UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
Facultad de Ciencias

ANALISIS BAYESIANO DE ALGUNOS CONTRASTES DE HIPOTESIS PARAMETRICAS

T E S I S

Que para obtener el título de

A C T U A R I O

P r e s e n t a :

Eduardo A. Gutiérrez Peña

México, D. F. Diciembre 1988

ANALISIS BAYESIANO DE

ALGUNOS CONTRASTES DE

HIPOTESIS PARAMETRICAS

RESUMEN

En este trabajo se presenta un procedimiento bayesiano para contrastar hipótesis paramétricas de la forma $H: \theta=\theta_0$. Dicho procedimiento se genera al plantear el contraste de hipótesis como un problema de decisión en ambiente de incertidumbre. Los casos que se analizan corresponden a distribuciones de uso común en la Teoría Estadística.

Se establecen además algunas condiciones bajo las cuales el criterio clásico, basado en el cociente de verosimilitudes, coincide con el procedimiento bayesiano propuesto.

INDICE

Resumen i

1 Introducción 1

2 Conceptos Básicos 5

2.1 El Problema de Constraste de Hipótesis 6

2.1.1 Hipótesis Paramétricas 6

2.2 Solución Bayesiana General 8

2.2.1 Planteamiento de un Problema de Decisión en Ambiente de Incertidumbre 8

2.2.2 Solución de un Problema de Decisión en Ambiente de Incertidumbre 10

2.2.3 Planteamiento del Problema de Decisión Correspondiente 11

2.3 El Problema Específico 13

3 El Problema 16

3.1 Solución General 17

3.2 Solución Particular 20

3.2.1 Divergencia Logarítmica de Kullback-Leibler 20

3.2.2 Elección de δ^* 20

4 Aplicaciones 22

4.1 Distribución Binomial 23

4.2 Distribución de Poisson 27

4.3 Distribución Exponencial 30

4.4 Distribución Normal 33

4.4.1 Constraste de la Hipótesis $H:\mu=\mu_0$ Cuando σ es Conocida 33

4.4.2 Constraste de la hipótesis $H:\mu=\mu_0$ Cuando σ es Desconocida 35

4.4.3 Constraste de la Hipótesis $H:\sigma^2=\sigma_0^2$ Cuando μ es Conocida 38

4.4.4 Constraste de la Hipótesis $H:\sigma^2=\sigma_0^2$ Cuando μ es Desconocida 41

4.4.5 Constraste de la Hipótesis $H:\mu=\mu_0$, $\sigma^2=\sigma_0^2$ 44

5 Conclusiones 48

Apéndices 52

A Proposiciones 53

B Tablas 60

Referencias 87

1

INTRODUCCION

INTRODUCCION

El progreso de la ciencia está profundamente ligado a la experimentación. En base a los datos que proporciona un experimento es posible obtener ciertas conclusiones, que generalmente van mas allá de las condiciones particulares bajo las cuales se llevó a cabo dicho experimento. Este proceso de generalización, llamado inferencia, es un proceso riesgoso debido a la incertidumbre inherente a él. Una de las funciones de la estadística consiste precisamente en proveer distintas maneras de hacer inferencias, así como de medir apropiadamente el grado de incertidumbre presente en ellas.

De las áreas mas importantes de la inferencia estadística, destaca la que se refiere al contraste de hipótesis. Existen diversos tipos de hipótesis susceptibles de ser planteadas en este contexto. El propósito de este trabajo es presentar, desde el punto de vista de la estadística bayesiana, una metodología general que permita contrastar un tipo particular de hipótesis: las hipótesis paramétricas de la forma $H:\theta=\theta_0$.

Mucho se ha dicho acerca de la controversia que existe entre el enfoque clásico y el enfoque bayesiano de la estadística. La principal diferencia entre ambas metodologías consiste en la interpretación de la probabilidad, pues la estadística bayesiana se basa en el concepto de probabilidad subjetiva. En otras palabras, mientras que en la metodología clásica se pretende ser totalmente "objetivo", la estadística bayesiana permite incorporar al análisis, de una manera coherente, la información subjetiva que esté disponible al momento de iniciar algún estudio determinado.

El paradigma bayesiano resulta atractivo por varios motivos:

a) a diferencia de la metodología clásica, está exento de contradicciones internas debido a su planteamiento axiomático;

b) proporciona una metodología general, eliminando así la necesidad de construir procedimientos específicos para resolver problemas particulares; y

c) permite determinar el alcance de los métodos clásicos, ya que muchos de los resultados clásicos más conocidos admiten una interpretación bayesiana, mientras que muchos otros violan los principios básicos de coherencia en los que se fundamenta la metodología bayesiana.

En el capítulo 2 se presentan los conceptos básicos de la teoría bayesiana de toma de decisiones, planteando y dando una solución general al problema de decisión en ambiente de incertidumbre. Posteriormente se plantea el contraste de hipótesis paramétricas como un problema particular de toma de decisiones con incertidumbre presente. Por último, se considera el caso de las hipótesis paramétricas de la forma $H{:}\theta=\theta_0$, tema de este trabajo, presentando algunos ejemplos de situaciones en donde surgen dichas hipótesis.

El capítulo 3 contiene la solución general del problema específico en cuestión. Asimismo, se obtiene una solución particular de gran interés, que podrá compararse con la solución clásica correspondiente.

A lo largo del capítulo 4 se dan varios ejemplos de aplicaciones del procedimiento desarrollado en el capítulo 3. Dichos ejemplos contemplan algunas de las familias de distribuciones univariadas más importantes en la teoría estadística.

Las conclusiones se exponen en el capítulo 5, así como las posibles lineas de investigación que podrían surgir al tratar de extender el presente trabajo.

En el apéndice A se presentan las demostraciones de varios de los resultados técnicos requeridos a lo largo de la tesis. Finalmente, el apéndice B contiene las tablas generadas para cada uno de los casos tratados en el capítulo 4.

2

CONCEPTOS BASICOS

CONCEPTOS BASICOS

2.1. El Problema de Contraste de Hipótesis

En casi cualquier área de la investigación científica es frecuente que, al estudiar un fenómeno determinado, surjan ciertas suposiciones o hipótesis que deben ser verificadas. Cuando es posible, se diseñan y llevan a cabo experimentos con el propósito de validar dichas hipótesis.

Desde el punto de vista estadístico, el problema se traduce a suponer que existe una variable aleatoria observable X, que describe adecuadamente el comportamiento de la característica de interés del fenómeno bajo estudio. Por ser una variable aleatoria, X tiene una distribución de probabilidad y si se selecciona cualquier región S_0 en el espacio muestral S, en principio es posible calcular la probabilidad de que X esté en S_0, denotada $P[X \in S_0]$. La dificultad proviene del hecho de que algunos aspectos de $P[X \in S_0]$, y por lo tanto del compotamiento de X, son desconocidos.

Se dice entonces que cualquier hipótesis acerca de $P[X \in S_0]$ es una hipótesis estadística. En otras palabras, cualquier hipótesis acerca del comportamiento de variables aleatorias observables es una hipótesis estadística.

Considérese ahora un conjunto de observaciones de la variable aleatoria X, que se denotará $z=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$. Para poder verificar la validez de una hipótesis acerca de X es necesario contrastar dicha hipótesis con la realidad, a traves de la evidencia muestral dada por z y a traves del conocimiento previo que se tenga sobre el fenómeno.

2.1.1. Hipótesis Paramétricas

Una situación importante se presenta cuando la distribución conjunta de z está indexada por un parámetro θ, que pertenece a un cierto conjunto Θ llamado espacio parametral. Dicho de otra forma, se considera que la distribución de z pertenece a una familia de distribuciones $F=\{p(z|\theta):\theta\in\Theta\}$.

De esta manera, puede decirse que se conoce la forma de la distribución de z, por lo que en este contexto una hipótesis estadística se convierte en una proposición sobre el parámetro θ y se denomina hipótesis paramétrica.

2.2. Solución Bayesiana General

La teoría bayesiana de toma de decisiones es una teoría formal basada en una serie de axiomas. El propósito fundamental del presente trabajo es la aplicación de dicha teoría a un problema de decisión específico, por lo que en esta sección se presentan sólo los conceptos básicos para ubicarlo.

Una presentación formal de la teoría puede encontrarse en Savage (1954), así como en Bernardo, Ferrándiz & Smith (1985).

2.2.1. Planteamiento de un Problema de Decisión en Ambiente de Incertidumbre

Todo problema de decisión en ambiente de incertidumbre involucra la elección de un curso de acción cuyas consecuencias son desconocidas, pueden dependen de la ocurrencia de algún suceso incierto. De esta manera, es de interés considerar la elección entre distintos cursos de acción cuando

a) la consecuencia de cualquiera de ellos depende del "estado de la naturaleza"

b) el verdadero estado es aún desconocido pero

c) es posible, a un cierto costo, obtener información adicional acerca de dicho estado.

Se supone que el decisor ha eliminado ya aquellos posibles cursos de acción que no merecen mayor consideración y, por lo tanto, ha reducido su problema a tener que elegir entre un conjunto de alternativas bien definidas. Se supone, además, que el decisor desea escoger entre estas alternativas de tal manera que la elección sea consistente con sus preferencias personales respecto a las consecuencias, así como con su juicio personal acerca del verdadero, pero desconocido, "estado de la naturaleza".

La información básica que el decisor debe ser capaz de especificar y que define su problema de decisión, es la siguiente:

1) El espacio de acciones, denotado $D=\{d\}$. El decisor desea seleccionar una acción d, perteneciente a un cierto conjunto D de acciones potenciales bien definidas.

2) El espacio de estados, denotado $\Theta=\{\theta\}$. El decisor considera que la consecuencia de adoptar alguna acción depende del "estado de la naturaleza", que no puede predecir con certeza. Cada estado potencial será etiquetado por un valor de θ en el conjunto Θ.

3) El conjunto de consecuencias, $C=D\times\Theta$. Dicho conjunto debe contener a todas las posibles consecuencias que resulten de elegir una acción d, cuando el verdadero estado es θ.

4) La relación de preferencia, denotada por $\leqslant$. El decisor debe poder expresar sus preferencias entre acciones alternativas.

Así, el problema de decisión queda determinado por la cuarteta $(D,\Theta,C,\leqslant)$. Por otra parte, el decisor debe cuantificar las posibles consecuencias de su elección, así como el conocimiento inicial que tenga sobre el "estado de la naturaleza". Para ello debe especificar también las siguientes medidas:

5) La función de utilidad, denotada por $U(\cdot,\cdot)$ y definida en $D\times\Theta$. El decisor cuantifica las consecuencias de acuerdo a sus preferencias

personales, asignando una utilidad $U(d,\theta)$ al elegir una acción d y descubrir que se establece un valor particular de θ.

6) La medida de probabilidad, denotada por $p(\cdot)$ y definida en Θ. El "estado de la naturaleza" es incierto, por lo que el decisor describe su conocimiento (o bien ignorancia) inicial sobre θ a traves de una medida de probabilidad $p(\theta)$.

Es importante resaltar el carácter subjetivo de las asignaciones que el decisor debe hacer para poder atacar eficazmente su problema de decisión. Dicha subjetividad se debe a que el decisor establece sus propias preferencias sobre las consecuencias de elegir un curso de acción determinando, así como su creencia personal en cuanto a la ocurrencia de los sucesos inciertos relevantes a su problema.

2.2.2. Solución de un Problema de Decisión en Ambiente de Incertidumbre

Una vez que el decisor ha planteado su problema de decisión, todavía es necesario cuantificar adecuadamente las posibles consecuencias de adoptar algún curso de acción, pues dichas consecuencias dependen del verdadero "estado de la naturaleza", aún desconocido. En vista de esto, se define en D una medida $U^*(\cdot)$ llamada utilidad esperada y dada por

$$U^*(d)=\int_\Theta U(d,\theta)\,p(\theta)\,d\theta \qquad (2.2.2.1)$$

El resultado fundamental de la teoría bayesiana es que la decisión óptima consiste en elegir la acción que maximice la utilidad esperada. En otras palabras, siempre que el decisor esté de acuerdo con los axiomas en los que se fundamenta la teoría, la única forma racional de actuar es elegir d^* en D tal que

$$U^*(d^*) = \sup_D \int_\Theta U(d,\theta)p(\theta)d\theta \qquad (2.2.2.2)$$

2.2.3. Planteamiento del Problema de Decisión Correspondiente

Al estudiar el comportamiento de la variable X que describe a la característica de interés del fenómeno bajo estudio, se hace necesario recabar información en base a una muestra $z=\{x_1,\ldots,x_n\}$. Para ello, debe realizarse un experimento que proporcione la información necesaria para el análisis. Cabe mencionar que la elección de dicho experimiento constituye por sí misma un problema de decisión, el cual no es tema de esta tesis. Es por esta razón que a lo largo de este trabajo se considerará que el experimento ya se ha llevado a cabo y como resultado se ha obtenido una muestra z.

Como se mencionó anteriormente, al plantear una hipótesis paramétrica se está suponiendo que la distribución conjunta de z pertenece a una familia paramétrica $F=\{p(z|\theta):\theta\epsilon\Theta\}$. Supóngase además que la hipótesis puede identificarse con una determinada subfamilia $F_0=\{p(z|\theta_0):\theta_0\epsilon\Theta_0,\Theta_0\subset\Theta\}$ de F, de tal manera que las hipótesis $H:p(z|\theta)\epsilon F_0$ y $H':\theta\epsilon\Theta_0$ sean equivalentes.

El problema es entonces decidir si los datos contenidos en z son compatibles con la hipóstesis H. Esta situación debe plantearse como un problema de decisión en ambiente de incertidumbre, cuyos elementos son los siguientes:

1) $D=\{d_1,d_2\}$, el conjunto de posibles decisiones, donde d_1 es "actuar como si la hipótesis H fuese cierta" y d_2 es "rechazar H y buscar una explicación alternativa al comportamiento de los datos".

2) Θ, el conjunto de sucesos inciertos. Dado que en este caso la

incertidumbre está contenida en el parámetro, debe considerarse al espacio parametral como el conjunto de los sucesos inciertos.

3) $U(d,\theta)$, la función de utilidad, que toma en cuenta las consecuencias de elegir la decisión d cuando el verdadero valor del parámetro es θ, siempre de acuerdo a las preferencias del decisor.

4) $p(\theta)$, la distribución inicial de θ, que describe el conocimiento previo que el decisor tiene sobre el valor del parámetro.

Ahora bien, la información contenida en z debe usarse para actualizar el conocimiento que se tenga sobre θ, a traves del Teorema de Bayes. Dicho teorema establece que

$$p(\theta|z) \propto p(\theta)\, p(z|\theta) \tag{2.2.3.1}$$

donde $p(\theta|z)$ denota a la distribución final de θ y expresa el conocimiento que el decisor tiene sobre el parámetro después de haber observado z. Entonces se define la utilidad esperada final de una decisión d como

$$U^*(d|z) = \int_{\Theta} U(d|\theta)\, p(\theta|z)\, d\theta. \tag{2.2.3.2}$$

Así, la mejor decisión será aquella que maximice la utilidad esperada final, es decir, d^* será la decisión óptima si y sólo si

$$U^*(d^*|z) = \sup_{D} \int_{\Theta} U(d,\theta)\, p(\theta|z)\, d\theta. \tag{2.2.3.3}$$

2.3. El Problema Específico

Dentro de la clase de hipótesis paramétricas cuyos planteamiento resulta de interés, en este trabajo se considerará el siguiente caso particular: dado $\theta_0 \epsilon \Theta$ fijo y conocido, se desea verificar la validez de la hipótesis $H:\theta=\theta_0$. En otras palabras, se quiere decidir entre $H:\theta=\theta_0$ y $H':\theta\neq\theta_0$.

A continuación se presentan algunos ejemplos de situaciones donde surgen este tipo de hipótesis.

a) Frecuentemente se presenta la necesidad de determinar la posible relación entre dos variables X e Y, a traves de algún modelo sencillo. Cuando dicha relación se supone lineal, el modelo puede escribirse como

$$y_i=\beta_0+\beta_1 x_i+\varepsilon_i \quad ; \quad i=1,2,\ldots,n,$$

donde y_i representa a la i-ésima observación de la variable Y, x_i es una constante conocida (para toda i), β_0 y β_1 son constantes desconocidas y $\underline{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$ es un vector aleatorio tal que $\underline{\varepsilon}\sim N(\underline{0}, \sigma^2 I)$, con $\sigma^2>0$ constante.

