

20



**Universidad Nacional Autónoma
de México**

Facultad de Ingeniería

**Análisis de Marcos Planos de
Sección Variable**

T E S I S

**Que para obtener el título de
INGENIERO CIVIL
p r e s e n t a**

Adalberto Enrique Fuentes Zurita



México, D. F.

1988



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

	Pag.
1.- Introducción	1
2.- Fundamentación Teórica	4
2.1.- Energía de Deformación Axial	4
2.2.- Energía de Deformación por Cortante	7
2.3.- Energía de Deformación por Flexión	9
2.4.- Energía de Deformación de la Barra	13
2.5.- Energía y Trabajo Complementario	14
2.6.- Segundo Teorema de Castigliano	14
2.7.- Integrales de Mohr	17
2.8.- Primer Teorema de Castigliano	19
2.9.- Teorema de los Recíprocos para las Rigideces	19
2.10.- Matriz de Flexibilidad en el Extremo Inicial de una Barra de Sección Variable	21
2.11.- Matriz de Rigidez en el Extremo Inicial de una Barra de Sección Variable	24
2.12.- Matriz de Rigidez Total de una Barra de Sección Variable	27
2.13.- Obtención de Reacciones de Empotramiento para Barras de Sección Variable	32
3.- Integración Numérica	39
3.1.- Newton-Cotes Cerrado	40
3.2.- Integración Gaussiana	41
3.3.- Fórmulas de Gauss-Legendre	43
3.4.- Fórmulas de Gauss-Chebyshev	43
3.5.- Integración Compuesta	43
3.6.- Análisis Comparativo entre Métodos de Integración	44
4.- Metodología de Análisis	46
4.1.- Ejes de los Elementos	46
4.2.- Elementos Constitutivos del Marco	50
4.3.- Sistemas de Referencia	50
4.4.- Cargas	52
4.5.- Elementos Mecánicos	52

4.6.- Diagrama de Flujo	57
5.- Estudio Comparativo entre Métodos de Análisis	64
5.1.- Descripción del Modelo	64
5.2.- Método de Dovelas	64
5.3.- Método de Parámetros Elásticos	74
5.4.- Método de Factores de Rigidez y Reacciones de Empotramiento	81
5.5.- Método de Integración Numérica	89
5.6.- Tabla Comparativa	91
6.- Conclusiones	95
Bibliografía	97
Apéndices	
Apéndice A.- Abscisas y Pesos de Cuadraturas	99
Apéndice B.- Integración de la Función x^4/I	109

INDICE DE FIGURAS

Figura Número		Pag.
1.1	Discretización de Elementos.	2
2.1	Alargamiento de una Barra en Tracción.	5
2.2	Ley de Hooke.	5
2.3	Trabajo Externo Efectuado por la Carga P durante la Deformación δ .	6
2.4	Barra sometida a Fuerza Cortante.	8
2.5	Deformación por Esfuerzos Cortantes de un Elemento Diferencial.	8
2.6	Viga Sometida a Flexión. Definición de Variables.	11
2.7	Deformación Axial de Fibras Longitudinales por Efecto de Flexión.	12
2.8	Energía de Deformación y Energía Complementaria.	15
2.9	Segundo Teorema de Castigliano. Incremento Diferencial de una Fuerza.	16
2.10	Flexibilidad en A (extremo inicial) de una Barra de Sección Variable.	23
2.11	Obtención de la Matriz de Flexibilidades en A (extremo inicial) por medio de las Integrales de Mohr.	25
2.12	Matriz de Rigidez Total en una barra de Sección Variable.	29
2.13	Obtención de la Matriz de Rigidez Total en Función de la Matriz de Rigidez en A (extremo inicial) de una Barra de Sección Variable.	31
2.14	Momentos de Empotramiento para Cargas Perpendiculares a una Barra de Sección Variable.	33
2.15	Obtención de los Giros en la Isostática por medio de las Integrales de Mohr.	34
2.16	Reacciones Axiales de Empotramiento para Cargas Axiales en una Barra de Sección Variable.	37
2.17	Obtención del Desplazamiento Axial en el Extremo Inicial de la Isostática por medio de las Integrales de Mohr.	38
4.1	Elemento de Sección Transversal Rectangular Variable.	47
4.2	Elemento de Sección Tipo I Variable.	48
4.3	Diferentes Tipos de Acartelamientos.	49

4.4	Reducción de una Estructura a sus Elementos Constitutivos.	51
4.5	Cargas en Nudos.	53
4.6	Cargas en Elementos.	53,54
4.7	Convención de Signos para los Elementos Mecánicos.	55
4.8	Elementos Mecánicos en el Interior de Elementos Cargados.	56
5.1	Estructura con Diversas Cargas para Análisis Comparativo.	65
5.2	Modelación de la Estructura por el Método de Dovelas.	66
5.3	Notaciones para la Estructura de Doble Vertiente. Método de Parámetros Elásticos.	76
5.4	Análisis Separados en el Método de Parámetros Elásticos.	78
5.5	Relaciones Características de un Elemento. Método de Factores de Rigidez y Reacciones de Empotramiento.	84
5.6	Modelo para Análisis Comparativo del Marco. Método de Factores de Rigidez y Reacciones de Empotramiento.	86

NOMENCLATURA

Capítulo 2

A	- Área de la sección transversal
A_c	- Área de cortante de la sección transversal
b	- Ancho de la sección transversal
$\{d\}$	- Vector de desplazamientos de una barra
$\{d_a\}$	- Vector de desplazamientos en el extremo inicial de una barra
d_{xa}, d_{ya}, ρ_a	- Desplazamiento axial, transversal y giro en el extremo inicial de una barra
d_{xb}, d_{yb}, ρ_b	- Desplazamiento axial, transversal y giro en el extremo final de una barra
d_{xoa}	- Desplazamiento axial en el extremo inicial de la barra isostática
E	- Módulo de elasticidad o de Young
$\{F\}$	- Vector de fuerzas de una barra
$\{F_a\}$	- Vector de fuerzas en el extremo inicial de una barra
F_{xa}, F_{ya}, M_a	- Fuerza axial, cortante y momento en el extremo inicial de una barra
F_{xb}, F_{yb}, M_b	- Fuerza axial, cortante y momento en el extremo final de una barra
$[f_a]$	- Matriz de flexibilidad en el extremo inicial de una barra
f_{ij}	- Coeficiente de flexibilidad según los grados de libertad de una barra
G	- Módulo de elasticidad al corte
I	- Momento de inercia de la sección transversal
Δ	- Curvatura de la elástica deformada
$[k]$	- Matriz de rigidez de una barra
$[k_a]$	- Matriz de rigidez en el extremo inicial de una barra
k_{ij}	- Coeficiente de rigidez según los grados de libertad de una barra
L	- Longitud de la barra
M, N, V	- Momento flexionante, fuerza normal y fuerza cortante actuantes
m, n, v	- Momento flexionante, fuerza normal y fuerza <i>ix</i>

	cortante debidos a una carga unitaria en dirección del desplazamiento que se desea conocer
M_T, N_T, V_T	- Momento flexionante, fuerza normal y fuerza cortante totales
M_ϕ, N_ϕ, V_ϕ	- Momento flexionante, fuerza normal y fuerza cortante debidos a una carga ficticia en dirección del desplazamiento que se desea conocer
M_o, N_o, V_o	- Momento flexionante, fuerza normal y fuerza cortante en la barra isostática debidos a la carga actuante
m_o, n_o, v_o	- Momento flexionante, fuerza normal y fuerza cortante debidos a una carga unitaria en dirección de la redundante hiperestática
\bar{M}_a, \bar{M}_b	- Momento de empotramiento en el extremo inicial y final de una barra
\bar{N}_a	- Reacción normal de empotramiento en el extremo inicial de una barra
P	- Fuerza
Q	- Momento estático o primer momento de la sección transversal por arriba de cierta ordenada y_1
s_{ij}	- Coeficiente de rigidez
U	- Energía de deformación
U*	- Energía complementaria
v	- Flecha debida a flexión
W	- Trabajo
W*	- Trabajo complementario
x, y, z	- Coordenadas centroidales de la sección transversal: longitudinal con origen en el extremo inicial, paralela y perpendicular al peralte
α	- Angulo que se forma entre dos secciones transversales deformadas por flexión
γ	- Angulo que giran las fibras longitudinales durante la deformación por cortante
Δ	- Deformación axial debida a la fuerza normal

δ	- Deformación
ϵ	- Deformación axial unitaria
λ	- Deformación paralela al peralte debida a la fuerza cortante
ρ	- Radio de curvatura
σ	- Esfuerzo axial
τ	- Esfuerzo cortante
\bar{F}	- Carga ficticia en dirección del desplazamiento que se desea obtener
$\varphi_{oa}, \varphi_{ob}$	- Giros en el extremo inicial y final de la barra isostática

Capítulo 3

a, b	- Límites inferior y superior de integración
$f(x)$	- Función a integrar
$g(x)$	- Aproximación a $f(x)$ fácil de integrar
$G(z)$	- Función que resulta de sustituir la variable x como función de z en $g(x)$
h	- Separación equidistante entre los puntos de evaluación
$\hat{A}(z)$	- Función ponderante
$\mathcal{L}_l(z)$	- Función multiplicadora de Lagrange
n	- Número de evaluaciones menos uno
$p_n(z)$	- Polinomio de Legendre de grado n
$Q(z)$	- Familia de polinomios ortogonales
$q_n(z)$	- Polinomio ortogonal de grado n
$T_n(z)$	- Polinomio de Chebyshev de grado n
w_l	- Pesos de integración
x	- Variable que representa la longitud de una barra
z	- Variable que se define para transformar los límites de integración de $[a, b]$ a $[-1, 1]$
z_l	- Abscisas de integración
α	- Variable que se emplea para simplificar las expresiones, y que es igual a $(z - z_0) / h$
Δ	- Operador de diferencias progresivas

Capítulo 4

- A_1, A_2, A_3 - Longitudes del acartelamiento en el extremo inicial, del tramo central de sección constante y del acartelamiento en el extremo final de una barra
- a - Distancia del nudo inicial al punto de aplicación de la carga concentrada o al inicio de la carga uniformemente repartida.
- c - Longitud de aplicación de la carga uniformemente distribuida.
- B_0, B_a, B_L - Ancho de la sección transversal rectangular o del patín en vigas I en el extremo inicial, en la sección constante central y en el extremo final de una barra.
- D_0, D_a, D_L - Peralte de la viga I en el extremo inicial, en la sección constante central y en el extremo final de una barra.
- F_x, F_y, M - Fuerza nodal alpicada en dirección de x global, y global y momento alrededor de z global.
- H_0, H_a, H_L - Peralte de la sección transversal rectangular en el extremo inicial, en la sección constante central y en el extremo final de una barra.
- t_w, t_f - Espesor del alma y de los patines en una viga tipo I.
- X, Y - Coordenadas de la estructura en el sistema global.
- X', Y' - Coordenadas de la barra en el sistema local.

Capítulo 5

Método de Dovelas

- c - Factor de cortante
- ν - Relación de Poisson

Método de Parámetros Elásticos

- A, B, C, ϕ, ψ, θ - Parámetros generales de la estructura
- f - Altura del caballete
- h - Altura de las columnas
- H, V - Reacciones horizontal y vertical
- k - Constante intermedia sin representación física
- L - Longitud entre columnas del marco

M	- Momento flexionante
R_n, R_m	- Constantes de carga
t, v	- Constantes geométricas de una barra
W	- Carga actuante sobre un elemento
Método de Factores de Rigidez y Reacciones de Empotramiento	
C_{ab}, C_{ba}	- Factores de transporte
h_a, h_b, h_c	- Peralte de la sección rectangular en el extremo inicial, en el extremo final y en el tramo central de sección constante
I_o	- Momento de inercia de la sección constante
k_{ab}, k_{ba}	- Factores de rigidez
M_a, M_b	- Momento flexionante en los extremos inicial y final de una barra
M_{ab}, M_{ba}	- Coeficientes de momentos de empotramiento
r_{ax}	- Coeficiente de rigidez axial de una barra
$r_{aa}, r_{ab}, r_{ba}, r_{bb}$	- Coeficientes de rigidez angular de una barra
γ_a, γ_b	- Pesos por unidad de longitud en los extremos de las cartelas
$\alpha_a, r_a, \alpha_b, r_b$	- Relaciones características de los elementos
ρ_a, ρ_b	- Giros en los extremos inicial y final de una barra

1.- INTRODUCCION

Los marcos hiperestáticos con elementos de sección transversal variable, son frecuentemente utilizados en la construcción moderna; debido a ello, se hace necesario poner atención especial a la rapidez y calidad de su diseño. Los elementos rigidamente conectados forman un marco y su análisis se basa en el comportamiento elástico de la estructura entera. No es posible continuar tolerando en la práctica de la ingeniería los análisis simplificados o abreviados, apoyándose en hipótesis de dudosa validez.

El progreso lento que ha habido en el empleo de estructuras de sección variable puede atribuirse en parte a que hasta ahora no ha sido posible contar con una metodología de diseño rápida y económica para tales estructuras.

Existen muchas razones por las cuales se prefiere el uso de elementos de sección variable sobre aquellos de sección constante (ref 1): "(1) ahorro de materiales, que se traduce en estructuras más grandes o más altas; (2) mejor comportamiento en la transmisión de esfuerzos cortantes, particularmente en los apoyos y en las uniones con otros elementos, lo que es de vital importancia en diseño por sismo; y (3) los diagramas de momentos y de cortantes pueden ser correspondientes con el espesor del elemento, esto es, una mayor rigidez y estabilidad lateral". La razón de tipo estético, adicionalmente a las anteriores, en ocasiones define la forma de la sección, de acuerdo con el proyecto arquitectónico.

La práctica general en el análisis de marcos planos integrados por elementos de sección variable es llevada a cabo de diferentes maneras. En algunos casos se procede a discretizar a los elementos de sección variable en una serie de elementos de sección constante, como se esquematiza en la fig 1.1. A cada uno de los elementos producto de la discretización se le conoce con el nombre de dovelas. Este método converge a la solución correcta a medida que el número de dovelas aumenta; sin embargo implica un tiempo de computación muy grande, el cálculo y almacenamiento de un gran número de valores intermedios innecesarios, además de que resulta demasiado tedioso y tardado en cuanto a la preparación de datos.

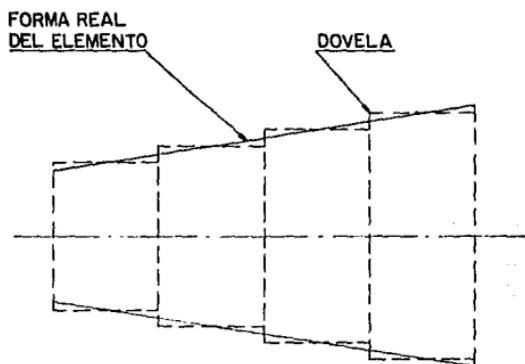


fig. 1. 1 DISCRETIZACION DE ELEMENTOS

Otros métodos contemplan la utilización de gráficas, tablas y fórmulas que si bien son obtenidas de manera exacta, no contienen todos los casos posibles de variación, ni proporcionan toda la información necesaria para el análisis, además de que se tiene un mayor riesgo de error en el manejo y obtención de datos.

El advenimiento del uso generalizado de las microcomputadoras en el análisis y diseño de estructuras facilita la comparación de alternativas y la realización de estudios exhaustivos de una manera rápida y sencilla. Además, al ahorrar el trabajo numérico al diseñador le permite concentrarse en aspectos conceptuales. Es así que se han implementado en paquetes de análisis, métodos numéricos que resuelven ciertas operaciones de manera cada vez más expedita, aunque sin embargo dichos métodos no serían los más adecuados en caso de tener que resolver el problema manualmente.

En el presente trabajo se revisa un método de análisis para marcos planos de sección variable. Está basado en el método de las flexibilidades y su empleo requiere la solución de integrales. El problema se resuelve por medio de integración numérica. El objetivo que se persigue es el de obtener de manera explícita la matriz de rigideces del elemento de sección variable y además, las reacciones de empotramiento para diversas condiciones de carga en el claro. Una vez logrado lo anterior los algoritmos son implementados en un programa de análisis de marcos planos, basado en el método de las rigideces. Finalmente, se lleva a cabo un ejemplo de aplicación.

2.- FUNDAMENTACION TEORICA

2.1 Energía de Deformación Axial.

Quando un elemento diferencial de una barra en tracción simple se carga paulatinamente, a partir de cero, por una fuerza con valor final N , el elemento diferencial de barra se alarga (fig 2.1), y si el material sigue la ley de Hooke, la gráfica deformación total-carga será una recta como se muestra en la fig 2.2.

Durante la carga del elemento diferencial de barra, la fuerza desarrolla un trabajo sobre la misma y tal trabajo se transforma en energía potencial, llamada energía de deformación, que se almacena en el elemento diferencial. Si la magnitud de la fuerza N se disminuye lentamente, el elemento diferencial recobrará su longitud original. Durante este proceso de descarga la energía de deformación almacenada en el elemento diferencial se recupera en forma de trabajo. Así pues, el elemento diferencial de barra actúa como un resorte elástico que puede almacenar y liberar energía a medida que la carga se aplica o se quita.

La energía de deformación almacenada durante la carga puede determinarse a partir del diagrama carga-desplazamiento. Supongamos que P representa un valor intermedio de la carga y δ el alargamiento correspondiente. Entonces un incremento dP en la carga producirá un incremento $d\delta$ en el alargamiento. El trabajo efectuado por P durante este alargamiento diferencial es $P d\delta$, correspondiente con el área elemental sombreada de la fig 2.3.

El trabajo total realizado en el proceso de carga es la suma de todas las áreas elementales y será igual al área bajo el diagrama carga-desplazamiento. Por lo tanto, el trabajo total hecho por la carga N , igual a la energía de deformación dU almacenada en el elemento diferencial de barra es:

$$dU = \int_0^{\Delta} P d\delta = \int_0^{\Delta} \frac{N \delta}{\Delta} d\delta = \frac{N \Delta}{2} \quad 2.1$$

Δ es la deformación correspondiente al nivel de carga N . En la deducción de esta fórmula se consideró que el material seguía la ley de Hooke, en cuyo caso sabemos que N está relacionado con Δ

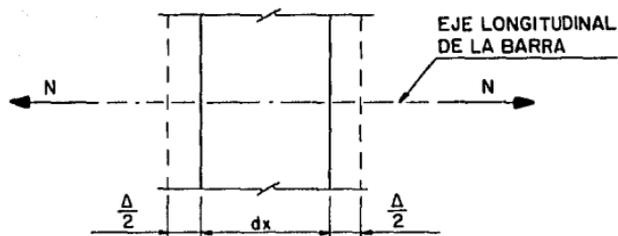


fig. 2.1 ALARGAMIENTO DE UNA BARRA EN TRACCION

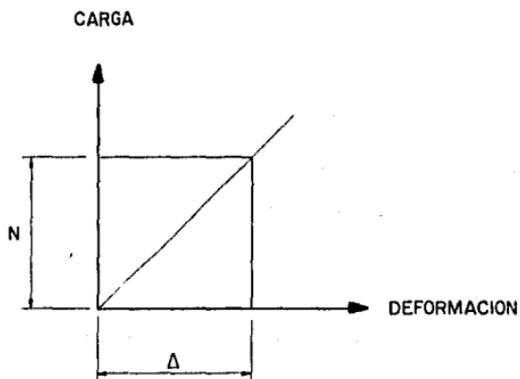


fig. 2.2 LEY DE HOOKE

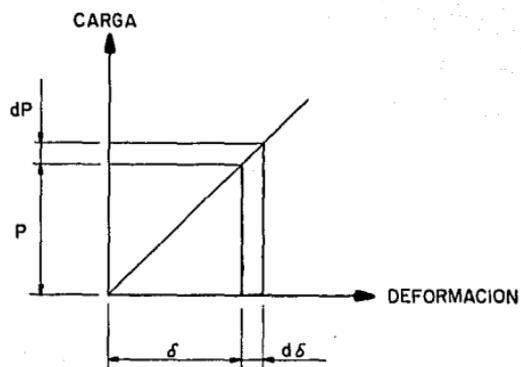


fig. 2.3 TRABAJO EXTERNO EFECTUADO POR LA CARGA P
DURANTE LA DEFORMACION $d\delta$

por medio de la ecuación:

$$\Delta = \frac{N \, dx}{E \, A}$$

en la que E es el módulo de elasticidad, A el área de la sección transversal y dx es la diferencial de la longitud. Sustituyendo esta relación en la ec 2.1 podemos expresar la energía elástica de deformación axial de la diferencial de barra en la forma siguiente:

$$dU = \frac{N^2 \, dx}{2 \, E \, A}$$

2.2 Energía de Deformación por Cortante.

La energía elástica almacenada en un elemento diferencial de barra sometido a fuerzas cortantes V (fig 2.4), puede calcularse basándose en el método utilizado en el caso de tracción simple. Consideremos un elemento de altura dy a la distancia y_1 del eje centroidal como se muestra en la fig 2.5. Durante la deformación del elemento diferencial las secciones "ab" y "cd" se mueven paralelamente y en sentido contrario una distancia relativa:

$$\lambda = \gamma \, dx$$

a medida que la diferencial de fuerza cortante crece desde cero hasta su valor final:

$$dV = \tau \, b \, dy .$$

En las ecuaciones anteriores γ es el ángulo que giran las secciones "ac" y "bd" con respecto a su posición inicial horizontal, τ es el esfuerzo cortante que actúa en la sección transversal a la distancia y_1 , b es el ancho de la sección en ese mismo punto y dx es la diferencial de longitud. El diagrama de carga-desplazamiento (dV vs λ) es análogo al de la fig 2.2 para una barra en tracción.

El trabajo efectuado por la fuerza V y almacenado en forma de energía de deformación elástica en el elemento diferencial es:

$$dU = \int_y \frac{1}{2} \lambda \, dV = \frac{1}{2} \int_y \gamma \, \tau \, b \, dy \, dx .$$

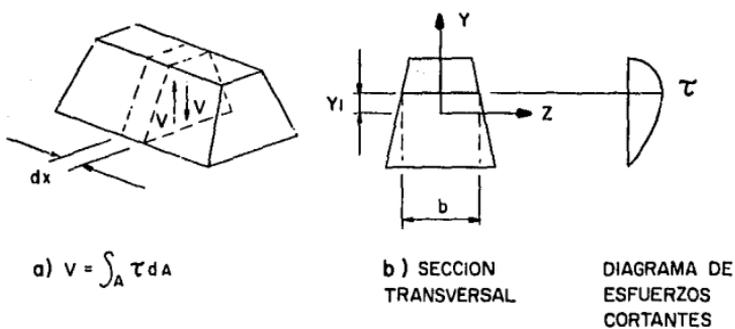


fig. 2 . 4 BARRA SOMETIDA A FUERZA CORTANTE

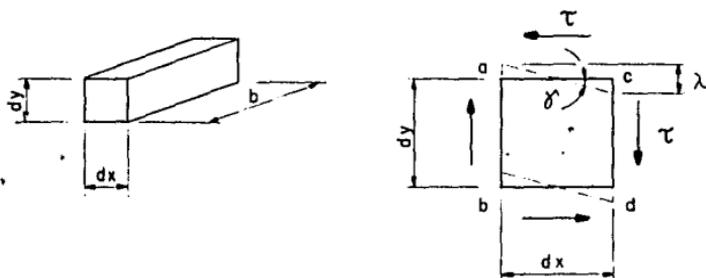


fig. 2 . 5 DEFORMACION POR ESFUERZOS CORTANTES
DE UN ELEMENTO DIFERENCIAL

Sustituyendo en esta expresión la ley de Hooke para esfuerzo cortante $\tau = G \gamma$ en la que G es el módulo de elasticidad al corte, se obtiene:

$$dU = \frac{1}{2} \int_y \frac{\tau^2}{G} b \, dy \, dx \quad .$$

Recordando la expresión de los esfuerzos tangenciales producidos por una fuerza cortante V a una distancia y_1 del eje centroidal z :

$$\tau = \frac{V Q}{I b}$$

donde Q es el momento estático del área de la sección transversal por arriba de y_1 e I es el momento de inercia de la sección. Sustituyendo en la expresión para dU obtenemos:

$$dU = \frac{1}{2} \int_y \frac{V^2 Q^2}{G I^2 b} \, dy \, dx \quad .$$

V , G e I son constantes para cualquier sección transversal, por lo tanto la ecuación anterior se puede expresar:

$$dU = \frac{V^2}{2 G I^2} \int_y \frac{Q^2}{b} \, dy \, dx \quad .$$

Si consideramos que:

$$A_c = \frac{I^2}{\int_y \frac{Q^2}{b} \, dy}$$

en donde definimos a A_c como el área de cortante de la sección transversal, entonces podemos escribir:

$$dU = \frac{V^2 \, dx}{2 G A_c}$$

que representa la energía elástica por cortante de la diferencial de barra.

