambda z) d\lambda + \int_0^{\infty} B(\lambda) J_1(\lambda r) Z(\lambda z) d\lambda \dots \text{V.9}$$

Esta última es la forma de "Weber-Lipschitz".

La función  $V^*$ , por el momento es finita y continua a través de todo el espacio, no puede por lo tanto contener términos tales como  $e^{-\lambda r}$ , la cual tiende a infinito con  $r \rightarrow \infty$ .

Por lo que la ecuación V.2 está definida así:

$$V^* = \int_0^{\infty} A_n e^{-\lambda r} Y_n(\theta) P_n(\cos \theta) d\lambda \quad \dots \quad V.9$$

La función potencial en un medio  $\rho_1$  vendrá dada por la siguiente ecuación:

$$V_0 = \int_0^{\infty} A_n(\lambda) e^{-\lambda r} Y_n(\theta) P_n(\cos \theta) d\lambda + \int_0^{\infty} B_n(\lambda) e^{-\lambda r} Y_n(\theta) P_n(\cos \theta) d\lambda \quad \dots \quad V.10$$

En un medio  $\rho_2$  la función potencial es:

$$V_{\rho_2} = \int_0^{\infty} A_n(\lambda) e^{-\lambda r} Y_n(\theta) P_n(\cos \theta) d\lambda + \int_0^{\infty} B_n(\lambda) e^{-\lambda r} Y_n(\theta) P_n(\cos \theta) d\lambda \quad \dots \quad V.11$$

En el medio exterior o más externo  $\rho$ , la función potencial no contendrá términos que involucren  $e^{-\lambda r}$  la cual tiende a infinito para valores grandes del argumento:

$$V_{\rho} = \int_0^{\infty} A_n(\lambda) h_n(\lambda r) Y_n(\theta) P_n(\cos \theta) d\lambda \quad \dots \quad V.12$$

## V.2 COENTARIOS

## CONCLUSIONES.



En este capítulo se realiza un análisis a la solución de un medio con fronteras coaxiales cilíndricas, que en la praxis se presenta en los trabajos Geotécnicos de perforación o bien en la explotación de los hidrocarburos, para ello se hace un bosquejo lo más apegado al planteamiento de un pozo al ser perforado.

Tomando en consideración lo que sigue:

1o.- Se delimitan los cuerpos cilíndricos que intervienen, tanto internos, como externos.

2o.- Se deberán tener presentes las condiciones del medio circundante, que aplicadas en ecuaciones matemáticas se conjuntan en funciones potenciales, hallando su solución por medio de coordenadas cilíndricas. Quedando por cumplirse las siguientes condiciones:

I.- Con la ecuación de Laplace.

II.- Cuando se tenga la fuente a una distancia grande el potencial tenderá a cero.

III.- Cuando se tenga la fuente relativamente cercana la función se aproximará al potencial.

IV.- Entre fronteras deberá existir continuidad.

V.- La componente normal entre fronteras, la densidad de corriente es continua.

VI.- La función potencial es la misma para valores positivos o negativos.

Una opción que se expone en este capítulo es el uso del método de Fourier, para la solución de la ecuación de Laplace, cuando se tiene simetría axial.

Cuando se satisfacen las condiciones de las ecuaciones V.1 y V.2, que se exponen en la IIIa. condición. Permite establecer la solución por medio de la función de Weber-Lipschitz.

## CONCLUSIONES

Desde el inicio de este trabajo se hace una recapitulación mencionando, los métodos que se usan y se emplean en la Ingeniería Geofísica, como disciplina, para después analizar la aplicación que se le puede dar a la Prospección Eléctrica, en el estudio de los potenciales eléctricos en capas o sustratos paralelos.

En la búsqueda de aplicaciones, de ingeniería, conjunta-  
da a otras disciplinas y a la investigación, se tocaron te-  
mas que complementaron este trabajo: tales como:

El potencial.

La ecuación de Laplace.

La ecuación de Poisson.

La función Kernel.

La relación de recurrencia de Flathe.

Que han sido y serán temas por más motivantes aun para  
el lego en la materia.

Esperando hacer alguna contribución a la Ingeniería Geo-  
física, se elaboró este trabajo.

**APPENDICES**

## APENDICE A

Cuando surgen expresiones como las que se ha planteado anteriormente resulta necesario, reflexionar y analizar más sobre su interpretación matemática y física, para su adecuada aplicación a medios estratificados y emplearlos en forma por demás formal en la Geofísica y en particular a la prospección Geoelectrica.

