2930

U N I V E R S I D A D

N A C I O N A L

A U T O N O M A

D E

M E X I C O

t e s i s

"MODELOS MATEMATICOS PARA DETERMINAR EL PUNTO DE EQUILIBRIO EN LAS EMPRESAS"

Laura Isabel

Mora Reyes

Indice

# INTRODUCCION

El trabajo que se presenta en ésta tesis, permitirá aplicar las herramientas matemáticas, que tanto intervienen en la vida diaria en el ejercicio práctico de las empresas.

Las técnicas que se muestran, tienen como fin coadyuvar al control del "PUNTO DE EQUILIBRIO" (intersección que existe entre las ventas y los costos totales de un producto) a través del planteamiento de un modelo matemático que determine el comportamiento de las ventas y de los costos.

Para la formulación del modelo, se necesita como primer punto obtener el precio por unidad del producto y después el costo total que se deriva de la fabricación del mismo (gastos directos e indirectos que de éste provienen) enseguida se grafican los datos: primero de los costos y después se observa que comportamiento tienen; se aplica uno de los modelos propuestos y se obtiene la función deseada. El mismo paso se sigue con el conjunto de datos que corresponden a ventas.

Conociendo la función-costo y la función-venta, se puede obtener el "PUNTO DE EQUILIBRIO".

Este trabajo introduce el tema , dentro del ámbito de la Planeación, en donde surge la pregunta: A partir de qué nivel de ventas se empieza a tener utilidades y retroalimentar esta información para la toma de decisiones.

El siguiente apartado habla acerca de lo que son los costos y su importancia. Este concepto se mantiene durante todo el trabajo ya que los costos influyen de manera importante en el precio del producto y determinan "EL PUNTO DE EQUILIBRIO".

Los siguientes capítulos proponen 4 modelos, tanto estadísticos y numéricos para que se puedan determinar, como ya se mencionó el comportamiento de los datos (observaciones).

Las técnicas aplicadas, aunque son bien conocidas muchas veces no son manejadas por las personas que desean resolver problemas de este tipo, es por eso que se aplican tres casos prácticos, para que se observe que son algoritmos que tienen un grado de aplicabilidad muy aceptable y que hacen posible obtener resultados de utilidad.

# I. CONCEPTOS DE PLANEACION

## *I.1 PLANEACION*

Para cualquier empresa, sea grande o pequeña, el proceso de Planeación representa una de las actividades mas importantes para la determinación y pronóstico en las decisiones futuras de dicha empresa, sobre que camino seguir, que oportunidades elegir; para el provecho de ejecutivos, empleados, acreedores y accionistas de la empresa y de su entorno en general.

Una compañia, al desarrollar objetivos, estrategias y políticas generales, proporciona una base para que los ejecutivos puedan tomar sus decisiones conforme a la alta dirección.

La Planeación Estratégica observa posibles alternativas de los cursos de acción en el futuro, y al escoger algunas de ellas, éstas se convierten en la base para tomar decisiones encontrando las siguientes ventajas:

- Simula el futuro. Es decir se pueden desarrollar modelos que ayuden a conocer (que puede ser con base en las experiencias pasadas) cuales pueden ser las espectativas y oportunidades así como los riesgos que puede vivir una empresa en el futuro.

- Proporciona un mecanismo para coordinar las partes relacionadas entre sí en una organización, evitando la suboptimización de actividades y funciones.

- Permite determinar de antemano, las metas y aspiraciones tanto a nivel empresa como a nivel de los ejecutivos en función del entorno en general.
- Revela y aclara oportunidades y peligros futuros. Por medio de la visualización de los objetivos, de las metas y del saber realmente lo que se quiere. Se pueden tomar en cuenta posibles riesgos y tener claras las oportunidades y ventajas futuras.

- La estructura de la empresa tiene una gran importancia ya que cualquier ejecutivo de la misma puede identificar en un momento dado cuales son sus principios y prioridades.

- Reconociendo de manera clara los puntos anteriores,se puede tener una base para otras funciones directivas y así seguir con otras actividades a niveles inferiores.

- Por medio de programas y funciones ya establecidos se puede ver cual es el desempeño y el desarrollo del personal. Si hay desviaciones se estará en posibilidad de corregirlas, pudiéndose identificar los elementos o las áreas que causan problemas y los elementos que hacen falta para la realización y complementación.

- Reconoce y recalca los puntos más importantes o más delicados en cuanto al logro de los objetivos y la realización de todas y cada una de las metas.

Esta serie de conceptos son los que dan forma a lo que se denomina planeación Estratégica. Por medio de ellos se puede establecer una guía, de cuales son los pasos a seguir para este proceso en cualquier empresa, ya sea grande o pequeña.

## 1.2 - LOS OBJETIVOS

Uno de los puntos más sobresalientes para la planeación en una empresa, es la generación de utilidades. El poder incrementar o mantener dichas utilidades, representa en la Planeación un objetivo.

Los objetivos así como las metas deben ser específicos. Estas últimas deben servir como medida cuantitativa del éxito de la compañía, ejemplos de estos pueden ser el rendimiento sobre la inversión, los niveles de utilidades y los niveles de ingreso, entre otros. Además el proceso de planeación requiere que las premisas generales de las misiones y los propósitos se hagan en forma más concreta mediante el desarrollo de objetivos a largo plazo.

Después de la definición de los objetivos y las metas particulares, es posible planear una estrategia específica para lograr dichos objetivos y propósitos.

Los objetivos deben ser adecuados, factibles, aceptables, medibles, motivadores y claros, debe existir una obligación por parte de los directivos con los mismos; así como basarse en la participación del personal y su relación entre ellos.

En las empresas generalmente se limitan a establecer objetivos a largo plazo en relación con las ventas, utilidades, rendimientos sobre inversión, margen y participación en el mercado.

Entre más grande sea la compañía, mayor es la tendencia de que tenga un número mayor de objetivos de planeación a largo plazo.

En empresas muy pequeñas, el establecimiento de los objetivos se puede llevar a cabo más fácilmente que en empresas grandes, ya que las relaciones entre los ejecutivos, el personal y los gerentes son menos complicadas. Por tal motivo la determinación de los objetivos-metas, se proponen, discuten y finalmente se establecen mediante el diálogo continuo, lo cual constituye, la esencia en su determinación.

## 1.3 - ANALISIS DE SITUACION

Después de haber fijado los objetivos, es fácil determinar factores tales como la participación del mercado, empleo y precio del producto entre otros.

La evaluación del desempeño pasado como también de factores ambientales presentes y futuros (internos y externos) representan un paso importante en el proceso de planeación, el cual puede realizarse por los directivos que efectuan sus propias evaluaciones individuales sin un proceso formal, sin embargo, sus observaciones pueden reforzarse con la formalización del análisis de situación, no existe un formato patrón para este análisis de situación; varía de empresa a empresa.

El análisis de situación tiene varios propósitos: por ejemplo, ayuda a los directores a identificar y analizar las fuerzas más significativas en el medio ambiente de la empresa, sistematiza el proceso de evaluación para obtener mejores resultados, proporciona un foro para tratar los puntos de vista divergentes acerca del mismo, afirma opiniones indefinidas acerca del medio ambiente en evaluación y proporciona una base para continuar el proceso de planeación.

El primer paso en el análisis de situación consiste, en examinar las expectativas o intereses de elementos externos a la compañía. El segundo, entender los intereses de los directivos dentro de la empresa, ya que conforme esta última, sus intereses se vuelven muy importantes en el proceso de planeación.
Sin embargo, para las organizaciones grandes y pequeñas, los intereses del ejecutivo en jefe son de importancia primordial en la planeación.

Los directivos deben seleccionar los factores que se estudiarán y analizarán con mayor profundidad según el caso.

Después del análisis de situación se sigue con la identificación de debilidades, oportunidades, potencialidades y riesgos fundamentales en la planeación. A pesar de que el concepto básico es sencillo, puede sin embargo tener dificultades al hacer el análisis de situación:del cómo determinar las medidas a utilizar en la evaluación de debilidades, oportunidades, potencialidades y riesgos; del que los directivos acepten la realidad en una oportunidad o un peligro, atribuirles distintas probabilidades, e incluso evaluar su importancia de manera diferente, etc..

## 1.4 - DESARROLLO DE PROPOSITOS Y MISIONES BASICOS

Una de las responsabilidades mas importantes de la alta dirección es la de formular los propósitos y misiones básicos de la compañía. En cada organización existe un conjunto de metas. La base de creación de éstas, es precisamente la formulación de los propósitos básicos y las misiones de la empresa. Específicamente, estos dos últimos son una importante tarea de la alta dirección.

Muchas compañías preparan una serie de principios (propósitos y misiones) de la empresa.

Generalmente incluyen los propósitos económicos y sociales de la compañia, sus líneas de negocio y mercado, sus prácticas directivas, relaciones de la compañia con la comunidad y deseos de la alta dirección con respecto a la unión de negocios. Todo esto depende fuertemente de los valores, aspiraciones e intereses del ejecutivo. Algunas empresas preparan principios por escrito para sólo alguno de estos factores. Cuando no se tienen por escrito generalmente existe un entendimiento implícito de propósitos y misiones.

Las misiones a menudo están escritas como lemas; tienen un alto nivel de abstracción y pueden aparecer como relaciones públicas y lemas comerciales. Las misiones frecuentemente describen sólo las líneas del negocio de la compañía, mercados y clientes a los que sirven.

## 1.5 - DESARROLLO DE OBJETIVOS A LARGO PLAZO

Es importante para la planeación, que las premisas amplias, abstractas y a menudo inexactas de los propósitos y misiones, sean definidos en términos más concretos. Solo definiendo esas generalidades, los directivos de una organización pueden entender exactamente lo que se supone que deben tratar de lograr.

Teóricamente, se deben establecer objetivos para cada elemento importante de la dirección en una organización,pero en realidad este es un requisito demasiado difícil de realizar, así que las empresas generalmente se limitan a establecer objetivos a largo plazo en relación con ventas, utilidades, rendimientos, margen y participación en el mercado.

Una vez que se han establecido los propósitos , misiones y los objetivos básicos de planeación a largo plazo, sigue el desarrollo del programa de estrategias para llevarlos a cabo.

- No existe un consenso en el significado de la estrategia de programa.
- Igualmente no existe un consenso en las clasificaciones y tipos de estrategias de programa
- El proceso de formulación de estrategia es muy complejo
- Cada problema para evaluar e identificar estrategias importantes es único.

- Las estrategias exitosas son las que se interrelacionan entre sí.
- Lo que para una persona puede ser estrategia, para otra no, lo que implica que no es posible transferir las estrategias de una compañía a otra.

## II. CONTROL FINANCIERO

La aplicación de técnicas y conceptos adecuados para procesar datos históricos de carácter económico de una entidad, son con el fin de ayudar a la administración a establecer planes para el logro de objetivos económicos razonables, así como para la toma de decisiones hacia el logro de estos objetivos; incluyendo métodos y conceptos necesarios para la planeación. La opción entre cursos de acción alternativos se efectua a través de la evaluación e interpretación de los resultados. El estudio del control financiero involucra una consideración de las formas en que la información puede ser acumulada, sintetizada, analizada y presentada, con relación a problemas, decisiones y tareas cotidianas específicas de la administración de negocios.

La piedra angular de cualquier sistema de control administrativo, es el concepto de la evaluación de la responsabilidad. La idea básica es que cada gerente en una empresa, es responsable de una parte de la actividad total. El sistema de evaluación, debe ser diseñado de tal manera que proporcione una medida en los efectos financieros de las actividades por las que un gerente es responsable. Esta medida puede ser expresada en la forma de un objetivo financiero para cada gerente. Especificar ese objetivo ayuda en la delegación de autoridad; un gerente sabe que la decisión "correcta", es el curso de acción que lo lleve hacia su objetivo financiero.

Cómo debe la gerencia medir los resultados financieros logrados?. No es suficiente decir simplemente que cierta división de productos en particular,es un centro de utilidades; también se requieren decisiones que especifiquen cómo debe calcularse la utilidad y particularmente la manera en que se establecerán los precios y la forma en que se cargarán a la división los servicios recibidos de otras unidades de la organización. De igual manera, aunque el concepto básico de un centro de inversión es sencillo, es difícil decidir cuáles activos se deben incluir en la base de la inversión y cómo serán valuados. Hay muchos métodos de evaluación financiera que pueden ser utilizados por organizaciones específicas.

## II.1 TIPOS DE RESPONSABILIDAD FINANCIERA

Las diferentes áreas en una empresa, tienen como responsabilidad (en términos generales) de llevar un control financiero, aprovechar al máximo los recursos a ellos asignados y la maximización de los mismos. Asímismo cada una tiene diferentes responsabilidades específicas, dependiendo de su importancia y del papel que juegan dentro de la entidad, los principales tipos de responsabilidad financiera pueden ser clasificados como siguen:

Centros de Costos Estandar: Tomando como ejemplo el departamento de producción en una fábrica, el objetivo del jefe del taller, es minimizar la variación entre los costos reales y los costos "estándar", previamente establecidos, éstos últimos, en función de la mano de obra directa y materiales requeridos para cada unidad de producción. Generalmente también se considera responsable de un presupuesto flexible de gastos generales, y su objetivo, una vez más, es minimizar la variación entre costos presupuestados y los reales.

Centros de Ingreso: El ejemplo en este caso lo representa el departamento de ventas. El objetivo del gerente de ventas es el de: generar los máximos ingresos por las ventas y sujetarse a su presupuesto de gastos; por lo tanto, carece de autoridad para bajar los precios e incrementar con esto el volumen de ventas o aumentar su gasto de operación.

Centros de Gastos Discrecionales: En este caso el objetivo del gerente del departamento es gastar la cantidad presupuestada para producir la mejor calidad de servicio posible. Incluyen a la mayoría de los departamentos administrativos. No existe una manera pràctica de establecer la relación entre entradas y salidas. La gerencia sólo puede emplear su mejor juicio para establecer el presupuesto.

Centros de Utilidades: Un ejemplo de este tipo lo constituye la división de un producto, en las que el gerente es responsable de la mejor combinación de costos e ingresos. Su objetivo es de maximizar el renglón de totales, o sea, la utilidad que resulta de sus decisiones. Así, un gerente de ventas a quien se le permite fijar precios, puede ser responsable de las utilidades brutas (ingresos real menos costos estândar directos de manufactura). Las utilidades para un gerente de mercadeo de una línea de productos, por otro lado, podrían reflejar deducciones por gastos generales de fàbrica presupuestados y gastos reales de promoción de ventas.

Los puntos anteriores nos dan una pauta para identificar el tipo de responsabilidad que tiene cada área dentro de una entidad, y de como cada división mantiene una importancia diferente de acuerdo a las actividades que ésta realiza.

Cabe recalcar que varias áreas se concentran en la minimización de Costos mientras que otras en la maximización de utilidades.

A lo largo de esta tésis, veremos la importancia que tiene en el PUNTO DE EQUILIBRIO el manejo adecuado y el conocimiento de los Costos, ya que éstos representan en términos generales para la empresa, una buena medida y un punto para detectar debilidades (ya sea en una o varias áreas) y corregir en lo posible dichas desviaciones.

El Control adecuado en la entidad, de factores que afectan a las utilidades (como pueden ser los costos) ayudarán a cada división a aprovechar los medios con que cuenta cada una en cuestión.

## III. USO E IMPORTANCIA DEL CONCEPTO DE PUNTO DE EQUILIBRIO

El concepto del "Punto de Equilibrio",es una herramienta en la toma de decisiones para la gerencia, ideada para relacionar los factores de: ingresos por ventas y los de costos, a cierto nivel de volumen, de producción.
Como las utilidades de una compañía (o sus pérdidas) se determinan por la relación entre los ingresos totales y los costos totales a cierto volumen, las decisiones cruciales de la gerencia son aquéllas que afectan estos factores.

Es verdad que los cambios en la unidad de volumen, logrados por una empresa tienen un efecto importante en el ingreso neto. Esto es debido principalmente al hecho de que una unidad más de volumen, da una base más grande sobre la que extender la cantidad total de los costos fijos de la empresa. Si la unidad de volumen está a un nivel bajo, la misma cantidad de costos fijos debe ser absorbida por unas cuantas unidades de volumen.

Así una pequeña unidad de volumen tendrá un costo por unidad más alto y un mayor volumen hará que el costo por unidad sea más pequeño. Sin embargo, debe ser también notado que otros factores, además de la unidad de volumen, tienen un efecto en la utilidad.

El análisis del punto de equilibrio se apoya,en una la. etapa, en las suposiciones de que,los precios de venta no cambian y que los costos fijos permanecen constantes en toda la gama de las actividades; mientras los demás costos varían en proporción directa al volumen. Sin embargo, el análisis del punto de equilibrio, puede ser un instrumento gerencial eficaz, cuando se deriva de un intenso estudio del comportamiento de los precios y los costos, con la debida atención a todos los factores que tienen influencia sobre los precios de venta y los costos.

Además de los efectos de los cambios en los costos fijos y variables y los cambios en la unidad de volumen, deben considerarse los efectos de los cambios en la unidad de precios de venta. Los aumentos o disminuciones en el precio de venta tienen el efecto obvio de aumentar o disminuir la utililidad por unidad.

Por supuesto, el aumento en los costos fijos tiende a aumentar el total del costo de la unidad, mientras el aumento en la unidad de volumen tiende a disminuir el total del costo de la unidad. En otros casos, hay más factores que combinados pueden afectar cierto cambio en la misma.

Como se dijo anteriormente, muchos cambios en los factores que afectan a la utildad,ocurren dentro de un período dado, en la situación dinámica comercial. Algunas veces la unidad de precio de venta, costos variable por unidad, total de costos fijos, unidad de volumen, pueden cambiar todos como resultado de las variaciones, en los planes de la administración o en factores externos.

Sin embargo, la práctica en muchas empresas, es la de emplear técnicas que aislan los cambios en la unidad de volumen de los otros cambios que afectan la utilidad. Al aplicar estas técnicas, lo práctico es asumir que el presente patrón de costos, de precios de venta y productos mixtos, permanezca sin efecto o constante. La representación gráfica del punto de equilibrio dadas las condiciones expresadas (volumen variable y precios de venta y costos constantes) se muestra en la figura iii.1.

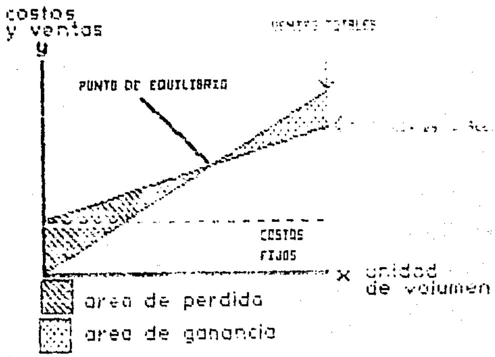



figura iii.1

Ejemplo gráfico del punto de equilibrio, considerando: volumen variable y precios de venta y costos constantes.