2.3 Energía de Deformación por Flexión.

Consideremos una viga sujeta a fuerzas perpendiculares a su eje

longitudinal. Como consecuencia de dichas fuerzas la viga se verá sujeta a esfuerzos flexionantes que deforman a la viga según una línea curva (fig 2.6). Para cualquier punto de dicha curva se define a la curvatura κ como la relación entre la variación del ángulo θ con respecto a la longitud de arco s , esto es:

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}.$$

Si tomamos en cuenta que el ángulo θ que forma la viga deformada con respecto a su forma original es muy pequeño, entonces podemos usar a dx en lugar de ds ; dx es una diferencial de longitud; de esta manera obtenemos:

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx}. \quad 2.2$$

Calculemos a continuación la deformación unitaria axial ϵ por efecto de flexión de una fibra longitudinal a una distancia y_1 del eje neutro (fig 2.7). La longitud de la fibra deformada es:

$$\overbrace{a b} = (\rho + y_1) \alpha$$

donde ρ representa el radio de curvatura medio y α el ángulo entre las secciones transversales que contienen a "a" por un lado y a "b" por el otro. La longitud de esta misma fibra antes de la deformación es la misma que la de la fibra que se encuentra en el eje neutro. Ahora bien, en el eje neutro no existen alargamientos ni acortamientos por efecto de flexión, por lo tanto la distancia entre "c" y "d" se mantiene constante independientemente de la curvatura, siendo

$$\overline{a b} = \overline{c d} = \overbrace{c d} = \rho \alpha$$

entonces, la deformación unitaria axial es:

$$\epsilon = \frac{\overbrace{a b} - \overline{a b}}{\overline{a b}} = \frac{y_1}{\rho}.$$

Como la curvatura κ es igual al inverso del radio de curvatura ρ podemos escribir:

$$\epsilon = \kappa y_1.$$

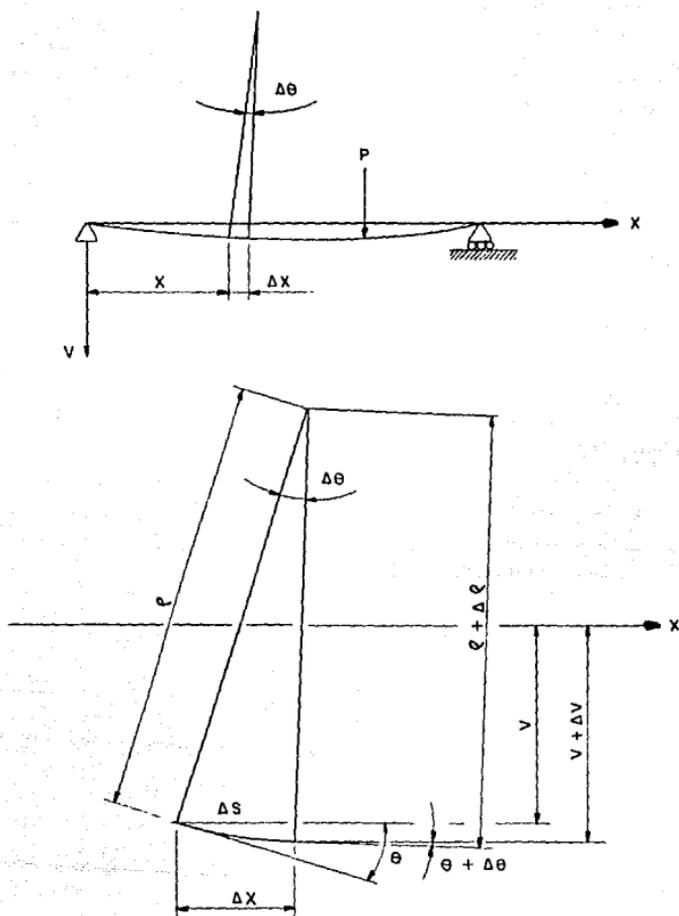


fig. 2 . 6 VIGA SOMETIDA A FLEXION

DEFINICION DE VARIABLES

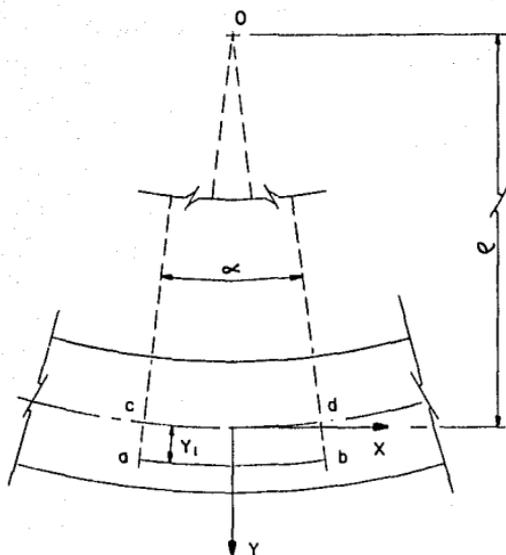


fig. 2 . 7 DEFORMACION AXIAL DE FIBRAS

LONGITUDINALES POR EFECTO DE FLEXION

Si utilizamos la expresión que representa a la ley de Hooke:

$$\sigma = E \epsilon$$

donde σ representa los esfuerzos axiales; y al mismo tiempo recordamos la fórmula de la escuadría de la que obtenemos los esfuerzos axiales producidos por un momento M a una distancia y_1 del eje neutro:

$$\sigma = \frac{M}{I} y_1$$

podemos obtener una expresión que nos relaciona la curvatura con el momento:

$$A = \frac{M}{E I}$$

Igualando la expresión anterior con la ec 2.2 obtenemos:

$$d\theta = \frac{M dx}{E I}$$

La energía de deformación almacenada en un elemento diferencial de barra debida al trabajo de un momento M , aplicado gradualmente, acompañado de una rotación que crece desde cero hasta $d\theta$ está dado por:

$$dU = \frac{M d\theta}{2}$$

Finalmente podemos escribir la fórmula que permite obtener la energía elástica de deformación por flexión del elemento diferencial de barra:

$$dU = \frac{M^2 dx}{2 E I}$$

2.4 Energía de Deformación de la Barra.

La energía de deformación de la barra se obtiene sumando las contribuciones por fuerza axial, cortante y momento flexionante,

e integrándolas a toda la longitud de la barra:

$$U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2 E I} + \int_0^L \frac{N^2 dx}{2 E A} + \int_0^L \frac{V^2 dx}{2 G A_c}$$

2.5 Energía y Trabajo Complementario.

Definamos ahora otro tipo de trabajo para la barra cuya gráfica deformación total-carga es no lineal (fig 2.8). Este trabajo recibe el nombre de trabajo complementario W^* , y se define como sigue:

$$W^* = \int_0^{P_1} \delta dP$$

El trabajo complementario está representado por el área comprendida entre la gráfica deformación total-carga y el eje vertical (fig 2.8b). No tiene una connotación física obvia como el trabajo W , pero puede observarse que:

$$W + W^* = P_1 \delta_1$$

P_1 es la carga aplicada y δ_1 el desplazamiento correspondiente. Por tanto, en sentido geométrico, el trabajo W^* es el complemento del trabajo W porque completa el rectángulo mostrado en la fig 2.8b. La energía complementaria U^* de la barra es igual al trabajo complementario de las cargas aplicadas.

2.6 Segundo Teorema de Castigliano.

Consideremos una estructura con comportamiento no lineal sometida a n cargas P_1, P_2, \dots, P_n , que producen los desplazamientos $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. El valor δ_i representa el desplazamiento en el punto de aplicación de la carga P_i , en dirección de dicha carga y debido a la totalidad de las fuerzas (fig 2.9a). La energía complementaria total se obtiene sumando el trabajo complementario efectuado por cada una de las fuerzas (fig 2.9b):

$$U^* = \sum_{i=1}^n \int_0^{P_i} \delta dP$$

Si imaginamos que una carga, digamos P_i , sufre un pequeño incremento dP_i , mientras que las otras cargas no cambian (fig 2.9c), la energía complementaria se incrementará en una

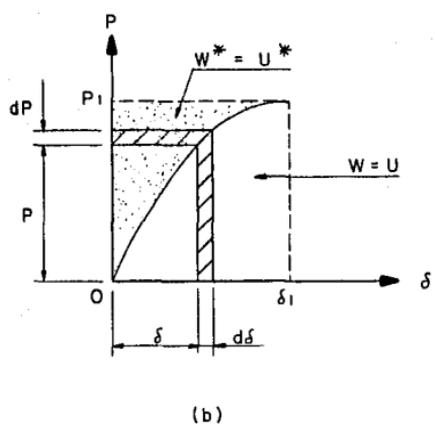
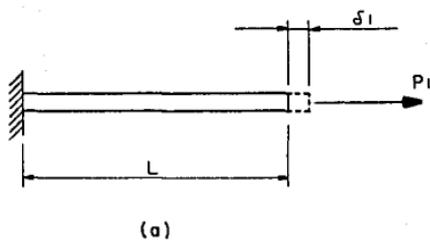
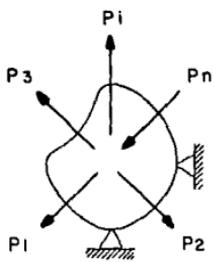
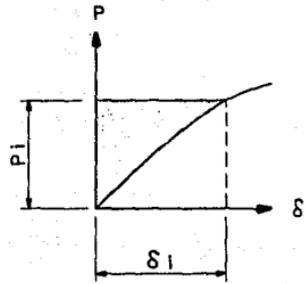


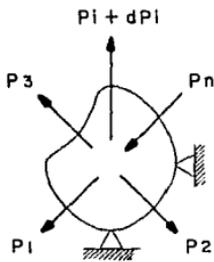
fig. 2.8 ENERGIA DE DEFORMACION
Y ENERGIA COMPLEMENTARIA



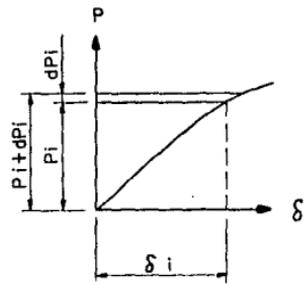
(a)



(b)



(c)



(d)

fig. 2 . 9 SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO
INCREMENTO DIFERENCIAL DE UNA FUERZA

cantidad pequeña dU^* , que está dada por:

$$dU^* = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} dP_i .$$

El trabajo complementario adicional debido al incremento de carga es el rectángulo elemental mostrado en la fig 2.9d. De esto se deriva otra expresión para el incremento de energía complementaria:

$$dU^* = \delta_i dP_i .$$

Igualando las dos expresiones anteriores se llega a lo que se conoce como el teorema de Crotti-Engesser:

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} .$$

En el caso de comportamiento lineal la energía complementaria es igual a la energía de deformación (el área bajo la curva de la fig 2.9b) y el teorema de Crotti-Engesser se transforma en:

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} .$$

Esta ecuación se conoce por segundo teorema de Castigliano y se enuncia como sigue: "En una estructura lineal, la derivada parcial de la energía de deformación con respecto a una carga P_i es igual al desplazamiento correspondiente δ_i ".

En el desarrollo presentado se utilizaron las fuerzas y desplazamientos en un sentido generalizado. Si la carga es un par M , con un desplazamiento correspondiente θ , entonces simplemente se sustituyen P y δ por M y θ respectivamente.

2.7 Integrales de Mohr.

Es evidente que el segundo teorema de Castigliano sólo puede utilizarse para hallar desplazamientos que corresponden a cargas que actúan sobre la estructura. Si se desea obtener un desplazamiento en algún sitio en que no haya ninguna carga, se deberá aplicar una carga ficticia sobre la estructura que corresponda al desplazamiento deseado. A continuación se procede a

calcular el desplazamiento utilizando el segundo teorema de Castigliano, resultando que el desplazamiento quedará expresado en función de las cargas reales y la ficticia. Haciendo igual a cero la carga ficticia en la expresión final, se obtiene el desplazamiento deseado debido a las cargas reales.

En el caso de una barra, anteriormente se derivó la expresión que nos dá la energía interna de deformación en función de los elementos mecánicos debidos a un sistema de cargas cualquiera:

$$U = \int_0^L \frac{M_T^2 dx}{2 E I} + \int_0^L \frac{N_T^2 dx}{2 E A} + \int_0^L \frac{V_T^2 dx}{2 B A_c} .$$

El subíndice "T" se emplea por conveniencia para representar elementos mecánicos totales y la expresión es equivalente a la anteriormente desarrollada. Consideremos que en una barra sujeta a un sistema de cargas cualquiera se requiere determinar el desplazamiento δ_ϕ de un punto donde no está aplicada ninguna fuerza exterior. Aplicamos una fuerza ϕ en este punto y en la dirección que nos interesa. Los elementos mecánicos serán:

$$M_T = M + M_\phi \quad ; \quad V_T = V + V_\phi \quad ; \quad N_T = N + N_\phi$$

donde M, V y N son los elementos mecánicos debidos a las fuerzas actuantes y M_ϕ , V_ϕ y N_ϕ son los debidos a la carga ficticia ϕ . La contribución por efecto de la carga ϕ se puede expresar en función de ella misma de la manera siguiente:

$$M_T = M + m \phi \quad ; \quad V_T = V + v \phi \quad ; \quad N_T = N + n \phi$$

entonces m, v y n son los elementos mecánicos debidos a una fuerza unitaria en la dirección de ϕ y en el mismo punto de aplicación. Elevando al cuadrado las expresiones anteriores tenemos:

$$\begin{aligned} M_T^2 &= M^2 + 2 M m \phi + m^2 \phi^2 \\ V_T^2 &= V^2 + 2 V v \phi + v^2 \phi^2 \\ N_T^2 &= N^2 + 2 N n \phi + n^2 \phi^2 . \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la energía interna de deformación, derivando con respecto a ϕ de acuerdo al segundo

teorema de Castigliano y tomando en cuenta que δ vale cero se obtiene :

$$\delta \phi = \frac{\partial U}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} = 0$$

o sea

$$\delta \phi = \int_0^L \frac{M m dx}{E I} + \int_0^L \frac{N n dx}{E A} + \int_0^L \frac{V v dx}{G A_c} \quad 2.3$$

Las integrales así obtenidas se denominan integrales de Mohr.

2.8 Primer Teorema de Castigliano.

El primer teorema de Castigliano establece que:

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i}$$

Esta ecuación expresa que la derivada parcial de la energía de deformación con respecto a un desplazamiento δ_i es igual a la fuerza correspondiente P_i . La demostración de este teorema es análoga a la seguida para obtener el teorema de Crotti-Engesser (sección 2.6) excepto que se utiliza a la energía de deformación en lugar de la energía complementaria y se calibra el incremento diferencial de un desplazamiento δ_i en vez del incremento diferencial de una fuerza P_i . Puede observarse que el primer teorema de Castigliano tiene una aplicación general a estructuras lineales y no lineales, a diferencia del segundo teorema que aplica exclusivamente a estructuras lineales.

2.9 Teorema de los Recíprocos para las Rigideces.

Sea una estructura lineal sometida a n cargas P con sus desplazamientos correspondientes δ_i . La energía de deformación está expresada por:

$$U = \sum_{i=1}^n \int_0^{\delta_i} P d\delta_i = \sum_{i=1}^n \frac{P_i \delta_i}{2} = \frac{1}{2} (P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + \dots + P_n \delta_n)$$

como la estructura se comporta linealmente las cargas se pueden

expresar como combinaciones lineales de los desplazamientos, esto es:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= s_{11} \delta_1 + s_{12} \delta_2 + \dots + s_{1n} \delta_n \\
 P_2 &= s_{21} \delta_1 + s_{22} \delta_2 + \dots + s_{2n} \delta_n \\
 &\dots\dots\dots \\
 P_n &= s_{n1} \delta_1 + s_{n2} \delta_2 + \dots + s_{nn} \delta_n
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

donde $s_{11}, s_{12}, \dots, s_{nn}$ son coeficientes constantes que dependen exclusivamente de las propiedades de la estructura. Sustituyendo en la expresión para U obtenemos:

$$\begin{aligned}
 U = \frac{1}{2} &\left[s_{11} \delta_1^2 + s_{12} \delta_1 \delta_2 + \dots + s_{1n} \delta_1 \delta_n \right. \\
 &+ s_{21} \delta_2 \delta_1 + s_{22} \delta_2^2 + \dots + s_{2n} \delta_2 \delta_n \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\left. + s_{n1} \delta_n \delta_1 + s_{n2} \delta_n \delta_2 + \dots + s_{nn} \delta_n^2 \right]
 \end{aligned}$$

en la que se observa que U es una función cuadrática de los desplazamientos.

A continuación vamos a derivar las ecs 2.4 con respecto a cada uno de los desplazamientos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P_1}{\partial \delta_1} &= s_{11} \quad , \quad \frac{\partial P_1}{\partial \delta_2} = s_{12} \quad , \quad \dots \quad , \quad \frac{\partial P_1}{\partial \delta_n} = s_{1n} \quad , \\
 \frac{\partial P_2}{\partial \delta_1} &= s_{21} \quad , \quad \frac{\partial P_2}{\partial \delta_2} = s_{22} \quad , \quad \dots \quad , \quad \frac{\partial P_2}{\partial \delta_n} = s_{2n} \quad , \\
 &\dots\dots\dots \\
 \frac{\partial P_n}{\partial \delta_1} &= s_{n1} \quad , \quad \frac{\partial P_n}{\partial \delta_2} = s_{n2} \quad , \quad \dots \quad , \quad \frac{\partial P_n}{\partial \delta_n} = s_{nn} \quad .
 \end{aligned}$$

De acuerdo con el primer teorema de Castigliano:

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i}$$

y sustituyendo en las expresiones anteriores se tiene:

$$s_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_1^2}, \quad s_{12} = \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_2 \partial \delta_1}, \quad \dots, \quad s_{1n} = \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_n \partial \delta_1},$$

$$s_{21} = \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_1 \partial \delta_2}, \quad s_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_2^2}, \quad \dots, \quad s_{2n} = \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_n \partial \delta_2},$$

.....

$$s_{n1} = \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_1 \partial \delta_n}, \quad s_{n2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_2 \partial \delta_n}, \quad \dots, \quad s_{nn} = \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_n^2}$$

o sea:

$$s_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_j \partial \delta_i}$$

como el orden de derivación es indiferente:

$$s_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_j \partial \delta_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_i \partial \delta_j} = s_{ji}.$$

Esta expresión establece el teorema de los recíprocos para las rigideces de una estructura linealmente elástica. El teorema anterior explica la simetría de la matriz de rigideces para este tipo de estructuras.

2.10 Matriz de Flexibilidad en el Extremo Inicial de una Barra de Sección Variable.

Supongamos una barra recta de sección transversal variable, con comportamiento elástico-lineal en la que en su extremo inicial A

existen tres grados de libertad en el plano (fig 2.10), a saber:

$$\left\{ d_a \right\} = \begin{Bmatrix} d_{xa} \\ d_{ya} \\ \varphi_a \end{Bmatrix}$$

d_{xa} representa el desplazamiento axial, d_{ya} el desplazamiento perpendicular al eje longitudinal y φ_a el giro del extremo A de la barra. Dichos desplazamientos corresponden con las fuerzas nodales:

$$\left\{ F_a \right\} = \begin{Bmatrix} F_{xa} \\ F_{ya} \\ M_a \end{Bmatrix}$$

respectivamente, F_{xa} representa la fuerza axial, F_{ya} la fuerza cortante y M_a el momento actuante en dicho extremo A. Debido al comportamiento lineal los desplazamientos se pueden expresar como combinaciones lineales de las fuerzas (y viceversa como se utilizaron en el desarrollo del teorema de los recíprocos para las rigideces), esto es:

$$d_{xa} = f_{11} F_{xa} + f_{12} F_{ya} + f_{13} M_a$$

$$d_{ya} = f_{21} F_{xa} + f_{22} F_{ya} + f_{23} M_a$$

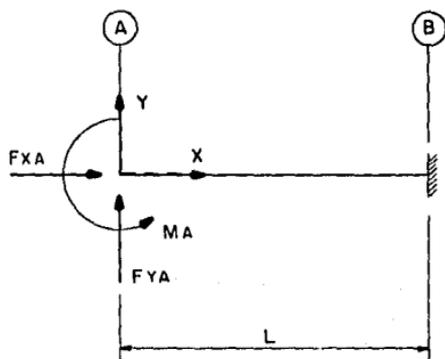
$$\varphi_a = f_{31} F_{xa} + f_{32} F_{ya} + f_{33} M_a$$

o bien, expresado matricialmente:

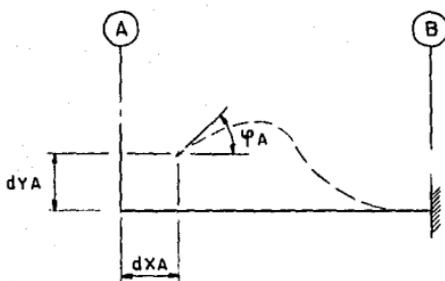
$$\left\{ d_a \right\} = \left[f_a \right] \left\{ F_a \right\}. \quad 2.5$$

El término f_{ij} se conoce como coeficiente de flexibilidad y se define como el desplazamiento del grado de libertad i debido a una fuerza unitaria correspondiente al grado de libertad j , mientras las demás fuerzas permanecen nulas. La matriz $[f_a]$ se denomina matriz de flexibilidad en A.

De acuerdo con la definición de coeficiente de flexibilidad



a)



b)

fig. 2. 10 FLEXIBILIDAD EN (A) DE UNA BARRA

DE SECCION VARIABLE

tenemos:

$$f_{11} = d_{x_a} \begin{Bmatrix} F_{x_a} = 1 \\ F_{y_a} = 0 \\ M_a = 0 \end{Bmatrix}, \quad f_{12} = d_{x_a} \begin{Bmatrix} F_{x_a} = 0 \\ F_{y_a} = 1 \\ M_a = 0 \end{Bmatrix}, \quad f_{13} = d_{x_a} \begin{Bmatrix} F_{x_a} = 0 \\ F_{y_a} = 0 \\ M_a = 1 \end{Bmatrix}$$

$$f_{21} = d_{y_a} \begin{Bmatrix} F_{x_a} = 1 \\ F_{y_a} = 0 \\ M_a = 0 \end{Bmatrix}, \quad f_{22} = d_{y_a} \begin{Bmatrix} F_{x_a} = 0 \\ F_{y_a} = 1 \\ M_a = 0 \end{Bmatrix}, \quad f_{23} = d_{y_a} \begin{Bmatrix} F_{x_a} = 0 \\ F_{y_a} = 0 \\ M_a = 1 \end{Bmatrix}$$

$$f_{31} = \varphi_a \begin{Bmatrix} F_{x_a} = 1 \\ F_{y_a} = 0 \\ M_a = 0 \end{Bmatrix}, \quad f_{32} = \varphi_a \begin{Bmatrix} F_{x_a} = 0 \\ F_{y_a} = 1 \\ M_a = 0 \end{Bmatrix}, \quad f_{33} = \varphi_a \begin{Bmatrix} F_{x_a} = 0 \\ F_{y_a} = 0 \\ M_a = 1 \end{Bmatrix}$$

(| léase "tal que"). Para la obtención de estos coeficientes nos apoyaremos en las integrales de Mohr.

