297

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

# Graficas de Ramsey con Subgráficas Completas Prohibidas

T E S I S

Que para obtener el Título de:

M a t é m a t i c o

P R E S E N T A:

Gabriel Antonio Barragán Ramirez

MEXICO, D. F. 1989

# PRÓLOGO

En su enunciado original el Teorema de Ramsey (Ramsey [1930]) dice:

*Si coloreamos las aristas de una gráfica completa infinita, con un número finito de colores, obtendremos como subgráfica inducida a una gráfica completa infinita con todas sus aristas del mismo color.*

Este enunciado es equivalente, vía algun debilitamiento del axioma de elección, al siguiente:

*Para cualesquiera $n, r_1, r_2, \ldots, r_n$ números naturales, existe otro número $m = m(n, r_1, r_2, \ldots, r_n)$ tal que, si coloreamos las aristas de $K_m$ con $n$ colores obtendremos una $K_{r_i}$ con todas sus aristas del color $r_i$ para alguna $1 \leq i \leq n$.*

A partir del redescubrimiento de este resultado por Erdõs y Szekeres, la teoría de Ramsey (cuya área de estudio es la de problemas semejantes al original de Ramsey), se ha convertido en una rama vigorosa y elegante de la combinatoria, tanto finita como infinita.

Muchas y muy variadas generalizaciones y sofisticaciones se han dado del resultado original, quizá una de las más interesantes sea el llamado teorema inducido de Ramsey en sus dos versiones (para vértices y aristas):

TEOREMA INDUCIDO DE RAMSEY (vértices):

*Dados una gráfica $H$ y un número $r$, existe otra gráfica $G$ con la propiedad de que si coloreamos los vértices de $G$ con $r$ colores obtendremos una copia, monocromática en vértices, de $H$, como subgráfica inducida de $G$.*

TEOREMA INDUCIDO DE RAMSEY (aristas):

*Dados una gráfica $H$ y un número $r$, existe otra gráfica $G$ con la propiedad de que si coloreamos las aristas de $G$ con $r$ colores obtendremos una copia, monocromática en aristas, de $H$, como subgráfica inducida de $G$.*

Demostraciones de estos resultados se pueden encontrar en Nešetřil-Rödl [1978] o en Deuber [1975].

Con respecto a este problema Erdõs (P. Erdõs-A. Hajnal [1967]), plantea la pregunta de que si será posible encontrar una gráfica que satisfaga alguno de los teoremas inducidos pero con número de clan pequeño (se define el número de clan de una gráfica $G$ como el mayor $n$, tal que $K_n$ es subgráfica de $G$); para $H = K_3$ se encontraron gráficas $G$ con número de clan 5 (Graham [1968]) y 4, (Irving [1973]); Folkman [1973], obtiene el siguiente resultado:

TEOREMA DE FOLKMAN

*Dada una gráfica $H$ existe otra gráfica $G$, con el mismo número de clan que $H$ y tal que si 2-coloreamos las aristas de $G$ obtendremos una copia de $H$, monocromática* *en aristas, como subgráfica inducida de $G$.*

Sin embargo, debido en parte a la publicación póstuma del artículo, la construcción de Folkman resulta sumamente enredada y además solo es útil en el caso en que se utilicen 2-coloraciones, por lo que Nešetřil y Rödl [1976], dan otra demostración a este teorema que se extiende de manera natural al caso de hipergráficas y a cualquier número finito de colores.

El objetivo del presente trabajo es exponer de manera sencilla dos demostraciones, una de Henson y otra de Komjath-Rödl al teorema de Folkman en su versión para coloraciones de vértices.

**TEOREMA DE FOLKMAN** (versión vértices):

*Dados una gráfica $H$ y un número $r$, existe otra gráfica $G$, con el mismo número de clan que $H$ y tal que si coloreamos los vértices de $G$ con $r$ colores obtendremos una copia de $H$, monocromática en vértices, como subgráfica inducida de $G$.*

A lo largo de este trabajo nos referiremos a este teorema simplemente como el **TEOREMA DE FOLKMAN**, omitiendo la referencia a que se trata de la versión en vértices.

*A mis Padres*

# ÍNDICE


INTRODUCCIÓN 1

LA GENERALIZACIÓN DE KOMJATH- RÖDL 15

LA PRUEBA INFINITISTA DE HENSON 27

APÉNDICE 36a

# INTRODUCCIÓN

En una primera sección de este capítulo introduciremos la mayor parte de la notación utilizada en el trabajo, aunque posiblemente en algún momento se definirán conceptos y su notación, que por ser necesarios solamente para el desarrollo del capítulo en que aparezcan no están consignados aquí.

En la segunda parte de esta introducción de demostrarán algunos resultados preliminares como son el **Lema de Infinitud de König** y el **Teorema de Ramsey.** Cualquier notación utilizada y que no aparezca definida con anterioridad podrá encontrarse en algún texto estandar de teorá de gráficas o teoría de conjuntos, como por ejemplo Hrbaceck- Jech [1984], Behzad- Chartrand- Lesniak- Foster [1981].

## I. NOTACIÓN

Si **X** es un conjunto denotamos:

$|X| =$ el cardinal de $X$,

$[X]^r = \{A \subseteq X \mid |A| = r\}$,

$N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (el conjunto de los números naturales),

$\omega =$ el conjunto de los numeros naturales con el orden usual,

$|N| = \aleph_0$.

Si $n \in N$ definimos: $\overline{n} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $(|\overline{n}| = n)$ por tanto $\overline{0} = \phi$. Si $|X| = n$ diremos que $X$ es un *n-conjunto* y si $A \in [X]^r$ diremos que $A$ es un *r-subconjunto* de $X$.

Utilizaremos letras itálicas minúsculas $(m, n, p, \ldots)$ para denotar números naturales y letras griegas $(\lambda, \kappa, \omega, \ldots)$ para denotar ordinales y cardinales infinitos (los primeros identificados con el conjunto de sus predecesores y los segundos con ordinales iniciales). Recordemos que un cardinal es *sucesor* si su índice es un ordinal sucesor y *límite* en caso contrario, si $\kappa$ es un cardinal denotaremos por $\kappa^+$ a su sucesor y si $\kappa = \lambda^+$ escribiremos $\lambda = \kappa^-$.

Diremos que $f$ es una *función* con *dominio* $A$ y *codominio* $B$, (o más sencillamente una función de $A$ en $B$) y escribiremos $f : A \longrightarrow B$ si $f \subseteq A \times B$ (el producto cartesiano de $A$ y $B$) y para todo elemento $x$ de $A$ existe un único elemento $y$ de $B$ tal que $(x, y) \in f$; también utilizaremos la notación usual $y = f(x)$. Nótese que esta definición implica en particular que *las funciones son conjuntos.*

Se dice que $g$ y $f$ son *funciones compatibles* si el hecho de que $(x, y)$ y $(x, z)$

sean elementos de $f \cap g$ implica que $y = z$.

Con las definiciones anteriores y recordando un poco la notación de la teoría clásica de conjuntos tenemos como inmediato el siguiente resultado:

**LEMA**

*Si $F$ es una familia de funciones, $\bigcup F$ es una función si y solamente si las funciones elementos de $F$ son dos a dos compatibles, y en ese caso tenemos:*

$$Dom(\bigcup F) = \bigcup_{f \in F} Dom(f),$$

$$Codom(\bigcup F) = \bigcup_{f \in F} Codom(f),$$

$$(\bigcup F)(x) = f(x) \ \forall f \in F, \ x \in Dom f.$$

Si $A \subseteq dom f$ denotaremos por $f\lceil_A$, *la restricción de $f$ a* A, a la siguiente función $dom f\lceil_A = A$, $codom f\lceil_A = codom f$, $f\lceil_A(x) = f(x) \ \forall x \in A$; si $f$ es una restriccón de $g$ diremos que *$g$ extiende a $f$*. Como es usual denotaremos por $f^{-1}(x)$ a la imagen inversa de $x$.

Por último si $n \in N$ definimos $exp^1(n) = n$ y $exp^{i+1}(n) = (exp^i(n))^n$.

## GRÁFICAS

Una *gráfica* $G$, es un par $(V(G), A(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto a cuyos elementos llamaremos *vértices* y $A(G) \subseteq [V(G)]^2$ es el conjunto de *aristas*; si $x, y$ son tales que $\{x, y\} \in A(G)$ se dice que los vértices $x$ y $y$ son *adyacentes* en la gráfica $G$ y en ese caso escribiremos $x \ ady_G \ y$ omitiendo el subíndice en caso de que esté sobrentendido.

A lo largo de todo este trabajo se manejarán gráficas finitas, es decir, con número de vértices finito, en caso contrario se indicará explicitamente.

Una gráfica $H$ es *subgráfica* de otra gráfica $G$ si $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$; si además $A(H) = A(G) \cap [V(H)]^2$, diremos que la gráfica $H$ es *subgráfica inducida* de $G$, y escribiremos $H = \langle V(H) \rangle_G$.

Se dice que una función $f : V(G) \to V(H)$ es un *homomorfismo* de gráficas si $x \ ady_G \ y \Rightarrow f(x) \ ady_H \ f(y)$.

Un homomorfismo es *inmersión* si es inyectivo y $f(x) \ ady \ f(y) \Rightarrow x \ ady \ y$.

Finalmente $f$ es *isomorfismo* si es inmersión y es suprayectiva; se dice que dos gráficas $H$ y $G$ son *isomorfas* si existe un isomorfismo $\varphi$ entre ellas y en ese caso escribimos: $G \overset{\varphi}{\cong} H$.

Si existe una inmersión $\psi$ de la gráfica $G$ en la gráfica $H$ se dice que la gráfica $H$ *admite* a la gráfica $G$ y en este caso escribimos $G \overset{\psi}{\hookrightarrow} H$, en caso contrario se escribirá $H \not\hookrightarrow G$ (véase ilustración 1).

Si $C$ es una clase de gráficas definimos $\coprod C$ (la *unión disjunta de $C$*) como:

$$V(\coprod C) = \bigcup_{m \in C} (V(m) \times \{m\}),$$

$$A(\coprod C) = \{\{(u,m),(v,m)\} \mid \{u,v\} \in A(m)\}.$$

Es decir, la unión disjunta de una familia de gráficas es la gráfica que se forma ajenizando los conjuntos de vértices de los elementos de la familia y con cada uno de estos conjuntos formar una gráfica isomorfa al elemento de la familia correspondiente (véase ilustración 2).

Denotaremos por $K_n$ a la siguiente gráfica: $V(K_n) = \bar{n}$, $A(K_n) = [\bar{n}]^2$, obviamente $| V(G) |= n$ y $A(G) = [V(G)]^2$ implica que $G \cong K_n$ (il. 3). Es ta gráfica se conoce como la gráfica completa con $n$ vértices.

Definimos el *número de clan* de una gráfica $G$ como

$$cl(G) = sup\{n \mid K_n \hookrightarrow G\}$$

Por una *n-coloración* de la gráfica $G$ entenderemos una función $f : V(G) \to \bar{n}$, y por una *n-coloración de aristas* una función $g : A(G) \to \bar{n}$.

Se dice que una $n$-coloración $f$ es *buena* si $f(x) = f(y)$ implica que $\{x,y\} \notin A(G)$. El *número cromático* de $G$ ($\chi(G)$) es el mínimo $n$ tal que existe una buena $n$-coloración de $G$.

## GRÁFICAS DE RAMSEY

Una gráfica $G$ es una *gráfica de Ramsey* con respecto a la gráfica $H$ y a $r$, si para cualquier $r$-coloración de $G$ existe una subgráfica inducida de $G$ que es isomorfa a $H$ con todos sus vértices del mismo color, en ese caso escribimos:

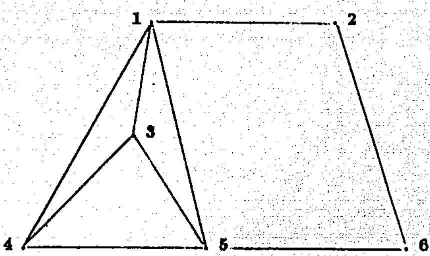
$$G \longrightarrow (H)^1_r.$$

Una gráfica $G$ es una *gráfica de Ramsey en aristas* con respecto a la gráfica $H$ y a $r$, si para toda $r$-coloración de las aristas de $G$, $G$ admite a $H$ de manera que todas sus aristas sean del mismo color, en ese caso escribimos:

$$G \longrightarrow (H)^2_r.$$

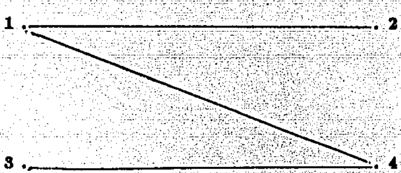
Con esta nomenclatura podemos reformular los teoremas inducidos de Ramsey

$G =$



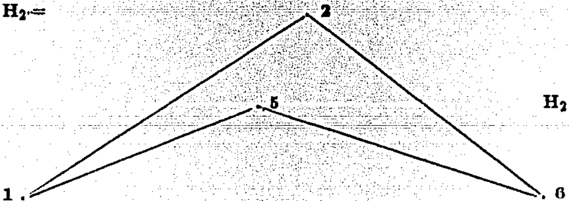
Il. 1

$H_1 =$



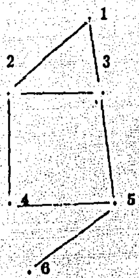
$H_1 \not\hookrightarrow G$

$H_2 =$



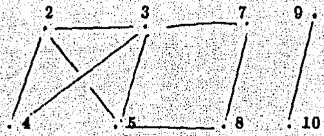
$H_2 \hookrightarrow G$

$G_1 =$

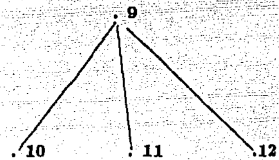



Il. 2

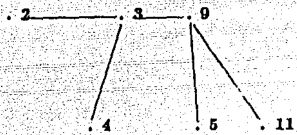
$G_2 =$



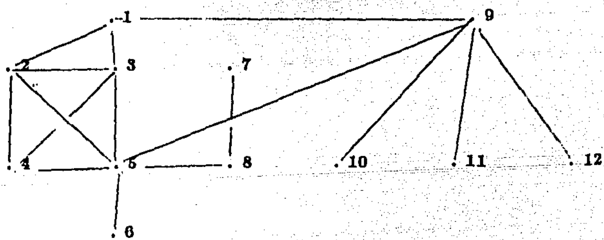

$G_3 =$



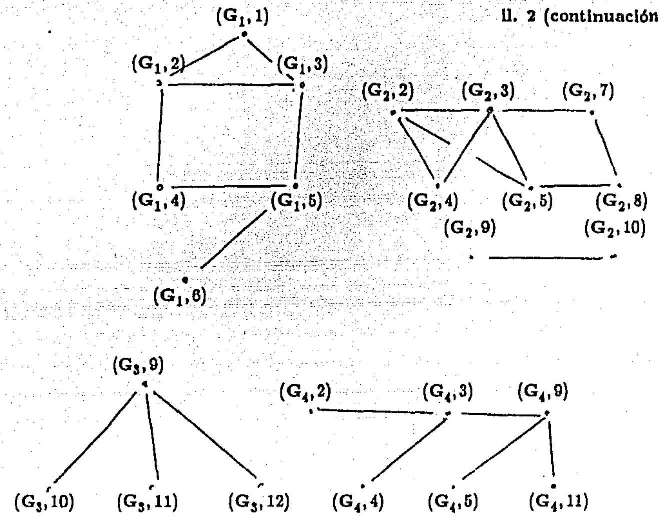

$G_4 =$



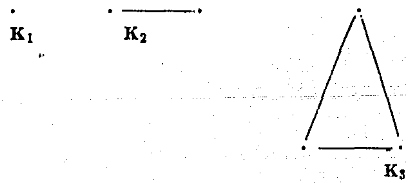

$C = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$



$\coprod G =$




Il. 2 (continuación)




Il. 3

**TEOREMA INDUCIDO DE RAMSEY (vértices)**

*Dada una gráfica $H$ y un número $r$ existe otra gráfica $G$ tal que*

$$G \longrightarrow (H)^1_r.$$

**TEOREMA INDUCIDO DE RAMSEY (aristas)**

*Dada una gráfica $H$ y un número $r$ existe otra gráfica $G$ tal que*

$$G \longrightarrow (H)^2_r.$$

**Ejemplos**

Es facil verificar que

$$1) G \longrightarrow (K_2)^2_r \Longleftrightarrow A(G) \neq \phi$$

$$2) G \longrightarrow (K_2)^1_r \Longleftrightarrow \chi(G) > r$$

sin embargo al comprobación del primer hecho es trivial mientras que la caracterización de las gráficas con número cromático dado es un problema no resuelto.