En general, un fabricante, un mayorista, un detallista o un vendedor de servicios espera que los ingresos por ventas totales sobrepasen los costos totales en un tiempo determinado. Sin embargo, cuando las ventas totales simplemente igualan los costos totales, la compañía ni ganó ni perdió dinero. Durante ese año la firma simplemente salió a mano, o sea, operó en el Punto de Equilibrio.

El PUNTO DE EQUILIBRIO es entonces, el volumen o nivel de operación en el que las ventas totales y los costos totales son exactamente iguales. Si la compañía hubiera operado a un nivel superior al del punto de equilibrio habría logrado una utilidad. Por el contrario, si la compañía hubiera operado a un nivel inferior al punto de equilibrio, habría tenido una pérdida.

## III.1 USO DEL PUNTO DE EQUILIBRIO

El uso que tiene el punto de equilibrio, en términos generales, no se aplica exclusivamente a la planeación, sino también tiene otras aplicaciones en decisiones varias dentro de la empresa. Los siguientes ejemplos determinan las áreas de actividad en que comúnmente se aplica.

PLANEACION DE UTILIDADES- Ayuda a la gerencia en el proceso anual en la elaboración del presupuesto, para la planeación de utilidades.

PLANEACION DE PRODUCTOS- Ayuda al grupo de investigación de mercados, a decidir cuáles productos nuevos se deben agregar y cuáles productos existentes, deben descontinuarse para aumentar las ganancias de la compañía.

FIJACION DE PRECIOS DE LOS PRODUCTOS- Es útil para relacionar la sensibilidad del precio y del volumen, de manera que la firma pueda sacar ventaja y así aumentar las utilidades.

SELECCION DE LOS MEDIOS DE PUBLICIDAD- Proporciona a la gerencia de ventas, información para seleccionar el mejor de los diversos medios de publicidad, como periódicos, revistas, radio, televisión, etc.

SELECCION DE CANALES DE DISTRIBUCION- Se emplea para decidir, si la firma debe mantener su propia red de distribución o utilizar los canales de distribución de otras.

FABRICAR O COMPRAR- Ayuda a la gerencia a la distribución óptima de sus recursos de capital, al decidir si conviene fabricar todos o sólo parte, de los componentes de un producto, o comprar algunas partes a fuentes externas.

RENTAR O COMPRAR- Sugiere a la gerencia si es mejor rentar o poseer máquinas o equipos para maximizar las utilidades.

SELECCION Y REPOSICION DE EQUIPO- Relaciona los factores de costo importantes que influyen en la compra de equipos nuevos, en comparación con la conservación de la maquinaria existente, a fin de lograr la minimización de los costos totales de producción.

## IV - ALGUNOS CONCEPTOS BASICOS DE COSTOS

Como se mencionó en el capítulo anterior, uno de los elementos sobresalientes en la determinación del punto de equilibrio son los costos,en este capítulo se presenta una serie de conceptos básicos de lo que son los costos.

En contabilidad, el término costo se define como el precio pagado o el valor real de un producto que se entrega a cambio, en el que están implícitos los recursos o servicios que se adquieren para su elaboración. El costo constituye un sacrificio económico, el cual se mide por el valor monetario de la transacción de cambio.

Algunos ejemplos en los que se aplica la base de costos, lo constituyen el valor de los inventarios, activos intangibles, inversiones permanentes y activos fijos, tales como edificios, equipos y terrenos. El costo representa el primer valor con el que se registran estos activos a la fecha de su adquisición. La contabilización posterior de estos costos de adquisición implica otros conceptos de costos muy valiosos.

Con mucha frecuencia, los contadores hablan del "costo" de un producto, de una operación o de un servicio. Reconocen, sin embargo, que la identidad específica de los elementos individuales de costo se pierde,cuando varios costos se acumulan, se reclasifican en las cuentas y por último, se cargan a los gastos de operación periódicos.

## IV.1 EL CONCEPTO DE DETERMINACION DE COSTOS

Los conceptos de composición, asignación y flujo de costos constituyen el marco general para las técnicas de costeo de los productos. Sin embargo, la administración tiene otros diversos objetivos que requieren información de costos, tales como planeación de las operaciones de rutina, control de la eficiencia de las operaciones, evaluación de los resultados financieros y la elección entre alternativas dentro de las decisiones a corto y largo plazo. Cada uno de estos objetivos requiere de información de costos apropiada para los problemas y circunstancias específicas.

Los costos tienen diversas características diferentes, y es por ello que los informes dirigidos a la administración para un fin específico deben enfatizar las características apropiadas. No es posible que la información tradicional, respecto a costos de producción para valuación de inventarios, pueda satisfacer todos los requerimientos de información señalados por la administración. El concepto de Determinación de Costos indica que los costos deben identificarse, medirse y analizarse de acuerdo con sus características específicas. Estas características identifican los tipos de costos requeridos para satisfacer las necesidades particulares de información de la gerencia.

La planeación de las operaciones de rutina, exige una estimación de los costos en que se va a incurrir a los diferentes niveles de actividad. La variabilidad en el volumen de producción de un producto determinado, es una característica importante para los costos, debido a que la administración necesita saber cuáles costos habrán de variar a medida que el volumen aumenta o disminuye. Algunos costos, tales como la depreciación, tienden a permanecer constantes en cuanto a su valor total, respecto al nivel de actividad involucrado. Con base en estas características se determinan cuáles costos son fijos y cuáles son variables.

En el caso de presupuestos de utilidades, las necesidades de información básica radican en la variabilidad de los costos. El concepto de determinación de costos exige que los costos fijos y variables sean identificados, medidos y analizados para proporcionar la información básica requerida.

## IV.1 COSTOS FIJOS, VARIABLES Y SEMIVARIABLES

Por razones de planeación y control, deberá determinarse la variación de los costos, con respecto a los cambios en volumen para la variación de la productividad (insumo-producto). La variabilidad describe el comportamiento de los costos a medida que cambia el volumen. Los costos fijos permanecen constantes en cuanto a su importe total, ajenos a los cambios en volumen; los costos Variables totales varían en proporción con los cambios en volumen, mientras que los costos Semivariables son una combinación de los dos anteriores.

### COSTOS FIJOS

Si tuviéramos un departamento cuyo volumen potencial oscilara en un rango de 10,000 a 14,000 horas de mano directa por mes, la depreciación del equipo y los salarios de supervisión permanecen constantes cada mes y, por tanto, representan costos fijos. Considerados los costos totales, estos dos tipos de costos permanecen constantes, aún cuando el volumen de producción aumenta de 10,000 a 14,000 horas de mano de obra directa a través de meses sucesivos.

### COSTOS VARIABLES

Si a los obreros que constituyen la mano de obra directa, se les pagaran cinco pesos por hora, el costo total de mano de obra directa dependería absolutamente del volumen, debiendo considerársele como un costo variable.

## COSTOS SEMIVARIABLES

El consumo de energía eléctrica en determinado período constituye un cargo fijo, pero puede aumentar en la medida que aumente su consumo debido a un incremento en las ventas; este tipo de Costo constituye uno del tipo Semivariable.

Es necesario que los patrones de costos se determinen antes de que se ensamblen las estimaciones precisas de éstos, mismos que habrán de consultarse para fines de presupuestos. Definir cuáles costos son fijos y cuáles son variables, es requisito indispensable para evaluar el impacto que causarán los costos, en las diversas alternativas en las que se apoya la administración para tomar una decisión.

En el caso de los Costos Semivariables, es necesaria una descomposición de éstos en su componente Fijo y en su componente Variable, con el fin de tener únicamente dos tipos principales de Costos y realizar entonces al análisis del PUNTO de EQUILIBRIO.

Los costos Semivariables pueden descomponerse a su vez en 3 tipos generales:

El primer tipo son aquellos costos que tienen un elemento fijo que se puede identificar fácilmente y un elemento variable que cambie en proporción directa al volumen. Como ejemplo de este tipo de costos, se mencionan los sueldos y comisiones de los agentes de ventas, en donde los sueldos representan la porción fija y las comisiones la porción variable,(su línea de costo total sigue un patrón definido y pasa por todos los rangos de volumen a la misma tasa variable).

El segundo tipo, son aquellos cargos que no pueden adecuarse o bien que no se adaptan al nivel de actividad alcanzado, es decir que aumentan con el volumen pero en forma escalonada. Como ejemplo, se pueden citar los costos de supervisión y los salarios del personal de oficinas. Se hacen aumentos de la fuerza de trabajo cuando el volumen alcanza ciertos niveles, como resultado, el costo se mantiene constante sobre grandes campos de actividad y luego tiene un ascenso súbito. (presenta problemas ya que la línea de costo puede ser en diferentes campos de actividad a una tasa diferente del promedio general).

El tercer y último tipo de costo Semivariable son aquellos gastos que no guardan una relación medible con la actividad, y por lo tanto no varía en proporción al volumen, como pueden ser la publicidad, la promoción de ventas, la investigación, etc. que son ejemplos de esta tercer categoría.

# V. MODELOS MATEMATICOS PARA DETERMINAR EL PUNTO DE EQUILIBRIO

Para poder obtener el "PUNTO DE EQUILIBRIO", es necesario saber qué tipo de comportamiento tienen tanto las ventas totales como los costos totales de un producto.

Se proponen cuatro modelos para determinar el comportamiento funcional de las observaciones. En los casos más simples, podremos observar,que el comportamiento de las ventas ya está determinado, debido a que se conoce el volumen y el precio por producto (esto no siempre sucede) y será necesario obtener el comportamiento de los costos. En términos generales los métodos aquí propuestos servirán para encontrar el comportamiento de los costos totales como de las ventas totales de un producto.

El criterio para escoger cualquiera de los cuatro modelos, dependerá principalmente de la graficación de las datos (llamado diagrama de dispersión) en donde se podrá observar si los puntos corresponden a cierta función ya conocida (es decir que los puntos se acumulen de tal manera que se piense en una recta, o en una parábola o en cualquier función conocida). Para el caso en que no se tenga una idea de que tipo de función se puede aplicar entonces se utiliza el último modelo que es un método numérico en donde se construye una función que pasa por todos los puntos de la gráfica.

Los modelos se enfocarán principalmente a la determinación de la curva de costos, pudiéndose aplicar al caso en que las ventas no tengan un comportamiento ya determinado.

## V.1 DETERMINACION DE LA CURVA DE COSTOS

A los contadores de costos les interesa mucho el comportamiento de éstos porque entre otras cosas, es fundamental:

1) Para ejercer el control, los costos variables se consideran controlables en los niveles administrativos más bajos, mientras que los costos fijos a menudo sólo son controlables en los niveles superiores.

2) Para calcular las cuotas de gastos indirectos.

3) Para formular los presupuestos del período y

4) Para poner en práctica la contabilidad por área de responsabilidad.

Algunas veces el comportamiento del costo no requiere mucho análisis; por ejemplo, cuando a una empresa se le cobran los servicios de electricidad a una cuota mensual de $5000 más $100 por kilovatio hora adicional, o cuando se contrata a una secretaria por cada tres o menos de los profesionistas que trabajan en la empresa, pagándole $5,000,000 anuales.

El instrumento principal para estudiar el comportamiento del costo, en circunstancias en las cuales no se establecen explícitamente las relaciones, es el análisis de regresión. La regresión sirve para estimar alguna relación fundamental entre los datos, la cual se representa por la línea recta, que es la forma más utilizada. La regresión expresa esencialmente las relaciones pasadas por medio de una fórmula que se puede usar para pronosticar los costos.

La regresión no es la única manera de elaborar el pronóstico. El estudio da comienzo con el método de máximos y mínimos, técnica tradicional de la contabilidad, que se emplea cuando el tiempo y/o el costo no permiten un estudio completo de regresión.

Veamos un ejemplo:

y = costo en el año i x = volumen en el año i

(se omiten 000)

| año | y | x |
|---|---|---|
| 1963 | 262 | 60 |
| 1964 | 230 | 55 |
| 1965 | 247 | 72 |
| 1966 | 258 | 62 |
| 1967 | 240 | 58 |
| 1968 | 330 | 75 |
| 1969 | 314 | 74 |
| 1970 | 340 | 85 |
| 1971 | 348 | 88 |
| 1972 | 360 | 94 |
| 1973 | 350 | 92 |
| 1974 | 375 | 100 |
| totales | $3,654 | 915 |

El costo por unidad de producto de cada año, se encuentra en la columna que contiene valores de y, mientras que el volumen de ventas correspondiente, aparece en la columna que contiene valores de x. La gráfica aparece enseguida:

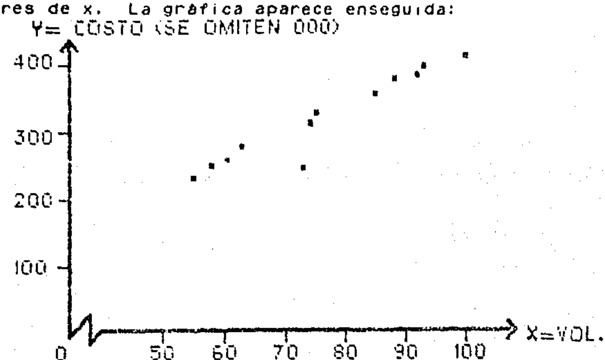


figura V.1.1

Los puntos corresponden a los costos totales por volumen de venta

## V.2 EL METODO DE MAXIMOS Y MINIMOS

En las interpolaciones estadísticas pueden suceder dos casos:

1o. Calcular una curva que pase por puntos conocidos, y

2o. Calcular una curva que pase entre esos puntos.

En el primer caso se ajusta un conjunto de puntos a una curva respetando los valores conocidos, aunque éstos presenten irregularidades debidas a causas accidentales, que intervienen en el desarrollo del fenómeno a través del tiempo. En el Segundo caso se pretende "suavizar" ese comportamiento, es decir calcular una curva que se ajuste de la mejor manera a esos puntos y cuya distancia de cada punto hacia la curva sea mínima.

Cuando las observaciones tienen un comportamiento de tipo lineal (es recomendable se dibuje primero un diagrama de dispersión, de manera que gráficamente se observe el comportamiento del conjunto de puntos) y se desea ajustar una recta a ese conjunto de observaciones, se utiliza el método de máximos y mínimos.

Supongamos un conjunto de observaciones $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$, . . . ., $(x_n, y_n)$. Se desea ajustar dichas observaciones a una recta $y = ax + b$ ........(V.2.1)

de manera que la suma de los cuadrados de las diferencias entre las ordenadas de los puntos conocidos y los correspondientes a la recta sea un mínimo, se tiene que si $\varphi(x)$ es la suma de dichos cuadrados, se tiene en general:

$$\varphi(x) = [F(x_1)-y_1]^2 + [F(x_2)-y_2]^2 + \ldots + [F(x_n)-y_n]^2$$

de donde $\varphi(x) = \sum_1^n [F(x) - Y]^2$ ........(V.2.2)

reemplazando el valor de la función en V.2.2 se tiene:

$$\varphi(x) = \sum_1^n (ax + b - y)^2$$

Como por las condiciones impuestas anteriormente esta suma de cuadrados debe alcanzar un mínimo, las derivadas parciales de la función $\varphi(x)$ con relación a los parámetros desconocidos "a" y "b", deben ser iguales a cero. Luego derivando con relación a "a", resulta:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a} = 2\Sigma\,(ax + b - Y)x = 0 \qquad \Sigma(ax + bx - xY) = 0$$

$$\Sigma ax + \Sigma bx - \Sigma xY = 0 \text{ ..............(V.2.3)}$$

Derivando con relación a "b", se tiene:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial b} = \Sigma(ax + b - Y) = 0$$

$$\Sigma(ax + b - Y) = 0$$

$$\Sigma ax + \Sigma b - \Sigma Y = 0 \text{ .............(V.2.4)}$$

Sacando las constantes fuera de las sigmas y trasponiendo términos en las igualdades V.2.3 y V.2.4, resulta:

$$a\Sigma x + b\Sigma x = \Sigma x\, Y$$

$$a\Sigma x + nb = \Sigma Y$$

Este sistema de ecuaciones permite calcular los parámetros "a" y b, con cuyos valores, substituidos en la igualdad (V.2.3), se obtiene la función de la recta pedida.

## V.3 ANALISIS DE REGRESION Y CORRELACION

Lo que podemos realizar por medio del análisis de Regresión, es establecer cómo se relacionan o bien se asocian las variables entre sí. En el caso de los costos variables estos pueden presentar un comportamiento de tipo uniforme,de manera que con esta prueba podemos determinar con un cierto grado de confianza si nuestras observaciones (en este caso los costos) ajustan a una recta, para posteriormente realizar nuestra prueba del punto de equilibrio.

Como primer paso se traza un diagrama de dispersión para facilitar el análisis. En segundo, se considera que la variable dependiente así como el término de error (que se denominará "e"), son variables aleatorias e independientes, mientras otra de las variables (que se denominará "x")la elige el experimentador.

Se hacen también ciertas suposiciones relacionadas con el hecho de que cada uno de los valores de "x" (en donde "x" indica cada uno de los valores de la población) va acompañado de una serie de valores de "y" (en donde "y" depende de la serie de valores de "x"). Se supone ademas que la serie de valores de "y" y el resultado de los terminos de error quedan distribuidos normalmente.Sin embargo, esa distribución no se tiene que suponer para aplicar las técnicas de regresión , pero si se desean hacer declaraciones en cuanto a los limites de confianza es mejor distribuir las observaciones "y" de acuerdo con las curvas t o normal.En todo caso se supone que el término de error es independiente del valor de "x" que se elija y que se tiene un valor de 0; es decir, $E(e)=0$, así como una varianza desconocida, $V(e)$.

Cuando se expresan gráficamente, las medias de estas series de valores "y", designadas con E(Y|X), deben formar una línea recta que se conoce como línea de regresión de la población. Expresado con símbolos, $E(Y|X) = a + bx$. Un valor particular de "y" se podrá expresar:

$y = E(Y|X) + e$ ó $y = a + bx + e$. Se supone también que la varianza de cada subserie de valores de "y" es igual a la varianza del término de error.

Esta condición de varianza igual o constante se conoce como el supuesto de "homoscedasticidad"(la varianza no constante se llama heteroscedasticidad). Por último, se supone que estas relaciones se refieren únicamente a la escala de los valores observados de "x". Fuera de esa escala, se debe evitar la extrapolación de las relaciones que resulten.

## V.4 LA LINEA DE REGRESION

Se explicará en la siguiente figura el modelo de regresión:

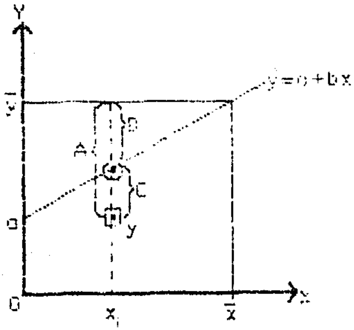



figura v.4.i

A es la diferencia total, (e.d. $\bar{y}$ - y)

B es la diferencia explicada (e.d. $\bar{y}$ - $\hat{y}$)

C es la diferencia no explicada e (error residual) ($\hat{y}$ - y)

Se puede observar que si los términos de error se suman simplemente es decir que $\Sigma(\hat{y} - y) = \Sigma e$, sería igual a 0 y el total de los errores positivos compensaría el total de los errores negativos. Para evitar esto y para dar un significado individual a los errores, cada término de error se eleva al cuadrado. Se suman los cuadrados de los términos de error "e" y se minimiza la suma "S", teniendo presente que se está tratando de estimar las incógnitas de la ecuación de regresión, "a" y "b", y no "x" e "y", que son datos empíricos.