En el análisis de este modelo es común que se plantee la hipótesis $H:\beta_1=0$, pues de verificarse ésta, se puede decir que el modelo no es adecuado y que posiblemente Y no depende siquiera de X.

En este caso β_1 es el parámetro de interés, mientras que β_0 y σ^2 deben considerarse como parámetros de ruido, ya que no son de interés aunque estén presentes en el modelo.

b) Supóngase que se quieren comparar dos poblaciones en base a sus medias, siendo éstas desconocidas. Por ejemplo, puede desearse comparar dos procesos de manufactura de algún artículo determinado, o bien hacer una comparación de la producción media de dos variedades distintas de maiz, etc. Si se supone normalidad en el proceso que genera a las observaciones, entonces el problema puede escribirse como sigue:

Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, donde μ_i y σ_i^2 son constantes desconocidas, para i=1,2. Sea $z_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}\}$ una muestra aleatoria de X_i (i=1,2) con z_1 y z_2 mutuamente independientes. A la luz de estos datos, se desea contrastar la hipóstesis $H: \mu_1 = \mu_2$. Obsérvese que aunque esta hipótesis no es de la forma $H: \theta = \theta_0$, es posible reparametrizar el problema de manera que se pueda plantear así. Si se hace $\theta = \mu_1 - \mu_2$, entonces las hipótesis $H: \mu_1 = \mu_2$ y $H': \theta = 0$ son equivalentes.

Aquí, el parámetro de interés es $\theta = \mu_1 - \mu_2$, aunque el problema involucra dos parámetros mas (σ_1^2 y σ_2^2) que deben considerarse como parámetros de ruido.

c) En ciertas situaciones interesa verificar hipótesis concernientes a la proporción de elementos de una población que tienen una característica determinada. Supóngase, por ejemplo, que se desea saber si la proporción de hombres nacidos en la Ciudad de México el año pasado es la misma que la proporción de mujeres nacidas en la misma población. Se quiere checar entonces que la proporción de hombres es igual a ½.

En general, el problema puede plantearse de la siguiente manera:

Sea X una variable aleatoria con distribución de Bernoulli y probabilidad de "éxito" $p \in (0,1)$. Si $z = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es una muestra aleatoria de X, entonces la variable $r = \sum_{i=1}^{n} x_i$ sigue una distribución binomial $Bin(r|p,n)$. La hipótesis que interesa contrastar en este caso es $H: p = p_0$ (para alguna $p_0 \in (0,1)$ fija y conocida), en base a la información dada por z.

Aunque en los ejemplos anteriores el parámetro de interés θ es un escalar, el planteamiento puede generalizarse al caso en el que θ sea un vector de parámetros. En el capítulo siguiente se presenta una solución general al problema de contraste de hipótesis de la forma $H:\theta=\theta_0$, así como una solución particular que permite hacer una comparación con la solución obtenida a partir de los procedimientos clásicos.

3

EL PROBLEMA

EL PROBLEMA

Hasta ahora se ha discutido la manera de plantear el contraste de hipótesis paramétricas como un problema de decisión en ambiente de incertidumbre, habiendo presentado además la solución general a dicho problema. En este capítulo se tratará el caso de las hipótesis paramétricas de la forma $H:\theta=\theta_0$, señalando primero la solución general a este problema específico y, posteriormente, una solución particular que resulta de interés.

3.1. Solución General

Supóngase que se tiene una muestra $z=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ de una variable aleatoria X, cuyo comportamiento desea estudiarse. Supongase también que la distribución conjunta de z pertenece a una familia paramétrica $F=\{p(z|\theta,\omega):(\theta,\omega)\in\Theta\times\Omega\}$, donde θ denota al parámetro de interés, ω denota al parámetro de ruido y $\Theta\times\Omega$ denota ahora al espacio parametral. Si se desea verificar que θ toma un valor θ_0 conocido, debe plantearse la hipótesis $H:\theta=\theta_0$, con lo cual en realidad quiere decidirse entre d_1 $(\theta=\theta_0)$ y d_2 $(\theta\neq\theta_0)$.

Como ya se mencionó en el capítulo anterior, los fundamentos axiomáticos de la teoría bayesiana de la decisión implican que la decisión óptima es aquella que maximiza la utilidad esperada final, dada en este caso por

$$U^*(d|z)=\int_\Omega\int_\Theta U(d,\theta,\omega)p(\theta,\omega|z)d\theta d\omega \qquad (3.1.1)$$

donde $U(d,\theta,\omega)$ describe las consecuencias de elegir la decisión d cuando el modelo verdadero es $p(z|\theta,\omega)$ y $p(\theta,\omega|z)$ es la distribución conjunta final de (θ,ω), que describe el conocimiento que el decisor tiene sobre θ y ω después de observar z. Dicha distribución se obtiene mediante el Teorema de Bayes, según el cual

$$p(\theta,\omega|z) \propto p(\theta,\omega)\, p(z|\theta,\omega)$$

donde $p(\theta,\omega)$ es la distribución conjunta inicial que el decisor asigna a (θ,ω) y $p(z|\theta,\omega)$ denota a la verosimilitud de θ y ω, dado que se observó z.

Es claro que d_2 será preferible a d_1 si y solo si $U^*(d_2|z) > U^*(d_1|z)$, es decir, si y sólo si

$$\int_\Omega\int_\Theta U(d_2,\theta,\omega)p(\theta,\omega|z)d\theta d\omega > \int_\Omega\int_\Theta U(d_1,\theta,\omega)p(\theta,\omega|z)d\theta d\omega$$

o equivalentemente, siempre y cuando

$$\int_\Omega\int_\Theta \{U(d_2,\theta,\omega)-U(d_1,\theta,\omega)\}p(\theta,\omega|z)\theta d\omega > 0 \qquad (3.1.2)$$

Por lo tanto, en este caso basta especificar la diferencia de las utilidades. Por el principio de verosimilitud, parece razonable suponer que la ventaja relativa de elegir d_2 sólo dependerá de la discrepancia entre la verdadera función de verosimilitud y aquella especificada por la hipótesis ($p(z|\theta,\omega)$ y $p(z|\theta_0,\omega)$ respectivamente), ya que si ambas verosimilitudes son iguales entonces las inferencias que se hagan usando $p(z|\theta_0,\omega)$ serán las mismas que se harían al utilizar $p(z|\theta,\omega)$.

Dicha ventaja deberá aumentar conforme crezca la discrepancia entre $p(z|\theta,\omega)$ y $p(z|\theta_0,\omega)$. En vista de esto, si se denota por $\delta(\theta,\omega|\theta_0)$ a la medida de la discrepancia entre $p(z|\theta,\omega)$ y $p(z|\theta_0,\omega)$, se puede considerar a la diferencia $\{U(d_2,\theta,\omega)-U(d_1,\theta,\omega)\}$ como una función no decreciente de $\delta(\theta,\omega|\theta_0)$. En particular, se supondrá entonces que

$$U(d_2,\theta,\omega)-U(d_1,\theta,\omega) = A\,\delta(\theta,\omega|\theta_0)+B \qquad (3.1.3)$$

donde $A \in \mathbb{R}^+$ y $B \in \mathbb{R}$ son arbitrarios.

Cualquiera que sea $\delta(\theta,\omega|\theta_0)$, (3.1.2) y (3.1.3) implican que la decisión óptima sera d_2 si y sólo si

$$A \cdot E[\delta|\theta_0,z]+B>0 \tag{3.1.4}$$

donde

$$E[\delta|\theta_0,z]=E[\delta(\theta,\omega|\theta_0)]=\int_\Omega\int_\Theta \delta(\theta,\omega|\theta_0)p(\theta,\omega|z)d\theta d\omega. \tag{3.1.5}$$

Claramente no hay discrepancia alguna entre $p(z|\theta_0,\omega)$ y sí misma, por lo que puede tomarse $\delta(\theta_0,\omega|\theta_0)=0$. De esta forma, $\delta^*=-B/A$ se puede considerar como una medida, en términos de utilidad, de la ventaja relativa de usar $p(z|\theta_0,\omega)$ cuando es cierta.

De la expresión (3.1.4), por lo tanto, se sigue que d_2 será la mejor decisión si y sólo si

$$E[\delta|\theta_0,z]>\delta^*. \tag{3.1.6}$$

Las propiedades del procedimiento descrito dependen de la elección de $\delta(\theta,\omega|\theta_0)$ y δ^*, sobre lo cual se comenta en la sección siguiente.

3.2. Solución Particular

3.2.1. Divergencia Logarítmica de Kullback-Leibler

La función $\delta(\theta,\omega|\theta_0)$ debe medir la discrepancia, en términos de utilidad, entre las funciones de verosimilitud dadas por $p(z|\theta,\omega)$ y $p(z|\theta_0,\omega)$. Una medida adecuada de dicha discrepancia es la divergencia logarítmica de Kullback-Leibler (Kullback & Leibler, 1951; Kullback, 1959), ya que mide la cantidad de información que puede esperarse perder si se usa $p(z|\theta_0,\omega)$ en lugar de $p(z|\theta,\omega)$. Por otra parte, bajo ciertas condiciones (Bernardo, 1979a) esta medida constituye la función de utilidad en el problema de inferencia, visto como un problema de decisión. Dicha medida se define como

$$\delta(\theta,\omega|\theta_0) = \int p(z|\theta,\omega)\cdot\log\left(\frac{p(z|\theta,\omega)}{p(z|\theta_0,\omega)}\right)dz. \tag{3.2.1.1}$$

Obsérvese que la discrepancia así definida no es simétrica, por lo que no constituye una distancia en el espacio funcional de las distribuciones de z.

3.2.2. Elección de δ^*.

Como se mencionó anteriormente, δ^* puede considerarse como una medida del incremento en la utilidad al utilizar, siendo cierto, el modelo $p(z|\theta_0,\omega)$. Como parte de la asignación de la función de utilidad δ^* es una constante elegida subjetivamente, aunque una elección en particular es de especial interés.

Sea $d(z,\theta_0)=E[\delta|\theta_0,z]$, denotada simplemente por d, y sea $p(d|\theta_0,\omega)$ la distribución muestral de d cuando $\theta=\theta_0$ (la cual dependerá, en general, del parámetro de ruido ω). Como la distribución final marginal de ω está dada por

Dado que

$$p(\omega|z)=\int_{\Theta} p(\theta,\omega|z)\,d\theta$$

entonces

$$p(d|\theta_0)=\int_{\Omega} p(d|\theta_0,\omega)\,p(\omega|z)\,d\omega. \tag{3.2.2.1}$$

Ahora, sea δ^* el cuantil de orden $(1-\alpha)$ de la distribución $p(d|\theta_0)$, que se denotará por $d_{1-\alpha}$. De acuerdo a la expresión (3.1.6), maximizar la utilidad esperada final define la siguiente regla:

Rechazar la hipótesis $H:\theta=\theta_0$ si y sólo si $d>d_{1-\alpha}$.

De esta manera, se satisface que

P[Rechazar H|H es verdadera]=$1-\alpha$.

Dado que la elección de δ^* es subjetiva, el decisor debe juzgar en cada caso si la especificación de la función de utilidad dada por $\delta^*=d_{1-\alpha}$ corresponde o no a sus preferencias personales.

En el capítulo siguiente se presentan algunas aplicaciones de este procedimiento a algunas de las familias de distribuciones mas comunes.

4

APLICACIONES

APLICACIONES

En este capítulo se dan algunas aplicaciones del procedimiento descrito en el capítulo anterior. Aunque todas las distribuciones que se presentan pertenecen a la familia exponencial, es claro que dicho procedimiento puede aplicarse a cualquier familia paramétrica de distribuciones de probabilidad.

4.1. Distribución Binomial

Sea X una variable aleatoria con distribución de Bernoulli. Entonces su función de probabilidad está dada por

$$p(x|\theta)=\theta^{x}(1-\theta)^{1-x}\ ;\quad x=0,1\ ;\ \theta\epsilon(0,1). \tag{4.1.1}$$

Si se considera una muestra aleatoria $z=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ de dicha variable, entonces $r=\sum_{i=1}^{n}x_i$ sigue una distribución binomial con parámetro θ, cuya función de probabilidad es

$$p(r|\theta)=\binom{n}{r}\ \theta^{r}(1-\theta)^{n-r}\ ;\ r=0,1,2,\ldots,n \tag{4.1.2}$$

Dado $\theta_0\epsilon(0,1)$ fijo y conocido, es de interés contrastar la hipótesis $H{:}\theta=\theta_0$. Denótese por $p(z|\theta)$ a la función de verosimilitud. Entonces

$$p(z|\theta)\propto\prod_{i=1}^{n}p(x_i|\theta)=\theta^{r}(1-\theta)^{n-r}. \tag{4.1.3}$$

Usando la proposición A1 (apéndice A), la función de discrepancia en este caso es

$$\delta(\theta|\theta_0)=n\sum_{x=0}^{1}\ p(x|\theta)\cdot\log\left(\frac{\theta^{x}(1-\theta)^{1-x}}{\theta_0^{x}(1-\theta_0)^{1-x}}\right)$$

$$= n\left\{\log\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)\sum_{x=0}^{1} x\, p(x|\theta) + \log\left(\frac{1-\theta}{1-\theta_0}\right)\sum_{x=0}^{1}(1-x)p(x|\theta)\right\}$$

$$= n\left\{\log\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right) E[x|\theta] + \log\left(\frac{1-\theta}{1-\theta_0}\right) E[1-x|\theta]\right\}$$

por lo que, finalmente

$$\delta(\theta|\theta_0) = n\left\{\theta\log\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right) + (1-\theta)\log\left(\frac{1-\theta}{1-\theta_0}\right)\right\} \tag{4.1.4}$$

Para poder calcular $d=E[\delta|\theta_0,z]$, es necesario especificar una distribución inicial sobre θ. Si no se desea expresar algún conocimiento inicial sobre dicho parámetro, puede usarse la distribución inicial de referencia (Bernardo, 1979b), la cual maximiza la cantidad de información contenida en z. Es posible demostrar que para este caso la distribución inicial de referencia para θ es

$$\Pi(\theta) \propto \theta^{-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.1.5}$$

Por el Teorema de Bayes, la distribución final de θ es la distribución Beta con parámetros $r+\frac{1}{2}$ y $n-r+\frac{1}{2}$, es decir

$$\Pi(\theta|z) = Be(\theta|r+\tfrac{1}{2}, n-r+\tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r+\frac{1}{2})\Gamma(n-r+\frac{1}{2})}\,\theta^{r-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{n-r-\frac{1}{2}} \tag{4.1.6}$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma (Abramowitz & Stegun, 1965).

En vista de esto

$$d = n\int_0^1 \left\{\theta\log\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)+(1-\theta)\log\left(\frac{1-\theta}{1-\theta_0}\right)\right\} Be(\theta \mid r+\tfrac{1}{2}, n-r+\tfrac{1}{2})\,d\theta$$

$$= n\{E[\theta\log\theta]-E[\theta]\log\theta_0+E[(1-\theta)\log(1-\theta)]-E[1-\theta]\log(1-\theta_0)\}.$$

Ahora, por la proposición A2 (apéndice A), se tiene que

$$d = n\left\{\frac{r+\frac{1}{2}}{n+1}\left[\Psi(r+\tfrac{3}{2})-\Psi(n+2)\right]-\frac{r+\frac{1}{2}}{n+1}\log\theta_0\right.$$

$$\left.+\frac{n-r+\frac{1}{2}}{n+1}\left[\Psi(n-r+\tfrac{3}{2})-\Psi(n+2)\right]-\frac{n-r+\frac{1}{2}}{n+1}\log(1-\theta_0)\right\}$$

donde $\Psi(\cdot)$ es la función digamma (Abramowitz & Stegun, 1965).

Finalmente

$$d = \frac{n}{n+1}\left\{(r+\tfrac{1}{2})\left[\Psi(r+\tfrac{3}{2})-\log\theta_0\right]+(n-r+\tfrac{1}{2})\left[\Psi(n-r+\tfrac{3}{2})-\log(1-\theta_0)\right]\right.$$

$$\left.-(n+1)\Psi(n+2)\right\}. \qquad (4.1.7)$$

Entonces la decisión óptima será rechazar $H:\theta=\theta_0$ si y sólo si $d>d_{1-\alpha}$, donde $d_{1-\alpha}$ denota el cuantil de orden $(1-\alpha)$ de la distribución de d. Obsérvese que si H es verdadera r sigue una distribución binomial con parámetro θ_0.