Por otra parte tenemos el siguiente hecho:

$$G = K_{r(n-1)+1} \Longrightarrow G \longrightarrow (K_n)^1_r$$

y $G$ es minimal en vértices con respecto a esta propiedad, sin embargo el problema de encontrar una $p = p(n, r)$, tal que si

$$G = K_p \Longrightarrow G \longrightarrow (K_n)^2_r$$

y $G$ sea minimal en vértices con respecto a esta propiedad, es un problema no resuelto.

De lo anterior podemos concluir que cada una de las propiedades de Ramsey (vértices y aristas), posee un interés particular.

En realidad Ramsey no estaba pensando en gráficas cuando demostró el teorema que lleva su nombre y que da origen a las definiciones anteriores, la formulación original de este tipo de propiedades se refiere a números cardinales, se dice que un cardinal $\kappa$ posee *la propiedad de Ramsey* con respecto al cardinal $\lambda$ supra-$n$, sub-$r$ si para toda $r$-coloración de los $n$-subconjuntos de cualquier $\kappa$-conjunto $A$ obtenemos un $\lambda$-conjunto $B$, *homogénco* con respecto a la coloración (esto significa que $[B]^n$ es monocromático), $B \subseteq A$, y en este caso denotaremos:

$$\kappa \longrightarrow (\lambda)^n_r.$$

El lector interesado en la propiedad de Ramsey para cardinales puede referirse al texto de P. Erdős, A. Hajnal, A. Maté y R. Rado ([1984]) que contiene gran cantidad de los resultados más importantes que sobre el tema se han encontrado.

## O-ÁRBOLES

Definiremos un *o-árbol* como un orden parcial [1] $(T,\preceq)$ tal que:

*i*) $\preceq$ tiene un mínimo (i.e. un $x \in T$ tal que $x \preceq y$ para todo $y \in T$).

*ii*) el conjunto de predecesores de cualquier elemento $x(=\{y \in T \mid y \preceq x\})$ está bien ordenado (es decir cualquiera de sus subconjuntos no vacios tiene un primer elemento).

En vista de que los conjuntos de predecesores de cada elemento están bien ordenados, para cada elemento $x$ existe un único ordinal que es isomorfo (con isomorfismo de ordenes) a su conjunto de predecesores, a este único ordinal lo denotaremos por $o(x)$ (el orden de $x$); al conjunto de todos los elementos de $T$ con orden $\alpha$ lo denotaremos $L_\alpha$ y lo llamaremos el $\alpha$-ésimo nivel de $T$.

La *altura (lth)* de un *o*-árbol $T$ está definida como

$$lth\ T = \sup\{\alpha + 1 \mid L_\alpha \neq \phi\}.$$

Para cada $x \in T$ definimos el conjunto de *sucesores inmediatos* de $x$ en $T$ como

$$sim(x) = \{y \in T \mid x \prec y \text{ y } o(y) = o(x) + 1\}.$$

Una *rama* del *o*-árbol $T$ es un conjunto maximal (con respecto a la inclusión) totalmente ordenado por $\preceq$.

Como ejemplos de *o*-árboles podemos dar los siguientes:

1) $(N,\leq) = \omega =$ los naturales con el orden usual, el mínimo es el 0, cada nivel esta formado por un solo elemento que es el mismo que le da nombre, es decir el nivel 5 (hay que recordar que los ordinales finitos coinciden con los cardinales finitos de manera natural) tiene como unico elemento al número 5 cuyo conjunto de predecesores es $\bar{5} = \{0,1,2,3,4\}$, la altura del *o*-árbol es $\omega$ ya que ninguno de los niveles finitos es vacio y no tiene niveles con índice infinito, por otra parte la unica rama es el conjunto mismo, lo que será cierto para todos los conjuntos bien ordenados.

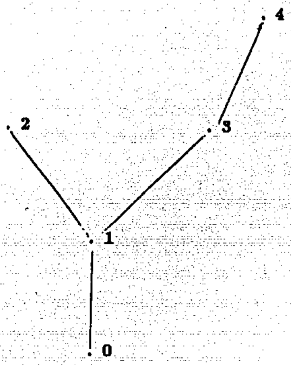
$$2)(\{0,1,2,3,4\};\{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(1,2),(1,3),(1,4),(3,4)\})$$

(il. 4).

Este *o*-árbol tiene como mínimo al 0, sus conjuntos de predecesores son:

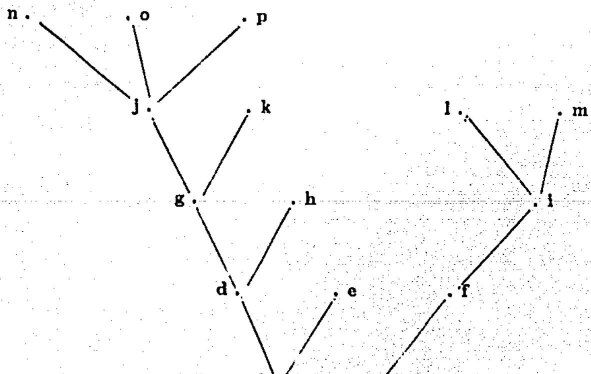
$Pr(0) = \emptyset, Pr(1) = \{0\}, Pr(2) = Pr(3) = \{0,1\}, Pr(4) = \{0,1,3\}$ fácilmente se puede verificar que estos conjuntos estan bien ordenados con respecto al orden del conjunto.

[1] Por lo que tendremos que leer o-árbol y no cero-árbol o cosa parecida.




il. 4

2 o-árboles.



Este $o$-árbol tiene 2 ramas $\{0,1,2\}$ y $\{0,1,3,4\}$, y sus niveles son:
$L_0 = \{0\}, L_1 = \{1\}, L_2 = \{2,3\}, L_3 = \{4\}$.

Ahora con toda esta notación procederemos a demostrar algunos resultados que posteriormente nos serán de utilidad.

## II. PRELIMINARES

## EL LEMA DE INFINITUD DE KÖNIG

(D. König [1927]) Si $(T, \preceq)$ es un $o$-árbol de altura $\omega$ y cada uno de sus niveles es finito, entonces $T$ tiene una rama infinita.

### DEMOSTRACIÓN

Dado un $o$-árbol $T$ que satisface las hipótesis del teorema se construirá una sucesión de sub-$o$-árboles $(T_n, \preceq \lceil_{T_n})$, $n < \omega$ de tal manera que:

$$T = T_0 \supseteq T_1 \supseteq T_2 \ldots$$

y

$$\bigcap_{n<\omega} T_n$$

sea la rama infinita.

Para la construcción de la sucesión utilizaremos recursión sobre los naturales.

### BASE DE LA RECURSIÓN

Sea $T_0 = T$, obsérvese que el nivel cero de $T_0$ solo tiene un elemento que es el primer elemento del orden $T$.

### PASO RECURSIVO

Supongamos que $T_n$ ya ha sido construido de manera que su altura es $\omega$ y para cada $k \leq n$, $L_k$ contiene solo al elemento $x_k$.

Para cada $x$ en $T_n$ sea:

$$T_{n,x} = \{x_k \mid k < n\} \bigcup \{y \in T_n \mid x \leq y\}.$$

Como

$$T_n = \bigcup_x T_{n,x}$$

donde $x$ varía sobre todos los elementos del $n$-ésimo nivel de $T_n$ tenemos que:

$$\omega = lth(T_n) = \sup_x lth(T_{n,x})$$

como el $n$-ésimo nivel de $T_n$ es finito, este supremo es un máximo y por tanto existe $y$ en este nivel tal que $lth(T_{n,y}) = \omega$; definimos $x_n = y$ y $T_n = T_{n,y}$, y no es difícil comprobar que:

$$\{x_n \mid n < \omega\} = \bigcap_{n<\omega} T_n$$

es una rama infinita de $T$.

## TEOREMA DE RAMSEY

(Ramsey [1930]) Para cualesquiera $k$ y $r$ enteros positivos tenemos:

$$\aleph_0 \longrightarrow (\aleph_0)^r_k$$

es decir si $k$-coloreamos los $r$-subconjuntos de cualquier conjunto numerable (esto es de cardinal $\aleph_0$) habrá un subconjunto infinito homogéneo para la coloración.

## DEMOSTRACIÓN

Demostraremos el teorema por inducción sobre el cardinal de los subconjuntos coloreados ($r$).

### BASE DE LA INDUCCIÓN

Para $r = 0$ el resultado es válido tomando como conjunto homogéneo al conjunto total ya que todos sus conjuntos vacios (el único que existe) estan coloreados con el mismo color. Para $r = 1$ el resultado es trivial ya que si coloreamos un conjunto infinito con un número finito de colores necesariamente debe haber una clase infinita puesto que la unión finita de conjuntos finitos es finita.

### PASO INDUCTIVO

Supongamos ahora que para $r \geq 2$ tenemos que

$$\aleph_0 \longrightarrow (\aleph_0)^{r-1}_k$$

y en base a este resultado trataremos de demostrar:

$$\aleph_0 \longrightarrow (\aleph_0)^r_k.$$

como la propiedad de Ramsey solo depende del cardinal del conjunto y no del conjunto en sí mismo [2], podemos suponer que nuestro conjunto numerable son los naturales y demostrar que dada una coloración $f : [N]^r \to \bar{k}$ existe un conjunto homogéneo infinito.

[2] Ya que si los conjuntos tienen el mismo cardinal, son biyectables y componiendo las coloraciones con las biyecciones existentes podemos eucontrar los conjuntos homogéneos correspondientes.

Sea $f$ la coloración dada, construiremos un $\omega$-árbol $T$ que dependa de $f$, con altura $\omega$, cuyos elementos sean números naturales y con cada uno de sus niveles finito.

Definiremos al $\omega$-árbol de manera recursiva, es decir, nivel por nivel, y para cada elemento $x$ que vayamos acomodando en él iremos construyendo simultaneamente el conjunto de los elementos que a la larga serán mayores que $x$ una vez que la construcción de $T$ esté términada; a este conjunto lo denotaremos $P(x)$[3].

BASE DE LA RECURSIÓN

Comenzamos nuestra construcción definiendo para cada $n \leq r-2$ (posiblemente solo el 0):

$$L_n = \{n\} \ \text{ y } \ P(n) = N - \{m \mid m \leq n\} (= N - \overline{n+1}).$$

PASO RECURSIVO

Suponemos que $L_n$ y $P(x)$ ya han sido definidos para alguna $n \geq r-2$ y para toda $x$ en ese nivel, lo que resta es definir quienes serán los sucesores inmediatos de una $x$ arbitraria puesto que el nivel $n+1$ de $T$ esta formado por los sucesores inmediatos de todos los elementos del nivel $n$.

Sea $x$ en $L_n$ un elemento arbitrario, para definir $sim(x)$, tenemos 2 casos:

*i*) Si $P(x) = \phi$, entonces definimos $sim(x) = \phi$.

*ii*) En caso contrario consideramos en $P(x)$ la siguiente relación de equivalencia $\equiv_x$: para $z, y \in P(x)$, $z \equiv_x y$ sii $f(u \cup \{y\}) = f(u \cup \{z\})$ para todo $u \in [\{v \mid v \preceq x\}]^{r-1}$, donde $f$ es la coloración dada de $[N]^r$.

Es de notarse que $\equiv_x$ solo tiene un numero finito de bloques ya que por una parte $x$ solo tiene un número finito de predecesores (por tanto solo un número finito de $r$-$1$-adas de estos predecesores), y por otra $f$ solo toma un número finito de valores distintos (a lo sumo $k$), por tanto, en el peor de los casos, el número de clases de equivalencia es igual a $k \cdot \mid [\{\textit{predecesores de } x\}]^{r-1} \mid$.

Una vez definida asi la relación de equivalencia, el conjunto de sucesores inmediatos de $x$ es el conjunto formado al tomar de cada una de las clases de equivalencia al elemento mínimo (recuerdese que los elementos de nuestro $\omega$-árbol son números naturales).

Para cada $y$ sucesor inmediato de $x$ definimos $P(y)$ como la clase de equivalencia en la que originalmente se encontraba $y$ suprimiendo a $y$ mismo.

Como el paso recursivo nos define completamente al nivel $n+1$ y a los $P(z)$ para todos los $z$ en dicho nivel podemos dar por terminada la definición de $T$.

En vista de la definición anterior tenemos que cada nivel de $T$ va a tener solo

[3] Podría pensarse este conjunto como el conjunto de posibles sucesores de $x$, puesto que todos sus elementos serán a futuro mayores que $x$ y en particular contendrá a los sucesores inmediatos de este.

un número finito de elementos y como $T$ tiene primer elemento (solo uno) podemos concluir que cada nivel de $T$ será finito.

Como cada nivel de $T$ es finito, y su altura es infinita, $T$ tiene una rama infinita $R$ (aplicando el lema de König).

Definimos la coloración $g : [R]^{r-1} \to \overline{k}$ como sigue: para cada $U \in [R]^{r-1}$, $g(U) = f(U \cup \{x\})$ donde $x$ es un elemento de $R$ arbitrario mayor que todos los elementos de $U$ con respecto al orden en $T$.

Nótese que $g$ está bien definida ya que si $x, y \in R$ son $\preceq$-mayores que cualquier elemento de $U$ y $z$ es el máximo de $U$ tenemos que por ser $R$ una rama de $T$ $x \equiv_z y$ y por tanto $f(U \cup \{x\}) = f(U \cup \{y\})$.

Ahora, aplicando la hipótesis de inducción a $R$ sabemos que hay un conjunto infinito $Y \subseteq R$ que es homogéneo con respecto a $g$, esto es existe $i < k$ tal que $g(U) = i$ para todo $U \in [Y]^{r-1}$.

Sea ahora $V \in [Y]^r$; y sea $z = max\ V$, y sea $U = V - \{z\}$ entonces, como $U \in [Y]^{r-1}$, tenemos que:

$$i = g(U) = f(U \cup \{z\}) = f(V)$$

y como $V$ es arbitrario $Y$ es un conjunto infinito homogéneo para $f$ con lo que concluye la demostración. ■

## COROLARIO (Teorema Finito de Ramsey)

*Para cualesquiera 3 enteros positivos $k, r, m$, existe $n \in N$ tal que:*

$$n \longrightarrow (m)^r_k.$$

## DEMOSTRACIÓN

La demostración será por reducción al absurdo, supongamos que para cada $n > r - 1$ existe $f_n : [\overline{n}]^r \to \overline{k}$ una $k$-coloración con respecto a la que no hay un $m$-conjunto homogéneo.

El conjunto:

$$T = \{f_n \lceil_{[\overline{j}]^r} \mid j \leq n, n \in N\}$$

ordenado con la inclusión (recordemos que las funciones son conjuntos), es un $o$-árbol de altura $\leq \omega$, cuyo primer elemento es $\phi$ (ya que $f_n \lceil_{\overline{0}} = \phi$ para todo $n$) y el mínimo de cualquier subconjunto de sus ramas es la intersección del mismo (es decir las ramas están bien ordenadas).

Pero como cada uno de sus niveles es finito (el $n$-ésimo nivel contiene a lo sumo a todas las funciones de $n$ en $k$ que son, en número, $k^n$), y $T$ tiene un número infinito de elementos (ya que para cada $n \in N, f_n \in T$), su altura debe ser infinita, por lo que aplicando el lema de Kõnig tiene una rama infinita $F$.

Sea $f = \cup F$, como las funciones en $F$ son compatibles $f$ es una $k$-coloración de $[N]^r$, por el teorema de Ramsey hay un conjunto $X \subseteq N$ infinito y homogéneo para la coloración. Sea $Y$ un $m$-subconjunto de $Y$ y sea $g \in F$ tal que $Y \subseteq dom(g)$.

Sea $n$ y $j \leq n$ enteros tales que $g = f_n\lceil_{[\bar{j}]^r}$, entonces $Y$ es un $m$-conjunto homogéneo con respecto a $f_n$, lo cual es una contradicción, con lo que queda demostrado el corolario.■

# LA

# GENERALIZACIÓN

# DE

# KOMJATH-RÖDL

Komjath y Rödl ([1986]) prueban el teorema de Folkman, de una manera constructiva, sencilla, generalizable a gráficas infinitas e incluso con número de clan infinito también. Esta prueba consiste en que dada una gráfica $G$ y un número natural $r$, se construye explicitamente otra gráfica $H$ (que es finita, cuando $G$ lo es), que con el mismo número de clan que $G$, y que resulta ser una gráfica de Ramsey para $G$ y $r$.