Expresando lo siguiente en forma de ecuación tenemos:

$$S = \Sigma e_i^2 = \Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2 = \Sigma(y_i - a - bx_i)^2$$

Como se desea minimizar esta suma entonces se derivará la función con respecto a la variable b y se igualará a 0. Desarrollando:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2\Sigma x(y-a-bx) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2\Sigma x(y-a-bx) = 0$$

$$-\Sigma x(y - a - bx) = 0$$

$$\Sigma xy = \Sigma x(a+bx)$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x+b\Sigma x \quad . \quad . \quad . \quad .V.4.1$$

Por otro lado en la ecuación $y = a + bx$ si se aplica la suma se tendrá que:

$$\Sigma y = \Sigma a + \Sigma bx$$

puesto que $\Sigma a$ indica que "a" aparece en cada una de las "n" ecuaciones, se tiene que $\Sigma a = na$, por lo tanto,

$$\Sigma y = na + b\Sigma x \quad . \quad . \quad . \quad .V.4.2$$

Es interesante notar que estos resultados se hubieran podido obtener más fácilmente tomando la ecuación de una recta, $y = a + bx$, para luego sumar ambos lados de la ecuación para obtener $\Sigma y = na + b\Sigma x$, multiplicar ambos lados de la ecuación por "x" y luego sumar para obtener

$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x$$

De V.4.1 y V.4.2 se tienen las ecuaciones normales de la línea de regresión:

$$na + b\Sigma x = \Sigma y$$

$$a\Sigma x + b\Sigma x = \Sigma xy$$

Vamos a definir cada miembro con notación matricial, de manera que podamos manejar cada uno de los términos de una manera más fácil y adecuada, donde:

$$B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$$

B, Es una matriz de 2X1 (2 renglones y 1 columna) donde "a" y "b" son las incógnitas de la ecuación de regresión.

Y, Es una matriz de nX1 (n renglones y 1 columna) donde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son las variables dependientes

X, Es una matriz de nX2 (n renglones y 2 columnas) donde la primer columna es de 1 y la segunda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son los valores de los datos u observaciones.

Los siguientes son productos de matrices que van a servir para definir posteriormente las ecuaciones normales para la regresión.

$$(X^T X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \end{bmatrix}$$

$$(X^T X)^{-1} = \frac{1}{|X^T X|} \begin{bmatrix} \Sigma x_i & -\Sigma X_i \\ -\Sigma x_i & n \end{bmatrix}$$

$$X^T Y = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i \, y_i \end{bmatrix}$$

$$(X^T X) B = \begin{bmatrix} n & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

En término de matrices, las ecuaciones quedan como:

$$\begin{pmatrix} n & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma y \\ \Sigma x y \end{pmatrix}$$

$$(X^T X) B = (X^T Y)$$

$$\underbrace{(X^T X)^{-1} (X^T X)}_{I} B = (X^T X)^{-1} (X^T Y)$$

$$B = (X^T X)^{-1} (X^T Y)$$

Aquí la matriz "X" contiene los datos "x" observados así como una columna de unos para permitir una intersección.

"B", es la denominación para las estimaciones del coeficiente de regresión y tiene en cuenta tanto a "a" como a "b" en el caso de dos dimensiones. Esta fórmula se emplea mucho en estadística matemática por varias razones, siendo una de ellas que permanece invariable (excepto para el número de columnas en la matriz X) aunque en el análisis se usen dos, tres, cuatro o más variables. Se verá ahora cómo resulta todo esto en términos de elementos matriciales.

$$\begin{array}{ccc} X^t & X & X^T X \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & x_n \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} n & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X & Y & X^T Y \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} B & (X^T X)^{-1} & X^T Y \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ \\ b \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} \Sigma x^2 & -\Sigma x \\ -\Sigma x & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma y \\ \Sigma xy \end{bmatrix}}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} = \frac{\begin{bmatrix} \Sigma x\, \Sigma y & -\Sigma x \Sigma xy \\ n\Sigma xy & -\Sigma x \Sigma y \end{bmatrix}}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

Para medir la facilidad o el grado de adaptación del modelo a nuestras observaciones se mide por medio del coeficiente de determinación ($r^2$), que es la razón de la variación explicada dividida por la variación total, o sea:

$$r^2 = \frac{\text{Variación explicada}}{\text{Variación total}} = \frac{\Sigma(\bar{y} - \hat{y})^2}{\Sigma(\bar{y} - y)^2}$$

- A la diferencia que existe entre la media de las observaciones ($\bar{y}$) y el valor estimado ($\hat{y}$) que se obtiene de las variables independientes (x) se le llama variación explicada.
- A la diferencia que existe entre un valor estimado ($\hat{y}$) y a la observación en sí (y) se le denomina variación no explicada.
- A la diferencia que hay entre la media ($\bar{y}$) y la variable dependiente (y) se le llama variacion total.

Se quiere demostrar que la variacion total es igual a la suma de las variaciones explicada y no explicada.

Se va a demostrar lo siguiente:

Variación Total = Variación explicada + Variación no explicada

$$\Sigma(\bar{y} - y)^2 = \Sigma(\bar{y} - \hat{y})^2 + \Sigma(\hat{y} - y)^2$$

Sustituciones:

$$\hat{y} = a + bx$$

De las ecuaciones normales, que están en términos de observaciones reales

$$\Sigma y = na + b\Sigma x = \Sigma(a + bx) = \Sigma\hat{y}$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$$

Igualmente:

$$\Sigma y\hat{y} = \Sigma y(a + bx) = a\Sigma y + b\Sigma xy$$

DEMOSTRACION:

$\Sigma(\bar{y}-\hat{y})^2 + \Sigma(\hat{y}-y)^2$ = la suma de las variaciones expl. y no expl.

$$=\Sigma(\bar{y}^2 - 2\bar{y}\hat{y}+\hat{y}^2) + \Sigma(\hat{y}^2 - 2y\hat{y} + y^2)$$

$$=\Sigma\bar{y}^2 - 2\bar{y}\Sigma\hat{y}+2\Sigma\hat{y}^2 - 2\Sigma y\hat{y} + \Sigma y^2$$

$$=\Sigma\bar{y} - 2\bar{y}\Sigma\hat{y} + 2\Sigma\hat{y}^2 - 2\Sigma y\hat{y} + \Sigma y^2$$

$$=\Sigma\bar{y}^2 - 2\Sigma\bar{y}y + 2\Sigma\hat{y}^2 - 2\Sigma\hat{y}^2 + \Sigma y^2$$

$$=\Sigma(\bar{y}^2 - 2\bar{y}y + y^2)$$

$=\Sigma(\bar{y} - y)^2$ = La variación total,

como se quería demostrar.

Ahora se puede indicar la razón y determinar r para la línea de regresión.

$$\frac{\text{Variación explicada}}{\text{Variación total}} = \frac{\Sigma(\bar{y} - \hat{y})^2}{\Sigma(\bar{y} - y)^2}$$

*Veremos enseguida las componentes del coeficiente de determinación, para ver que $r^2 = [cov(x,y)]^2/V(x)V(y)$, es una relación cuyo conocimiento será útil más adelante.*

$$r^2 = \frac{\Sigma(\bar{y}-\hat{y})^2}{\Sigma(\bar{y}-y)^2} = \frac{\Sigma(\bar{y}-\hat{y})^2/n}{\Sigma(\bar{y}-y)^2/n} = \frac{\Sigma(\bar{y}-\hat{y})^2/n}{V(y)}$$

Sin embargo:

$$1/n\Sigma(\bar{y}-\hat{y})^2 = 1/n\Sigma(\hat{y}-\bar{y})^2 = 1/n\Sigma(a + bx - \bar{y})^2$$

$$= 1/n\Sigma(a+bx)^2 - 2/n\Sigma(a+bx)\bar{y} + 1/n\Sigma\bar{y}^2$$

$$= a^2 + 2ab\bar{x} + b^2(\Sigma x^2/n) - 2a\bar{y} - 2b\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2$$

$$= (a-\bar{y})^2 + 2b\bar{x}(a-\bar{y}) + b^2\Sigma x^2/n$$

Completando mediante la adición y resta de $b^2\bar{x}^2$ y agrupando los términos

$$1/n\Sigma(\bar{y}-\hat{y})^2 = [(a-\bar{y}) + b\bar{x}]^2 - b^2\bar{x}^2 + b^2\Sigma x^2/n$$

Tomando la primera ecuación normal y dividiendo ambos lados por n, se puede ver que $\bar{y} = a + b\bar{x}$;

$$1/n\Sigma(\bar{y}-\hat{y})^2 = 0 + b^2((\Sigma x^2/n) - \bar{x}^2)$$

$$= b^2 V(x)$$

por lo tanto

$$b = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x\Sigma y}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} = \frac{n^2 Cov(x,y)}{n^2 V(x)} = \frac{Cov(x,y)}{V(x)}$$

pero $\quad 1/n\Sigma(\bar{y}-\hat{y})^2 = (Cov(x,y))^2/V(x)$

De modo que

$$r^2 = \frac{[Cov(x,y)]^2}{V(x)\ V(y)}$$

La raiz cuadrada del coeficiente de determinación es lo que se conoce como coeficiente de correlación (o sea $r=\sqrt{r^2}$) y constituye otra medida, aunque menos precisa, de la asociación.

## V.5 EL ERROR ESTANDAR

El error estándar sirve primordialmente para establecer límites de confianza alrededor de las estimaciones, en forma parecida a como el estadístico elabora sus cuadros de control, con el resultado de que la estimación se puede establecer con la precisión (tolerancia) y confiabilidad deseadas.

En vista de que la regresión se basa en las suposiciones expresadas anteriormente, tal vez se entienda fácilmente que algo puede resultar mal cuando se hacen inferencias a partir del muestreo para hacer la regresión. Se podría o no saber, por ejemplo, que es posible confiar en la presencia de la homoscedasticidad. Si prevalece la heteroscedasticidad, la calidad de los coeficientes de regresión se pone en peligro. Desafortunadamente, para comprobar esta condición sería preciso contar con una gran cantidad de datos a partir de los cuales se pudiera calcular la varianza de cada subserie de valores de "y" (es decir, los valores de y asociados con cada "x" dada). Como la posesión de tal riqueza de datos constituye un lujo,con frecuencia es necesario adaptar la recta y esperar a que suceda lo mejor.

También surgen dificultades (a través de errores estándar excesivamente grandes del coeficiente de regresión, que interfieren con la precisión y distorsionan la prueba estadística) si los términos de error no son independientes entre sí. A esta queja en particular se le llama autocorrelación. Un caso de autocorrelación que se encuentra con frecuencia es el siguiente: Dada una lectura que se aparte mucho de la predicción de regresión, puede ocurrir que la siguiente lectura presente una discrepancia similar, debido a que no ha transcurrido el tiempo suficiente para que la acción correctiva produzca su efecto. Cuando esto sucede, los datos de la gráfica de dispersión parecerán formar ondas, indicando un fenómeno de temporada, cuando en realidad los datos sólo sufren la autocorrelación. La prueba de autocorrelación más conocida en la estadística es la de Durbin-Watson, "d", cuya formulación es la siguiente:

$e$ = error residual en el momento $t = \hat{y}_t - y_t$ para $t = 1, 2, \ldots, m$

$$d = \sum_{t=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2 / \sum e_t^2$$

Hay que hacer notar que los muestreos reducidos no se prestan para comprobar la autocorelación, aunque las tablas D-W puedan indicar aplicabilidad. Para obtener resultados confiables, se prefiere que las muestras sean por lo menos de magnitud 50. Si existe dependencia, las lecturas de "y", y por lo tanto los residuos, estarán relacionados linealmente $e_t = p e_{t-1} +$ error, en donde $p < 1$. Si $p = 0$, habrá independencia y la correlación no constituye problema. Para probar la hipótesis nula $H_o$: $p = 0$ contra la hipótesis alterna $H_1$: $p > 0$, se consulta la tabla y se observan las siguientes condiciones:

$d \geq D_u$ : aceptar (mas bien, no se puede rechazar) $H_1$

$d_L < d < D_u$ : la prueba no es concluyente

$d \leq D_L$ : rechazar $H_o$

Para probar $H_0$ : $\rho = 0$ contra $H_1$: $\rho < 0$ , se sustituye 4-d en las reglas anteriores. La autocorrelación se puede tratar introduciendo variables adicionales o transformando los datos. A veces se emplean variables ficticias para tal fin (como una variable distinta para verano, otoño, invierno y primavera, con una lectura de "1" si corresponde la estación y de "0" en caso contrario. En realidad, sólo a tres de las cuatro estaciones se les asignarían variables diversas. Reconociéndolas separadamente a todas, la dependencia impide la inversión de $X^TX$).

Otro retraso se produce cuando los datos no son homogéneos y comprenden nuevos efectos. Por ejemplo, la medición de costos puede incluir en un período, cambios en la tecnología o en la eficiencia de las máquinas que no estaban presentes en otro. Las variables ficticias ayudan también en este caso.

Por lo regular, estos y otros problemas llegan a entorpecer el análisis de regresión.

## V.6 OBTENCION DE LA MATRIZ DE VARIANZA-COVARIANZA Y DE LA FORMULA DEL INTERVALO DE CONFIANZA

Para simplificar, se ha escrito $B = (X^T X)^{-1} X^T Y$ en vez de $\hat{B} = (X^T X)^{-1} X^T Y$ que resulta más apropiado. La diferencia rádica simplemente en que los datos constituyen una muestra tomada de una población. Si por ejemplo, los volúmenes se hubieran presentado en alguna otra secuencia, los costos probablemente habrían sido distintos. Aun cuando la secuencia hubiera sido la misma, probablemente los costos habrían variado en caso de que la empresa hubiera tenido la oportunidad de probar por segunda vez, debido a la naturaleza fortuita del proceso.

En la regresión, la serie de parámetros de población es $\beta$ y los valores de "y" se pueden obtener mediante $y = x\beta + \epsilon$, en donde "$\epsilon$" es un término de error. Este término de error se relaciona con el error residual ya estudiado, pero es distinto. Dada una lectura cualquiera de "X" (por ejemplo X = t), se supone que hay una distribución de valores de "y" alrededor de la "y" estimada y asociada con dicha "X" (o sea, $\hat{y}_t$) tal, que el error ($\epsilon_t = y_t - \hat{y}_t$) se extiende de acuerdo con la distribución normal de probabilidades, con media "0" y desvicación estandar "$\sigma$". Como consecuencia, el valor esperado de "$\epsilon$" es $E(\epsilon)=0$. También se supone que el término de error correspondiente a algún otro valor de "X" (por ejemplo X = s, siendo "$\epsilon$" el nuevo término de error) tiene la misma desviación estandar ($\sigma$); un valor esperado de $E(\epsilon)=0$ y no tiene correlación (asociación) con ningún término de error diferente, e.d. $E(\epsilon_t \epsilon_s)=0$, en donde $t \neq s$. (Si $E(\epsilon_t \epsilon_s)= 0$, estará presente la condición de autocorrelación).

Si se quisiera expresar la varianza de los términos de error, se podría usar el producto vectorial con el resultado siguiente:

$$E(\epsilon\epsilon^T): \sigma^2 I$$

Este concepto de varianza constante se conoce como homoscedasticidad. Independientemente del valor de que se elija, la varianza de su término de error será "σ". El valor real de "σ" se desconoce; de manera que la varianza de muestreo, calculada previamente en "$\hat{S}^2_{y \cdot x}$" sirve para representar a "σ".

$$\hat{B}= (X^T X)^{-1} X^T Y$$
$$= (X^T X)^{-1} X^T (X\beta + \epsilon) \quad \text{(recordar: } Y=X\beta + \epsilon)$$
$$= (X^T X)^{-1} (X^T X)\beta + (X^T X)^{-1} X^T \epsilon$$
$$= \beta + (X^T X)^{-1} X^T \epsilon$$

La varianza es:

$$V(\hat{\beta}) = E\ [(B - \hat{B})(B - \hat{B})^T]$$
$$: E\ [B - (B + (X^T X)^{-1} X^T e))(B - (B + (X^T X)^{-1} X^T e))^T]$$
$$= E\ [((X^T X)^{-1} X^T e)((X^T X)^{-1} X^T e)^T]$$
$$= E[(X^T X)^{-1} X^T e e^T X (X^T X)^{-1}]$$

Aquí se aplicó la regla matricial de que la matriz transpuesta del producto de dos o más matrices es igual al producto de sus matrices transpuestas en orden inverso. Además, debido a la simetría de $X^T X$, se tomó en cuenta que $[(X^T X)^{-1}]^T = (X^T X)^{-1}$.

Ahora advirtiendo que "X" es simplemente una matriz llenada con lecturas conocidas y por lo tanto se puede tratar como una constante, se puede descomponer en factores $(X^T X)^{-1} X$ fuera del operador de expectativa:

$$V(\hat{B}) = (X^T X)^{-1} X^T E(\epsilon\epsilon^T) X (X^T X)^{-1}$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T \sigma^2 I) X (X^T X)^{-1} \text{ Recordar: } E(\epsilon\epsilon^T) = \sigma^2 I)$$

$$= (X^T X)^{-1} (X^T X) \sigma^2 (X^T X)^{-1} \text{ Porque } \sigma^2 \text{ es una cantidad escalar que se puede conmutar, e.d. } \sigma^2 X = X\sigma^2$$

$$= \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

$$V(\hat{B}) = \hat{S}^2_{Y\cdot X} (X^T X)^{-1} \qquad (\text{Recordar: } \hat{S}^2_{Y\cdot X} \text{ representa a } \sigma^2)$$

Este resultado se conoce como matriz de varianza-covarianza, que en sucesivo se designara con "V".

$$V = \hat{S}^2_{Y\cdot X} (X^T X)^{-1} = \text{matriz de varianza-covarianza}$$

Para obtener un intervalo de confianza es necesario partir de $V(\hat{B})$ a $V(\hat{y})$. La conexión se establece tomando en cuenta que se pueden obtener lecturas específicas de $\hat{y}$ multiplicando el renglón correspondiente de "X" por los parámetros de regresión de $\hat{B}$; es decir, $\hat{y} = x_i \hat{B}$. Se tiene

$$V(\hat{y}) = V(x\hat{B}) = x_i V x_i^T$$

Esta forma cuadrática se puede escribir nuevamente como

$$V(\hat{y}) = \hat{S}^2_{Y\cdot X} \left( \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\Sigma(x - \bar{x})^2} \right)$$

## V.7 EMPLEO DE LA MATRIZ DE VARIANZA COVARIANZA

En el capítulo anterior ser vió que "V" está dada por:

$$V = \hat{S}_{y.x} (X^T X)^{-1}$$

la matriz "V" quedaría de la siguiente manera:

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ v_{n1} & \cdot & \dots & v_{nn} \end{pmatrix}$$

donde "$v_{ii}$" es la varianza del coeficiente de regresión "i", mientras que "$v_{ij}$" es la covarianza de los coeficientes "i" y "j"). Luego, si se designa un vector de fila de "X" por "$x_i$" se puede obtener la parte más difícil de la fórmula del intervalo de confianza de modo siguiente:

$$V(\hat{Y}) = x_i V x_i^T$$

La fórmula del intervalo de confianza es entonces:

$$\hat{Y} \pm t_{n-2,\alpha/2} \sqrt{V(\hat{Y})}$$

Si se quisiera conocer el error estándar de cada uno de los coeficientes beta, se podría tomar la raíz cuadrada de cada elemento diagonal de la matriz de varianza-covarianza. Mientras más pequeños sean los errores estándar en relación con sus respectivos coeficientes, más confiables serán estos últimos. Si el analista se quisiera referir al costo marginal de un cambio en el volumen, tomaría la primera derivada de $\hat{Y}$ : $dy/dx = b$.