Haciendo todas las combinaciones de i con j en la fig 2.11 y sustituyendo en la ec 2.3 obtenemos:

$$f_{11} = \int_0^L \frac{dx}{E A} \quad f_{12} = 0 \quad f_{13} = 0$$

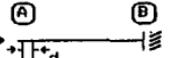
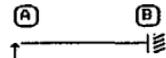
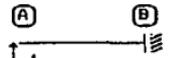
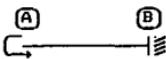
$$f_{21} = 0 \quad f_{22} = \int_0^L \frac{x^2 dx}{E I} + \int_0^L \frac{dx}{G A_c} \quad f_{23} = -\int_0^L \frac{x dx}{E I} \quad 2.6$$

$$f_{31} = 0 \quad f_{32} = -\int_0^L \frac{x dx}{E} \quad f_{33} = \int_0^L \frac{dx}{E I}$$

que son los coeficientes de la matriz de flexibilidad en el extremo A de una barra de sección variable.

2.11 *Matriz de Rigidez en el Extremo Inicial de una Barra de Sección Variable.*

Las fuerzas en extremo A de una barra expresadas en función de

Fuerzas Unitarias Actuantes	Fuerza Unitaria en Dirección del Desplazamiento por Obtener
$j = 1$ $F_{x_a} = 1$ $F_{y_a} = 0$ $M_a = 0$  E.M. $\begin{cases} M = 0 & (0 \leq x \leq L) \\ N = -1 & \text{"} \\ V = 0 & \text{"} \end{cases}$	$i = 1$  E.M. $\begin{cases} m = 0 & (0 \leq x \leq L) \\ n = -1 & \text{"} \\ v = 0 & \text{"} \end{cases}$
$j = 2$ $F_{x_a} = 0$ $F_{y_a} = 1$ $M_a = 0$  E.M. $\begin{cases} M = x & (0 \leq x \leq L) \\ N = 0 & \text{"} \\ V = 1 & \text{"} \end{cases}$	$i = 2$  E.M. $\begin{cases} m = x & (0 \leq x \leq L) \\ n = 0 & \text{"} \\ v = 1 & \text{"} \end{cases}$
$j = 3$ $F_{x_a} = 0$ $F_{y_a} = 0$ $M_a = 1$  E.M. $\begin{cases} M = -1 & (0 \leq x \leq L) \\ N = 0 & \text{"} \\ V = 0 & \text{"} \end{cases}$	$i = 3$  E.M. $\begin{cases} m = -1 & (0 \leq x \leq L) \\ n = 0 & \text{"} \\ v = 0 & \text{"} \end{cases}$

(E.M.: Elementos Mecánicos)

fig 2.11 Obtención de la Matriz de Flexibilidades en A por medio de las integrales de Mohr.

Los desplazamientos que producen están dados por:

$$\{ F_a \} = [k_a] \{ d_a \}.$$

A la matriz $[k_a]$ se le denomina matriz de rigidez en el extremo A y los coeficientes de rigidez k_{ij} que la integran están definidos como la fuerza que hay que aplicar en dirección del grado de libertad j para producir un desplazamiento unitario en el grado de libertad i, mientras los demás desplazamientos permanecen nulos. Comparando la ecuación anterior con la 2.5 se puede ver que:

$$[k_a] = [f_a]^{-1}$$

esto es, la matriz de rigidez es igual a la inversa de la matriz de flexibilidad. Entonces para encontrar la matriz de rigidez en el extremo A solo tenemos que invertir la matriz de flexibilidad que ya conocemos. Como se puede observar, en la matriz de flexibilidad el coeficiente f_{11} se halla desacoplado de los demás por lo que para la inversión dicha matriz se puede subdividir en dos de la manera siguiente:

$$[f_a]^{-1} = \begin{bmatrix} [f_{11}]^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} f_{22} & f_{23} \\ f_{23} & f_{33} \end{bmatrix}^{-1} \\ 0 & \end{bmatrix}.$$

La inversión de la primera es directa:

$$[f_{11}]^{-1} = \frac{1}{f_{11}}.$$

Para invertir la segunda nos apoyaremos en el método de la adjunta el cual establece que la inversa de una matriz $[L]$ es igual al producto de la matriz adjunta $[L]^*$ por el recíproco del determinante $|L|$. A su vez la matriz adjunta $[L]^*$ es igual a la matriz de cofactores de la transpuesta. Para nuestro caso tenemos

que el determinante vale:

$$\text{DET} = f_{22} f_{33} - f_{23}^2$$

(nota: $f_{23} = f_{32}$), la transpuesta es:

$$\begin{bmatrix} f_{22} & f_{23} \\ f_{23} & f_{33} \end{bmatrix}$$

y la adjunta:

$$\begin{bmatrix} f_{33} & -f_{23} \\ -f_{23} & f_{22} \end{bmatrix}$$

finalmente la inversa será:

$$\begin{bmatrix} f_{33} / \text{DET} & -f_{23} / \text{DET} \\ -f_{23} / \text{DET} & f_{22} / \text{DET} \end{bmatrix}$$

Agrupando a las dos matrices invertidas obtenemos la matriz de rigidez en el extremo inicial de una barra de sección variable:

$$\left[k_{\alpha} \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{f_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_{33}}{\text{DET}} & -\frac{f_{23}}{\text{DET}} \\ 0 & -\frac{f_{23}}{\text{DET}} & \frac{f_{22}}{\text{DET}} \end{bmatrix}$$

2.12 Matriz de Rigidez Total de una Barra de Sección Variable.

Los extremos de una barra en el plano tienen 6 grados de

libertad que son:

$$\{ d \} = \begin{Bmatrix} d_{xa} \\ d_{ya} \\ \varphi_a \\ d_{xb} \\ d_{yb} \\ \varphi_b \end{Bmatrix}$$

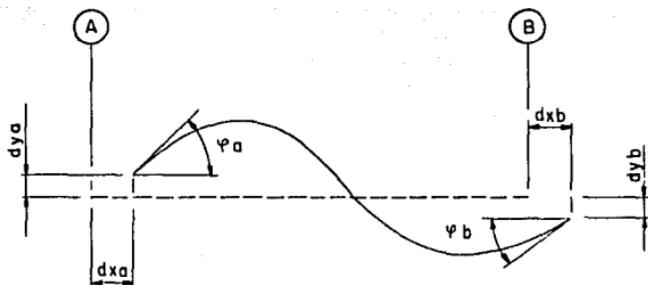
d_{xa} y d_{xb} son los desplazamientos axiales, d_{ya} y d_{yb} son los desplazamientos perpendiculares y φ_a y φ_b son los giros de los extremos A y B respectivamente (fig 2.12). Las fuerzas nodales correspondientes son:

$$\{ F \} = \begin{Bmatrix} F_{xa} \\ F_{ya} \\ M_a \\ F_{xb} \\ F_{yb} \\ M_b \end{Bmatrix}$$

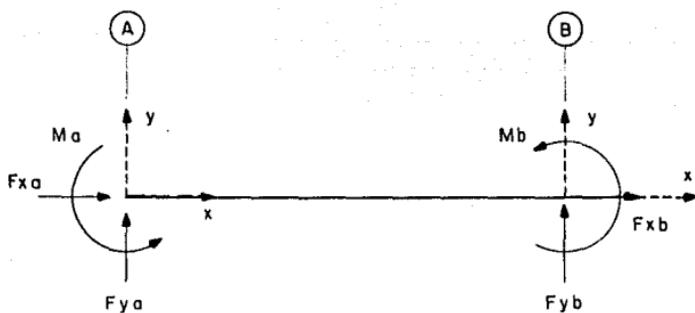
F_{xa} y F_{xb} representan las fuerzas axiales, F_{ya} y F_{yb} las fuerzas cortantes y M_a y M_b los momentos actuantes en los extremos A y B, respectivamente. La matriz de rigidez total en el plano de una barra de sección variable $[k]$, que relaciona a las fuerzas con los desplazamientos por medio de la ecuación:

$$\{ F \} = [k] \{ d \} .$$

se puede obtener con base en la matriz de rigidez en el extremo inicial de la misma barra $[k_a]$ apoyándose en el equilibrio, en el teorema de los recíprocos para las rigideces (sección 2.9) y teniendo en cuenta la definición de coeficiente de rigidez k_{ij} (sección 2.11).



a)



b)

fig. 2.12 MATRIZ DE RIGIDEZ TOTAL DE UNA BARRA DE SECCION VARIABLE

$$\begin{aligned} \sum F_H = 0 &= k_{11} + k_{14} \\ k_{14} &= -k_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_H = 0 &= k_{41} + k_{44} \\ k_{44} &= -k_{41} \\ \text{por simetría} \\ k_{41} &= k_{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_V = 0 &= k_{23} + k_{25} \\ k_{25} &= -k_{23} \\ \sum M_B = 0 &= -k_{23} L + k_{23} + k_{2d} L \\ k_{2d} &= k_{23} L - k_{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_V = 0 &= k_{53} + k_{55} \\ k_{55} &= -k_{53} \\ \sum M_B = 0 &= -k_{53} L + k_{53} + k_{5d} L \\ k_{5d} &= k_{53} L - k_{53} \\ \text{por simetría} \\ k_{53} = k_{23} \text{ y } k_{55} &= k_{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_V = 0 &= k_{32} + k_{35} \\ k_{35} &= -k_{32} \\ \sum M_B = 0 &= -k_{32} L + k_{33} + k_{3d} L \\ k_{3d} &= k_{32} L - k_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_V = 0 &= k_{d2} + k_{d5} \\ k_{d5} &= -k_{d2} \\ \sum M_B = 0 &= -k_{d2} L + k_{d3} + k_{d5} L \\ k_{d5} &= k_{d2} L - k_{d3} \\ \text{por simetría} \\ k_{d2} = k_{32} \text{ y } k_{d5} &= k_{3d} \end{aligned}$$

fig 2.13 Obtención de la Matriz de Rigidez Total en Función de la Matriz de Rigidez en A de una Barra de Sección Variable.

que es la matriz de rigidez total en el plano de una barra de sección variable, en función de los coeficientes de flexibilidad en el extremo inicial dados por las ecs 2.6.

2.13 Obtención de Reacciones de Empotramiento para Barras de Sección Variable.

Una barra de sección variable doblemente empotrada es una estructura estáticamente indeterminada y su análisis se puede llevar a cabo de la siguiente manera:

- se seleccionan como redundantes cualesquiera de las reacciones desconocidas
- se libera a la estructura permitiendo los desplazamientos correspondientes a las redundantes
- la estructura liberada, que es estáticamente determinada y estable, se carga después tanto con las cargas reales como con las propias redundantes
- los desplazamientos causados por estas dos condiciones de carga se calculan y combinan luego en una ecuación de compatibilidad de desplazamientos. Esta ecuación de compatibilidad expresa una condición perteneciente a la deformación, a saber, que la deformación correspondiente a las redundantes es cero
- después de sustituir las expresiones de los desplazamientos en función de las fuerzas en la ecuación de compatibilidad, podrán despejarse las reacciones redundantes
- finalmente, las reacciones desconocidas que faltan por calcular se hallan por estática.

En el caso de cargas perpendiculares al eje de la barra (fig 2.14) escogemos como redundantes a \bar{M}_a y \bar{M}_b , que son los momentos de empotramiento en los extremos A y B, de esta manera la estructura liberada será una barra doblemente apoyada. Para la obtención de los giros φ_{oa} y φ_{ob} en los extremos A y B de la barra liberada, debidos a las cargas reales, nos apoyaremos en las integrales de Mohr (sección 2.7). Los elementos mecánicos en la barra liberada para una condición de carga general están representados por M_0 para los momentos flexionantes y V_0 para las fuerzas cortantes. En la fig 2.15a se muestran los elementos mecánicos debido a un momento unitario en dirección de φ_{ob} .

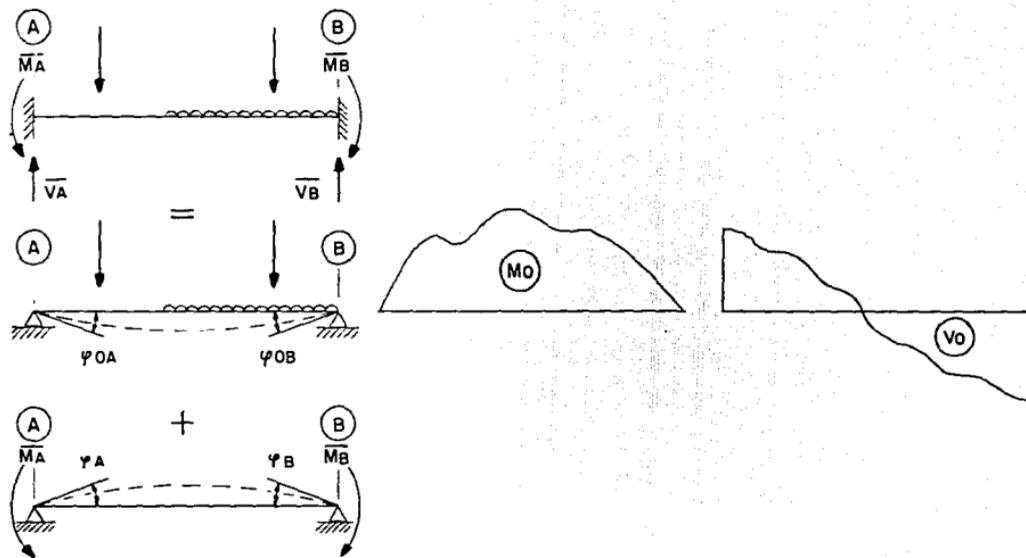


fig. 2.14 MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PARA CARGAS PERPENDICULARES

A UNA BARRA DE SECCION VARIABLE

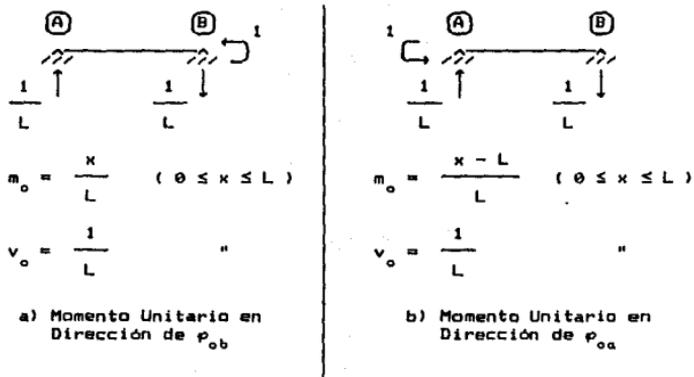


fig 2.15 Obtención de los Giros en la Isostática por medio de las Integrales de Mohr.

Sustituyendo en la ec 2.2 tenemos:

$$\rho_{ob} = \frac{1}{L} \left[\int_0^L \frac{M_o x dx}{E I} + \int_0^L \frac{V_o dx}{G A_c} \right] \quad 2.7$$

de manera similar para ρ_{oa} (fig 2.15b):

$$\rho_{oa} = \frac{1}{L} \left[\int_0^L \frac{M_o (x - L) dx}{E I} + \int_0^L \frac{V_o dx}{G A_c} \right]$$

esta última expresión puede simplificarse y llegar a:

$$\rho_{oa} = \rho_{ob} - \int_0^L \frac{M_o dx}{E I} \quad 2.8$$

Por otro lado los giros ρ_a y ρ_b en los extremos A y B de la estructura liberada debidos a las redundantes están dados por:

$$\rho_a = f_{aa} \bar{M}_a + f_{ad} \bar{M}_b$$

$$\rho_b = f_{ba} \bar{M}_a + f_{bd} \bar{M}_b$$

Las ecuaciones de compatibilidad establecen que:

$$\rho_{oa} + \rho_a = 0$$

$$\rho_{ob} + \rho_b = 0$$

sustituyendo en ellas a ρ_a y ρ_b se tiene:

$$f_{aa} \bar{M}_a + f_{ad} \bar{M}_b = -\rho_{oa}$$

$$f_{ba} \bar{M}_a + f_{bd} \bar{M}_b = -\rho_{ob}$$

despejando a \bar{M}_a y \bar{M}_b se obtiene finalmente:

$$\bar{M}_a = -k_{aa} \rho_{oa} - k_{ad} \rho_{ob}$$

$$\bar{M}_b = -k_{ba} \rho_{oa} - k_{bd} \rho_{ob}$$

donde ρ_{ob} y ρ_{oa} están dados por las ecs 2.7 y 2.8

respectivamente. Una vez conocidos \bar{M}_a y \bar{M}_b , las fuerzas cortantes \bar{V}_a y \bar{V}_b se determinan por equilibrio.

En el caso de cargas axiales sobre la barra doblemente empotrada (fig 2.16) escogemos como redundante a \bar{N}_a , por lo tanto la estructura liberada es una barra en cantiliver. Las fuerzas normales en la estructura liberada para una condición de carga general están representadas por N_o . Estas fuerzas originan un desplazamiento axial en el extremo inicial d_{xoa} . En la fig 2.17 se muestran los elementos mecánicos debidos a una fuerza unitaria en dirección de dicho desplazamiento axial d_{xoa} . Sustituyendo en la ec 2.3 se obtiene:

$$d_{xoa} = - \int_0^L \frac{N_o dx}{EA}$$

El desplazamiento d_{xa} en el extremo inicial de la isostática debido a la redundante está dado por:

$$d_{xa} = f_{11} \bar{N}_a$$

La ecuación de compatibilidad es:

$$d_{oxa} + d_{xa} = 0$$

sustituyendo los valores d_{xoa} y d_{xa} y despejando a \bar{N}_a se obtiene:

$$\bar{N}_a = k_{11} \int_0^L \frac{N_o dx}{EA}$$

La reacción \bar{N}_b se determina por equilibrio.

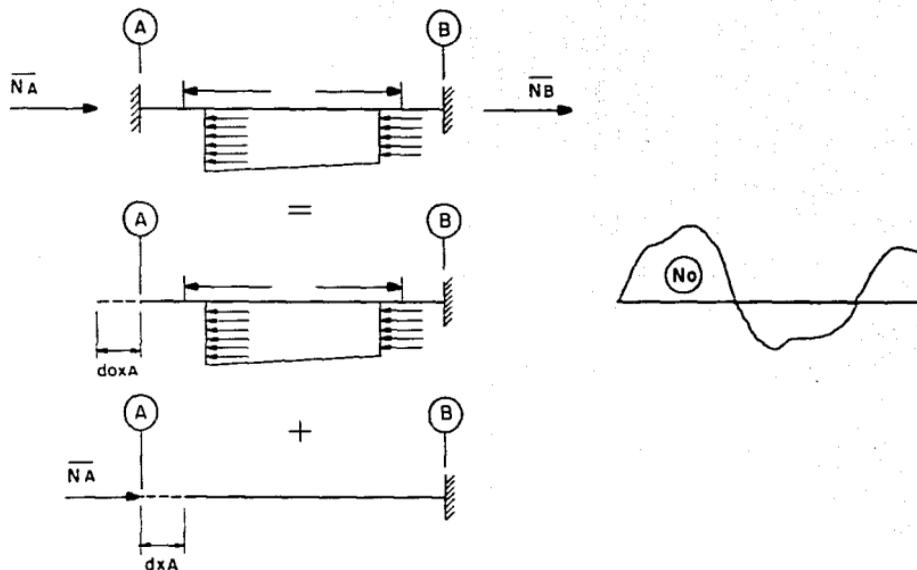
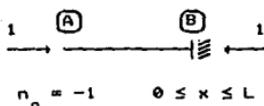


fig. 2 . 16 REACCIONES AXIALES DE EMPOTRAMIENTO PARA CARGAS
 AXIALES EN UNA BARRA DE SECCION VARIABLE



$n_0 = -1$ $0 \leq x \leq L$

a) Fuerza Unitaria en
Dirección de d_{oxa}

fig 2.17 Obtención del Desplazamiento Axial en el Extremo Inicial de la isostática por medio de las Integrales de Mohr.

3.- INTEGRACION NUMERICA

En el capítulo anterior nos encontramos con la necesidad de resolver integrales definidas, dichas integrales son:

$$\int_0^L \frac{dx}{EA} \quad ; \quad \int_0^L \frac{dx}{GA_c} \quad ; \quad \int_0^L \frac{dx}{EI} \quad ; \quad \int_0^L \frac{x dx}{EI} \quad ;$$
$$\int_0^L \frac{x^2 dx}{EI} \quad ; \quad \int_0^L \frac{N_0 dx}{EI} \quad ; \quad \int_0^L \frac{V_0 dx}{GA_c} \quad ; \quad \int_0^L \frac{M_0 dx}{EI}$$

3.1

que se pueden resumir en:

$$\int_a^b f(x) dx$$

3.2

La evaluación de este tipo de integrales por métodos exactos es en ocasiones muy laboriosa o imposible y se hacen necesarios, por lo tanto, otros métodos de solución. Una alternativa evidente es el encontrar una función $g(x)$ que sea al mismo tiempo una aproximación adecuada de $f(x)$ y simple de integrar analíticamente. En este caso la ec 3.2 puede aproximarse por:

$$\int_a^b g(x) dx$$

Los textos de métodos numéricos abundan en fórmulas de integración numérica (llamada también cuadratura). Los métodos de integración más corrientemente usados pueden clasificarse en dos grupos: las fórmulas de Newton-Cotes, que utilizan valores de la función en puntos base equidistantes; y las fórmulas de cuadratura gaussiana, que utilizan puntos base situados a intervalos desiguales cuya longitud está determinada por ciertas propiedades de los polinomios ortogonales.

Existe otra clasificación adicional de los métodos de integración numérica, a saber: integraciones abiertas y cerradas. Las fórmulas de integración cerradas utilizan información sobre $f(x)$ en ambos límites de integración y en puntos intermedios; mientras que las fórmulas abiertas no requieren información de $f(x)$ en los límites de integración, sino únicamente en puntos

intermedios.

Para simplificar en lo posible la evaluación de la ec 3.2 sin restar generalidad al resultado, se transforma el intervalo de integración $[a, b]$ al $[-1, 1]$, por medio de un adecuado cambio de variable. Se define la variable z como:

$$z = \frac{2x - (a + b)}{b - a}$$

entonces tenemos:

$$\int_a^b g(x) dx = \int_{-1}^1 G(z) dz$$

Las fórmulas de integración numérica normalizadas al intervalo $[-1, 1]$ son de la forma:

$$\int_{-1}^1 G(z) dz = \sum_{i=0}^n w_i G(z_i) \quad | \quad -1 \leq z_i \leq 1 \quad 3.3$$

donde las abscisas z_i y los pesos w_i dependen del método de integración.

3.1 Newton-Cotes Cerrado.-

En el método de Newton-Cotes, la aproximación polinómica está dada en forma del esquema de diferencias finitas progresivas de Newton:

$$G(z) = G(z_0 + \alpha h) + \alpha \Delta G(z_0) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \Delta^2 G(z_0) +$$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \Delta^3 G(z_0) + \dots$$

$$\dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)}{n!} \Delta^n G(z_0).$$

En esta ecuación z_0 corresponde con el límite inferior de la integración, o sea -1 para el caso de cuadratura cerrada; h es la separación equidistante entre los puntos de evaluación; n es igual al número de evaluaciones menos uno; Δ es el operador de

diferencias progresivas que se define como sigue:

$$\Delta G(z_0) = G(z_0 + h) - G(z_0)$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 G(z_0) &= \Delta (\Delta G(z_0)) \\ &= \Delta (G(z_0 + h) - G(z_0)) \\ &= \Delta G(z_0 + h) - \Delta G(z_0) \end{aligned}$$

$$\Delta^3 G(z_0) = \Delta^2 G(z_0 + h) - \Delta^2 G(z_0)$$

⋮

$$\Delta^n G(z_0) = \Delta^{n-1} G(z_0 + h) - \Delta^{n-1} G(z_0)$$

y el valor de α está dado por:

$$\alpha = \frac{z - z_0}{h}$$

Sustituyendo α , $\Delta^n G(z_0)$ y $G(z)$ en la ec 3.3 se obtienen, para diferentes valores de n , los pesos de las abscisas correspondientes. En la tabla A1 del apéndice A se muestran dichos valores para $n = 1, \dots, 8$.

Como el grado de precisión de las fórmulas de Newton-Cotes aumenta con el número de puntos, podría pensarse que una fórmula de orden muy alto es más exacta que otra de orden menor. Sin embargo, las fórmulas de $n + 1$ puntos base, para valores altos de n , tienen propiedades que las hacen desaconsejables para su aplicación práctica. Los coeficientes tienden a ser grandes y con signos alternados, lo que puede llevar a importantes errores de redondeo. Fórmulas que utilizan más de ocho puntos no se emplean casi nunca.