En vista de que Komjath y Rödl consideran tambien el caso de gráficas infinitas en su demostración, y que muchas de las nociones que tenemos definidas para gráficas, estan pensadas originariamente en el caso finito, valdrá la pena generalizar algunas de estas nociones y enfatizar en las distinciones, en la mayoría de los casos sutiles, que resulten de la consideración de cada caso en particular, finito o infinito.

Las seccciones de este capítulo serán las siguientes:

1.-**Definiciones**, entre las que incluiremos una generalización del concepto de número de clan, al caso de gráficas infinitas.

2.-**Construcción (1)**, de una gráfica de Ramsey $H$ para una gráfica $G$ (posiblemente infinita) y un número natural $r$, arbitrarios.

3.-**Construcción (2)**, de otra gráfica con las propiedades anteriores para el caso especifico de $r = 2$, pero con la ventaja de tener un número de vértices menor o igual que el de la construcción anterior.

## I. DEFINICIONES

1.-*Sean $G$ y $H$, dos gráficas arbitrarias (posiblemente infinitas) decimos que $M$, es una gráfica de Ramsey para $G$ y $H$, y escribiremos*

$$M \longrightarrow (G,H)^1_2,$$

*si cada vez que coloremos los vértices de $M$ con dos colores, digamos azul y rojo obtengamos una copia monocromática azul de $G$, o bien una copia monocromática roja de $H$.*

2.-*Sea $\lambda$, cualquier cardinal (posiblemente infinito), definimos $K_\lambda$ (la gráfica completa con $\lambda$, vértices) como sigue*

$$K_\lambda = (V(K_\lambda), A(K_\lambda)),$$

*donde $V(K_\lambda)$, es cualquier conjunto con cardinal $\lambda$, y $A(K_\lambda) = [V(K_\lambda)]^2$*; notése, que $K_\lambda$, está bien definida módulo isomorfismo de gráficas.

3.-*Sea $G$ una gráfica arbitraria (posiblemente infinita) definimos el número de clan de $G$ ($cl(G)$) y el número de clan estrella de $G$ ($cl^*(G)$), de la siguiente manera:*

$$cl(G) = sup\{\lambda \mid K_\lambda \hookrightarrow G\}$$

$$cl^*(G) = inf\{\lambda \mid K_\lambda \not\hookrightarrow G\}$$

Es claro que esta definición de número de clan no es más que una generalización de la definición dada en la introducción de este trabajo, ya que en el caso finito, el supremo de un conjunto deviene máximo.

Por otra parte para gráficas finitas (por tanto con número de clan finito) no es difícil comprobar que $cl^*(G) = cl(G) + 1$, sin embargo para el caso infinito la distinción es más sutil y depende da las características de los cardinales involucrados; como a continuación se hará notar.

## EJEMPLO

Sea:

$$G = \coprod_{n \in \omega} K_n$$

es decir, la unión disjunta de la familia de gráficas completas finitas (il. 5); tenemos por tanto:

$$cl(G) = sup\{n \mid K_n \hookrightarrow G\} = sup\{n \in \omega\} = \aleph_0$$

$$cl^*(G) = inf\{\lambda \mid K_\lambda \not\hookrightarrow G\} = \aleph_0$$

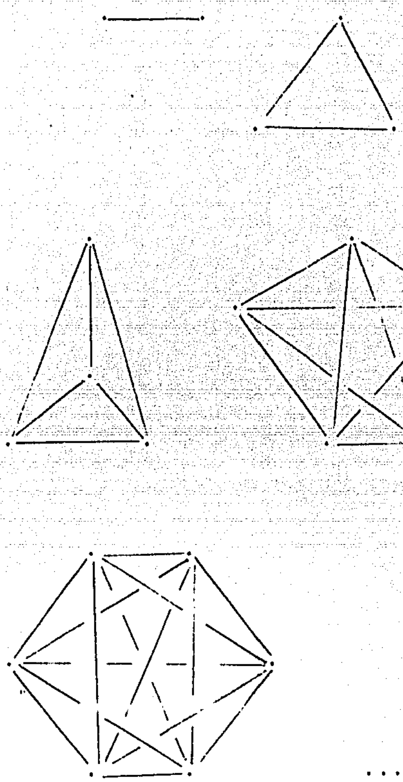
por tanto

$$cl(G) = cl^*(G).$$

Es decir, para el caso infinito no tenemos el mismo criterio para relacionar las definiciones de número de clan y número de clan estrella, sin embargo podemos obtener el siguiente

## LEMA

*Si $cl^*(G)$ es cardinal sucesor, entonces $cl^*(G) = cl(G)^+$,*
*si $cl^*(G)$ es cardinal límite, entonces $cl^*(G) = cl(G)$.*



**Il. 5**
**G = ∐ K$_n$.**

DEMOSTRACIÓN

Como

$$K_\lambda \hookrightarrow G \Longrightarrow K_\mu \hookrightarrow G \quad \forall \mu \leq \lambda,$$

ya que $K_\mu$ es una subgráfica inducida de $K_\lambda$, por cualquier subconjunto de vértices de $\lambda$ con cardinal $\mu$. Por tanto tenemos que:

$$cl(G) = sup\{\lambda \mid K_\lambda \hookrightarrow G\} =$$

$$\bigcup_{\lambda < cl^*(G)} \lambda = \begin{cases} \mathrm{cl}^*(G) & \text{si } cl^*(G) \text{ es limite} \\ \mathrm{cl}^*(G)^- & \text{si } cl^*(G) \text{ es sucesor} \end{cases}$$

Por tanto si $cl^*(G)$ es límite $cl(G) = cl^*(G)$ y si $cl^*(G)$ es sucesor $cl(G)^+ = cl^*(G)$.■.

De cualquier manera dado $cl^*(G)$ podemos obtener $cl(G)$.

## II. CONSTRUCCIÓN (1)

Sean $G$ y $H$ dos gráficas (posiblemente infinitas) y sea $\mathbf{F}$ el conjunto de todas las funciones de $V(G)$ en $V(H)$ (no necesariamente preservando aristas). Definimos el producto-$*$ de $G$ y $H$ $(G * H)$ como la siguiente gráfica:

$$V(G * H) = V(G) \times \mathbf{F} \times V(H)$$

$$A(G * H) = \{\{(v_1, f_1, w_1), (v_2, f_2, w_2)\} \mid$$

$$\begin{cases} i) v_1 = v_2 \text{ y } \{w_1, w_2\} \in A(H) \\ \text{o bien} \\ ii) \{v_1, v_2\} \in A(G),\ f_1 = f_2,\ w_1 = f_1(v_1),\ w_2 = f_1(v_2)\} \end{cases}$$

Llamaremos a una arista del primer o del segundo tipo de acuerdo a que satisfaga la primera o la segunda cláusula.

A partir de la definición de la gráfica $G * H$, tenemos como inmediatas las siguientes

OBSERVACIONES

1.- *$G * H$ no admite triángulos con aristas mezcladas.*

## DEMOSTRACIÓN

Supongamos que $a_1 = (v_1, f_1, w_1)$, $a_2 = (v_2, f_2, w_2)$ y $a_3 = (v_3, f_3, w_3)$ forman un triángulo con aristas mixtas, examinaremos los dos casos posibles:

*i*)Supongamos primeramente que $\{a_1, a_2\}$ y $\{a_2, a_3\}$ son aristas del primer tipo y $\{a_1, a_3\}$ es una arista del segundo tipo, por las definiciones de aristas del primer tipo tenemos que $v_1 = v_2$, $v_2 = v_3$ por tanto $v_1 = v_3$, lo cual es una contradicción, ya que, por la definición de arista del segundo tipo, $\{v_1, v_3\} \in A(G)$.

*ii*)Supongamos entonces que $\{a_1, a_2\}$ y $\{a_2, a_3\}$ son aristas del segundo tipo y $\{a_1, a_3\}$ es una arista del primero; tenemos entonces, recordando la definición de arista del primer tipo, que $v_1 = v_3$ y por la definición de arista del segundo tipo $f_1 = f_2 = f_3$ por tanto $w_1 = f_1(v_1) = f_3(v_3) = w_3$ lo cual tambien nos conduce a una contradicción, ya que $\{w_1, w_3\} \in A(H)$, por la definición de arista del primer tipo.■

2.-*Si $K_p \hookrightarrow G * H$, $K_p$ tiene aristas de un solo tipo*

Este hecho es un corolario directo de la observación anterior.

3.-*$G$ y $H$ se encuentran sumergidas en $G * H$ de muchas maneras distintas.*

Se calcularán cotas inferiores para el número de maneras distintas en que las gráficas $G$ y $H$ están sumergidas en $G * H$.

## DEMOSTRACIÓN

*i*)Por cada vértice $v \in V(G)$ y por cada elección de funciones $\{f_i\}_{i \in V(H)}$ tenemos una inmersión $\varphi_{v,\{f_i\}_{i\in V(H)}}$ de $H$ en $G * H$ definida como sigue: si

$$V(H) = \{x_i\}_{i \in \lambda}$$

$$\varphi_{v,\{f_i\}_{i\in V(H)}}(x_j) = (v, f_j, x_j)$$

por tanto tenemos al menos

$$|\,V(G)\,| \cdot |\,V(H)\,|^{|V(G)|\cdot|V(H)|}$$

inmersiones distintas de $H$ en $G * H$ con aristas del primer tipo.

*ii*)Para cada función $f \in \mathbf{F}$ tenemos una inmersión $\psi_f$ de $G$ en $G * H$ con aristas del segundo tipo definida como sigue si

$$V(G) = \{y_i\}_{i \in \xi}$$

$$\psi_f(y_i) = (v_i, f, f(v_i))$$

por tanto tenemos al menos

$$|V(H)|^{|V(G)|}$$

inmersiones distintas de $G$ en $G * H$ con aristas del segundo tipo.■

4.- $cl(G * H) \geq max\{cl(G), cl(H)\}$

Este hecho es un corolario directo de la observación anterior.

5.- $cl(G * H) \leq max\{cl(G), cl(H)\}$

## DEMOSTRACIÓN

Supongamos que

$$K_p \overset{\varphi}{\hookrightarrow} G * H,$$

$$V(K_p) = \overline{p},$$

definimos

$$(v_r, f_r, w_r) = \varphi(r),$$

es decir la imagen de r, bajo la inmersión $\varphi$, por la observación uno, tenemos dos casos por considerar:

*i*)Las aristas de $\varphi(K_p)$ son del primer tipo, en este caso definimos

$$\psi(r) = w_r$$

no es dificil comprobar que

$$K_p \overset{\psi}{\hookrightarrow} H.$$

*ii*)Si las aristas de $\varphi(K_p)$ son del segundo tipo, definimos

$$\psi(r) = v_r$$

un cálculo sencilo demuestra que:

$$K_p \overset{\psi}{\hookrightarrow} G.■$$

6.-

$$cl(G * H) = max\{cl(G), cl(H)\}$$

y

$$cl^*(G * H) = max\{cl^*(G), cl^*(H)\}.■$$

Una vez terminadas estas observaciones, pasaremos a demostrar un lema previo a la demostración que Komjath y Rödl dal al teorema de Folkman.

### LEMA

*Si $G$ y $H$, son dos gráficas arbitrarias (posiblemente infinitas) entonces tenemos que:*

$$G * H \longrightarrow (G, H)_2^1$$

### DEMOSTRACIÓN

Sea $f : V(G * H) \to \overline{2}$ una 2-coloración de $V(G * H)$ digamos en azul y amarillo.

$i$)En caso de que exista $v \in V(G)$ tal que para todo $w \in V(H)$ hay un vértice $(v, f_w, w)$ azul, entonces, procediendo analogamente a la observación 4, $\varphi : V(H) \to V(G * H)$ definida como $\varphi(w) = (v, f_w, w)$ es una inmersión de $H$ en $G * H$ de color azul.

$ii$)En caso contrario tenemos que para cualquier vértive $v \in V(G)$ existe $w_v \in V(H)$ tal que todos los vértices en $\{v\} \times \mathbf{F} \times \{w_v\}$ son de color amarillo, tomamos $f \in \mathbf{F}$ tal que $f(v) = w_v$, entonces el conjunto $\{(v, f, w_v) \mid v \in V(G)\}$ genera una copia de $G$ de color amarillo.■

Con base en este resultado podemos ahora demostrar y enunciar el teorema de Folkman (versión generalizada para gráficas infinitas):

### TEOREMA 1

*Si $G$ es una gráfica (posiblemente infinita) y $r \in N$ entonces existe una gráfica $G^r$ (que es finita cuando $G$ lo es) tal que:*

$$i)\ G^r \longrightarrow (G)_r^1$$

$$ii)\ cl^*(G^r) = cl^*(G)$$

### DEMOSTRACIÓN

Definimos $G^1 = G$, $G^r = G * G^{r-1}$. Por la construcción del producto y la observación 3 tenemos que:

$$cl^*(G^r) = cl^*(G).$$

A continuación demostraremos que:

$$G^r \longrightarrow (G)_r^1.$$

Sea $r$ el n'umero de colores; si $r = 1$ el resultado es trivial y para $r = 2$ es el lema anterior; supongamos entonces que el teorema es válido para $r = k - 1 \geq 2$ y demostraremos que vale para $r = k$. Sea $f$ una k-coloración de $V(G^r)$ y elijamos un color, digamos el rojo, podemos decir que la gráfica está pintada de dos colores: rojo y no-rojo como $G^r = G * G^{r-1}$ por el lema anterior sabemos que o tenemos una copia de $G$ de color rojo (en cuyo caso ya acabamos) o una de $G^{r-1}$ de color no-rojo, pero en este caso como tenemos $k - 1$ colores no-rojos por la hipótesis de inducción tenemos una copia de $G$ monocromática. ■

Podríamos haber definido $G^r = G^{r-1} * G$ y la demostración que dimos seguiría funcionando, solo que en este caso el número de vértices de $G^r$ crecería de manera $n$-exponencial, mientras que con la otra definición el crecimiento solo es exponencial. v.gr. si $| V(G) | = n < \aleph_0$

$$| V(G^2) | = | V(G) \times \mathbf{F} \times V(G) | =$$

$$n^2 \cdot n^n = n^{n+2} = n^{n+1+1}$$

$$| V(G^3) | = \begin{cases} n \cdot n^{(n+2)^n} \cdot n^{n+2} = n^{(n+1)^2+(n+1)+1} \\ n^{n+2} \cdot n^{n^{n+2}} \cdot n = n^{n^{n+2}+n+3} \end{cases}$$

siendo el primer resultado el obtenido al aplicar la primera definición y el segundo aplicando la segunda. En general tenemos la siguiente

## AFIRMACIÓN 1

$$| V(G^r) | \stackrel{def1}{=} n^{\sum_{i=0}^{r-1} (n+1)^i}$$

## DEMOSTRACIÓN

$$| V(G^r) | = | V(G) \times \mathbf{F} \times V(G^{r-1}) | =$$

$$n \times (n^{\sum_{i=0}^{r-2} (n+1)^i})^n \times n^{\sum_{i=0}^{r-2} (n+1)^i} =$$

$$n^{\sum_{i=0}^{r-1} (n+1)^i} = n^{\frac{(n+1)^r - 1}{n}} \blacksquare$$

Sin embargo si hubieramos utilizado la definición 2 habríamos obtenido

$$| V(G^r) | \approx n^{\sum_{i=0}^{r-1} exp^i n}.$$

En el caso de gráficas infinitas tendríamos la siguiente

**AFIRMACIÓN 2**

*Si* $|V(G)| = \kappa \geq \aleph_0$ *y* $r \in N$, $r \geq 2$

$$|V(G^r)| = 2^\kappa$$

**DEMOSTRACIÓN**

$$\begin{gathered} |V(G^2)| = |V(G) \times \mathbf{F} \times V(G)| = \\ |\kappa \cdot \kappa^\kappa \cdot \kappa| = \\ |\kappa^2 \cdot 2^\kappa| = 2^\kappa \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} |V(G^r)| = |V(G) \times \mathbf{F} \times V(G^{r-1})| = \\ |\kappa \times (2^\kappa)^\kappa \times 2^\kappa| = \\ (2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa \end{gathered}$$

A pesar de todo $|V(G)|$ es un número enorme por lo que modificando un poco la demostración podemos obtener el siguiente

**TEOREMA 2**

*Para toda gráfica* $H$ *existe otra gráfica* $G$ *tal que*

$$i)\ cl^*(G) = cl^*(H)$$

$$ii)\ G \longrightarrow (H)^1_2$$

$$iii)\ |V(G)| \leq |V(H)|^{\chi(H)+2}$$

*donde* $\chi(H)$ *es el número cromático de* $H$.

