2 a.j.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"HACES VECTORIALES Y MODULOS PROYECTIVOS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

FLOR DE MARIA ACEFF SANCHEZ

MEXICO, D. F., 1989

CONTENIDO

INTRODUCCION

Los haces empezaron a estudiarse en el período de 1935 a 1940. Las primeras definiciones fueron dadas por H. Whitney, Hopf y Stiefel, quienes mostrarton la importancia de los haces en aplicaciones de la Topología en la Geometría Diferencial.

El concepto de haz vectorial surgió del estudio de espacios vectoriales tangentes a objetos geométricos como: esferas, espacios proyectivos y en general variedades diferenciables.

Serre demostró en 1955 que existe una correspondencia uno a uno entre los haces vectoriales algebraícos sobre una variedad afín y los módulos proyectivos finitamente generados sobre su anillo de coordenadas.

Por algún tiempo se supuso que que existía una correspondencia similar entre haces vectoriales topológicos sobre un espacio Hausdorff compacto X y los módulos proyectivos sobre el anillo de funciones continuas valuadas de X en los reales, hasta que la demostró Swan en 1962.

En 1986 Vaserstein extiende el resultado de Swan a un espacio topológico arbitrario.

El propósito de este trabajo es mostrar que existe una equivalencia entre la categoría de k-haces vectoriales de tipo finito sobre un espacio topológico arbitrario y la categoría de módulos proyectivos finitamente generados sobre el anillo de funciones continuas del espacio topológico en el campo k.

En el capítulo 1 se exponen los conceptos generales sobre haces.

En el capítulo 2 estudiamos los haces vectoriales, que son haces localmente triviales con la estructura de espacio vectorial de dimensión finita en cada fibra. En la primera sección se define la categoría de haces vectoriales. En la segunda sección se muestra un funtor que va de la categoría de k-haces vectoriales sobre un espacio B a la categoría de modulos sobre el anillo de funciones continuas de B en k. En la sección 3 se definen los funtores de K-teoría topológica y K-teoria reducida, que van de la categoría de k-haces vectoriales establemente equivalentes en la categoría de grupos abelianos, y se menciona el teorema de la periodicidad de Bott.

En el capítulo 3 se muestra la equivalencia de las categorías de haces vectoriales y módulos proyectivos. En la primera sección se da la demostración que diera Swan para espacios topológicos Hausdorff compactos y en la segunda se presenta el resultado que diera Vaserstein. En la tercera se trata el problema de clasificación de haces vectoriales de tipo finito sobre un espacio topológico X.

Capítulo 1
HACES

En este capítulo definiremos la categoría de haces, veremos que es una categoría abeliana (con la suma de Whitney como suma). Daremos algunas proposiciones y ejemplos importantes que se utilizarán posteriormente. En la segunda sección definiremos los conceptos de función inducida, restricción de un haz y una generalización de éste último que es el de haz inducido.

1 HACES

1.1 DEFINICION. Un *haz* es una tripleta (E, p, B) donde $p: E \longrightarrow B$ es una función continua de espacios topológicos.

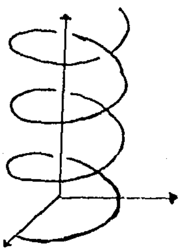
Llamaremos a B el *espacio base*, a E el *espacio total* y a p la *proyección del haz*. Para cada $b \in B$, el espacio $p^{-1}(b)$ se llamará la *fibra del haz sobre* $b \in B$.

Intuitivamente uno piensa en un haz como la unión de fibras $p^{-1}(b)$ para $b \in B$ parametrizado por B y "pegadas" mediante la topología del espacio E.

Notación. Usaremos las letras griegas $(\xi, \eta, \rho, \varsigma$,etc$)$ para denotar haces. $E(\xi)$ y $B(\xi)$ denotarán el espacio total y el espacio base de ξ respectivamente.

1.2 EJEMPLO. Denotaremos con $B = S^1 = \{(\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) | x \in [0, 1]\}$ el círculo de radio unitario, $E = \{(\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x, x) | x \in \mathcal{R}\}$ a la hélice sobre S^1 y $p: E \longrightarrow B$ a la proyección dada por

$$p(\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x, x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$$



$p^{-1}(0, 1) = Z$

Entonces (E, p, B) es un haz y la fibra en $(0, 1)$ es Z.

1.3 DEFINICION. Un haz (E', p', B') se llama *subhaz* del haz (E, p, B) si E' es subespacio de E, B' es subespacio de B y

$$p' = p|_{E'}: E' \longrightarrow B'.$$

Nota. Por transformación debe entenderse función continua.

1.4 DEFINICION. Sean $\xi = (E, p, B)$ y $\xi' = (E', p', B')$ dos haces. Un *morfismo de haces* $(u, f): \xi \longrightarrow \xi'$ es un par de transformaciones $u: E \longrightarrow E'$ y $f: B \longrightarrow B'$ tales que $p'u = fp$ es decir el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E' \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

Esto también se puede expresar por la relación: $u(p^{-1}(b)) \subset (p'^{-1}(f(b))$ para cada $b \in B$.

Nota. Obsérvese que f está determinada en forma única por u cuando p es suprayectiva.

1.5 DEFINICION. Sean $\xi = (E, p, B)$ y $\xi' = (E', p', B)$ dos haces sobre B, un *morfismo de haces sobre B* (B-morfismo) $u: \xi \longrightarrow \xi'$ es una transformación $u: E \longrightarrow E'$ tal que $p = p'u$, es decir

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E' \\ & p \searrow \quad \swarrow p' & \\ & B & \end{array}$$

conmuta, esto es: $u(p^{-1}(b) \subset p'^{-1}(b)$ para cada $b \in B$. Lo anteriorsignifica que u preserva fibras.

Los morfismos u sobre B son solamente morfismos de haces $(u, 1_B)$.

1.6 EJEMPLO. Si $\xi' = (E', p', B')$ es un subhaz de $\xi = (E, p, B)$ y si $f: B' \longrightarrow B$ y $u: E' \longrightarrow E$ son transformaciones de inclusión, entonces $(u, f): \xi' \longrightarrow \xi$ es un morfismo de haces.

El par $(1_E, 1_B): (E, p, B) \longrightarrow (E, p, B)$ es un morfismo de haces que es un B morfismo.

Si $(u, f): (E, p, B) \longrightarrow (E', p', B')$ y $(u', f'): (E', p', B') \longrightarrow (E'', p'', B'')$ son morfismos de haces, tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{u} & E' & \xrightarrow{u'} & E'' \\ \downarrow p & & \downarrow p' & & \downarrow p'' \\ B & \xrightarrow{f} & B' & \xrightarrow{f'} & B'' \end{array}$$

Como $p''u' = f'p'$ y $p'u = fp$, porque (u', f') y (u, f) son morfismos de haces, entonces $p''u'u = f'p'u$ y $f'p'u = f'fp$, luego $p''u'u = f'fp$ por lo que las composiciones anteriores definen un morfismo de haces

$$(uu', ff'): (E, p, B) \longrightarrow (E'', p'', B'')$$

dado por la composición $(u', f') \circ (u, f)$ de (u, f) y (u', f').

Denotaremos por $\mathbf{H}$ a la categoría cuyos objetos son los haces, cuyos morfismos son los morfismos de haces y la composición de morfismos de haces. Denotaremos por $\mathbf{H}_B$ a la categoría cuyos ojetos son los haces sobre B, cuyos morfismos son los B-morfismos y la composición de morfismos es la composición de B-morfismos.

1.7 DEFINICION. Un morfismo $(u, f): (E, p, B) \longrightarrow (E', p', B')$ es un *isomorfismo* si existe un morfismo $(u', f'): (E', p', B') \longrightarrow (E, p, B)$ tal que $f' \circ f = 1_B$, $f \circ f' = 1_{B'}$, $u' \circ u = 1_E$ y $u \circ u' = 1_{E'}$.

1.8 DEFINICION. Una *sección* de un haz (E, p, B) es una función continua $s: B \longrightarrow E$ tal que $p \circ s = 1_B$, es decir una sección es una transformación $s: B \longrightarrow E$ tal que $s(b) \in p^{-1}(b)$, para cada $b \in B$.

1.9 PROPOSICION. Si (E', p', B) es un subhaz del haz (E, p, B) y $s: B \longrightarrow E$ es una sección de (E, p, B), entonces s es una sección de (E', p', B) si y sólo si $s(b) \in E'$ para toda $b \in B$.

Demostración. Como s es sección de (E', p', B) tenemos que $s: B \longrightarrow E' \subset E$ por lo que s es sección de (E, p, B). Inversamente, sea $b \in B$, $p's(b) = (p|_{E'} s)(b) = ps(b) = b$.∎

1.10 DEFINICION. El espacio F se llamará *la fibra* del haz (E, p, B) si toda fibra $p^{-1}(b)$ para $b \in B$ es homeomorfa a F.

1.11 EJEMPLO. El *haz producto* sobre B con fibra F es $(B \times F, p, B)$ donde p es la proyeción sobre el primer factor.

1.12 DEFINICION. El haz (E, p, B) se llamará *trivial* con fibra F si (E, p, B) es isomorfo al haz producto $(B \times F, p, B)$.

1.13 PROPOSICION. Toda sección s de un haz producto $(B \times F, p, B)$ es de la forma $s(b) = (b, f(b))$ donde $f: B \longrightarrow F$ es una transformación definida únicamente por s.

Demostración. Cualquier $s: B \longrightarrow B \times F$ es de la forma $s(b) = (s'(b), f(b))$ donde $s': B \longrightarrow B$ y $f: B \longrightarrow F$ son definidas de manera única por s. Como $ps(b) = s'(b)$, tenemos que, s es una sección si y sólo si $s(b) = (b, f(b))$ para cada $b \in B$.∎

Esta proposición nos dice que hay una biyección del conjunto de todas las secciones de $(B \times F, p, B)$ en el conjunto de transformaciones de $B \longrightarrow F$.

1.14 EJEMPLO. Sea $< x, y >$ el producto escalar en $\mathcal{R}^n$ y $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ la norma euclideana. El *haz tangente sobre* S^n denotado

$T(S^n) = (T, p, S^n)$, donde $T = \{(b,x) | < b, x >= 0\}$ es un subhaz del haz producto $(S^n \times \mathcal{R}^{n+1}, p, S^n)$. Un elemento $(b,x) \in T$ se llama *vector tangente* a S^n en b. Las fibras $p^{-1} \subset T$ son espacios vectoriales de dimensión n.

Una sección de $T(S^n)$ se llama *campo vectorial tangente en* S^n.

1.15 EJEMPLO. El *haz normal sobre* S^n denotado $\mathcal{N}(S^n) = (N, q, S^n)$, donde $N = \{(b,x) \mid x = kb$ para alguna $k \in \mathcal{R}\}$ es un subhaz del haz producto $(S^n \times \mathcal{R}^{n+1}, p, S^n)$. Un elemento $(b,x) \in N$ se llama *vector normal* a S^n en b. Las fibras $q^{-1} \subset N$ son espacios vectoriales de dimensión 1.

Una sección de $\mathcal{N}(S^n)$ se llama *campo vectorial normal en* S^n.

1.16 DEFINICION. El *producto* de dos haces (E, p, B) y (E', p', B') es el haz $(E \times E', p \times p', B \times B')$.

1.17 DEFINICION. El *producto fibrado* $\xi_1 \oplus \xi_2$ de dos haces $\xi_1 = (E_1, p_1, B)$ y $\xi_2 = (E_2, p_2, B)$ es $(E_1 \oplus E_2, q, B)$ donde

$$E_1 \oplus E_2 = \{(x, x') \in E_1 \times E_2 | p_1(x) = p_2(x')\}$$

y $q(x, x') = p_1(x) = p_2(x')$.

Este producto fibrado se conoce también como la *suma de Whitney.*

Nota: La fibra de $q^{-1}(b)$ de $\xi_1 \oplus \xi_2$ sobre $b \in B$ es $p_1^{-1}(b) \times p_2^{-1}(b) \subset E_1 \times E_2$ por esto se llama producto fibrado.

A continuación recordemos como se construye el producto de dos categorías $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$, denotado $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$: Los objetos de $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ son parejas de objetos (B, C) donde B es objeto de $\mathbf{B}$ y C de $\mathbf{C}$. Las flechas de $(B, C) \longrightarrow (B', C')$ en $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ son parejas de flechas (f, g) donde $f \colon B \longrightarrow B'$ y $g \colon C \longrightarrow C'$, y la composición de dos flechas $(B, C) \xrightarrow{(f,g)} (B', C') \xrightarrow{(f',g')} (B'', C'')$ se define en términos de las composiciones de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ por $(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g)$.