3.2 Integración Gaussiana.-

La idea principal en que se basa la integración gaussiana es que en la selección de los puntos de evaluación puede ser ventajoso no especificar que se encuentren igualmente espaciados. Lo anterior es aplicable en integrales donde intervienen funciones analíticas conocidas que pueden calcularse para cualquier argumento y con gran exactitud. En tales casos es útil preguntar

que valores de z_l y w_l sustituidos en la ec 3.3 producirán el máximo de exactitud. Resulta conveniente discutir la fórmula algo más general:

$$\int_{-1}^1 \Lambda(z) G(z) dz = \sum_{l=0}^n w_l G(z_l) \quad | \quad -1 \leq z_l \leq 1$$

en la cual $\Lambda(z)$ es una función ponderante que se especificará más adelante. Cuando $\Lambda(z) = 1$ tenemos la ecuación original 3.3, más sencilla.

Una manera de enfocar tales fórmulas gaussianas es pedir exactitud perfecta cuando $G(z)$ es un polinomio de grado $2n + 1$ o menor. Esto proporciona $2n + 2$ condiciones para determinar las $2n + 2$ incógnitas z_l y w_l . En efecto se puede demostrar que los valores de w_l se encuentran a partir de:

$$w_l = \int_{-1}^1 \Lambda(z) \mathcal{L}_l(z) dz \quad 3.4$$

donde $\mathcal{L}_l(z)$ es la función multiplicadora de Lagrange:

$$\mathcal{L}_l(z) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^n \frac{(z - z_j)}{(z_l - z_j)}$$

Las abscisas z_0, \dots, z_n son las raíces del polinomio $q_n(z)$ de grado n perteneciente a una familia $Q(z)$ que cumple con la propiedad de ortogonalidad:

$$\int_{-1}^1 \Lambda(z) q_n(z) q_m(z) dz = 0 \quad , \quad n \neq m$$

$$\int_{-1}^1 \Lambda(z) [q_n(z)]^2 dz = c(n) \neq 0 \quad . \quad -1 \leq z \leq 1$$

Los polinomios $q_n(z)$ dependen de $\Lambda(z)$, la función ponderante, la cual influencia por consiguiente tanto a los z_l como a los w_l , aunque no aparece explícitamente en la fórmula gaussiana.

3.3 Fórmulas de Gauss-Legendre.-

Las fórmulas de Gauss-Legendre tienen lugar cuando $\Lambda(z) = 1$. En este caso los polinomios ortogonales son los polinomios de Legendre:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^n - 1)^n$$

con $P_0(z) = 1$. Las raíces de estos polinomios se sustituyen en la ec 3.4 para encontrar los pesos correspondientes. Estos valores se presentan en la tabla A2 del apéndice A.

3.4 Fórmulas de Gauss-Chebyshev.-

La función ponderante es:

$$\Lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

Los polinomios ortogonales corresponden con los polinomios de Chebyshev:

$$T_n(z) = \cos(n \arccos z)$$

Las $n + 1$ raíces del polinomio de Chebyshev de grado $n + 1$ son:

$$z_l = \cos \frac{(2l + 1) \pi}{(2n + 2)}, \quad l = 0, 1, \dots, n$$

Los pesos w_l en este caso son constantes para cada n , y su valor es:

$$w_l = \frac{\pi}{n + 1}$$

Estos valores se encuentran listados en la tabla A3 del apéndice A.

3.5 Integración Compuesta.-

Una forma de reducir el error en una fórmula de integración de orden bajo se logra al subdividir el intervalo de integración

[a, b] en intervalos más pequeños, y usar la fórmula separadamente para cada uno de estos. Las fórmulas de integración resultantes de subdividir el intervalo y aplicar repetidamente una fórmula de orden bajo se llaman fórmulas de integración compuestas. Esto equivale a usar varios segmentos lineales, parabólicos, etc., conectados. Por ejemplo, si se aplica repetidamente la fórmula de Newton-Cotes para $n = 1$ se obtiene la regla trapezoidal, para $n = 2$ la primera regla de Simpson o de $1/3$, con $n = 3$ la segunda regla de Simpson o de los $3/8$.

El método más elemental de integración numérica cae dentro de la clasificación de integración compuesta; se conoce como la regla del rectángulo y discretiza el área bajo la curva como una serie de rectángulos con altura igual a la ordenada de la función en el punto medio del subintervalo y ancho constante. Este ancho es igual a la longitud del intervalo de integración entre el número de subintervalos.

Aunque cualquier fórmula de integración puede ser escrita en forma compuesta, las fórmulas cerradas son especialmente atractivas, debido a que los puntos base en los extremos de cada subintervalo son a su vez puntos base para los subintervalos adyacentes; excepto, claro está, los puntos $x = a$ y $x = b$. De esta forma, aunque parece en principio que p aplicaciones repetidas de una fórmula de q puntos requeriría pq operaciones de evaluación, solamente son necesarias $p(q - 1) + 1$, lo que representa un ahorro considerable especialmente si q es pequeño.

Dado que la mayoría de las fórmulas gaussianas no tienen puntos base en los extremos del intervalo de integración, normalmente no se consigue un ahorro en el número de veces que se ha de evaluar la función en cada subintervalo; de ahí que no resulte interesante emplear la integración compuesta para este tipo de fórmulas.

3.6 Análisis Comparativo entre Métodos de Integración.-

No es posible encontrar un método de integración numérica que aplicado a las funciones que requerimos integrar, proporcione valores exactos; de ahí la necesidad de realizar un análisis comparativo para determinar aquél que nos aproxime mejor al resultado con el menor trabajo posible. En la tabla B1 del apéndice B se presentan los resultados obtenidos de la evaluación

de una integral por los métodos previamente discutidos, a saber: Newton-Cotes, Gauss-Legendre, Gauss-Chebyshev, Newton-Cotes Compuesto y Regla del Rectángulo. La función integrada es x^4 / I donde I es la inercia de la sección transversal a una distancia x del extremo inicial. Esta función resulta de la simplificación de las ecs 3.1. De esta simplificación resultan también otras funciones, pero x^4 / I es la más difícil de integrar; esto es, requiere de un mayor número de puntos de evaluación para obtener una aproximación dada. Por lo tanto, se puede asegurar que si la integración de x^4 / I es exacta para un número cualquiera de dígitos, las integraciones de las demás funciones también lo son.

A partir del análisis comparativo se establece que el método de Gauss-Legendre es el más adecuado para resolver estas integrales, ya que para un mismo número de puntos de evaluación la aproximación que se obtiene es mejor. La convergencia al valor exacto en precisión sencilla es de 7 puntos de evaluación y en precisión doble de 14. Ninguno de los demás métodos converge al valor exacto en precisión doble con el número de puntos de evaluación considerados, que fueron hasta de 41. El método de Newton-Cotes Compuesto es el único otro que converge al valor exacto en precisión sencilla, aunque con 17 puntos de evaluación para el caso de una orden de integración igual a 8.

Cabe hacer notar que el método tradicional de simulación de elementos de sección variable por medio de dovelas equivale a la integración con la regla del rectángulo, y que por más que se divida al elemento en dovelas razonablemente pequeñas la aproximación que se obtiene no es adecuada.

4.- METODOLOGIA DE ANALISIS

La obtención de la matriz de rigidez del elemento de sección variable, así como las reacciones de empotramiento para cargas en el claro son etapas necesarias en el análisis de una estructura compuesta por elementos de este tipo.

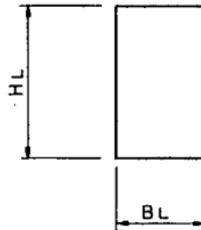
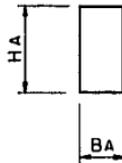
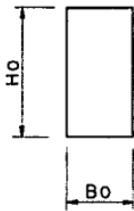
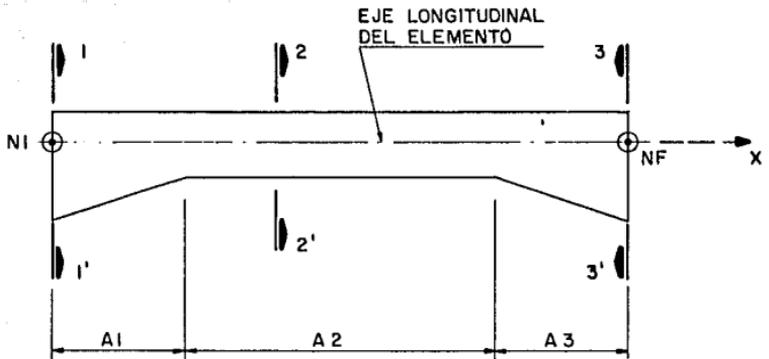
Las ecuaciones de la matriz de rigidez y las reacciones de empotramiento para elementos de sección variable, obtenidas en el capítulo 2, son implementadas en un programa de análisis de marcos planos por el método de rigideces y son resueltas con ayuda del método de integración numérica de Gauss Legendre que, como se asienta en el capítulo anterior, es el más adecuado.

Se desarrollaron dos versiones diferentes del programa para estructuras compuestas por elementos de sección variable de dos tipos: elementos rectangulares y vigas tipo I. Sin embargo la metodología expuesta es general para otros tipos de secciones transversales e incluso para estructuras mixtas, es decir, formadas por elementos de diversos tipos. En el caso de sección transversal rectangular, los elementos considerados son como se muestran en la fig 4.1, y en el caso de vigas tipo I en la fig 4.2. Las distancias A_1 , A_2 y A_3 representan los claros relativos al acartelamiento inicial, sección constante y acartelamiento final respectivamente; cualesquiera dos o una de ellas podrán valer cero, en cuyo caso el elemento tendrá: un solo acartelamiento o sección constante, un acartelamiento y sección constante, o dos acartelamientos sin sección constante.

La variación o acartelamiento puede ser nulo, lineal o parabólico como se muestra en la fig 4.3. Es factible combinar los diferentes tipos de acartelamientos tanto en planta como en elevación. La continuidad angular en las uniones de los acartelamientos especialmente del tipo nulo debe de lograrse constructivamente para ser congruentes con las hipótesis de diseño.

4.1 Ejes de los Elementos.-

Entre los ingenieros especialistas en estructuras, no ha podido unificarse el criterio con respecto a una definición de los ejes longitudinales para los elementos de sección transversal variable,



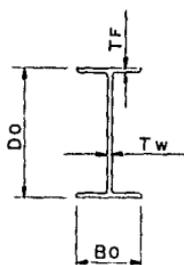
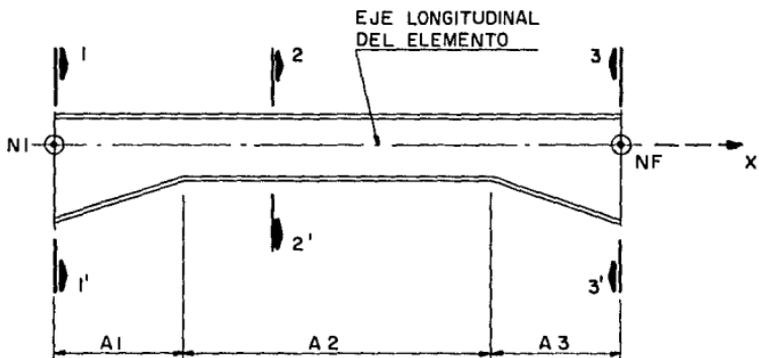
SECCION 1-1'

SECCION 2-2'

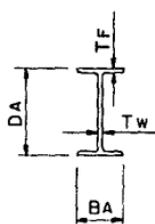
SECCION 3-3'

fig. 4.1 ELEMENTO DE SECCION TRANSVERSAL

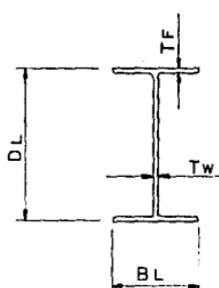
RECTANGULAR VARIABLE



SECCION 1-1'



SECCION 2-2'



SECCION 3-3'

fig 4.2 ELEMENTO DE SECCION TIPO I VARIABLE

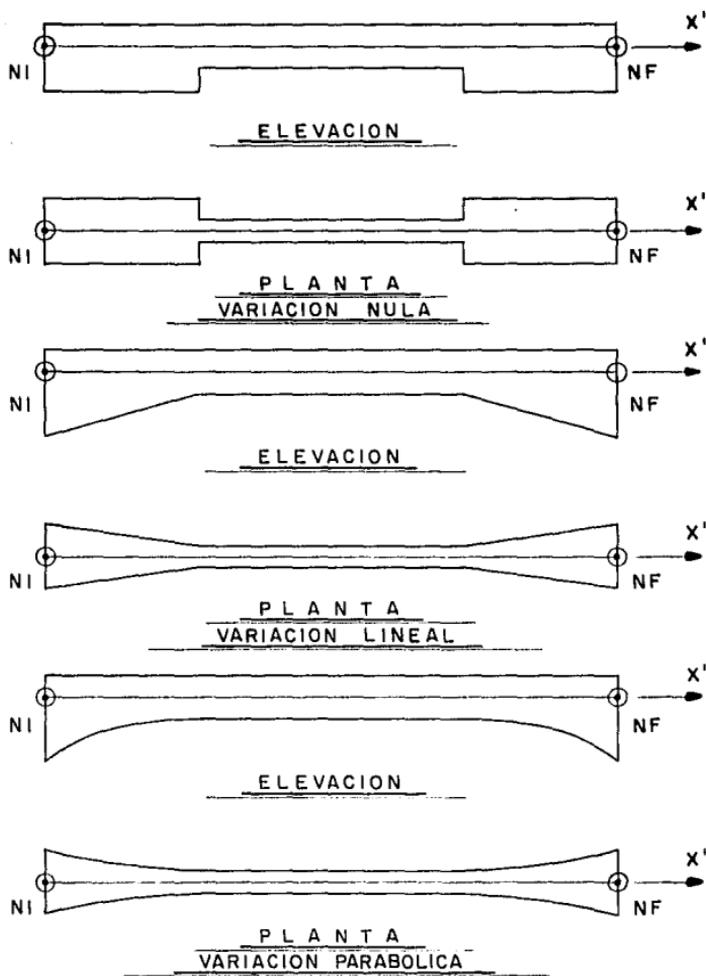


fig. 4. 3 DIFERENTES TIPOS DE ACARTELAMIENTOS

que tome en cuenta las aplicaciones prácticas. La Asociación del Cemento Portland (Portland Cement Association) y otras reconocidas autoridades en la materia recomiendan que se tome como eje longitudinal de un elemento recto de sección transversal variable, a la línea paralela al borde recto del elemento y que pase a través del centro de gravedad de la sección transversal más pequeña. Esta definición se adopta en los ejemplos resueltos en el presente trabajo. Sin embargo, otros criterios que consideren ejes longitudinales rectos también pueden ser empleados.

4.2 Elementos Constitutivos del Marco.-

El análisis de la estructura se basa en el empleo de las propiedades físicas y elásticas de los elementos individuales. El primer paso de análisis, por consiguiente, es la reducción de la estructura a sus elementos constitutivos. Se consideran como longitudes de estos elementos las distancias entre las intersecciones de los ejes. Las formas de los elementos se definen extendiendo el acartelamiento hasta las líneas trazadas normalmente a los ejes de los elementos a través de los puntos de intersección arriba mencionados. La aplicación de esta regla se presenta gráficamente en la fig 4.4, donde se muestra la reducción de un pórtico de dos aguas a sus elementos individuales.

4.3 Sistemas de Referencia.-

Se definen a continuación dos sistemas de referencia: el sistema global de coordenadas de la estructura y el sistema local de coordenadas de cada elemento.

El sistema global de coordenadas X , Y es arbitrario, y lo fija tanto en posición como dirección el analista o usuario del programa al definir las coordenadas de los nudos. A este respecto existe la limitante de que los apoyos guiados se definen con relación a este sistema de referencia. Esto es, podrán existir apoyos guiados según el eje X global o según el eje Y global solamente. Generalmente conviene hacer coincidir uno de los ejes globales con la dirección de la gravedad, quedando el otro orientado según la dirección de fuerzas accidentales, tales como viento o sismo; de esta manera se facilita la simulación de cargas. Los desplazamientos de los nudos obtenidos en el análisis,

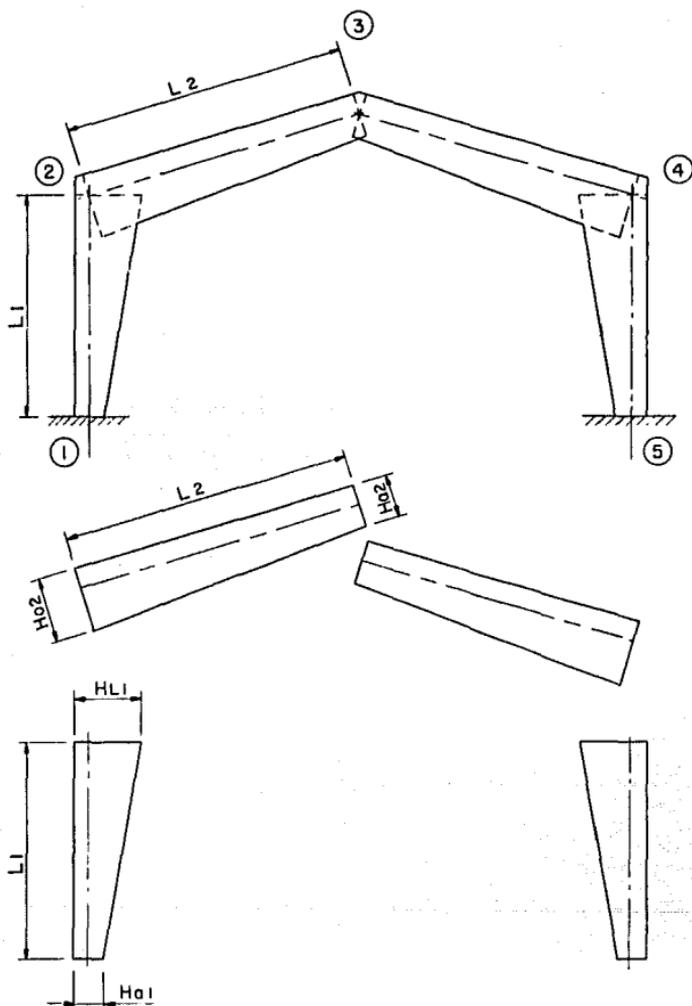


fig. 4.4 REDUCCION DE UNA ESTRUCTURA A SUS
ELEMENTOS CONSTITUTIVOS

están dados con respecto al sistema de coordenadas global. De ahí que, para mayor facilidad, se deberá hacer coincidir el sistema de coordenadas global con la dirección de los desplazamientos que se deseen conocer.

El sistema local de coordenadas X' , Y' es particular para cada elemento. El eje X' tiene origen en el nudo inicial con dirección y sentido hacia el nudo final; el eje Y' es perpendicular al anterior y con sentido de forma tal que los vectores $X \times Y$ y $X' \times Y'$ poseen a su vez el mismo sentido.

4.4 Cargas.-

Los tipos de cargas se dividen en dos: cargas en nudos y cargas en elementos. Las cargas en nudos se alimentan según el sistema global de coordenadas como fuerza en X , fuerza en Y y momento (fig 4.5). Las cargas en los elementos pueden ser de tres tipos: fuerza concentrada, fuerza repartida trapezoidal y momento concentrado; además se pueden definir con respecto al sistema global o al sistema local de coordenadas, tal como se muestra en la fig 4.6. El signo de la carga definirá el sentido de aplicación: cuando sea positivo coincidirá con el sentido positivo del eje de referencia y viceversa. En el caso de momentos aplicados tanto en los nudos como en los elementos, serán positivos cuando su sentido coincida con el del vector $X \times Y$.

4.5 Elementos Mecánicos.-

Como resultado del análisis se obtienen elementos mecánicos en los extremos de cada elemento. Estos elementos mecánicos o fuerzas internas siguen la convención de signos establecida por Timoshenko y que se ilustra en la fig 4.7.

Para el cálculo de los elementos mecánicos a lo largo de un elemento cualquiera, basta solo con sumar punto a punto el diagrama de elementos mecánicos de la isostática (viga simplemente apoyada para momento flexionante y viga en cantiliver para fuerzas cortantes y normales) considerando la misma condición de carga que el elemento tiene en el marco, con los elementos mecánicos hiperestáticos obtenidos del análisis (ver fig 4.8). Es importante hacer notar que los elementos mecánicos finales en los extremos del elemento cargado, son directamente los elementos mecánicos

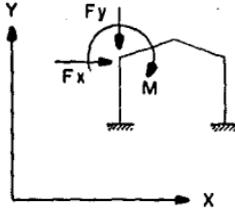
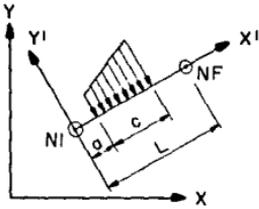
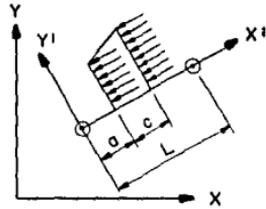


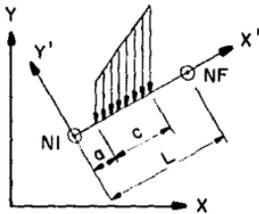
fig. 4 . 5 CARGAS EN NUDOS



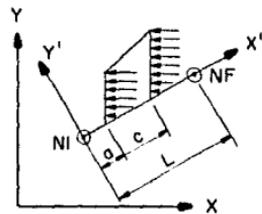
a) FUERZA REPARTIDA TRAPEZIAL
SEGUN EL EJE LOCAL Y'



b) FUERZA REPARTIDA TRAPEZIAL
SEGUN EL EJE LOCAL X'

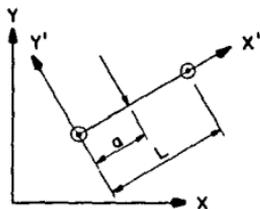


c) FUERZA REPARTIDA TRAPEZIAL
SEGUN EL EJE GLOBAL Y

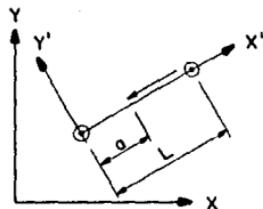


d) FUERZA REPARTIDA TRAPEZIAL
SEGUN EL EJE GLOBAL X

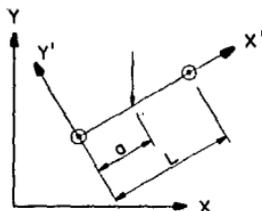
fig. 4 . 6 CARGAS EN ELEMENTOS (HOJA - I)



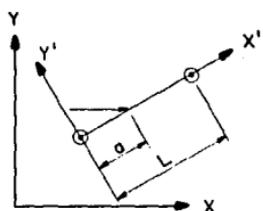
e) FUERZA CONCENTRADA
SEGUN EL EJE LOCAL Y'



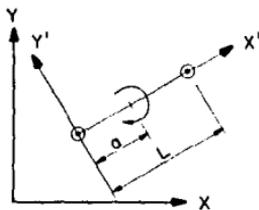
f) FUERZA CONCENTRADA
SEGUN EL EJE LOCAL X'



g) FUERZA CONCENTRADA
SEGUN EL EJE GLOBAL Y

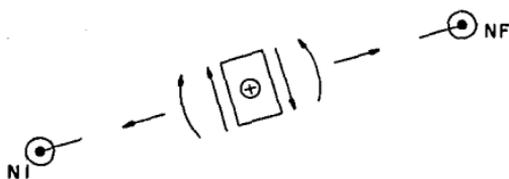


h) FUERZA CONCENTRADA
SEGUN EL EJE GLOBAL X

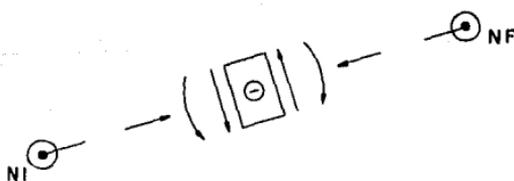


i) MOMENTO CONCENTRADO

fig. 4. 6 CARGAS EN ELEMENTOS (HOJA - 2)