La distribución de d se obtiene directamente a partir de la distribución de r, de la siguiente manera: dado que r es una variable aleatoria discreta que toma los valores $r_0=0, r_1=1, \ldots, r_n=n$ con probabilidades $p(r_0 \mid \theta_0), p(r_1 \mid \theta), \ldots, p(r_n \mid \theta_0)$ (dadas por (4.1.2.1)), entonces los posibles valores de la estadística $d=d(r)$ se determinan sustituyendo los valores sucesivos de r en d(·). Puede ocurrir que valores distintos de r lleven al mismo valor de d, por lo que la probabilidad de que d tome un valor dado d_j es

$$p(d_j|\theta_o)=\sum_{i\in I} p(r_i|\theta_o) \tag{4.1.8}$$

donde $I=\{i: d(r_i)=d_j\}$. En base a (4.1.8) se puede construir fácilmente la distribución de d. Véase la tabla B1 del apéndice B, donde se presentan los cuantiles de dicha distribución para algunos valores de θ_0 y n.

4.2. Distribución de Poisson

Considérese a una variable aleatoria discreta X, con función de probabilidad

$$p(x|\theta)=\frac{\theta^{x}e^{-\theta}}{x!}\ ; \quad x=0,1,2,\ldots, ; \quad \theta\in\mathbb{R}^{+}. \tag{4.2.1}$$

Se dice entonces que X sigue una distribución de Poisson con parámetro θ. Si $z=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ es una muestra aleatoria de X, la función de verosimilitud está dada por

$$p(z|\ \theta)\propto\prod_{i=1}^{n}p(x_i|\theta)=\frac{\theta^{r}\,e^{-n\theta}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!} \tag{4.2.2}$$

donde $r=\sum_{i=1}^{n}x_i$. Para contrastar la hipótesis $H{:}\theta=\theta_0$, con $\theta_0\in\mathbb{R}^{+}$ fijo y conocido, es necesario calcular la función de discrepancia $\delta(\theta|\theta_0)$. De acuerdo a la proposición A1 (apéndice A)

$$\delta(\theta|\ \theta_0)=n\sum_{x=0}^{\infty}p(x|\theta)\log\left(\frac{\theta^{x}e^{-\theta}}{\theta_0^{x}e^{-\theta_0}}\right)$$

$$=n\left\{\log\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)\sum_{x=0}^{\infty}x\,p(x|\theta)-(\theta-\theta_0)\sum_{x=0}^{\infty}p(x|\theta)\right\}$$

$$=n\left\{\log\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)E[x|\theta]-(\theta-\theta_0)\right\}$$

de donde

$$\delta(\theta|\theta_0)=n\left\{\theta\log\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)-\theta+\theta_0\right\} \tag{4.2.3}$$

La distribución inicial de referencia correspondiente es

$$\Pi(\theta)\propto\theta^{-\frac{1}{2}} \tag{4.2.4}$$

lo que implica que la distribución final de θ es la distribución Gamma con parámetros $r+\frac{1}{2}$ y n, o sea

$$\Pi(\theta|z)=\mathrm{Ga}(\theta|\,r+\tfrac{1}{2},n)=\frac{n^{r+\frac{1}{2}}}{\Gamma(r+\frac{1}{2})}\,\theta^{r-\frac{1}{2}}\,e^{-n\theta}. \tag{4.2.5}$$

Ahora

$$d=E[\delta|\,\theta_0,z]=n\int_0^{\infty}\left\{\theta\log\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)-\theta+\theta_0\right\}\mathrm{Ga}(\theta|\,r+\tfrac{1}{2},n)\,d\theta$$

$$=n\left\{E[\theta\log\theta]-E[\theta]\log\theta_0-E[\theta]+\theta_0\right.$$

Recurriendo a la proposición A3 (apéndice A), se sigue que

$$d=n\left\{\frac{r+\frac{1}{2}}{n}\left[\Psi(r+\tfrac{3}{2})-\log n\right]-\frac{r+\frac{1}{2}}{n}\log\theta_0-\frac{r+\frac{1}{2}}{n}+\theta_0\right\}$$

y por lo tanto

$$d=(r+\tfrac{1}{2})\{\Psi(r+\tfrac{3}{2})-\log(n\theta_0)-1\}+n\theta_0. \tag{4.2.6}$$

Suponiendo que la hipótesis H es cierta, r tiene una distribución de Poisson con parámetro $n\theta_0$, es decir, la función de probabilidad de la variable r es

$$p(r|\theta_0)=\frac{(n\theta_0)^r\,e^{-n\theta_0}}{r!}\ . \tag{4.2.7}$$

Como antes, la mejor decisión consiste en rechazar $H:\theta=\theta_0$ siempre y cuando $d>d_{1-\alpha}$, donde $d_{1-\alpha}$ es el cuantil de orden $(1-\alpha)$ de la distribución de d.

Debe notarse que tanto $d=d(r)$ como la distribución de r dependen de θ_0 y n sólo a traves del producto $n\theta_0$, por lo que la distribución de d será la misma en todos los casos en los que $n\theta_0$ tome el mismo valor.

De manera análoga al caso binomial, la distribución de d se obtuvo directamente de la distribución de r, pues r es una variable aleatoria discreta cuyos valores $r_0=0, r_1=1, r_2=2, \ldots$ se toman con probabilidades $p(r_0|\theta_0)$, $p(r_1|\theta_0)$, $p(r_2|\theta_0), \ldots$ (dadas por (4.2.7)). Entonces los posibles valores de d se obtienen al sustituir los valores sucesivos de r en $d(\cdot)$. Así, la probabilidad de que d tome el valor d_j es

$$p(d_j|\theta_0) = \sum_{i\in I} p(r_i|\theta_0) \tag{4.2.8}$$

donde $I=\{i:d(r_i)=d_j\}$. Esto se debe a la posibilidad de que distintos valores de r lleven al mismo valor de d.

La distribución de d puede construirse de manera sencilla a partir de (4.2.8). En la tabla B2 (apéndice B) pueden hallarse algunos cuantiles de esta distribución para valores seleccionados de $n\theta_0$ y α.

4.3. Distribución Exponencial.

Una variable aleatoria continua X tiene distribución exponencial si su función de densidad es

$$p(x|\theta)=\theta e^{-\theta x} \quad ; \quad x\in\mathbb{R}^{+},\ \theta\in\mathbb{R}^{+}. \tag{4.3.1}$$

Por lo tanto, la función de verosimilitud toma la forma

$$p(z|\theta)\propto\prod_{i=1}^{n}p(x_i|\theta)=\theta^{n}e^{-\theta r} \tag{4.3.2}$$

donde $z=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ denota a una muestra aleatoria de X y $r=\sum_{i=1}^{n}x_i$. Si se desea contrastar la hipótesis $H:\theta=\theta_0$, para algún $\theta_0\in\mathbb{R}^{+}$ fijo y conocido, primero debe hallarse la función de discrepancia dada, de acuerdo a la proposición A1 (apéndice A), por

$$\delta(\theta|\theta_0)=n\int_0^{\infty}p(x|\theta)\log\left(\frac{\theta\ e^{-\theta x}}{\theta_0 e^{-\theta_0 x}}\right)dx$$

$$=\left\{\log\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)\int_0^{\infty}p(x|\theta)\,dx+(\theta_0-\theta)\int_0^{\infty}x\,p(x|\theta)\,dx\right\}$$

$$=n\left\{\log\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)+(\theta_0-\theta)\,E[x|\theta]\right\}.$$

De aquí que

$$\delta(\theta|\theta_0)=n\left\{\log\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)+\frac{\theta_0}{\theta}-1\right\} \tag{4.3.3}$$

Es posible demostrar que la distribución de referencia para θ en estas condiciones es

$$\Pi(\theta) \propto \theta^{-1} \tag{4.3.4}$$

de donde la distribución final de θ está dada por

$$\Pi(\theta|z) = Ga(\theta|n,r) = \frac{r^n}{\Gamma(n)}\,\theta^{n-1}e^{-\theta r} \tag{4.3.5}$$

Por lo tanto, si $d = E[\delta|\,\theta_0, z]$

$$d = n\int_0^{\infty}\left\{\log\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right) + \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right) - 1\right\} Ga(\theta|\,n,r)\,d\theta$$

$$= n\left\{E[\log\theta] - \log\theta_0 + \theta_0 E\left[\frac{1}{\theta}\right] - 1\right\}.$$

de donde, por las proposiciones A4 y A5 (apéndice A)

$$d = n\left\{[\Psi(n) - \log r] - \log\theta_0 + \theta_0\left(\frac{r}{n-1}\right) - 1\right\}$$

y finalmente

$$d = n\left\{\Psi(n) - \log(r\theta_0) + \frac{r\theta_0}{n-1} - 1\right\}. \tag{4.3.6}$$

La decisión óptima es entonces rechazar la hipótesis $H{:}\theta=\theta_0$ si y sólo si $d > d_{1-\alpha}$, donde $d_{1-\alpha}$ es el cuantil de orden $(1-\alpha)$ de la distribución de d.

Si $\theta=\theta_0$ entonces $r \sim Ga(r|n,\theta_0)$, por lo que si se define

$$t = 2\theta_0 r \tag{4.3.7}$$

puede demostrarse fácilmente que $t \sim \chi^2(t|2n)$. En vista de esto, puede escribirse a d en términos de t, de la siguiente manera

$$d=d(t)=n\left\{\Psi(n)-\log(t/2)+\frac{t}{2(n-1)}-1\right\} \tag{4.3.8}$$

Obsérvese que (4.3.7) y (4.3.8) implican que d es una transformación continua de una variable aleatoria con distribución $\chi^2(2n)$. Dada la dificultad para invertir analíticamente la función $d=d(t)$, no es posible hallar la forma explícita de la distribución de d. Como consecuencia, debe considerarse lo siguiente:

a) $d=d(t)$, como función de t, es cóncava y continua.

b) $d=d(t)$ toma su valor mínimo en $t_0=2(n-1)$ y $d_0=d(t_0)= n\{\Psi(n)-\log(n-1)\}$.

Por lo tanto, es claro que

$$P[d\leqslant d_0]=0. \tag{4.3.9}$$

Por otra parte, como d(t) es cóncava y continua, para toda $d_1>d_0$ existen $t_{11}<t_0$ y $t_{12}>t_0$ tales que $d(t_{11})=d(t_{12})=d_1$, por lo que

$$P[d\leqslant d_1]= P[t_{11}\leqslant t\leqslant t_{12}] \tag{4.3.10}$$

De esta forma, dado un valor d_1 de d, los valores correspondientes de t_{11} y t_{12} pueden hallarse numéricamente, con lo cual el problema se reduce a calcular la probabilidad de que el valor de una variable aleatoria con distribución $\chi^2(2n)$ se encuentre en el intervalo $[t_{11},t_{12}]$.

En la tabla B3 (apéndice B) se presentan los cuantiles de la distribución de d para algunos valores seleccionados de n y α.

4.4. Distribución Normal.

La distribución normal juega un papel muy importante en la teoría estadística, por lo que en esta sección se analizan todas las posibles situaciones que pueden llegar a presentarse al querer contrastar hipótesis de la forma $H:\theta=\theta_0$ sobre los parámetros de esta distribución.

Se dice que una variable aleatoria continua X sigue una distribución normal con media μ y varianza σ^2 si la función de densidad de X esta dada por

$$p(x|\mu,\sigma^2)=N(x|\mu,\sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}\,exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\} \tag{4.4.1}$$

donde $x\in\mathbb{R}$, $\mu\in\mathbb{R}$ y $\sigma^2\in\mathbb{R}^+$. Considérese ahora una muestra aleatoria $z=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ de la variable X. En estos términos, la función de verosimilitud es

$$p(z|\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n} N(x_i|\mu,\sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}\,exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\} \tag{4.4.2}$$

4.4.1. Contraste de la Hipótesis $H:\mu=\mu_0$ Cuando σ es Conocida

Sea $\mu_0\in\mathbb{R}$ fijo y conocido y supóngase que se desea contrastar la hipótesis $H:\mu=\mu_0$ en base a z. Supóngase también que de alguna manera la varianza de la distribución es conocida. Entonces, por la proposición A1 (apéndice A)

$$\delta(\mu|\mu_0)=n\int_{-\infty}^{\infty}N(x|\mu,\sigma^2)\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-\mu)^2-(x-\mu_0)^2]\right\}dx.$$

$$=\frac{n}{\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}N(x\mid\mu,\sigma^2)\left\{x(\mu-\mu_0)-\tfrac{1}{2}(\mu^2-\mu_0^2)\right\}dx$$

$$=\frac{n}{\sigma^2}\left\{E[x\mid\mu](\mu-\mu_0)-\tfrac{1}{2}(\mu^2-\mu_0^2)\right\}$$

$$=\frac{n}{\sigma^2}\left\{\mu(\mu-\mu_0)-\tfrac{1}{2}(\mu^2-\mu_0^2)\right\}$$

y por lo tanto

$$\delta(\mu\mid\mu_0)=\frac{n}{2}\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\right)^2 \quad . \qquad (4.4.1.1)$$

La distribución inicial de referencia que corresponde a μ en esta situación es

$$\Pi(\mu)\propto 1 \qquad (4.4.1.2)$$

de donde, por el Teorema de Bayes

$$\Pi(\mu|z)=N(\mu|\overline{x},\sigma^2/n)=\left(\frac{2\pi\sigma^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\mu-\overline{x})^2\right\} \qquad (4.4.1.3)$$

donde $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$. Entonces

$$d=E[\delta\mid\mu_0,z]=\frac{n}{2\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}(\mu-\mu_0)^2N(\mu|\overline{x},\sigma^2/n)d\mu$$

$$=\frac{n}{2\sigma^2}\left\{E[\mu^2]-2\mu_0E[\mu]+\mu_0^2\right\}$$

Como $E[\mu^2]=\sigma^2/n+\overline{x}^2$, se sigue que

$$d=\frac{n}{2\sigma^2}\left\{\sigma^2/n+\overline{x}^2-2\mu_0\overline{x}+\mu_0^2\right\}$$

y finalmente

$$d=\tfrac{1}{2}+\tfrac{n}{2}\left(\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma}\right)^2 \tag{4.4.1.4}$$

Por lo tanto, debe rechazarse la hipótesis $H:\mu=\mu_0$ siempre y cuando $d>d_{1-\alpha}$, donde $d_{1-\alpha}$ es cuantil de orden $(1-\alpha)$ de la distribución de d. Como puede observarse, dicha distribución es

$$p(d)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\chi^2(\cdot\mid 1)$$

ya que si H es cierta, entonces $\overline{x}\sim N(\overline{x}\mid \mu_0,\sigma^2/n)$, lo cual implica que

$$t=n\left(\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(t\mid 1).$$

Claramente esta solución es equivalente a la solución clásica correspondiente, pues d es una función uno a uno del cociente de verosimilitudes generalizadas, dado en este caso por

$$\Lambda=exp\left\{-\frac{n}{2}\left(\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma}\right)^2\right\}\ .$$

4.4.2. Constraste de la Hipótesis $H:\mu=\mu_0$ Cuando σ es Desconocida.

Si el valor desconocido de σ no es de interés, considerándose por lo tanto como un parámetro de ruido, la función de discrepancia toma la siguiente forma

$$\delta(\mu,\sigma\mid\mu_0)=n\int_{-\infty}^{\infty}N(x\mid\mu,\sigma^2)\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-\mu)^2-(x-\mu_0)^2]\right\}dx.$$

Como puede observarse, esta expresión para la discrepancia es la misma que en el caso anterior, por lo que

$$\delta(\mu,\sigma\,|\,\mu_0)=\frac{n}{2}\left(\frac{\mu-\mu_0^2}{\sigma}\right)^2. \tag{4.4.2.1}$$