1.18 DEFINICION. Los funtores $P: \mathbf{B}\times\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{B}$ y $Q: \mathbf{B}\times\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ llamados *las proyecciones del producto* se definen por $P(f,g) = f$ y $Q(f,g) = g$.

P y Q gozan de la siguiente propiedad:

Dada cualquier categoría $\mathbf{D}$ y dos funtores R y T existe un funtor único $F: \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{B}\times\mathbf{C}$ tal que: $PF = R$ y $QF = T$, es decir conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{D} \arrow[dl, "R"'] \arrow[d, "F"] \arrow[dr, "T"] & \\ \mathbf{B} & \mathbf{B}\times\mathbf{C} \arrow[l, "P"'] \arrow[r, "Q"] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

Esta condición requiere que Fh, para cualquier h en $\mathbf{D}$ sea (Rh, Th). Inversamente, este valor para Fh hace a F un funtor con las propiedades requeridas.

Esta propiedad en la categoría producto nos dice que las proyecciones P y Q son universales.

También recordemos que dos funtores $U: \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}'$ y $V: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ tienen un producto $U\times V: \mathbf{B}\times\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{B}'\times\mathbf{C}'$ definido por $(U\times V)(B,C) = (UB, VC)$ y $(U\times V)(f,g) = (Uf, Vg)$.

De otra manera, $U\times V$ puede describirse como el único funtor que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B} \arrow[d, "U"] & \mathbf{B}\times\mathbf{C} \arrow[l, "P"'] \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "U\times V"] & \mathbf{C} \arrow[d, "V"] \\ \mathbf{B}' & \mathbf{B}'\times\mathbf{C}' \arrow[l, "P'"'] \arrow[r, "Q'"] & \mathbf{C}' \end{tikzcd}$$

Por lo tanto el producto $\times$ asocia a cada par de categorías $(\mathbf{B},\mathbf{C})$ una categoría $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$, y a cada par de funtores (U,V) un funtor $U\times V$. Aún más, cuando las composiciones $U\circ U'$ y $V\circ V'$ están definidas, claramente $(U' \times V') \circ (U \times V) = (U' \circ U) \times (V' \circ V)$ por lo que la operación $\times$ es un funtor, es decir, restringiendo a categorías pequeñas es el funtor

$$\times : \mathbf{Cat} \times \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}.$$

A continuación definiremos a $\oplus$ como un funtor $\mathbf{H}_B \longrightarrow \mathbf{H}_B$ de la siguiente manera: sean $\xi_1 = (E_1, p_1, B)$, $\xi_1' = (E_1', p_1', B)$, $\xi_2 = (E_2, p_2, B)$, $\xi_2' = (E_2', p_2', B)$ B-haces y sean $u_1 : \xi_1 \longrightarrow \xi_1'$ y $u_2 : \xi_2 \longrightarrow \xi_2'$ dos B-morfismos. Entonces definimos el B-morfismo $u_1 \oplus u_2 : (E_1 \oplus E_2, q, B) \longrightarrow (E_1' \oplus E_2', q', B)$ como $(u_1 \oplus u_2)(x_1, x_2) = (u_1(x_1), u_2(x_2))$.

Como $p_1' u_1(x_1) = p_1(x_1) = p_2(x_2) = p_2'(x_2)$, $u_1 \oplus u_2$ es un morfismo bien definido. Claramente $1_{E_1} \oplus 1_{E_2} = 1_{E_1 \oplus E_2}$.

También, si $v_1 : \xi_1' \longrightarrow \xi_1''$ y $v_2 : \xi_2' \longrightarrow \xi_2''$ son B-morfismos entonces

$$(v_1 \oplus v_2) \circ (u_1 \oplus u_2) = (v_1 \circ u_1) \oplus (v_2 \circ u_2).$$

Por lo tanto $\oplus$ es un funtor y el producto fibrado es el "producto" de la categoría $\mathbf{H}_B$.

Veamos que el homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} u : B \times F_1 \times F_2 & \longrightarrow & (B \times F_1) \oplus (B \times F_2) \\ (b, y_1, y_2) & \longmapsto & u(b, y_1, y_2) = (b, y_1, b, y_2) \end{array}$$

define un B-isomorfismo de haces producto. Definamos $u' : (b \times F_1) \oplus (B \times F_2) \longrightarrow B \times F_1 \times F_2$ con $(b, y_1, b, y_2) \longmapsto (b, y_1, y_2)$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} (uu')(b, y_1, b, y_2) &= u(u'(b, y_1, b, y_2)) \\ &= u(b, y_1, y_2) \\ &= (b, y_1, b, y_2) \\ &= 1_{B \times F_1 \times F_2} \\ (u'u)(b, y_1, y_2) &= u'(u(b, y_1, y_2)) \\ &= u'(b, y_1, b, y_2) \\ &= (b, y_1, y_2) \\ &= 1_{B \times F_1 \times F_2} \end{aligned}$$

Por lo tanto $u' = u^{-1}$.

Usando este isomorfismo y las propiedades funtoriales de $\oplus$ tenemos la siguiente

1.19 PROPOSICION. Si $\xi_1 = (E_1, p_1, B)$ es un haz trivial con fibra F_1 y $\xi_2 = (E_2, p_2, B)$ es otro haz trivial con fibra F_2, entonces $\xi_1 \oplus \xi_2$ es un haz trivial con fibra $F_1 \times F_2$.

Demostración. Por la propiedad de las fibras del producto fibrado sabemos que

$$q^{-1}(b) = p_1^{-1}(b) \times p_2^{-1}(b) = F_1 \times F_2. \blacksquare$$

1.20 PROPOSICION. Las secciones s de un producto fibrado $(E_1 \oplus E_2, q, B)$ son de la forma $s(b) = (s_1(b), s_2(b))$ donde s_1 es una sección de (E_1, p_1, B) y s_2 es una sección de (E_2, p_2, B).

Demostración. Cada sección s es una transformación $s: B \to E_1 \oplus E_2 \subset E_1 \times E_2$ tal que $q \circ s = 1_B$ por lo que s es de la forma $(s_1(b), s_2(b))$ donde $s_1: B \longrightarrow E_1$ y $s_2: B \longrightarrow E_2$.

Como $b = qs(b) = p_1(s_1(b)) = p_2(s_2(b))$ $\forall b \in B$, s es una sección.$\blacksquare$

2 HACES INDUCIDOS

Sea Conj la categoría de los conjuntos. Sus objetos son los conjuntos y sus morfismos son las funciones.

Supongamos que tenemos el siguiente diagrama en Conj

$$\begin{array}{ccc} & & C \\ & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

2.1 LEMA. a) Existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{h} & C \\ \downarrow k & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

que tiene la propiedad siguiente: dado cualquier diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{l} & C \\ \downarrow m & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

existe una única función $\lambda: E \longrightarrow B$ tal que $l = h\lambda$ y $m = k\lambda$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, dashed, "\lambda"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right, "m"'] & & \\
& D \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"] & C \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

b) La tripleta (D, h, k) con la propiedad (a) es única salvo isomorfismo.

Demostración. Sea $D \subset A \times C$ tal que $D = \{(x, y) \in A \times C | f(x) = f(y)\}$ y definimos $h: D \longrightarrow C$ tal que $h(x, y) = y$ y $k: D \longrightarrow A$ tal que $k(x, y) = x$. Si l y m son dados con $g \circ l = f \circ m$ definimos $\lambda: E \longrightarrow D$ por $\lambda(e) = (m(e), l(e))$. Claramente λ es única.■

2.2 DEFINICION. Llamamos a k la *función inducida de g por f* y escribimos $k = f^*(g)$, $f^*C = D$ y $h = \bar{f}$.

$$\begin{tikzcd}
f^*C = D \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "f^*(g)"] & C \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

2.3 COROLARIO. $f_1^*(f_2^*(g)) = (f_2 f_1)^*(g)$.

El resultado es inmediato al observar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, dashed, "\exists\lambda"] \arrow[drr, dashed, "\exists\lambda_2"] \arrow[drrr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & & \\
& D \arrow[r, "\bar{f}_1"] \arrow[d, "f_1^*(f_2^*(g))"] & f_1^*C \arrow[r, "\bar{f}_2"] \arrow[d, "f_2^*(g)"] & C \arrow[d, "g"] \\
& A_1 \arrow[r, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] & B
\end{tikzcd}$$

2.4 PROPOSICION. Las funciones inducidas existen en la categoría Top de espacios topológicos.

Demostración. Consideremos $A \times C$ con la topología producto y a $D \hookrightarrow A \times C$ con la topología subbásica. Entonces $h = \pi_C|_D$, $k = \pi_A|_D$ son continuas. Además la función $\lambda: E \longrightarrow D$ es continua si y sólo si $i \circ \lambda: E \longrightarrow A \times C$ es continua. Esto es equivalente a que $\pi_C \circ i \circ \lambda = m: E \longrightarrow A$ y $\pi_D \circ i \circ \lambda = l: E \longrightarrow C$ sean continuas.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "\lambda"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& D \arrow[r, "\pi_C"] \arrow[d, "\pi_A"] & C \arrow[d, "i"] \\
& A \arrow[r, "i"] & A \times C
\end{tikzcd}$$

El diagrama de las funciones inducidas $f^*(g), \bar{f}$ se llama a menudo *producto fibrado* determinado por f y g.

Una clase importante de diagramas de producto fibrado está determinada por las relaciones de equivalencia que a continiuación definiremos:

2.5 DEFINICION. Una relación de equivalencia en un conjunto A es una función suprayectiva $p: A \longrightarrow B$, $B \in \mathbf{Conj}$.

Nota: Si deseamos considerar la relación de equivalencia como un subconjunto $R \subset A \times A$ con ciertas propiedades (reflexiva, simétrica y transitiva) podemos recuperar a R como $p^*A = \{(x,y) \in A \times A | p(x) = p(y)\}$

$$\begin{array}{ccc} p^*A = R & \longrightarrow & A \\ \downarrow{\scriptstyle p^*(p)} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ A & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

R es la *gráfica* de la relación de equivalencia p.

2.6 DEFINICION. Sea $\xi = (E, p, B)$ un haz y A un subconjunto de B. Entonces la *restricción* de ξ a A, $\xi|_A$, es el haz (E', p', A) donde $E' = p^{-1}(A)$ y $p' = p|_{E'}$.

$$\begin{array}{cccc} p^{-1}(A) = & E' & \subset & E \\ & \downarrow{\scriptstyle p|E'=p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ & A & \subset & B \end{array}$$

Nota: Si ξ es el haz producto sobre B con fibra F y si A es un subconjunto de B, entonces $\xi|_A$ es el haz producto sobre A con fibra F.

La restricción satisface la siguiente propiedad de transitividad. Si ξ es un haz sobre C y $A \subset B \subset C$, entonces $\xi|_A = (\xi|_B)|_A$ y $\xi|_C = \xi$, como ilustra el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} E'' & & E' & & \\ \| & & \| & & \\ p^{-1}(A) & \subset & p^{-1}(B) & \subset & E \\ \downarrow{\scriptstyle p''} & & \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ A & \subset & B & \subset & C \end{array}$$

2.7 DEFINICION. Dos haces ξ y η sobre B se llamarán *localmente isomorfos* si para cada $b \in B$ existe una vecindad abierta U de b tal que $\xi|_U$ es isomorfo a $\eta|_U$.

Nota. Claramente dos haces isomorfos son localmente isomorfos.

2.8 DEFINICION. Un haz ξ sobre B se llamará *localmente trivial con fibra* F si ξ es localmente isomorfo al haz producto $(B \times F, p, B)$.

2.9 PROPOSICION. La relación de ser localmente isomorfos es una relación de equivalencia.

Demostración. i) Sea $\xi = (E, p, B)$. Para cada $b \in B$ tomamos como vecindad a $U = B$ y tenemos que $\xi|B = \xi|B$ por lo que ξ está relacionado consigo mismo.

ii) Sean ξ y η localmente isomorfos, entonces para cada $b \in B$ existe U vecindad abierta de b tal que $\xi|U \cong \eta|U$. Luego η es localmente isomorfo a ξ.

iii) Sean U y V dos vecindades abiertas de $b \in B$ tales que $\xi|_U \cong \eta|_U$ son U-isomorfos y $\eta|_V \cong \varsigma|_V$ son V-isomorfos. Luego, los haces $\xi|_{U\cap V}$ y $\varsigma|_{U\cap V}$ son $U \cap V$-isomorfos ya que: $U \cap V$ es abierto, $U \cap V \subset U$ y $U \cap V \subset V$.