La matriz de varianza-covarianza tiene otros usos. En estadística se emplean sus elementos para comprobar formalmente los resultados de la regresión. Si la regresión no cabe en la población, la inclinación de la línea de regresión de la población ($E(Y \cdot X) = A + BX$) será igual a cero (en nuestra notación $B = 0$). Se formula entonces la hipótesis nula:

$$H_0: B = 0 \quad \text{vs}$$

$$H_1: B \neq 0.$$

Luego, suponiendo un nivel de confianza del 95%, el valor "t", para n-2=10 grados de libertad, la estadística de prueba será:

$$t = \frac{b - B}{\sqrt{V(b)}}$$

de manera que si cae dentro del intervalo se llega a la conclusión de que no se puede rechazar la hipótesis alterna y que por lo tanto se debe conservar la línea de regresión.

Veamos:

Un ejemplo en donde la intersección es negativa, la línea de regresión en este caso sirve sólo para pronosticar los costos totales dentro de la escala adecuada (observada). Esta situación sugiere la conveniencia de dividir los datos contables en cuentas de costos fijos, variables y semivariables y aplicar la regresión únicamente a los variables y semivariables. También puede ser útil dividir los datos en la unidad monetaria entre un índice del poder de compra (como el índice de precios al consumidor o el índice de precios al mayoreo) para pasar los datos de, dinero, a una base común, antes de formar la línea de regresión. Ese es un procedimiento común aunque se debería usar un índice variable, lo cual es poco usual.

La matriz de varianza-covarianza se puede usar también para relacionar el error estándar de un coeficiente de regresión con la desviación estándar de la variable asociada. La fórmula es:

$$\sqrt{(n-1)\,v_{ii}} = \hat{s}_{y.x} / \sqrt{\Sigma(x - \bar{x}_i)^2/(n-1)}$$

$$\frac{\text{Error estándar del coeficiente de regresión}}{} = \frac{\text{Error estándar de regresión}}{\text{Desviación estándar de la variable del regresor}}$$

Simplificando, $\sqrt{v_{ii}} = \hat{s}_{y.x} / \sqrt{(n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2)/n}$

## V.8 ANALISIS DE VARIANZA Y LA PRUEBA "F"

Hay otras pruebas que se pueden aplicar. En realidad, la prueba "F" explora de una sola vez la ecuación de estimación completa incluyendo todos sus coeficientes beta en conjunto, y no uno solo cada vez.

Si la regresión no corresponde a la población, no habrá inclinación; por lo tanto, E(b)=B = O. En cambio , si en verdad cabe la regresión, la variación explicada será relativamente apreciable mientras que la no explicada será relativamente pequeña. Cuando estas variaciones quedan divididas por sus respectivos grados de libertad, las varianzas resultantes serán estimaciones de la varianza de la población y se conocen como estimaciones del "cuadrado medio". Cuando las estimaciones respectivas del cuadrado medio se dividen, el cociente es la razón "F", la cual:

a) mide cuántas veces es mayor la estimación de varianza, basada en la variación explicada, que la estimación de varianza basada en la variación no explicada.

b) permite determinar si es probable que una razón de tal magnitud se haya originado casualmente.

Para facilitar los cálculos de la razón "F" por lo general se formula una tabla de "análisis de varianza". La tabla siguiente muestra la notación de la tabla ANOVA.

| ORIGEN DE LA VARIACION | GRADOS DE LIBERTAD | SUMA DE LOS CUADRADOS | CUADRADOS MEDIOS |
|---|---|---|---|
| Regresión(R) | m | $=\Sigma(\bar{y}-\hat{y})^2$ | $\Sigma(\bar{y}-\hat{y})^2/m$ |
| Error (E) | n-m-1 | $\Sigma(\hat{y}-y)^2$ | $\Sigma(\hat{y}-y)^2/n-m-1$ |
| Total (T) | n-1 | $\Sigma(\bar{y}-y)^2$ | $\Sigma(\bar{y}-y)^2/n-1$ |

## V.9 MODELOS NO LINEALES

En los capítulos anteriores se trató el problema de ajustar una curva (cuyo modelo fue el de la recta) a un conjunto de observaciones,(que pueden ser los costos) para después determinar el punto de equilibrio. Como primer paso se sugirió aplicar un diagrama de dispersión el cual nos ayuda de una manera rápida a identificar el tipo de comportamiento de nuestras observaciones, en este capítulo se sugiere un modelo que por su facilidad de aplicación nos permite de una manera rápida obtener cualquier otro modelo que no sea el lineal. Con el fin de eliminar los cambios producidos por las fuerzas accidentales, y obtener la tendencia secular del fenómeno, o sea su marcha normal en el tiempo. Se hace necesaria la construcción de curvas que pasen *entre* los puntos conocidos y que muestren el desarrollo del fenómeno de un modo más verosímil.

En estos casos se supone la existencia de una ley definida a la que se hallan sujetos los datos, sino que se respetan éstos aunque no presenten cambios lógicos.

Las curvas matemáticas adaptadas a las series cronológicas son aproximaciones empíricas, pero suponen la existencia de una ley que fija una tendencia consistente y uniforme, y que puede ser representada por una función matemática. Para que tal hipótesis sea lógicamente aceptable, es necesario que en el período homogéneo en el cual deba existir la ley, no aparezcan cambios intensos en las condiciones en que se desarrolla el fenómeno que se estudia.

La experiencia ha mostrado que, en la mayoría de los casos el desarrollo de los fenómenos naturales presentan un conjunto de leyes que pueden expresarse por medio de un reducido número de funciones en las que intervienen muy pocas constantes. Estas leyes pueden ser representadas, en la mayoría de los casos, por rectas y parábolas de diferentes grados.

Supongamos que las variaciones de un fenómeno en el tiempo están representadas por los puntos $A_1(x_1, y_1)$; $A_2(x_2, y_2)$; $A_3(x_3, y_3)$; $A_4(x_4, y_4)$; $A_5(x_5, y_5)$; $A_6(x_6, y_6)$; en los que las *equis* indican las distintas fechas conocidas, y las *yes* las intensidades que en ellas adquiere el fenómeno.

La figura V.9.1 muestra los puntos aislados $A_1$, $A_2$, $A_3$, etc., y la curva "$B_1 B_7$", trazada *entre* esos puntos, es la representación de la función F(x).

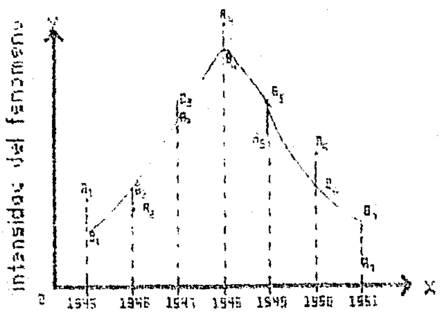



figura V.9.1

Ahora bien, entre los puntos $A_1$, $A_2$, $A_3$, etc. puede pasar un infinito número de curvas del tipo de la curva $B_1B_7$; pero el método de los mínimos cuadrados enseña el procedimiento para obtener la función F(x) de la curva $B_1B_1$, de manera que la suma de los cuadrados de las diferencias entre las ordenadas y los puntos conocidos y las correspondientes de la curva; $A_1$ y $B_1$ $A_2$ y $B_2$, etc. sea un mínimo. Si representamos por φ(x) a la suma de estos cuadrados, se tiene, en general:

$$\varphi(x) = [F(x_1) - Y_1]^2 + [F(x_2) - Y_2]^2 + \ldots + [F(x_r) - Y_r]^2$$

Luego:

$$\varphi(x) = \sum_1^r [F(x) - Y]^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots V.1$$

En esta igualdad, F(x) representa la función de la curva ajustada y "Y" las ordenadas de los puntos conocidos entre los cuales debe pasar la curva. Según las condiciones impuestas, φ(x) debe alcanzar un mínimo, o sea, que su primera derivada con relación a cada variable que contenga, debe ser igual a cero. Con esta condición no puede obtenerse un máximo porque la curva interpolada puede alejarse de los puntos $A_1$, $A_2$, etc., de manera que φ(x) supere a cualquier número dado.

## V.10 UN CASO: AJUSTES PARABOLICOS

Volviendo a la función V.1 que debe presentar un mínimo, se tiene:

$$\text{minimizar } \varphi(x) = \Sigma[F(x) - Y]^2$$

Se supone que se quiere ajustar entre varios puntos una parabola del tipo:

$$F(x) = ax^2 + bx + c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots V.2$$

Reemplazando este valor en la primera igualdad, resulta:

$$\varphi(x) = \Sigma(ax^2 + bx + c - Y)^2$$

Como esta función debe presentar un mínimo, sus derivadas parciales con relación a los parámetros a, b y c deben anularse. Luego:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a} = 2\sum_1^n (ax^2 + bx + c - Y)x^2 = 2\sum_1^n (ax^4 + bx^3 + cx^2 - x^2Y) = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial b} = 2\sum_1^n (ax^2 + bx + c - Y)x = 2\sum_1^n (ax^3 + bx^2 + cx - xY) = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial c} = 2\sum_1^n (ax^2 + bx + c - Y)x = 2\sum_1^n (ax^2 + bx + c - Y) = 0$$

Suprimiendo el factor 2 y haciendo transposición de términos, resulta:

$$a\Sigma x^4 + b\,\Sigma x^3 + c\,\Sigma x^2 = \Sigma x^2 Y$$

$$a\Sigma x^3 + b\,\Sigma x^2 + c\,\Sigma x = \Sigma xY \qquad \ldots\ldots V.3$$

$$a\Sigma x^2 + b\,\Sigma x + nc = \Sigma Y$$

Estas ecuaciones, como las enteriores que permiten calcular los parámetros a, b y c, son precisamente las ecuaciones normales.

siguiendo un procedimiento análogo a los estudiados anteriormente, se llega a las ecuaciones normales para parábolas del grado que se indica.

De tercer grado:

$$a\Sigma x^{3} + b\Sigma x^{2} + c\Sigma x + nd = \Sigma Y$$
$$a\Sigma x^{4} + b\Sigma x^{3} + c\Sigma x^{2} + d\Sigma x = \Sigma xY$$
$$a\Sigma x^{5} + b\Sigma x^{4} + c\Sigma x^{3} + d\Sigma x^{2} = \Sigma x^{2}Y$$
$$a\Sigma x^{6} + v\Sigma x^{5} + c\Sigma x^{4} + d\Sigma^{3} = \Sigma x^{3}Y$$

De cuarto grado:

$$a\Sigma x^{4} + b\Sigma x^{3} + c\Sigma x^{2} + d\Sigma x + ne = \Sigma Y$$
$$a\Sigma x^{5} + b\Sigma x^{4} + c\Sigma x^{3} + d\Sigma x^{2} + e\Sigma x = \Sigma xY$$
$$a\Sigma x^{6} + b\Sigma x^{5} + c\Sigma x^{4} + d\Sigma x^{3} + e\Sigma x^{2} = \Sigma x^{2}Y$$
$$a\Sigma x^{7} + b\Sigma x^{6} + c\Sigma x^{5} + d\Sigma x^{4} + e\Sigma x^{3} = \Sigma x^{3}Y$$
$$a\Sigma x^{8} + b\Sigma x^{7} + c\Sigma x^{6} + d\Sigma x^{5} + e\Sigma x^{4} = \Sigma x^{4}Y$$

Observando las ecuaciones normales para las curvas de segundo, tercero y cuarto grado, se puede deducir la ley que siguen estas ecuaciones y formar las ecuaciones normales de una curva de cualquier grado.

## V.11 ELECCION DE LA CURVA Y ADHERENCIA DE LOS VALO INTERPOLADOS

Ya estudiados los diversos tipos de curvas que pue ajustarse entre una serie de valores conocidos, es ne sario fijar los lineamientos generales para la elección d tipo de la curva por interpolar, de manera que represente, lo m' aproximadamente posible, la ley del movimiento del fenóme dentro del período considerado. Es claro que no se pueden fi de una manera precisa las bases que han de servir de norma pa la elección de una curva, con la seguridad de obtener resultad que indiquen de un modo perfecto el movimiento secular del fenómeno, ya que no es posible obtener una comprobación de la bondad de esos resultados.

Es conveniente advertir que lo fundamental para la buena elección de determinado tipo de curva depende, más que todo, del criterio y experiencia. A continuación se exponen algunas consi deraciones generales que pueden servir para orientar la elec ción de la curva. Es necesario hacer antes que todo, e coordenadas cartesianas, la representación gráfica de los puntos cuyas abscisas y ordenadas son conocidas. Esta representación se puede hacer en las cuatro formas siguientes:

1o. Fijar los puntos en ejes coordenados de abscisas , ordenadas trazadas en escala natural.

2o. Abscisas en escala natural y ordenadas en escala logarítmica.

3o. Ordenadas en escala natural y abscisas en escala logarítmica.

4o. Abscisas y ordenadas en escalas logarítmicas.

Del estudio de la representación gráfica del fenómeno en las diferentes escalas de que se ha hablado anteriormente, depende la elección de la ecuación que representa su movimiento; ecuación de un tipo tal que su representación gráfica en los ejes de escalas convenientes sea análoga, lo más posible, a la representación gráfica de los valores observados.

La elección del tipo de ecuación que debe emplearse para el ajuste debe hacerse después del estudio de las coordenadas de los puntos conocidos. Para tal elección se debe tomar en cuenta:

a) Si los valores de las abscisas y ordenadas de los puntos conocidos, siguen aproximadamente, las leyes de una progresión aritmética, la ecuación que debe elegirse debe ser de la forma:

$$y = ax + b$$

b) Cuando los valores de "x" forman progresión aritmética, y los de "y" progresión geomeetrica, la función de tipo exponencial es la que más convenientemente puede ligar estas variables; luego la ecuación debe ser del tipo:

$$y = ab^x$$

c) Si los valores de "x" y los de "y" forman progresiones geométricas, la curva representativa de la ecuación que liga estas variables debe ser del tipo parabólico o hiperbólico; por lo tanto, la ecuación apropiada en este caso debe ser de la forma:

$$y = ax^{b}$$

Si los valores de "x" siguen las leyes de una progresión aritmética y las enésimas diferencias de "y" son constantes, el tipo de ecuación más conveniente es:

$$y = ax^{n} + bx^{n-1} + \dots + k$$

Siempre que no sea posible elegir determinado tipo de ecuación, después de haber seguido las indicaciones expuestas es conveniente adaptar a los datos varios tipos y ver cuál de ellos es el más lógicamente aceptable.

Ya escogida la curva que debe utilizarse para el ajuste, conviene medir el grado general de adherencia de los valores interpolados a los observados. Un procedimiento para medir tal adherencia puede consistir en el promedio aritmético de los valores absolutos de las diferencias entre los valores de la curva ajustada y los observados. Es claro que a medida que el promedio de esos valores absolutos sea menor, el grado de adherencia es mayor y, por lo tanto, el tipo de curva empleado es más aceptable.

Para evitar la dualidad de los signos de las diferencias entre los valores ajustados y los observados, es conveniente calcular la media cuadrática de esas diferencias en vez de la media aritmética. Si después de medir la adherencia de una recta o parábola de segundo grado, que pasa entre varios puntos conocidos, se ve que no es satisfactoria la adherencia obtenida, es conveniente interpolar una parábola de tercer grado, puesto que al pasar de una parábola de grado "n" a otra de grado (n+1), disminuye la media cuadrática de las diferencias.

## V.12 INTERPOLACION DE LAGRANGE

(Interpolación con incrementos variables)

El método sugerido en el capítulo anterior tiene la ve de ser un método fácil para ajustar una función a un conjunto de observaciones; aunque de antemano se determine la func ya sea en base a modelos conocidos (experiencia en el comportamiento funcional de las observaciones) o bien el rea zar un diagrama de dispersión y ajustar de la mejor manera posible una curva a este conjunto de puntos.

Existen varios métodos para la aproximación o interpolación de un conjunto de observaciones de manera que ajustemos un polinomio para determinar su comportamiento en un intervalo. De los distintos métodos numéricos que se utilizan, el método de int polación de Lagrange es uno de los más conocidos y aplica os dentro del análisis numérico; este modelo permite encont una fórmula de interpolación aplicable a funciones tabulares con valores de "x" que no sean equidistantes, como la definida en tabla siguiente y representada por la curva continua de la figura V.12.1

| $x_j$ | $y_j$ |
|---|---|
| $x_1$ | $y_1$ |
| $x_2$ | $y_2$ |
| $x_3$ | $y_3$ |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| $x_n$ | $y_n$ |

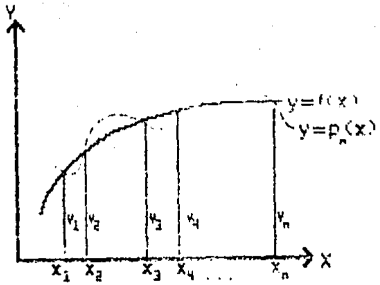



fig. V.12.i

Para hacer la interpolación, se busca un polinomio que pase por todos los puntos de la tabla anterior. Es evidente que, si se tuvieran únicamente dos puntos, el polinomio que pasa por éstos es de grado uno (recta); si se tuvieran tres, el polinomio es de segundo grado (parábola), etc. En el caso general de tener n puntos, como en la tabla anterior, el polinomio debe ser de grado n-1, o sea

$$y = a_0 x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x + a_{n-1}$$

Este polinomio puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned} y = {} & A_1(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ \dots\ (x-x_n) + \\ & + A_2(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\ \dots\ (x-x_n) + \\ & + A_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\ \dots\ (x-x_n) + \dots + \\ & + A_n(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ \dots\ (x-x_{n-1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (V.1) \end{aligned}$$

el cual también es de grado n-1. Los coeficientes $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$

se determinarán de manera que la gráfica del polinomio pase por todos y cada uno de los puntos especificados, como se indicó en la figura V.12.i.