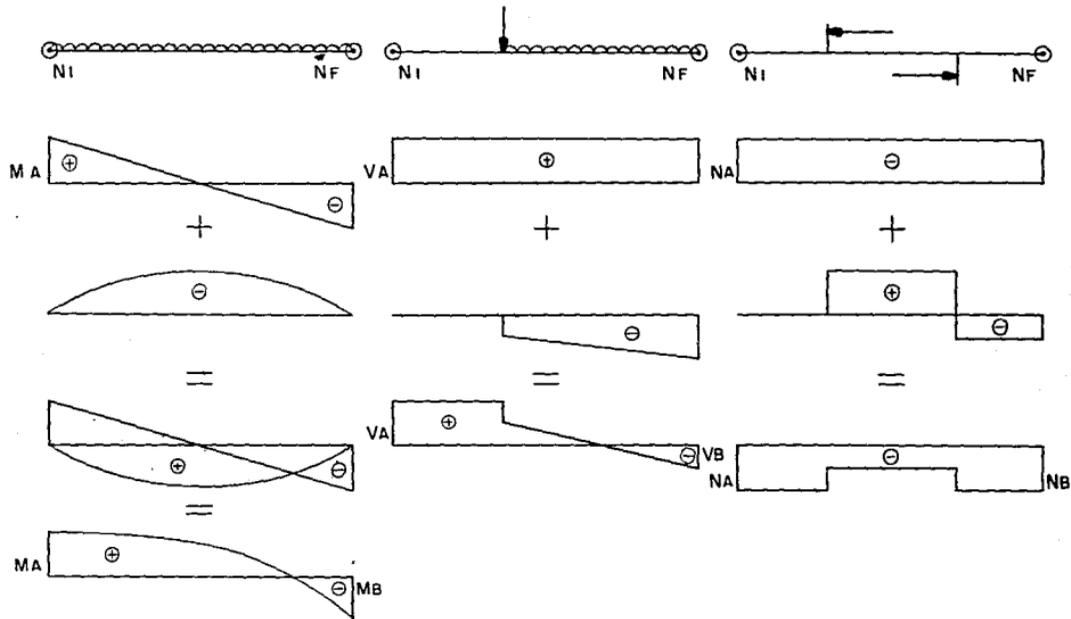


a) SENTIDO POSITIVO



b) SENTIDO NEGATIVO

fig. 4.7 CONVENCION DE SIGNOS
PARA LOS ELEMENTOS MECANICOS



a) MOMENTO FLEXIONANTE

b) FUERZA CORTANTE

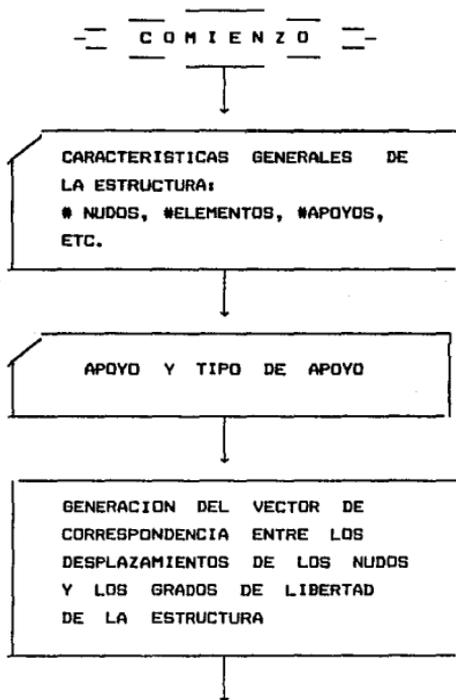
c) FUERZA NORMAL

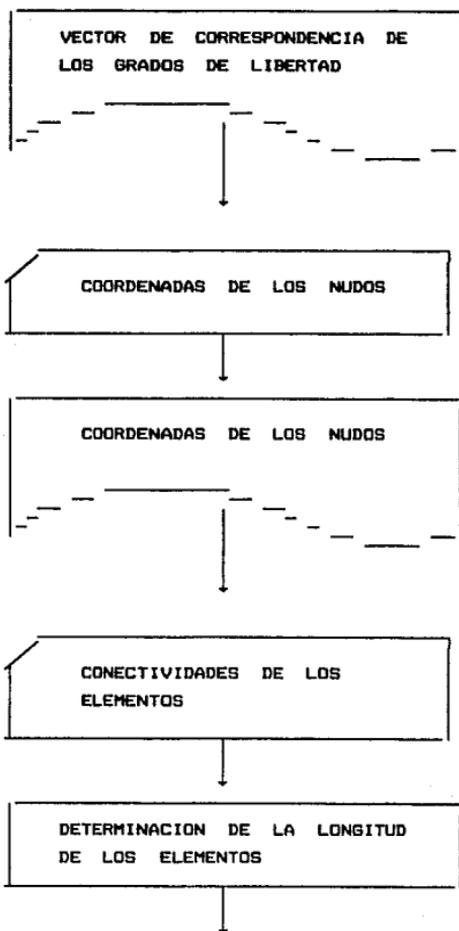
fig. 4. 8 ELEMENTOS MECANICOS EN EL INTERIOR DE ELEMENTOS CARGADOS

hiperestáticos reportados en el análisis.

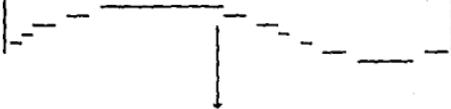
4.6 Diagrama de Flujo.-

Se muestra a continuación el diagrama de flujo descriptivo del programa:





CONECTIVIDADES Y LONGITUDES
DE LOS ELEMENTOS



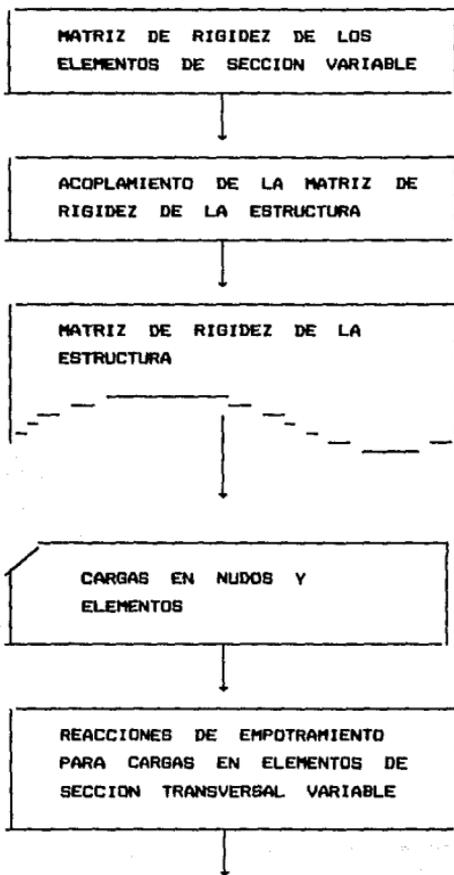
CARACTERISTICAS DE LOS
ELEMENTOS DE SECCION VARIABLE:
DIMENSIONES DE LAS SECCIONES
TRANSVERSALES INICIAL, CENTRAL
Y FINAL; LONGITUDES DE LOS
ACARTELAMIENTOS; TIPOS DE
VARIACION: NULA, LINEAL O
PARABOLICA.

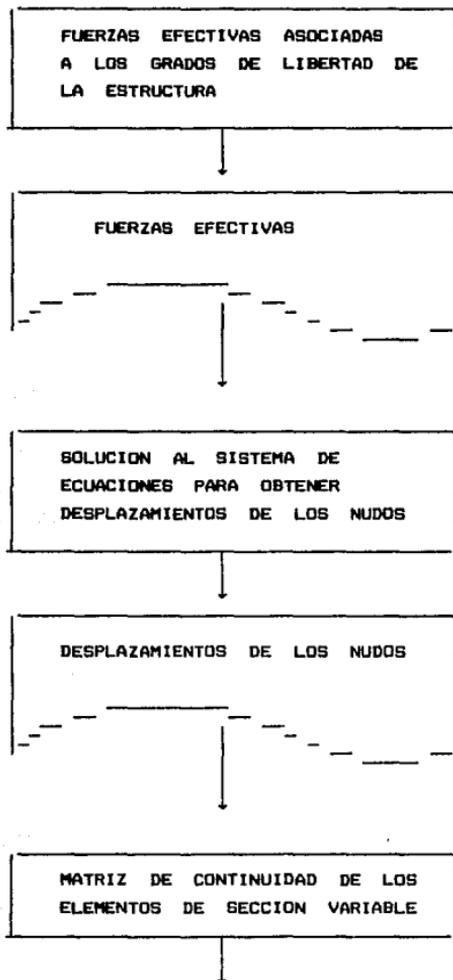
CARACTERISTICAS DE LOS
ELEMENTOS DE SECCION VARIABLE

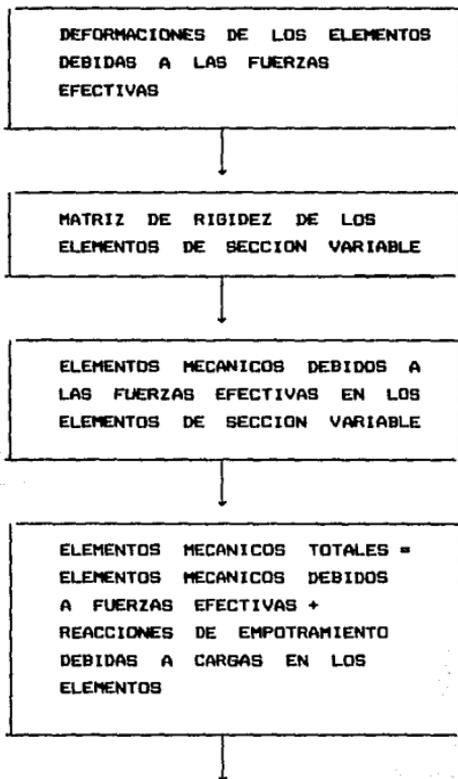


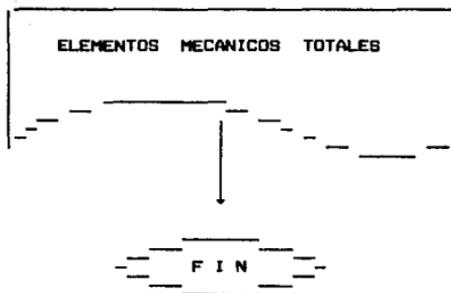
MATRIZ DE CONTINUIDAD DE LOS
ELEMENTOS DE SECCION VARIABLE











El diagrama de flujo anterior es el mismo utilizado para analizar estructuras con elementos de sección constante, excepto: la lectura y escritura de las características de los elementos, el cálculo de la matriz de rigidez de los elementos y la obtención de reacciones de empotramiento para cargas en los elementos. La integración numérica se lleva a cabo en una subrutina que realiza simultáneamente todas las integrales con la cuadratura de Gauss-Legendre.

5.- ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE METODOS DE ANALISIS

Se presenta a continuación una comparación entre los métodos comúnmente empleados para el análisis de marcos de sección variable y el descrito en el presente trabajo, al cual denominaremos Método de Integración Numérica. Como parte de esta comparación, se analizó un mismo caso por los diferentes métodos, a saber:

- Dovelas
- Parámetros Elásticos
- Factores de Rigidez y Reacciones de Empotramiento
- Integración Numérica

5.1 Descripción del Modelo.-

El ejemplo considerado se muestra en la fig 5.1. Se trata de un marco rígido, a dos aguas, simétrico, de sección transversal rectangular y con apoyos articulados. Los acartelamientos son lineales, y el módulo de elasticidad considerado es el del concreto: 432 000 KGF (2'109,244 Ton/m²).

5.2 Método de Dovelas.-

El método de dovelas consiste en discretizar las secciones variables mediante pequeños elementos de sección constante y analizarlo con ayuda de un programa de marcos planos de sección constante. En nuestro caso se dividió cada uno de los acartelamientos en cuatro barras de sección constante, resultando 27 nudos y 26 elementos (ver fig 5.2). Para cada nudo existe la necesidad de calcular sus coordenadas con respecto a un sistema global previamente definido; estos valores son:

COORDENADAS DE LOS NUDOS:

NUDO	X	Y
1	0	0
2	0	5
3	0	10
4	0	15
5	0	20
6	2.25	21
7	4.5	22
8	6.75	23
9	9	24
10	27	32

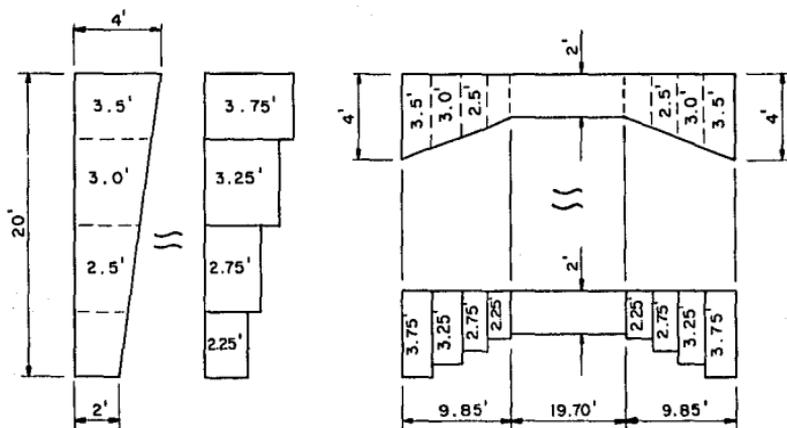
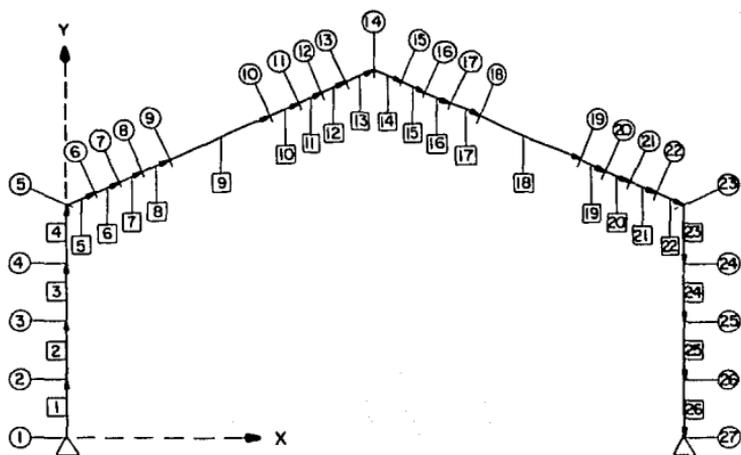


fig. 5 . 2 MODELACION DE LA ESTRUCTURA POR

EL METODO DE DOVELAS

11	29.25	33
12	31.5	34
13	33.75	35
14	36	36
15	38.25	35
16	40.5	34
17	42.75	33
18	45	32
19	63	24
20	65.25	23
21	67.5	22
22	69.75	21
23	72	20
24	72	15
25	72	10
26	72	5
27	72	0

La discretización de elementos se presenta a continuación:

CONECTIVIDADES DE LOS ELEMENTOS:

ELEMENTO	N. INICIAL	N. FINAL	LONG.
1	1	2	5
2	2	3	5
3	3	4	5
4	4	5	5
5	5	6	2.462215
6	6	7	2.462215
7	7	8	2.462215
8	8	9	2.462215
9	9	10	19.69771
10	10	11	2.462215
11	11	12	2.462215
12	12	13	2.462215
13	13	14	2.462215
14	14	15	2.462215
15	15	16	2.462215
16	16	17	2.462215
17	17	18	2.462215
18	18	19	19.69771
19	19	20	2.462215
20	20	21	2.462215
21	21	22	2.462215
22	22	23	2.462215
23	23	24	5
24	24	25	5
25	25	26	5
26	26	27	5

Para cada elemento se calculan las propiedades mecánicas de la sección media, que se consideran constantes a lo largo de todo el

elemento, estos valores son:

CARACTERISTICAS DE LOS ELEMENTOS:

ELEMENTO	MOM. INERCIA	AREA	FACTOR DE CORTANTE
1	1.898438	4.5	0
2	3.466146	5.5	0
3	5.721354	6.5	0
4	8.789064	7.5	0
5	8.789064	7.5	0
6	5.721354	6.5	0
7	3.466146	5.5	0
8	1.898438	4.5	0
9	1.333333	4	0
10	1.898438	4.5	0
11	3.466146	5.5	0
12	5.721354	6.5	0
13	8.789064	7.5	0
14	8.789064	7.5	0
15	5.721354	6.5	0
16	3.466146	5.5	0
17	1.898438	4.5	0
18	1.333333	4	0
19	1.898438	4.5	0
20	3.466146	5.5	0
21	5.721354	6.5	0
22	8.789064	7.5	0
23	8.789064	7.5	0
24	5.721354	6.5	0
25	3.466146	5.5	0
26	1.898438	4.5	0

El factor de cortante se define por medio de la ecuación:

$$c = 6 (1 + \nu) \frac{I}{A_c L^2}$$

donde ν es la relación de Poisson del material, A_c el área de cortante de la sección, I el momento de inercia y L la longitud del elemento. Este factor sirve para tomar en cuenta las deformaciones por cortante de elementos de sección constante. En nuestro caso se desprecian dichas deformaciones ya que la relación peralte/longitud es pequeña, de ahí que el factor de cortante se tome igual a cero.

Las cargas repartidas en elementos de sección variable deben corresponder con las dovelas, por lo que se dividirán en tantas cargas como dovelas existan. En el caso de cargas concentradas, estas se deberán localizar en el elemento discretizado

correspondiente. Las cargas consideradas son:

CARGAS REPARTIDAS EN ELEMENTOS:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	GLOB	UNIF	Y	5	-0.5	-0.5	0	2.5
2	GLOB	UNIF	Y	6	-0.5	-0.5	0	2.5
3	GLOB	UNIF	Y	7	-0.5	-0.5	0	2.5
4	GLOB	UNIF	Y	8	-0.5	-0.5	0	2.5
5	GLOB	UNIF	Y	9	-0.5	-0.5	0	20
6	GLOB	UNIF	Y	10	-0.5	-0.5	0	2.5
7	GLOB	UNIF	Y	11	-0.5	-0.5	0	2.5
8	GLOB	UNIF	Y	12	-0.5	-0.5	0	2.5
9	GLOB	UNIF	Y	13	-0.5	-0.5	0	2.5

CARGAS CONCENTRADAS EN ELEMENTOS:

	A	B	C	D	I	J
10	GLOB	CONC	Y	9	-10	16.41476

CARGAS CONCENTRADAS EN NUDOS:

	A	B	K	L	M	N
11	GLOB	JOIN	23	10	0	0

La convención de las literales utilizadas es la siguiente:

- A -Sistema de referencia, MEMB si es local o GLOB si es global
- B -Tipo de carga, CONC si es concentrada, UNIF si es repartida o MOMT si es momento
- C -Dirección, X o Y (para momentos alrededor Z)
- D -Elemento Cargado
- E -Carga unitaria hacia el extremo inicial W_a
- F -Carga unitaria hacia el extremo final W_b
- G -Distancia del nudo inicial al comienzo de la carga repartida
- H -Longitud sobre la que actúa la carga repartida
- I -Carga concentrada
- J -Distancia del extremo inicial a la carga concentrada
- K -Nudo cargado

- L -Fuerza aplicada sobre el nudo en dirección de X global
M -Fuerza aplicada sobre el nudo en dirección de Y global
N -Momento aplicado sobre el nudo

A continuación se presentan los resultados del análisis:

DESPLAZAMIENTOS DE NUDOS:

NUDO	DX	DY	PHI
1	0	0	-2.415681E-03
2	1.217733E-02	-4.794318E-05	-2.475034E-03
3	2.476922E-02	-8.716941E-05	-2.572559E-03
4	3.786179E-02	-1.203608E-04	-2.671036E-03
5	5.143065E-02	-1.491267E-04	-2.760781E-03
6	5.420509E-02	-6.411979E-03	-2.799252E-03
7	5.701082E-02	-1.274728E-02	-2.823214E-03
8	5.982197E-02	-1.909764E-02	-2.809325E-03
9	6.257022E-02	-.0253105	-2.694743E-03
10	6.915931E-02	-4.031744E-02	1.678599E-03
11	6.726512E-02	-3.605807E-02	2.098339E-03
12	6.506535E-02	-3.110943E-02	2.294576E-03
13	6.272101E-02	-2.583431E-02	2.390277E-03
14	.060307	-2.040157E-02	2.435671E-03
15	6.275296E-02	-1.488303E-02	2.465212E-03
16	6.522568E-02	-9.301957E-03	2.489702E-03
17	6.771354E-02	-3.683553E-03	2.495667E-03
18	7.017911E-02	1.889218E-03	2.443731E-03
19	7.821025E-02	2.018656E-02	-1.369402E-03
20	7.652792E-02	1.642658E-02	-1.986985E-03
21	.0743498	1.154646E-02	-2.359667E-03
22	7.186206E-02	5.966535E-03	-2.606298E-03
23	6.916422E-02	-8.846964E-05	-2.780413E-03
24	5.442033E-02	-7.140422E-05	-3.101834E-03
25	3.797066E-02	-5.171337E-05	-3.454524E-03
26	1.972775E-02	-2.844235E-05	-3.803827E-03
27	0	0	-4.016412E-03

Los desplazamientos en dirección de X e Y globales están dados en pies, congruentemente con los datos alimentados. Las rotaciones PHI se expresan en radianes.