Como $\xi|_U \cong \eta|_U$ entonces $\xi|_{U\cap V} \cong \eta|_{U\cap V}$ y $\eta|_V \cong \varsigma|_V$. Por tanto $\eta|_{U\cap V} \cong \varsigma|_{U\cap V}$ y tenemos que $\xi|_{U\cap V} \cong \eta|_{U\cap V}$.■

2.10 COROLARIO. Si ξ es localmente isomorfo a un haz localmente trivial, entonces ξ es localmente trivial.

Demostración. Por la transitividad de la relación.■

Decimos que una propiedad es *local* en haces si es una propiedad de haces que permanece entre los haces localmente isomorfos.

Si $u: \xi \longrightarrow \eta$ y $v: \eta \longrightarrow \xi$ son dos B-morfismos y $A \subset B$,entonces

$(vu)_A = v_A u_A$, $(1_\xi)_A = 1_{\xi|_A}$ y $u_A = u|_{E(\xi|_A)}: \xi|_A \longrightarrow \eta|_A$ es un A-morfismo. Por lo tanto $\xi \longmapsto \xi|_A$ y $u \longmapsto u_A$ define un funtor de $\mathbf{H}_B \longrightarrow \mathbf{H}_A$.

A continuación generalizaremos este concepto:

2.11 DEFINICION. Sea $\xi = (E, p, B)$ un haz y $f: B_1 \longrightarrow B$ una función continua. El *haz inducido de ξ bajo f* tiene como espacio base a B_1, como espacio total a

$$f^*E = \{(b_1, x) \in B_1 \times E \mid f(b_1) = p(x)\}$$

y como proyección $f^*(p) = p_1$ a la transformación dada por $(b_1, x) \longmapsto b_1$. Lo denotaremos por $f^*(\xi) = (f^*(E), f^*(p), B_1)$.

2.12 PROPOSICION. Sea ξ un haz sobre B y A un subespacio de B con inclusión $j: A \hookrightarrow B$. Entonces $\xi|_A$ y $j^*(\xi)$ son A-isomorfos.

Demostración. Definamos $u: \xi|_A \longrightarrow j^*(\xi)$ tal que $u(x) = (p(x), x)$ y $v: j^*(\xi) \longrightarrow \xi|_A$ tal que $v(p(x), x) = x$. Es inmediato comprobar que u es un A-isomorfismo y v es su inverso.∎

Sea $f^*(\xi)$ el haz inducido de ξ bajo $f: B_1 \longrightarrow B$, entonces la pareja (f_ξ, f) donde $f_\xi: f^*E \longrightarrow E$ dada por $f_\xi(b_1, x) = x$ define un morfismo de $f^*(\xi) \longrightarrow \xi$ que lo llamaremos *morfismo canónico del haz inducido.* El diagrama es:

$$\begin{array}{ccccc} (b_1, x) & f^*(E) & \longrightarrow & E & x \\ \downarrow & \downarrow{\scriptstyle p_1 = f^*(p)} & & \downarrow{\scriptstyle p} & \downarrow \\ & B_1 & \xrightarrow{f} & B & \\ b_1 & & & & p(x) = f(b_1) \end{array}$$

2.13 PROPOSICION. Si $(f_\xi, f): f^*(\xi) \longrightarrow \xi$ es el morfismo canónico de ξ bajo $f: B_1 \longrightarrow B$, entonces $\forall b_1 \in B$ la restricción $f_\xi: p_1^{-1}(b) \longrightarrow p^{-1}(f(b_1))$

es un homeomorfismo. También si $(v, f): \eta \longrightarrow \xi$ es cualquier morfismo de haces, existe un B_1-morfismo $w: \eta \longrightarrow f^*(\xi)$ tal que $f_\xi w = v$ y w es único con esta propiedad.

Demostración. Como $p_1^{-1}(b_1) = \{(b_1, x) \in b_1 \times E \mid p(x) = f(b_1)\} \subset b_1 \times E$ tenemos que $p^{-1}(f(b_1)) = p^1(p(x)) = x$, por lo tanto la función $f_\xi: b_1 \times p^{-1}(f(b_1)) \longrightarrow p^{-1}(f(b_1))$ dada por $(b_1, x) \longmapsto f_\xi(b_1, x) = x$ es un homeomorfismo.

Ahora, sea $w(y) = (p_\eta(y), v(y))$. Como (v, f) es un morfismo tenemos que $f(p_\eta(v)) = p(v(y))$ por lo que $w: E(\eta) \longrightarrow E(f^*(\xi)) = f^*E$ es un B_1-morfismo. Obviamente $f_\xi w = v$.

El diagrama es:

$$
\begin{tikzcd}
 & f^*E \arrow[r, "f(\xi)"', "f_\xi"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
E(\eta) \arrow[ur, "w"] \arrow[urr, bend right, "f(\eta)"'] \arrow[d] & B_1 \arrow[r, "f"] & B \\
B(\eta) = B_1 \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "f"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Veamos la unicidad: la igualdad $p_1(w(y)) = p_\eta(y)$ es cierta para cualquier B_1-morfismo w, y la relación $f_\xi w = v$ implica que $w(y) = p_\eta((y), v(y))$ para cada $y \in E(\eta)$.■

2.14 PROPOSICION. Para cada transformación $f: B_1 \longrightarrow B$ la familia de funciones $f^*: \mathrm{H}_{B_1} \longrightarrow \mathrm{H}_B$ define un funtor. Además, para un B-morfismo $u: \xi \longrightarrow \eta$ el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
 & E(f^*(\eta)) \arrow[rr, "f_\eta"] \arrow[dd] & & E(\eta) \arrow[dd] \\
E(f^*(\xi)) \arrow[ur, "f^*(u)"] \arrow[rr] \arrow[dr] & & E(\xi) \arrow[ur, "u"] \arrow[dr] & \\
 & B_1 \arrow[rr, "f"] & & B
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Claramente, como $f^*(u): f^*(\xi) \longrightarrow f^*(\eta)$ es un B_1-morfismo definido por $f^*(u)(b_1, x) = (b_1, u(x))$, se tiene que $f^*(1_\xi) = 1_{f^*(\xi)}$, y si $v: \eta \longrightarrow \varsigma$ es otro B_1-morfismo, entonces $f^*(vu)(b_1, x) = (b_1, vu(x)) = f^*(v)(b_1, u(x)) = f^*(v)f^*(u)(b_1, x)$. Por tanto f^* es un funtor.

Si $(b_1, x) \in E(f^*(\xi))$, $u(f_\xi)(b_1, x)) = u(x)$ entonces

$$u(x) = f_\eta(b_1, u(x)) = f_\eta(f^*(u))(b_1, x)$$

luego tenemos $uf_\xi = f_\eta f^*(u)$.∎

2.15 PROPOSICION. Sean $g: B_2 \longrightarrow B_1$, $f: B_1 \longrightarrow B$ y ξ un haz sobre B, entonces $1^*(\xi)$ y ξ son B-isomorfos. Además $g^*(f^*(\xi))$ y $(fg)^*(\xi)$ son B_2-isomorfos.

Demostración. Definamos $u: \xi \longrightarrow 1^*(\xi)$ por $u(x) = (p(x), x)$. Claramente es el isomorfismo $(1_\xi(p(x), x) = x)$.

Definamos $v: (fg)^*(\xi) \longrightarrow g^*(f^*(\xi))$ por $v(b_2, x) = (b_2, g(b_2), x)$. Claramente v es isomorfismo.∎

Capítulo 2
HACES VECTORIALES

En la primera sección de este capítulo definiremos los conceptos de haz vectorial y morfismo de haces vectoriales. Además daremos una caracterización de los B-isomorfismos de haces vectoriales, veremos que el haz inducido $f^*(\xi)$ de un haz vectorial admite una estructura de haz vectorial y que los haces vectoriales inducidos por funciones homotópicas son B-isomorfos cuando B es paracompacto.

Un haz vectorial es un haz con la estructura adicional de espacio vectorial en cada fibra. Este concepto surgió del estudio de los campos vectoriales tangentes de variedades diferenciables.

En la segunda sección veremos como son las secciones de haces vectoriales y veremos que el conjunto de secciones sobre un k-haz vectorial sobre un espacio B admite una estructura de k^B-módulo.

En la tercera sección definiremos algunos de los conceptos elementales de la K- teoría

1 HACES VECTORIALES

Nota. Los campos que nos interesan son el de los números reales $\mathcal{R}$, el de los números complejos $\mathcal{C}$ y el de los cuaterniones $\mathcal{H}$.

1.1 DEFINICION. Un *k-haz vectorial ξ sobre un espacio topológico* B consiste de un haz (E, p, B) donde la proyección $p: E \longrightarrow B$ es suprayectiva y para cada $b \in B$, existe una vecindad U de b, un entero n y un homeomorfismo $h: U \times k^n \longrightarrow p^{-1}(U)$ tal que la restricción $b \times k^n \xrightarrow{\cong} p^{-1}(b)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales $\forall b \in B$. Esto es: en cada fibra $F_b(\xi) = p^{-1}(b)$ tiene la estructura de un espacio vectorial de dimensión finita sobre k.

Si $k = \mathcal{R}$, ξ se llama *haz vectorial real.*

Si $k = \mathcal{C}$, ξ se llama *haz vectorial complejo.*

Si $k = \mathcal{H}$, ξ se llama *haz vectorial cuaterniónico.*

El U-isomorfismo $h: U \times k^n \longrightarrow p^{-1}(U)$ se llama *carta coordenada local de ξ.*

Nótese que no se requiere que n sea constante. La dimensión de la fibra F_b puede variar con b.

1.2 PROPOSICION. La dimensión de las fibras de un haz vectorial es localmente constante.

Demostración. Para cada $b \in B$, existe U vecindad de b, un entero n y $h: U \times k^n \longrightarrow p^{-1}(U)$ homeomorfismo tal que $p^{-1}(b) \cong b \times k^n$. Si $V \subset U$ es un abierto en la componente conexa de b, tenemos que $V \times k^n$ es homeomorfo a $P^{-1}(V)$

$$V \times k^n \xrightarrow{i} U \times k^n \xrightarrow{h} p^{-1}(U) \xrightarrow{\pi} p^{-1}(V)$$

donde i es la inclusión de $V \times k^n$ en $U \times k^n$ y π es la proyección de $p^{-1}(U)$

en $p^{-1}(V)$. $\pi \circ h \circ i$ es continua ya que π, h e i lo son; es suprayectiva porque π lo es, además es inyectiva porque i lo es. Por lo tanto $\pi \circ h \circ i$ es un homeomorfismo de $V \times k^n$ en $p^{-1}(V)$.

Sea b' en la componente conexa de b en U, existen $U' \subset U$, un entero m y un homeomorfismo $h': U' \times k^m \longrightarrow p^{-1}(U')$ tal que la restricción a $b' \times k^m \longrightarrow p{-}1(b')$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Como $U' \times k^m$ es homeomorfo a $p^{-1}(U')$ y $p^{-1}(U')$ es homemomorfo a $U' \times k^n$, luego $n = m$. Por lo tanto la dimensión del haz es localmente constante, y si B es conexo, es constante.∎

1.3 EJEMPLO. El haz tangente $T(S^n)$ (véase el ejemplo 1.1.14) tiene una estructura natural de haz vectorial real en cada fibra pues es un subespacio de R^{n+1} ya que $T(S^n)$ es subhaz del haz producto $(S^n \times R^{n+1}, p, S^n)$.

Un morfismo de haces vectoriales es una transformación que preserva fibras y que es lineal en cada fibra. De manera más precisa tenemos:

1.4 DEFINICION. Sea $\xi = (E, p, B)$ y $\xi' = (E', p', B')$ dos haces vectoriales. Un *morfismo de haces vectoriales* $(u, f): \xi \longrightarrow \xi'$ es un morfismo de haces subyacentes $u: E \longrightarrow E'$ y $f: B \longrightarrow B'$ con $p' \circ u = f \circ p$ y tal que la restricción $u: p^{-1}(b) \longrightarrow p'^{-1}(f(b))$ es lineal $\forall b \in B$.