Dado que σ es desconocida, es necesario tomar en cuenta a la distribución conjunta inicial de referencia para μ y σ. Se puede demostrar que dicha distribución está dada por

$$\Pi(\mu,\sigma)\propto\sigma^{-1} \tag{4.4.2.2}$$

lo cual implica que

$$\Pi(\mu,\sigma\,|z)\propto N(\mu\,|\,\overline{x},\sigma^2/n)\,p(\sigma\,|z) \tag{4.4.2.3}$$

donde

$$p(\sigma\,|z)\propto\sigma^{-n}\,exp\left\{-\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\right\}$$

con

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

Entonces

$$d=E[\delta\,|\mu_0,z]=\frac{n}{2}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\right)^2 N(\mu|\overline{x},\sigma^2/n)\,p(\sigma\,|z)\,d\mu d\sigma$$

$$=\frac{n}{2}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sigma^2}\left\{E[\mu^2\,|\,\sigma]-2\mu_0E[\mu\,|\,\sigma]+\mu_0^2\right\}p(\sigma|z)\,d\sigma$$

$$= \frac{n}{2}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sigma^2}\left\{\sigma^2/n+\overline{x}^2-2\mu_0\,\overline{x}+\mu_0^2\right\}p(\sigma\,|\,z)d\sigma$$

$$= \frac{n}{2}\int_0^{\infty}\left\{\frac{1}{n}+\frac{(\overline{x}-\mu_0)^2}{\sigma^2}\right\}p(\sigma\,|\,z)d\sigma$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{n}{2}(\overline{x}-\mu_0)^2E\left[\frac{1}{\sigma^2}\right].$$

Puede verificarse que $E\left[\frac{1}{\sigma^2}\right]=\frac{1}{s^2}$. Debido a ésto

$$d=\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\left(\frac{\overline{x}-\mu_0}{s}\right)^2 \qquad (4.4.2.4)$$

Así, la mejor decisión es rechazar $H:\mu=\mu_0$ si y sólo si $d>d_{1-\alpha}$, donde $d_{1-\alpha}$ denota el cuantil de orden $(1-\alpha)$ de la distribución de d. Como puede observarse, dicha distribución está dada por

$$p(d)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}F(\cdot\,|\,1,n-1)$$

pues $\overline{x}\sim N(\overline{x}\,|\,\mu_0,\sigma^2/n)$ si H es cierta y, por lo tanto

$$t=n\left(\frac{\overline{x}-\mu_0}{s}\right)^2\sim F(t\,|\,1,n-1)$$

Una vez más la solución obtenida a partir de este procedimiento coincide con la solución clásica respectiva, ya que d es una función uno a uno del cociente de verosimilitudes generalizadas, o sea

$$\Lambda=\left[1+\frac{n}{n-1}\left(\frac{\overline{x}-\mu_0}{s}\right)^2\right]^{-n/2}.$$

4.4.3. Contraste de la Hipótesis $H:\sigma^2=\sigma_0^2$ Cuando μ es Conocida

Sean $\mu\in\mathbb{R}$ y $\sigma_0^2\in\mathbb{R}^+$ fijos y conocidos. Al contrastar la hipótesis $H:\sigma^2=\sigma_0^2$ se presentan algunas dificultades técnicas para especificar la distribución final de σ^2, por lo que se recurrirá a la siguiente reparametrización:

Sea $h=\frac{1}{\sigma^2}$ (en este caso h es la precisión de la variable aleatoria Normal X). Si $h_0=\frac{1}{\sigma_0{}^2}$, entonces las hipótesis $H:\sigma^2=\sigma_0^2$ y $H':h=h_0$ son equivalentes. La expresión (4.4.1) puede escribirse en términos de la precisión h, de la siguiente manera

$$p(x|\mu,h)=N(x|\mu,h)=\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} exp\left\{-\frac{h}{2}(x-\mu)^2\right\} \tag{4.4.3.1}$$

donde $x\in\mathbb{R}$, $\mu\in\mathbb{R}$ y $h\in\mathbb{R}^+$. Consecuentemente, la función de verosimilitud dada por (4.4.2) se puede expresar como

$$p(z|\mu,h)\propto\prod_{i=1}^{n}N(x_i|\mu,h)=\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{n/2} exp\left\{-\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\} \tag{4.4.3.2}$$

donde, como es usual, $z=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ denota una muestra aleatoria de la variable X.

Esta reparametrización se usará también en las secciones siguientes, debido a que se presentan problemas análogos a los de este caso.

De acuerdo a la proposición A1 (apéndice A), la función de discrepancia se calcula como

$$\delta(h|h_0)=n\int_{-\infty}^{\infty}N(x|\mu,h)\left\{\tfrac{1}{2}\log h-\tfrac{h}{2}(x-\mu)^2-\tfrac{1}{2}\log h_0+\tfrac{h_0}{2}(x-\mu)^2\right\}dx$$

$$=\frac{n}{2}\int_{-\infty}^{\infty} N(x\mid\mu,h)\left\{\log\left(\frac{h}{h_0}\right)-(h-h_0)(x-\mu)^2\right\}dx$$

$$=\frac{n}{2}\left\{\log\left(\frac{h}{h_0}\right)-(h-h_0)E[(x-\mu)^2\mid h]\right\}$$

$$=\frac{n}{2}\left\{\log\left(\frac{h}{h_0}\right)-\frac{1}{h}(h-h_0)\right\}$$

de donde

$$\delta(h\mid h_0)=\frac{n}{2}\left\{\log\left(\frac{h}{h_0}\right)+\frac{h_0}{h}-1\right\}$$

En este punto es necesario especificar la distribución inicial para h. Usando la distribución inicial de referencia

$$\Pi(h)\alpha\, h^{-1} \tag{4.4.3.3}$$

se sigue que

$$\Pi(h\mid z)=Ga\left(h\mid \frac{n}{2},\frac{ns_0^2}{2}\right) \tag{4.4.3.4}$$

donde $s_0^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$.

De esta forma

$$\delta = E[\delta\mid h_0,z]=\frac{n}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\log\left(\frac{h}{h_0}\right)+\frac{h_0}{h}-1\right\}Ga\left(h\mid\frac{n}{2},\frac{ns_0^2}{2}\right)dh \tag{4.4.3.5}$$

$$=\frac{n}{2}\left\{E[\log h]-\log h_0+h_0E\left[\frac{1}{h}\right]-1\right\}$$

$$=\frac{n}{2}\int_{-\infty}^{\infty} N(x\mid\mu,h)\left\{\log\left(\frac{h}{h_0}\right)-(h-h_0)(x-\mu)^2\right\}dx$$

$$=\frac{n}{2}\left\{\log\left(\frac{h}{h_0}\right)-(h-h_0)E[(x-\mu)^2\mid h]\right\}$$

$$=\frac{n}{2}\left\{\log\left(\frac{h}{h_0}\right)-\frac{1}{h}(h-h_0)\right\}$$

de donde

$$\delta(h\mid h_0)=\frac{n}{2}\left\{\log\left(\frac{h}{h_0}\right)+\frac{h_0}{h}-1\right\} \qquad (4.4.3.3)$$

En este punto es necesario especificar la distribución inicial para h. Usando la distribución inicial de referencia

$$\Pi(h)\alpha h^{-1} \qquad (4.4.3.4)$$

se sigue que

$$\Pi(h|z)=Ga\left(h\mid\frac{n}{2},\frac{ns_0^2}{2}\right) \qquad (4.4.3.5)$$

donde $s_0^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$.

De esta forma

$$d=E[\delta\mid h_0,z]=\frac{n}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\log\left(\frac{h}{h_0}\right)+\frac{h_0}{h}-1\right\}Ga\left(h\mid\frac{n}{2},\frac{ns_0^2}{2}\right)dh$$

$$=\frac{n}{2}\left\{E[\log h]-\log h_0+h_0E[\tfrac{1}{h}]-1\right\}$$

Entonces, por las proposiciones A4 y A5 (apéndice A), se tiene que

$$d=\frac{n}{2}\left\{\left[\Psi\left(\frac{n}{2}\right)-\log\left(\frac{ns_0^2}{2}\right)\right]-\log h_0+h_0\left(\frac{ns_0^2}{2\left(\frac{n}{2}-1\right)}\right)-1\right\}$$

y finalmente

$$d=\frac{n}{2}\left\{\Psi\left(\frac{n}{2}\right)-\log\left(\frac{nh_0^2 s_0^2}{2}\right)+\frac{nh_0 s_0^2}{n-2}-1\right\} \tag{4.4.3.6}$$

Nótese que si la hipótesis $H{:}h=h_0$ es cierta, entonces

$t=nh_0 s_0^2\sim\chi^2(t|\,n)$.

Reescribiendo a d en función de t, se obtiene

$$d=d(t)=\frac{n}{2}\left\{\Psi\left(\frac{n}{2}\right)-\log\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{t}{n-2}-1\right\} \tag{4.4.3.7}$$

Así, la mejor decisión será rechazar $H{:}h=h_0$ siempre cuando $d>d_{1-\alpha}$, donde $d_{1-\alpha}$ es el cuantil de orden $(1-\alpha)$ de la distribución de d. De manera análoga al caso exponencial, para hallar la distribución de d se debe considerar que:

a) $d=d(t)$ es una función cóncava y continua de t.

b) $d=d(t)$ toma su valor mínimo en $t_0=n-2$ y $d_0=d(t_0)=\frac{n}{2}\left\{\Psi\left(\frac{n}{2}\right)-\log\left(\frac{n}{2}-1\right)\right\}$.

En vista de esto

$$P[d\leqslant d_0]=0 \tag{4.4.3.8}$$

Además, como $d(t)$ es cóncava y continua, para toda $d_1>d_0$ existen $t_{11}<t_0$ y $t_{12}>t_0$ tales que $d(t_{11})=d(t_{12})=d_1$, y por lo tanto

$$P[d\leq d_1]=P[t_{11}\leq t\leq t_{12}]. \qquad (4.4.3.9)$$

Así, el problema se reduce ahora a calcular la probabilidad que una variable aleatoria con distribución $\chi^2(n)$ se encuentre en un intervalo deteminado. Al igual que antes, los límites de dicho intervalo pueden calcularse numéricamente para cada valor d_1 de d. Se remite al lector a la tabla B4 (apéndice B), donde se presentan algunos cuantiles de la distribución de d para valores seleccionados de n y α.

4.4.4. Contraste de la Hipótesis $H:\sigma^2=\sigma_0^2$ Cuando μ es Desconocida

Resulta conveniente utilizar la reparametrización definida en la sección 4.4.3, por lo que la función de discrepancia para contrastar la hipótesis $H:h=h_0$ toma la forma

$$\delta(\mu,h\,|\,h_0)=n\int_{-\infty}^{\infty}N(x\,|\,\mu,h)\left\{\tfrac{1}{2}\log h-\tfrac{1}{2}(x-\mu)^2-\tfrac{1}{2}\log h_0+\tfrac{h_0}{2}(x-\mu)^2\right\}dx.$$

Obsérvese que esta función coincide con la discrepancia obtenida en el caso anterior. Entonces

$$\delta(\mu,h\,|\,h_0)=\frac{n}{2}\left\{\log\left(\frac{h}{h_0}\right)+\frac{h_0}{h}-1\right\}. \qquad (4.4.4.1)$$

Como μ es desconocida (debiendo considerarse como un parámetro de ruido), es necesario utilizar la distribución conjunta inicial de referencia para μ y h. Dicha distribución es

$$\Pi(\mu,h)\propto h^{-1} \qquad (4.4.4.2)$$

por lo que

$$\Pi(\mu,h)=N(\mu|\overline{x},nh)\,Ga\left(h|\tfrac{n-1}{2},\tfrac{(n-1)s^2}{2}\right) \tag{4.4.4.3}$$

donde $s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$.

Si $d=E[\delta|h_0,z]$, entonces

$$d=\frac{n}{2}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\left\{\log\left(\frac{h}{h_0}\right)+\frac{h_0}{h}-1\right\}N(\mu|\overline{x},nh)\,Ga\left(h|\tfrac{n-1}{2},\tfrac{(n-1)s^2}{2}\right)d\mu dh$$

$$=\frac{n}{2}\int_0^\infty\left\{\log h-\log h_0+\frac{h_0}{h}-1\right\}Ga\left(h|\tfrac{n-1}{2},\tfrac{(n-1)s^2}{2}\right)dh$$

$$=\frac{n}{2}\left\{E[\log h]-\log h+h_0E[\tfrac{1}{h}]-1\right\}.$$

En base a las proposiciones A4 y A5 (apéndice A), se tiene que

$$d=\frac{n}{2}\left\{\left[\Psi\left(\frac{n-1}{2}\right)-\log\left(\frac{(n-1)s^2}{2}\right)\right]-\log h_0+h_0\left(\frac{(n-1)s^2}{2(\frac{n-3}{2})}\right)-1\right\}$$

y así

$$d=\frac{n}{2}\left\{\Psi\left(\frac{n-1}{2}\right)-\log\left(\frac{(n-1)h_0s^2}{2}\right)+\frac{(n-1)h_0s^2}{\underbrace{2(\frac{n-3}{2})}_{n-3}}-1\right\}. \tag{4.4.4.4}$$

La decisión óptima consiste en rechazar $H{:}h=h_0$ si y sólo si $d>d_{1-\alpha}$, donde $d_{1-\alpha}$ denota el cuantil de orden $(1-\alpha)$ de la distribución de d. Para encontrar esta distribución, obsérvese que si se define

$t=(n-1)h_0s^2$

entonces $t\sim\chi^2(t|n-1)$. Expresando a d en términos de t, se obtiene

$$d=d(t)=\frac{n}{2}\left\{\Psi\left(\frac{n-1}{2}\right)-\log\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{t}{n-3}-1\right\} \qquad (4.4.4.5)$$

Tómese en cuenta que:

a) $d=d(t)$ es una función cóncava y continua de t.

b) $d=d(t)$ es mínima en $t_0=n-3$ y $d_0=d(t_0)=\frac{n}{2}\left\{\Psi\left(\frac{n-1}{2}\right)-\log\frac{n-3}{2}\right\}$.

Por lo tanto

$$P[d\leqslant d_0]=0 \qquad (4.4.4.7)$$

y de los incisos a) y b) se sigue que para todo $d_1>d$ existen $t_{11}<t_0$ y $t_{12}>t_0$ tales que $d(t_{11})=d(t_{12})=d_1$.

Entonces

$$P[d\leqslant d_1]=P[t_{11}\leqslant t\leqslant t_{12}]. \qquad (4.4.4.8)$$

De esta manera, el problema de evaluar la distribución de d se ha reducido nuevamente a calcular probabilidades sobre una variable aleatoria con distribución $\chi^2(n-1)$.

Puede verse la tabla B5 (apéndice B), donde se encuentran los cuantiles de la distribución de d para algunos valores seleccionados de n y α.

4.4.5. Contraste de la Hipótesis $H{:}\mu=\mu_0,\ \sigma^2=\sigma_0^2$

En esta sección se analizará el caso en el que tanto μ como σ^2 son de interés. Para ello, se utilizará nuevamente la reparametrización dada en la sección 4.4.3.

La proposición A1 (apéndice A) indica que la función de discrepancia puede calcularse como

$$\delta(\mu,h\,|\,\mu_0,h_0)=n\int_{-\infty}^{\infty}N(x\,|\,\mu,h)\left\{\tfrac{1}{2}\log h-\tfrac{h}{2}(x-\mu)^2-\tfrac{1}{2}\log h_0+\tfrac{h_0}{2}(x-\mu_0)^2\right\}dx$$

$-h$

$$=\frac{n}{2}\left\{\log\left(\frac{h}{h_0}\right)+h_0E[(x-\mu_0)^2\,|\,\mu,h]\,E[(x-\mu)^2\,|\,\mu,h]\right\}$$

$$=\frac{n}{2}\left\{\log\left(\frac{h}{h_0}\right)+h_0\left(\frac{1}{h}+(\mu-\mu_0)^2\right)-1\right\}$$

por lo que, finalmente

$$\delta(\mu,h\,|\,\mu_0,h_0)=\frac{n}{2}\left\{\log\left(\frac{h}{h_0}\right)+\frac{h_0}{h}+h_0(\mu-\mu_0)^2-1\right\}. \tag{4.4.5.1}$$

Puede demostrarse que la distribución conjunta inicial de referencia para μ y h en este caso es nuevamente

$$\Pi(\mu,h)\propto h^{-1} \tag{4.4.5.2}$$

lo cual implica que

$$\Pi(\mu,h\,|\,z)=N(\mu\,|\,\overline{x},nh)\,Ga\left(h\,\middle|\,\frac{n-1}{2},\frac{(n-1)s^2}{2}\right) \tag{4.4.5.3}$$

donde $s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$.