ELEMENTOS MECANICOS:

ELEMENTO 1

EXTREMO INICIAL (NUDO # 1)

NA= -18.64031 MA= 1.525879E-04 VA= -3.89424

EXTREMO FINAL (NUDO # 2)

NB= -18.64031 MB= -19.47105 VB= -3.89424

ELEMENTO 2

EXTREMO INICIAL (NUDO # 2)
 NA= -18.64031 MA= -19.47084 VA= -3.894111
 EXTREMO FINAL (NUDO # 3)
 NB= -18.64031 MB= -38.94139 VB= -3.894111

ELEMENTO 3

EXTREMO INICIAL (NUDO # 3)
 NA= -18.64031 MA= -38.94321 VA= -3.894505
 EXTREMO FINAL (NUDO # 4)
 NB= -18.64031 MB= -58.41573 VB= -3.894505

ELEMENTO 4

EXTREMO INICIAL (NUDO # 4)
 NA= -18.6403 MA= -58.41734 VA= -3.893266
 EXTREMO FINAL (NUDO # 5)
 NB= -18.6403 MB= -77.88367 VB= -3.893266

ELEMENTO 5

EXTREMO INICIAL (NUDO # 5)
 NA= -11.13044 MA= -77.88648 VA= 15.45268
 EXTREMO FINAL (NUDO # 6)
 NB= -10.63044 MB= -41.22366 VB= 14.32768

ELEMENTO 6

EXTREMO INICIAL (NUDO # 6)
 NA= -10.63589 MA= -41.22821 VA= 14.32594
 EXTREMO FINAL (NUDO # 7)
 NB= -10.13589 MB= -7.339675 VB= 13.20094

ELEMENTO 7

EXTREMO INICIAL (NUDO # 7)
 NA= -10.14752 MA= -7.331772 VA= 13.19133
 EXTREMO FINAL (NUDO # 8)
 NB= -9.647519 MB= 23.76312 VB= 12.06633

ELEMENTO 8

EXTREMO INICIAL (NUDO # 8)
 NA= -9.645056 MA= 23.76694 VA= 12.07073
 EXTREMO FINAL (NUDO # 9)
 NB= -9.145056 MB= 52.10267 VB= 10.94573

ELEMENTO 9

EXTREMO INICIAL (NUDO # 9)
 NA= -9.142398 MA= 52.10159 VA= 10.94849
 EXTREMO FINAL (NUDO # 10)
 NB= -1.091013 MB= 149.122 VB= -7.18963

ELEMENTO 10

EXTREMO INICIAL (NUDO # 10)
 NA= -1.077224 MA= 149.1184 VA= -7.186902
 EXTREMO FINAL (NUDO # 11)
 NB= -.5772238 MB= 130.0377 VB= -8.311931

ELEMENTO 11

EXTREMO INICIAL (NUDO # 11)

NA= -.5825236 MA= 130.0444 VA= -8.319882
EXTREMO FINAL (NUDD # 12)
NB= -8.252358E-02 MB= 108.1741 VB= -9.444882

ELEMENTO 12
EXTREMO INICIAL (NUDD # 12)
NA= -7.793745E-02 MA= 108.1753 VA= -9.460211
EXTREMO FINAL (NUDD # 13)
NB= .4220625 MB= 83.49722 VB= -10.58521

ELEMENTO 13
EXTREMO INICIAL (NUDD # 13)
NA= .4007494 MA= 83.52344 VA= -10.6093
EXTREMO FINAL (NUDD # 14)
NB= .9007493 MB= 56.01608 VB= -11.7343

ELEMENTO 14
EXTREMO INICIAL (NUDD # 14)
NA= -8.087798 MA= 56.05304 VA= -8.528675
EXTREMO FINAL (NUDD # 15)
NB= -8.087798 MB= 35.05361 VB= -8.528675

ELEMENTO 15
EXTREMO INICIAL (NUDD # 15)
NA= -8.086674 MA= 35.05854 VA= -8.508318
EXTREMO FINAL (NUDD # 16)
NB= -8.086674 MB= 14.10924 VB= -8.508318

ELEMENTO 16
EXTREMO INICIAL (NUDD # 16)
NA= -8.112901 MA= 14.08407 VA= -8.493866
EXTREMO FINAL (NUDD # 17)
NB= -8.112901 MB= -6.829646 VB= -8.493866

ELEMENTO 17
EXTREMO INICIAL (NUDD # 17)
NA= -8.100957 MA= -6.832275 VA= -8.50205
EXTREMO FINAL (NUDD # 18)
NB= -8.100957 MB= -27.76615 VB= -8.50205

ELEMENTO 18
EXTREMO INICIAL (NUDD # 18)
NA= -8.097889 MA= -27.76523 VA= -8.502334
EXTREMO FINAL (NUDD # 19)
NB= -8.097889 MB= -195.2418 VB= -8.502334

ELEMENTO 19
EXTREMO INICIAL (NUDD # 19)
NA= -8.098704 MA= -195.2381 VA= -8.503809
EXTREMO FINAL (NUDD # 20)
NB= -8.098704 MB= -216.1763 VB= -8.503809

ELEMENTO 20
EXTREMO INICIAL (NUDD # 20)
NA= -8.100094 MA= -216.175 VA= -8.503865
EXTREMO FINAL (NUDD # 21)
NB= -8.100094 MB= -237.1133 VB= -8.503865

ELEMENTO 21
EXTREMO INICIAL (NUDO # 21)
NA= -8.094906 MA= -237.1193 VA= -8.491247
EXTREMO FINAL (NUDO # 22)
NB= -8.094906 MB= -258.0266 VB= -8.491247

ELEMENTO 22
EXTREMO INICIAL (NUDO # 22)
NA= -8.092662 MA= -258.0175 VA= -8.510874
EXTREMO FINAL (NUDO # 23)
NB= -8.092662 MB= -278.9731 VB= -8.510874

ELEMENTO 23
EXTREMO INICIAL (NUDO # 23)
NA= -11.05839 MA= -278.9554 VA= 13.95019
EXTREMO FINAL (NUDO # 24)
NB= -11.05839 MB= -209.2044 VB= 13.95019

ELEMENTO 24
EXTREMO INICIAL (NUDO # 24)
NA= -11.05838 MA= -209.2119 VA= 13.94746
EXTREMO FINAL (NUDO # 25)
NB= -11.05838 MB= -139.4746 VB= 13.94746

ELEMENTO 25
EXTREMO INICIAL (NUDO # 25)
NA= -11.05839 MA= -139.476 VA= 13.94734
EXTREMO FINAL (NUDO # 26)
NB= -11.05839 MB= -69.73924 VB= 13.94734

ELEMENTO 26
EXTREMO INICIAL (NUDO # 26)
NA= -11.05839 MA= -69.73856 VA= 13.94768
EXTREMO FINAL (NUDO # 27)
NB= -11.05839 MB= -1.525879E-04 VB= 13.94768

Las unidades de las fuerzas axiales N y de las fuerzas cortantes V son kilolibras y los momentos M kilolibras-pies.

Con respecto a este método podemos decir que implica un cálculo muy grande de datos innecesarios y que el tiempo de computación y almacenamiento de información crecen sustancialmente al aumentar el número de dovelas. Lo anterior impone un límite al tamaño de la estructura a analizar, ya sea por tiempo de computación o por capacidad de la máquina.

Resulta poco práctico hacer modificaciones o analizar diferentes alternativas, ya que un cambio en la geometría puede significar recalcular todos los valores de nuevo.

La exactitud de los resultados para el ejemplo analizado es aceptable, ya que las diferencias se deben a la discretización de

elementos y al redondeo en la solución de un sistema de ecuaciones tan grande. Obviamente, dicha diferencia sería mayor si la estructura a analizar fuera más grande.

5.3 Método de Parámetros Elásticos.-

Existen soluciones condensadas de análisis estructural basadas en el concepto de parámetros elásticos, formulado por Valerian Leontovich, que dan la oportunidad de desarrollar mecánicamente el análisis de estructuras con elementos de sección transversal variable. Este método contempla la utilización de fórmulas, tablas y gráficas -como las presentadas en el libro: Pórticos y Arcos. Soluciones Condensadas para el Análisis Estructural, Ed. C.E.C.S.A. de Valerian Leontovich- desarrolladas en forma general y que son aplicables a estructuras simétricas con elementos rectos de varias formas y proporciones. Se emplean además, expresiones para obtener los momentos flexionantes y las reacciones en los apoyos producidos por cargas comunes tanto horizontales como verticales.

Las propiedades elásticas de los elementos están definidas por tres parámetros:

$$\alpha_n = \frac{12}{L^3} \int_0^L \frac{I_0}{I} (L-x)^2 dx$$

$$\alpha_m = \frac{12}{L^3} \int_0^L \frac{I_0}{I} x^2 dx$$

$$\beta_n = \frac{12}{L^3} \int_0^L \frac{I_0}{I} (L-x)x dx$$

Estos valores se encuentran graficados para diferentes casos de vigas de sección variable. Las gráficas están en función de las constantes geométricas de los elementos, que son:

$$t = \left(\frac{\text{peralte mínimo}}{\text{peralte máximo}} \right)^3 ; v = \frac{\text{longitud de la o las cartelas}}{\text{longitud del elemento}}$$

Las propiedades del área de momentos de un elemento cargado

quedan definidas por dos constantes de carga, que son:

$$R_n = \frac{12}{W L^3} \int_0^L \frac{I_0}{I} M (L - x) dx$$

$$R_m = \frac{12}{W L^3} \int_0^L \frac{I_0}{I} M x dx$$

De la misma manera se conocen los valores numéricos de estas expresiones, ya sea en tablas o en gráficas, para un cierto número de cargas.

Los valores numéricos de los parámetros elásticos dependen solo de la forma del elemento, en tanto que los valores de las constantes de carga dependen de la forma del elemento y de la carga. Una vez encontrados los valores numéricos de los parámetros elásticos y de las constantes de carga, se pueden calcular fácilmente las magnitudes hiperestáticas de la estructura, empleando las ecuaciones condensadas de análisis.

Las notaciones para la estructura de doble vertiente del ejemplo se muestran en la fig 5.3.

Las constantes geométricas del elemento 1-2 son: $v = 1$ y $t = 0.125$; a partir de estos valores se obtiene en la gráfica 6 del libro citado el parámetro elástico α para el extremo grande de elementos con una cartela recta:

$$\alpha_{21} = 0.82$$

En el caso del elemento 2-3 las constantes geométricas son: $v = 0.25$ y $t = 0.125$; entrando a la gráfica 1 del libro citado con estos valores se obtiene el parámetro elástico α para cualquier extremo de elementos simétricos con cartelas rectas:

$$\alpha_{22} = \alpha_{32} = 2.45$$

Empleando las constantes geométricas del elemento 2-3 en la gráfica 2 de dicho libro, tenemos el parámetro elástico β para cualquier extremo de elementos simétricos con cartelas rectas:

$$\beta_{23} = 1.67$$

Con estos valores se sustituye para obtener los parámetros

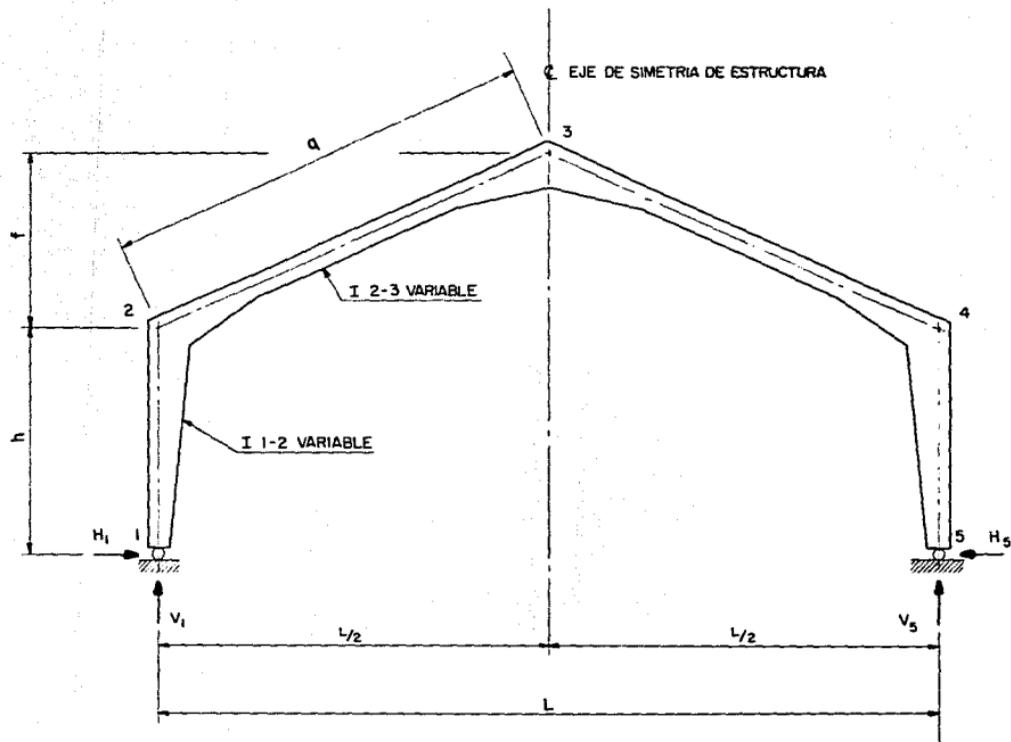


fig. 5 . 3 NOTACIONES PARA LA ESTRUCTURA DE DOBLE VERTIENTE

METODO DE PARAMETROS ELASTICOS

generales de la estructura:

$$\phi = \frac{I_{1-2 \text{ min}}}{I_{2-3 \text{ min}}} \quad \frac{q}{h} = 1.97 \quad ; \quad \psi = \frac{f}{h} = 0.8$$

$$\theta_{29} = \alpha_{29} + \alpha_{92} + 2 \beta_{29} = 8.24$$

$$A = \theta_{29} + \psi^2 \alpha_{92} + 2 \psi (\alpha_{92} + \beta_{29}) + \frac{\alpha_{21}}{\phi} = 16.82$$

$$B = \alpha_{92} (1 + \psi) + \beta_{29} = 6.08$$

$$C = \alpha_{29} + \beta_{29} (1 + \psi) + \frac{\alpha_{21}}{\phi} = 5.87$$

Las cargas se tienen que analizar por separado, para posteriormente realizar una superposición de elementos mecánicos y de reacciones (ver fig 5.4).

A).- Carga vertical uniformemente repartida sobre el elemento inclinado de la izquierda. Carga total W.

En la gráfica 11 del libro citado se obtienen las constantes de carga para elementos simétricos con cartelas rectas; carga uniformemente distribuida. Utilizando las constantes geométricas del elemento 2-3 se encuentra:

$$R_{29} = R_{92} = 0.418$$

sustituyendo en las ecuaciones condensadas de análisis se tiene:

$$K = R_{29} + R_{92} (1 + \psi) = 1.17$$

$$H_1 = H_5 = \frac{W L}{8 A h} (B + 2 K) = 4.43$$

$$M_2 = M_4 = -H_5 h = -88.77$$

$$M_3 = \frac{W L}{8} - H_5 h (1 + \psi) = 17.48$$

$$V_1 = \frac{3}{4} W = 14.77 \quad ; \quad V_5 = \frac{W}{4} = 4.92$$

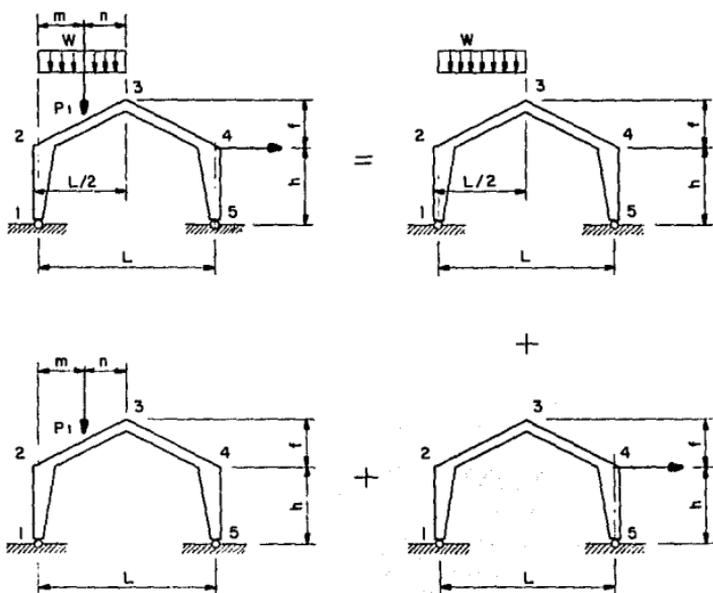


fig. 5 . 4 ANÁLISIS SEPARADOS EN EL METODO DE
PARAMETROS ELASTICOS

B).- Carga vertical P concentrada a 2/3 partes de la longitud del elemento inclinado a la izquierda.

De la tabla 1 del libro citado se obtiene la constante de carga para el extremo izquierdo de elementos simétricos con cartelas rectas; carga concentrada. Partiendo de las constantes geométricas del elemento 2-3 y de la distancia del extremo izquierdo a la carga concentrada, que es de $4L/6$, tenemos:

$$R_{2a} = 0.521$$

Este valor no se obtuvo directamente de la tabla; hubo necesidad de interpolar linealmente para $t = 0.125$ entre los valores tabulados adyacentes $R = 0.517$ con $t = 0.1$ y $R = 0.533$ con $t = 0.2$.

En la tabla 2 de dicho libro, se encuentra la constante de carga para el extremo derecho de elementos simétricos con cartelas rectas; carga concentrada. De manera similar a R_{2a} se obtiene:

$$R_{3z} = 0.623$$

interpolando para $t = 0.125$ entre $R = 0.616$ con $t = 0.1$ y $R = 0.644$ con $t = 0.2$.

Sustituyendo en las ecuaciones condensadas de análisis se tiene:

$$K = R_{2a} + R_{3z} (1 + \psi) = 1.64$$

$$H_1 = H_5 = \frac{P}{4 A h} (2 B m + K L) = 3.04$$

$$M_2 = M_4 = -H_5 h = -60.96$$

$$M_a = \frac{P m}{2} - H_5 h (1 + \psi) = 10.26$$

$$V_1 = P \left(1 - \frac{m}{L}\right) = 6.66$$

$$V_5 = \frac{P m}{L} = 3.33$$

C).- Carga horizontal concentrada en el nudo 4.

Existe resuelto el caso de carga en el nudo 2 que corresponde

con la carga antisimétrica, por lo que se tienen que ajustar las ecuaciones condensadas de análisis reportadas en la obra citada. Para cargas en nudos no hay necesidad de obtener constantes de carga, directamente sustituimos en las ecuaciones condensadas de análisis:

$$H_1 = \frac{-P}{2A} (B + C) = -3.55$$

$$H_3 = P + H_1 = 6.44$$

$$M_4 = -h (P + H_1) = -128.92$$

$$M_1 = -h \left[\frac{P}{2} + H_1 (1 + \psi) \right] = 27.93$$

$$M_2 = -H_1 h = 71.07 \quad ; \quad V_1 = \frac{-Ph}{L} = -2.77$$

$$V_3 = -V_1 = 2.77$$

D).- Superposición de elementos mecánicos.

Realizando la suma término a término se tienen los valores finales tanto de las reacciones como de los momentos en los nudos 2, 3 y 4:

$$\begin{array}{lll} H_1 = 3.9332 & H_3 = 13.9332 & \\ M_2 = -78.6643 & M_3 = 55.6838 & M_4 = -278.6643 \\ V_1 = 18.6622 & V_3 = 11.0355 & \end{array}$$

Este método tiene la desventaja de que no proporciona los desplazamientos de los nudos. Durante su aplicación, es imperativo que el proyectista no se equivoque al seleccionar los valores numéricos de los parámetros elásticos y de las constantes de carga; así como tampoco al realizar los cálculos, que deben efectuarse algebraicamente. Todas las cantidades se deben incluir en las ecuaciones con su signo adecuado, para que los resultados se obtengan mecánicamente, con su propia magnitud y signo correcto. Así por ejemplo, si una carga se aplica en la dirección opuesta a la que se muestra en la figura, deberá anteponerse el signo negativo al valor de la carga empleado en la ecuación. Los

diagramas de fuerzas normales y cortantes en cada elemento se deben encontrar a mano a partir de las reacciones obtenidas del análisis y de las cargas actuantes.

Un cambio en la geometría -rediseño por ejemplo- implica volver a efectuar todas las operaciones de nuevo. En ocasiones la estructuración se realiza a partir de los casos existentes en los manuales, por ejemplo una estructura simétrica, y no dependiendo de conveniencias reales, tales como: mejor comportamiento estructural, estética o funcionalidad. En otras ocasiones, se analiza una estructura "aproximándola" a los casos existentes en los manuales. Esto sin tomar en cuenta los errores de índoles diversas, muchas veces ajenas al autor, que se encuentran en las ecuaciones.

Para estructuras con varios niveles y/o crujeas, así como para pórticos no simétricos, no existen soluciones en los manuales. Por otro lado, los elementos integrantes de la estructura con doble acartelamiento también deben ser simétricos.

El uso de gráficas y tablas limitan la exactitud al número de decimales que se pueden leer, además de ser una fuente potencial de error. El cálculo de valores intermedios en las tablas por medio de interpolación genera inexactitud, alarga el análisis y es también fuente potencial de error.

No existen fórmulas en los manuales para considerar cargas axiales, ni trapeciales, ni momentos concentrados. Además, no se consideran las deformaciones por cortante, que pueden ser importantes en vigas de gran peralte y claros cortos.

La ventaja que presenta el método es que no requiere del empleo de una computadora. Sin embargo, esta ventaja es relativa ya que el uso de las computadoras es cada día más generalizado.

5.4 Método de Factores de Rigidez y Reacciones de Empotramiento.-

El método consiste en obtener las rigideces de cada uno de los elementos de la estructura y además las reacciones de empotramiento para aquellos elementos con cargas en el claro. Una vez logrado lo anterior, se pueden alimentar a un programa de análisis de marcos que acepte como datos las rigideces de los elementos directamente, o bien emplear algún método manual de análisis tal como el Cross. La obtención de las rigideces de los

elementos y de las reacciones, se apoya en manuales de constantes de marcos, como el editado por la Asociación del Cemento Portland (P C A). En esta publicación se consignan tablas que proporcionan rigideces angulares y momentos de empotramiento para diversas cargas perpendiculares al elemento. Estos valores son suficientes para realizar un análisis de marcos ortogonales sin deformación axial de sus elementos. Sin embargo, el caso general considerando deformaciones axiales requiere el cálculo aproximado tanto de la rigidez axial, como de las reacciones axiales de empotramiento. La rigidez axial se puede aproximar subdividiendo los acartelamientos en dovelas y aplicando la fórmula:

$$r_{ax} = \frac{1}{\sum \frac{L}{EA}}$$

Para el ejemplo considerado se emplearon cuatro dovelas por acartelamiento en el cálculo de dicha rigidez axial. En el caso de las reacciones axiales de empotramiento estas se obtienen, de manera también aproximada, como si se tratara de un elemento de sección constante.

Adicionalmente al coeficiente de rigidez axial, se utilizan los coeficientes de rigidez angular que definiremos a continuación: se denomina r_{aa} al momento que hay que aplicar en el extremo A de una barra para producir en él un giro unitario, mientras aparece en el extremo empotrado B un momento r_{ab} ; y viceversa, se denomina r_{bb} al momento que hay que aplicar en el extremo B de una barra para producir en él un giro unitario, mientras aparece en el extremo empotrado A un momento r_{ba} . Lo anterior se puede expresar en forma matricial como sigue:

$$\begin{Bmatrix} M_a \\ M_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{aa} & r_{ab} \\ r_{ba} & r_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \end{Bmatrix}$$

Los valores r_{aa} , r_{ab} , r_{ba} y r_{bb} son los denominados coeficientes de la matriz de rigideces angulares.

Los valores tabulados en el manual de constantes de marcos de la Asociación del Cemento Portland son:

+Factores de Rigidez (k_{ab} , k_{ba})

- +Factores de Transporte (C_{ab}, C_{ba})
- +Coeficientes de Momentos de Empotramiento para carga uniformemente repartida a todo lo largo del elemento (M_{ab}, M_{ba})
- +Coeficientes de Momentos de Empotramiento para cargas concentradas a 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 y 0.9 veces la longitud del elemento a partir del nudo inicial (M_{ab}, M_{ba})
- +Coeficientes de Momentos de Empotramiento debidos al peso de las cartelas (M_{ab}, M_{ba})

Los coeficientes de rigidez angulares se obtienen a partir de los factores de rigidez y de transporte de la manera siguiente:

$$r_{aa} = \frac{A_{ab} E I_c}{L} \quad ; \quad r_{bb} = \frac{A_{ba} E I_c}{L}$$

$$r_{ab} = r_{ba} = C_{ba} r_{bb} = C_{ab} r_{aa}$$

El valor de I_c es el momento de inercia de la sección con mínimo peralte.

Los momentos de empotramiento se obtienen multiplicando el coeficiente de momento por:

1. $w L^2$ para carga uniformemente repartida, donde w es la carga por unidad de longitud.
2. $P L$ para carga concentrada. P es el valor de la carga.
3. $\gamma_a L^2$ ó $\gamma_b L^2$ para el peso de la cartela en el extremo inicial o final respectivamente. γ_a y γ_b son los pesos por unidad de longitud de dichas cartelas en la sección con más peralte.

Las reacciones de cortante debidas a la carga perpendicular al elemento se encuentran por equilibrio, una vez determinados los momentos de empotramiento.

Las tablas están en función de las relaciones características de los elementos, que son (ver fig 5.5):

$$\alpha_a = \frac{\text{Longitud del Acartelamiento en el Extremo Inicial}}{\text{Longitud Total del Elemento}}$$

$$r_a = \frac{\text{Peralte Extremo Inicial } (h_a) - \text{Peralte Sección Cte. } (h_c)}{\text{Peralte Sección Constante } (h_c)}$$

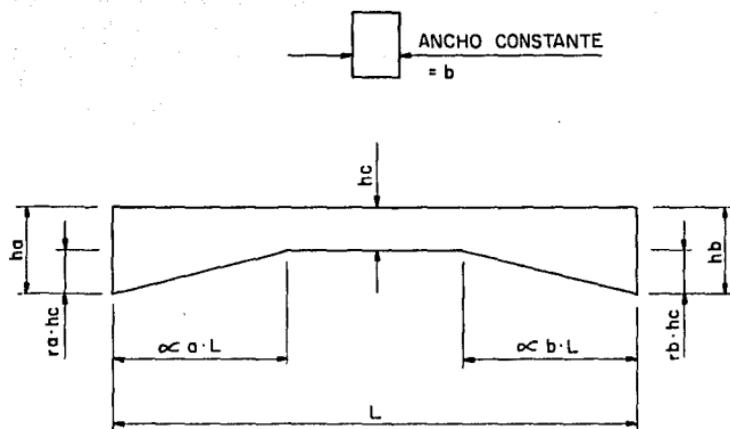


fig. 5 . 5 RELACIONES CARACTERISTICAS DE UN ELEMENTO.