Para demostrar este teorema harémos uso de la siguiente

**III. CONSTRUCCIÓN (2)**

Sea $\kappa = \chi(H)$ y sea $\Pi : V(H) \to \kappa$ una buena coloración de $V(H)$, sean $\{V_i\}_\kappa$ las clases de color y $Y$ el conjunto de todas las funciones $g : \kappa \to V(H)$. Sea $G$ la gráfica definida como sigue:

$$V(G) = V(H) \times V(H) \times Y$$

$$A(G) = \{\{(v_1, w_1, g_1), (v_2, w_2, g_2)\} \mid$$

1)Existe $i$ tal que $g_1(i) = v_1, g_2(i) = v_2$ $\{v_1, v_2\} \in A(H)$ $w_1, w_2 \in V_i$
o bien

2)$g_1 = g_2, \{w_1, w_2\} \in A(H), w_1 \in V_i, w_2 \in V_j$, $g_1(i) = v_1, g_1(j) = v_2$

Llamaremos a una arista del primer o segundo tipo dependiendo de cual cláusula satisfaga.

## OBSERVACIONES

**1.-** *$G$ no admite clanes con aristas mezcladas*

## DEMOSTRACIÓN

Se puede comprobar de manera completamente analoga a como se demostró la observacion 2 a la construcción 1.

**2.-**$cl^*(H) = cl^*(G)$

## DEMOSTRACIÓN

Sea $\bar{p} = V(K_p)$ si

$$K_p \overset{\varphi}{\hookrightarrow} H$$

sea $v \in V(H)$ y sea $g : \kappa \to V(H)$ tal que $g(x) = v$ para toda $x \in \kappa$, definimos ahora $\psi : V(K_p) \to H$ como sigue

$$\psi(i) = (v, \varphi(i), g)$$

facilmente se verifica que

$$K_p \overset{\psi}{\hookrightarrow} G$$

por tanto

$$cl(G) \geq cl(H).$$

Por otra parte si

$$K_p \overset{\psi}{\hookrightarrow} G$$

tenemos 2 casos:

i)Los elementos de $A(\psi(K_p)$ son del primer tipo. Definimos $\varphi(v_j, w_j, g_j) = v_j$ y verificamos que

$$K_p \overset{\varphi}{\hookrightarrow} H$$

*ii*) En el caso de que las aristas de $\psi(K_p)$ sean del segundo tipo definimos $\varphi(v_j, w_j, g_j) = w_j$ y tenemos que

$$K_p \overset{\varphi}{\hookrightarrow} H.$$

Por tanto

$$cl(G) \leq cl(H)$$

por tanto

$$cl(H) = cl(G).$$

Además, trivialmente, $|V(G)| = |V(H)|^{\chi(H)+2}$.■

Terminadas las observaciones pasaremos a demostrar que la gráfica construida es efectivamente una grafica de Ramsey para $H$ y 2.

## DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2

Sea $\kappa = |V(G)|$, supongamos que coloramos los vértices de $G$ de dos colores, digamos azul y rojo, si existe $i \in \kappa$ tal que para todo $v \in V(H)$ existe $w_v \in V_i$ y $g_v \in Y$ con $g_v(i) = v$ y $(v, w_v, g_v)$ es de color azul entonces el conjunto $\{(v, w_v, g_v) \mid v \in V(H)\}$ induce una copia azul de $H$ en $G$. Si por el contrario para cada $i \in \kappa$ existe $v_i \in V(H)$ tal que para toda $w \in V_i$ y $g \in Y$ con $g_i = v_i$ el punto $(v_i, w, g)$ es de color rojo, fijamos una función $g(i) \mapsto v_i$ y definimos para cada $w \in V_i$ $h(w) = (v_i, w, g)$, $h$ sumerge $H$ en $G$ e induce en ella una copia de $H$ con aristas del segundo tipo y vértices rojos.■.

# LA

# PRUEBA

# INFINITISTA

# DE

# HENSON

Aunque la prueba de Komjath-Rödl resuelve completamente el problema planteado por Erdös (P. Erdös-A. Hajnal[1967]), y al mismo tiempo nos proporciona una prueba sencilla y contundente al Teorema de Folkman, analizaremos en este capítulo otra prueba al mismo Teorema de Folkman debida a Henson (C.W. Henson [1971]).

La prueba que da Henson al Teorema de Folkman es anterior a la de Komjath-Rödl, y aunque no es constructiva, posee un encanto particular al incorporar técnicas de la teoría de Modelos proporcionando un enfoque novedoso, elegante y fructífero al estudio de la teoría de gráficas.

Para demostrar que dada una gráfica $H$ existe otra gráfica $G$ con el mismo número de clan que $H$ y que ademas cumple la propiedad de Ramsey, Henson analiza una clase de gráficas con número de clan acotado y con número de vértices a lo sumo numerable.

Para cada una de estas clases Henson construye una gráfica que, entre otras propiedades, admite a toda gráfica con número de vértices numerable cuyo número de clan no exceda a una constante $p$ [1]; posteriormente demuestra para estas gráficas una propiedad estilo la de Ramsey que resulta ser equivalente, via algún debilitamiento del axioma de elección, al teorema de Folkman; sin embargo la prueba que resulta es meramente existencial, es decir, no permite la construcción efectiva de la gráfica cuya existencia asegura.

En este capítulo desarrollaremos la prueba de Henson, sin embargo supondremos, sin dar una demostración, la existencia de una familia de gráficas $\{U_p \mid p \geq 3\}$, donde $U_p$ es una gráfica *universal* para la clase de gráficas cuyo número de clan es menor o igual que $p$; además de esta propiedad $U_p$, es *homogénea*.

Este capítulo constará de las siguientes secciones:

1.-**Definiciones**,

2.-**Propiedades Universales**, para cada $p \geq 3$, se definirá una propiedad (a la que llamaremos $A_p$), que caracterizará bajo isomorfismo a cada gráfica $U_p$, (hecho que tampoco demostraremos aquí, pero que el lector puede verificar refiriéndose al lema 4 y siguientes del apéndice).

3.-**Teorema de Folkman**, se demostrará un teorema estilo el teorema de Ramsey para las gráficas $U_p$, que resultará ser equivalente al teorema de Folkman, con lo que daremos por alcanzada nuestra meta.

## I. DEFINICIONES

1.-*Una gráfica $G$ es HOMOGÉNEA sii para toda subgráfica inducida $H$ de $G$ y cualquier inmersión $f$ de $H$ en $G$, $f$ se puede extender a un automorfismo de $G$.*

[1] véase la Construcción (2) y teoremas relacionados en el apéndice a este trabajo.

Es interesante remarcar que si una gráfica es homogénea este hecho automaticamente implica que su diámetro es menor o igual a dos, cuando es conexa, y uno en cada una de sus componentes si no lo es, y además cada una de las componentes debe tener el mismo número de vértices. Este hecho se debe a que si tuvieramos una gráfica $G$ y dos de sus vértices $u$ y $v$ tales que $d_G(u,v) \geq 3$ forzosamente debe existir un $z$ tal que $d_G(u,z) = 2$ y si definimos una función $f$ como $f(u) = u$ y $f(v) = z$ esta es claramente un isomorfismo entre $\{u,v\}_G$ y $\{u,z\}_G$ que no se puede extender a un automorfismo de $G$ ya que en particular este debería preservar distancias.

2.-*Sea $C$ una clase de gráficas, se dice que una gráfica $U$ es UNIVERSAL para la clase $C$ sii para toda gráfica $G$ que pertenezca a la clase se tiene que $G \hookrightarrow U$ y ademas $U$ pertenece a la clase $C$.*

## II. PROPIEDADES UNIVERSALES

Henson construye una gráfica U que es universal para la clase de todas las gráficas con a lo sumo un número numerable de vértices (véase la Construcción (1) y teoremas relacionados en el apéndice) y para cada $p \in N, p \geq 3$ construye una subgráfica inducida $U_p$ de U que satisface la siguiente

### CONDICIÓN $A_p$

*Se dice que una gráfica $G$, satisface la condición $A_p$ si y solamente si*

*i)* $K_p \not\hookrightarrow U_p$

*ii) Si $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ son dos subconjuntos, ajenos, y finitos, de $V(U_p)$ y $K_{p-1} \not\hookrightarrow (\mathbf{F}_1)_{U_p}$, entonces existe $u \in V(U_p)$ tal que es adyacente en $U_p$ a todos los vértices de $\mathbf{F}_1$ y a ninguno de los de $\mathbf{F}_2$.*

Por el hecho de satisfacer esta condición, la gráfica $U_p$ es universal en la clase de gráficas que no admiten a $K_p$ y tienen a lo más un número numerable de vértices, por otra parte esta gráfica resulta ser homogénea y única bajo isomorfismo, por lo que podría pensarse que al estudiar las propiedades de $U_p$ estamos estudiando de golpe propiedades concernientes a todas las gráficas $G$ tales que $K_p \not\hookrightarrow G$, este hecho se verifica en la siguiente sección.

## III. TEOREMA DE FOLKMAN

### TEOREMA 1

*Sea $p \geq 3$, y supongamos que $V(U_p)$ es coloreado de dos colores, digamos azul y rojo, denotamos por* $\mathbf{A}$ *al conjunto de vértices azules y por* $\mathrm{R}$ *al conjunto de vértices rojos, entonces:*

*i) Existe* $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ *tal que* $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ *es finito y* $\langle \mathbf{B} \rangle_{U_p} \cong U_p$;

*o bien*

*ii)* $\langle \mathrm{R} \rangle_{U_p}$ *admite a cualquier gráfica finita que no admita a* $K_p$.

La demostración de este teorema se llevará a cabo suponiendo que no se satisface la primera cláusula y demostrando a partir de este hecho que la segunda debe ser satisfecha.

Es de notarse que del hecho de que no se satisfaga la primera cláusula, automaticamente implica que ni la parte azul de $U_p$ ni cualquiera de sus subgráficas inducidas resultado de quitarle un número finito de vértices satisface la propiedad $A_p$, ya que esta es una propiedad universal que caracteriza bajo isomorfismo a la gráfica $U_p$; este hecho y el que $U_p$ sea homogénea serán claves en la demostración del teorema.

### DEMOSTRACION

Sean $p \geq 3$, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ como en la hipótesis y supongamos que no se satisface la primera cláusula. Construimos recursivamente una sucesión $\{(\mathbf{C}_n, \mathbf{D}_n) \mid n \geq 1\}$ donde $\mathbf{C}_n, \mathbf{D}_n$ son subconjuntos finitos y disjuntos de $V(U_p)$ como sigue:

BASE DE RECURSION

Tenemos que

$$\langle \mathbf{A} \rangle_{U_p} \ncong U_p.$$

Pues de no ser así tomaríamos $\mathbf{B} = \mathbf{A}$.

Este hecho implica que $\langle \mathbf{A} \rangle_{U_p}$ no satisface la propiedad $A_p$, ya que esta caracteriza bajo isomorfismo a la gráfica $U_p$, pero como dada una gráfica, cualquier subgráfica de la misma tiene número de clan menor que ella (hecho que nuestro lector podrá demostrar sin dificultad), necesariamente falla la cláusula *ii* de la citada propiedad es decir podemos concluir que existen

$$\mathbf{C}_1, \mathbf{D}_1 \subseteq V(\mathbf{A})$$

ajenos y finitos tales que $K_{p-1} \not\to \langle \mathbf{C}_1 \rangle_{U_p}$ y cualquier $v \in V(U_p)$ que sea adyacente a todos los vértices de $\mathbf{C}_1$ y a ninguno de los de $\mathbf{D}_1$ es de color rojo.

Demostrada la existencia de estos conjuntos podemos dar por establecida la base de nuestra construcción recursiva, pasemos ahora al paso de recursión.

PASO RECURSIVO

Supongamos que para alguna $n \geq 1$:

$$(\mathbf{C}_1, \mathbf{D}_1), (\mathbf{C}_2, \mathbf{D}_2), \ldots, (\mathbf{C}_n, \mathbf{D}_n)$$

han sido construidos. Sea $\mathbf{E}_n = \bigcup_{i=1}^{n} (\mathbf{C}_i \cup \mathbf{D}_i)$, $\mathbf{E}_n$ es un subconjunto finito de vértices azules, por tanto

$$\langle \mathbf{A} - \mathbf{E}_n \rangle_{U_p} \not\cong U_p,$$

por tanto $\langle \mathbf{A} - \mathbf{E}_n \rangle_{U_p}$ no satisface la propiedad $A_p$, y necesariamente falla la cláusula dos de dicha propiedad, por tanto tenemos que existen:

$$\mathbf{C}_{n+1}, \mathbf{D}_{n+1}$$

subconjuntos ajenos, finitos y disjuntos de $\mathbf{A} - \mathbf{E}_n$ tales que todo vértice de $V(U_p)$ que sea adyacente a todos los vértices de $\mathbf{C}_{n+1}$ y a ninguno de los de $\mathbf{D}_{n+1}$ está en $\mathbf{R} \cup \mathbf{E}_n$.

Como este paso incluye a los elementos $\mathbf{C}_{n+1}$ y $\mathbf{D}_{n+1}$ de la sucesión podemos dar por términado nuestro paso recursivo y por tanto construida la sucesión.

Una vez construida la sucesión, sea $H$ una gráfica finita que no admita a $K_p$ y supongamos que $V(H) = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ es tal que $V(H) \cap V(U_p) = \phi$; construimos la siguiente gráfica $M$:

$$V(M) = V(H) \cup \mathbf{E}_k$$

$$\{u, w\} \in A(M) \iff$$

$i)\{u, w\} \in A(H)$

o bien

$ii)\{u, w\} \in \langle \mathbf{E} \rangle_{U_p}$

o bien

$iii) u = a_j, w \in \mathbf{C}_j$ p.a. $j = 1, \ldots, k$.

**AFIRMACION**

$$K_p \not\to M.$$

**DEMOSTRACION**

Supongamos que existe $\mathbf{F} \subseteq V(M)$ tal que $\langle \mathbf{F} \rangle_M \cong K_p$ esto implica necesariamente que $\mathbf{F} \cap V(H) \neq \phi$ y $\mathbf{F} \cap E_k \neq \phi$ ya que, por la construcción de $M$ y por las propiedades de $U_p$, ni $H$ ni $\langle \mathbf{E}_k \rangle_{U_p}$ admiten a $K_p$.

Por otra parte como cada vértice de $E_k$ está unido a lo más a un vértice de $H$ tenemos que $\mathbf{F} \cap V(H)$ consta de un solo vértice digamos $\{a_j\}$ y el inciso *iii* de la definición de las aristas de $M$ implica que: $\mathbf{F} \cap \mathbf{E}_k \subseteq \mathbf{C}_j$ para alguna j tal que $1 \leq j \leq k$, este hecho implica que: $\langle \mathbf{C}_j \rangle_G (= \langle \mathbf{C}_j \rangle_{U_p})$ admite a $K_{p-1}$ lo cual contradice la definición de $\mathbf{C}_j$ ■.

Como $K_p \not\hookrightarrow M$ tenemos que $M \hookrightarrow U_p$ y como $U_p$ es homogénea existe una inmersión $f$ de $M$ en $U_p$ tal que $f(v) = v \ \forall_{v \in \mathbf{E}_k}$.

Este hecho es consecuencia directa del Teorema 1 del apéndice.

Por otra parte como $f(a_j) \notin \mathbf{E}_k$ para $1 \leq j \leq k$,por construcción y $\{f(a_j), v\} \notin A(U_p)$, $\forall_v \in \mathbf{D}_j$, $f(a_j)$ es de color rojo, por tanto

$$H \overset{f}{\hookrightarrow} \langle \mathbf{R} \rangle_{U_p}$$

y como la gráfica H es arbitraria tenemos que $\langle \mathbf{R} \rangle_{U_p}$ admite a cualquier gráfica finita que no admita a $K_p$. ■.

En realidad más importante que este teorema (para nuestros fines) resulta el siguiente corolario que es equivalente al teorema de Folkman en su enunciación original.

## COROLARIO 1

*Si $p \geq 3$ y coloreamos los vértices de $U_p$ con un número finito de colores, entonces existe un color tal que la subgráfica inducida por la clase de ese color admite a todas las gráficas finitas que no admitan a $K_p$.*

## DEMOSTRACIÓN

Procederemos por inducción sobre en número de colores al que denotaremos por $n$.

Si $n = 1$ el resultado es trivial y si $n = 2$ el resultado es el teorema anterior, supongamos ahora el resultado válido para $n = k \geq 2$ y lo demostraremos para $n = k + 1$.