Como consecuencia

$+h_o$

$$d=E[\delta \mid \mu_0,h_0,z]=\frac{n}{2}\int_0^{\infty}\int_{\infty}^{\infty}\left\{\log\left(\frac{h}{h_0}\right)+\frac{h_0}{h}(\mu-\mu_0)^2-1\right\}N(\mu\mid \overline{x},nh)\,Ga\left(h\mid \frac{n-1}{2},\frac{(n-1)s^2}{2}\right)d\mu\, dh$$

$+h_o$ -1

$$=\frac{n}{2}\int_0^{\infty}\left\{\log\left(\frac{h}{h_0}\right)+\frac{h_0}{h}E\left[(\mu-\mu_0)^2\right]\right\}Ga\left(h\mid \frac{n-1}{2},\frac{(n-1)s^2}{2}\right)dh$$

$+h_o/n$

$$=\frac{n}{2}\int_0^{\infty}\left\{\log\left(\frac{h}{h_0}\right)+h_0\left[\frac{1}{nh}+(\overline{x}-\mu_0)^2\right]-1\right\}Ga\left(h\mid \frac{n-1}{2},\frac{(n-1)s^2}{2}\right)dh$$

$$=\frac{n}{2}\left\{E[\log h]-\log h_0+\left(1+\frac{1}{n}\right)h_0E\left[\frac{1}{h}\right]+h_0(\overline{x}-\mu_0)^2-1\right\}$$

Usando las proposiciones A4 y A5 (apéndice A), se llega a que

$$d=\frac{n}{2}\left\{\left[\Psi\left(\frac{n-1}{2}\right)-\log\left(\frac{(n-1)s^2}{2}\right)\right]-\log h_0+\left(1+\frac{1}{n}\right)h_0\left(\frac{(n-1)s^2}{2\left(\frac{n-3}{2}\right)}\right)+h_0(\overline{x}-\mu_0)^2-1\right\}$$

y finalmente

$$d=\frac{n}{2}\left\{\Psi\left(\frac{n-1}{2}\right)-\log\left(\frac{(n-1)\,h_0s^2}{2}\right)+\frac{(n+1)(n-1)\,h_0s^2}{n(n-3)}+h_0(\overline{x}-\mu_0)^2-1\right\}. \qquad (4.4.5.4)$$

Ahora, sean $t_1=[nh_0(\overline{x}-\mu_0)^2]^{\frac{1}{2}}$ y $t_2=(n-1)h_0s^2$. Entonces es claro que $t_1\sim N(t_1|0,1)$, mientras que $t_2\sim \chi^2(t_2|n-1)$.

Si se expresa a d en términos de t_1 y t_2, entonces

$$d=d(t_1,t_2)=\frac{n}{2}\left\{\Psi\left(\frac{n-1}{2}\right)-\log\left(\frac{t_2}{2}\right)+\frac{(n+1)\,t_2}{n(n-3)}+\frac{t_1^2}{n}-1\right\} \qquad (4.4.5.5)$$

La mejor decisión consiste ahora en rechazar $H:\mu=\mu_0$, $\sigma^2=\sigma_0^2$ si y sólo si $d>d_{1-\alpha}$, donde $d_{1-\alpha}$ es el cuantil de orden $(1-\alpha)$ del distribución d.

Al tratar de determinar esta distribución se encuentran algunos problemas, pues d depende de dos variables en esta ocasión. Sin embargo, tómese en cuenta que

a) $d=d(t_1,t_2)$, como función de t_1 y t_2, es cóncava y continua.

b) $d=d(t_1,t_2)$ toma su valor mínimo en $(t_{10},t_{20})=\left(0,\frac{n(n-3)}{(n+1)}\right)$ y $d_0=d(t_{10},t_{20})=\frac{n}{2}\left\{\Psi\left(\frac{n-1}{2}\right)-\log\left(\frac{n(n-3)}{2(n+1)}\right)\right\}$.

Entonces, se tiene que

$$P[d\leqslant d_0]=0 \tag{4.4.5.6}$$

Ahora, sea $d_1>d_0$ y sea $S\in\mathbb{R}^2$ la región de los valores de (t_1,t_2) tales que $d\leqslant d_1$. Por lo tanto

$$P[d\leqslant d_1]=P[(t_1,t_2)\in S] \tag{4.4.5.7}$$

Como se mencionó anteriormente, $t_1\sim N(t_1|0,1)$ y $t_2\sim\chi^2(t_2|n-1)$, en vista de lo cual la expresión anterior implica que

$$P[d\leqslant d_1]=\iint_S N(t_1|0,1)\,\chi^2(t_2|n-1)\,dt_1dt_2 \tag{4.4.5.8}$$

ya que las variables aleatorias t_1 y t_2 son independientes.

El problema consiste ahora en identificar a la región S, para cada valor $d_1>d_0$ de d. De (4.4.5.5) se sigue que

$$t_1=t_1(t_2)=\left|2d_1-n\left\{\Psi\left(\frac{n-1}{2}\right)-\log\left(\frac{t_2}{2}\right)+\frac{(n+1)t_2}{n(n-3)}-1\right\}\right|^{\frac{1}{2}}. \tag{4.4.5.9}$$

Dada la forma de la superficie generada por $d=d(t_1,t_2)$, se observa que todos los posibles valores de t_2 se encuentran en un intervalo de la forma $[a,b]$, donde a y b son tales que $t_1(a)=t_1(b)=0$ en (4.4.5.9).

En vista de ésto, la región S consta de todos los puntos (t_1,t_2) que satisfacen

$$a\leqslant t_2\leqslant b$$

y

$$-t_1(t_2)\leqslant t_1\leqslant t_1(t_2)$$

de manera que (4.4.5.9) puede reescribirse como

$$P[d\leqslant d_1] = \int_a^b \int_{-t_1(t_2)}^{t_1(t_2)} N(t_1|\,0,1)\,\chi^2(t_2|\,n-1)\,dt_1 dt_2$$

$$= \int_a^b \chi^2(t_2\,|\,n-1)\left\{\int_{-t_1(t_2)}^{t_1(t_2)} N(t_1|\,0,1)dt_1\right\}dt_2. \qquad (4.4.5.10)$$

En cada caso, a y b se pueden evaluar numéricamente, al igual que la integral dada en (4.4.5.10).

En la tabla B6 (apéndice B) se presentan los cuantiles de la distribución de d para algunos valores seleccionados de n y α.

5

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

El procedimiento presentado en la sección 3.2 permite reproducir, hasta cierto punto, los resultados obtenidos a partir de la metodología clásica. La elección δ^* como el cuantil $d_{1-\alpha}$ de la distribución de $d=E[\delta|\theta_0,z]$, constituye la contraparte bayesiana de la elección del nivel de significancia clásico, pero en el contexto bayesiano tiene una interpretación natural como parte de la asignación de la función de utilidad.

Si el decisor considera que la especificación de dicha función en términos de la divergencia logarítmica no corresponde a sus preferencias personales, la solución general descrita en la sección 3.1 le permite hacer uso de cualquier otra medida de discrepancia acorde con dichas preferencias.

En las aplicaciones presentadas a lo largo del capítulo 4 se usan distribuciones iniciales de referencia. Sin embargo, queda abierta la posibilidad de utilizar distribuciones iniciales informativas si se desea incorporar al análisis el conocimiento inicial disponible acerca del parámetro.

En el caso de las distribuciones discretas tratadas en este trabajo (Binomial y Poisson), el criterio bayesiano de decisión es totalmente equivalente al criterio clásico basado en el cociente de verosimilitudes. Lo mismo ocurre al contrastar la hipótesis sobre la media de la distribución Normal, ya sea que se conozca o no la varianza. De hecho, como puede apreciarse en las secciones 4.4.1 y 4.4.2, en el caso de los contrastes sobre la media de la distribución Normal se establece una relación lineal entre la estadística de prueba clásica y simil bayesiano, dado por la esperanza de la discrepancia.

Una situación similar se presenta en todos los casos tratados en este trabajo. Al observar los cuantiles de la distribución asintótica de d para cada caso, se llegó a establecer empíricamente que, para valores de n suficientemente grandes, existe una relación lineal entre d y $\Lambda^*=-2\log\Lambda$ (donde Λ denota el cociente de verosimilitudes usado en el procedimiento clásico).

En todos los casos en los que la hipótesis especifica un solo parámetro, dicha relación toma la forma $d\approx\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Lambda^*$, a diferencia del caso en el cual se tienen dos parámetros de interés, para el que se verifica que $d\approx1+\frac{1}{2}\Lambda^*$.

Sin embargo, lo anterior sólo ha podido demostrarse para el caso de las distribuciones continuas aquí tratadas. En la proposición A6 (apéndice A) se presenta la demostración corrrespondiente para el caso de la distribución Exponencial. La demostración para los casos que surgen a partir de la distribución Normal es totalmente análoga.

De esta manera, la solución clásica puede ser vista como un caso particular del procedimiento bayesiano, siempre y cuando se haga uso de distribuciones iniciales de referencia y se utilice la función de utilidad propuesta en la sección 3.2.

Por otro lado, de acuerdo a los resultados obtenidos, el criterio clásico basado en Λ^* constituye una aproximación asintótica del correspondiente criterio bayesiano.

Mucho queda por hacer en este problema de contraste de hipótesis. En primer lugar, debe demostrarse formalmente que la relación asintotica entre d y Λ^* se cumple también en el caso de las distribuciones Binomial y Poisson. Mas aún, cabe preguntarse si una relación análoga se cumple para cualquier distribución que pertenezca a la familia exponencial. Por otra parte, interesa encontrar condiciones generales bajo las cuales se dé este

Una situación similar se presenta en todos los casos tratados en este trabajo. Al observar los cuantiles de la distribución asintótica de d para cada caso, se llegó a establecer empíricamente que, para valores de n suficientemente grandes, existe una relación lineal entre d y $\Lambda^*=-2\log\Lambda$ (donde Λ denota el cociente de verosimilitudes usado en el procedimiento clásico).

En todos los casos en los que la hipótesis especifica un solo parámetro, dicha relación toma la forma $d\approx\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Lambda^*$, a diferencia del caso en el cual se tienen dos parámetros de interés, para el que se verifica que $d\approx 1+\frac{1}{2}\Lambda^*$.

Sin embargo, lo anterior sólo ha podido demostrarse para el caso de las distribuciones continuas aquí tratadas. En la proposición A6 (apéndice A) se presenta la demostración corrrespondiente para el caso de la distribución Exponencial. La demostración para los casos que surgen a partir de la distribución Normal es totalmente análoga.

De esta manera, la solución clásica puede ser vista como un caso particular del procedimiento bayesiano, siempre y cuando se haga uso de distribuciones iniciales de referencia y se utilice la función de utilidad propuesta en la sección 3.2.

Por otro lado, de acuerdo a los resultados obtenidos, el criterio clásico basado en Λ^* constituye una aproximación asintótica del correspondiente criterio bayesiano.

Mucho queda por hacer en este problema de contraste de hipótesis. En primer lugar, debe demostrarse formalmente que la relación asintotica entre d y Λ^* se cumple también en el caso de las distribuciones Binomial y Poisson. Mas aún, cabe preguntarse si una relación análoga se cumple para cualquier distribución que pertenezca a la familia exponencial. Por otra parte, interesa encontrar condiciones generales bajo las cuales se dé este tipo de relación en el caso más general, es decir, para cualquier distribución de probabilidad.

Vale la pena mencionar que la distribución exacta del cociente de verosimilitudes puede obtenerse númericamente, de manera similar al procedimiento utilizado en este trabajo, en lugar de utilizar la distrubición asintótica de Λ^*.

En vista del uso indiscriminado que puede llegar a hacerse de esta aproximación, es conveniente comparar la velocidad de convergencia de Λ^* en relación a la de d, siendo necesario, además, realizar simulaciones para comparar la potencia de ambos procedimientos.

Finalmente, una extención natural del problema presentado en este trabajo es el caso del contraste de hipótesis en distribuciones multivariadas. Por otro lado, cabe preguntarse si existe un procedimiento general que incluya como caso particular al procedimiento propuesto y que sea aplicable a otro tipo de hipótesis mas generales, como aquellas que surgen en el problema de Bondad de Ajuste.

APENDICES

APENDICE A

PROPOSICIONES

Proposición A1.- Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad $p(x|\theta)$. Sea $z=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una muestra aleatoria de X con distribución conjunta $p(z|\theta)$. Entonces

$$\delta(\theta|\theta_0)=n\int p(x|\theta)\log\left(\frac{p(x|\theta)}{p(x|\theta_0)}\right)dx$$

Demostración:

Por la expresión (3.2.1.1), se tiene que

$$\delta(\theta|\theta_0)=\int p(z|\theta)\log\left(\frac{p(z|\theta)}{p(z|\theta_0)}\right)dz$$

entonces

$$\delta(\theta|\theta_0)=\int\int\cdots\int\left\{\prod_{i=1}^{n}p(x_i|\theta)\right\}\log\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{p(x_i|\theta)}{p(x_i|\theta_0)}\right)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\int\int\cdots\int\left\{\prod_{i=1}^{n}p(x_i|\theta)\right\}\sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{p(x_i|\theta)}{p(x_i|\theta_0)}\right)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\int p(x_i|\theta)\log\left(\frac{p(x_i|\theta)}{p(x_i|\theta_0)}\right)dx_i\right\}$$

$$=n\int p(x|\theta)\log\left(\frac{p(x|\theta)}{p(x|\theta_0)}\right)dx$$

Proposición A2.- Si $\theta \sim Be(\theta|\alpha,\beta)$ entonces

a) $E[\theta\log\theta] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left\{\Psi(\alpha+1)-\Psi(\alpha+\beta+1)\right\}$

b) $E[(1-\theta)\log(1-\theta)] = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\left\{\Psi(\beta+1)-\Psi(\alpha+\beta+1)\right\}$

Demostración:

a) $1=\int_0^1 Be(\theta|\alpha+1,\beta)d\theta = \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}\,\theta^{\alpha}(1-\theta)^{\beta-1}d\theta$

lo que implica que

$$\int_0^1 \theta^{\alpha}(1-\theta)^{\beta-1}d\theta = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \tag{A2.1}$$

de donde

$$\log\left\{\int_0^1 \theta^{\alpha}(1-\theta)^{\beta-1}d\theta\right\} = \log\Gamma(\alpha+1)+\log\Gamma(\beta)-\log\Gamma(\alpha+\beta+1).$$

Derivando con respecto a α, se tiene que

$$\frac{\int_0^1 \theta^{\alpha}\log\theta(1-\theta)^{\beta-1}d\theta}{\int_0^1 \theta^{\alpha}(1-\theta)^{\beta-1}d\theta} = \frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\Gamma'(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

$$= \Psi(\alpha+1)-\Psi(\alpha+\beta+1)$$

De (A2.1) se sigue que

$$\int_0^1 (\theta\log\theta)\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}d\theta = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\left\{\Psi(\alpha+1)-\Psi(\alpha+\beta+1)\right\}$$

y entonces

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^1(\theta\log\theta)\,Be(\theta|\alpha_1,\beta)d\theta=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\left\{\Psi(\alpha+1)-\Psi(\alpha+\beta+1)\right\}$$

Finalmente ,

$$E[\theta\log\theta]=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left\{\Psi(\alpha+1)-\Psi(\alpha+\beta+1)\right\}$$

ya que $\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)$.

b) Es claro que si $\theta\sim Be(\theta|\alpha,\beta)$, entonces $(1-\theta)\sim Be(1-\theta|\beta,\alpha)$. Del inciso anterior se obtiene directamente que

$$E[(1-\theta)\log(1-\theta)]=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\left\{\Psi(\beta+1)-\Psi(\alpha+\beta+1)\right\}$$

Proposición A3.- Si $\theta\sim Ga(\theta|\alpha,\beta)$ entonces

$$E[\theta\log\theta]=\frac{\alpha}{\beta}\left\{\Psi(\alpha+1)-\log\beta)\right\}.$$

Demostración:

$$1=\int_0^\infty Ga(\theta|\alpha+1,\beta)=\int_0^\infty\frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\theta^\alpha e^{-\beta\theta}\,d\theta$$

entonces

$$\int_0^\infty\theta^\alpha e^{-\beta\theta}\,d\theta=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}} \qquad \text{(A3.1)}$$

de donde

$$\log\left\{\int_0^{\infty}\theta^{\alpha}\, e^{-\beta\theta}\, d\theta\right\}=\log\Gamma(\alpha+1)-(\alpha+1)\log\beta.$$