Por lo que revisaremos algunos conceptos.

### COORDENADAS CURVILINEAS.

Transformación de coordenadas.- Consideremos las coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$  de un punto expresadas en función de las variables  $(u_1, u_2, u_3)$  en la forma.

$$x=x(u_1, u_2, u_3); \quad y=y(u_1, u_2, u_3); \quad z=z(u_1, u_2, u_3) \dots\dots\dots A.1$$

o bien despejando  $(u_1, u_2, u_3)$

$$u_1=u_1(x, y, z); \quad u_2=u_2(x, y, z); \quad u_3=u_3(x, y, z) \dots\dots\dots A.2$$

Las funciones que aparecen en A.1 y A.2 se suponen uniformes y con derivadas continuas de manera que la correspondencia entre las ternas  $(x, y, z)$  y  $u_1, u_2, u_3$  es biunívoca. En la práctica puede ocurrir que esta hipótesis no se cumpla en algunos puntos determinados, en cuyo caso deberán hacerse las consideraciones pertinentes.

Dado un punto P de coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$  se le puede asociar, según A.2, un conjunto único de números  $(u_1, u_2, u_3)$  que llamaremos coordenadas curvilineas de P. Los

sistemas de ecuaciones A.1 ó A.2 definen las fórmulas de transformación de coordenadas.

Es decir el espacio  $E^3$  del sistema cartesiano esta formado por tres conjuntos de planos perpendiculares entre sí. Si estos planos sufren una deformación, entonces el espacio queda formado por un conjunto de superficies alabeadas pero la intersección de tres de ellos seguira definiendo un punto  $p(u_1, u_2, u_3)$  que estará definido en un sistema de coordenadas curvilíneas por la intersección de las tres superficies:  $u_1 = \text{constante}$ ,  $u_2 = \text{constante}$ ,  $u_3 = \text{constante}$ .

TRANSFORMACION EN COORDENADAS CURVILINEAS (Jacobiano de transformación).

Sea la familia de superficies:  $u_1 = u_1(x, y, z)$ ,  $u_2 = u_2(x, y, z)$ ,  $u_3 = u_3(x, y, z)$  la intersección entre ellas define el punto  $P_0$  de coordenadas  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  Definido también en el sistema de coordenadas;  $u_1 = u_1(x, y, z)$ ,  $u_2 = u_2(x, y, z)$ ,  $u_3 = u_3(x, y, z)$  o sea  $(u_1, u_2, u_3)$  que será de coordenadas curvilíneas. Los desplazamientos entre los puntos a través de las intersecciones de las superficies serán:

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} dx + \frac{\partial u_1}{\partial y} dy + \frac{\partial u_1}{\partial z} dz \dots \dots \dots A.3$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x} dx + \frac{\partial u_i}{\partial y} dy + \frac{\partial u_i}{\partial z} dz \dots \dots \dots A.4$$

$$\dots \dots \dots A.5$$

sustituyendo A.5 en A.4

$$ds_1 = \sqrt{h_1} \cdot P_1 h_1 \dots\dots\dots A.6$$

$$\sqrt{h_1} \cdot P_1 h_1 = J h_1 \dots\dots\dots A.7$$

sustituyendo A.6 en A.7

$$ds_1 = h_1 du_1$$

$$ds_2 = h_2 du_2$$

$$ds_3 = h_3 du_3$$

donde  $h_1, h_2, h_3$  son los factores de escala.

calculando el argumento tenemos:

$$dA = A_1 ds_1 = h_1 h_2 h_3 du_1$$

$$JA = \left| \nabla u_1 \times \nabla u_2 \right| \cdot h_1 h_2 h_3$$

$$dA = \left| J \begin{pmatrix} x & y & z \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \right| du_1 du_2 du_3$$

$$dA = \left| J \begin{pmatrix} x & y & z \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \right| du_1 du_2 du_3 \dots\dots\dots A.8$$

$$J \begin{pmatrix} x & y & z \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots A.9$$

se denomina jacobiano de transformación

Y en general para un espacio en tres dimensiones la expresión queda:

$$dV = \left| J \begin{pmatrix} x & y & z \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \right| du_1 du_2 du_3 \dots\dots\dots A.10$$