Sea $f$ una $k+1$ coloración de $V(U_p)$, elijamos un color, digamos el rojo, si la gráfica inducida por los vértices de color rojo admite a todas las gráficas finitas que no admiten a $K_p$ ya acabamos; en caso contrario y por el teorema anterior existe un conjuto $\mathbf{B}$ de vértices no rojos tales que $\{v \in V(U_p) \mid v \text{ es no rojo}\} - \mathbf{B}$ es finito y $\langle \mathbf{B} \rangle_{U_p} \cong U_p$ pero el número de colores no-rojos es $k$, por tanto, aplicando la hipótesis de inducción, tenemos que existe un color S (no-rojo) tal que $\langle\{v \in \mathbf{B} \mid v \text{ es de color } \mathbf{S}\}\rangle_{U_p}$ admite a todas las gráficas finitas que no admitan a $K_p$ ■.

A continuación demostraremos la equivalencia entre este corolario y el teorema de Folkman que reenunciaremos a continucaión. Para la demostración utilizaremos el lema de infinitud de Kõnig como en la demostracióm dada en la introducción para el teorema de Ramsey.

## TEOREMA DE FOLKMAN

*Sea $H$ una gráfica finita y $r \geq 1$, entonces existe $G$ otra gráfica finita y tal que*

$$G \longrightarrow (H)^1_r$$

*y*

$$cl(H) = cl(G).$$

## TEOREMA 2

*Teorema de Folkman $\Longleftrightarrow$ Corolario 1.*

## DEMOSTRACION

*i)*$\Longrightarrow$

Supongamos el teorema de Folkman y la negación del corolario 1, *i.e.* $\exists f: N \to \bar{r}$ una r-coloración de $V(U_p)$ tal que $\forall j\ 0 \leq j < r\ \exists H_j$ gráfica finita que no admite a $K_p$ y $H_j \not\to \langle f^{-1}(j)\rangle_{U_p}$.

Sea $H = \coprod_{j=0}^{r-1} H_j$ evidentemente $cl(\coprod_{j=0}^{r-1})H_j = max\{cl(H_j) \mid 1 \leq j < r\}$ por tanto $cl(H) \leq p$ por tanto (por el teorema de Folkman), existe una gráfica finita $M$ tal que

$$cl(M) = cl(H) \leq p$$

y

$$M \longrightarrow (H)^1_r.$$

Por otra parte existe $\varphi$ tal que

$$M \overset{\varphi}{\hookrightarrow} U_p$$

por tanto si definimos $\overline{\varphi}$ como la correstricción de $\varphi$ a su imagen tenemos que:

$$f\overline{\varphi}: V(M) \to \bar{r}$$

es una r-coloración de $V(M)$, por tanto $\exists k < r$ tal que $H \hookrightarrow \langle (f \circ \overline{\varphi})^{-1}(k)\rangle_M \overset{\overline{\varphi}}{\hookrightarrow} \langle \overline{\varphi}^{-1} f^{-1}(k)\rangle_M = \langle f^{-1}(k)\rangle_{U_p}$ ya que $\overline{\varphi}$ es isomorfismo de gráficas.

Por tanto, $H_k \hookrightarrow H \hookrightarrow \langle f^{-1}(k)\rangle_{U_p}$ lo cual contradice la definición de $H_k$ ■.

*ii)*$\Longleftarrow$

## DEMOSTRACION

Supongamos ahora el corolario 1 y la negación del teorema de Folkman, *i.e.* existe $H$ gráfica finita y $r \in N$ tal que para toda otra gráfica finita $G, cl(G) = cl(H)$ existe $f_G$ una r-coloración de $V(G)$ tal que

$$H \not\hookrightarrow \langle f_G^{-1}(k)\rangle_G,\ 0 \le k < r.$$

Sea $p - 1 = cl(H)$ y sea

$$H_n = \langle \overline{n}\rangle_{U_p},$$

es decir $H_n$ es la subgráfica inducida de $U_p$ por el conjunto $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$[2], $cl(H_n) \le cl(U_p) = p-1$ por tanto por hipótesis

$$H_n \not\longrightarrow (H)_r^1$$

*i.e.*

$$\exists f_n : V(H_n) \to \overline{r}$$

tal que

$$H \not\hookrightarrow \langle f_n^{-1}(k)\rangle_{H_n}\ \ 0 \le k < r.$$

Sea

$$T = \{f_n \lceil_{\overline{s}} |\ s \le n, n \in N\}.$$

Como en la demostración dada al teorema finito de Ramsey, se demuestra que $T = \{T, \subseteq\}$ es un $o$-árbol de altura infinita y con cada uno de sus niveles finito por tanto (por el Lema de Infinitud de Kõnig) existe F una rama infinita de T.

Sea $f = \bigcup \mathrm{F}$; $f: N \to \overline{r}$[3] es una r-coloración de $V(U_p)$, por tanto (por el corolario 1) $\exists k < r$ tal que

$$H \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \langle f^{-1}(k)\rangle_{U_p}.$$

---

[2] Como $U_p$ tiene un númer numerable de vértices podemos, sin pérdida de generalidad suponer que $V(U_p) = N$.

[3] $f$ tiene como dominio a los naturales debido a que F al ser rama del $o$-árbol, en particular contiene a todas las restricciones de las funciones que contiene las que a su vez poseen un dominio arbitrariamente grande.

Sea $m = \max\{\varphi(v) \mid v \in V(H)\}$ y sean $s, t \geq m$ tales que $f_s\lceil_{\bar{t}} \in \mathbf{F}$.

$$H \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \langle f^{-1}(k)\rangle_{U_p} = \langle f_s^{-1}\lceil_{\bar{t}}(k)\rangle_{U_p} = \langle f_s^{-1}\lceil_{\bar{t}}(k)\rangle_{H_s} \hookrightarrow \langle f_s^{-1}(k)\rangle_{H_s},$$

lo cual es una contradicción con las definiciones de $f_s$ y de $H_s$. ■.

Después de demostrar el Teorema de Folkman, Henson plantea la siguientre pregunta: Puede el corolario 1 extenderse de manera que diga: Dados $r$ y $p$ y $f\colon V(U_p) \to \bar{r}$,

Existe $k < r$ tal que

$$U_p \hookrightarrow \langle f^{-1}(k)\rangle_{U_p}.$$

Aunque Komjath-Rödl [1986] afirman dar una demostración para el caso $p = 3$, al parecer esta conjetura continúa abierta.

# APÉNDICE

# GRAFICAS HOMOGENEAS

En este apéndice se desarrollará la teoría de Gráficas homogéneas que sustenta la demostración que Henson da al Teorema de Folkman.

El estudio de estructuras homogéneas fue comenzado por Fraissé ([1954]) en el contexto de la teoría de Modelos; Henson ([1971]) especifica la noción de homogeneidad a la teoría de Gráficas (a lo largo de todo el apéndice se supondrá que $| V(G) | \leq \aleph_0$ para toda gráfica $G$ que se mencione).

Este apéndice consiste en una serie de resultados y demostraciones un tanto técnicas sobre gráficas homogéneas y universales (las definiciones de estos conceptos aparecen tanto en este apéndice como en el capítulo 2 ), sin embargo si el lector desea hacer acto de fe y evitar las demostraciones, puede estar seguro de que esto no le dificultará la comprensión de los restantes capítulos de la tesis; incluso, es suficiente conocer las definiciones contenidas en el capítulo 2 para entender la prueba que da Henson al Teorema de Folkman.

Si a pesar de las anteriores advertencias, el lector prosigue en su empeño de hincarle el diente al presente capítulo, recompensaremos su temeridad brindandole un indice y breve bosquejo de las secciones que integran este apéndice.

La meta a alcanzar al final de este capítulo es que el lector quede convencido de la *existencia* de una gráfica U y de una familia de subgráficas inducidas de la misma que por cumplir con ciertas propiedades serán llamadas gráficas *Universales* y/o *Homogéneas*.

El apéndice consta de las siguientes secciones:

1.- **Definiciones** de gráficas Homogéneas. El plural se debe a que, con miras a fácilitar el manejo de la noción de homogeneidad, damos una definición alternativa y equivalente a la usual.

2.-**Ubicuidad**, este concepto indica la relación entre la estructura de ciertas gráficas infinitas y sus subgráficas inducidas finitas. Daremos algunos resultados al respecto.

3.-**Propiedades Universales**. Este nuevo enfoque, un tanto categórico, a la teoría de gráficas homogéneas permite una mayor elegancia y fácilidad de manejo de estas estructuras; Introduciremos las propiedades y enunciaremos 3 lemas previos al del teorema 4, que solo es categórico en su perspectiva ya que en ningún momento utilizamos técnicas algebraicas o resultados ajenos a este apéndice para su demostración.

4.-**"Construcciónes"** de las gráficas prometidas. Como nuestros lectores seguramente se han ya percatado, el autor no posee el menor escrupulo en realizar "construcciones" en las que el axioma de elección juega un papel esencial; he aquí una nueva licencia que al respecto nos hemos permitido, para lograr nuestros fines. Los últimos teoremas del apéndice justificaran nuestros medios, al demostrar las propiedades que habíamos prometido tendrían nuestras gráficas.

## I. DEFINICIONES

*Se dice que una gráfica $G$ es HOMOGENEA si y solamente si: dada una subgráfica $H$ de $G$ y una inmersión $f$ de $H$ en $G$, $f$ se puede extender a un automorfismo de $G$.*

En el capítulo 1, se esbozan algunas propiedades de las gráficas homogéneas finitas, sin embargo es el caso numerable al que aplicaremos los resultados consignados en este apéndice.

El Teorema 1 nos proporcionará una definición alternativa de gráfica homogénea, que será la más utilizada a lo largo de todo el apéndice, cabe aclarar que nuestra primera definición es la usual.

## TEOREMA 1

*Una gráfica $G$ es homogénea si y solamente si para toda $H$, subgráfica inducida de $G$ tal que $|V(H)| < \aleph_0$ y $v \in V(H)$, cualquier inmersión $\varphi$, de $H - v$ en $G$ se puede extender a una inmersión $\overline{\varphi}$ de $H$ en $G$.*

## DEMOSTRACIÓN

*i) Necesidad*

Sea $G$ una gráfica homogénea, $H$ una subgráfica inducida de G, $v \in V(H)$ y $\varphi$ tal que

$$H - v \xhookrightarrow{\varphi} G.$$

Como $G$ es homogénea, $\varphi$ se extiende a $\overline{\varphi}$, automorfismo de $G$ que restringido a $V(H)$ es la inmersión buscada.

*ii)Suficiencia*

Para demostrar la suficiencia de la suficiencia de la afirmación hecha en el teorema será necesaria la siguiente:

OBSERVACIÓN 1

Si

$K$ y $M$ son dos subgráficas inducidas finitas de $G$ tales que $K \hookrightarrow M$ y $G$ cumple la propiedad de que:

*"Para toda $H$, subgráfica inducida de $G$ tal que $|V(H)| < \aleph_0$ y $v \in V(H)$, cualquier inmersión $\varphi$, de $H - v$ en $G$ se puede extender a una inmersión $\overline{\varphi}$ de $H$ en $G$."*

Entonces

cualquier inmersión $\psi$, de $K$ en $G$ se puede extender a una inmersión $\overline{\psi}$ de $M$ en $G$.■

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA

Sea $G$ una gráfica tal que para toda subgráfica $H$ de $G$ cualquier $v \in V(H)$ y cualquier función $\varphi$ tal que

$$H - v \overset{\varphi}{\hookrightarrow} G$$

existe $\overline{\varphi}$ extensión de $\varphi$ tal que

$$H \overset{\overline{\varphi}}{\hookrightarrow} G.$$

Supongamos, (sin pérdida de generalidad ya que nuestra gráfica es numerable), que

$$V(G) = \{v_1, v_2, \ldots\}.$$

Sea $H$ una subgráfica finita de $G$ y supongamos que

$$V(H) = \{w_1, w_2, \ldots, w_t\}.$$

Sea $\varphi$ tal que

$$H \overset{\varphi}{\hookrightarrow} G,$$

Sea

$$H_0^* = \langle \{\varphi(w_i)\}_{i=1}^t \cup \{v_1\} \rangle_G$$

Esto es, $H_0^*$ será la subgráfica inducida en $G$ por el conjunto de vértices de $H$, unión el primer vértice de $G$ en el orden que le hemos dado.

Notése que con esta definición no aseguramos que necesariamente $H \neq H_0^*$ en vista de que el conjuntos de vértices de $H$ y $\{v_1\}$ no tienen por que ser necesariamente ajenos.

Como $H \overset{\varphi}{\hookrightarrow} G$ y $H = H_0^* - v_1$ existe $\varphi^*$ que extiende a $\varphi$ por hipótesis del teorema ya que $H_0^*$ es también una subgráfica inducida finita de $G$, es decir:

$$H_0^* \overset{\varphi^*}{\hookrightarrow} G$$

y

$$\varphi^*(w_i) = \varphi(w_i) \quad i = 1, \ldots, t.$$

Sea

$$H_0^{**} = \langle \varphi^*(V(H_0^*) \cup \{v_1\}\rangle_G.$$

La definición de esta $H_0^{**}$ nos permitirá más tarde asegurar la suprayectividad del automorfismo que estamos buscando.

$H_0^{**}$ es subgráfica inducida finita de $G$ y $H \overset{\varphi^*}{\hookrightarrow} H^{**}$.

Sea $p = (\varphi^* \lceil_{V(H)})^{-1}$. $p(\varphi^*(H)) = H$, por tanto, aplicando la observación 1, tenemos que existe $\varphi^{**}$ que extiende a $p$ y además:

$$H_0^{**} \overset{\varphi^{**}}{\hookrightarrow} G.$$

Definimos ahora $H_1 = \varphi^{**}(H_0^{**})$. Y a la función inversa de $\varphi^{**}$ la llamamos $\varphi_1$. (Nótese que $v_1$ pertenece tanto al dominio como a la imagen de $\varphi_1$.

Con la definición y este primer paso queda establecida la base de nuestra construcción recursiva.

Ahora explicaremos el paso recursivo:

Supongamos ahora que para alguna $n$ hemos construido ya una sucesión finita de subgráficas inducidas finitas de $G$ tales que

$$H \subseteq H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n.$$

Y

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_i\} \subseteq V(H_i)$$

para toda $1 \leq i \leq n$.

Y asimismo, una sucesión de funciones:

$$\varphi \subseteq \varphi_1 \subseteq \varphi_2 \ldots, \subseteq \varphi_n.$$

Tales que:

$$H_i \overset{\varphi_i}{\hookrightarrow} G$$

para toda $1 \leq i \leq n$.

Y además:

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_i\} \subseteq Dom(\varphi_i) \cap Im(\varphi_i).$$

Sea

$$H_n^* = \langle \varphi_n(V(H_n)) \cup \{v_{n+1}\} \rangle_G$$

Como $H_n \xhookrightarrow{\varphi_n} G$ y $H_n = H_n^* - v_{n+1}$ existe $\varphi_n^*$ que extiende a $\varphi_n$ por hipótesis del teorema ya que $H_n^*$ es también una subgráfica inducida finita de $G$.

Sea

$$H_n^{**} = \langle \varphi_n^*(V(H_n^*)) \cup \{v_{n+1}\} \rangle_G.$$

$H_n^{**}$ es subgráfica inducida finita de $G$ y $H \xhookrightarrow{\varphi_n^*} H_n^{**}$.

Sea $p_n = (\varphi_n^* \lceil_{V(H_n)})^{-1}$. $p_n(\varphi_n^*(H)) = H$, por tanto, aplicando la observación 1, tenemos que existe $\varphi_n^{**}$ que extiende a $p_n$ y además:

$$H_n^{**} \xhookrightarrow{\varphi_n^{**}} G.$$

Definimos ahora $H_{n+1} = \varphi_n^{**}(H_n^{**})$. Y a la función inversa de $\varphi_n^{**}$ la llamamos $\varphi_{n+1}$. (Nótese que $v_{n+1}$ pertenece tanto al dominio como a la imagen de $\varphi_{n+1}$).

Como el paso recursivo ya incluye una gráfica más y su correspondiente inmersión al cabo de un número numerable de iteraciones podemos dar por construidas las siguientes sucesiones:

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \ldots$$
$$\varphi = \varphi_0 \subseteq \varphi_1 \subseteq \ldots.$$

Obsérvese que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} H_n = G$$

y, por otra parte, que el hecho de que exista la relación de contención entre las funciones implica la compatibilidad de las mismas.

Definimos

$$\overline{\varphi} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi_i.$$

como habíamos observado, las funciones son compatibles, por tanto la unión de las mismas es una función.

A continuación demostraremos que $\overline{\varphi}$ es el automorfismo buscado, es decir que por una parte es un automorfismo y por otra que extiende a $\varphi$.

**AFIRMACIÓN**

*$\overline{\varphi}$ es un automorfismo de $G$.*

*i)* La Unión arbitraria de funciones compatibles e inyectivas es inyectiva; ya que si no lo fuera debería haber un elemento de la familia que no fuera inyectivo. Y las inmersiones son inyectivas.