Si se deriva con respecto a α

$$\frac{\int_0^{\infty}\theta^{\alpha}\log\theta e^{-\beta\theta}\, d\theta}{\int_0^{\infty}\theta^{\alpha}e^{-\beta\theta}\, d\theta}=\frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}-\log\beta$$

$$=\Psi(\alpha+1)-\log\beta$$

La expresión (A3.1) implica entonces que

$$\int_0^{\infty}(\theta\log\theta)\,\theta^{\alpha-1}\, e^{-\beta\theta}\, d\theta=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}}\left\{\Psi(\alpha+1)-\log\beta\right\}$$

de manera que

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^{\alpha}}\int_0^{\infty}(\theta\log\theta)\operatorname{Ga}(\theta|\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}}\left\{\Psi(\alpha+1)-\log\beta\right\}$$

y así

$$E[\theta\log\theta]=\frac{\alpha}{\beta}\left\{\Psi(\alpha+1)-\log\beta\right\}$$

Proposición A4.- Si $\theta\sim\operatorname{Ga}(\theta|\alpha,\beta)$ entonces

$$E\left[\frac{1}{\theta}\right]=\frac{\beta}{\alpha-1}\qquad \text{si } \alpha>1.$$

Demostración:

$$E\left[\frac{1}{\theta}\right]=\int_0^{\infty}\theta^{-1}\,Ga(\theta|\alpha,\beta)\,d\theta=\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}\beta^{\alpha-1}\,\theta^{\alpha-2}\,e^{-\beta\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{\beta\,\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}Ga(\theta|\alpha-1,\beta)d\theta=\frac{\beta}{\alpha-1}$$

Proposición A5.- Si $\theta\sim Ga(\theta|\alpha,\beta)$ entonces

$$E[\log\theta]=\Psi(\alpha)-\log\beta.$$

Demostración:

$$1=\int_0^{\infty}Ga(\theta|\alpha,\beta)=\int_0^{\infty}\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\,\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}\,d\theta$$

por lo tanto

$$\int_0^{\infty}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}\,d\theta=\frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^{\alpha}} \qquad \text{(A5.1)}$$

de donde

$$\log\left\{\int_0^{\infty}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}\,d\theta\right\}=\log\Gamma(\alpha)-\alpha\log\beta.$$

Derivando con respecto a α

$$\frac{\int_0^{\infty}(\log\theta)\,\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}\,d\theta}{\int_0^{\infty}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}\,d\theta}=\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}-\log\beta$$

$$=\Psi(\alpha)-\log\beta.$$

Entonces, de (A5.1)

$$\int_0^\infty \log\theta\, \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}\, d\theta = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha}\{\Psi(\alpha)-\log\beta\}$$

y así

$$\int_0^\infty (\log\theta) Ga(\theta|\alpha,\beta)d\theta=\Psi(\alpha)-\log\beta$$

por lo que, finalmente

$$E[\log\theta]=\Psi(\alpha)-\log\beta$$

Proposición A6.- Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial $Ex(x|\theta)$. Sea $\Lambda^*=-2\log\Lambda$, donde Λ es el cociente de verosimilitudes obtenido al contrastar la hipótesis $H:\theta=\theta_0$. Finalmente sea $d=E[\delta|\theta_0,z]$. Entonces, para n suficientemente grande, se verifica que

$$d \approx \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\Lambda^*$$

Demostración:

Puede demostrarse que Λ^* esta dado por

$$\Lambda^* = -2\log\Lambda = 2n\{\log n - \log(r\theta_0) + \frac{r\theta_0}{n} - 1\}$$

Por otra parte, la expresión (4.3.6) indica que

$$d = E[\delta|\theta_0,z] = n\{\Psi(n) - \log(r\theta_0) + \frac{r\theta_0}{n} - 1\}$$

Por lo tanto.

$$d - \frac{\Lambda}{2} = n\{\Psi(n) - \log n\} + r\theta_0\left(\frac{n}{n-1} - 1\right)$$

Si n es grande, entonces $\Psi(n) \approx \log n - \frac{1}{2n}$ (Abramowitz & Stegun, 1965) por lo que

$$d - \frac{\Lambda}{2} \approx n\left\{-\frac{1}{2n}\right\} + r\theta_0\left\{\frac{1}{n-1}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{n}{n-1}\left(\frac{r\theta_0}{n}\right)$$

Dado que $\frac{r}{n}$ es un estimador consistente de $\frac{1}{\theta}$, entonces

$$\frac{r}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{1}{\theta_0}$$

si la hipótesis $H:\theta=\theta_0$ es cierta, por lo que

$$\frac{r\theta_0}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 1$$

Por lo tanto

$$d - \frac{\Lambda^*}{2} \approx \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

y finalmente

$$d \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Lambda^*$$

si n es suficientemente grande.

APENDICE B

TABLAS

Tabla B1.- Cuantiles de la distribución de $E[\delta|\theta_0,z]$ para distribución Binomial.

Tabla B2.- Cuantiles de la distribución de $E[\delta|\theta_0,z]$ para la distribución de Poisson.

Tabla B3.- Cuantiles de la distribución de $E[\delta|\theta_0,z]$ para la distribución Exponencial.

Tabla B4.- Cuantiles de la distribución de $E[\delta|h_0,z]$ para la distribución Normal (media conocida).

Tabla B5.- Cuantiles de la distribución de $E[\delta|h_0,z]$ para la distribución Normal (media desconocida)

Tabla B6.- Cuantiles de la distribución de $E[\delta|\mu_0,h_0,z]$ para la distribución Normal.

TABLA B1

Cuantiles de la Distribución de $E[\delta|\theta,z]$ para la Distribución Binomial.

n=1	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ
		0.1		0.2		0.3		0.4		0.5
	.268	.900	.183	.800	.182	.700	.226	.600	.307	1.000
	1.367	1.000	.877	1.000	.606	1.000	.429	1.000		

n=2	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ
		0.1		0.2		0.3		0.4		0.5
	.282	.810	.247	.640	.334	.490	.321	.480	.280	.500
	1.302	.990	.727	.960	.455	.910	.495	.840	.725	1.000
	3.211	1.000	2.095	1.000	1.464	1.000	1.036	1.000		

n=3	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ
		0.1		0.2		0.3		0.4		0.5
	.281	.729	.330	.512	.364	.441	.330	.432	.421	.750
	1.129	.972	.570	.896	.529	.784	.634	.720	1.221	1.000
	2.777	.999	1.610	.992	1.000	.973	.826	.936		
	5.225	1.000	3.450	1.000	2.435	1.000	1.738	1.000		

Para θ>0.5 usar la columna correspondiente a (1-θ)

TABLA B1 (Continuación)

n=4	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ
		0.1		0.2		0.3		0.4		0.5
	.290	.656	.437	.410	.352	.412	.438	.346	.361	.375
	.966	.948	.464	.819	.709	.676	.442	.691	.681	.875
	2.404	.997	1.253	.973	.756	.916	1.087	.845	1.763	1.000
	4.482	1.000	2.682	.999	1.707	.992	1.196	.974		
	7.322	1.000	4.873	1.000	3.467	1.000	2.493	1.000		

n=5	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ
		0.1		0.2		0.3		0.4		0.5
	.311	.591	.405	.410	.399	.360	.384	.346	.451	.625
	.830	.919	.562	.737	.534	.669	.618	.605	1.022	.938
	2.090	.992	.989	.942	1.005	.837	.722	.835	2.335	1.000
	3.921	1.000	2.144	.993	1.240	.969	1.592	.913		
	6.323	1.000	3.871	1.000	2.517	.998	1.631	.990		
	9.466	1.000	6.338	1.000	4.536	1.000	3.281	1.000		

n=6	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ
		0.1		0.2		0.3		0.4		0.5
	.342	.532	.384	.393	.440	.324	.418	.311	.398	.313
	.720	.886	.701	.655	.492	.627	.521	.588	.643	.781
	1.825	.984	.794	.901	.921	.812	.849	.774	1.421	.969
	3.463	.999	1.737	.983	1.271	.930	1.113	.912	2.927	1.000
	5.591	1.000	3.170	.998	1.892	.989	2.007	.959		
	8.253	1.000	5.137	1.000	3.397	.999	2.239	.996		
	11.642	1.000	7.831	1.000	5.629	1.000	4.092	1.000		

Para θ>0.5 usar la columna correspondiente a (1-θ)

TABLA B1 (Continuación)

n=7	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ
		0.1		0.2		0.3		0.4		0.5
	.381	.478	.392	.367	.407	.318	.430	.290	.465	.547
	.632	.850	.652	.642	.619	.565	.520	.552	.909	.875
	1.601	.974	.851	.852	.704	.792	.785	.745	1.863	.984
	3.079	.997	1.420	.967	1.446	.889	1.119	.876	3.534	1.000
	5.002	1.000	2.633	.995	1.549	.971	1.584	.953		
	7.369	1.000	4.291	1.000	2.631	.996	2.435	.981		
	10.245	1.000	6.457	1.000	4.326	1.000	2.892	.998		
	13.839	1.000	9.342	1.000	6.739	1.000	4.919	1.000		

n=8	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ
		0.1		0.2		0.3		0.4		0.5
	.427	.431	.424	.336	.422	.296	.420	.279	.420	.273
	.563	.813	.551	.629	.562	.551	.583	.511	.617	.711
	1.411	.962	1.009	.797	.774	.748	.673	.720	1.231	.930
	2.751	.995	1.170	.944	1.117	.884	1.141	.844	2.336	.992
	4.507	1.000	2.205	.990	1.837	.942	1.418	.933	4.153	1.000
	6.657	1.000	3.635	.999	2.068	.989	2.115	.975		
	9.223	1.000	5.480	1.000	3.434	.999	2.874	.991		
	12.282	1.000	7.818	1.000	5.293	1.000	3.580	.999		
	16.051	1.000	10.867	1.000	7.863	1.000	5.757	1.000		

Para θ>0.5 usar la columna correspondiente a (1-θ)

TABLA B1 (Continuación)

n=9	d	θ 0.1	d	θ 0.2	d	θ 0.3	d	θ 0.4	d	θ 0.5
	.478	.388	.476	.302	.473	.267	.472	.251	.472	.492
	.511	.775	.484	.604	.477	.534	.474	.502	.836	.820
	1.249	.947	.973	.780	.876	.705	.839	.669	1.595	.961
	2.467	.992	1.173	.914	.950	.861	.867	.830	2.835	.996
	4.081	.999	1.857	.980	1.638	.934	1.567	.904	4.780	1.000
	6.059	1.000	3.105	.997	2.133	.975	1.741	.965		
	8.400	1.000	4.716	1.000	2.764	.996	2.691	.986		
	11.136	1.000	6.723	1.000	4.286	1.000	3.321	.996		
	14.353	1.000	9.210	1.000	6.288	1.000	4.295	1.000		
	18.276	1.000	12.402	1.000	8.996	1.000	6.605	1.000		

n=10	d	θ 0.1	d	θ 0.2	d	θ 0.3	d	θ 0.4	d	θ 0.5
	.472	.387	.445	.302	.438	.267	.435	.251	.434	.246
	.535	.736	.544	.570	.556	.500	.573	.466	.599	.656
	1.110	.930	.817	.772	.701	.700	.638	.666	1.106	.891
	2.220	.987	1.344	.879	1.144	.821	1.093	.787	1.995	.979
	3.710	.998	1.570	.967	1.306	.924	1.172	.899	3.353	.998
	5.542	1.000	2.665	.994	2.241	.961	2.048	.941	5.414	1.000
	7.705	1.000	4.091	.999	2.434	.989	2.083	.982		
	10.210	1.000	5.858	1.000	3.519	.998	3.304	.992		
	13.095	1.000	8.007	1.000	5.177	1.000	3.775	.998		
	16.451	1.000	10.626	1.000	7.306	1.000	5.032	1.000		
	20.509	1.000	13.946	1.000	10.137	1.000	7.461	1.000		

Para $\theta > 0.5$ usar la columna correspondiente a $(1-\theta)$

TABLA B1 (Continuación)

n=11	d	θ 0.1	d	θ 0.2	d	θ 0.3	d	θ 0.4	d	θ 0.5
	.444	.384	.429	.295	.436	.257	.452	.236	.477	.451
	.595	.677	.625	.532	.579	.477	.516	.457	.785	.773
	.992	.911	.696	.753	.663	.677	.714	.635	1.419	.935
	2.002	.982	1.333	.864	1.048	.809	.888	.782	2.422	.988
	3.383	.997	1.519	.950	1.352	.902	1.346	.870	3.889	.999
	5.089	1.000	2.297	.988	1.825	.959	1.567	.940	6.054	1.000
	7.104	1.000	3.567	.998	2.741	.978	2.441	.967		
	9.425	1.000	5.146	1.000	2.909	.996	2.572	.990		
	12.073	1.000	7.050	1.000	4.319	.999	3.947	.996		
	15.091	1.000	9.324	1.000	6.099	1.000	4.234	.999		
	18.571	1.000	12.062	1.000	8.343	1.000	5.786	1.000		
	22.750	1.000	15.497	1.000	11.284	1.000	8.322	1.000		

Para θ>0.5 usar la columna correspondiente a (1-θ)

TABLA B1 (Continuación)

n= 12	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ
		0.1		0.2		0.3		0.4		0.5
	.427	.377	.432	.283	.465	.240	.457	.227	.444	.226
	.659	.659	.604	.520	.501	.471	.515	.440	.586	.612
	.890	.889	.717	.726	.791	.639	.689	.616	1.019	.854
	1.811	.974	1.137	.859	.850	.797	.888	.758	1.765	.961
	3.092	.996	1.698	.927	1.490	.876	1.205	.859	2.873	.994
	4.688	1.000	1.984	.981	1.573	.948	1.621	.923	4.438	1.000
	6.547	1.000	3.122	.996	2.414	.977	2.012	.965	6.698	1.000
	8.744	1.000	4.543	.999	3.051	.991	2.811	.983		
	11.205	1.000	6.256	1.000	3.629	.998	3.133	.995		
	13.980	1.000	8.282	1.000	5.158	1.000	4.615	.998		
	17.116	1.000	10.669	1.000	7.048	1.000	4.697	1.000		
	20.709	1.000	13.514	1.000	9.394	1.000	6.554	1.000		
	24.997	1.000	17.054	1.000	12.437	1.000	9.189	1.000		

Para θ>0.5 usar la columna correspondiente a (1-θ)

TABLA B1 (Continuación)

n=13	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ
		0.1		0.2		0.3		0.4		0.5
	.418	.367	.452	.268	.459	.234	.448	.221	.481	.419
	.725	.621	.536	.514	.521	.452	.558	.418	.747	.733
	.803	.866	.819	.692	.701	.632	.616	.603	1.292	.908
	1.641	.966	.975	.846	.936	.771	.934	.734	2.141	.978
	2.832	.994	1.717	.915	1.221	.874	1.089	.844	3.344	.997
	4.328	.999	1.880	.970	1.804	.928	1.578	.910	4.998	1.000
	6.101	1.000	2.738	.993	2.008	.972	1.915	.955	7.346	1.000
	8.142	1.000	4.025	.999	3.061	.986	2.499	.980		
	10.449	1.000	5.579	1.000	3.366	.996	3.193	.991		
	13.034	1.000	7.411	1.000	4.392	.999	3.724	.997		
	15.923	1.000	9.547	1.000	6.028	1.000	5.165	.999		
	19.166	1.000	12.037	1.000	8.017	1.000	5.303	1.000		
	22.861	1.000	14.979	1.000	10.459	1.000	7.335	1.000		
	27.249	1.000	18.615	1.000	13.594	1.000	10.059	1.000		

Para $\theta > 0.5$ usar la columna correspondiente a $(1-\theta)$

TABLA B1 (Continuación)

n=14	d	θ 0.1	d	θ 0.2	d	θ 0.3	d	θ 0.4	d	θ 0.5
	.416	.356	.486	.250	.447	.229	.482	.207	.451	.209
	.729	.613	.490	.500	.592	.425	.483	.413	.576	.576
	.795	.842	.842	.672	.599	.620	.737	.571	.953	.820
	1.490	.956	.930	.826	1.005	.746	.750	.726	1.599	.943
	2.599	.991	1.490	.912	1.098	.859	1.240	.817	2.541	.987
	4.004	.999	2.065	.956	1.672	.921	1.313	.902	3.831	.998
	5.676	1.000	2.406	.988	2.045	.962	1.996	.943	5.569	1.000
	7.603	1.000	3.575	.998	2.587	.985	2.225	.974	7.998	1.000
	9.778	1.000	4.993	1.000	3.683	.992	3.020	.988		
	12.206	1.000	6.665	1.000	3.756	.998	3.584	.995		
	14.903	1.000	8.605	1.000	5.192	1.000	4.341	.999		
	17.896	1.000	10.841	1.000	6.925	1.000	5.635	.999		
	21.236	1.000	13.425	1.000	9.006	1.000	6.009	1.000		
	25.025	1.000	16.456	1.000	11.543	1.000	8.125	1.000		
	29.505	1.000	20.179	1.000	14.755	1.000	10.933	1.000		