Jacobiano de Transformación

Ejemplo.- Dada la siguiente transformación  $u=x^2-y^2$ ,  $v=xy$  donde  $1 \leq u \leq 2$ ,  $1 \leq v \leq 2$ . Dibujar las regiones en los sistemas  $(x,y)$ ,  $(u,v)$  y calcular el jacobiano de transformación.

si:  $u=1$   $x^2 - y^2 = 1$  } Hiperbolas  
 $u=2$   $x^2 - y^2 = 2$  }

si:  $v=1$   $xy = 1$  } Hiperbolas  
 $v=2$   $xy = 2$  }

$x^2 + y^2 = 1$   
 $x^2 + y^2 = 2$   
 $xy = 1$   
 $xy = 2$

$$J \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2x^2 + 2y^2$$

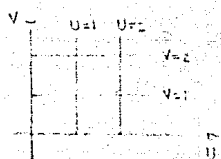


Fig. A.1

$J \begin{vmatrix} u & v \\ x & y \end{vmatrix} = 2(x^2 + y^2)$ , Jacobiano de Transformación.

$(dA)_{x,y} = J \begin{vmatrix} u & v \\ x & y \end{vmatrix} (dA)_{u,v}$

APENDICE B

COORDENADAS CILINDRICAS (Elementos).

Variables que intervienen:

$$\Sigma \quad (r, \theta, z)$$

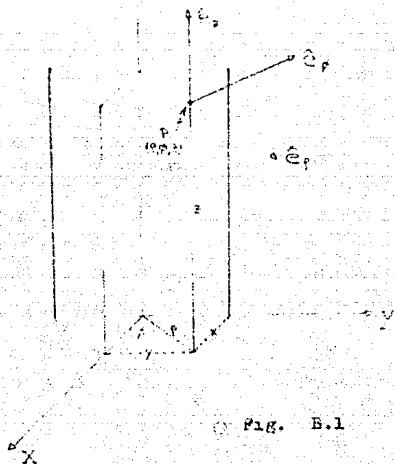


Fig. B.1

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

$$r > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_z = 1$$



En este caso es que:  $\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

de manera que

$$H_1(r, \theta, z) = H_2(r, \theta) + H_3(z)$$

La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas toma la forma.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Si la función buscada "u" no depende de "z", la ecuación anterior se simplifica:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

APENDICE C

Expresiones para:

GRADIENTE, DIVERGENCIA, ROTACIONAL y LAPLACIANO.

En los sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales. Sean  $\phi$  una función escalar y  $A = A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3$  una función vectorial, de las coordenadas curvilíneas ortogonales  $u_1, u_2, u_3$ ; en estas condiciones, se verifica:

$$\nabla \phi = \hat{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} + \hat{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} + \hat{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \dots \dots \dots C.1$$

$$\nabla \cdot A = \text{Div } A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right] \dots \dots \dots C.2$$

$$\nabla \times A = \text{rot } A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_2 h_3 A_1 & h_1 h_3 A_2 & h_1 h_2 A_3 \end{vmatrix} \dots \dots \dots C.3$$

$$\nabla^2 \phi = \text{Laplaciano } \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \right) \right] \dots \dots \dots C.4$$

Si sustituimos  $h_1 = h_2 = h_3 = 1$  y  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  por  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  respectivamente estas relaciones se reducen a las expresiones correspondientes en coordenadas rectangulares, donde  $(u_1, u_2, u_3)$  hacen el papel de  $(x, y, z)$ .

Notaciones para: GRADIENTE, DIVERGENCIA, ROTACIONAL y EL LAPLACIANO; en coordenadas Cilíndricas.

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z$$

El elemento de volumen  $dv = r dr d\theta dz$ .

Los vectores unitarios  $u_r, u_\theta, u_z$  son perpendiculares para cada uno de ellos.

$$\text{Entonces } \nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} u_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} u_z \quad \dots \quad \text{C.5}$$

$$\text{Div } F = \nabla \cdot F = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(F_z) \quad \dots \quad \text{C.6}$$

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} u_r & u_\theta & u_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix} \quad \dots \quad \text{C.7}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \dots \quad \text{C.8}$$

## APENDICE D

### EL LAPLACIANO COMO CAMPO VECTORIAL CONSERVATIVO.

El operador  $\nabla^2$  se denomina operador de Laplace o Laplaciano es decir:

$$\nabla^2 f = \Delta f \dots\dots\dots D.1$$

Aquella función cuyo laplaciano es igual a cero se le denomina una función que es armónica, es decir.