Entonces, si $x=x_1$ en (V.1), $y$ será igual a $y_1$ o sea

$$y = A_1(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4) \; . \; . \; . (x_1-x_n)$$

de donde:

$$A_1 = \frac{y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4) \; . \; . \; . \; (x_1-x_n)} \qquad ...(V.2)$$

Si $x=x_2, y=y_2$, y se tiene

$$y_2=A_2(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4) \; . \; . \; . (x_2-x_n)$$

por lo tanto:

$$A_2= \frac{y_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4) \; ... \; (x_2-x_n)} \qquad ...(V.3)$$

Si $x=x_3$ , $y=y_3$, y se obtiene

$$y_3= A_3(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4) \; . \; . \; . \; (x_3-x_n)$$

es decir:

$$A_3= \frac{y_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4) \; . \; . \; . \; (x_3-x_n)} \qquad ...(V.4)$$

Procediendo en forma análoga se obtiene los demás coeficientes de V.1; el último se obtiene haciendo en V.1 $x = x_n$, quedando $y= y_n$, o sea

$$y_n= A_n(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3) \; . \; . \; . \; (x_n - x_{n-1})$$

por lo que:

$$A_n = \frac{y}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3) \; . \; . \; . \; (x_n - x_{n-1})} \qquad (V.5)$$

Sustituyendo (V.2) a (V.5) y las demás ecuaciones que se obtendrían procediendo en la misma forma, se llega finalmente a

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \; \ldots \; (x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4) \; \ldots (x_1-x_n)} \, y_1 +$$

$$+ \quad \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4) \; \ldots \; (x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4) \; \ldots (x_2-x_n)} \, y_2 +$$

$$+ \quad \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4) \; \ldots \; (x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4) \; \ldots (x_3-x_n)} \, y_3 + \; \ldots \; +$$

$$+ \quad \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \; \ldots (x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3) \; \ldots (x_n-x_{n-1})} \, y_n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad V.6$$

Esta es la fórmula de interpolación de Lagrange. En ésta, $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n)$ son las coordenadas de los puntos que definen la función tabular y "*y*" es el valor de la función para un valor dado de "x". Puede demostrarse que si los valores de "x" están igualmente espaciados, la fórmula coincide con la de Newton.

## VI. OBTENCION DEL PUNTO DE EQUILIBRIO

El punto angular para la elaboración de este trabajo ha sido principalmente el de establecer en cualquier momento la relación que existe entre el volumen de los gastos de las inversiones y el volumen de ventas que se requieren para obtener rentabilidad en las operaciones. Si todos los costos de una empresa fueran variables, no existiría el problema, relativo al volumen de ventas que se requieren para lograr el punto de equilibrio. Sin embargo, ya que el nivel de los costos totales, puede ser influenciado por el volumen de las inversiones fijas que la empresa realice, los costos fijos resultantes pondrán a la empresa en una posición de pérdida hasta que se logre un volumen suficiente de ventas. Por lo tanto, el análisis del punto de equilibrio es un aspecto formal de la planeación, el cual se basa en las relaciones que existen entre las ventas o ingresos totales y los costos totales. Si una empresa ha de evitar pèrdidas contables, sus ventas deben cubrir todos los costos; los que varían directamente con la producción y que no cambian a medida que se modifican los niveles de producción.

El primer paso a efectuar para llevar dicho cálculo es el tener separados los Costos (los que tienen que ver con la producción del o de los bienes) en fijos y variables (punto que ya tratamos en el capítulo IV) y enseguida, realizar un diagrama de dispersión de los costos variables para observar un comportamiento y así ajustar uno de los modelos ya propuestos en capítulos anteriores. Cuando por cualquiera de los métodos sugeridos se haya obtenido una función, debemos ver cuál es entonces el comportamiento de las unidades de producción o bien de nuestras ventas, es decir; la misma empresa puede determinar para sus niveles de producción un modelo lineal o bien, si se desea hacer un pronóstico y las ventas varían en precio o en cantidad debido a la demanda en el mercado, la competencia o bien a otros factores, entonces de igual manera se deberá hacer un diagrama de dispersión al volumen de producción o a las ventas y se determinará también para este otro grupo de observaciones un modelo a ajustar. Así que los métodos antes vistos serán aplicables tanto a costos variables como a ventas (variables si así lo ha determinado el problema).

La naturaleza del análisis del punto de equilibrio se muestra en la figura VI.1.1 que es la gráfica básica del punto de equilibrio. Dicha gráfica se ha formulado sobre una base unitaria, donde las unidades producidas se muestran en el eje horizontal, y los ingresos y costos en el eje vertical. Los costos fijos de $40,000 se representan mediante una línea horizontal; siempre son los mismos -fijos- independientemente del número de unidades que se produzcan. Se ha supuesto que los costos variables son de $1.20 por unidad, y que las unidades se venden a $2 por pieza; por lo tanto, el ingreso total se ha dibujado como una recta, la cual debe aumentar a medida que se eleve la producción. La pendiente, o tasa de ascenso, de la recta del ingreso total es más inclinada que la línea del costo total. Esto debe ser cierto, porque la empresa está ganando \$2.00 de ingresos por cada \$1.20 que se paguen por mano de obra y por materiales es decir, los costos variables.

Arriba, hacia el punto de equilibrio, en el punto de intersección de la recta de ingresos totales con la recta de costos, la empresa sufre pérdidas. Después de ese punto, empieza a obtener utilidades. La figura VI.1.1 muestra un punto de equilibrio a un nivel de ventas y de costos de \$100,000, lo cual representa en este caso un nivel de producción de 50,000 unidades.

El cálculo del punto de equilibrio puede llevarse algebraicamente teniendo en cuenta que tanto las ventas totales como los costos totales tienen un comportamiento de tipo lineal. Definamos:

x = Unidades producidas

V = Punto de equilibrio en ventas

U = Punto de equilibrio en unidades vendidas

P = Precio de venta X unidad

F = Costos fijos

A = Costos Variables

C = Costos totales = F + Ax

E = Ventas Totales = Px

Punto de equilibrio en unidades = U

$$C = F$$

$$F + AU = PU$$

Punto de equilibrio en ventas=V

$$V = F + AU$$

$$F = PU - AU \qquad\qquad V = F + A(F/P-A)$$

$$F = U(P-A) \qquad\qquad = F + F(A/P-A)$$

$$F/(P-A) = U \qquad\qquad = F\left(1 + \frac{A}{P-A}\right)$$

$$U = \frac{F}{P-A} \qquad\qquad = F\frac{(P-A+A)}{P-A}$$

$$V = \frac{FP}{P-A}$$

Este es uno de los pasos más simples para realizar el càlculo del punto de equilibrio. Hay que tomar en cuenta que hicimos el càlculo sobre la base de que tanto nuestras unidades de producción (o ventas) y los costos totales son ambos rectas.

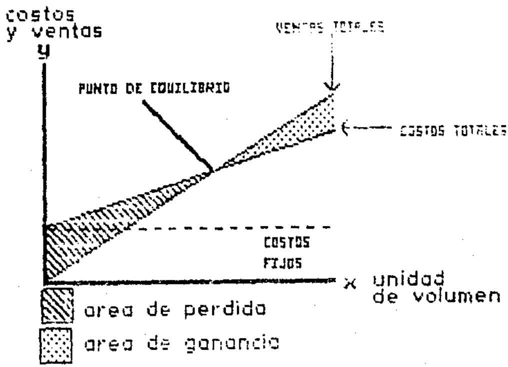



FIGURA V.1.i

Como segundo caso podemos considerar a los costos totales como una función no lineal, de manera que lo que tendremos serán dos puntos de equilibrio, cuya gráfica se muestra en la figura VI.1.ii

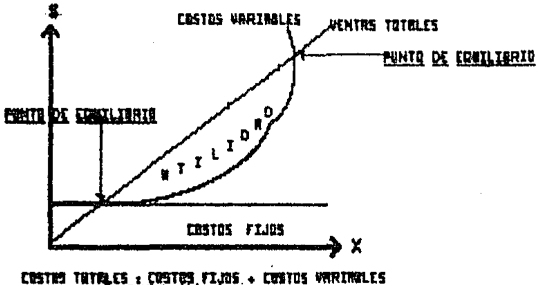



figura VI.1.i

En el tercer caso en el que ambos modelos son no lineales, también tendremos dos puntos de equilibrio. La gráfica se muestra a continuación (figura VI.1.iii):

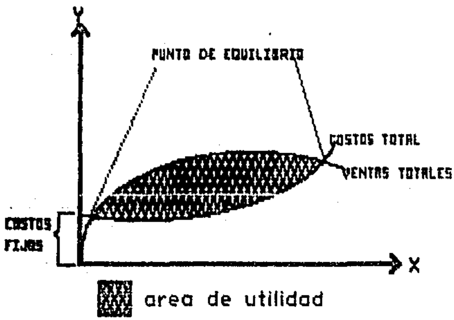



figura VI.1.iii

## VII. OBTENCION DE LA MAXIMA UTILIDAD

Hablamos en el capítulo anterior del caso en que tenemos dos puntos de equilibrio esto es, que en un intervalo determinado para cualquier valor inferior al primer punto de equilibrio, tendremos pérdidas y lo mismo sucederá para valores superiores al segundo punto de equilibrio, lo cual quiere decir que entre estos dos puntos tendremos un área de utilidad. La pregunta inmediata es: Dentro de éste intervalo, cuál es la máxima utilidad que puedo obtener? En este caso definiremos que la ganacia total o la máxima utilidad se define como la diferencia entre el ingreso total y el costo total. Es decir, si P(x) es la ganacia total obtenida por la producción y venta de "x" unidades de cierta mercancía entonces:

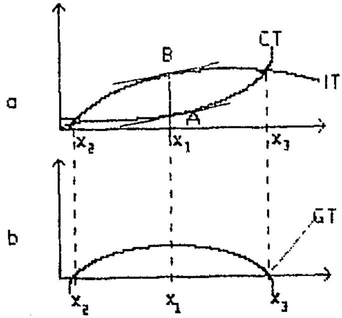
$$P(x) = R(x) - C(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{VII.1}$$

donde R(x) es el ingreso total y C(x) representa el costo total. de VII.1 obtenemos:

$$P'(x) = R'(x) - C'(c) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{VII.2}$$

La función P'(x) se denomina función de la ganacia marginal y P'(K) es la ganancia aproximada obtenida a partir de la (K + 1 )-ésima unidad después de que se han producido y vendido K unidades. A partir de VII.2, la ganacia marginal es el ingreso marginal menos el costo marginal.

En las figuras (a) y (b) encontramos las gráficas de una función del costo total. En la figura (a), se muestra la gráfica de una función del ingreso total de una empresa determinada, y en la figura (b) tenemos la gráfica de la función de la ganancia total corresondiente a dicha empresa (la cual se denotará por GT).




Se puede observar en la figura (a) que cuando la curva CT está arriba de IT (cuando el costo es mayor que el ingreso), entonces en la figura (b) la curva GT está por debajo del eje "x" (la ganancia es negativa; es decir, la compañía muestra péerdidas); esto ocurre cuando $0 \leq x < x_2$ y cuando $x > x_3$. Cuando la curva CT está debajo de la curva IT (cuando el costo es menor que le ingreso), la curva GT se encuentra arriba del eje "x" (la ganancia es positiva; es decir, la compañía muestra ganancias); esto ocurre cuando $x_2 < x < x_3$. En los puntos de intersección de las curvas CT e IT (cuando está en punto de equilibrio), la curva GT corta el eje x (la ganancia es cero) y esto ocurre en los puntos $x_2$ y $x_3$.

Determinemos ahora qué nivel de producción se necesita para obtener la máxima ganancia. En la figura (a), la distancia vertical entre las curvas IT y CT para un valor particular de "x" en $P(x)$, el cual da la ganancia total correspondiente a ese valor de "x". Cuando la distancia vertical es mayor, $P(x)$ tiene un valor máximo. Observemos, de la figura (a), que la distancia AB es la mayor distancia vertical entre las dos curvas en el intervalos $[x_2, x_3]$, y esto ocurre en el número crítico "x", de la función "P". De la ecuación VII.2 vemos que $P'(x)=0$ si y solo si $R'(x)=C'(x)$. Así, para una ganacia máxima, el ingreso marginal debe ser igual al costo marginal. Notemos, en la figura (a), que en los puntos "B" y "A" sobre ambas curvas, las rectas tangentes son paralelas y de aquí $R'(x\ ) = C'(x\ )$.

De la ecuación VII.2

$$P''(x) = R''(x) - C''(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{VII.3}$$

Ya que "P" tendrá un valor máximo relativo en un número x, para el cual $P'(x) = 0$ y $P''(x) < 0$, podemos concluir, de las ecuaciones VII.2 y VII.3, que esto ocurrirá para un valor de "x" para el cual $R'(x)=C'(x)$ y $R''(x) < C''(x)$. Por lo tanto, la función de la ganancia tendrá un valor máximo relativo, cuando el ingreso marginal iguale al costo marginal, y la pendiente de la gráfica, de la función del ingreso marginal, sea menor que la pendiente de la gráfica de la función del costo marginal.

## VII. CASOS PRACTICOS

CASO 1.- En este primer problema se resuelve un comportamiento lineal para las ventas y en el caso de los costos tenemos estimacines de los costos de acuerdo al volumen de venta.

Se va a iniciar la manufactura de un producto en la compañía X. Se han hecho los estudios de mercado pertinentes y se ha obtenido que el producto podrá venderse a $200.oo por unidad y que esta cantidad no variará durante el período de venta. Por otro lado se tiene un estudio por parte del departamento de costos y han pronosticado durante el período de venta los siguientes costos:

| COSTOS VARIABLES | UNIDADES (VOLUMEN) |
|---|---|
| 262 | 60 |
| 230 | 55 |
| 247 | 72 |
| 258 | 62 |
| 240 | 58 |
| 330 | 75 |
| 314 | 74 |
| 340 | 85 |
| 348 | 88 |
| 360 | 94 |
| 350 | 92 |
| 375 | 100 |

Se desea saber cuál es el punto de equilibrio de manera que podamos establecer el volumen mínimo de ventas para igualar nuestros costos totales.

- Como primer punto tenemos que hacer un diagrama de dispersión para observar el comportamiento de los costos.

Veamos:

(SE OMITEN 000)

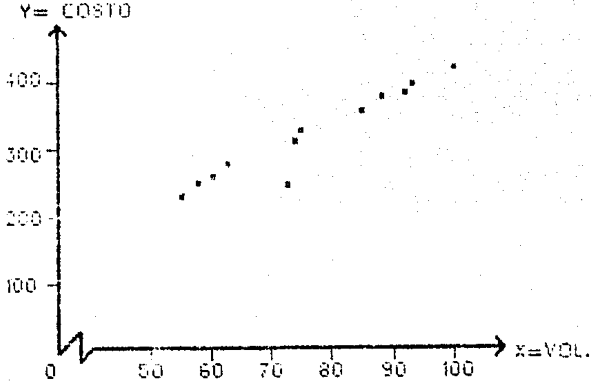



figura VII.1

Las observaciones se separan del eje "x" y "y" lo suficiente como para suponer que se puede ajustar un modelo lineal.

Nuestras observaciones sugieren que apliquemos el modelo de regresión (en caso de no tener elementos suficientes -tablas o una calculadora- para realizarla se puede efectuar el mètodo de máximos y mínimos visto en el capìtulo V.2.

En la tabla siguiente se desarrolla una tabla para obtener cada uno de los elementos de la ecuación de regresión.

Definimos:

X = UNIDADES (VOLUMEN) Y = COSTO

XY = COSTO * VOLUMEN

$(\bar{Y}-Y)$ = Diferencia entre la media y la observación

$(\bar{Y}-\hat{Y})$ = Diferencia entre la media y el valor estimado

$(\hat{Y}-Y)$ = Diferencia entre el valor estimado y la observación

| COSTO | VOLUMEN | | | TOTAL | EXPLICADA | NO EXPL. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | X | $X^2$ | XY | $(\bar{Y}-Y)^2$ | $(\bar{Y}-\hat{Y})^2$ | $(\hat{Y}-Y)^2$ |
| 262 | 60 | 3,600 | 15,720 | 1,806.25 | 2,784.70 | 105.48 |
| 230 | 55 | 3,025 | 12,650 | 5,520.25 | 4,761.99 | 30.17 |
| 247 | 72 | 5,184 | 17,784 | 3,306.25 | 190.48 | 1,909.56 |
| 258 | 62 | 3,844 | 15,996 | 2,162.25 | 2,141.41 | .05 |
| 240 | 58 | 3,364 | 13,920 | 4,160.25 | 3,512.34 | 27.41 |
| 330 | 75 | 5,625 | 24,750 | 650.25 | 16.48 | 873.75 |
| 314 | 74 | 5,476 | 23,236 | 90.25 | 53.39 | 282.46 |
| 340 | 85 | 7,225 | 28,900 | 1,260.25 | 807.40 | 50.20 |
| 348 | 88 | 7,744 | 30,624 | 1,892.25 | 1,455.95 | 28.55 |
| 360 | 94 | 8,836 | 33,840 | 3,080.25 | 3,322.52 | 4.59 |
| 350 | 92 | 8,464 | 32,200 | 2,070.25 | 2,615.97 | 31.88 |
| 375 | 100 | 10,000 | 37,500 | 4,970.25 | 5,948.37 | 43.90 |
| TOTALES | | | | | | |
| $3,645 | 915 | 72,387 | 287,120 | 30,999.00 | 27,611.00 | 3,888.00 |

Incorporando los datos de costo y volumen en la tabla que se acaba de elaborar se obtiene:

$$\underset{X^T}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 60 & 55 & . & . & . & 100 \end{pmatrix}} \underset{X}{\begin{pmatrix} 1 & 60 \\ 1 & 55 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ 1 & 100 \end{pmatrix}} = \underset{X^T X}{\begin{pmatrix} 12 & 915 \\ 915 & 72,387 \end{pmatrix}}$$

$$
\begin{array}{ccc}
X^T & Y & X^T Y \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 60 & 55 & . & . & . & 100 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 262 \\ 230 \\ . \\ . \\ . \\ 375 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 3.654 \\ 287.120 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
B = (X^T X)^{-1} \; X^T Y
$$

$$
= \frac{\begin{bmatrix} 72,387 & -915 \\ -915 & 12 \end{bmatrix}}{12(72,387)-915} \begin{bmatrix} 3,654 \\ 287,120 \end{bmatrix}
$$

$$
= \frac{\begin{bmatrix} 72,387 & -915 \\ -915 & 12 \end{bmatrix}}{31,149} \begin{bmatrix} 3,654 \\ 287,120 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 2.3039243 & -.0291225 \\ -.0291225 & .0003819 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3,654 \\ 287,120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56.8859 \\ 3.2472 \end{bmatrix}
$$

La ecuación de estimación es

$y$=\$56,885.90 + \$3,2474 X

= Costo fijo + Costo Variable

Calculemos ahora el coeficiente de determinación "t"

$$
\frac{\text{Variación explicada}}{\text{Variación Total}} = \frac{\Sigma(\bar{y} - \hat{y})^2}{\Sigma(\bar{y} - y)^2} = \frac{27,611}{30,999} = .89 = r^2
$$

Las cifras anteriores se han tomado de los totales de las columnas correspondientes de la tabla anterior.