Para θ>0.5 usar la columna correspondiente a (1-θ)

TABLA B1 (Continuación)

n=15	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ
		0.1		0.2		0.3		0.4		0.5
	.421	.343	.461	.250	.462	.219	.455	.207	.483	.393
	.666	.610	.532	.481	.519	.425	.553	.393	.719	.698
	.866	.816	.733	.669	.696	.595	.599	.570	1.197	.882
	1.355	.945	1.048	.801	.835	.742	.911	.696	1.935	.965
	2.388	.987	1.295	.904	1.272	.834	.980	.814	2.963	.993
	3.710	.998	2.116	.947	1.394	.915	1.558	.878	4.333	.999
	5.291	1.000	2.253	.982	2.188	.949	1.595	.939	6.148	1.000
	7.116	1.000	3.181	.996	2.293	.980	2.453	.964	8.653	1.000
	9.176	1.000	4.480	.999	3.218	.992	2.549	.985		
	11.471	1.000	6.015	1.000	4.003	.996	3.571	.993		
	14.009	1.000	7.793	1.000	4.490	.999	3.984	.998		
	16.807	1.000	9.831	1.000	6.023	1.000	4.979	.999		
	19.895	1.000	12.158	1.000	7.845	1.000	6.108	1.000		
	23.325	1.000	14.829	1.000	10.010	1.000	6.730	1.000		
	27.200	1.000	17.943	1.000	12.619	1.000	8.925	1.000		
	31.765	1.000	21.748	1.000	15.918	1.000	11.810	1.000		

Para $\theta > 0.5$ usar la columna correspondiente a $(1-\theta)$

TABLA B1 (Continuación)

n=16 d	θ 0.1	d	θ 0.2	d	θ 0.3	d	θ 0.4	d	θ 0.5
.433	.329	.449	.246	.475	.210	.466	.198	.457	.196
.613	.604	.590	.457	.500	.414	.512	.387	.567	.546
.940	.789	.646	.658	.703	.579	.654	.549	.903	.790
1.236	.932	1.129	.778	.810	.725	.783	.691	1.473	.923
2.196	.983	1.172	.890	1.165	.826	1.095	.793	2.295	.979
3.442	.997	1.864	.945	1.458	.900	1.276	.877	3.402	.996
4.940	1.000	2.443	.973	1.852	.948	1.821	.923	4.848	.999
6.673	1.000	2.833	.993	2.548	.971	1.993	.963	6.735	1.000
8.630	1.000	4.027	.999	2.760	.990	2.885	.978	9.311	1.000
10.809	1.000	5.443	1.000	3.893	.995	2.944	.992		
13.212	1.000	7.083	1.000	4.326	.998	4.148	.996		
15.850	1.000	8.957	1.000	5.260	1.000	4.390	.999		
18.740	1.000	11.084	1.000	6.880	1.000	5.637	1.000		
21.915	1.000	13.496	1.000	8.784	1.000	6.584	1.000		
25.429	1.000	16.247	1.000	11.028	1.000	7.464	1.000		
29.384	1.000	19.439	1.000	3.712	1.000	9.733	1.000		
34.028	1.000	23.319	1.000	7.085	1.000	12.690	1.000		

Para θ>0.5 usar la columna correspondiente a (1-θ)

TABLA B1 (Continuación)

n=17 d	θ 0.1	d	θ 0.2	d	θ 0.3	d	θ 0.4	d	θ 0.5
.449	.315	.451	.239	.457	.208	.468	.193	.485	.371
.570	.595	.579	.449	.558	.395	.512	.377	.696	.668
1.015	.762	.657	.640	.604	.573	.641	.537	1.122	.857
1.129	.917	.987	.776	.939	.698	.783	.675	1.776	.951
2.023	.978	1.302	.872	.978	.818	1.024	.782	2.677	.987
3.197	.995	1.642	.940	1.567	.882	1.301	.862	3.858	.998
4.618	.999	2.525	.967	1.655	.940	1.617	.919	5.374	1.000
6.267	1.000	2.635	.989	2.367	.968	2.099	.953	7.329	1.000
8.132	1.000	3.624	.997	2.809	.985	2.427	.977	9.970	1.000
10.207	1.000	4.933	1.000	3.378	.994	3.232	.987		
12.493	1.000	6.453	1.000	4.605	.997	3.463	.995		
14.994	1.000	8.189	1.000	4.650	.999	4.747	.997		
17.723	1.000	10.152	1.000	6.059	1.000	4.804	.999		
20.699	1.000	12.362	1.000	7.760	1.000	6.311	1.000		
23.955	1.000	14.853	1.000	9.741	1.000	7.062	1.000		
27.547	1.000	17.678	1.000	12.057	1.000	8.210	1.000		
31.576	1.000	20.942	1.000	14.812	1.000	10.548	1.000		
36.293	1.000	24.892	1.000	18.254	1.000	13.572	1.000		

Para θ>0.5 usar la columna correspondiente a (1-θ)

TABLA B1 (Continuación)

n=18	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ
		0.1		0.2		0.3		0.4		0.5
	.470	.300	.465	.230	.462	.202	.462	.189	.461	.185
	.534	.584	.528	.445	.534	.389	.544	.363	.561	.519
	1.033	.752	.733	.617	.634	.557	.587	.528	.862	.762
	1.092	.902	.867	.768	.826	.695	.829	.657	1.372	.904
	1.865	.972	1.438	.849	1.081	.799	.935	.771	2.104	.969
	2.973	.994	1.449	.931	1.327	.880	1.312	.848	3.078	.992
	4.323	.999	2.252	.966	1.860	.926	1.525	.910	4.328	.999
	5.894	1.000	2.828	.984	2.030	.965	1.998	.947	5.910	1.000
	7.674	1.000	3.264	.996	2.933	.980	2.391	.971	7.928	1.000
	9.656	1.000	4.478	.999	3.075	.992	2.892	.986	10.632	1.000
	11.837	1.000	5.891	1.000	4.037	.997	3.588	.993		
	14.220	1.000	7.506	1.000	4.977	.999	4.008	.997		
	16.812	1.000	9.329	1.000	5.350	1.000	5.222	.999		
	19.625	1.000	11.374	1.000	6.884	1.000	5.366	1.000		
	22.681	1.000	13.661	1.000	8.661	1.000	7.000	1.000		
	26.012	1.000	16.225	1.000	10.713	1.000	7.542	1.000		
	29.676	1.000	19.120	1.000	13.098	1.000	8.966	1.000		
	33.775	1.000	22.451	1.000	15.919	1.000	11.368	1.000		
	38.561	1.000	26.468	1.000	19.425	1.000	14.456	1.000		

Para θ>0.5 usar la columna correspondiente a (1-θ)

TABLA B1 (Continuación)

n= 19	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ
		0.1		0.2		0.3		0.4		0.5
	.495	.285	.490	.218	.488	.192	.486	.180	.487	.352
	.505	.570	.492	.436	.489	.383	.487	.359	.677	.641
	.949	.750	.767	.600	.706	.536	.682	.506	1.062	.833
	1.171	.885	.817	.754	.725	.685	.689	.651	1.650	.936
	1.721	.965	1.280	.850	1.126	.783	1.067	.749	2.454	.981
	2.766	.991	1.578	.918	1.235	.870	1.108	.842	3.496	.996
	4.050	.998	2.009	.962	1.741	.921	1.643	.895	4.811	.999
	5.549	1.000	2.942	.979	2.074	.957	1.765	.942	6.454	1.000
	7.252	1.000	3.023	.993	2.546	.979	2.413	.965	8.532	1.000
	9.149	1.000	4.068	.998	3.347	.988	2.695	.983	11.295	1.000
	11.236	1.000	5.385	1.000	3.541	.996	3.386	.991		
	13.514	1.000	6.893	1.000	4.731	.998	3.953	.996		
	15.986	1.000	8.594	1.000	5.305	.999	4.575	.999		
	18.661	1.000	10.499	1.000	6.123	1.000	5.646	.999		
	21.553	1.000	2.620	1.000	7.732	1.000	6.002	1.000		
	24.682	1.000	14.979	1.000	9.580	1.000	7.702	1.000		
	28.084	1.000	17.611	1.000	11.699	1.000	8.024	1.000		
	31.815	1.000	20.571	1.000	14.148	1.000	9.731	1.000		
	35.981	1.000	23.966	1.000	17.031	1.000	12.194	1.000		
	40.831	1.000	28.046	1.000	20.598	1.000	15.342	1.000		

Para θ>0.5 usar la columna correspondiente a (1-θ)

TABLA B1 (Continuación)

n= 20	d	θ 0.1	d	θ 0.2	d	θ 0.3	d	θ 0.4	d	θ 0.5
	.483	.285	.470	.218	.467	.192	.465	.180	.465	.176
	.525	.555	.526	.424	.531	.371	.541	.346	.556	.497
	.873	.745	.684	.598	.614	.535	.578	.505	.829	.737
	1.251	.867	.908	.735	.831	.665	.814	.630	1.291	.885
	1.590	.957	1.133	.844	.959	.780	.873	.747	1.951	.959
	2.576	.989	1.722	.902	1.400	.851	1.300	.822	2.823	.988
	3.797	.998	1.793	.956	1.492	.917	1.350	.893	3.929	.997
	5.230	1.000	2.652	.978	2.208	.947	2.010	.928	5.305	1.000
	6.861	1.000	3.220	.990	2.295	.975	2.020	.963	7.007	1.000
	8.679	1.000	3.698	.997	3.106	.987	2.858	.978	9.142	1.000
	10.681	1.000	4.928	.999	3.623	.994	3.010	.990	11.960	1.000
	12.865	1.000	6.339	1.000	4.187	.998	3.904	.995		
	15.231	1.000	7.933	1.000	5.456	.999	4.326	.998		
	17.786	1.000	9.715	1.000	5.634	1.000	5.162	.999		
	20.538	1.000	11.695	1.000	6.922	1.000	6.074	1.000		
	23.502	1.000	13.887	1.000	8.601	1.000	6.654	1.000		
	26.701	1.000	16.314	1.000	10.514	1.000	8.416	1.000		
	30.169	1.000	19.009	1.000	12.697	1.000	8.507	1.000		
	33.964	1.000	22.032	1.000	15.206	1.000	10.504	1.000		
	38.191	1.000	25.487	1.000	18.148	1.000	13.025	1.000		
	43.102	1.000	29.626	1.000	21.773	1.000	16.230	1.000		

Para $\theta>0.5$ usar la columna correspondiente a $(1-\theta)$

TABLA B1 (Continuación)

n=25	d	θ 0.1	d	θ 0.2	d	θ 0.3	d	θ 0.4	d	θ 0.5
	.451	.266	.476	.196	.477	.171	.472	.161	.490	.310
	.690	.492	.521	.383	.512	.336	.534	.312	.638	.576
	.718	.692	.652	.546	.622	.483	.564	.459	.936	.770
	1.085	.830	.825	.682	.716	.617	.755	.579	1.388	.892
	1.665	.902	1.026	.793	.963	.720	.805	.693	1.999	.957
	1.820	.967	1.446	.863	1.079	.812	1.144	.773	2.778	.985
	2.776	.991	1.579	.926	1.527	.869	1.195	.849	3.738	.996
	3.929	.998	2.301	.955	1.596	.923	1.714	.893	4.894	.999
	5.263	1.000	2.493	.979	2.262	.949	1.733	.936	6.273	1.000
	6.764	1.000	3.182	.991	2.349	.974	2.421	.957	7.910	1.000
	8.425	1.000	4.217	.995	3.077	.985	2.481	.977	9.864	1.000
	10.240	1.000	4.220	.998	3.489	.992	3.263	.986	12.244	1.000
	12.204	1.000	5.402	1.000	4.040	.997	3.469	.993	15.304	1.000
	14.317	1.000	6.735	1.000	5.054	.998	4.264	.996		
	16.578	1.000	8.216	1.000	5.152	.999	4.716	.998		
	18.989	1.000	9.847	1.000	6.419	1.000	5.433	.999		
	21.553	1.000	11.632	1.000	7.299	1.000	6.280	1.000		
	24.277	1.000	13.576	1.000	7.845	1.000	6.782	1.000		
	27.169	1.000	15.688	1.000	9.439	1.000	8.270	1.000		
	30.241	1.000	17.981	1.000	11.213	1.000	8.329	1.000		
	33.510	1.000	20.470	1.000	13.184	1.000	10.097	1.000		
	37.002	1.000	23.182	1.000	15.377	1.000	10.941	1.000		
	40.751	1.000	26.151	1.000	17.829	1.000	12.124	1.000		
	44.818	1.000	29.439	1.000	20.598	1.000	14.468	1.000		
	49.310	1.000	33.151	1.000	23.792	1.000	17.237	1.000		
	54.483	1.000	37.544	1.000	27.667	1.000	20.687	1.000		

Para $\theta > 0.5$ usar la columna correspondiente a $(1-\theta)$

TABLA B1 (Continuación)

n=30	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ
		0.1		0.2		0.3		0.4		0.5
	.487	.236	.479	.179	.477	.157	.476	.147	.476	.144
	.518	.464	.518	.352	.522	.307	.528	.287	.539	.415
	.768	.641	.629	.506	.579	.449	.554	.423	.726	.638
	.970	.782	.770	.638	.723	.571	.714	.538	1.041	.800
	1.301	.884	.950	.749	.821	.681	.758	.648	1.486	.901
	2.047	.932	1.274	.827	1.095	.764	1.040	.731	2.064	.957
	2.100	.974	1.427	.895	1.197	.839	1.088	.809	2.782	.984
	2.982	.992	2.050	.930	1.655	.885	1.512	.859	3.646	.995
	4.087	.998	2.090	.964	1.702	.930	1.543	.908	4.668	.999
	5.348	1.000	2.814	.980	2.334	.953	2.123	.935	5.859	1.000
	6.757	1.000	3.327	.989	2.429	.974	2.141	.962	7.239	1.000
	8.305	1.000	3.711	.996	3.091	.984	2.831	.975	8.833	1.000
	9.987	1.000	4.737	.998	3.455	.992	2.940	.986	10.679	1.000
	11.798	1.000	5.241	.999	3.974	.996	3.668	.991	12.836	1.000
	13.737	1.000	5.891	1.000	4.792	.998	3.928	.996	15.414	1.000
	15.801	1.000	7.170	1.000	4.982	.999	4.638	.998	18.670	1.000
	17.990	1.000	8.574	1.000	6.116	1.000	5.129	.999		
	20.304	1.000	10.104	1.000	6.550	1.000	5.748	.999		
	22.745	1.000	11.760	1.000	7.381	1.000	6.583	1.000		
	25.316	1.000	13.546	1.000	8.779	1.000	7.005	1.000		
	28.021	1.000	15.466	1.000	8.986	1.000	8.347	1.000		
	30.865	1.000	17.525	1.000	10.317	1.000	8.419	1.000		
	33.855	1.000	19.732	1.000	12.001	1.000	10.003	1.000		
	37.003	1.000	22.095	1.000	13.843	1.000	10.533	1.000		
	40.321	1.000	24.628	1.000	15.854	1.000	11.776	1.000		
	43.828	1.000	27.349	1.000	18.054	1.000	13.397	1.000		
	47.548	1.000	30.285	1.000	20.468	1.000	13.762	1.000		
	51.520	1.000	33.472	1.000	23.134	1.000	16.000	1.000		
	55.803	1.000	33.971	1.000	26.111	1.000	18.549	1.000		
	60.508	1.000	40.891	1.000	29.509	1.000	21.520	1.000		
	65.890	1.000	45.488	1.000	33.585	1.000	25.169	1.000		

Para $\theta>0.5$ usar la columna correspondiente a $(1-\theta)$

TABLA B2

Cuantiles de la Distribución de $E[\delta|\theta,z]$ para la Distribución de Poisson.