*ii)* La imagen de la unión de una familía de funciones es la unión de las imagenes. Y

$$Im(\overline{\varphi}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} Im\varphi_n$$

$$\supseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} (V(H) \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}) = V(G).$$

Notése que estamos abusando un poco de la notación al considerar $V(H) \subseteq V(G)$.

*iii)* Ahora demostraremos que $\overline{\varphi}$ preserva adyacencia en ambos sentidos. Sean $x, y \in V(G) \Rightarrow x = v_j, y = v_i,$ *p.a.* $i, j \in N$ supongamos sin pérdida de generalidad que: $i \leq j$

$$\overline{\varphi}(v_j)\ ady_G\ \overline{\varphi}(v_i)$$

$$\Leftrightarrow \varphi_j(v_j)\ ady_G\ \varphi_j(v_i)$$

$$\Leftrightarrow v_j\ ady_G\ v_i \Leftrightarrow x\ ady_G\ y \blacksquare.$$

Con estos tres incisos queda demostrado que $\overline{\varphi}$ es un automorfismo de $G$, y una rapida revisión del concepto de unión de una familia de funciones en la introducción demuestra que $\overline{\varphi}$ extiende a $\varphi$.

Con el resultado anterior queda demostrada la suficiencia de la condición de homogeneidad del Teorema 1, y por tanto la equivalencia de las definiciones dadas. $\blacksquare$

## II. Ubicuidad

Se dice que una gráfica (en general una estructura relacional), es *completamente ubicua*, si queda determinada bajo isomorfismo, por sus subgráficas inducidas (en general subestructuras inducidas) finitas.

Podemos constatar que, de los criterios de homogeneidad que dimos, ambos están relacionados directamente con las subgráficas inducidas finitas de las gráficas homogéneas en cuestión, hecho que, por otra parte, presenta una cierta similitud con la filosofía implicada en el Lema de Infinitud de König (véase la sección correspondiente en la introducción a este trabajo), que, en su momento, jugará un papel esencial en la aplicación de estos teoremas sobre gráficas infinitas al caso finito.

Comenzamos segunda sección con el teorema 2, que nos proporciona un criterio de subgráficas inducidas finitas, para determinar cuando una gráfica homogénea admite a otra gráfica cualquiera.

## TEOREMA 2

*Sea $G$ una gráfica homogénea y sea $H$ una gráfica numerable cualquiera, si $G$ admite a todas las gráficas finitas que admite $H$ entonces*

$$H \hookrightarrow G$$

Nótese que la afirmación de este teorema, deviene trivial en el caso que alguna de las gráficas involucradas sea finita por las siguiente observaciones:

1) Toda gráfica se admite a sí misma, basta con tomar como inmersión al automorfismo identidad; por tanto si la gráfica $H$ es finita, $G$ admite a $H$ por hipótesis, satisfaciendo al teorema.

2) Si la gráfica $G$ es finita, digamos con $n$ vértices, y la gráfica $H$ es infinita basta con tomar cualquier subgráfica inducida de $H$ con $n+1$ vértices, para que el teorema se cumpla por vacuidad.

Podemos por tanto suponer que ambas gráficas, $G$ y $H$, son infinitas (numerables).

## DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2

Sean $G$ una gráfica homogénea numerable y y $H$ una gráfica numerable cualquiera, tales que $G$ admita a todas las subgráficas finitas de $H$. Supongamos (sin pérdida de generalidad, ya que las gráficas son numerables) que

$$V(H) = \{v_1, v_2, \ldots\}.$$

Definimos ahora una sucesión $(H_1, H_2, H_3, \ldots)$ de subgráficas inducidas finitas de $H$ de la siguiente manera:

$$H_n = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle_H$$

es decir, la gráfica $H_n$ es la subgráfica inducida en $H$ por el conjunto de los primeros $n$ vértices, en el orden dado.

Es de observarse que

$$K_1 = H_1 \subseteq H_2 \subseteq H_3 \subseteq \ldots$$

y que $H_n$ es una subgráfica finita (de hecho con $n$ vértices) para cada $n \in N$.

Construiremos ahora recursivamente una sucesión de funciones

BASE DE LA RECURSIÓN

Como el conjunto de vértices de $G$ es no vacio (de hecho numerable) podemos elegir un punto $u \in V(G)$ y definir

$$\varphi_1 : V(H_1) \to V(G)$$

como

$$\varphi_1(v_1) = u.$$

Es fácil verificar que:

$$H_1 \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} G;$$

obsérvese que por la hipótesis del teorema podemos considerar a $H_2$ como una subgráfica inducida finita de $G$ (ya que $G$ admite a todas las subgráficas inducidas finitas de $H$ y $H_2$ es una de ellas).

Por otra parte, por construcción, tenemos que $H_1 = H_2 - v_2$, por lo que podemos considerar a $\varphi_1$ como una inmersión de $H_2 - v_2$ en $G$, por lo que, aplicando el teorema 1 y la observación anterior sabemos que $\varphi_1$ se puede extender a una función, a la que llamaremos $\varphi_2$, tal que

$$H_2 \overset{\varphi_2}{\hookrightarrow} G.$$

y además

$$\varphi_1 \subseteq \varphi_2$$

Con esta definición y esta primera extensión, podemos dar por sentada la base de nuestra construcción recursiva; pasaremos ahora a la descripción del paso recursivo.

PASO RECURSIVO

Supongamos que para alguna $n \geq 2$ y para toda $k \leq n$ hemos construido una función $\varphi_k$ con dominio en los vértices de $H_k$ y codominio en los vértices de $G$ tales que $H_i \subseteq H_j$ para toda $i$ menor que $j$ y ambas menores o iguales que $n$, tal que

$$H_k \overset{\varphi_k}{\hookrightarrow} G,$$

en particular tenemos que

$$H_n \overset{\varphi_n}{\hookrightarrow} G.$$

A continuación se explicará como obtener $\varphi_{n+1}$.

Por la hipótesis de que $G$ admite a todas las subgráficas finitas que $H$ admite, y por el hecho de $H_{n+1}$ es una subgráfica finita de $H$ (ya que tiene, por construcción, como conjunto de vértices, $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}\}$, con cardinalidad $n+1$), podemos considerar a $H_{n+1}$ como una subgráfica inducida finita de $G$.

Por otra parte como $H_n = H_{n+1} - v_{n+1}$ podemos considerar a $\varphi_n$ como una inmersión de $H_{n+1} - v_{n+1}$ en $G$ y aplicando el teorema 1, sabemos que $\varphi_n$ se puede extender a una inmersión $\varphi_{n+1}$ de $H_{n+1}$ en $G$, es decir, existe $\varphi_{n+1}$ tal que

$$H_{n+1} \overset{\varphi_{n+1}}{\hookrightarrow} G.$$

y además

$$H_1 \subseteq H_2 \subseteq \ldots \subseteq H_n \subseteq H_{n+1}$$

en particular las funciones son compatibles. Una vez definida la función $\varphi_{n+1}$ podemos dar por concluido el paso recursivo.

Si repetimos el paso recursivo una cantidad numerable de ocasiones podemos suponer construida la siguiente sucesión de funciones:

$$\varphi_1 \subseteq \varphi_2 \subseteq \varphi_3 \subseteq \ldots,$$

tales que

$$H_n \overset{\varphi_n}{\hookrightarrow} G \;\; \forall n \in N.$$

Como la funciones son compatibles (por la relación de contención), podemos asegurar que

$$\varphi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n$$

es una función, y el hecho de que $\varphi$ es la inmersión buscada, se demuestra de manera completamente analoga a como se hizo en el teorema 1.

En realidad, podemos mejorar un poco el resultado obtenido en el teorema 2, de manera que nos sea más útil posteriormente. Sin alterar demasiado la demostración podemos obtener de esta manera el

## TEOREMA 2′

Si $G$ es una gráfica homogénea, y $H$ otra gráfica cualquiera tales que existe una sucesión de $\{L_n \mid n \in N\}$ de subgraficas inducidas finitas de $H$ tal que:

1)

$$L_1 \subseteq L_2 \subseteq \ldots,$$

2)

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n = H,$$

3)

$$L_n \hookrightarrow G$$

Entonces:

$$H \hookrightarrow G$$

## DEMOSTRACIÓN

Sean $G$ una gráfica homogéneas numerables y y $H$ una gráfica numerable cualquiera, tales que

1)

$$L_1 \subseteq L_2 \subseteq \ldots,$$

2)

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n = H,$$

3)

$$L_n \hookrightarrow G$$

Supongamos (sin pérdida de generalidad, ya que las gráficas son numerables) que

$$V(H) = \{w_1, w_2, \ldots\}.$$

A cada elemento $w_i$ de la sucesión le asociamos un par $(n, w_i)$, tal que $w_i$ es el elemento dado y $n$ es el indice de la primera gráfica $L_n$ tal que $w_i \in L_n$. Demostraremos que esta asociación es una biyección:

1) Por la relación de contención (1) tenemos que si $w_i \in L_n$ entences $w_i \in L_m$ para toda $m \geq n$.

2) Por otra parte como $\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n = H$ (2), tenemos que $\forall i \exists n$ tal que $w_i \in L_n$. Y viceversa, para cada $v \in L_n$ existe $i \in N$ tal que $v = w_i$.

3) Como los indices de la sucesión son naturales, existe, por el teorema del buen orden para naturales, un mínimo natural $n$ tal que $w_i \in L_n$.

Definimos ahora un nuevo orden en el conjunto de parejas $\{(n, w_i)\}$; de la siguiente manera:

$$(n, w_i) \preceq (m, w_j) \Leftrightarrow$$

1)

$$n \leq m$$

o bien

2)

$$n = m \text{ y } i \leq j.$$

Como cada una de las gráficas $L_n$ es finita y el número total de vértices de $H$ es numerable podemos verificar, que el conjunto de parejas, con el orden que le hemos dado es isomorfo a $\omega$, ( el conjunto de los números naturales con el orden usual).

Definimos por recursión la siguiente función $\xi$:

$$\xi(1) = (1, w_i)$$

donde $w_i$ es el vértice de $L_1$ con indice mínimo. Una vez definido $\xi(n) = (r, w_j)$ consideramos dos casos para definir $\xi(n+1)$

1)

$$\exists w_k \in L_r \ \text{ talque } \ k > j.$$

En este caso definimos

$$\xi(n+1) = (r, w_m)$$

donde $w_m$ es el vértice de $L_r$ cuyo indice $(m)$ es mínimo con respecto a la propiedad de ser mayor que $j$.

2) En caso contrario definimos

$$\xi(n+1) = (s, w_k)$$

donde $s$ es el menor índice entre las gráficas $L_n$ que contengan algún vértice distinto de los contenidos en $L_r$, y $w_k$ es el menor de los indices de los elementos de $L_r$ mayores que $w_m$.

Por el teorema del buen orden para naturales, podemos afirmar que la función $\xi$ está bien definida, y es inyectiva, por el teorema de recursión podemos afirmar que el dominio de la función son los naturales y como cada una de las gráficas $L_n$ es finita, la función es sobre.

Ahora definimos una nueva enumeración de los vértices de $H$:

$$V(H) = \{v_1, v_2, \ldots\},$$

donde $v_n = \xi(n)$.

Definimos ahora una sucesión $(H_1, H_2, H_3, \ldots)$ de subgráficas inducidas finitas de $H$ de la siguiente manera:

$$H_n = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle_H$$

es decir, la gráfica $H_n$ es la subgráfica inducida en $H$ por el conjunto de los primeros $n$ vértices, en el orden dado.

Es de observarse que

$$K_1 = H_1 \subseteq H_2 \subseteq H_3 \subseteq \ldots,$$

y que $H_n$ es una subgráfica finita (de hecho con $n$ vértices) para cada $n \in N$.

En este paso podemos repetir la demostración del teorema 2, identificando nuestra $H_i$ con la $H_i$ de aquel para cada $1 \leq i \leq n$.■

El teorema 3 demostrará la ubicuidad de las gráficas homogéneas.

## TEOREMA 3

*Sean $H$ y $G$ gráficas homogéneas, si $G$ admite exactamente las mismas gráficas finitas que $H$ entonces $G \cong H$.*

Obsérvese que el hecho de que alguna de las gráficas sea finita implica que la otra lo es, y de hecho, si este es el caso, ambas tendrán el mismo número de vértices [1].

Por otra parte si las gráficas $G$ y $H$ son finitas, resulta que $G$ admite a $H$, como la función implicada tiene que ser inyectiva y las gráficas tienen el mismo cardinal, es sobre, y por el hecho de que preserva adyacencias en ambos sentidos, resulta ser un isomorfismo de gráficas.

Una vez hecha la observación anterior, basta ahora considerar el caso de gráficas infinitas.

## DEMOSTRACIÓN

Sean $G$ y $H$ gráficas homogéneas numerables y supongamos que admiten las mismas gráficas finitas.

Como las gráficas son numerables podemos suponer que: $V(H) = \{v_1, v_2, \ldots\}$ y $V(G) = \{w_1, w_2, \ldots\}$.

Utilizaremos una construcción doblemente recursiva.

BASE DE LA RECURSIÓN

Sea $H_1 = v_1$, en particular podemos considerar a $H_1$ como una subgráfica inducida finita de $H$, y por la hipótesis del teorema sabemos que existe una inmersión $\overline{\varphi}_1$ tal que

$$H_1 \xhookrightarrow{\overline{\varphi}_1} G,$$

definimos ahora

$$G_1 = \langle \overline{\varphi}_1(v_1), w_1 \rangle_G.$$

es decir la subgráfica inducida finita en $G$ por la imagen de la inmersión de $H_1$ y el primer elemento de $V(G)$ en el orden que le hemos dado. Como $\overline{\varphi}_1$ es inyectiva, por

[1] Si esta afirmación no es del todo clara, puede consultarse la primera observación a la demostración del teorema 2.

ser inmersión podemos definir $\psi_1 = \overline{\varphi}_1^{-1}$, entendiendo que esta inversa tiene como dominio solamente la imagen de $\overline{\varphi}_1$. con las dos definiciones anteriores y en vista que el dominio de $\psi_1$ es igual a la imagen de $\overline{\varphi}_1$ que es igual a $\varphi_1(v_1)$ que a su vez es igual por definición y recordando la definición de subgráfica inducida a $G_1 - w_1$ tenemos que

$$G_1 - w_1 \overset{\psi_1}{\hookrightarrow} H$$

por otra parte como por hipótesis $G$ y $H$ admiten a las mismas gráficas finitas, por hipótesis del teorema, y $G_1$ es una de ellas, y además $G_1$ es admitida por $G$, podemos considerarla, (a $G_1$), como subgráfica inducida de $H$, y por el teorema 1, sabemos que la inmersión $\psi_1$ de $G_1 - w_1$ en $H$ se puede extender a una inmersión, a la que llamaremos $\overline{\psi}_1$, de $G_1$ en $H$, es decir existe una función $\overline{\psi}_1$ tal que

$$G_1 \overset{\overline{\psi}_1}{\hookrightarrow} H.$$

Por otra parte tenemos que $\overline{\varphi}_1$ y $\overline{\psi}_1$ son funciones inversas una de la otra, en la parte de su dominio donde la afirmación tiene sentido, esto es:

$$\overline{\psi}_1\overline{\varphi}_1 = 1_{H_1}$$

y

$$\overline{\varphi}_1\overline{\psi}_1(w_1) = w_1$$

donde $1_{H_1}$ denota a la función identidad en $H_1$.

A continuación definimos la siguiente subgráfica inducida finita de $H$:

$$H_2 = \langle v_1, \overline{\psi}_1(w_1), v_2\rangle_H.$$

Esto es, la gráfica $H_2$ es la subgráfica inducida finita en $H$ por el conjunto de vértices $\{v_1, \overline{\psi}_1(w_1), v_2\}$ recordando las definiciones de

$$H_1 = v_1$$

y de

$$G_1 = \langle w_1, \overline{\varphi}_1(v_1)\rangle_G$$

asimismo teniendo en cuenta que

$$\overline{\psi}_1 = \overline{\varphi}_1^{-1}$$

y que $\overline{\psi}_1$ es una extensión de $\psi_1$, tenemos que

$$H_1 \subseteq G_1 \subseteq H_2.$$

Con la construcción de las gráficas $G_1$, $H_1$ y $H_2$ y las funciones $\overline{\varphi}_1$ y $\overline{\psi}_1$ podemos dar por concluida la base de nuestra construcción doblemente recursiva.