El valor de $r^2$ indica que la regresión ha mejorado significativamente la posibilidad de estimar el costo. Cabe introducir una mejora -se ha explicado únicamente el 89% de la variación anterior, no el 100%-. No obstante, la variación se ha reducido en forma apreciable y se pueden hacer estimaciones más precisas y esto se puede hacer viendo las desviaciones estándar antes y después de la regresión.

$$S_{yy} = \sqrt{\Sigma(\hat{y} - y)^2/n} = \sqrt{3,388/12} = 16.8$$

si se hubiera ignorado la variable de volumen y sólo se hubiera considerado la variación al azar de los costos, se habría obtenido la variación estándar muestral "s", que es la raíz cuadrada de la variación de los costos totales:

$$S_y = \sqrt{\Sigma(\bar{y} - y)^2/n} = \sqrt{30,999/12} = 50.83$$

Para "$S_y$" se pierde un grado de libertad al tener que usar los datos para estimar "$y$"; para "s" se pierden dos grados de libertad para estimar los parámetros "a" y "b". Las estimaciones modificadas de la desviación estándar vienen a ser

$$\hat{S}_y = s_y\sqrt{n/n-1} = 50.83\ \sqrt{12/11} = 53.09$$

$$\hat{S}_{yy} = s_{yy}\sqrt{n/n-2} = 16.80\ \sqrt{12/10} = 18.41$$

Si deseamos establecer un intervalo de confianza del 95% para nuestra línea de costo, $t = t = 2.228$, (obtenido de la tabla t en el apéndice) la fórmula será: $y \pm t \quad V(y)$

$$(56,885.90 + 3.2472x) + 2.228(18.41)\sqrt{1/12 + (x-76.25)^2/2618.25}$$

Podemos observar la gráfica con los resultados:

| X | Superior | Inferior |
|---|---|---|
| 55 | 256 | 215 |
| 58 | 264 | 226 |
| 60 | 269 | 234 |
| 62 | 275 | 242 |
| 72 | 303 | 278 |
| 74 | 309 | 285 |
| 75 | 312 | 289 |
| 85 | 347 | 319 |
| 88 | 358 | 328 |
| 92 | 373 | 338 |
| 94 | 381 | 344 |
| 100 | 404 | 359 |

Si obtenemos ahora la matriz de varianza-covarianza tendremos que:

$$V = \hat{s}^2_{y.x} (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 780.569 & -9.8667 \\ -9.866 & .1293 \end{bmatrix}$$

Suponiendo que $x = 55$

$$(1 \ , \ 55) \ V \begin{bmatrix} 1 \\ 55 \end{bmatrix} = (86.66)$$

La fórmula del intervalo de confianza queda entonces:

$$\hat{y} \pm t_{n-2,\alpha/2} \sqrt{V(\hat{y})} = 56.886 + 3.25(55) + 2.228\sqrt{86.66}$$

$$= (215, \ 256) \text{ , al entero más cercano}$$

Si queremos conocer los errores estándar de cada uno de los coeficientes beta, se podría tomar la raíz cuadrada de cada elemento diagonal de la matriz de varianza-covarianza, así el error estándar del costo fijo (el parametro a o B) es

$\sqrt{780.567}$ = \$27.94 (es decir, \$27,940 al reponer los 000)

Y el error estándar del costo variables es

$\sqrt{.129399}$ = \$.36

Nos resta probar si efectivamente nuestro modelos de regresión tiene sentido. Para esto vamos a hacer uso de lo visto en el capítulo V.8 es decir:

$H_0$: B = 0

$H_1$: B ≠ 0

suponiendo un nivel de confianza del 95%,el valor "t", para n-2 = 10 grados de libertad, es ± 2.228 y la estadística de prueba será:

$$t = \frac{b - B}{\sqrt{V(b) - v_{22}}} = \frac{3.2474 - 0}{.36} = 9.02$$

Puesto que el valor de "t" excede el valor crítico de 2.28, se llega a la conclusión de que no se puede rechazar la hipótesis alterna y que por lo tanto se debe conservar la línea de regresión.

Por último realizando el análisis del capítulo V.8 tenemos presente con los cálculos ya realizados la tabla ANOVA.

| Origen de la variación | Grados de libertad | Suma de Cuadrados | Cuadrados Medios |
|---|---|---|---|
| Regresión | 1 | 27,611.00 | 27,611.00 |
| Error | 10 | 3,388.00 | 338.80 |
| Total | 11 | 30,999.00 | 2,818.09 |

F se calcula $F = 27{,}611/338.8 = 81.5$

en una tabla F (ver en el apéndice), con un nivel de significancia del 5% F = 4.96.

La hipótesis nula es $H_0$: B= 0 vs. $H_1$: B≠ 0. Si se crea una región de rechazo del 5%, la "F" crítica es F = 4.96. Puesto que se excede de esta cifra, se rechaza H y se llega a la conclusión de que los datos no pueden provenir de una población en la cual no está presente la regresión.

En seguida graficaremos nuestras ventas con respecto a los Costos Totales para así encontrar el punto de equilibrio gráficamente (figura VII.i) :

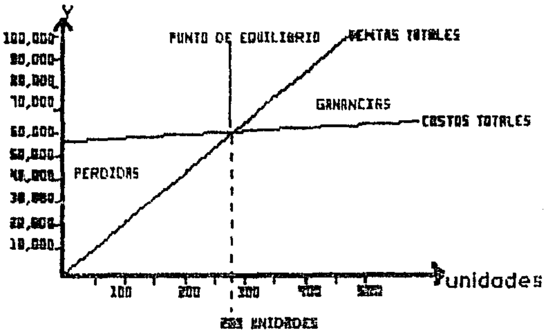



figura VII.i

el punto de equilibrio se encuentra en la intersección de las dos rectas cuando x es igual a 289 unidades.

Tenemos ahora juntas las dos ecuaciones:

56,885.9 + 3.2474 X

200X

De la página 69 se tiene, que para obtener el punto de equilibrio definimos:

F = 56,885.9 (costos fijos)

A = 3.2472 (costos variables)

p = 200 (precio de venta por unidad)

$$U = \begin{matrix}\text{Punto de Equilibrio}\\ \text{en unidades}\\ \text{Vendidas}\end{matrix} = \frac{F}{C} = \frac{F}{P - A} = \frac{56,885.9}{200-3.2474} = 289.14$$

$$V = \begin{matrix}\text{Punto de Equilibrio}\\ \text{en Ventas}\end{matrix} = \frac{FP}{P-A} = \frac{56,885.9(200)}{200-3.2474} = 57,824.8013$$

Lo cual nos indica que se necesitan producir un mínimo de 289 unidades para salir a mano con los costos totales que en ese punto serán de $ 57,824.8 (y que coincidirán con las ventas)

CASO II.- En una fábrica de ropa se está decidiendo si se debe lanzar al mercado un nuevo producto que puede venderse a \$26,300.00; se sabe de antemano que se requiere la contratación de personal adicional, y si la demanda aumenta sera necesario ampliar los horarios de maquila y costura. El grupo de técnicos y especialistas ha dado un presupuesto durante un periodo de fabricación-venta de un mes y ha propuesto los siguientes costos. Se desea averiguar qué tan conveniente es fabricar dicho producto, en base a los gastos que éste mismo implica.

Las observaciones son las siguientes:

COSTOS FIJOS \$29,000.00

COSTOS VARIABLES (omitimos los OO)

| x | y |
|---|---|
| 21.2 | 264.4 |
| 26.5 | 396.8 |
| 32.9 | 594.5 |
| 40.4 | 878.7 |
| 42.5 | 970.6 |
| 45.7 | 1117.1 |
| 48.9 | 1247.2 |
| 53.1 | 1500.2 |
| 55.3 | 1620.3 |

Según lo visto en el capitulo V.4 realizaremos primero un diagrama de dispersión para ver el comportamiento de nuestras observaciones:

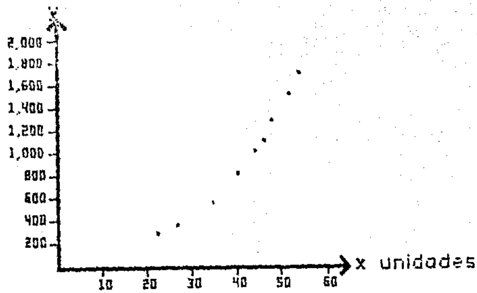



figura VII.ii

Siguiendo los criterios vistos en el capitulo V.4, trataremos de ajustar alguna ecuación al conjunto de observaciones:

Si vemos, la diferencia aproximada que hay entre las observaciones de "y", mas o menos siguen el comportamiento de una progresión geométrica:

264 , 264(1.5) , 264(1.5) , 264(1.5) , 264(1.5)

= 264 , 396 , 594 , 891 , 1136

En el caso de las observaciones de "X", el comportamiento aproximado es también el de una progresión geométrica:

21, 21(1.2) , 21(1.2) , 21(1.2)

21, 25.2 , 30.24 , 36.12

Como "X" forma aproximadamente una progresión geométrica al igual que la de "y", el modelo que mejor se ajusta a estas observaciones es $\underline{y = a\ x^b}$

Podemos utilizar el método de interpolación de Lagrange o bien el de mínimos cuadrados.

Escogemos el de mínimos cuadrados, para hacer dicha aproximación de la función. Para facilitar los cálculos se hace una transformación a la función, como sigue:

$$
\begin{aligned}
\ln y &= \ln(a\ x^b) \\
&= \ln a + \ln(x^b) \\
&= \ln a + b \ln x
\end{aligned}
$$

Para transformarla en una ecuación de tipo lineal. Aplicando las ecuaciones normales para este método (la teoría se vió en el capítulo V.2) :

$$
\begin{aligned}
na \quad + b\Sigma &= \Sigma y \\
a\Sigma x + b\Sigma x^2 &= \Sigma xy
\end{aligned}
$$

=>

$$a = \frac{(\Sigma x^2)(\Sigma y) - (\Sigma x)(\Sigma xy)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$b = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

| x | y | lnx<br>X | lny<br>Y | lnxlny<br>XY | (lnx)<br>$X^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 21.2 | 264.4 | 3.05400 | 5.5774 | 17.0333 | 9.3269 |
| 26.5 | 396.8 | 3.27714 | 5.9834 | 19.6084 | 10.7396 |
| 32.9 | 594.5 | 3.49340 | 6.3877 | 22.3147 | 12.2038 |
| 40.4 | 878.7 | 3.69882 | 6.7784 | 25.0720 | 13.6812 |
| 42.5 | 970.6 | 3.74950 | 6.8779 | 25.7886 | 14.0587 |
| 45.7 | 1117.1 | 3.82209 | 7.0184 | 26.8249 | 14.6083 |
| 48.9 | 1274.2 | 3.88977 | 7.15 | 27.8188 | 15.1303 |
| 53.1 | 1500.2 | 3.97217 | 7.3133 | 29.0496 | 15.7781 |
| 55.3 | 1620.3 | 4.01277 | 7.3903 | 29.6555 | 16.1023 |
| Σ | | 32.9702 | 60.4768 | 223.1588 | 121.6292 |

$$a = \frac{(121.6292)(60.4768) - (32.9702)(223.1588)}{9(121.6292) - 1087.03}$$

$$a = 0.2425$$

$$b = \frac{9(223.1588) - (32.910234)(60.4768)}{9(121.6292) - (1087.03)}$$

$$b = 2$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\ln y = \ln(-.2425) + 2 \ln x$$

$$\ln y = \ln e^{-.2425} + \ln x^2$$

$$\ln y = \ln(.785x^2)$$

Y la ecuación queda: $y = .785\ x^2$

Ahora para obtener el punto de equilibrio, igualamos las dos ecuaciones: (no olvidando los costos fijos)

$$.785\ x^2 + 29 = 26.3\ x$$

$$-.785x^2 - 26.3x + 29 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado tenemos:

$$x = \frac{26.3 \pm \quad (26.3) - 4(-.785)(29)}{2(-.785)}$$

$x_1 = 41.365$

$x_2 = 11.235$

Para obtener la máxima utilidad (visto en el capitulo VII) necesitamos igualar la primer derivada de los Costos Totales (llamados Costos Marginales) con las Ventas Totales.

OBSERVACION: Nótese que no es necesario derivar la ecuación correspondiente a ventas totales, ya que es una recta.

$$R(x) = .785\ x + 29$$

$$C(x) = 26.3\ x$$

$$C'(x) = R(x)$$

$$.785\ x + 29 = 52.6\ x$$

$$.785\ x - 52.6\ x = -29$$

$$x(.785-52.6) = -29$$

$$x = 29/51.815$$

$$x = .559$$

Para demostrar que en ese punto existe un máximo, debemos probar que $R''(x) < C''(x)$

$$R'(x) = .785$$

$C'(x) = 52.6\ x$

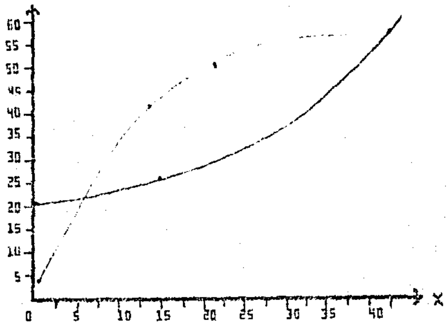
$R''(x) = 0 \qquad C''(x) = 52.6$

$0 < 52.6$ efecivamente hay un máximo.

CASO III.- En este tercer ejemplo se aplicará la técnica de interpolación de Lagrange, con el fin de mostrar las diferentes técnicas que se muestran en este trabajo.

| VENTAS TOTALES | | COSTOS TOTALES | |
|---|---|---|---|
| X | Y | X | Y |
| 1.14 | 3.08 | .07 | 22 |
| 14.04 | 40.63 | 15.11 | 26.57 |
| 20.93 | 50.09 | 41.97 | 57.24 |

Grafiquemos nuestras observaciones para ver su comportamiento:




Aqui la curva de costos y la de ventas presentan un comportamiento no lineal

figura VII.1

Utilizaremos el método de interpolación de Lagrange visto en el capitulo V.12 :

$$y = \frac{(x-14.04)(x-26.93)}{(1.14-19.04)(1.14-27.93)} 3.08 + \frac{(x-1.14)(x-26.93)}{(14.04-1.14)(14.04-26.93)} 40.63 +$$

$$\frac{(x-1.14)(x-14.04)}{(26.93-1.14)(26.93-14.04)} 50.09$$

Desarrollando se tiene:

$$y = .009x^2 - 3.79x + 3.5 - .244x^2 + 6.858x - 7.5 + .151x^2 - 2.287x + 2.41$$

$$y = -.084x^2 + 4.192x - 1.59$$

Que es la ecuación de los Costos Totales

Por otro lado haremos el mismo cálculo para el caso de las ventas totales:

$$y = \frac{(x-15.11)(x-41.97)}{(.07-15.11)(.07-41.97)} 22 + \frac{(x-.07)(x-41.97)}{(15.11-.07)(15.11-41.97)} 26.57 +$$

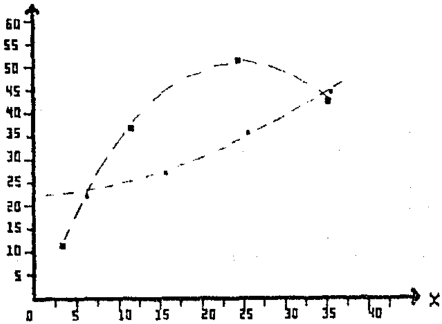
$$\frac{(x-.07)(x-15.11)}{(41.97-.07)(41.97-15.11)} 57.24$$

Desarrollando nos queda:

$$y = .035x^2 \; 1.995x \_ 22.139 - .066x^2 + 2.76x - .193 + .051x^2 - .772x + .054$$

$$y = .02x^2 - .005x + 22$$

Ya definidas las dos funciones (hay que tomar en cuenta que estas funciones son válidas solamente para el intervalo en el cual están definidos nuestras observaciones), se grafica y se vera donde se encuentran el (o los) punto(s) de equilibrio:




Para encontrar algebráicamente los puntos de equilibrio de dichas funciones, en el intervalo de nuestras observaciones, igualamos los costos totales a las ventas totales y enseguida nos dispondremos a resolver la ecuación resultante:

$$-.084x^2 + 4.192x - 1.59 = .02x^2 - .005x + 22$$

$$-.084x^2 - .02x^2 + 4.192x + .005x - 1.59 - 22 = 0$$

$$.104x^2 - 4.197x + 23.59 = 0$$

Como se trata de una ecuación de segundo grado, por medio de la fórmula general encontraremos las dos raíces (en nuestro caso se trata de los puntos de equilibrio que buscamos).

$$x = \frac{4.197 \pm (4.197) - 4(.104)(23.59)}{2(.104)}$$

$$= \frac{4.197 \pm 2.793}{.208}$$

$x_1$ = 6.99/.208 = 33.606 $x_2$= 1.404/.208 = 6.75

Sustituyendo en las funciones correspondientes tenemos los de $y$:

$y_1$= 44.4203 $y_2$= 22.8746

Lo cual quiere decir que, a un nivel inferior a las 7 unidades, tendremos pérdidas y lo mismo sucederá cuando rebasemos las 33 unidades; Asi mismo que dentro de este intervalo (6,33) tendremos un área de utilidad.

Seguramente que nos interesamos en conocer cuál va a ser la máxima ganancia dentro de este intervalo. Utilizando los elementos vistos en el capítulo VII resolveremos:

Se van a obtener los costos marginales (que implica sacar la primer derivada de las funciones en cuestión).

$R(x) = -.084x^2 + 4.192x - 1.59$

$R'(x) = 2(-.084)x + 4.192$

$= -.168x \_ 4.192$

$C(x) = .02x^2 - .05x + 22$

$C'(x) = 2(.02)x - .005$

$= .04x - .005$

Para encontrar el punto donde se encuentra la máxima utilidad hacemos $R'(x) = C'(x)$

$$-.168x + 4.192 = .04x - .005$$

$$-.168x - .04x + 4.192 + .005 = 0$$

$$-.208x + 4.197 = 0$$

$$x = 4.197/.208$$

$$x = 20.1779$$

Para demostrar que se trata de un valor máximo, debemos probar que $R''(x) < C''(x)$.

Obteniendo la segunda derivada de cada una de las funciones obtenemos que:

$$R'(x) = -.168x + 4.192$$

$$R''(x) = -.168$$

$$P'(x) = .04x - .005$$

$$P''(x) = .04$$

$$\therefore \quad -.168 < .04$$

lo cual demuestra que existe un máximo. Entonces obtendremos la máxima utilidad cuando se produzcan entre 20 y 21 unidades.

# IX. CONCLUSIONES

Como se ha podido observar a lo largo de este trabajo el Punto de Equilibrio tiene una importancia relevante, en la toma de decisiones para la Planeación en una empresa, como medida de control y ayuda a detectar pérdidas que lleven a un posible desequilibrio económico de la empresa.