$\nabla^2 f = 0 \dots\dots\dots D.2$  f es una función escalar armónica y se le denomina ecuación de Laplace.

### CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS.

Sea  $\vec{u}$  una función vectorial y f una función escalar cuando para todos los puntos p de una región sucede que:

$$\vec{u} = \nabla f \dots\dots\dots D.3$$

$\vec{u}$  recibe el nombre de campo vectorial conservativo y "f" potencial del campo.

Como el rotacional de un gradiente siempre es nulo, los campos vectoriales conservativos satisfacen la propiedad.

$$\nabla \times \vec{u} = 0 \dots\dots\dots D.4a$$

De aquí la posibilidad de relacionar el concepto de diferencial exacta, en el de los campos vectoriales conservativos. En efecto, si  $f=f(x,y,z)$  es una función escalar, entonces.

$$\vec{u} = \nabla f \dots\dots\dots D.4b$$

Por lo que,

$U = U(x, y, z)$  es diferencial exacta si y sólo si, se cumplen las tres condiciones siguientes.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots D.4c$$

sustituyendo ahora D.4a y D.4b desarrollando el producto queda:

$$\left( \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right) \hat{k} = 0 \dots\dots D.4d$$

Igualdad que se cumple si y sólo si las componentes valen cero, o sea si quedan satisfechas las tres condiciones indicadas arriba. Por lo tanto la condición necesaria y suficiente para que sea diferencial exacta es:

$$\nabla \times \nabla U = 0 \dots\dots\dots D.4e$$

Pasemos a ver ahora la diferencial exacta y su interpretación bajo su integración y la relación con lo que acabamos de ver.

LA DIFERENCIAL EXACTA Y SU INTEGRACION .

A la expresión:

$$f(x)dx_1 + g(x)dx_2 + \dots + h(x)dx_n \dots \dots \dots D.5$$

donde  $f(x), g(x), \dots, h(x)$  son funciones continuas, se le llama diferencial exacta, si la diferencial total de la función:

es tal que:  $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \dots$

es decir, si se cumple con:

$$dF = f(x)dx_1 + g(x)dx_2 + \dots + h(x)dx_n \dots \dots \dots D.6$$

o sea:

$$f(x)dx + g(x)dx_2 + \dots + h(x)dx_n = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n \dots \dots \dots D.7$$

donde  $dx_1, dx_2, dx_3, \dots, dx_n$  o bien  $dx_i; i = 1, 2, 3, \dots, n$  son las diferenciales de las variables independientes, supongamos a  $dx_i \neq 0$  y  $dF = 0; \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$  de la ecuación D.7 tenemos:

$$f(x) = -\frac{\partial F}{\partial x_1} \dots \dots \dots D.8$$

de manera análoga se obtienen.

$$g(x) = \frac{\partial F}{\partial x_2} \dots \dots \dots D.9$$

$$h(x) = \frac{\partial F}{\partial x_n}$$

considerando por facilidad la expresión:

$$f(x, y) = \int_1^x \phi(x, y) dx + \psi(x, y) \dots \dots \dots D.10$$

de un espacio  $E^2$ . Se encontrará la condición necesaria y suficiente para que D.10 sea diferencial exacta, así que de las ecuaciones D.9 se obtiene:

$$f(x, y) = \int_1^x \phi(x, y) dx + \psi(x, y) \dots \dots \dots D.11$$

derivando parcialmente, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \phi(x, y) + \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \dots \dots \dots D.11a \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \end{aligned}$$

y de acuerdo con el teorema de Schwarz se tiene que:

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \dots \dots \dots D.12$$

la ecuación D.12 es la condición necesaria para que la expresión D.10 sea diferencial exacta.

Analizaremos ahora que condición debe cumplirse para que exista la función "F" de modo que:

$$df = f(x, y) dx + \psi(x, y) dy \dots \dots \dots D.13$$

o sea que:

$$f(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \dots \dots \dots D.13a$$

$$\psi(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y} \dots \dots \dots D.13b$$

integrando parcialmente D.13 con respecto a "x" se tiene:

$$F = \int f(x, y) dx + \psi(x, y) \dots \dots \dots D.14$$

donde  $C(y)$  es la constante de integración, función de la variable "Y" derivando D.14 con respecto a "Y" queda.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \dots \dots \dots D.15$$

Pero de D.13 se tiene que:

$$F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{entonces:}$$

$$F(x, y) = \int_x f(x, y) dx + C(y)$$

de donde

$$C'(y) = \frac{\partial F}{\partial y} - \int_x f(x, y) dx \dots \dots \dots D.16$$

derivando parcialmente a D.16 con respecto a "X" se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} [C'(y)] = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \dots \dots \dots$$

del teorema de Schwarz y como  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ , queda:

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \int_x f(x, y) dx = \dots \dots \dots$$

o sea:

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} = \dots \dots \dots D.17$$

de donde se concluye que la ecuación D.17 representa la condición necesaria y suficiente para que la expresión D.10 - sea diferencial exacta.