1.5 PROPOSICION. Sean $(u, f): \xi \longrightarrow \xi'$ y $(u', f'): \xi' \longrightarrow \xi''$ morfismos de haces vectoriales, entonces el morfismo de haces subyacentes

$$(u \circ u', f \circ f'): \xi \longrightarrow \xi''$$

es un morfismo de haces vectoriales.

Demostración. $(u \circ u', f \circ f')$ es un morfismo de haces subyacentes y como u y u' son lineales en las fibras, $u \circ u': p^{-1}(b) \longrightarrow p'^{-1}(f \circ f'(b))$ es lineal.∎

El diagrama es:

$$\begin{array}{ccccc}
E(\xi) & \xrightarrow{u} & E(\xi') & \xrightarrow{u'} & E(\xi'') \\
\downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p''} \\
B(\xi) & \xrightarrow{f} & B(\xi') & \xrightarrow{f'} & B(\xi'').
\end{array}$$

Denotaremos con **HV** a la categoría de haces vectoriales, por $\mathbf{HV}_B$ a la categoría de haces vectoriales sobre B y B-morfismos,y por $\mathbf{HV}^n$ la subcategoría plena de haces vectoriales de dimensión n sobre B.

1.6 EJEMPLO. Sean $\xi = (B \times k^n, p, B)$ y $\eta = (B \times k^m, p, B)$ dos haces producto. Los B-morfismos son de la forma $u(b,x) = (b, f(b,x))$ donde $f: B \times k^n \longrightarrow k^m$ es una transformación tal que $f(b,x)$ es lineal en x.

Sea $\mathcal{L}(k^n, k^m)$ el espacio vectorial de todas las transformaciones lineales de k^n en k^m. $\mathcal{L}(k^n, k^m)$ es isomorfo a k^{nm}.

Entonces $f: B \times k^n \longrightarrow k^m$ es continua si y sólo si $b \longmapsto f(b, \_\,)$ como función $B \longrightarrow \mathcal{L}(k^n, k^m)$ es continua.

Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
(b,x) & \longmapsto & u(b,x) & = (b, f(b,x)) & \\
B \times K^n & \xrightarrow{u} & B \times k^m & & \\
& {\scriptstyle p}\searrow & \swarrow{\scriptstyle p} & & f: B \times k^n \longrightarrow k^m \\
& B & & &
\end{array}$$

1.7 DEFINICION. Un *isomorfismo de haces vectoriales sobre* B es un morfismo $u: \xi \longrightarrow \xi'$ tal que existe $v: \xi' \longrightarrow \xi$ con $vu = 1_\xi$ y $uv = 1_{\xi'}$.

A continuación veamos un criterio para decidir cuando un B-morfismo es isomorfismo.

1.8 TEOREMA. Sea $u: \xi \longrightarrow \xi'$ un B-morfismo entre haces vectoriales. Entonces u es un isomorfismo si y sólo si $u: p^{-1}(b) \longrightarrow (p')^{-1}(b)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales $\forall b \in B$.

Demostración. La implicación es inmediata pues el inverso de $u: p^{-1}(b) \longrightarrow p'^{-1}(b)$ es la restricción a $(p')^{-1}(b)$ del inverso de u.

Inversamente, sea $v: \xi' \longrightarrow \xi$ la función requerida tal que $v|(p')^{-1}(b)$ es la inversa de la transformación lineal restringida $u: p^{-1}(b) \longrightarrow (p')^{-1}(b)$, v será la inversa deseada si es continua.

Sea U un conjunto abierto de B, sea $h: U \times k^n \longrightarrow p^{-1}(U)$ una carta coordenada local de ξ, y sea $h': U \times k^n \longrightarrow (p')^{-1}(U)$ una carta coordenada local de ξ'. Es suficiente mostrar que $v: (p')^{-1}(U) \longrightarrow p^{-1}(U)$ es continua para tal U.

Por el ejemplo 1.6, la función $h'^{-1}uh$ es de la forma $(b,x) \longmapsto (b, f_b(x))$ donde $b \longmapsto f_b$ es la transformación $U \longrightarrow \mathcal{L}(k^n, k^m)$. Entonces las funciones h^{-1} y h' tienen la forma $(b,x) \longmapsto (b, f_b^{-1}(x))$ donde $b \longmapsto f_b^{-1}$ es la transformación $U \longrightarrow \mathcal{L}(k^n, k^m)$ por lo tanto la restricción $u: (p')^{-1}(U) \longrightarrow p^{-1}(U)$ es continua.∎

1.9 DEFINICION. La *suma de Whitney* de dos haces ξ_1 y ξ_2 sobre B, denotada por $\xi_1 \oplus \xi_2$, es el producto fibrado de los haces subyacentes ξ_1 y ξ_2 con la siguiente estructura de haz vectorial: $q^{-1}(b) = p_1^{-1}(b) \times p_2^{-1}(b)$ tiene la estructura de espacio vectorial de la suma directa de dos espacios vectoriales.

1.10 PROPOSICION. Sea $f: B_1 \longrightarrow B$. Sea ξ un haz vectorial sobre B. Entonces $f^*(\xi)$, el haz inducido del haz subyacente de ξ, admite una estructura de haz vectorial y $(f_\xi, f): f^*(\xi) \longrightarrow \xi$, el morfismo canónico del haz inducido, es un morfismo de haces vectoriales. Más aún, esta estructura es única y $f_\xi: p_1^{-1}(b) \longrightarrow p^{-1}(b)$ es un isomorfismo lineal.

Demostración. La fibra $p_1^{-1}(b)$ de $f^*(\xi) = (E_1, p_1, B_1)$ sobre $b_1 \in B_1$ es $b_1 \times p^{-1}(f(b_1)) \subset E_1 \subset B_1 \times E$. Ahora, para (b_1, x) y $(b_1, x') \in p^{-1}(b_1)$

requerimos que $(b_1, x) + (b_1, x') = (b_1, x + x')$ y $n(b_1, x) = (b_1, nx)$, $n \in k$. Como $f_\xi(b_1, x) = x$, la restricción $f_\xi \colon p_1^{-1}(b_1) \longrightarrow p^{-1}(b)$ es un isomorfismo lineal.■

El diagrama es:

$$b_1 \times p^{-1} f(b_1) = b_1 \times p^{-1}(p(x)) = b_1 \times x$$

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(b_1) & E \arrow[r, "f_\xi"] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] & p^{-1}(b) \\
b_1 \arrow[u] & B_1 \arrow[r, "f"] & B & b \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Si $u \colon \xi \longrightarrow \eta$ es un B-morfismo de haces vectoriales y si $f \colon B_1 \longrightarrow B$ es una transformación, entonces $f^*(u) \colon f^*(\xi) \longrightarrow f^*(\eta)$ es un B_1-morfismo de haces vectoriales.

$$\begin{tikzcd}
 & E(f^*(\eta)) \arrow[rr] \arrow[d] & & E(\eta) \arrow[d] \\
E(f^*(\xi)) \arrow[ur, "f^*(u)"] \arrow[rr] \arrow[d] & B_1 \arrow[rr] & E(\xi) \arrow[ur, "u"] \arrow[d] & B \\
B_1 \arrow[ur, no head] \arrow[rr, "f"] & & B \arrow[ur, no head] &
\end{tikzcd}$$

Esto es inmediato pues $f^*(u)(b_1, x) = (b_1, u(x))$, i.e. la linealidad de u sobre $f(b_1)$ implica la linealidad de $f^*(u)$ sobre b_1.

Por lo tanto $f^* \colon \mathbf{HV}_B \longrightarrow \mathbf{HV}_{B_1}$ es un funtor.

1.11 LEMA. Sea $r \colon B \times I \longrightarrow B \times I$ definido por $r(b, t) = (b, 1)$ y sea $\xi^k = (E, p, B \times I)$ un haz vectorial sobre $B \times I$ donde B es un espacio paracompacto e I es el intervalo cerrado $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$. Existe una transformación $u \colon E \longrightarrow E$ tal que $(u, r) \colon \xi \longrightarrow \xi$ es un morfismo de u es un isomorfismo en cada fibra.

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta localmente finita de B tal que $\xi|(U_i \times I)$ es trivial. Esta cubierta existe (véase [H] pág. 27) y la paracompacidad de B. Sea $\{\eta_i\}_{i\in I}$ una envolvente de la unidad subordinada a la cubierta $\{U_i\}_{i\in I}$, esto es, el soporte de η_i es un subconjunto de U_i y $1 = \max_{i\in I} \eta_i(b)$ para cada $b \in B$.

Sea $h_i : U_i \times I \times k^n \longrightarrow p^{-1}(U \times I)$ un $(U_i \times I)$-isomorfismo de haces vectoriales.

Definimos un morfismo $(u_i, r_i) : \xi \longrightarrow \xi$ por las relaciones $r_i(b,t) = (b, \max(r_i(b), t))$, u_i es la identidad fuera de $p^{-1}(U_i \times I)$, y $U_i(h_i(b,t,x)) = h_i(b, \max(r_i(b), t), x)$ para cada $(b,t,x) \in U_i \times I \times k^n$. Le damos un buen orden a I para cada $b \in B$ hay una vecindad abierta $U(b)$ de b tal que $U_i \cap U(b) \neq \emptyset$ con $i \in I(b)$ donde $I(b)$ es un subconjunto finito de I.

En $U(b) \times I$, definimos $r = r_i(n) \cdots r_i(1)$, y en $p^{-1}(U(b) \times I)$, definimos $u = u_{i(n)} \cdots u_{i(1)}$ donde $I(b) = \{i(1), \ldots, i(n)\}$ e $i(1) < i(2) < \cdots < i(n)$.

Como r_i en $U(b) \times I$ y u_i en $p^{-1}(U(b) \times I)$ son distintos para $i \notin I(b)$ las transformaciones r y u son composiciones infinitas de transformaciones donde todos excepto un número finito de términos son idénticos cerca de un punto. Como cada u_i es un isomorfismo en cada fibra, la composición u es un isomorfismo en cada fibra.∎

1.12 TEOREMA. Sea B paracompacto. Si $f, g : B \longrightarrow B_1$ son homotópicas, y ξ un haz vectorial sobre B_1, entonces $f^*(\xi)$ y $g^*(\xi)$ son B-isomorfos.

Demostración. Sea $h : B \times I \longrightarrow B_1$ una transformación con $h(x,0) = f(x)$ y $h(1,x) = g(x)$. Entonces $f^*(\xi) \cong h^*(\xi)|_{B\times(0)}$ sobre B y $g^*(\xi) \cong h^*(\xi)|_{B\times(1)}$ sobre B.

$h^*(\xi)|_{B\times(0)}$ y $h^*(\xi)|_{B\times(1)}$ son B-isomorfos y además, $f^*(\xi)$ y $g^*(\xi)$ son B-isomorfos.∎

2 SECCIONES

2.1 DEFINICION. Una *sección* s de ξ sobre un subconjunto A es una función continua $s: A \longrightarrow E(\xi)$ tal que $ps(x) = x$. Se sigue inmediatamente de la definición de haz vectorial que para toda $x \in B$ existe una vecindad U de x y secciones $s_1, \ldots, s_n$ de ξ sobre U tal que $s_1(y), \ldots, s_n(y)$ forman una k-base para F_y para cada $y \in U$. Diremos que $s_1, \ldots, s_n$ forman una *base local en* x.

Cualquier sección de ξ sobre U puede ser escrita como

$$s(y) = a_1(y)s_1(y) + \cdots + a_n(y)s_n(y)$$

donde $a_i(y) \in k$.

Note que s es continua si y sólo si cada a_i lo es. (Esto es inmediato para la base local $e_1, \ldots e_n$ la cual obtenemos de la definición de haz vectorial. Si $s_1, \ldots, s_n$ es otra base local, $s_i(y) = \sum_j a_{ij}(y)e_j(y)$ y $y \longmapsto (a_{ij}(y))$ es una transformación continua $U \longrightarrow GL(n,k)$. El resultado se sigue del hecho de que $A \longrightarrow A^{-1}$ es una transformación continua en $GL(n,k)$.)