METODO DE FACTORES DE RIGIDEZ

Y REACCIONES DE EMPOTRAMIENTO

Longitud del Acartelamiento en el Extremo Final

$$\alpha_b = \frac{\text{Longitud del Acartelamiento en el Extremo Final}}{\text{Longitud Total del Elemento}}$$

$$r_b = \frac{\text{Peralte Extremo Final } (h_b) - \text{Peralte Sección Cte. } (h_c)}{\text{Peralte Sección Constante } (h_c)}$$

Estas tablas están desarrolladas para vigas de sección rectangular exclusivamente. En el caso de vigas con acartelamiento vertical, el ancho permanece constante.

El modelo considerado en el ejemplo se muestra en la fig 5.6. Para el elemento 1 las relaciones características son: $\alpha_a = 0$, $r_a = 0$, $\alpha_b = 1$, $r_b = 1$. Los factores para estas relaciones están dados en el renglón 33 de la tabla 52 del Manual de Constantes anteriormente mencionado:

C_{ab}	C_{ba}	k_{ab}	k_{ba}
0.834	0.294	6.86	19.46

El elemento 4 tiene las mismas relaciones características, solo que invertidas: $\alpha_a = 1$, $r_a = 1$, $\alpha_b = 0$, $r_b = 0$; por tanto los factores son:

C_{ab}	C_{ba}	k_{ab}	k_{ba}
0.294	0.834	19.46	6.86

Como estos elementos no tienen cargas externas aplicadas directamente sobre ellos, no requerimos obtener los coeficientes de momentos.

Las relaciones características para los elementos 2 y 3 son: $\alpha_a = 0.25$, $r_a = 1$, $\alpha_b = 0.25$, $r_b = 1$; sin embargo, para valores de $\alpha = 0.25$ no existen tablas. Para conocer los factores y coeficientes correspondientes podemos interpolar a partir de las tablas de $\alpha = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$, y 0.5 ; o bien, como en nuestro caso, emplear el programa de calculadora de bolsillo HP-41C para el cálculo de rigideces angulares, factores de transporte y momentos de empotramiento en vigas de sección variable presentado en las Memorias del 4° Congreso Nacional de Ingeniería Estructural de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural desarrollado en León, Gto. en 1984. Esta segunda alternativa proporciona valores con mayor exactitud y de una manera más rápida. El programa mencionado utiliza integración de Simpson 1/3 y para las

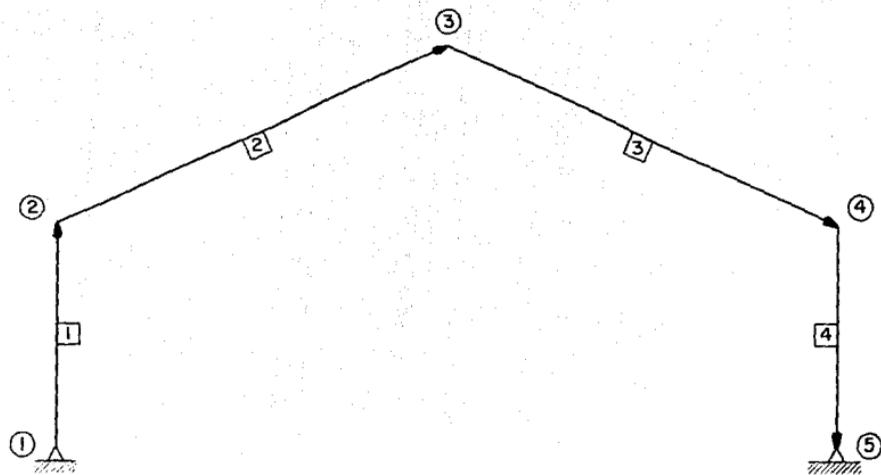


fig. 5 . 6 MODELO PARA ANALISIS COMPARATIVO DEL MARCO. METODO DE FACTORES

DE RIGIDEZ Y REACCIONES DE EMPOTRAMIENTO

relaciones características anteriores proporciona una exactitud de 4 dígitos con 40 puntos de evaluación. Los factores de los elementos 2 y 3 así obtenidos son:

$$C_{ab} = C_{ba} \quad A_{ab} = A_{ba}$$

$$0.685 \quad 9.25$$

El elemento 2 tiene una carga uniformemente repartida en toda su longitud, y además una carga concentrada a 0.66 L del nudo inicial. Los coeficientes de momentos para estas cargas obtenidos con la ayuda del programa mencionado son:

Carga Uniforme	Carga Concentrada b = 0.66 L	
$M_{ab} = M_{ba}$	M_{ab}	M_{ba}
0.1017	0.0719	0.2059

Las coordenadas de los nudos con respecto al sistema global son:

COORDENADAS DE LOS NUDOS:

NUDO	X	Y
1	0	0
2	0	20
3	36	36
4	72	20
5	72	0

Las conectividades y longitudes de los elementos son:

CONECTIVIDADES DE LOS ELEMENTOS:

ELEMENTO	N.INICIAL	N.FINAL	LONG.
1	1	2	20
2	2	3	39.39543
3	3	4	39.39543
4	4	5	20

Los coeficientes de rigidez son:

CARACTERISTICAS DE LOS ELEMENTOS:

ELEMENTO	r_{ax}/E	r_{aa}/E	r_{bb}/E	r_{ab}/E
1	.289344	.457333	1.29733	.381416
2	.120073	.313001	.313001	.214546
3	.120073	.313001	.313001	.214546

4 .289344 1.29733 .457333 .381416

Las cargas en los nudos y las reacciones de empotramiento se muestran a continuación:

CARGAS CONCENTRADAS EN ELEMENTOS:

	A	B	C	D	I	J
1	MEMB	CONC	Y	2	-10.82141	0
2	MEMB	CONC	Y	2	-16.31670	39.395429
3	MEMB	CONC	X	2	-5.231119	0
4	MEMB	CONC	X	2	-6.830265	39.395429
5	GLOB	MOMT	Z	2	-97.97427	0
6	GLOB	MOMT	Z	2	146.219	39.395429

CARGAS CONCENTRADAS EN NUDOS:

	A	B	K	L	M	N
7	GLOB	JOIN	4	10	0	0

La convención de las literales es la misma especificada en la sección 5.2. Los resultados del análisis son:

DESPLAZAMIENTOS DE NUDOS:

NUDO	DX	DY	PHI
1	0	0	-2.417608E-03
2	5.145266E-02	-1.493054E-04	-2.758514E-03
3	6.026995E-02	-.0202644	2.44495E-03
4	6.906678E-02	-8.828245E-05	-2.794725E-03
5	0	0	-4.002623E-03

ELEMENTOS MECANICOS:

ELEMENTO 1

EXTREMO INICIAL (NUDO # 1)

NA= -18.66267 MA= 0 VA= -3.931629

EXTREMO FINAL (NUDO # 2)

NB= -18.66267 MB= -78.63258 VB= -3.931629

ELEMENTO 2

EXTREMO INICIAL (NUDO # 2)

NA= -11.17234 MA= -78.63268 VA= 15.45728
EXTREMO FINAL (NUDO # 3)
NB= .8890452 MB= 55.75447 VB= -11.68084

ELEMENTO 3
EXTREMO INICIAL (NUDO # 3)
NA= -8.074055 MA= 55.75453 VA= -8.487428
EXTREMO FINAL (NUDO # 4)
NB= -8.074055 MB= -278.6113 VB= -8.487428

ELEMENTO 4
EXTREMO INICIAL (NUDO # 4)
NA= -11.03501 MA= -278.6116 VA= 13.93059
EXTREMO FINAL (NUDO # 5)
NB= -11.03501 MB= 8.392334E-05 VB= 13.93059

5.5 Método de Integración Numérica.-

Este método es el desarrollado en el presente trabajo y no requiere de cálculos previos, excepto la determinación de coordenadas y la forma de los elementos. El modelo de la estructura es igual al mostrado en la fig 5.6, por lo que las coordenadas, conectividades y longitudes son las mismas que en el método anterior de Factores de Rigidez. Las formas de los elementos se toman directamente de la fig 5.1 y son:

CARACTERISTICAS DE LOS ELEMENTOS:

ELEMENTO NUMERO 1

A1= 0 A2= 0 A3= 20
HA= 2 BA= 2
HL= 4 BL= 2

VARIACION VERTICAL EN EL EXTREMO FINAL LINEAL

ELEMENTO NUMERO 2

A1= 9.848858 A2= 19.69771 A3= 9.848858
HO= 4 BO= 2
HA= 2 BA= 2
HL= 4 BL= 2

VARIACION VERTICAL EN EL EXTREMO INICIAL LINEAL

VARIACION VERTICAL EN EL EXTREMO FINAL LINEAL

ELEMENTO NUMERO 3

A1= 9.848858 A2= 19.69771 A3= 9.848858

H0= 4 B0= 2

HA= 2 BA= 2

HL= 4 BL= 2

VARIACION VERTICAL EN EL EXTREMO INICIAL LINEAL

VARIACION VERTICAL EN EL EXTREMO FINAL LINEAL

ELEMENTO NUMERO 4

A1= 20 A2= 0 A3= 0

H0= 4 B0= 2

HA= 2 BA= 2

VARIACION VERTICAL EN EL EXTREMO INICIAL LINEAL

Las cargas se simplifican a únicamente 3: carga uniforme vertical en el elemento 2, carga concentrada vertical en el elemento 2 y carga horizontal en el nudo 4. Estas cargas tienen los siguientes valores:

CARGAS REPARTIDAS EN ELEMENTOS:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	GLOB	UNIF	Y	2	-0.5	-0.5	0	39.39543

CARGAS CONCENTRADAS EN ELEMENTOS:

	A	B	C	D	I	J
2	GLOB	CONC	Y	2	-10	26.26362

CARGAS CONCENTRADAS EN NUDOS:

	A	B	K	L	M	N
3	GLOB	JOIN	4	10	0	0

Los resultados del análisis son:

DESPLAZAMIENTOS DE NUDOS:

NUDO	DX	DY	PHI
1	0	0	-2.417557E-03
2	5.145536E-02	-1.497202E-04	-2.758813E-03
3	6.027282E-02	-2.027133E-02	2.44491E-03
4	6.907243E-02	-8.853232E-05	-2.794364E-03
5	0	0	-4.003617E-03

ELEMENTOS MECANICOS:

ELEMENTO 1

EXTREMO INICIAL (NUDO # 1)

NA= -18.66245 MA= -1.525879E-05 VA= -3.93126

EXTREMO FINAL (NUDO # 2)

NB= -18.66245 MB= -78.62521 VB= -3.93126

ELEMENTO 2

EXTREMO INICIAL (NUDO # 2)

NA= -11.17215 MA= -78.62501 VA= 15.45737

EXTREMO FINAL (NUDO # 3)

NB= .8892331 MB= 55.76572 VB= -11.68075

ELEMENTO 3

EXTREMO INICIAL (NUDO # 3)

NA= -8.07348 MA= 55.76584 VA= -8.487731

EXTREMO FINAL (NUDO # 4)

NB= -8.07348 MB= -278.6119 VB= -8.487731

ELEMENTO 4

EXTREMO INICIAL (NUDO # 4)

NA= -11.03545 MA= -278.6118 VA= 13.93059

EXTREMO FINAL (NUDO # 5)

NB= -11.03545 MB= -3.051758E-05 VB= 13.93059

5.6 Tabla Comparativa.-

Se muestra a continuación una tabla donde se comparan los 4 métodos:

	Dovelas	Parámetros Elásticos	Factores	Integración Numérica
Número de Nudos	27	5	5	5
Número de Elementos	26	4	4	4
Número de Cargas	11	3	7	3
Superposición de Elementos Mecánicos para cada Carga	No	Si	No	No
Cálculo de Reacciones de Empotramiento para cada Carga	No	No	Si	No
Orden de la Matriz de Rigidez de la Estructura	77	--	11	11
Tiempo de Computadora (con impresión en pantalla)	6 min 57 seg	--	14 seg	26 seg
Necesidad de usar Computadora	Si	No	Si/No	Si
Facilidad de hacer cambios de geometría o cargas	No	No	No	Si
Método de Solución de las Ecuaciones Simultáneas empleado en el ejemplo	Gauss-Crout	--	Gauss-Crout	Gauss-Crout
Posibilidad de incluir Distorsiones por Cortante	Si	No	No	Si
Sección Transversal	Cualquiera	Rectangular	Rectangular	Cualquiera

	Dovelas	Parámetros Elásticos	Factores	Integración Numérica
Ancho de la Sección Transversal	Variable	Constante en toda la Estructura	Constante en Vigas con Peralte Variable; Variable en Vigas con Peralte Constante	Variable
Tipo de Estructura	Cualquiera	Pórticos Simétricos Específicos con Medidas variables	Cualquiera	Cualquiera
Rigidez Axial de Columnas	--	--	0.289344	0.288539 *
Rigidez Angular de Columnas	--	--	raa= 0.457333 rbb= 1.297333 rab= 0.381416	raa= 0.457508 * rbb= 1.2967 * rab= 0.381683 *
Rigidez Axial de Vigas	--	--	0.120073	0.119936 *
Rigidez Angular de Vigas	--	--	raa= 0.313001 rbb= raa rab= 0.214546	raa= 0.313003 * rbb= raa * rab= 0.214545 *
Reacciones de Empotramiento para la viga con carga en el claro	--	--	Ma= 97.97020 Mb= -146.2247 Va= 10.82116 Vb= 16.31695 Na= 5.353795 Nb= 6.707590	Ma= 97.97427 * Mb= -146.2190 * Va= 10.82141 * Vb= 16.31670 * Na= 5.251119 * Nb= 6.830265 *
Reacción Vertical Apoyo Izquierdo	18.64031	18.6622	18.66267	18.66245
Reacción Horizontal Apoyo Izquierdo	3.89424	3.9332	3.931625	3.93126

* calculados internamente en el programa

	Dovelas	Parámetros Elásticos	Factores	Integración Numérica
Reacción Vertical Apoyo Derecho	11.05839	11.0355	11.03501	11.03545
Reacción Horizontal Apoyo Derecho	13.94768	13.9332	13.93058	13.93059
Giro Apoyo Izquierdo	-0.002416	--	-0.002418	-0.002418
Giro Apoyo Derecho	-0.004016	--	-0.004003	-0.004004
Desplazamientos Nudo Superior Izquierdo	$d_x= 0.037862$ $d_y=-0.000120$ $\phi_i=-0.002671$	--	$d_x= 0.051453$ $d_y=-0.000149$ $\phi_i=-0.002759$	$d_x= 0.051455$ $d_y=-0.000150$ $\phi_i=-0.002759$
Desplazamientos Nudo Central	$d_x= 0.060307$ $d_y=-0.020402$ $\phi_i= 0.002436$	--	$d_x= 0.060270$ $d_y=-0.020264$ $\phi_i= 0.002445$	$d_x= 0.060273$ $d_y=-0.020271$ $\phi_i= 0.002445$
Desplazamientos Nudo Superior Derecho	$d_x= 0.069164$ $d_y=-0.000088$ $\phi_i=-0.027804$	--	$d_x= 0.069067$ $d_y=-0.000088$ $\phi_i=-0.027947$	$d_x= 0.069072$ $d_y=-0.000089$ $\phi_i=-0.027944$
Momento Flexionante del Nudo Superior Izquierdo	-77.88648 367	-78.6643	-78.63254 69	-78.62521 01
Momento Flexionante del Nudo Superior Central	56.01608 5304	55.6838	55.75440 1	55.76572 84
Momento Flexionante del Nudo Superior Derecho	-278.9731 554	-278.6643	-278.6113 5	-278.6119 8

6.- CONCLUSIONES

El análisis de estructuras formadas por elementos de sección variable, apoyado en los métodos tradicionales, es un procedimiento difícil que requiere de mucho trabajo. El uso cada vez mayor de estructuras de sección variable obliga al desarrollo de métodos de análisis más rápidos y al mismo tiempo exactos que faciliten la labor del ingeniero y le permitan concentrarse en aspectos conceptuales del diseño. El método de integración numérica desarrollado en este trabajo e implementado en una computadora personal, permite analizar estructuras de este tipo grandes y complicadas, debido a la poca cantidad de variables almacenadas y operaciones aritméticas realizadas. Las variables se reducen al considerar como un solo elemento a una barra recta con dos acartelamientos en sus extremos y sección constante al centro; en el caso de las operaciones aritméticas, estas se minimizan ya que para la solución de las integrales que se presentan se utiliza la cuadratura de Gauss-Legendre que resultó ser la más rápida en el estudio comparativo.

Adicionalmente a la metodología interna, los datos requeridos son medidas físicas y no abstractas como en los métodos tradicionales, por lo que se facilita su utilización y se disminuye la posibilidad de error. De esta manera el empleo del método propuesto permite realizar un estudio exhaustivo de diferentes alternativas o de diferentes estructuras, sin limitaciones en cuanto a su forma y en un breve lapso de tiempo.

El método de integración numérica es dinámico ya que se puede modificar para considerar barras rectas con más y diferentes acartelamientos, otro tipo de secciones transversales o cargas, puede ser implementado en un análisis tridimensional, se pueden considerar apoyos elásticos o nudos semirígidos, apoyos guiados diagonales a los ejes globales, etc.

Para facilitar aun más la labor del ingeniero, se pueden incluir en el programa aspectos tales como: generación automática de carga muerta, diseño de acuerdo a reglamentos vigentes, generación de geometría y combinaciones de carga entre otros.

En el desarrollo teórico expuesto en el capítulo 2 se considera que el eje longitudinal es centroidal, sin embargo, los ejes longitudinales que se consideran en la práctica no lo son, como se

indica en la sección 4.1. Sería conveniente realizar un estudio de sensibilidad para ver que tanto influye en el análisis esta diferencia.

Un aspecto que es importante tener en cuenta es el efecto de nudo, esto es la presencia de rigidez infinita en el semiancho de la junta. En el ejemplo considerado los acartelamientos se prolongan hasta el centro de la junta como se expone en la sección 4.2. Este es otro punto de estudio en trabajos futuros.

BIBLIOGRAFIA

S. P. Timoshenko, J. M. Gere, *"Mecánica de Materiales"*, Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana, México D.F., 1^ª Edición, 1974.

Valerian Leontovich, *"Pórticos y Arcos, Soluciones Condensadas para el Análisis Estructural"*, Compañía Editorial Continental, S.A. de C.V., México D.F., 15^ª Edición, 1987.

V. I. Feodosiev, *"Resistencia de Materiales"*, Editorial Mir, Moscú, 2^ª Edición, 1980.

Apuntes Personales de la Materia: Teoría General de las Estructuras impartida por el Ing. Julio Damy Rios, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, U.N.A.M., 1985.

J. D. Aristizabal Ochoa, *"Tapered Beam and Column Elements in Unbraced Frame Structures"*, Journal of Computing in Civil Engineering, Vol. 1, No. 1, Paper No. 21150, A.S.C.E., Enero 1987.

B. Carnahan, H.A. Luther, J.D. Wilkes, *"Cálculo Numérico; Métodos, Aplicaciones"*, Editorial Rueda, Madrid, 1^ª Edición, 1985.

A. Perronet, *"Les Méthodes de Résolution des Systèmes Linéaires, Leur Technique de Stockage"*, Laboratoire Analyse Numerique, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1981.

A. H. Stroud, D. Secrest, *"Gaussian Quadrature Formulas"*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs N.J., 1^ª Edición, 1966.

"Handbook of Frame Constants, Beam Factors and Moment Coefficient for Members of Variable Section", Portland Cement Association, Skokie Illinois, 1958.

M. Ordaz, E. Lozano, J. González, "*Programa de Calculadora de Bolsillo para el Cálculo de Rigideces Angulares, Factores de Transporte y Momentos de Empotramiento en Vigas de Sección Variable*", Memorias del 4º Congreso Nacional de Ingeniería Estructural desarrollado en León, Guanajuato, S.M.I.E., 1984.

D. J. Just, "*Plane Frameworks of Tapering Box and I-Section*", Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 103, No. ST1, Enero 1977.

APENDICE A
ABSCISAS Y PESOS DE CUADRATURAS

En este apéndice se muestran las abscisas z_i y los pesos w_i de las diferentes cuadraturas consideradas:

- Cuadratura de Newton-Cotes
- Cuadratura de Gauss-Legendre
- Cuadratura de Gauss-Chebyshev

NUMERO DE EVALUACIONES = 2	
Z = +,- 1	W = 1
NUMERO DE EVALUACIONES = 3	
Z = +,- 1	W = .3333333333333333
Z = 0	W = 4
NUMERO DE EVALUACIONES = 4	
Z = +,- 1	W = .25
Z = +,- .3333333333333333	W = .75
NUMERO DE EVALUACIONES = 5	
Z = +,- 1	W = .155555555555556
Z = +,- .5	W = .7111111111111111
Z = 0	W = 12
NUMERO DE EVALUACIONES = 6	
Z = +,- 1	W = .1319444444444444
Z = +,- .6	W = .5208333333333333
Z = +,- .2	W = .3472222222222222
NUMERO DE EVALUACIONES = 7	
Z = +,- 1	W = 9.761904761904762D-02
Z = +,- .6666666666666666	W = .5142857142857143
Z = +,- .3333333333333333	W = 6.428571428571429D-02
Z = 0	W = 272
NUMERO DE EVALUACIONES = 8	
Z = +,- 1	W = .0869212962962963
Z = +,- .714285714285714	W = .4140046296296296
Z = +,- .428571428571429	W = .153125
Z = +,- .142857142857143	W = .3459490740740741
NUMERO DE EVALUACIONES = 9	
Z = +,- 1	W = 6.977072310405644D-02
Z = +,- .75	W = .415379188712522
Z = +,- .5	W = -.0654673721340388
Z = +,- .25	W = .7404585537918871
Z = 0	W = -4540

TABLA A1.- CUADRATURA DE NEWTON-COTES.
 AECISAS NORMALIZADAS AL INTERVALO [-1 , 1] Y PESOS CORRESPONDIENTES.

NUMERO DE EVALUACIONES = 2		
Z = +,-	.577350269189626	W = 1
NUMERO DE EVALUACIONES = 3		
Z = +,-	.774596669241483	W = .555555555555556
Z =	0	W = .888888888888889
NUMERO DE EVALUACIONES = 4		
Z = +,-	.861136311594053	W = .347854845137454
Z = +,-	.339981043584856	W = .652145154862546
NUMERO DE EVALUACIONES = 5		
Z = +,-	.906179845938664	W = .236926885056189
Z = +,-	.538469310105683	W = .478628670499366
Z =	0	W = .568888888888889
NUMERO DE EVALUACIONES = 6		
Z = +,-	.932469514203152	W = .17132449237917
Z = +,-	.661209386466265	W = .360761573048139
Z = +,-	.238619186083197	W = .467913934572691
NUMERO DE EVALUACIONES = 7		
Z = +,-	.949107912342759	W = .12948496616887
Z = +,-	.741531185599394	W = .279705391489277
Z = +,-	.405845151377397	W = .381830050505119
Z =	0	W = .417959183673469
NUMERO DE EVALUACIONES = 8		
Z = +,-	.960289856497536	W = .101228536290376
Z = +,-	.796666477413627	W = .222381034453374
Z = +,-	.525532409916329	W = .313706645877087
Z = +,-	.18343464249565	W = .362683783378362
NUMERO DE EVALUACIONES = 9		
Z = +,-	.968160239507626	W = .081274388361574
Z = +,-	.836031107326636	W = .180648160694857
Z = +,-	.61337143270059	W = .260610696402935
Z = +,-	.324253423403809	W = .312347077040003
Z =	0	W = .33023935500126

TABLA A2.- CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE.
 ABCISAS NORMALIZADAS AL INTERVALO $[-1, 1]$ Y PESOS CORRESPONDIENTES.