$n\theta=0.2$	p	0.8190	0.9827	0.9991		
	d	0.5230	2.1689	4.4815		
$n\theta=0.4$	p	0.6705	0.9387	0.9923	0.9994	
	d	0.3764	1.3292	2.9486	4.968	
$n\theta=0.6$	p	0.8783	0.9771	0.9968	0.9998	
	d	0.9210	2.1350	3.7489	5.6486	
$n\theta=0.8$	p	0.8089	0.9527	0.9911	0.9987	
	d	0.6895	1.6158	2.9421	4.5541	
$n\theta=1$	p	0.7359	0.9198	0.9811	0.9965	0.9995
	d	0.5547	1.2579	2.3610	3.7499	5.3610
$n\theta=2$	p	0.8572	0.9474	0.9835	0.9955	0.9998
	d	1.1717	1.6308	2.5487	3.6485	6.2890

TABLA B2 (Continuación)

$n\theta=3$	p	0.8663	0.9161	0.9665	0.9881	0.9962	0.9997	
	d	1.3186	1.9689	.2.0129	2.8611	3.8426	6.1461	
$n\theta=4$	p	0.8710	0.9306	0.9603	0.9786	0.9919	0.9997	
	d	1.4753	1.7035	2.3973	2.8251	3.2087	6.2363	
$n\theta=5$	p	0.8915	0.9277	0.9614	0.9796	0.9878	0.9945	
	d	1.5005	2.0888	2.1406	2.7824	3.5712	3.7135	
$n\theta=6$	p	0.8987	0.9400	0.9626	0.9774	0.9887	0.9939	
	d	1.7785	1.8680	2.4745	2.8671	3.1680	3.9414	
$n\theta=7$	p	0.8718	0.9170	0.9434	0.9657	0.9799	0.9870	0.9934
	d	1.5504	1.7018	2.2411	2.3931	2.8604	3.5537	3.6359
$n\theta=8$	p	0.8938	0.9234	0.9521	0.9690	0.9797	0.9887	0.9933
	d	1.5719	2.0577	2.0830	2.6175	3.0593	3.2463	3.9396

TABLA B2 (Continuación)

nθ=9	p	0.8712	0.9049	0.9373	0.9567	0.9717	0.9827	0.9884	0.9934
	d	1.4676	1.8624	1.9097	2.4207	2.6708	2.9962	3.6323	3.7648
nθ=10	p	0.8873	0.9220	0.9437	0.9626	0.9754	0.9830	0.9900	0.9938
	d	1.6968	1.7876	2.2577	2.3883	2.7885	3.3020	3.3764	4.0184
nθ=11	p	0.8699	0.9066	0.9303	0.9527	0.9672	0.9774	0.9858	0.9904
	d	1.5676	1.6851	2.1206	2.1726	2.6132	2.9594	3.1599	3.7578
nθ=12	p	0.8912	0.9167	0.9422	0.9584	0.9711	0.9808	0.9863	0.9916
	d	1.5979	2.0020	2.0035	2.4631	2.6940	2.9741	3.5338	3.5678
nθ=13	p	0.8761	0.9043	0.9314	0.9491	0.9643	0.9752	0.9886	0.9923
	d	1.5227	1.8636	1.9023	2.3332	2.4818	2.8129	3.3390	3.9097
nθ=14	p	0.8919	0.9205	0.9395	0.9569	0.9691	0.9778	0.9894	0.9932
	d	1.7488	1.8140	2.2195	2.3078	2.6716	3.0001	3.7072	3.8462

TABLA B2 (Continuación)

nθ=15	p	0.8796	0.9094	0.9493	0.9625	0.9729	0.9812	0.9862	0.9910
	d	1.6520	1.7362	2.1623	2,5468	2.7903	3.0169	3.5278	3.5516
nθ=16	p	0.8985	0.9200	0.9413	0.9557	0.9677	0.9769	0.9885	0.9919
	d	1.6671	2.0301	2.0389	2.4357	2.6138	2.8820	3.3676	3.8909
nθ=17	p	0.8876	0.9106	0.9486	0.9622	0.9722	0.9794	0.9896	0.9930
	d	1.6055	1.9328	2.3361	2.4630	2.7610	3.0985	3.7228	3.8516
nθ=18	p	0.8769	0.9014	0.9414	0.9564	0.9673	0.9756	0.9870	0.9912
	d	1.5500	1.8405	2.2463	2.3326	2.6519	2.9200	3.5707	3.6126
nθ=19	p	0.8922	0.9168	0.9341	0.9504	0.9716	0.9793	0.9891	0.9921
	d	1.7595	1.8136	2.1650	2.2187	2.7649	2.9757	3.4325	3.9221
nθ=20	p	0.8831	0.9085	0.9443	0.9568	0.9674	0.9757	0.9869	0.9903
	d	1.6878	1.7544	2.1183	2.4626	2.6288	2.8681	3.3064	3.7764

TABLA B2 (Continuación)

nθ=25	p	0.8908	0.9125	0.9439	0.9552	0.9730	0.9790	0.9878	0.9912
	d	1.7534	1.8019	2.1389	2.4460	2.8106	3.0957	3.6215	3.6753
nθ=30	p	0.8999	0.9185	0.9458	0.9560	0.9722	0.9779	0.9899	0.9922
	d	1.8335	1.8645	2.1901	2.4646	2.8011	3.0521	3.5628	3.9496
nθ=35	p	0.8929	0.9091	0.9489	0.9580	0.9726	0.9778	0.9892	0.9914
	d	1.6844	1.9217	2.2581	2.5039	2.8197	3.0551	3.5193	3.8894
nθ=40	p	0.8864	0.9041	0.9426	0.9526	0.9737	0.9784	0.9889	0.9911
	d	1.7271	1.7696	2.2749	2.3363	2.8565	3.0859	3.5166	3.8656
nθ=45	p	0.8991	0.9144	0.9477	0.9564	0.9698	0.9751	0.9890	0.9911
	d	1.8308	1.8567	2.3469	2.4212	2.7621	2.9055	3.5401	3.8667
nθ=50	p	0.8969	0.9104	0.9444	0.9526	0.9720	0.9768	0.9894	0.9913
	d	1.7300	1.9353	2.2097	2.4231	2.8392	2.9631	3.5815	3.8854

TABLA B2 (Continuación)

$n\theta=75$	p	0.8941	0.9065	0.9437	0.9506	0.9720	0.9758	0.9891	0.9907
	d	1.7939	1.8182	2.2236	2.3982	2.8392	2.9950	3.5973	3.8471
$n\theta=100$	p	0.8905	0.9015	0.9491	0.9547	0.9724	0.9757	0.9893	0.9908
	d	1.7676	1.7913	2.3268	2.4701	2.8596	2.9963	3.7360	3.7806
$n\theta=1000$	p	0.8999	0.9032	0.9482	0.9501	0.9742	0.9753	0.9896	0.9900
	d	1.8494	1.8545	2.3681	2.4136	2.9730	2.9972	3.7473	3.8131

TABLA B3

Cuantiles de la Distribución de E[$\delta|\theta$,z] para la Distribución Exponencial.

n \ p	0.90	0.95	0.975	0.99
2	3.9715	5.2532	6.5715	8.3435
3	2.8842	3.8008	4.7515	6.0420
4	2.5332	3.3303	4.1588	5.2861
5	2.3603	3.0988	3.8668	4.9120
6	2.2574	2.9611	3.6930	4.6905
7	2.1892	2.8698	3.5780	4.5430
8	2.1407	2.8050	3.4961	4.4380
9	2.1044	2.7565	3.4350	4.3600
10	2.0762	2.7188	3.3878	4.2985
11	2.0537	2.6888	3.3498	4.2500
12	2.0353	2.6642	3.3188	4.2110
13	2.0200	2.6437	3.2930	4.1775
14	2.0071	2.6265	3.2713	4.1500
15	1.9960	2.6117	3.2527	4.1255
16	1.9864	2.5990	3.2366	4.1050
17	1.9780	2.5877	3.2225	4.0870

n \ p	0.90	0.95	0.975	0.99
18	1.9706	2.5779	3.2100	4.0715
19	1.9641	2.5691	3.1990	4.0570
20	1.9582	2.5613	3.1890	4.0445
25	1.9362	2.5318	3.1520	3.9970
30	1.9217	2.5127	3.1277	3.9661
35	1.9116	2.4991	3.1108	3.9440
40	1.9040	2.4890	3.0908	3.9280
50	1.8936	2.4750	3.0805	3.9050
100	1.8730	2.4476	3.0460	3.8610
∞	1.8531	2.4213	3.0129	3.8195

TABLA B4

Cuantiles de la Distribución de $E[\delta|h_0,z]$ para la Distribución Normal.
(Media Conocida)

n \ p	0.90	0.95	0.975	0.99
3	6.2326	8.2350	10.2645	12.9700
4	3.9715	5.1532	6.5710	8.3445
5	3.2415	4.2790	5.3526	6.8050
6	2.8842	3.8008	4.7517	6.0410
7	2.6728	3.5175	4.3946	5.5873
8	2.5332	3.3303	4.1590	5.2861
9	2.4342	3.1978	3.9918	5.0725
10	2.3603	3.0987	3.8668	4.9128
11	2.3031	3.0222	3.7703	4.7882
12	2.2574	2.9611	3.6934	4.6900
13	2.2202	2.9113	3.6303	4.6100
14	2.1892	2.8698	3.5780	4.5429
15	2.1631	2.8348	3.5338	4.4858
16	2.1407	2.8050	3.4962	4.4382
17	2.1213	2.7790	3.4635	4.3963
18	2.1044	2.7565	3.4349	4.3595

n \ p	0.90	0.95	0.975	0.99
19	2.0894	2.7364	3.4100	4.3271
20	2.0762	2.7188	3.3875	4.2990
25	2.0273	2.6536	3.3055	4.1935
30	1.9960	2.6118	3.2528	4.1255
35	1.9742	2.5826	3.2158	4.0786
40	1.9582	2.5613	3.1890	4.0440
50	1.9361	2.5318	3.1518	3.9970
100	1.8935	2.4750	3.0804	3.9050
∞	1.8531	2.4213	3.0129	3.8195

TABLA B5

Cuantiles de la Distribución de $E[\delta|h_0,z]$ para la Distribución Normal.
(Media Desconocida)

n \ p	0.90	0.95	0.975	0.99
4	8.3100	10.9800	13.6870	17.2900
5	4.9643	6.5666	8.2140	10.4300
6	3.8898	5.1350	6.4233	8.1661
7	3.3650	4.4343	5.5433	7.0478
8	3.0547	4.0200	5.0225	6.3856
9	2.8499	3.7467	4.6790	5.9470
10	2.7046	3.5529	4.4352	5.6360
11	2.5963	3.4086	4.2536	5.4040
12	2.5124	3.2969	4.1130	5.2245
13	2.4455	3.2078	4.0010	5.0810
14	2.3910	3.1352	3.9097	4.9646
15	2.3456	3.0748	3.8338	4.8675
16	2.3073	3.0238	3.7696	4.7856
17	2.2745	2.9802	3.7146	4.7157
18	2.2461	2.9425	3.6673	4.6550
19	2.2213	2.9095	3.6260	4.6012
20	2.1994	2.8806	3.5896	4.5555
25	2.1201	2.7752	3.4572	4.3862
30	2.0703	2.7091	3.3740	4.2800
35	2.0362	2.6639	3.3173	4.2070
40	2.0113	2.6308	3.2756	4.1547
50	1.9775	2.5860	3.2195	4.0820
100	1.9131	2.5007	3.1121	3.9455
∞	1.8531	2.4213	3.0129	3.8195

TABLA B6

Cuantiles de la Distribución de $E[\delta|\mu_0,h_0,z]$ para la Distribución Normal.

p / n	0.90	0.95	0.975	0.99	p / n	0.90	0.95	0.975	0.99
4	11.9877	15.4650	18.9270	23.8100	20	3.8189	4.5895	5.4315	6.5275
5	7.5333	9.4630	11.6264	14.3838	25	3.6584	4.4532	5.2482	6.3185
6	6.0240	7.5860	8.8511	11.2685	30	3.5930	4.3678	5.1918	6.1745
7	5.3400	6.6700	8.0220	9.8433	35	3.5636	4.3282	5.0720	6.0850
8	4.9204	6.0956	7.3053	8.9120	40	3.5301	4.2700	5.0196	6.0260
9	4.6294	5.7230	6.8342	8.3375	50	3.4821	4.2095	4.9494	5.9315
10	4.4359	5.4855	6.5659	7.9190	100	3.3830	4.1005	4.8228	5.7763
11	4.2864	5.2755	6.3193	7.6156	∞	3.3026	3.9976	4.6931	5.6075
12	3.1797	5.1340	6.1153	7.3827					
13	4.1605	5.0168	5.9676	7.1955					
14	4.0262	4.9215	5.8477	7.0580					
15	3.9618	4.8534	5.7482	6.9311					
16	3.9108	4.7760	5.6645	6.8250					
17	3.8636	4.7191	5.5933	6.7340					
18	3.8359	4.6700	5.5320	6.6559					
19	3.8275	4.6278	5.4786	6.5880					

TABLA B6

Cuantiles de la Distribución de $E[\delta|\mu_0,h_0,z]$ para la Distribución Normal.

n \ p	0.90	0.95	0.975	0.99
4	11.9877	15.4650	18.9270	23.8100
5	7.5333	9.4630	11.6264	14.3838
6	6.0240	7.5860	8.8511	11.2685
7	5.3400	6.6700	8.0220	9.8433
8	4.9204	6.0956	7.3053	8.9120
9	4.6294	5.7230	6.8342	8.3375
10	4.4359	5.4855	6.5659	7.9190
11	4.2864	5.2755	6.3193	7.6156
12	3.1797	5.1340	6.1153	7.3827
13	4.1605	5.0168	5.9676	7.1955
14	4.0262	4.9215	5.8477	7.0580
15	3.9618	4.8534	5.7482	6.9311
16	3.9108	4.7760	5.6645	6.8250
17	3.8636	4.7191	5.5933	6.7340
18	3.8359	4.6700	5.5320	6.6559
19	3.8275	4.6278	5.4786	6.5880

n \ p	0.90	0.95	0.975	0.99
20	3.8189	4.5895	5.4315	6.5275
25	3.6584	4.4532	5.2482	6.3185
30	3.5930	4.3678	5.1918	6.1745
35	3.5636	4.3282	5.0720	6.0850
40	3.5301	4.2700	5.0196	6.0260
50	3.4821	4.2095	4.9494	5.9315
100	3.3830	4.1005	4.8228	5.7763
∞	3.3026	3.9976	4.6931	5.6075

REFERENCIAS

REFERENCIAS

ABRAMOWITZ, M.& STEGUN, I. (1965). Handbook of Mathematical Functions. New York, Dover.

BERNARDO, J.M. (1979a). Expected Information as Expected Utility. Ann. Statist. 7, 686-690.

BERNARDO, J.M. (1979b). Reference Posterior Distributions for Bayesian Inference. J. Roy Statist. Soc. B41. 113-147.

BERNARDO, J.M. (1981). Bioestadística, una Perspectiva Bayesiana. Vincens-Vives.

BERNARDO, J.M. (1984). Análisis Bayesiano de los Contrastes de Hipótesis Paramétricas. Pub. Depto. Bioest. 6. Universidad de Valencia.

BERNARDO, J.M., FERRANDIZ, J.R. & SMITH, A.F. (1985). The Foundations of Decision Theory: an Intuitive, Operational Approach With Mathematical Extensions. Theory and Decision 19, 127-150.

DE GROOT, M. (1970). Optimal Statistical Decisions. McGraw Hill.

KENDALL, M. & STUART, A. (1979). The Advanced Theory of Statistics. Fourth Edition, Vol. 2, London, Griffin.

KULLBACK, S. & LEIBLER, R.A. (1951). On Information and Sufficiency. Ann. Math. Statist. 22, 79-86.

KULLBACK, S. (1959). Information Theory and Statistics. New York, Wiley.

LEHMANN, E. (1959). Testing Statistical Hypotheses. New York, Wiley.

MOOD, A., GRAYBILL, F. & BOES, D. (1974). Introduction to the Theory of Statistcs. Third Edition, McGraw Hill.

RAIFFA, H. & SCHLAIFER, R. (1961). Applied Statistical Decision Theory. Cambridge, Mass., M.I.T.

SAVAGE, L. (1954/1972). The Foundations of Statistics. N.Y.:Wiley / N.Y.: Dover.