PASO RECURSIVO

Supongamos que ya hemos construido para alguna $n \geq 2$ la siguiente sucesión finita de gráficas inducidas finitas de $G$ y $H$ (recuérdese que por hipótesis del teorema 3, $G$ y $H$ admiten a las mismas gráficas finitas):

$$H_1 \subseteq G_1 \subseteq H_2 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_{n-1}$$

y las siguientes sucesiones de funciones,(que no esta por demás recordar que son conjuntos):

$$\overline{\varphi}_1 \subseteq \overline{\varphi}_2 \subseteq \ldots \subseteq \overline{\varphi}_{n-1}$$

y

$$\overline{\psi}_1 \subseteq \overline{\psi}_2 \ldots \subseteq \overline{\psi}_{n-1}$$

tales que

$$H_i \xhookrightarrow{\overline{\varphi}_i} G$$

y

$$G_i \xhookrightarrow{\overline{\psi}_i} H$$

para toda $i \leq n-1$.

Y tales que

$$\overline{\psi}_i \overline{\varphi}_i = 1_{H_i}$$

y

$$\overline{\varphi}_i \overline{\psi}_i(w_j) = w_j$$

para toda $i \leq n-1$, $j \leq i$.

Sea

$$H_n = \langle v_1, \overline{\psi}_1(w_1) \ldots \overline{\psi}_{n-1}(w_{n-1}), v_n \rangle_H,$$

es decir, $H_n$ es la subgráfica inducida finita en $H$ cuyo conjunto de vértices es la imagen de $G_{n-1}$ bajo $\overline{\psi}_{n-1}$ unión el $n$-ésimo vértice de $H$ en el orden que le hemos dado a $V(H)$ desde el comienzo de la demostración[2], por otra parte como $G$ y $H$ admiten las mismas gráficas finitas, y $H_n$ es una subgráfica inducida finita de $H$, podemos concluir que $G$ admite a $H_n$, en otras palabras, podemos considerar a $H_n$ como una subgráfica inducida finita de $G$.

Como, por hipótesis de recursión

$$\overline{\psi}_1 \subseteq \overline{\psi}_2 \subseteq \ldots \subseteq \overline{\psi}_{n-1}$$

podemos concluir que

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{\psi}_i = \overline{\psi}_{n-1}.$$

[2]Si el lector no queda lo suficientemente convencido de este hecho, o de algunos otros que se darán sin demostración debido a que forman parte de la base de nuestra construcción recursiva, no tiene más que revisar la base de la construcción, unas cuantas líneas más arriba en este mismo apéndice.

A continuación definimos $\varphi_n = \overline{\psi}_{n-1}^{-1}$ entendiendo como es costumbre que esta función inversa es la inversa de la correstricción de $\psi_{n-1}$ a su imagen y que está bien definida ya que $\psi_{n-1}$ es una inmersión y las inmersiones son inyectivas.

Recordando también la hipótesis de recursión tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi_n[V(H_n)] &= \varphi_n[\{v_1, \overline{\psi}_1(w_1)\ldots\overline{\psi}_{n-1}(w_{n-1})\}] \\
&= \{\varphi_n(v_1), \overline{\varphi}_n(\overline{\psi}_1(w_1))\ldots \\
&\quad \ldots\varphi_n(\overline{\psi}_{n-1}(w_{n-1}))\} \\
&= \{\overline{\psi}_{n-1}(v_1), \overline{\psi}_{n-1}^{-1}(\overline{\psi}_1(w_1))\ldots \\
&\quad \ldots\overline{\psi}_{n-1}^{-1}(\overline{\psi}_{n-1}(w_{n-1}))\} \\
&= \{\overline{\psi}_{n-1}(v_1), \overline{\psi}_1^{-1}(\overline{\psi}_1(w_1))\ldots \\
&\quad \ldots\overline{\psi}_{n-1}^{-1}(\overline{\psi}_{n-1}(w_{n-1}))\} \\
&= \{\overline{\psi}_1^{-1}(v_1), w_1\ldots, w_{n-1}\},
\end{aligned}$$

y recordando que también por hipótesis de la construcción las funciones $\overline{\psi}_j$ y $\overline{\varphi}_j$ son casi inversas para cada $j \leq n$ podemos reescribir el conjunto anterior como

$$\{\overline{\varphi}_{n-1}(v_1), \overline{\varphi}_{n-1}\overline{\psi}(w_1), \ldots, \overline{\varphi}_{n-1}, \overline{\psi}(w_{n-1})\}.$$

Lo cual dicho de otra manera, recordando la definición de $\overline{\varphi}_{n-1}$ dada por la hipótesis de recursión, quiere decir que $\overline{\varphi}_{n-1}$ sumerge a $H_n - v_n$ en $G$ esto es:

$$H_n - v_n \overset{\overline{\varphi}_{n-1}}{\hookrightarrow} G,$$

y este hecho aunado al Teorema 1, implica que existe una inmersión, a la que llamaremos $\overline{\varphi}_n$, de $H_n$ en $G$ y esta inmersión extiende a $\overline{\varphi}_{n-1}$; es decir existe una función $\overline{\varphi}_n$ tal que

$$1)\ \overline{\varphi}_{n-1} \subseteq \overline{\varphi}_n$$

y

$$2)\ H_n \overset{\overline{\varphi}_n}{\hookrightarrow} G.$$

Definimos ahora

$$G_n = \langle w_1, \overline{\varphi}_1(v_1), w_2, \overline{\varphi}_2(v_2), \ldots, \overline{\varphi}_n(v_n), w_n\rangle_G$$

la subgráfica inducida en $G$ por el conjunto formado por la imagen de $\overline{\varphi}_n$ y el vértice siguiente de $G$ en el orden que de antemano le hemos dado a $V(G)$.

definimos ahora $\psi_n = \overline{\varphi}_n^{-1}$ teniendo bien en claro que esta inversa se toma sobre la correstricción de $\overline{\varphi}$ a su imagen donde es biyección debido al hecho de que es inmersión.

Al igual que hicimos al definir $\varphi_n$ recordamos todas las propiedades de $\psi_n$ implicadas por las hipótesis de nuestra construcción recursiva y obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\psi_n(V(G_n)) &= \psi_n[\{w_1, \overline{\varphi}_1(v_1), w_2, \overline{\varphi}_2(v_2), \ldots, \overline{\varphi}_n(v_n)\}] \\ &= \{\psi_n(w_1), v_1, \psi_n(w_2), v_2, \ldots, v_n\} \\ &= \{\overline{\psi}_1(w_1), v_1, \overline{\psi}_2(w_2), v_2, \ldots, v_n\} \\ &= \{\overline{\psi}_{n-1}(w_1), v_1, \overline{\psi}_{n-1}(w_2), v_2, \ldots, v_n\}.\end{aligned}$$

Por lo que tenemos (recordando lo que sea pertinente recordar) que:

$$G_n - w_n \xhookrightarrow{\psi_n} H$$

pero aplicando la hipótesis del teorema y teniendo presente que $G_n$ es una subgráfica finita inducida de $G$, aplicamos el teorema 1 para obtener una extensión de $\psi_n$, a la que llamaremos $\overline{\psi}_n$ y que cumple las siguientes propiedades:

$$1)\ \overline{\psi}_{n-1} \subseteq \psi_n \subseteq \overline{\psi}_n$$

y

$$2)\ G_n \xhookrightarrow{\overline{\psi}_n} H.$$

Una vez construida esta función damos por terminado el paso recursivo, y por tanto la construcción de las siguientes sucesiones $(G_1, G_2, \ldots)$ y $(H_1, H_2, \ldots)$, de subgráficas inducidas finitas de $G$ y $H$ respectivamente, y que satisfacen la siguiente relación modulo isomorfismo de gráficas:

$$H_1 \subseteq G_1 \subseteq H_2 \subseteq G_2 \ldots.$$

Otra propiedad de la sucesión, es

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = H \ \text{ y } \ \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G.$$

Paralelamente a la construcción de la sucesión construimos funciones

$$\overline{\psi}_1 \subseteq \overline{\psi}_2 \subseteq \ldots$$

$$\overline{\varphi}_1 \subseteq \overline{\varphi}_2 \subseteq \ldots$$

tales que

$$G_n \xhookrightarrow{\overline{\psi}_n} H$$

$$H_n \xhookrightarrow{\overline{\varphi}_n} G$$

y paso a paso son uno el inverso del otro.

A continuación definimos

$$\varphi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\varphi}_n \ \text{ y } \ \psi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\psi}_n$$

teniendo en cuenta que la contención de las funciones implica en particular la compatibilidad de las mismas y este hecho (el que las funciones sean compatibles), asegura que tanto $\varphi$ como $\psi$ estan bien definidas como funciones.

Ahora solo resta por demostrar que

$$H \overset{\varphi}{\cong} G.$$

Sean $x, y \in V(H)$ esto implica que $x = v_i, y = v_j$ sup s.p.g. $j \geq i$. En vista de la definición de $\varphi$ y teniendo en cuenta que

$$\varphi_n \subseteq \varphi_m \Leftrightarrow n \leq m,$$

tenemos que:

$$\varphi(x) = \overline{\varphi}_j(v_i) = \overline{\varphi}_i(v_i)$$

$$\varphi(y) = \overline{\varphi}_j(v_j)$$

Pero como $\varphi_n$ es inmersión de gráficas, podemos asegurar que

$$x \ ady_H \ y \Longleftrightarrow \overline{\varphi}_j(x) \ ady_G \ \overline{\varphi}_j(y).$$

Por otra parte, si recordamos que $\psi$ y $\varphi$ son inversas por secciones, es decir, las funciones de las que son unión son inversas, tenemos que:

$$\psi\varphi(v_i) = \overline{\psi}_{i+1}\overline{\varphi}_i(w_i) = v_i$$

$$\varphi\psi(w_i) = \overline{\varphi}_{i+1}\psi_i(w_i) = w_i.$$

Por tanto como $\varphi$ preserva adyacencias en ambos sentidos y tiene inverso ($\psi$) podemos afirmar que es el isomorfismo buscado. ■

Al respecto de este teorema el lector interesado puede referirse a Hodkinson y Macpherson ([1988]), y a Macpherson ([1986]) para un estudio más detallado de las gráficas ( y en general estructuras relacionales) que están determinadas por sus subgráficas (en general subestructuras) inducidas finitas.

## III. PROPIEDADES UNIVERSALES

Estas propiedades, como su nombre lo indica caracterizarán, bajo isomorfismo, a cierta familia de gráficas homogéneas.

En primer lugar definiremos una propiedad universal a la que llamaremos *Propiedad A*, en seguida se demostrará que esta propiedad caracteriza bajo isomorfismo, a una familia de gráficas numerables que admiten a todas las gráficas numerables y finitas.

## PROPIEDAD A

*Sea $G$ una gráfica con un número numerable de vértices, se dice que la gráfica $G$ satisface la propiedad $A$ si:*

*Para cualesquiera $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$, subconjuntos, finitos, ajenos y disjuntos de $V(G)$ existe un vértice $u$ de $G$ que es adyacente en $G$ a todos los vértices de $\mathbf{F}_1$ y a ninguno de los de $\mathbf{F}_2$.*

Al respecto de algunas aplicaciones de esta definición que no serán relevantes en el desarrollo de la prueba de Henson, el lector interesado puede referirse a P. Erdös y A. Renyi ([1963]).

Del enunciado de la propiedad A, se siguen de manera inmediata los siguientes lemas:

## LEMA 1

*Si una gráfica $G$ satisface la propiedad $A$, es homogénea.*

Para la demostración de este lema utilizaremos la caracterización de homogeneidad que obtuvimos el teorema 1.

## DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 1

Sea $G$ una gráfica con un conjunto de vértices numerable y que satisface la propiedad A.

Sea $H$ una subgráfica inducida finita de $G$ y sea $v$ un vértice de $H$.

Sea $\psi$ una inmersión de $H - v$ en $G$, es decir

$$H - v \hookrightarrow G.$$

A continuación demostraremos que $\psi$ se puede extender a una inmersión $\overline{\psi}$ de $H$ en $G$, y aplicando el teorema 1 y tomando en cuenta que la gráfica $H$ es arbitraria habremos demostrado que la gráfica $G$ es homogénea.

Sean $\mathbf{F}_1 = \psi[N(v)]$ y $\mathbf{F}_2 = Im(\psi) - \mathbf{F}_1$; dicho de otra manera $\mathbf{F}_1$ es el conjunto de los vértices de la imagen de $\psi$ que provienen de los vértices de $H - v$ que son adyacentes en $H$ (y por tanto en $G$, ya que $H$ es subgráfica inducida de $G$), a $v$, y por otra parte a ninguno de los de $\mathbf{F}_2$ (por tanto tampoco en $G$, por la razón antes aducida).

Es de notarse que el hecho de que la gráfica $H$ sea finita implica que $H - v$ es finita y por tanto su imagen bajo $\psi$ es finita (ya que $\psi$ es una inmersión, en particular es biyectiva sobre su imagen); asimismo como la imagen de $H - v$ bajo $\psi$ es finita, los conjuntos $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, anteriormente definidos son ambos finitos.

Ahora bien, como $G$ satisface la propiedad A, sabemos que existe $w \in V(G)$ tal que $w$ es adyacente en $G$ a todos los vértices de $\mathbf{F}_1$ y a ninguno de los de $\mathbf{F}_2$; es decir, $w$ es adyacente en $G$ a todos los vértices de la imagen de $\psi$ que provienen de los vértices de $H - v$ que son adyacentes a $v$ en $H$ y por otra parte $w$ no es adyacente en $G$ a ninguno de los vértices de la imagen de $\psi$ que provienen de los vértices de $H - v$ que no son adyacentes a $v$ en $H$.

A continuación definimos, $\overline{\psi}$, como una extensión de $\psi$, como una función de $V(H)$ en $G$ de la siguiente manera:

$$\overline{\psi}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq v; \\ w, & \text{si } x = v. \end{cases}$$

Debido a las propiedades de $w$ y al hecho de que $\psi$ sumerge a $H - v$ en $G$ no es difícil comprobar que

$$H \xhookrightarrow{\overline{\psi}} G. \blacksquare$$

## LEMA 2

*Si una gráfica $G$ satisface la propiedad A, entonces admite a toda gráfica finita $H$.*

## DEMOSTRACION DEL LEMA 2

Por inducción sobre el número de vértices de las gráficas finitas

BASE DE LA INDUCCIÓN

$$\phi \hookrightarrow G$$

por vacuidad, y como $| V(G) | \neq 0$, tenemos que si $| V(H) | = 1$

$$H \hookrightarrow G.$$

PASO INDUCTIVO

Supongamos que

$$H \hookrightarrow G$$

para toda $H$ tal que $| V(H) | = n \geq 1$, y sea $K$ tal que $| V(K) | = n+1$, sea $v \in V(K)$, como $| V(K-v) | = n$ existe $\psi$ tal que:

$$K - v \overset{\psi}{\hookrightarrow} G.$$

definiendo $\overline{\psi}$ de manera analoga a como se definió para la demostración del lema anterior, y por razonamientos del todo similares podemos concluir que:

$$K \overset{\overline{\psi}}{\hookrightarrow} G.$$

Como $K$ es una gráfica arbitraria con $n+1$ vértices podemos dar por terminado el paso inductivo y por tanto la demostración por inducción.

Por tanto si $G$ satisface A, $G$ admite a cualquier gráfica finita.■

## LEMA 3

*Si una gráfica numerable cumple la propiedad A, admite a todas las gráficas numerables.*

## DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 3

Sea $G$ una gráfica numerable que satisface la propiedad A, y sea $H$ cualquier otra gráfica numerable.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $V(H) = \{v_1, v_2 \ldots\}$, y para cada $n \in N$ definimos

$$H_n = \langle\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}\rangle_H.$$

Es decir $H_n$ es la subgráfica inducida en $H$ por los primeros $n$ vértices en el orden que le hemos dado a $V(G)$.

Por el lema anterior, sabemos que $G$ admite a todas las gráficas finitas, en particular admite a todas las $H_n$.

Ahora bien, no es difícil comprobar que la sucesión de las $H_n$ satisface las hipótesis del teorema $2'$ por lo cual, podemos afirmar que $G$ admite a $H$.■

## TEOREMA 4

*Cualquier gráfica $G$ ($|V(G)| = \aleph_0$) que satisface la propiedad $A$ es homogénea, es más, cualesquiera dos gráficas que satisfacen la propiedad $A$ son isomorfas.*

## DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4

La demostración de este teorema es una aplicación directa de los lemas 2 y 3.

## DEFINICIÓN

*Si* M, *es una clase de gráficas, diremos que $G$ es una gráfica universal para la clase* M, *si*

$$H \hookrightarrow G$$

*para toda gráfica $H \in$ M y además $G \in$ M.*

## IV. CONSTRUCCIONES

## CONSTRUCCIÓN (1)

Para efectos de esta construcción será conveniente recordar los siguientes hechos básicos de teoría de conjuntos, que el lector puede encontrar demostrados con detalle en cualquier texto básico sobre la materia, (por ejemplo Hrbacek-Čech [1984]).