NUMERO DE EVALUACIONES = 10

Z= +, -	.973906528517172	W=	.066671344308688
Z= +, -	.865063366688985	W=	.149451349150581
Z= +, -	.679409568299024	W=	.219086362515982
Z= +, -	.433395394129247	W=	.269266719309996
Z= +, -	.148874338981631	W=	.295524224714753

NUMERO DE EVALUACIONES = 11

Z= +, -	.978228658146057	W=	.055668567116174
Z= +, -	.887062599768095	W=	.125580369464905
Z= +, -	.730152005574049	W=	.186290210927734
Z= +, -	.519096129206812	W=	.23319376459199
Z= +, -	.269543155952345	W=	.262804544510247
Z=	0	W=	.27292508677901

NUMERO DE EVALUACIONES = 12

Z= +, -	.981560634246719	W=	.047175336386512
Z= +, -	.904117256370475	W=	.106939325995318
Z= +, -	.769902674194305	W=	.160078328543346
Z= +, -	.587317954286617	W=	.203167426723066
Z= +, -	.36783149899818	W=	.233492536538355
Z= +, -	.125233408511469	W=	.249147045813403

NUMERO DE EVALUACIONES = 13

Z= +, -	.984183054718588	W=	.040484004765316
Z= +, -	.917598399222978	W=	.092121499837728
Z= +, -	.80157809073331	W=	.138873510219787
Z= +, -	.64234933944034	W=	.178145980761946
Z= +, -	.448492751036447	W=	.207816047536889
Z= +, -	.230458315955135	W=	.226283180262897
Z=	0	W=	.232551553230874

NUMERO DE EVALUACIONES = 14

Z= +, -	.986283808696812	W=	.035119460331752
Z= +, -	.928434883663574	W=	.08015808715976
Z= +, -	.827201315069765	W=	.121518570687903
Z= +, -	.687292904811685	W=	.157203167158194
Z= +, -	.515248636358154	W=	.185538397477938
Z= +, -	.31911236892789	W=	.205198463721296
Z= +, -	.108054948707344	W=	.215263853463158

TAOLA A2 (CONTINUACION).- CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE.
 ABCISAS NORMALIZADAS AL INTERVALO $[-1, 1]$ Y PESOS CORRESPONDIENTES.

NUMERO DE EVALUACIONES = 15

Z= +, -	.987992518020485	W=	.030753241996117
Z= +, -	.937273392400706	W=	.070366047488108
Z= +, -	.848206583410427	W=	.107159220467172
Z= +, -	.72441773136017	W=	.139570677926154
Z= +, -	.570972172608539	W=	.166269205816994
Z= +, -	.394151347077563	W=	.186161000015562
Z= +, -	.201194093997435	W=	.198431485327112
Z=	0	W=	.202578241925561

NUMERO DE EVALUACIONES = 16

Z= +, -	.98940093499165	W=	.027152459411754
Z= +, -	.944575023073233	W=	.062253523938648
Z= +, -	.865631202387832	W=	.095158511682493
Z= +, -	.755404408355003	W=	.124628971255534
Z= +, -	.617876244402644	W=	.149595988816577
Z= +, -	.458016777657227	W=	.169156519395003
Z= +, -	.281603580779259	W=	.182603415044924
Z= +, -	.095012509837637	W=	.189450610455068

NUMERO DE EVALUACIONES = 20

Z= +, -	.993128599185095	W=	.017614007139152
Z= +, -	.963971927277914	W=	.040601429800387
Z= +, -	.912234428251326	W=	.062672048334109
Z= +, -	.839116971822219	W=	.083276741576705
Z= +, -	.746331906460151	W=	.10193011981724
Z= +, -	.636053680726515	W=	.118194531961518
Z= +, -	.510867001950827	W=	.131688638449177
Z= +, -	.37370608871542	W=	.142096109318382
Z= +, -	.227785851141645	W=	.149172986472604
Z= +, -	.076526521133497	W=	.152753387130726

NUMERO DE EVALUACIONES = 24

Z= +, -	.995187219997021	W=	.012341229799987
Z= +, -	.974728555971309	W=	.028531388628934
Z= +, -	.938274552002733	W=	.04427743881742
Z= +, -	.886415527004401	W=	.059298584915437
Z= +, -	.820001985973903	W=	.07334648141108
Z= +, -	.740124191578554	W=	.086190161531953
Z= +, -	.648093651936976	W=	.097618652104114
Z= +, -	.54542147138884	W=	.107444270115966
Z= +, -	.433793507626045	W=	.115505660053726
Z= +, -	.315042679696163	W=	.121670472927803
Z= +, -	.191118867473616	W=	.125837456346828
Z= +, -	.064056892862606	W=	.127930195346752

TABLA A2 (CONTINUACION).-- CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE.
 ABCISAS NORMALIZADAS AL INTERVALO [-1 , 1] Y PESOS CORRESPONDIENTES.

NUMERO DE EVALUACIONES = 32

Z= +,-	.997263861849482	W=	.00701861000947
Z= +,-	.985611511545268	W=	.016274394730906
Z= +,-	.964762255587506	W=	.025392065309262
Z= +,-	.93490607593774	W=	.034273862913021
Z= +,-	.896321155766052	W=	.042835898022227
Z= +,-	.84936761373257	W=	.050998059262376
Z= +,-	.794483795967942	W=	.058684093478536
Z= +,-	.73218211874029	W=	.065822222776362
Z= +,-	.663044266930215	W=	.072345794108849
Z= +,-	.587715757240762	W=	.07819389578707
Z= +,-	.506899908932229	W=	.083311924226947
Z= +,-	.421351276130635	W=	.087652093004404
Z= +,-	.331868602282128	W=	.091173878695764
Z= +,-	.239287362252137	W=	.093844399080805
Z= +,-	.144471961582796	W=	.095638720079275
Z= +,-	.048307665687738	W=	.096540088514728

NUMERO DE EVALUACIONES = 40

Z= +,-	.998237709710559	W=	.004521277098533
Z= +,-	.990726238699457	W=	.010498204531153
Z= +,-	.977259949983744	W=	.016421058381909
Z= +,-	.957916819213792	W=	.022245849194167
Z= +,-	.932812808278677	W=	.027937006980023
Z= +,-	.902098806968874	W=	.033460195282548
Z= +,-	.86595950321226	W=	.039782167974472
Z= +,-	.824612230833312	W=	.043870908185673
Z= +,-	.778305651426519	W=	.048695807635072
Z= +,-	.727318255189927	W=	.053227846983937
Z= +,-	.67195668461418	W=	.057439769099392
Z= +,-	.61255388966798	W=	.061306242492929
Z= +,-	.549467125095128	W=	.064804013456601
Z= +,-	.483075801686179	W=	.067912045815234
Z= +,-	.413779204371605	W=	.070611647391287
Z= +,-	.341994090815758	W=	.072886582395804
Z= +,-	.268152185007254	W=	.074723169057968
Z= +,-	.192637580701371	W=	.076110361900626
Z= +,-	.116384070675255	W=	.077039818164248
Z= +,-	.038772417506051	W=	.077505947978425

TABLA A2 (CONTINUACION).- CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE.
 ABCISAS NORMALIZADAS AL INTERVALO $[-1, 1]$ Y PESOS CORRESPONDIENTES.

NUMERO DE EVALUACIONES = 2		
Z = +, -	.7071067811865476	W = 1.570796326794897
NUMERO DE EVALUACIONES = 3		
Z = +, -	.8660254037844387	W = 1.047197551196598
Z = 0		W = 1.047197551196598
NUMERO DE EVALUACIONES = 4		
Z = +, -	.9238795325112868	W = .7853981633974483
Z = +, -	.3826834323650899	W = .7853981633974483
NUMERO DE EVALUACIONES = 5		
Z = +, -	.9510565162951536	W = .6283185307179586
Z = +, -	.5877852522924732	W = .6283185307179586
Z = 0		W = .6283185307179586
NUMERO DE EVALUACIONES = 6		
Z = +, -	.9659258262890683	W = .5235987755982988
Z = +, -	.7071067811865476	W = .5235987755982988
Z = +, -	.2588190451025209	W = .5235987755982988
NUMERO DE EVALUACIONES = 7		
Z = +, -	.9749279121818236	W = .4487989505128276
Z = +, -	.7818314824680298	W = .4487989505128276
Z = +, -	.4338837391175582	W = .4487989505128276
Z = 0		W = .4487989505128276
NUMERO DE EVALUACIONES = 8		
Z = +, -	.9607852804032304	W = .3926990816987241
Z = +, -	.8314696123025453	W = .3926990816987241
Z = +, -	.5555702330196023	W = .3926990816987241
Z = +, -	.1950903220161284	W = .3926990816987241
NUMERO DE EVALUACIONES = 9		
Z = +, -	.9848077530122081	W = .3490658503988659
Z = +, -	.8660254037844387	W = .3490658503988659
Z = +, -	.6427876096865394	W = .3490658503988659
Z = +, -	.3420201433256688	W = .3490658503988659
Z = 0		W = .3490658503988659

TABLA A3.- CUADRATURA DE GAUSS-CHEBYSHEV.
 ABCISAS NORMALIZADAS AL INTERVALO $[-1, 1]$ Y PESOS CORRESPONDIENTES.

NUMERO DE EVALUACIONES = 10

Z= +, -	.9876883405951377	W=	.3141592653589793
Z= +, -	.8910065241883679	W=	.3141592653589793
Z= +, -	.7071067811865476	W=	.3141592653589793
Z= +, -	.4539904997395469	W=	.3141592653589793
Z= +, -	.156434465040231	W=	.3141592653589793

NUMERO DE EVALUACIONES = 11

Z= +, -	.9898214418809327	W=	.2855993321445266
Z= +, -	.9096319953545184	W=	.2855993321445266
Z= +, -	.7557495743542583	W=	.2855993321445266
Z= +, -	.5406408174555976	W=	.2855993321445266
Z= +, -	.2817325568414298	W=	.2855993321445266
Z=	0	W=	.2855993321445266

NUMERO DE EVALUACIONES = 12

Z= +, -	.9914448613738104	W=	.2617993877991494
Z= +, -	.9238795325112868	W=	.2617993877991494
Z= +, -	.7933533402912352	W=	.2617993877991494
Z= +, -	.6087614290987207	W=	.2617993877991494
Z= +, -	.3826834322650899	W=	.2617993877991494
Z= +, -	.1505261922200517	W=	.2617993877991494

NUMERO DE EVALUACIONES = 13

Z= +, -	.992708874098054	W=	.241660973353061
Z= +, -	.9350162426854148	W=	.241660973353061
Z= +, -	.8229838658936564	W=	.241660973353061
Z= +, -	.6631226582467950	W=	.241660973353061
Z= +, -	.4647231720437686	W=	.241660973353061
Z= +, -	.2393156642875579	W=	.241660973353061
Z=	0	W=	.241660973353061

NUMERO DE EVALUACIONES = 14

Z= +, -	.9937122098932426	W=	.2243994752564138
Z= +, -	.9430833703083676	W=	.2243994752564138
Z= +, -	.8467241992282842	W=	.2243994752564138
Z= +, -	.7071067811865476	W=	.2243994752564138
Z= +, -	.5320320765153366	W=	.2243994752564138
Z= +, -	.3302790619551672	W=	.2243994752564138
Z= +, -	.111964476103308	W=	.2243994752564138

TABLA A3 (CONTINUACION).- CUADRATURA DE GAUSS-CHEBYSHEV.
 ABCISAS NORMALIZADAS AL INTERVALO $[-1, 1]$ Y PESOS CORRESPONDIENTES.

NUMERO DE EVALUACIONES = 15

Z = +,-	.9945218953602733	W =	.2094395102393195
Z = +,-	.9510565162951536	W =	.2094395102393195
Z = +,-	.8660254037844387	W =	.2094395102393195
Z = +,-	.7431448254773943	W =	.2094395102393195
Z = +,-	.5877852522924732	W =	.2094395102393195
Z = +,-	.4067366430758003	W =	.2094395102393195
Z = +,-	.2079116908177594	W =	.2094395102393195
Z =	0	W =	.2094395102393195

NUMERO DE EVALUACIONES = 16

Z = +,-	.9951847266721969	W =	.1963495408493621
Z = +,-	.9569403357322089	W =	.1963495408493621
Z = +,-	.881921264348355	W =	.1963495408493621
Z = +,-	.773010453362737	W =	.1963495408493621
Z = +,-	.6343932841636455	W =	.1963495408493621
Z = +,-	.4713967368259977	W =	.1963495408493621
Z = +,-	.2902846772544625	W =	.1963495408493621
Z = +,-	9.801714032956071D-02	W =	.1963495408493621

NUMERO DE EVALUACIONES = 17

Z = +,-	.9957341762950345	W =	.1847995678582231
Z = +,-	.9618256431728191	W =	.1847995678582231
Z = +,-	.8951632913550623	W =	.1847995678582231
Z = +,-	.7980172272802395	W =	.1847995678582231
Z = +,-	.6736956436465572	W =	.1847995678582231
Z = +,-	.5264321628773559	W =	.1847995678582231
Z = +,-	.361241666187153	W =	.1847995678582231
Z = +,-	.1837495178165704	W =	.1847995678582231
Z =	0	W =	.1847995678582231

NUMERO DE EVALUACIONES = 18

Z = +,-	.9961946980917455	W =	.1745329251994329
Z = +,-	.9659258262890683	W =	.1745329251994329
Z = +,-	.90630778703665	W =	.1745329251994329
Z = +,-	.8191520442889918	W =	.1745329251994329
Z = +,-	.7071067811865476	W =	.1745329251994329
Z = +,-	.5735764362510462	W =	.1745329251994329
Z = +,-	.4226182617406995	W =	.1745329251994329
Z = +,-	.2586190451025209	W =	.1745329251994329
Z = +,-	B.715574274765828D-02	W =	.1745329251994329

TABLA A3 (CONTINUACION).- CUADRATURA DE GAUSS-CHEBYSHEV.
 ABCISAS NORMALIZADAS AL INTERVALO $[-1, 1]$ Y PESOS CORRESPONDIENTES.

NÚMERO DE EVALUACIONES = 19

Z = +, -	.9965844930066698	W =	.1653469817678838
Z = +, -	.9694002659393304	W =	.1653469817678838
Z = +, -	.9157733266550575	W =	.1653469817678838
Z = +, -	.8371664782625286	W =	.1653469817678838
Z = +, -	.73572391066731316	W =	.1653469817678838
Z = +, -	.6142127126896679	W =	.1653469817678838
Z = +, -	.4759473930370736	W =	.1653469817678838
Z = +, -	.3246994692046836	W =	.1653469817678838
Z = +, -	.164594590280734	W =	.1653469817678838
Z =	0	W =	.1653469817678838

NÚMERO DE EVALUACIONES = 20

Z = +, -	.996917333733128	W =	.1570796326794896
Z = +, -	.9723699203976766	W =	.1570796326794896
Z = +, -	.9238795325112868	W =	.1570796326794896
Z = +, -	.8522401643540922	W =	.1570796326794896
Z = +, -	.760405965600031	W =	.1570796326794896
Z = +, -	.6494480483301837	W =	.1570796326794896
Z = +, -	.5224985647159489	W =	.1570796326794896
Z = +, -	.3826834323650899	W =	.1570796326794896
Z = +, -	.2334453638559055	W =	.1570796326794896
Z = +, -	7.8459095727845060-02	W =	.1570796326794896

NÚMERO DE EVALUACIONES = 21

Z = +, -	.9972037971811801	W =	.1495996501709425
Z = +, -	.9749279121818236	W =	.1495996501709425
Z = +, -	.9308737486442043	W =	.1495996501709425
Z = +, -	.8660254037844387	W =	.1495996501709425
Z = +, -	.7818314824680298	W =	.1495996501709425
Z = +, -	.6801727377709194	W =	.1495996501709425
Z = +, -	.5633200580636221	W =	.1495996501709425
Z = +, -	.4338837391175582	W =	.1495996501709425
Z = +, -	.2947551744109043	W =	.1495996501709425
Z = +, -	.1490422661761745	W =	.1495996501709425
Z =	0	W =	.1495996501709425

TABLA A2 (CONTINUACION).- CUADRATURA DE GAUSS-CHEBYSHEV.
 ABCISAS NORMALIZADAS AL INTERVALO $[-1, 1]$ Y PESOS CORRESPONDIENTES.

APENDICE B
INTEGRACION DE LA FUNCION x^4 / I

En este apéndice se muestran los resultados obtenidos de la integración de la función x^4 / I por cada una de las diferentes cuadraturas consideradas y para diferentes números de puntos de evaluación.

CUADRATURA	# PUNTOS	ÁREA
NEWTON-COTES	2	28444.44444444444
	3	10695.11111111111
	4	10270.50300915389
	5	10023.85145135431
	6	10073.57807100062
	7	10137.31533878992
	8	10135.27720461313
	9	10132.09752419642
	GAUSS-LEGENDRE	2
3		10240.56116192746
4		10126.96598538204
5		10131.52461134445
6		10131.79523526627
7		10131.75218682662
8		10131.75439736294
9		10131.75439493965
10		10131.75438712498
11		10131.75438771095
12		10131.7543876939
13		10131.75438769327
14		10131.75438769338
15		10131.75438769335
16		10131.75438769338
20		10131.75438769336
24		10131.75438769337
32	10131.75438769338	
40	10131.75438769334	
GAUSS-CHEBYSHEV	2	15738.22458540235
	3	12088.81118944263
	4	10934.91317289642
	5	10640.32971501687
	6	10475.94323584562
	7	10380.66568995552
	8	10320.45433810451
	9	10279.84486515447
	10	10251.1308082968
	11	10230.06245939244
	12	10214.13796980929
	13	10201.80415173099
	14	10192.05428755317
	15	10184.21211473337
16	10177.80944170752	
17	10172.51365155889	
18	10168.08309990741	
19	10164.33876464277	
20	10161.14570673646	
21	10158.40064039728	

TABLA B1.- INTEGRACIÓN DE LA FUNCIÓN X^4/I .
VIGA DE SECCIÓN RECTANGULAR ACARTELADA.

HD= .6 BO= .25 HF= .3 BF= .25 LONG= 2
ACARTELAMIENTO VERTICAL LINEAL. LIM.INF. = 0, LIM.SUP. = 2.

CUADRATURA	# PUNTOS	ÁREA
NEWTON-COTES COMPUESTO ORDEN = 1 (REGLA DEL TRAPEZIO)		
	2	28444.44444444444
	3	15132.44444444444
	4	12289.82983529729
	5	11332.46499617794
	6	10896.52005956909
	7	10661.48847828995
	8	10520.35623861715
	9	10428.9868626421
	10	10366.44812416965
	11	10321.76594093179
	12	10288.73362900496
	13	10263.62541756554
	14	10244.09460689933
	15	10228.60327424586
	16	10216.10937042953
	17	10205.88648947922
	18	10197.4156946322
	19	10190.31825686269
	20	10184.31252891432
	21	10179.18553996341
	22	10174.773835550756
	23	10170.95027640327
	24	10167.61476903483
	25	10164.68764334549
	26	10162.10484824616
	27	10159.81441589244
	28	10157.77382578695
	29	10155.94801617711
	30	10154.30786724462
	31	10152.82903236008
	32	10151.49102902051
	33	10150.2765255577
	34	10149.17077687311
	35	10148.16117464733
	36	10147.23688623041
	37	10146.38856277855
	38	10145.60810186625
	39	10144.88845325571
	40	10144.22345908372
	41	10143.607721668

TABLA B1 (CONTINUACIÓN).- INTEGRACION DE LA FUNCIÓN X^4/I .
 VIGA DE SECCIÓN RECTANGULAR ACARTELADA.
 HD= .6 FO= .25 HF= .3 BF= .25 LONG= 2
 ACARTELAMIENTO VERTICAL LINEAL. LIM. INF. = 0, LIM.SUP. = 2.

CUADRATURA	# PUNTOS	AREA
NEWTON-COTES COMPUESTO	ORDEN = 2 (REGLA DE SIMPSON 1/3)	
	3	10695.111111111111
	5	10065.80518008911
	7	10118.70802595416
	9	10127.82748479682
	11	10130.18123471935
	13	10131.00439732408
	15	10131.3522861221
	17	10131.51969842493
	19	10131.6083010937
	21	10131.65873964061
	23	10131.68915886938
	25	10131.70838527213
	27	10131.72101889015
	29	10131.72959682087
	31	10131.73558633692
	33	10131.7398709172
	35	10131.74300131903
	37	10131.74533141717
	39	10131.74709470284
	41	10131.74844890287
NEWTON-COTES COMPUESTO	ORDEN = 3 (REGLA DE SIMPSON 3/8)	
	4	10270.5030091539
	7	10102.61898252063
	10	10126.02541027869
	13	10130.02047023899
	16	10131.05803428708
	19	10131.42197918428
	22	10131.57603511887
	25	10131.65024093341
	28	10131.68953848911
	31	10131.71191878861
	34	10131.72542033662
	37	10131.73395593018
	40	10131.73956560677
NEWTON-COTES COMPUESTO	ORDEN = 4	
	5	10023.85145135431
	9	10131.96230511067
	13	10131.8241554154
	17	10131.76584600014
	21	10131.75723996869
	25	10131.755317802
	29	10131.75475086745
	33	10131.75454908335
	37	10131.75446677207
	41	10131.75442952035

TABLA B1 (CONTINUACIÓN).- INTEGRACIÓN DE LA FUNCIÓN $X^{4/1}$.
VIGA DE SECCIÓN RECTANGULAR ACARTELADA.
HG= .6 BO= .25 HF= .3 BF= .25 LONG= 2
ACARTELAMIENTO VERTICAL LINEAL. LIM.INF. = 0, LIM.SUP. = 2.

CUADRATURA	# PUNTOS	AREA
NEWTON-COTES COMPUESTO	ORDEN = 5	
	6	10073.57807100062
	11	10131.88448027456
	16	10131.79344783948
	21	10131.76081511998
	26	10131.75599008549
	31	10131.75491063829
	36	10131.75459197951
	41	10131.75447850247
	NEWTON-COTES COMPUESTO	ORDEN = 6
7		10137.31533878993
13		10131.78358226432
19		10131.75387407503
25		10131.75433051884
31		10131.75437884513
37		10131.75438572489
NEWTON-COTES COMPUESTO	ORDEN = 7	
	8	10135.27728461313
	15	10131.77168588601
	22	10131.75407270451
	29	10131.75435274347
	36	10131.75438227847
NEWTON-COTES COMPUESTO	ORDEN = 8	
	9	10132.09752419642
	17	10131.75264028697
	25	10131.75438756857
	33	10131.75438800637
	41	10131.7543877245

TABLA B1 (CONTINUACIÓN).- INTEGRACIÓN DE LA FUNCIÓN $X^4/1$.
 VIGA DE SECCIÓN RECTANGULAR ACARTELADA.
 HD= .6 DO= .25 HF= .3 BF= .25 LONG= 2
 ACARTELAMIENTO VERTICAL LINEAL. LIM. INF. = 0, LIM. SUP. = 2.

CUADRATURA	# PUNTOS	ÁREA
REGLA DEL RECTÁNGULO	1	1820.444444444444
	2	7532.485547911437
	3	9033.147121282602
	4	9525.508729106262
	5	9747.011822294483
	6	9865.762356841143
	7	9936.850309874579
	8	9982.786116316348
	9	10014.18838955573
	10	10036.60513899502
	11	10053.16692380159
	12	10065.74986912542
	13	10075.53422488556
	14	10083.29275810837
	15	10089.54869429062
	16	10094.66656163618
	17	10098.90665466245
	18	10102.45886869441
	19	10105.46437759709
	20	10108.02990337261
	21	10110.23733648104
	22	10112.15036122258
	23	10113.81910643701
	24	10115.2834667185
	25	10116.57551147669
	26	10117.72125735532
	27	10118.74198930246
	28	10119.65525704289
	29	10120.47563501525
	30	10121.21530783971
	31	10121.88452564157
	32	10122.49196127696
	33	10123.04499209415
	34	10123.54992914906
	35	10124.01219000154
	36	10124.43645283057
	37	10124.82677126884
	38	10125.18667242671
	39	10125.51923688338
	40	10125.82716484986

TABLA B1 (CONTINUACIÓN).- INTEGRACIÓN DE LA FUNCIÓN $X^4/1$.
 VIGA DE SECCIÓN RECTANGULAR ACARTELADA.
 HU= .6 BO= .25 HF= .3 BF= .25 LONG= 2
 ACARTELAMIENTO VERTICAL LINEAL. LIM.INF. = 0, LIM.SUP. = 2.