A continuación damos la condición necesaria y suficiente para que la expresión del espacio  $E^3$ . Sea diferencial exacta, y tenemos.

$$f(x, y, z) dx + \dots \dots \dots D.18$$



debe de cumplir.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \dots \dots \dots D.19$$

Por lo que ahora estamos en condiciones de relacionar el concepto de la diferencial exacta, en los campos vectoriales conservativos.

En efecto, si  $f(x,y,z)$  es una función escalar entonces.

$$\dots \dots \dots D.20$$

Por lo que  $dF = \dots$ , es diferencial exacta si y sólo si se cumplen las tres condiciones como ya habíamos visto:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots D.21$$

6

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots D.21a$$

c.l.q.q.d.

## APENDICE E

### PROPIEDADES EN LAS QUE INTERVIENE EL OPERADOR LAPLACE.

Sean: A y B dos funciones vectoriales derivables y  $\phi$  funciones escalares continuas en todos los puntos  $(x, y, z)$  de una región del espacio, en estas condiciones.

1.-  $\nabla(\phi \pm \psi) = \phi \nabla \psi \pm \psi \nabla \phi$

2.-  $\nabla(\phi A) = \phi \nabla A + A \nabla \phi$

3.-  $\nabla \times (A \pm B) = \nabla \times A \pm \nabla \times B$

4.-  $\nabla \cdot (A \pm B) = \nabla \cdot A \pm \nabla \cdot B$

5.-  $\nabla \cdot (\phi A) = \phi \nabla \cdot A + A \cdot \nabla \phi$

6.-  $\nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi$

7.-  $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$

8.-  $\nabla(\nabla \cdot A) - \nabla \times (\nabla \times A) = \nabla^2 A$

9.-  $\nabla(\nabla \cdot A) = \nabla^2 A + \nabla(\nabla \cdot A)$

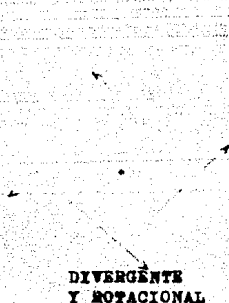
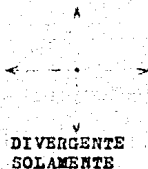
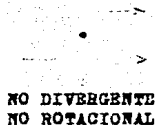
Siendo:  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

ó operador de Laplace.

- 10.-  $\nabla \cdot \nabla \phi = \Delta \phi$ ; El Rotacional del Gradiente de  $\phi$  es cero.
- 11.-  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ ; La divergencia del rotacional de "A" es cero.
- 12.-  $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$

En las propiedades 9 y 12 se supone que  $\phi$  y "A" tienen segundas derivadas continuas.

### CARACTERISTICAS TIPICAS DE CAMPOS VECTORIALES.



## BIBLIOGRAFIA

Koefoed, Otto . Geosounding Principles, I ( Resistivity Sounding Measurements ELSEVIER/NORTH-HOLLAND INC. 1979.

V. N. Dakhnov . Geophysical Well Logging, School of Mines Golden, GOSTOPTEKIZDAT, 1962.

Notas y Resúmenes del curso de Prospección Eléctrica y Radiométrica, 1961-1 impartida por el Ing. Roboam León Sánchez en la Facultad de Ingeniería, U.N.A.M.

D.R. Bland . Solutions of Laplace's Equation, Library of Mathematics, WALTER LEDERMANN/ROUTLEDGE AND KEGAN PAUL LONDON.

Ernesto Orellana . Prospección Geoeléctrica en Corriente Continua, PARANINFO/ MADRID, 1972.

Notas y Resúmenes del curso de Matemáticas III ( Cálculo - Vectorial ), E. Por la Facultad de Ingeniería. COORDINACION DE MATERIAS PROPEDEUTICAS, SECCION DE MATEMATICAS, 1978-2.