1) La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.

2) $|[N]^{<\omega}| = \aleph_0$, es decir, existen una cantidad numerable de subconjuntos finitos de naturales.

El hecho 2, es una consecuencia directa 1, que a su vez lo es del axioma de elección.

Pasemos pues a la construcción de la gráfica prometida.

Sea $\{P_n \mid n \in N\}$ una enumeración de los subconjuntos finitos de $N$, cada uno ocurriendo un numero infinito de ocasiones.

Es decir tomamos una cantidad infinita numerable de copias de cada uno de los conjuntos finitos de $N$.

Si a este conjunto de copias lo denotamos por $C$ podemos formalizar esta noción definiendo:

$$C = \{(P_n, m) \mid P_n \in [N]^{<\omega}, m \in N\}.$$

Donde hemos considerado a los conjuntos finitos de naturales ya enumerados en una sucesión $P_n$, $n \in \omega$.

Sea ahora $v_0 < v_1 < \ldots$ una sucesión de naturales tal que $v_n > max\ P_n\ \forall n \in N$.

Donde $max\ P_n$ denota al elemento máximo de $P_n$, que existe debido a que $P_n$ es finito.

Sea U la siguiente gráfica:

$$V(U) = N$$

$$A(U) = \{\{w, v_n\} \mid w \in \mathbf{P}_n, n \in N\}.$$

Una vez construida la gráfica $U$ pasaremos a demostrar que esta es una gráfica universal para la clase de todas las gráficas con número numerable de vértices.

Para lograr esto será suficiente con demostrar que satisface la propiedad A, y el resto será implicado por los lemas 1, 2 y 3 de la sección anterior de este apéndice.

El hecho de que la gráfica $U$ satisfaga la propiedad A queda implicado por el hecho de que satisface una propiedad más fuerte, a la que llamaremos propiedad $A'$, cuya definición damos a continuación:

## PROPIEDAD A'

*Se dice que una gráfica $G$, tal que $V(G) = N$, satisface la propiedad $A'$ si y solamente si: Para todo $\mathbf{F} \subset V(G)$ finito existe $v$ arbitrariamente grande en $V(G)$ tal que:*

$$\mathbf{F} = \{w \mid w < v \text{ y } \{w, v\} \in A(G)\}.$$

Esto es, una gráfica $G$ que tiene como conjunto de vértices a los naturales, satisface la propiedad $A'$, si y solamente si, por definición, para cada subconjunto finito de vértices, existe una sucesión estrictamente creciente:

$$v_0 < v_1 < v_3 < \ldots,$$

de vértices de la misma tal que para cada $i \in N$ podemos expresar a F como

$$\mathbf{F} = \{w \mid w < v_i \text{ y } \{w, v_i\} \in A(G)\}.$$

## AFIRMACIÓN

$\mathbf{A}' \Longrightarrow \mathbf{A}$

## DEMOSTRACIÓN DE LA AFIRMACIÓN

Sea $G$ una gráfica, cuyo conjunto de vértices sean los naturales y que satisfaga la propiedad $A'$.

Sean $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ subconjuntos ajenos, finitos de $V(G)$.

Sea $r = max\ \mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2$, $r$ está bien definido ya que por hipótesis tanto $\mathbf{F}_1$ como $\mathbf{F}_2$ son finitos y por tanto $\mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2$ también lo es.

Como $G$ satisface la propiedad $A'$, sabemos que existe $v \in V(G)$, tal que:

$$\mathbf{F}_1 = \{w \mid w < v \text{ y } \{w, v\} \in A(G)\}.$$

No es difícil comprobar que $v$ es testigo de la propiedad $A$.■

Demostremos a continuación que la gráfica $U$, satisface la condición $A'$, y por tanto la propiedad $A$, lo que la constituirá en gráfica universal para la clase de todas las gráficas con una cantidad numerable de vértices.

## TEOREMA 5

*La gráfica $U$ satisface la propiedad $A'$*

## DEMOSTRACIÓN

La demostración se sigue trivialmente de la definición de la gráfica $U$.

Sea $\mathbf{F} \subset V(U)$, finito, es decir $\mathbf{F} = P_{j_i}$ para una infinidad de $j_i \in C$, el conjunto de las numerables copias de subconjuntos finitos que tomamos como base para la construcción de $U$.

Sea $v_{j_0}$, el $j_0$-ésimo término de la sucesión de naturales, en base a la cual hemos construido a la gráfica $U$; recordemos que $v_j > maxP_j \quad \forall j \in N$.

Consideremos ahora la subsucesión formada por:

$$v_{j_0} < v_{j_1} < v_{j_2} \ldots .$$

Recordando la definición de $U$ tenemos que

$$A(U) = \{\{w, v_n\} \mid w \in P_n, n \in N\}.$$

Ahora considerando la definición de los $v_{j_i}$ tenemos que:

$$\forall i \in N$$
$$\mathbf{F} = \{w \mid w < v_{j_i} \text{ y } \{w, v_{j_i}\} \in A(U)\},$$

ya que cada vértice de la sucesión es adyacente a cada uno de los vértices de **F**, por definición, y por otra parte solo es adyacente a ellos.∎

## COROLARIO

*La gráfica $U$, es homogénea, y universal en la clase de todas las gráficas con una cantidad numerable de vértices. Es más, cualquiera otra gráfica que tenga estas propiedades es isomorfa a $U$.*∎

A continuación construiremos una familia de gráficas universales para las clases de gráficas cuyo número de clan no exceda a una constante $p$.

Estas gráficas serán subgráficas inducidas de $U$, y quedarán determinadas por propiedades universales analogas a la propiedad $A$, a las que llamaremos $A_p$ para cada $p \geq 3$

Antes de demostrar las propiedades que hemos anunciado poseerán estas gráficas, pasaremos a su:

## CONSTRUCCIÓN (2)

Sea $p \geq 3$, definimos $U_p$ como la subgráfica de $U$ inducida por el siguiente subconjunto de V(U):

$$V(U_p) = \{m \mid m \in N \text{ y no hay un subconjunto finito}$$
$$\mathbf{A} \subset N \text{ tal que } m = max\, \mathbf{A} \text{ y}$$
$$\langle \mathbf{A} \rangle_U \cong K_p\}.$$

De esta definición se sigue claramente que

$$U_p \hookrightarrow U_{p+1} \hookrightarrow U$$

y,

$$U = \bigcup_{p \geq 3} U_p.$$

Este último hecho es fácil de comprobar ya que si $v \in V(U) = N$ sabemos que no hay un subconjunto finito $\mathbf{A} \subseteq N$ tal que $v = max\ \mathbf{A}$ y $\langle \mathbf{A} \rangle_U \cong K_p$ para ninguna $p > v$, por tanto si elegimos $p > v$, podemos estar seguros que $v \in V(U_p)$.

A continuación pasaremos a demostrar que para cada $p \geq 3$, $U_p$, es la gráfica universal homogénea de la clase de todas las gráficas numerables cuyo numero de clan no exceda a $p$.

Para demostrar este hecho, demostraremos que cada $U_p$ satisface una condición analoga a la condición $A$ misma que denotaremos por $A_p$ y que enunciamos a continuación:

Sea $p \geq 3$.

## CONDICIÓN $A_p$

*Se dice que una gráfica $G$, tal que $V(G) = N$, satisface la condición $A_p$ si y solamente si:*

*1)*

$$K_p \not\hookrightarrow G$$

*2) Si $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ son dos subconjuntos, finitos, ajenos de $V(G)$ tales que:*

$$K_{p-1} \not\hookrightarrow \langle \mathbf{F}_1 \rangle_G$$

*entonces hay un vértice de $G$ que es adyacente a todos los vértices de $\mathbf{F}_1$ y a ninguno de los de $\mathbf{F}_2$.*

## AFIRMACIÓN

*$U_p$ satisface $A_p$*

## DEMOSTRACIÓN

La demostración de esta afirmación la realizaremos en dos etapas, una para cada cláusula de la propiedad $A_p$.

Sea $p \geq 3$ y consideremos $U_p$.

## DEMOSTRACIÓN DE LA PRIMERA CLAUSULA DE LA PROPIEDAD $A_p$.

Se llevará a cabo por reducción al absurdo.

Supongamos que:

$$K_p \overset{\varphi}{\hookrightarrow} U_p,$$

sea

$$\mathrm{B} = \{\varphi(v) \mid v \in V(K_p)\} \subset V(U_p)$$

sea, ahora, $m = max\ \mathrm{B}$,

$$K_p \cong \langle B \rangle_{U_p} = \langle B \rangle_U.$$

Lo cual es una contradicción con la definición de $U_p$, ya que estamos exhibiendo un conjunto finito de vértices de $U$ que inducen una $K_p$ y cuyo máximo ($m$) esta en $V(U_p)$.

Por tanto

$$K_p \not\hookrightarrow U_p,$$

## DEMOSTRACIÓN DE LA SEGUNDA CLAUSULA DE LA PROPIEDAD $A_p$.

Supongamos $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$ como en la hipótesis de la propiedad $A_p$.

Como $\mathrm{F}_1$ y $\mathrm{F}_2$ son ambos finitos, tenemos que $\mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2$ es finito,de lo que en particular podemos deducir que tiene un máximo, al que llamaremos $z$.

Por otra parte como $U$ satisface la condición $A'$, sabemos que existe $v \in V(U)$, tal que $v > z$ y además:

$$\mathrm{F}_1 = \{w \mid w < v \text{ y } \{w, v\} \in A(U)\}.$$

Como $U_p$ es subgráfica inducida de $U$ tenemos que $\langle \mathrm{F}_1 \rangle_U = \langle \mathrm{F}_1 \rangle_{U_p}$ y como

$$K_{p-1} \not\hookrightarrow \langle \mathrm{F}_1 \rangle_{U_p}$$

tenemos que

$$K_p \not\hookrightarrow \langle \mathrm{F}_1 \cup \{v\} \rangle_U$$

por lo que $v$ no puede ser el máximo de ningún conjunto finito que induzca una $K_p$, ya que la gráfica inducida en $U$ por el conjunto de todos los vértices adyacentes a $v$ y que son menores que él $(= \mathrm{F}_1)$, no admite a $K_{p-1}$, por lo que si recordamos la definición de $V(U_p)$, podremos deducir que $v \in V(U_p)$. Por otra parte $v$ no es adyacente a ninguno de los vértices de $\mathrm{F}_2$. ■

A continuación demostraremos que $A_p$ es efectivamente la propiedad universal que caracteriza a la gráfica universal para la clase de gráficas con número de vértices a lo sumo numerable y con numero de clan menor que $p$

Lo cual realizaremos en varias etapas, de manera completamente analoga a como se hizo para demostrar el teorema 4, de la sección anterior de este mismo apéndice.

## LEMA 4

*Sea $p \geq 3$ y supongamos que $G$ satisface $A_p$, si $H$ es finita y $K_p \not\hookrightarrow H$ y $v \in V(H)$ y existe $f$ tal que*

$$H - v \overset{f}{\hookrightarrow} G$$

*entonces $f$ se puede extender a una función $\overline{f}$ tal que*

$$H \overset{\overline{f}}{\hookrightarrow} G$$

## DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 4

Sea $G$ una gráfica con un conjunto de vértices numerable y que satisface la propiedad $A_p$.

Sea $H$ una subgráfica inducida finita de $G$, y sea $v$ un vértice de $H$.

Sea $\psi$ una inmersión de $H - v$ en $G$, es decir

$$H - v \hookrightarrow G.$$

A continuación demostraremos que $\psi$ se puede extender a una inmersión $\overline{\psi}$ de $H$ en $G$, y aplicando el teorema 1 y tomando en cuenta que la gráfica $H$ es arbitraria habremos demostrado que la gráfica $G$ es homogénea.

Sean $\mathbf{F}_1 = \psi[N(v)]$ y $\mathbf{F}_2 = Im(\psi) - \mathbf{F}_1$; dicho de otra manera $\mathbf{F}_1$ es el conjunto de los vértices de la imagen de $\psi$ que provienen de los vértices de $H - v$ que son adyacentes en $H$ (y por tanto en $G$, ya que $H$ es subgráfica inducida de $G$), a $v$, y por otra parte $\mathbf{F}_2$ (por tanto tampoco en $G$, por la razón antes aducida).

Ahora bien, como $G$ satisface la propiedad $A_p$, por la primera cláusula sabemos que

$$K_p \not\hookrightarrow G,$$

lo cual implica que:

$$K_{p-1} \not\hookrightarrow \mathbf{F}_1.$$

Por la segunda cláusula, sabemos que existe $w \in V(G)$ tal que $w$ es adyacente en $G$ a todos los vértices de $\mathbf{F}_1$ y a ninguno de los de $\mathbf{F}_2$; es decir, $w$ es adyacente en $G$ a todos los vértices de la imagen de $\psi$ que provienen de los vértices de $H - v$ que son adyacentes a $v$ en $H$ y por otra parte $w$ no es adyacente en $G$ a ninguno de los vértices de la imagen de $\psi$ que provienen de los vértices de $H - v$ que no son adyacentes a $v$ en $H$.

A continuación definimos, $\overline{\psi}$, como una extensión de $\psi$, como una función de $V(H)$ en $G$ de la siguiente manera:

$$\overline{\psi}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq v; \\ w, & \text{si } x = v. \end{cases}$$

Debido a las propiedades de $w$ y al hecho de que $\psi$ sumerge a $H - v$ en $G$ no es difícil comprobar que

$$H \overset{\overline{\psi}}{\hookrightarrow} G. \blacksquare$$

**LEMA 5**

*Si $G$ satisface $A_p$ entonces:*

$$H \hookrightarrow G$$

*para toda $H$ tal que*

$$K_p \not\hookrightarrow H.$$

La demostración de este lema es completamente analoga a la del Lema 2 de este mismo apéndice.$\blacksquare$

**LEMA 6**

***Si una gráfica numerable cumple la propiedad $A_p$, admite a todas las gráficas numerables, que no admitan a $K_p$.***

Este resultado es una aplicación directa del teorema 2'.$\blacksquare$

## TEOREMA 6

*$U_p$ es homogenea, unica bajo isomorfismo y universal en la clase de las gráficas cuyo numero de clan es menor que $p$.*

## DEMOSTRACIÓN

Se sigue del hecho de que $U_p$ satisface $A_p$ y de los lemas 4, 5 y 6.■.

Con este teorema damos por términado este apéndice y cumplido nuestro objetivo, al haber construído las gráficas, $U$ y $U_p$ y demostrado que cumplen las propiedades prometidas.

# REFERENCIAS


Behzad-Chartrand-Lesniak-Foster

[1981] *Graphs and Digraphs.* Wadsworth International Group.

W. Deuber

[1975] *Partitionstheoreme für Graphen.* Math. Helvetici **50**, 311-320.

P. Erdös-A. Hajnal-A. Maté-R. Rado

[1984] *Combinatorial Set Theory: Partition Relations for Cardinals.* North Holland, Amsterdam.

P. Erdös-A. Renyi

[1963] *Asymetric Graphs.* Acta Mathematica Acad. Sci. Hungar. **14** (1963).

J. Folkman

[1970] *Graphs with Monocromatic Edge Subgraphs in every Edge Coloring.* SIAM Journal of Applied Math.

R. Fraiscé

[1954] *Sur l'extension aux Relations de quelques propietés d'ordres.* Ann. Sci. Ècole Norm. Sup. (3). **18**, 361-362.

Graham-Rothschild-Spencer

[1980] *Ramsey Theory.* John Wiley, New York.

C.W. Henson [1971] *A Family of Countable Homogeneous Graphs.* Pacific Journal of Math. **38**, 69-83.

I.M. Hodkinson-H.D. Macpherson

[1988] *Relational Structures Determined by their Finite Induced Substructures.* The Journal of Symbolic Logic, vol 53, 1.

Hrbacek-Jech

[1984] *Introduction to Set Theory.* Dekker Inc., New York.

Komjath-Rödl

[1986] *Coloring of Universal Graphs.* Graphs and Combinatorics 2, 55-60.

H.J. Macpherson

[1986] *Graphs determined by their Finite Induced Subgraphs.* Journal of Combinatorial Theory, Serie B, 41, 230-234.

Nešetřil-Rödl

[1976] *The Ramsey Propierty for Graphs with Forbidden Complete Subgraphs.* Journal of Combinatorial Theory 20, 243-249.

F. Ramsey

[1930] *On a Problem in Formal Logic.* Proc. London Math. Soc. 30, 264-286.