La solución que se ha propuesto para encontrar el "punto de equilibrio" permite aplicar modelos matemáticos, prácticos para la resolución del problema a tratar.

Es posible ajustar modelos (lineales y no lineales) tanto a los costos como a las ventas (observaciones) de manera que ya establecidos se pueda determinar "el punto de equilibrio".

Es importante recalcar que siempre que se tengan un conjunto de observaciones se deben realizar diagramas de dispersión para que se tenga una idea más precisa de la función que se desea aplicar; que entre menos datos tengamos, nuestras aproximaciones no serán del todo adecuadas. Así mismo cuando se trabaje el modelo lineal siempre se sugerirá que se aplique el análisis de regresión con el fin de poder cersiorarse si nuestras hipótesis tienen un porcentaje de apoyo.

En el caso de las interpolaciones no lineales, el poder establecer un "comportamiento" de antemano, dificulta en gran medida la aplicación de dicho algoritmo; pero la experiencia ha dado ciertas pautas a seguir (que fué el tema tratado en el capítulo V.11) para aplicar reglas sencillas que nos orienten a determinar un comportamiento funcional.

Por último se analizó un algoritmo que se sugiere utilizar en caso de no ajustar ninguna de las técnicas vistas en los capítulos anteriores; con el fin de dar otra alternativa a la solución de dicho problema.

## X - APENDICE

Distribución normal:

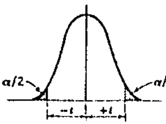
**NORMAL DISTRIBUTION** (single-sided)
Proportion ($A$) of whole area lying to right of ordinate through $x = \mu + z\sigma$

$[z = (x - \mu)/\sigma]$

| Deviate ($z$) | Prefix | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 | Prefix | Deviate ($z$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5 | 000 | 960 | 920 | 880 | 840 | 801 | 761 | 721 | 681 | 641 | 0.4 | 0.0 |
| 0.1 | 0.4 | 602 | 562 | 522 | 483 | 443 | 404 | 364 | 325 | 286 | 247 | 0.4 | 0.1 |
| 0.2 | 0.4 | 207 | 168 | 129 | 090 | 052 | 013 | 974 | 936 | 897 | 859 | 0.3 | 0.2 |
| 0.3 | 0.3 | 821 | 783 | 745 | 707 | 669 | 632 | 594 | 557 | 520 | 483 | | 0.3 |
| 0.4 | | 446 | 409 | 372 | 336 | 300 | 264 | 228 | 192 | 156 | 121 | 0.3 | 0.4 |
| 0.5 | 0.3 | 085 | 050 | 015 | 981 | 946 | 912 | 877 | 843 | 810 | 776 | 0.2 | 0.5 |
| 0.6 | 0.2 | 743 | 709 | 676 | 643 | 611 | 578 | 546 | 514 | 483 | 451 | | 0.6 |
| 0.7 | | 420 | 389 | 358 | 327 | 296 | 266 | 236 | 206 | 177 | 148 | 0.2 | 0.7 |
| 0.8 | 0.2 | 119 | 090 | 061 | 033 | 005 | 977 | 949 | 922 | 894 | 867 | 0.1 | 0.8 |
| 0.9 | 0.1 | 841 | 814 | 788 | 762 | 736 | 711 | 685 | 660 | 635 | 611 | | 0.9 |
| 1.0 | | 587 | 562 | 539 | 515 | 492 | 469 | 446 | 423 | 401 | 379 | | 1.0 |
| 1.1 | | 357 | 335 | 314 | 292 | 271 | 251 | 230 | 210 | 190 | 170 | 0.1 | 1.1 |
| 1.2 | 0.1 | 151 | 131 | 112 | 093 | 075 | 056 | 038 | 020 | 003 | 985 | 0.0 | 1.2 |
| 1.3 | 0.0 | 968 | 951 | 934 | 918 | 901 | 885 | 869 | 853 | 838 | 823 | | 1.3 |
| 1.4 | | 808 | 793 | 778 | 764 | 749 | 735 | 721 | 708 | 694 | 681 | | 1.4 |
| 1.5 | | 668 | 655 | 643 | 630 | 618 | 606 | 594 | 582 | 571 | 559 | | 1.5 |
| 1.6 | | 548 | 537 | 526 | 516 | 505 | 495 | 485 | 475 | 465 | 455 | | 1.6 |
| 1.7 | | 446 | 436 | 427 | 418 | 409 | 401 | 392 | 384 | 375 | 367 | | 1.7 |
| 1.8 | | 359 | 351 | 344 | 336 | 329 | 322 | 314 | 307 | 301 | 294 | | 1.8 |
| 1.9 | | 287 | 281 | 274 | 268 | 262 | 256 | 250 | 244 | 239 | 233 | | 1.9 |
| 2.0 | | 228 | 222 | 217 | 212 | 207 | 202 | 197 | 192 | 188 | 183 | | 2.0 |
| 2.1 | | 179 | 174 | 170 | 166 | 162 | 158 | 154 | 150 | 146 | 143 | | 2.1 |
| 2.2 | | 139 | 136 | 132 | 129 | 125 | 122 | 119 | 116 | 113 | 110 | 0.0 | 2.2 |
| 2.3 | 0.0 | 107 | 104 | 102 | 990 | 964 | 939 | 914 | 889 | 866 | 842 | 0.00 | 2.3 |
| 2.4 | 0.00 | 820 | 798 | 776 | 755 | 734 | 714 | 695 | 676 | 657 | 639 | | 2.4 |
| 2.5 | | 621 | 604 | 587 | 570 | 554 | 539 | 523 | 508 | 494 | 480 | | 2.5 |
| 2.6 | | 466 | 453 | 440 | 427 | 415 | 402 | 391 | 379 | 368 | 357 | | 2.6 |
| 2.7 | | 347 | 336 | 326 | 317 | 307 | 298 | 289 | 280 | 272 | 264 | | 2.7 |
| 2.8 | | 256 | 248 | 240 | 233 | 226 | 219 | 212 | 205 | 199 | 193 | | 2.8 |
| 2.9 | 0.00 | 187 | 181 | 175 | 169 | 164 | 159 | 154 | 149 | 144 | 139 | 0.00 | 2.9 |

Adapted with permission from O. L. Davies, ed., *The Design and Analysis of Industrial Experiments*, 2nd ed., Oliver and Boyd, Edinburgh, 1956, condensed and adapted with permission from E. S. Pearson and H. O. Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1, Cambridge University Press, New York, 1954.

Distribución t:




Distribution of t

"Probability = Area in Two Tails of Distribution Outside ±t-Value in Table"

| Degrees of Freedom | Probability 0.9 | 0.7 | 0.5 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0.05 | 0.02 | 0.01 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.158 | 0.510 | 1.000 | 1.963 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 636.619 |
| 2 | 0.142 | 0.445 | 0.816 | 1.386 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 31.598 |
| 3 | 0.137 | 0.424 | 0.765 | 1.250 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 12.924 |
| 4 | 0.134 | 0.414 | 0.741 | 1.190 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 8.610 |
| 5 | 0.132 | 0.408 | 0.727 | 1.156 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 6.869 |
| 6 | 0.131 | 0.404 | 0.718 | 1.134 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 5.959 |
| 7 | 0.130 | 0.402 | 0.711 | 1.119 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 5.408 |
| 8 | 0.130 | 0.399 | 0.706 | 1.108 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 5.041 |
| 9 | 0.129 | 0.398 | 0.703 | 1.100 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 4.781 |
| 10 | 0.129 | 0.397 | 0.700 | 1.093 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 4.587 |
| 11 | 0.129 | 0.396 | 0.697 | 1.088 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 4.437 |
| 12 | 0.128 | 0.395 | 0.695 | 1.083 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 4.318 |
| 13 | 0.128 | 0.394 | 0.694 | 1.079 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 4.221 |
| 14 | 0.128 | 0.393 | 0.692 | 1.076 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 4.140 |
| 15 | 0.128 | 0.393 | 0.691 | 1.074 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 4.073 |
| 16 | 0.128 | 0.392 | 0.690 | 1.071 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 4.015 |
| 17 | 0.128 | 0.392 | 0.689 | 1.069 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.965 |
| 18 | 0.127 | 0.392 | 0.688 | 1.067 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.922 |
| 19 | 0.127 | 0.391 | 0.688 | 1.066 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.883 |
| 20 | 0.127 | 0.391 | 0.687 | 1.064 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.850 |
| 21 | 0.127 | 0.391 | 0.686 | 1.063 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.819 |
| 22 | 0.127 | 0.390 | 0.686 | 1.061 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.792 |
| 23 | 0.127 | 0.390 | 0.685 | 1.060 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.767 |
| 24 | 0.127 | 0.390 | 0.685 | 1.059 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.745 |
| 25 | 0.127 | 0.390 | 0.684 | 1.058 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.725 |
| 26 | 0.127 | 0.390 | 0.684 | 1.058 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.707 |
| 27 | 0.127 | 0.389 | 0.684 | 1.057 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.690 |
| 28 | 0.127 | 0.389 | 0.683 | 1.056 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.674 |
| 29 | 0.127 | 0.389 | 0.683 | 1.055 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.659 |
| 30 | 0.127 | 0.389 | 0.683 | 1.055 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.646 |
| 40 | 0.126 | 0.388 | 0.681 | 1.050 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 3.551 |
| 60 | 0.126 | 0.387 | 0.679 | 1.046 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 | 3.460 |
| 120 | 0.126 | 0.386 | 0.677 | 1.041 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 | 3.373 |
| ∞ | 0.126 | 0.385 | 0.674 | 1.036 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 3.291 |

Abridged from Table III of Fisher and Yates *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research* published by Oliver and Boyd, Ltd., Edinburgh, by permission of the authors and publishers.

Distribución F (1%):

| $\nu_2$ \ $\nu_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4052 | 4999.5 | 5403 | 5625 | 5764 | 5859 | 5928 | 5982 | 6022 | 6056 | 6106 | 6157 | 6209 | 6235 | 6261 | 6287 | 6313 | 6339 | 6366 |
| 2 | 98.50 | 99.00 | 99.17 | 99.25 | 99.30 | 99.33 | 99.36 | 99.37 | 99.39 | 99.40 | 99.42 | 99.43 | 99.45 | 99.46 | 99.47 | 99.47 | 99.48 | 99.49 | 99.50 |
| 3 | 34.12 | 30.82 | 29.46 | 28.71 | 28.24 | 27.91 | 27.67 | 27.49 | 27.35 | 27.23 | 27.05 | 26.87 | 26.69 | 26.60 | 26.50 | 26.41 | 26.32 | 26.22 | 26.13 |
| 4 | 21.20 | 18.00 | 16.69 | 15.98 | 15.52 | 15.21 | 14.98 | 14.80 | 14.66 | 14.55 | 14.37 | 14.20 | 14.02 | 13.93 | 13.84 | 13.75 | 13.65 | 13.56 | 13.46 |
| 5 | 16.26 | 13.27 | 12.06 | 11.39 | 10.97 | 10.67 | 10.46 | 10.29 | 10.16 | 10.05 | 9.89 | 9.72 | 9.55 | 9.47 | 9.38 | 9.29 | 9.20 | 9.11 | 9.02 |
| 6 | 13.75 | 10.92 | 9.78 | 9.15 | 8.75 | 8.47 | 8.26 | 8.10 | 7.98 | 7.87 | 7.72 | 7.56 | 7.40 | 7.31 | 7.23 | 7.14 | 7.06 | 6.97 | 6.88 |
| 7 | 12.25 | 9.55 | 8.45 | 7.85 | 7.46 | 7.19 | 6.99 | 6.84 | 6.72 | 6.62 | 6.47 | 6.31 | 6.16 | 6.07 | 5.99 | 5.91 | 5.82 | 5.74 | 5.65 |
| 8 | 11.26 | 8.65 | 7.59 | 7.01 | 6.63 | 6.37 | 6.18 | 6.03 | 5.91 | 5.81 | 5.67 | 5.52 | 5.36 | 5.28 | 5.20 | 5.12 | 5.03 | 4.95 | 4.86 |
| 9 | 10.56 | 8.02 | 6.99 | 6.42 | 6.06 | 5.80 | 5.61 | 5.47 | 5.35 | 5.26 | 5.11 | 4.96 | 4.81 | 4.73 | 4.65 | 4.57 | 4.48 | 4.40 | 4.31 |
| 10 | 10.04 | 7.56 | 6.55 | 5.99 | 5.64 | 5.39 | 5.20 | 5.06 | 4.94 | 4.85 | 4.71 | 4.56 | 4.41 | 4.33 | 4.25 | 4.17 | 4.08 | 4.00 | 3.91 |
| 11 | 9.65 | 7.21 | 6.22 | 5.67 | 5.32 | 5.07 | 4.89 | 4.74 | 4.63 | 4.54 | 4.40 | 4.25 | 4.10 | 4.02 | 3.94 | 3.86 | 3.78 | 3.69 | 3.60 |
| 12 | 9.33 | 6.93 | 5.95 | 5.41 | 5.06 | 4.82 | 4.64 | 4.50 | 4.39 | 4.30 | 4.16 | 4.01 | 3.86 | 3.78 | 3.70 | 3.62 | 3.54 | 3.45 | 3.36 |
| 13 | 9.07 | 6.70 | 5.74 | 5.21 | 4.86 | 4.62 | 4.44 | 4.30 | 4.19 | 4.10 | 3.96 | 3.82 | 3.66 | 3.59 | 3.51 | 3.43 | 3.34 | 3.25 | 3.17 |
| 14 | 8.86 | 6.51 | 5.56 | 5.04 | 4.69 | 4.46 | 4.28 | 4.14 | 4.03 | 3.94 | 3.80 | 3.66 | 3.51 | 3.43 | 3.35 | 3.27 | 3.18 | 3.09 | 3.00 |
| 15 | 8.68 | 6.36 | 5.42 | 4.89 | 4.56 | 4.32 | 4.14 | 4.00 | 3.89 | 3.80 | 3.67 | 3.52 | 3.37 | 3.29 | 3.21 | 3.13 | 3.05 | 2.96 | 2.87 |
| 16 | 8.53 | 6.23 | 5.29 | 4.77 | 4.44 | 4.20 | 4.03 | 3.89 | 3.78 | 3.69 | 3.55 | 3.41 | 3.26 | 3.18 | 3.10 | 3.02 | 2.93 | 2.84 | 2.75 |
| 17 | 8.40 | 6.11 | 5.18 | 4.67 | 4.34 | 4.10 | 3.93 | 3.79 | 3.68 | 3.59 | 3.46 | 3.31 | 3.16 | 3.08 | 3.00 | 2.92 | 2.83 | 2.75 | 2.65 |
| 18 | 8.29 | 6.01 | 5.09 | 4.58 | 4.25 | 4.01 | 3.84 | 3.71 | 3.60 | 3.51 | 3.37 | 3.21 | 3.08 | 3.00 | 2.92 | 2.84 | 2.75 | 2.66 | 2.57 |
| 19 | 8.18 | 5.93 | 5.01 | 4.50 | 4.17 | 3.94 | 3.77 | 3.63 | 3.52 | 3.43 | 3.30 | 3.15 | 3.00 | 2.92 | 2.84 | 2.76 | 2.67 | 2.58 | 2.49 |
| 20 | 8.10 | 5.85 | 4.94 | 4.43 | 4.10 | 3.87 | 3.70 | 3.56 | 3.46 | 3.37 | 3.23 | 3.09 | 2.94 | 2.86 | 2.78 | 2.69 | 2.61 | 2.52 | 2.42 |
| 21 | 8.02 | 5.78 | 4.87 | 4.37 | 4.04 | 3.81 | 3.64 | 3.51 | 3.40 | 3.31 | 3.17 | 3.03 | 2.88 | 2.80 | 2.72 | 2.64 | 2.55 | 2.46 | 2.36 |
| 22 | 7.95 | 5.72 | 4.82 | 4.31 | 3.99 | 3.76 | 3.59 | 3.45 | 3.35 | 3.26 | 3.12 | 2.98 | 2.83 | 2.75 | 2.67 | 2.58 | 2.50 | 2.40 | 2.31 |
| 23 | 7.88 | 5.66 | 4.76 | 4.26 | 3.94 | 3.71 | 3.54 | 3.41 | 3.30 | 3.21 | 3.07 | 2.93 | 2.78 | 2.70 | 2.62 | 2.54 | 2.45 | 2.35 | 2.26 |
| 24 | 7.82 | 5.61 | 4.72 | 4.22 | 3.90 | 3.67 | 3.50 | 3.36 | 3.26 | 3.17 | 3.03 | 2.89 | 2.74 | 2.66 | 2.58 | 2.49 | 2.40 | 2.31 | 2.21 |
| 25 | 7.77 | 5.57 | 4.68 | 4.18 | 3.85 | 3.63 | 3.46 | 3.32 | 3.22 | 3.13 | 2.99 | 2.85 | 2.70 | 2.62 | 2.54 | 2.45 | 2.36 | 2.27 | 2.17 |
| 26 | 7.72 | 5.53 | 4.64 | 4.14 | 3.82 | 3.59 | 3.42 | 3.29 | 3.18 | 3.09 | 2.96 | 2.81 | 2.66 | 2.58 | 2.50 | 2.42 | 2.33 | 2.23 | 2.13 |
| 27 | 7.68 | 5.49 | 4.60 | 4.11 | 3.78 | 3.56 | 3.39 | 3.26 | 3.15 | 3.06 | 2.93 | 2.78 | 2.63 | 2.55 | 2.47 | 2.38 | 2.29 | 2.20 | 2.10 |
| 28 | 7.64 | 5.45 | 4.57 | 4.07 | 3.75 | 3.53 | 3.36 | 3.23 | 3.12 | 3.03 | 2.90 | 2.75 | 2.60 | 2.52 | 2.44 | 2.35 | 2.26 | 2.17 | 2.06 |
| 29 | 7.60 | 5.42 | 4.54 | 4.04 | 3.73 | 3.50 | 3.33 | 3.20 | 3.09 | 3.00 | 2.87 | 2.73 | 2.57 | 2.49 | 2.41 | 2.33 | 2.23 | 2.14 | 2.03 |
| 30 | 7.56 | 5.39 | 4.51 | 4.02 | 3.70 | 3.47 | 3.30 | 3.17 | 3.07 | 2.98 | 2.84 | 2.70 | 2.55 | 2.47 | 2.39 | 2.30 | 2.21 | 2.11 | 2.01 |
| 40 | 7.31 | 5.18 | 4.31 | 3.83 | 3.51 | 3.29 | 3.12 | 2.99 | 2.89 | 2.80 | 2.66 | 2.52 | 2.37 | 2.29 | 2.20 | 2.11 | 2.02 | 1.92 | 1.80 |
| 60 | 7.08 | 4.98 | 4.13 | 3.65 | 3.34 | 3.12 | 2.95 | 2.82 | 2.72 | 2.63 | 2.50 | 2.35 | 2.20 | 2.12 | 2.03 | 1.94 | 1.84 | 1.73 | 1.60 |
| 120 | 6.85 | 4.79 | 3.95 | 3.48 | 3.17 | 2.96 | 2.79 | 2.66 | 2.56 | 2.47 | 2.34 | 2.19 | 2.03 | 1.95 | 1.86 | 1.76 | 1.66 | 1.53 | 1.38 |
| ∞ | 6.63 | 4.61 | 3.78 | 3.32 | 3.02 | 2.80 | 2.64 | 2.51 | 2.41 | 2.32 | 2.18 | 2.04 | 1.88 | 1.79 | 1.70 | 1.59 | 1.47 | 1.32 | 1.00 |