Similarmente, si $s_1, \ldots, s_n$ y $t_1, \ldots, t_n$ son bases locales para ξ y η en x respectivamente y $f: \xi \longrightarrow \eta$, entonces cerca de x, $f(s_0(y)) = \sum_j (a_{ij}(y)t_j(y)$ y f es continua si y sólo si cada $a_{ij}(y)$ es continua. Si $f: \xi \longrightarrow \eta$ es inyectiva y suprayectiva, el hecho de que $A \longmapsto A^{-1}$ en $GL(n,k)$ es continua muestra que f^{-1} es continua. En otras palabras, tal f debe ser un isomorfismo.

2.2 LEMA. Sean $t_1, \ldots, t_m$ secciones de ξ sobre una vecindad U de x tales que $t_1(x), \ldots, t_m(x)$ son linealmente independientes. Entonces existe una vecindad V de x tal que $t_1(y), \ldots, t_m(y)$ son linealmente independientes para cada $y \in V$.

Demostración. Sea $s_1, \ldots, s_n$ una base local en x.
Sea $t_i(y) = \sum a_{ij}(y) s_j(y)$. Alguna $m \times m$ submatriz de $(a_{ij}(x))$ debe de ser no singular por hipótesis. Además ésta submatriz debe ser no singular en $(a_{ij})(y)$ para toda y suficientemente cerca de x. Para los números reales y complejos, esto se sigue tomando determinantes. Para los cuaterniones debemos reemplazar la matriz por una real de $4m \times 4m$. Entonces sabemos que si no se anula el determinante de esta matriz real, es equivalente a que la matriz original sea no singular. La existencia de una submatriz no singular de $m \times m$ claramente implica la conclusión del lema.

Observación. En general, no es cierto que las transformaciones de haces vectoriales tienen núcleo e imagen en la categoría de haces vectoriales.

2.3 EJEMPLO. Sea $B = I$ el intervalo unitario y ξ el haz producto $I \times k$ donde $p(x, y) = x$. Sea $f : \xi \longrightarrow \xi$ dada por $f(x, y) = (x, xy)$. La imagen de f tiene fibra de dimensión 1 en dondequiera excepto en $x = 0$ donde la fibra es cero. Entonces $im\ f$ no puede ser un haz vectorial. Similarmente $ker\ f$ tampoco puede ser haz vectorial.

2.4 PROPOSICION. Sea $u : \xi \longrightarrow \eta$ un morfismo de haces vectoriales las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) $im\ u$ es subhaz de η.

2) $ker\ u$ es subhaz de ξ.

3) Las dimensiones de las fibras de $im\ u$ son localmente constantes.

4) Las dimensiones de las fibras de $ker\ u$ son localmente constantes.

Demostración. Es claro que (3) y (4) son equivalentes y que son implicados por (1) y (2) respectivamente.

Veamos que 3 implica 1: Sean $x \in B$, $s_1, \ldots, s_m$ una base local de ξ en x y $t_1, \ldots, t_n$ una base local de η en x. Sea l la dimensión de la fibra de $im\ u$ en x. Reenumerando si es necesario, podemos suponer que $us_1(x), \ldots, us_l(x)$ generan a $F_x(im\ u)$ y son linealmente independientes. Reenumerando otra vez, podemos suponer que

$$us_1(x), \ldots, us_l(x), t_{l+1}(x), \ldots, t_n(x)$$

son linealmente independientes. Luego por el lema 2.2 y como las dimensiones de las fibras de η son localmente constantes

$$us_1(x), \ldots, us_l(x), t_{l+1}(x), \ldots, t_n(x)$$

forman una base local para $im\ u$ en x, por lo que $im\ u$ es subhaz de η.

Veamos que 3 implica 2: Sean $s_1, \ldots, s_m$ como antes. Para todo y cercano a x, podemos escribir $us_i(y) = \sum_1^l a_{ij}(y) us_j(y)$ para $i > l$.

Sea $s_i'(y) = s_i(y) - \sum_1^l a_{ij}(y) s_j(y)$. Entonces $s_{k+1}', \ldots, s_m'$ son secciones locales del $ker\ u$ y son linealmente independientes cerca de x. Como hay el número exacto que debe de haber de ellas, deben formar una base local del $ker\ u$, por lo tanto $ker\ u$ es subhaz de ξ.∎

2.5 OBSERVACION. Sin ninguna hipótesis, esta demostración prueba que si $dim_k F_x(im\ u) = n$ entonces $dim_k F_y(im\ u) \geq n\ \forall y$ en alguna vecindad de x.

2.6 DEFINICION. Un *producto interior* en un k-haz vectorial ξ está dado por un producto interior $\langle\ ,\ \rangle_x$ en cada fibra F_x que varía continuamente con x.

2.7 LEMA. Si B es paracompacto, todo k-haz vectorial sobre B tiene un producto interior.

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta localmente finita de B tal que $p^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times k^{n_\alpha}$. Es trivial construir un producto interior $\langle\ ,\ \rangle_{\alpha x}$ en cada $p^{-1}(U_\alpha)$. Sea $\{\omega_\alpha\}$ una partición de la unidad en B sobre $\mathcal{R}$ para la cubierta $\{U_\alpha\}$. Definamos $\langle e_1, e_2\rangle_x = \sum_\alpha \omega_\alpha(x)\langle e_1, e_2\rangle_{\alpha,x}$.∎

2.8 PROPOSICION. Si B es paracompacto, cualquier subhaz η de un haz vectorial ξ es sumando directo.

Demostración. Escojamos un producto interior para ξ, este producto define una proyección $u_x: F_x(\xi) \longrightarrow F_x(\eta)$ que varía continuamente con x. Luego $u: \xi \longrightarrow \eta$ es una transformación de haces vectoriales. Por la proposición 2.4, $\varsigma = ker\ u$ es un subhaz de ξ. De aquí que $\xi = \eta \oplus \varsigma$.∎

2.9 DEFINICION. Sea k^B el anillo de funciones k valuadas en B. Si ξ es un k-haz vectorial sobre B denotamos con $\Gamma(\xi)$ el conjunto de todas las secciones de ξ sobre B.

Si s_1 y $s_2 \in \Gamma(\xi)$, definimos $(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x)$. Si $s \in \Gamma(\xi)$ y $a \in k^B$, definimos $(as)(x) = a(x)s(x)$. Con estas definiciones $\Gamma(\xi)$ tiene estructura de k^B-módulo. Claramente Γ es un funtor aditivo de la categoría $\mathbf{HV}_B(k)$ a la categoría de k^B-módulos.

Si ξ es el haz trivial $E(\xi) = B \times k^n$ entonces $\Gamma(\xi)$ es obviamente un k^B-módulo con n generadores.

3 K - TEORIA TOPOLOGICA

En esta sección construiremos de dos formas distintas el grupo de Grothendieck $\mathcal{G}(M)$, definiremos el funtor K_k: **Vect**$(B) \longrightarrow$ **Gr** y el funtor de K-teoría reducida $\tilde{K}_k$ y enunciamos un resultado importante de K-teoría reducida.

Sean $\xi = (E_1, p_1, B)$ y $\eta = (E_2, p_2, B)$ dos haces vectoriales. Diremos que ξ y η son *equivalentes* si existe un homeomorfismo $u: E_1 \longrightarrow E_2$ tal que $p_2 u = p_1$ y cuando u se restringe a una fibra $p_1^{-1}(x)$, u es un isomorfismo de $p_1^{-1}(x)$ en $p_2^{-1}(x)$.

Esto es una relación de equivalencia en el conjunto de haces vectoriales sobre B. Denotaremos por Vect(B) al conjunto de clases de equivalencia de haces vectoriales sobre B.

También recalquemos que si ξ y η son haces equivalentes sobre B y $f: B_1 \longrightarrow B$ es una transformación continua, los haces inducidos $f^*(\xi)$ y $f^*(\eta)$ son equivalentes sobre B_1. Por lo tanto $f: B_1 \longrightarrow B$ induce un funtor covariante

$$f^*: \mathrm{Vect}(B) \longrightarrow \mathrm{Vect}(B_1).$$

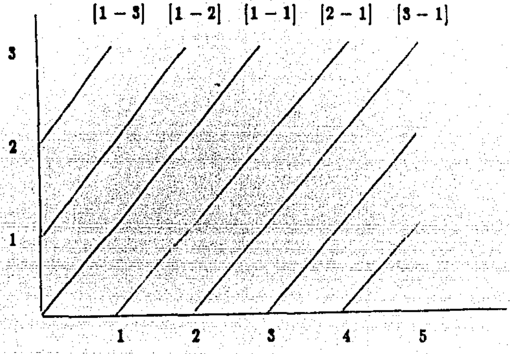
Nota. 1) Todo homeomorfismo es una equivalencia homotópica .

2) **Vect**(B) es un monoide abeliano bajo la suma de Whitney $\oplus$.

3) **Vect**$(\_)$ es un funtor contravariante de la categoría de espacios compactos con morfismos de clases de homotopía de transformaciones continuas en la categoría de monoides abelianos, i.e. si $f: B_1 \longrightarrow B$ es una equivalencia homotópica entonces Vect$(f) =$ f^*: Vect$(B) \longrightarrow$ **Vect**(B_1) tal que $\xi \longmapsto f^*(\xi)$ es un isomorfismo. Por abuso de notación ξ denota al haz y a su clase de isomorfismo .

A continuación asociaremos a un monoide M cualquiera un grupo conmutativo $\mathcal{G}(M)$. La contrucción de $\mathcal{G}(M)$ es semejante a la de los números enteros a partir de los números naturales. Dicho grupo $\mathcal{G}(M)$

se llamará el *grupo de Grothendieck* de M. Pero antes ilustramos la construcción de los números enteros a partir de los números naturales.



Definimos en $M \times M$ una relación de equivalencia de la manera siguiente: $(m, m) \sim (n, n) \iff \exists m''$ y n'' tal que $(m, m') + (m'', m'') = (n, n') = (n'', n'')$ i.e. $m + m'' = n + n''$ y $m' + m'' = n + n''$.

Es claro que $\sim$ es una relación de equivalencia en $M \times M$ y que $\mathcal{G}(M)$ es un monoide abeliano. La pareja (s, s), donde s es arbitrario, representa al elemento identidad de $\mathcal{G}(M)$ y el inverso de (s, s') es (s', s), por lo que $\mathcal{G}(M)$ es un grupo.

Si $s \in M$ definimos $f(s) = \{(s + s', s'')\}$ denotaremos

$$f(s) = [s] = \{(s + s', s'')\}$$

claramente (s, s') representa $[s] - [s']$ en $\mathcal{G}(M)$.

$[s] - [s'] = (s + s'', s'') - (s' + s'', s'') = (s - s', 0)$ ya que $(s, s') \sim (s - s', 0)$.

Otra manera de ver $\mathcal{G}(M)$ es como el grupo abeliano libre generado por el conjunto M módulo el subgrupo generado por

$$\{(s + s') + (-1)s + (-1)s'\}.$$

La unicidad de $\mathcal{G}(M)$ se sigue de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{G}(M) \arrow[d, shift right, "h"'] \\ M \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \mathcal{G}(M) \arrow[u, shift right, "h'"'] \end{tikzcd}$$

3.1 DEFINICION. Si B es un espacio topológico compacto, definiremos el grupo (o anillo) $K_k(B)$ como $\mathcal{G}(\mathrm{Vect}_k(B))$.

Así las $K_k(\_)$ definen un funtor contravariante si $f: B_1 \longrightarrow B$ y $g: B_2 \longrightarrow B_1$ entonces $K_k(fg) = K_k(g)K_k(f)$ y $K_k(1_B) = 1_{K_k(B)}$.

De una manera más precisa $\langle \xi, \eta \rangle = \xi - \eta \in K_k(B)$ entonces

$$K_k(f)(\xi - \eta) = f^*(\xi) - f^*(\eta) = \langle f^*(\xi), f^*(\eta) \rangle$$

El diagrama es:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Vect}_k(B) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Vect}_k(B_1) & \xrightarrow{g^*} & \mathrm{Vect}_k(B_2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K_k(B) & \xrightarrow{K_k(f)} & K_k(B_1) & \xrightarrow{K_k(g)} & K_k(B_2) \end{array}$$

3.2 EJEMPLO. Sea $rg: \mathrm{Vect}_k(B) \longrightarrow Z$ el morfismo de semianillos llamado rango o dimensión del haz vectorial (en la componente de B que contiene a su punto base). Todo haz vectorial sobre un punto x_0 es trivial, si a un haz vectorial de dimensión n le asociamos un entero positivo n, obtenemos una correspondencia uno a uno entre $\mathrm{Vect}(\{x_0\})$ y el monoide Z^+ (de todos los enteros positivos). Así es que $K(\{x_0\}) \cong Z$.

De la construcción de $\mathcal{G}(\mathrm{Vect}_k(B))$ tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Vect}_k(B) & \longrightarrow & K_k(B) \\ & \searrow^{rg} & \downarrow \\ & & Z \end{array}$$

i.e. $rg(\xi - \eta) = rg(\xi) - rg(\eta)$.

Si x_0 es el punto base de B e $i: \{x_0\} \longrightarrow B$ la función inclusión y $c: B \longrightarrow \{x_0\}$ la función constante, $c \circ i$ lleva a x_0 en sí mismo y $K(i) \circ K(c) = 1_{K(B)}$ y por lo tanto $K(i)$ es epimorfismo. Si definimos $\tilde{K}(B) = ker\ K(i)$ obtenemos una sucesión exacta que se escinde

$$0 \longrightarrow \tilde{K}(B) \longrightarrow K(B) \overset{K(c)}{\rightarrow} K(\{x_0\}) \longrightarrow 0$$

por lo tanto $K(B) \cong \tilde{K}(B) \oplus Z$.

Si $f: B_1 \longrightarrow B$ entonces $\tilde{K}_k(f)$ es la restricción de $K_k(f)$ y $\tilde{K}_k(\_)$ es un funtor contravariante y se llama *funtor de K-teoría reducida.*

Veamos otra manera de definir $\tilde{K}(B)$.

3.3 DEFINICION. Dos haces vectoriales ξ y η sobre B son establemente equivalentes, si existen haces θ^p y θ^q tal que $\xi \oplus \theta^p$ y $\eta \oplus \theta^q$ son isomorfos sobre B. Escribiremos $\xi \sim \eta$ si ξ y η son establemente equivalentes.

Es fácil ver que $\sim$ establece una relación de equivalencia y que haces vectoriales isomorfos son establemente equivalentes.

Así, la equivalencia estable puede verse como una relación en $\mathrm{Vect}_k(B)$.

3.4 TEOREMA. Si B es un espacio topológico tal que para cada haz vectorial ξ sobre B existe un haz vectorial η sobre B tal que $\xi \oplus \eta \cong \theta^m$, entonces $\alpha: \mathrm{Vect}_k(B) \longrightarrow \tilde{K}_k(B)$ definida por $\alpha(\xi) = \xi - rg\xi$, es suprayectiva y $\alpha(\xi) = \alpha(\eta)$ si y sólo si ξ es establemente equivalente a η.

Nota: De éste teorema vemos que las clases de equivalencia pueden identificarse con los elementos de $\widetilde{K}_k(B)$.

A continuación mencionaremos algunos resultados de la K-teoría topológica:

1) Si B es un espacio paracompacto contractible entonces $\widetilde{K}_k(B) = 0$ y $\widetilde{K}_k(S^0) = Z$.

2) Para esferas S^0, S^1, S^2, S^3 y S^4 $\widetilde{K}_R(S^0) = \widetilde{K}_C(S^0) = \widetilde{K}_H(S^0) \cong Z$, y si $\widetilde{K}_C$ lo denotamos por $\widetilde{KU}$ y $\widetilde{K}_R$ por $\widetilde{KO}$ y $\widetilde{K}_H$ por $\widetilde{KSp}$ tenemos que

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{KO}(S^1) \cong Z/2 & \widetilde{KU}(S^1) \cong 0 & \widetilde{KSp}(S^1) \cong 0 \\
\widetilde{KO}(S^2) \cong Z/2 & \widetilde{KU}(S^2) \cong Z & \widetilde{KSp}(S^2) \cong 0 \\
\widetilde{KO}(S^3) \cong 0 & \widetilde{KU}(S^3) \cong 0 & \widetilde{KSp}(S^3) \cong 0 \\
\widetilde{KO}(S^4) \cong Z & \widetilde{KU}(S^4) \cong 0 & \widetilde{KSp}(S^4) \cong Z.
\end{array}$$

Nota: También se sabe que $\widetilde{KU}(S^n) \cong \widetilde{KU}(S^{n+2})$, que $\widetilde{KO}(S^n) \cong \widetilde{KO}(S^{n+4})$ y que $\widetilde{KSp}(S^n) \cong \widetilde{KSp}(S^{n+4})$. Esto es lo que en K-Teoría topológica se conoce como la periodicidad de Bott. Así que todos los $K_k(S^i)$ están determinados.

Los grupos $K(B)$ y $KO(B)$ fueron introducidos por Atiyah y Hirzebruch [A-H].

Capítulo 3
HACES VECTORIALES Y MODULOS PROYECTIVOS

1 TEOREMA DE SWAN

En esta sección mostraremos que si B es Hausdorff compacto hay un isomorfismo de $Hom(\xi, \eta)$ en $Hom_{k^B}(\Gamma(\xi), \Gamma(\eta))$

1.1 LEMA. Sea B un espacio topológico normal, U una vecindad de x y s una sección de un haz vectorial ξ sobre U. Entonces existe una sección s' de ξ sobre B tal que s' y s coinciden en alguna vecindad de x.

Demostración. Sean V y W vecindades de x tales que $\overline{V} \subset U$ y $\overline{W} \subset V$. Sea $\omega: B \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\omega|\overline{W} = 1$ y $\omega|B - V = 0$ y

$$s'(y) = \begin{cases} \omega(y)s(y) & \text{si } y \in U \\ s'(y) = 0 & \text{si } y \notin U. \blacksquare \end{cases}$$

1.2 COROLARIO. Sea B un espacio topológico normal. Para cualquier $x \in B$, existen elementos $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(\xi)$ que forman una base local en B. **Demostración.** Es inmediata.∎

1.3 COROLARIO. Sea B un espacio normal. Si $u, v: \xi \longrightarrow \eta$ y $\Gamma(u) = \Gamma(v): \Gamma(\xi) \longrightarrow \Gamma(\eta)$ entonces $u = v$.

Demostración. Dado $e \in E$ tal que $p(e) = x$, existe $s \in \Gamma(U)$ con U vecindad de x tal que $s(x) = e$. Por el lema anterior, existe $s' \in \Gamma(\xi)$ tal que $s'(x) = e$. Ahora $u(e) = us'(x) = (\Gamma(u)s')(x) = (\Gamma(v)s')(x) = v(e)$.∎

1.4 LEMA. Sea B un espacio topológico normal y $s \in \Gamma(\xi)$. Supongamos $s(x) = 0$ entonces existen $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(\xi)$, $a_1, \ldots, a_n \in k^B$ tal que $a_i(x) = 0$ para $i = 1 \ldots n$ y $s = \sum a_i s_i$.

Demostración. Sea $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(\xi)$ una base local en x. Sea $s(y) = \sum b_i(y) s_i(y)$ cerca de x, $b_i(y) \in k$. Sea $a_i \in k^B$ tal que a_i y b_i concuerdan en una vecindad U de x. Sea V una vecindad de x tal que $\overline{V} \subset U$. Sea $a \in k^B$ tal que $a(x) = 0$ y $a(y) = 1\ \forall y \in B - V$. Entonces $s = as' + \sum a_i s_i$ pero $a(x) = 0$ y $a_i(x) = b_i(x) = 0$.∎

1.5 COROLARIO. Sea I_x el ideal bilateral de k^B que consiste de todas las $a \in k^B$ con $a(x) = 0$. Entonces $\Gamma(\xi)/I_x\Gamma(\xi) \cong F_x(\xi)$ el isomorfismo dado por $s \longmapsto s(x)$.

Demostración. Del lema 2.2.6 y la demostración del corolario 1.3.∎

1.6 TEOREMA. Sea B un espacio normal. Dado cualquier k^B-morfismo $h: \Gamma(\xi) \longrightarrow \Gamma(\eta)$ existe una única k-transformación de haces vectoriales $u: \xi \longrightarrow \eta$ tal que $h = \Gamma(u)$.

Demostración. La unicidad se sigue del corolario 1.3. Ahora h induce $u_x: \Gamma(\xi)/I_x\Gamma(\xi) \longrightarrow \Gamma(\eta)/I_x\Gamma(\eta)$. La totalidad de estos da lugar a una transformación $u: E \longrightarrow E'$, esta transformación u es k-lineal en las fibras. Falta ver su continuidad. Si $s \in \Gamma(\xi)$ $(us)(x) = u_x s(x) = (h(s))(x)$ por construcción, así que $h = \Gamma(u)$.

Para checar la continuidad sean $s_1 \ldots s_m \in \Gamma(\xi)$ una base local en x. Si $e \in E$ y $p(e)$ está cerca de x, tenemos que $e = \sum a_i(e)s_i(p(e))$ donde las a_i son funciones p-valuadas continuas. Ahora, $u(e) = \sum a_i(e)us_i(p(e))$. Como $us_i = h(s_i)$, us_i es una sección continua de η. Luego, todos los términos de la suma son continuos en e. Lo anterior significa que u es continua.∎

1.7 COROLARIO. Sea B un espacio topológico normal. Sean ξ, η dos k-haces vectoriales sobre B Entonces $\xi \cong \eta$ si y sólo si $\Gamma(\xi) \cong \Gamma(\eta)$ como k^B-módulos.

Veamos ahora que si B es Hausdorff compacto, los k^B-módulos que pueden ocurrir como $\Gamma(\xi)$ para alguna ξ son exactamente los módulos proyectivos finitamente generados.

1.8 LEMA. Sea B Hausdorff compacto. Sea ξ un k-haz vectorial sobre B. Entonces existe un haz trivial ς (i.e. $E(\varsigma) = B \times k^n$) y un epimorfismo $u: \varsigma \longrightarrow \xi$.

Demostración. Para cada $x \in B$, elegimos un conjunto de secciones $s_{x,1}, \ldots, s_{x,r_x} \in \Gamma(\xi)$ que forman una base local bajo una vecindad U_x de x. Un número finito de U_x cubren a B, por lo que hay un número finito de secciones $s_1 \ldots s_n \in \Gamma(\xi)$ tal que $s_1(x) \ldots s_n(x)$ generan $F_x(\xi)$ para cada x. Sea ς un haz trivial con $E(\varsigma) = B \times k^n$. Entonces $\Gamma(\varsigma)$ es un k^B-módulo libre con n generadores $e_1 \ldots e_n$. Definamos una función $\Gamma(\varsigma) \longrightarrow \Gamma(\xi)$ por medio de $e_i \longmapsto s_i$. Por el teorema 1.6, esta transformación está inducida por $u: \varsigma \longrightarrow \xi$. Como $u(e_i) = s_i$, $s_i(x) \in im\, u$, por lo tanto u es suprayewctiva.∎

1.9 COROLARIO. Si B es Hausdorff compacto, cualquier k haz vectorial sobre B es suma directa de un k-haz trivial ς.

Demostración. Sea $u: \varsigma \longrightarrow \xi$ como en el lema 1.8. Sea $\eta = ker\ u$. Luego η es subhaz de ς. Por tanto $\varsigma = \eta \oplus \xi'$. Claramente $\xi' \cong \xi$.∎

1.10 COROLARIO. Si B es Hausdorff compacto y ξ es cualquier k haz vectorial sobre B entonces $\Gamma(\xi)$ es un k^B-módulo proyectivo finitamente generado.

Demostración. Por el corolario 1.9, $\Gamma(\xi)$ es un sumando directo de $\Gamma(\varsigma)$ el cual es un k^B-módulo finitamente generado.∎

1.11 TEOREMA. Sea B un espacio Hausdorff compacto. Entonces un k^B-módulo P es isomorfo a un módulo de la forma $\Gamma(\xi)$ si y sólo si P es proyectivo finitamente generado.

Demostración. La implicación se sigue del corolario 1.10.