Reproduced with permission from E. S. Pearson and H. O. Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1, Cambridge University Press, New York, 1954

Distribución F (5%):

*F*-Distribution, Upper 5% Points [$F(\nu_1, \nu_2, 0.95)$]

Degrees of Freedom for Numerator

5%

| $\nu_2 \backslash \nu_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 161.4 | 199.5 | 215.7 | 224.6 | 230.2 | 234.0 | 236.8 | 238.9 | 240.5 | 241.9 | 243.9 | 245.9 | 248.0 | 249.1 | 250.1 | 251.1 | 252.2 | 253.3 | 254.3 |
| 2 | 18.51 | 19.00 | 19.16 | 19.25 | 19.30 | 19.33 | 19.35 | 19.37 | 19.38 | 19.40 | 19.41 | 19.43 | 19.45 | 19.45 | 19.46 | 19.47 | 19.48 | 19.49 | 19.50 |
| 3 | 10.13 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 | 8.79 | 8.74 | 8.70 | 8.66 | 8.64 | 8.62 | 8.59 | 8.57 | 8.55 | 8.53 |
| 4 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 | 5.96 | 5.91 | 5.86 | 5.80 | 5.77 | 5.75 | 5.72 | 5.69 | 5.66 | 5.63 |
| 5 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 | 4.74 | 4.68 | 4.62 | 4.56 | 4.53 | 4.50 | 4.46 | 4.43 | 4.40 | 4.36 |
| 6 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 | 4.06 | 4.00 | 3.94 | 3.87 | 3.84 | 3.81 | 3.77 | 3.74 | 3.70 | 3.67 |
| 7 | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 | 3.64 | 3.57 | 3.51 | 3.44 | 3.41 | 3.38 | 3.34 | 3.30 | 3.27 | 3.23 |
| 8 | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 | 3.35 | 3.28 | 3.22 | 3.15 | 3.12 | 3.08 | 3.04 | 3.01 | 2.97 | 2.93 |
| 9 | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 | 3.14 | 3.07 | 3.01 | 2.94 | 2.90 | 2.86 | 2.83 | 2.79 | 2.75 | 2.71 |
| 10 | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 | 2.98 | 2.91 | 2.85 | 2.77 | 2.74 | 2.70 | 2.66 | 2.62 | 2.58 | 2.54 |
| 11 | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.36 | 3.20 | 3.09 | 3.01 | 2.95 | 2.90 | 2.85 | 2.79 | 2.72 | 2.65 | 2.61 | 2.57 | 2.53 | 2.49 | 2.45 | 2.40 |
| 12 | 4.75 | 3.89 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.91 | 2.85 | 2.80 | 2.75 | 2.69 | 2.62 | 2.54 | 2.51 | 2.47 | 2.43 | 2.38 | 2.34 | 2.30 |
| 13 | 4.67 | 3.81 | 3.41 | 3.18 | 3.03 | 2.92 | 2.83 | 2.77 | 2.71 | 2.67 | 2.60 | 2.53 | 2.46 | 2.42 | 2.38 | 2.34 | 2.30 | 2.25 | 2.21 |
| 14 | 4.60 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.76 | 2.70 | 2.65 | 2.60 | 2.53 | 2.46 | 2.39 | 2.35 | 2.31 | 2.27 | 2.22 | 2.18 | 2.13 |
| 15 | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 | 2.54 | 2.48 | 2.40 | 2.33 | 2.29 | 2.25 | 2.20 | 2.16 | 2.11 | 2.07 |
| 16 | 4.49 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 | 2.49 | 2.42 | 2.35 | 2.28 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.06 | 2.01 |
| 17 | 4.45 | 3.59 | 3.20 | 2.96 | 2.81 | 2.70 | 2.61 | 2.55 | 2.49 | 2.45 | 2.38 | 2.31 | 2.23 | 2.19 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.01 | 1.96 |
| 18 | 4.41 | 3.55 | 3.16 | 2.93 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 | 2.41 | 2.34 | 2.27 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.97 | 1.92 |
| 19 | 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.63 | 2.54 | 2.48 | 2.42 | 2.38 | 2.31 | 2.23 | 2.16 | 2.11 | 2.07 | 2.03 | 1.98 | 1.93 | 1.88 |
| 20 | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.35 | 2.28 | 2.20 | 2.12 | 2.08 | 2.04 | 1.99 | 1.95 | 1.90 | 1.84 |
| 21 | 4.32 | 3.47 | 3.07 | 2.84 | 2.68 | 2.57 | 2.49 | 2.42 | 2.37 | 2.32 | 2.25 | 2.18 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.87 | 1.81 |
| 22 | 4.30 | 3.44 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.46 | 2.40 | 2.34 | 2.30 | 2.23 | 2.15 | 2.07 | 2.03 | 1.98 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.78 |
| 23 | 4.28 | 3.42 | 3.03 | 2.80 | 2.64 | 2.53 | 2.44 | 2.37 | 2.32 | 2.27 | 2.20 | 2.13 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.91 | 1.86 | 1.81 | 1.76 |
| 24 | 4.26 | 3.40 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.51 | 2.42 | 2.36 | 2.30 | 2.25 | 2.18 | 2.11 | 2.03 | 1.98 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.73 |
| 25 | 4.24 | 3.39 | 2.99 | 2.76 | 2.60 | 2.49 | 2.40 | 2.34 | 2.28 | 2.24 | 2.16 | 2.09 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.71 |
| 26 | 4.23 | 3.37 | 2.98 | 2.74 | 2.59 | 2.47 | 2.39 | 2.32 | 2.27 | 2.22 | 2.15 | 2.07 | 1.99 | 1.95 | 1.90 | 1.85 | 1.80 | 1.75 | 1.69 |
| 27 | 4.21 | 3.35 | 2.96 | 2.73 | 2.57 | 2.46 | 2.37 | 2.31 | 2.25 | 2.20 | 2.13 | 2.06 | 1.97 | 1.93 | 1.88 | 1.84 | 1.79 | 1.73 | 1.67 |
| 28 | 4.20 | 3.34 | 2.95 | 2.71 | 2.56 | 2.45 | 2.36 | 2.29 | 2.24 | 2.19 | 2.12 | 2.04 | 1.96 | 1.91 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.71 | 1.65 |
| 29 | 4.18 | 3.33 | 2.93 | 2.70 | 2.55 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.22 | 2.18 | 2.10 | 2.03 | 1.94 | 1.90 | 1.85 | 1.81 | 1.75 | 1.70 | 1.64 |
| 30 | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.16 | 2.09 | 2.01 | 1.93 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.68 | 1.62 |
| 40 | 4.08 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.12 | 2.08 | 2.00 | 1.92 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.69 | 1.64 | 1.58 | 1.51 |
| 60 | 4.00 | 3.15 | 2.76 | 2.53 | 2.37 | 2.25 | 2.17 | 2.10 | 2.04 | 1.99 | 1.92 | 1.84 | 1.75 | 1.70 | 1.65 | 1.59 | 1.53 | 1.47 | 1.39 |
| 120 | 3.92 | 3.07 | 2.68 | 2.45 | 2.29 | 2.17 | 2.09 | 2.02 | 1.96 | 1.91 | 1.83 | 1.75 | 1.66 | 1.61 | 1.55 | 1.50 | 1.43 | 1.35 | 1.25 |
| ∞ | 3.84 | 3.00 | 2.60 | 2.37 | 2.21 | 2.10 | 2.01 | 1.94 | 1.88 | 1.83 | 1.75 | 1.67 | 1.57 | 1.52 | 1.46 | 1.39 | 1.32 | 1.22 | 1.00 |

Reproduced with permission from E. S. Pearson and H. O. Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1, Cambridge University Press, New [illegible]

Distribución F (10%):

F-Distribution, Upper 10% Points ($F_{(\nu_1, \nu_2, 0.90)}$)
Degrees of Freedom for Numerator

10%

| $\nu_2$ \ $\nu_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 39.86 | 49.50 | 53.59 | 55.83 | 57.24 | 58.20 | 58.91 | 59.44 | 59.86 | 60.19 | 60.71 | 61.22 | 61.74 | 62.00 | 62.26 | 62.53 | 62.79 | 63.06 | 63.33 |
| 2 | 8.53 | 9.00 | 9.16 | 9.24 | 9.29 | 9.33 | 9.35 | 9.37 | 9.38 | 9.39 | 9.41 | 9.42 | 9.44 | 9.45 | 9.46 | 9.47 | 9.47 | 9.48 | 9.49 |
| 3 | 5.54 | 5.46 | 5.39 | 5.34 | 5.31 | 5.28 | 5.27 | 5.25 | 5.24 | 5.23 | 5.22 | 5.20 | 5.18 | 5.18 | 5.17 | 5.16 | 5.15 | 5.14 | 5.13 |
| 4 | 4.54 | 4.32 | 4.19 | 4.11 | 4.05 | 4.01 | 3.98 | 3.95 | 3.94 | 3.92 | 3.90 | 3.87 | 3.84 | 3.83 | 3.82 | 3.80 | 3.79 | 3.78 | 3.76 |
| 5 | 4.06 | 3.78 | 3.62 | 3.52 | 3.45 | 3.40 | 3.37 | 3.34 | 3.32 | 3.30 | 3.27 | 3.24 | 3.21 | 3.19 | 3.17 | 3.16 | 3.14 | 3.12 | 3.10 |
| 6 | 3.78 | 3.46 | 3.29 | 3.18 | 3.11 | 3.05 | 3.01 | 2.98 | 2.96 | 2.94 | 2.90 | 2.87 | 2.84 | 2.82 | 2.80 | 2.78 | 2.76 | 2.74 | 2.72 |
| 7 | 3.59 | 3.26 | 3.07 | 2.96 | 2.88 | 2.83 | 2.78 | 2.75 | 2.72 | 2.70 | 2.67 | 2.63 | 2.59 | 2.58 | 2.56 | 2.54 | 2.51 | 2.49 | 2.47 |
| 8 | 3.46 | 3.11 | 2.92 | 2.81 | 2.73 | 2.67 | 2.62 | 2.59 | 2.56 | 2.54 | 2.50 | 2.46 | 2.42 | 2.40 | 2.38 | 2.36 | 2.34 | 2.32 | 2.29 |
| 9 | 3.36 | 3.01 | 2.81 | 2.69 | 2.61 | 2.55 | 2.51 | 2.47 | 2.44 | 2.42 | 2.38 | 2.34 | 2.30 | 2.28 | 2.25 | 2.23 | 2.21 | 2.18 | 2.16 |
| 10 | 3.29 | 2.92 | 2.73 | 2.61 | 2.52 | 2.46 | 2.41 | 2.38 | 2.35 | 2.32 | 2.28 | 2.24 | 2.20 | 2.18 | 2.16 | 2.13 | 2.11 | 2.08 | 2.06 |
| 11 | 3.23 | 2.86 | 2.66 | 2.54 | 2.45 | 2.39 | 2.34 | 2.30 | 2.27 | 2.25 | 2.21 | 2.17 | 2.12 | 2.10 | 2.08 | 2.05 | 2.03 | 2.00 | 1.97 |
| 12 | 3.18 | 2.81 | 2.61 | 2.48 | 2.39 | 2.33 | 2.28 | 2.24 | 2.21 | 2.19 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.04 | 2.01 | 1.99 | 1.96 | 1.93 | 1.90 |
| 13 | 3.14 | 2.76 | 2.56 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.23 | 2.20 | 2.16 | 2.14 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.98 | 1.96 | 1.93 | 1.90 | 1.88 | 1.85 |
| 14 | 3.10 | 2.73 | 2.52 | 2.39 | 2.31 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.12 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.94 | 1.91 | 1.89 | 1.86 | 1.83 | 1.80 |
| 15 | 3.07 | 2.70 | 2.49 | 2.36 | 2.27 | 2.21 | 2.16 | 2.12 | 2.09 | 2.06 | 2.02 | 1.97 | 1.92 | 1.90 | 1.87 | 1.85 | 1.82 | 1.79 | 1.76 |
| 16 | 3.05 | 2.67 | 2.46 | 2.33 | 2.24 | 2.18 | 2.13 | 2.09 | 2.06 | 2.03 | 1.99 | 1.94 | 1.89 | 1.87 | 1.84 | 1.81 | 1.78 | 1.75 | 1.72 |
| 17 | 3.03 | 2.64 | 2.44 | 2.31 | 2.22 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.03 | 2.00 | 1.96 | 1.91 | 1.86 | 1.84 | 1.81 | 1.78 | 1.75 | 1.72 | 1.69 |
| 18 | 3.01 | 2.62 | 2.42 | 2.29 | 2.20 | 2.13 | 2.08 | 2.04 | 2.00 | 1.98 | 1.93 | 1.89 | 1.84 | 1.81 | 1.78 | 1.75 | 1.72 | 1.69 | 1.66 |
| 19 | 2.99 | 2.61 | 2.40 | 2.27 | 2.17 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.98 | 1.96 | 1.91 | 1.86 | 1.81 | 1.79 | 1.76 | 1.73 | 1.70 | 1.67 | 1.63 |
| 20 | 2.97 | 2.59 | 2.38 | 2.25 | 2.16 | 2.09 | 2.04 | 2.00 | 1.96 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.77 | 1.74 | 1.71 | 1.68 | 1.64 | 1.61 |
| 21 | 2.96 | 2.57 | 2.36 | 2.23 | 2.14 | 2.08 | 2.02 | 1.98 | 1.95 | 1.92 | 1.87 | 1.83 | 1.78 | 1.75 | 1.72 | 1.69 | 1.66 | 1.62 | 1.59 |
| 22 | 2.95 | 2.56 | 2.35 | 2.22 | 2.13 | 2.06 | 2.01 | 1.97 | 1.93 | 1.90 | 1.86 | 1.81 | 1.76 | 1.73 | 1.70 | 1.67 | 1.64 | 1.60 | 1.57 |
| 23 | 2.94 | 2.55 | 2.34 | 2.21 | 2.11 | 2.05 | 1.99 | 1.95 | 1.92 | 1.89 | 1.84 | 1.80 | 1.74 | 1.72 | 1.69 | 1.66 | 1.62 | 1.59 | 1.55 |
| 24 | 2.93 | 2.54 | 2.33 | 2.19 | 2.10 | 2.04 | 1.98 | 1.94 | 1.91 | 1.88 | 1.83 | 1.78 | 1.73 | 1.70 | 1.67 | 1.64 | 1.61 | 1.57 | 1.53 |
| 25 | 2.92 | 2.53 | 2.32 | 2.18 | 2.09 | 2.02 | 1.97 | 1.93 | 1.89 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.72 | 1.69 | 1.66 | 1.63 | 1.59 | 1.56 | 1.52 |
| 26 | 2.91 | 2.52 | 2.31 | 2.17 | 2.08 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.88 | 1.86 | 1.81 | 1.76 | 1.71 | 1.68 | 1.65 | 1.61 | 1.58 | 1.54 | 1.50 |
| 27 | 2.90 | 2.51 | 2.30 | 2.17 | 2.07 | 2.00 | 1.95 | 1.91 | 1.87 | 1.85 | 1.80 | 1.75 | 1.70 | 1.67 | 1.64 | 1.60 | 1.57 | 1.53 | 1.49 |
| 28 | 2.89 | 2.50 | 2.29 | 2.16 | 2.06 | 2.00 | 1.94 | 1.90 | 1.87 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.69 | 1.66 | 1.63 | 1.59 | 1.56 | 1.52 | 1.48 |
| 29 | 2.89 | 2.50 | 2.28 | 2.15 | 2.06 | 1.99 | 1.93 | 1.89 | 1.86 | 1.83 | 1.78 | 1.73 | 1.68 | 1.65 | 1.62 | 1.58 | 1.55 | 1.51 | 1.47 |
| 30 | 2.88 | 2.49 | 2.28 | 2.14 | 2.05 | 1.98 | 1.93 | 1.88 | 1.85 | 1.82 | 1.77 | 1.72 | 1.67 | 1.64 | 1.61 | 1.57 | 1.54 | 1.50 | 1.46 |
| 40 | 2.84 | 2.44 | 2.23 | 2.09 | 2.00 | 1.93 | 1.87 | 1.83 | 1.79 | 1.76 | 1.71 | 1.66 | 1.61 | 1.57 | 1.54 | 1.51 | 1.47 | 1.42 | 1.38 |
| 60 | 2.79 | 2.39 | 2.18 | 2.04 | 1.95 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.74 | 1.71 | 1.66 | 1.60 | 1.54 | 1.51 | 1.48 | 1.44 | 1.40 | 1.35 | 1.29 |
| 120 | 2.75 | 2.35 | 2.13 | 1.99 | 1.90 | 1.82 | 1.77 | 1.72 | 1.68 | 1.65 | 1.60 | 1.55 | 1.48 | 1.45 | 1.41 | 1.37 | 1.32 | 1.26 | 1.19 |
| ∞ | 2.71 | 2.30 | 2.08 | 1.94 | 1.85 | 1.77 | 1.72 | 1.67 | 1.63 | 1.60 | 1.55 | 1.49 | 1.42 | 1.38 | 1.34 | 1.30 | 1.24 | 1.17 | 1.00 |

# BIBLIOGRAFIA

"PLANEACION FINANCIERA ESTRATEGICA"

- Harold Bierman Jr. ed. C.E.C.S.A.

"FINANZAS EN ADMINISTRACION"

- J. F. Weston E. F. Brigham ed. Interamericana

"BIBLIOTECA HARVARD DE ADMINISTRACION DE EMPRESAS"

ed. Expansión

"PLANEACION ESTRATEGICA; LO QUE TODO DIRECTOR DEBE SABER"

- George A. Steiner ed. C.E.C.S.A.

"COSTOS, CONTABILIDAD, ANALISIS Y CONTROL"

- A. Wayne Corcoran ed. LIMUSA

"CONCEPTOS BASICOS DE CONTABILIDAD DE COSTOS"

- Henry R. Anderson, Mitchell H. Raiborn ed. C.E.C.S.A.

"APPLIED REGRESSION ANALYSIS"

- N. R. Drapper, H. Smith ed. WILEY SERIES

"PUNTO DE EQUILIBRIO, PERDIDAS Y GANACIAS"

- McGaughy ed. MANUAL UTEHA

"PLANEACION DE LAS UTILIDADES"

- Dale D. McConkey

"INTRODUCCION A LA INVESTIGACION DE OPERACIONES"

- Robert J. Thierauf ed. LIMUSA

"ELEMENTOS DE METODO ESTADISTICO"

- Andrés García Pérez ed. U.N.A.M.