Inversamente: Supongamos que P es proyectivo y finitamente generado. Luego P es sumando directo de un k^B-módulo libre finitamente generado L, entonces existe un endomorfismo idempotente $g: L \longrightarrow L$ con $p \cong img$. Ahora $L = \Gamma(\varsigma)$ donde ς es un k-haz vectorial trivial. Por el teorema 1.6, $g = \Gamma(u)$ donde $u: \varsigma \longrightarrow \varsigma$. Como $g^2 = g$ el teorema 1.6 implica que $u^2 = u$. Si supiéramos que $\xi = im\ u$ es un subhaz de ς tendríamos que $\varsigma = \xi \oplus \eta$ donde $\eta = keru$, y por lo tanto $p \cong im\Gamma(u) = \Gamma(\xi)$, puesto que Γ es un funtor aditivo. (Por la proposición 2.2.4) es suficiente probar que $dim_k F_x(\xi)$ es localmente constante. Como $u^2 = u$, $\eta = keru = im(1-u)$ y $F_x(\varsigma) = F_x(\xi) \oplus F_x(\eta)$. Supongamos que $dim_k F_x(\xi) = h$, $dim_k F_x(\eta) = k$ por la observación 2.2.5 aplicada a u y a $1-u$, tenemos que $dim_k F_y(\xi) \geq h$ y $dim_k F_y(\eta) \geq k$ para toda y en alguna vecindad de x. Pero $dim_k F_y(\xi) + dim_k F_y(\eta) = dim_k F_y(\varsigma) = h + k$ es constante. Por lo tanto $dim_k F_x(\varsigma)$ es localmente constante.∎

2 TEOREMA DE VASERSTEIN

En esta sección generalizamos el resultado de la sección anterior para un espacio topológico arbitrario, con una definición apropiada de haz vectorial de tipo finito, es decir, mostramos que la categoría de haces vectoriales de tipo finito es equivalente a la categoría de módulos proyectivos finitamente generados.

2.1 DEFINICION. Sea B un espacio topológico. Un haz sobre B es de *tipo finito* si existe una partición finita S de 1 en B (i.e. un conjunto finito S de funciones continuas no negativas en B cuya suma es 1) tal que la restricción del haz al conjunto $\{x \in B | f(x) \neq 0\}$ es trivial para cada f en S.

Por ejemplo, cuando B es Hausdorff compacto, todo haz sobre B es de tipo finito sobre B. Para un espacio normal B nuestra definición de tipo finito es equivalente a la siguiente definición [G]: existe una cubierta abierta T de B tal que la restricción del haz a cada $U \in T$ es trivial.

Denotaremos por $P(k^B)$ a la categoría de k^B-módulos proyectivos finitamente generados.

2.2 LEMA. Todo objeto P en $P(k^B)$ es isomorfo al espacio columna de una matriz cuadrada hermitiana idempotente $e = e^2 = e^*$ sobre k^B.

Demostración. Como P es isomorfo a un sumando directo del módulo libre $(k^B)^n$ para algún número natural n, entonces es isomorfo al espacio columna de una matriz idempotente de n por n, $a = a^2$ sobre k^B (i.e a la imagen $a(k^B)^n$). Como $a = a^2$, tenemos que $(a^*)^2 = a^*$ y

$$(1 + (1 - 2a)(1 - 2a^*))a^* = 2aa^* = a(1 + (1 - 2a)(1 - 2a^*)),$$

donde 1 representa a la matriz identidad en $M_n k^B$. Como $(1-2a)(1-2a^*)$ es una matriz hermitiana semipositiva, existe una matriz $g = g^*$ en $GL_n k^B$ tal que $g^2 = 1+(1-2a)(1-2a^*)$ [L]. Definimos $e = g^{-1}ag$. Entonces

$$e^2 = g^{-1}agg^{-1}ag = g^{-1}a^2g = g^{-1}ag = e$$

y $e^* = (g^{-1}ag)^* = g^*a^*g^{-1*} = ga^*g^{-1} = 2aa^*g^{-1} = ag^2g-1 = ag$

Así, P es isomorfo al espacio columna de $e = e^2 = e^*$.■

Todo objeto P en $\mathcal{P}(k^B)$ dá un k-haz vectorial $\Gamma^*(P)$ sobre B de la manera usual. A saber, el k-espacio vectorial en el punto x de B es P evaluado en x; i.e. $P \otimes_v k^B$, donde $v: k^B \longrightarrow k$ está dado por $v(f) = f(x)$ para cualquier función continua $f: B \longrightarrow k$. Cuando P es el espacio columna de una matriz $e = e^2 \in M_n k^B$, la fibra en x es justamente $e(x)K^B$.

La trivialidad local de $\Gamma^*(P)$ se sigue del siguiente lema:

2.3 LEMA. Si $e = e^2 \in M_n k^B$ y $g = e(x)e(y) + (1 - e(x))(1 - e(y)) \in GL_n k$ con $x, y \in B$, entonces las matrices $e(x)$ y $e(y)$ son similares sobre k.

Demostración.

$$\begin{aligned}
e(x)g &= e^2(x)e(y) + (e(x) - e^2(x))(1 - e(y)) \\
&= e(x)e(y) + (e(x) - e(x))(1 - e(y)) \\
&= e(x)e(y) + 0 \\
&= e(x)e(y) \\
&= e(x)e(y) + 0 \\
&= e(x)e(y) + (1 - e(x))(e(y) - e(y)) \\
&= e(x)e^2(y) + (1 - e(x))(e(y) - e^2(y)) \\
&= ge(y).
\end{aligned}$$

cuando $g \in GL_n k$, concluimos que $g^{-1}e(x)g = e(y)$.■

2.4 COROLARIO. Para todo objeto P en $\mathcal{P}(k^B)$, el correspondiente k-haz vectorial $\Gamma^\bullet(P)$ es de tipo finito.

Demostración. Por el lema 7.2, P es isomorfo al espacio columna de $e = e^2 = e^* \in M_n k^B$ para alguna n.

Nótese que k^n tiene la métrica usual $|(z_j)|^2 = \sum z_j^* z_j$, la cual lo hace un espacio de Banach, por lo que $M_n k$ es un algebra de Banach con respecto al operador norma.

Consideremos el conjunto $Y = \{p = p^2 = p^* \in M_n k\}$. Este conjunto es compacto ya que:

(i) $|p| = |p^2| = |p||p| \Longrightarrow |p| = 1$ si $p \neq 0$ por lo que $|p| \leq 1$. Luego Y es acotado.

(ii) Sea $\{P_n\}_{n\in N} \subset Y$ convergente. Veamos que $\lim_{n\in N} P_n$ está en Y

$$\begin{aligned}\lim_{n\in N} P_n &= \lim_{n\in N} P_n^2\\ &= \lim_{n\in N} P_n P_n\\ &= \lim_{n\in N} P_n \lim_{n\in N} P_n\\ &= (\lim_{n\in N} P_n)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\in N} P_n &= \lim_{n\in N} P_n^*\\ &= \lim_{n\in N} {}^t\overline{P_n}\\ &= {}^t\overline{\lim_{n\in N} P_n}\\ &= (\lim_{n\in N} P_n)^*\end{aligned}$$

Por lo que Y es cerrado.

Como Y es compacto, existe una partición finita $\{\varphi_i\}$ de la unidad en Y tal que

$$\overline{\varphi_i^{-1}((0,1])} \subset U_i$$

donde U_i es una cubierta abierta finita de Y.

Consideremos la cubierta abierta de Y $\{U_n = \{|p-q| < \frac{1}{n};\ n \in N\}$, existe $m \in N$ tal que $U = \{U_1, \ldots, U_m\}$ cubre a Y. Tomemos una partición de la unidad subordinada a U. Como U es numerable, entonces

$$\varphi_i^{-1}((0,1]) \subset \overline{\varphi_i^{-1}((0,1])} \subset U_i$$

Entonces si $\varphi_i(p)\varphi_i(q) \neq 0$ tenemos que $|p-q| < \frac{1}{i} \leq \frac{1}{3}$.

La matriz anterior e puede ser considerada como una transformación continua $B \longrightarrow Y$. Así que la partición S' da una partición finita S de 1 en B. Tenemos que $|e(x) - e(y)| < 1/3$ siempre que x e y estén en la misma parte (i.e. $f(x)f(y) \neq 0$ para alguna $f \in S$).

Para cualquier parte $U(f) = \{x \in B | f(x) \neq 0\}$, donde $f \in S$, y cualesquiera $x, y \in U(f)$ tenemos que $e(x)g = ge(y)$, como en el lema 2.2, donde

$$g = e(x)e(y) + (1 - e(x)(1 - e(y)) = 1 + (e(y) - e(x))(1 - 2e(y)).$$

Como

$$|g - 1| = |e(y) - e(x))(1 - 2e(y))| \leq |e(y) - e(x)||1 - 2e(y)| < (1/3) \cdot 3 = 1$$

concluimos que $g \in GL_nk$ [M]. Fijando $x \in U(f)$, tenemos que $e(y) = g^{-1}e(x)g$ donde g depende continuamente de $y \in U(f)$. Como k es un álgebra con división, el espacio columna de $e(x)$ es un espacio vectorial finito dimensional sobre k para cada x en B. Además el espacio columna de la restricción de e a $U(f)$ es un $k^{U(f)}$-módulo libre finitamente generado. Así la restricción del haz $\Gamma^*(P)$ a $U(f)$ es trivial. Entonces, el haz es tipo finito.∎

2.5 LEMA. Para todo k-haz vectorial ξ de tipo finito sobre B, el k^B-módulo $\Gamma(\xi)$ de sus secciones globales es proyectivo finitamente generado (i.e. $\Gamma(\xi) \in P(k^B)$).

Demostración. Sea S una partición finita de 1 en B tal que ξ es trivial sobre cada $U(f) = \{x \in B | f(x) \neq 0\}$, $f \in S$. Para cada f en S elegimos una base libre $a_1, \ldots, a_{n(f)}$ para $\Gamma(\xi)|U(f)$. Quisieramos extender éstas $a_j(f)$ a secciones globales del haz. En general esto puede ser hecho sólo después de una modificación de $a_j(f)$.

Escribimos $a_j(f) = \sum c_{ij}(f,g)a_i(g)$ en $U(f) \cap U(g)$ para toda $g \in S$. Es claro que existe una función continua no negativa f' en B tal que f'

y f se anulan en el mismo conjunto y $c_{ij}(f,g)f' \longrightarrow 0$ en $U(f) \cap U(g)$ cuando $f(x) \longrightarrow 0$, para toda i, j y g. Entonces

$$b_j(f) = \begin{cases} a_j(f)f' & \text{en } U(f), \\ 0 & \text{en } B - U(f) \end{cases}$$

es una sección global continua del haz. Más aún,

$$\{b_j(f)|U(f): 1 \leq j \leq n(f)\}$$

es una base para $\Gamma(\xi)|U(f)$.

Mostremos ahora que $\{b_j(f): 1 \leq j \leq n(f), f \in S\}$ es un conjunto generador para el k^B-módulo $\Gamma(\xi)$. Sea $s \in \Gamma(\xi)$. Escribimos $s|U(f) = \sum c_j(f) b_j(f)$ con $c_j(f) \in k^{U(f)}$. Existe una modificación, dependiendo de s, de la partición S tal que la cubierta abierta $\{U(f): f \in S\}$ de B permanece igual, pero en la nueva partición tenemos que $c_i(f)f \longrightarrow 0$ en $U(f)$ cuando $f \longrightarrow 0$. Tenemos $d_j(f) \in k^B$ definida por

$$d_j(f) = \begin{cases} c_j(f)f & \text{en } U(f) \\ 0 & \text{en } B - U(f). \end{cases}$$

Aún más,

$$s = \sum_{f \in S} \sum_{j=1}^{n(f)} d_j(f) b_j(f).$$

Además tenemos una transformación suprayectiva de $(k^B)^N$ sobre $\Gamma(\xi)$, donde $N = \sum_{f \in S} n(f)$ es el número de generadores. Usando una forma hermitiana definida positiva en $(k^B)^N$ (digamos, la forma estandard $(a,b) \mapsto \sum a_j^* b_j$ para $a = (a_j)$, $b = (b_j)$ en $(k^B)^N$), obtenemos que el núcleo del homomorfismo $(k^B)^N \longrightarrow \Gamma(\xi)$ es un sumando directo de $(k^B)^N$. Así $\Gamma(\xi)$ es un k^B-módulo proyectivo.■

2.6 TEOREMA. La categoría $P(k^B)$ es equivalente a la categoría de k-haces vectoriales de tipo finito sobre B.

Demostración. Inmediata de los lemas 2.2 y 2.5.■

3 OTRAS EQUIVALENCIAS

En esta sección tratamos el problema de clasificación para haces de tipo finito sobre un espacio topológico X, es decir, el problema de identificación de las clases de isomorfismo en $P(k^B)$ con las clases de homotopía.

Sea $G(k^n)$ el conjunto de todos los subespacios del espacio vectorial k^n de dimensión n sobre k. Como es usual, $G(k^n)$ es dotado con la topología de la unión disjunta de las variedades de Grassman $G_m(k^n)$, donde $0 \leq m \leq n$. La topología en $G(k^n)$ puede ser dada explícitamente identificando a $G(K^n)$ con el subconjunto $Y_1 = \{p = p^2 = p^* \in M_n k\}$ o $Y_2 = \{a \in M_n k \mid a^2 = aa^* = 1_n\}$ del anillo de matrices $M_n k$ (el cual tiene la topología del producto directo de n^2 copias de k). Los siguientes subconjuntos de $M_n k$ son homotópicamente equivalentes a $G(k^n)$: $Y_3 = \{e = e^2 \in M_n k\}$, $Y_4 = \{a = a^* \in GL_n k\}$.

La inclusión $k^n \subset k^{n+1}$ induce la inlusión $G(k^n) \subset G(k^{n+1})$ la cual corresponde a la transfomación $b \longmapsto \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en los conjuntos Y_1 y Y_3 y a la transformación $b \longmapsto \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ en los conjuntos Y_2 y Y_4.

3.1 TEOREMA. Existe una biyección entre cualesquiera dos de los siguientes conjuntos:

i) Las clases de isomofismo de k-haces vectoriales de tipo finito sobre B.

ii) Las clases de isomorfismo en $P(k^B)$.

iii) Las clases de isomorfismo en $P(k_0^B)$, donde $k_0^B \subset k^B$ es el subanillo de funciones acotadas en B.

iv) Las clases de isomorfismo de k^B-módulos proyectivos finitamente generados con formas hermitianas positivas definidas.

v) El límite inductivo de clases de homotopía de transformaciones continuas de B en $G(k^n)$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Demostración. El isomorfismo de los cojuntos (i) y (ii) se sigue de la sección 2 del capítulo 2.

Isomorfismo de (ii) y (iii): Por el lema 2.1 del capítulo II todo objeto P de $\mathcal{P}k^B$ es isomorfo a un objeto extendido de algún objeto de $\mathcal{P}k_0^B$. Ahora, sean P y Q objetos de $\mathcal{P}k_0^B$ los cuales son isomorfos sobre el anillo más grande k^B. Queremos probar que P y Q son isomorfos en $\mathcal{P}k_0^B$.

Representaremos a P y Q como los espacios columna de matrices $p = p^2 = p^*$ y $q = q^2 = q^*$ en $M_n k_0^B$. Utilizando las operaciones de estabilización $e \longmapsto \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (las cuales aplicaremos hasta obtener la misma n para p y q), y un isomorfismo de P y Q sobre k^B, podemos suponer que $g^{-1}pg = q$ para alguna g en $GL_n k^B$.

Sea $g = g'h$ la descomposición polar de g, i.e. $g' = g'^*$ es hermitiana, $h = h^{*-1}$ es ortogonal (unitaria), $g'^2 = gg^*$ y el centralizador de g' en $M_n k^B$ es el mismo que el de gg^*, así $pg' = g'p$. Por lo tanto $h \in GL_n K_0^B$ es acotados y $h^{-1}ph = h^*pg = q$. Así, P y Q son isomorfos sobre k_0^B.

Isomorfismo de (ii) y (iv): Mostraremos que todo objeto P en $\mathcal{P}(k^B)$ tiene una forma hermitiana positiva definida. Por el lema 2.1, P es isomorfo al espacio columna $e(k^B)^n$ de una matriz $e = e^2 = e^*$ en $M_n k^B$. Definiremos una forma hermitiana positiva $\Phi: e(k^B)^n \times e(k^B)^n \longrightarrow k^B$ por

$$\Phi((a_i), (b_j)) = \sum a_i^* b_i.$$

Note que $(1-e)(k^B)^n$ es el complemento ortogonal de $e(k^B)^n$.

Ahora mostraremos que cualesquiera dos formas hermitianas positivas definidas Φ y Ψ en P son isomorfas. Siguiendo el teorema 8.8 de [K], consideremos $h = \Phi^{-1}\Psi \in Aut(P)$ (donde Φ y Ψ son pensadas como transformaciones $P \longrightarrow P^*$). Entonces h es autoadjunta y positiva con respecto a Φ (a saber,

$$\begin{aligned}\Phi(hu,v) &= (\Phi hu)v\\ &= (\Psi u)v\\ &= \Psi(u,v)\\ &= \Psi(v,u)^*\\ &(\Phi(hv,u))^*\\ &\Phi(u,hv)^{**}\\ &\Phi(u,hv)\end{aligned}$$

y $\Phi(hu,v) = \Psi(u,v) > 0$ para $0 \neq v \in P$).

Sea g su raíz cuadrada positiva autoadjunta. Tenemos que $\Psi = \Phi h = \Phi g^2 = g^*\Phi g$ (es decir, $\Psi(u,v) = \Phi(hu,v) = \Phi g^2 u, v) = \Phi(gu, gv)$), por lo que Φ y Ψ son isomorfas.

Isomorfismo de (ii) y (v): Identificamos a $G(k^n)$ con $\{p = p^2 = p^* \in M_n k\}$ y a $Hom(X, G(k^n))$ (es decir, las funciones continuas $X \longrightarrow G(k^n)$) con $\{e = e^2 = e^* \in M_n k^B\}$.

Por el lema 2.1, todo objeto P en $\mathcal{P}(k^B)$ es isomorfo al espacio columna de una matriz e. Mostraremos que la imagen de e en $\varinjlim \pi(B, G(k^n))$ no depende de la elección de e (donde $\pi(B, G(k^n))$ denota las clases de homotopía en $Hom(B, G(k^n))$).

Sean $a = a^2 = a^*$ en $M_m k^B$ y $b = b^2 = b^*$ en $M_n k^B$ tales que tengan espacios columna isomorfos. Utilizando las funciones de estabilización $e \longmapsto \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ las cuales no cambian las imágenes en el límite inductivo, podemos suponer que $m = n$ y que las matrices a y b son similares. Esto es, $b = gag^{-1}$ con g en $GL_n k^B$.

Entonces tenemos, en $M_{2n} k^B$, que

$$\begin{pmatrix} g^{-1} & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por el lema de Whitehead, la matriz $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{-1} \end{pmatrix}$ es el producto de matrices elementales y, por lo tanto, homotópica a la matriz identidad. Así que $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ son homotópicas en el conjunto

$\{e = e^2 \in M_{2n}k^B\}$. Esta homotopía puede ser retractada a una homotopía en el subconjunto $\{e = e^2 = e^* \in M_{2n}k^B\}$ (usando, por ejemplo, la prueba del lema 2.2 con $B \times \{t{:}0 \leq t \leq 1\}$). Por lo que, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ son homotópicas en $Hom(B, G(k^{2n}))$.

Así, tenemos una transformación bien definida de las clases de isomorfismo de objetos en $P(k^B)$ en $\varinjlim \pi(B, G(k^n))$. Esta transformación es suprayectiva, se puede ver asignando a cada $e = e^2 = e^*$ en $M_n k^B$ su espacio columna, el cual da una transformación de $\varinjlim \pi(B, G(k^n))$ en $P(k^B)$ (salvo isomorfismo en $P(k^B)$, esta transformación es suprayectiva por el lema 2.1).

El siguiente lema completa nuestra prueba.

3.2 LEMA. Cualesquiera dos matrices homotópicas en $Hom(B, G(k^n))$ son similares. En particular sus espacios columna son isomorfos.

Demostración. Sean $a, b \in Hom(B, G(k^n))$ homotópicas. Es decir, existe una función continua $c{:}\, B \times \{t{:}0 \leq t \leq 1\} \longrightarrow G(k^n)$ tal que $c(\cdot, 0) = a$ y $c(\cdot, 1) = b$.

$\prod G(k^n)$ denota al conjunto de funciones continuas $\{t{:}0 \leq t \leq 1\} \longrightarrow G(k^n)$. Entonces $G(k^n)$ da una métrica (la inducida por la norma en $M_n k$) en $\prod G(k^n)$.

Como $\prod G(k^n)$ es un espacio métrico, es paracompacto. Sea S' una partición de 1 localmente finita en $\prod G(k^n)$ tal que $|p - q| < 1/9$ siempre que p y q estén en la misma parte. La transformación c da una partición localmente finita S de B tal que $|c(x,t) - c(y,t)| < 1/9$ para toda t siempre que x e y estén en la misma parte, es decir, $f(x)f(y) \neq 0$ para alguna $f \in S$.

Para cada f en S elegimos un punto $x = x(f)$ en $U(f) = \{x \in B : f(x) \neq 0\}$ y un número positivo $\epsilon(f)$ tal que $|c(x,t) - c(x,s)| < 1/9$ cuando

$|t-s| < \epsilon(f)$. Entonces

$$|c(z,t)-c(z,s)| \leq |c(x,t)-c(x,s)| + |c(z,t)-c(x,t)| + |c(z,s)-c(x,s)|$$
$$< 1/9 + 1/9 + 1/9 = 1/3$$

para toda z en $U(f)$ siempre que $|t-s| < \epsilon(f)$.

Definimos $\delta(z) = \sum_{f\in S} \epsilon(f) f(z)$ para toda z en B. δ es una función positiva continua en B tal que $|c(z,t)-c(z,s)| < 1/3$ cuando $|t-s| < \delta(z)$.

Para toda z en B y cualquier entero $r \geq 0$ definimos

$$t_r(z) = \min(1, r\delta(z)), \quad c_r(z) = c(z, t_r(z)).$$

Entonces $c_0 = a$, $c_r(z) = b(z)$ para $r \geq 1/\delta(z)$, y $|c_r(z) - c_{r+1}(z)| < 1/3$ para toda z y r.

Definamos $g_r = c_r c_{r+1} + (1-c_r)(1-c_{r+1})$ para toda r. Entonces (ver el lema 2.1 y su prueba) $c_r g_r = g_r c_{r+1}$, $|1-g_r| < 1$; por lo que $g_r \in GL_n(k^B)$ para toda r. Más aún, $g_r(z) = 1$ para $r \geq 1/\delta(z)$.

Finalmente definimos $g(z) = g_0(z) g_1(z) \cdots$. Entonces $g \in GL_n k^B$ y $ag = gb$; por lo que $g^{-1} a g = b$. El lema ha sido probado, por lo que el teorema ha sido probado.

3.3 OBSERVACION. Usando el hecho de que $G(k^n)$ es homotópicamente equivalente a $\{h = h^* \in GL_n(k^B)\}$ obtenemos que cualesquiera dos formas hermitianas nosingulares homotópicas sobre k^B son isomorfas (cuando B es compacto, esto es bien conocido; vea [K]). El inverso (que cualesquiera dos formas isomorfas son homotópicas) es falso, como se muestra en el siguiente contraejemplo.

Sea

$$B = S^3 = \{(x_i) \in \mathcal{R}^4 | \sum x_i^2 = 1\}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 i & x_4 i - x_3 \\ x_3 + x_4 i & x_1 - x_2 i \end{pmatrix} \in GL_2 k, \qquad b = g^* a g.$$

Si a y b fueran homotópicas, podríamos tener $b = h^* a h$ siendo h el producto de matrices cerca de 1; por lo que $h \in GL_1 k^B (E_2 k^B)$. Entonces

$gh^{-1} \in U(k^B) \subset GL_1 k^B(E_2 k^B)$; por lo que $g \in GL_1 k^B(E_2 k^B)$. Pero g es homotópica a la transformación identidad $s^3 \longrightarrow S^3$ la cual no puede ser pasada a través de la inclusión $S^1 \subset S^3$ (la cual corresponde a la inclusión $GL_1 C \subset GL_2 C$). Por supuesto que a y b son establemente homotópicas.

BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS

Atiyah, *K-theory*

Bass, *Algebraic K-theory*, Benjamín 1968.

Gel'fang and Mishenko, Quadratic forms over commutative group rings and the K-theory. *Functional Anal. Appl.* 3 (1969)

[G] Goodearl, Cancelation of low-rank vector bundles, *Pacific J. Math. Soc.* 113 (1984).

[H] Husemoller, *Fibre Bundles*, Springer 1966.

[K] Karoubi *K-theory*, Springer 1978.

Milnor, *Notes in characteristic clases*, Princeton University Press (1957).

[M] Mosak *Banach algebras*, the University of Chicago Press, (1975).

Serre, Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. of Math.* 6 (1955).

[S] Swan, Vector bundles and projective modules, *Trans. Amer. Math. Soc.* 105 (1962).

Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press, 1951.