UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"ANALISIS Y SOLUCION DE MODELOS
DE PRODUCCION-INVENTARIO
MULTIPERIODICOS DETERMINISTICOS"

ACERCA DE LA EXISTENCIA Y LA ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO COMPETITIVO

Por: Rendon Garcia Jesus Leobardo

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

1988

29 2ej.

T E S I S QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

RENDON GARCIA JESUS LEOBARDO

I N D I C E

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

En este trabajo se pretenden analizar los temas que circulan en torno del concepto de equilibrio economico.

Su desarrollo historico y conceptual requiere para su analisis, una profundizacion minuciosa en los pensamientos y propuestas teoricas de personalidades tanto del ambito economico como del terreno matematico.

Desde mi perspectiva, en la actualidad, desarrollar un trabajo de indole historico, es muy necesario para analizar y esclarecer muchos de los conceptos que se utilizan actualmente en la literatura de la economia matematica y que hacen de las exposiciones un material poco claro e intrincado. El trabajo que desarrollaremos aqui <en este libro>, toca algunos aspectos historicos que son los mas reelevantes en la evolucion del tema (Walras, Marshall, Hicks, Samuelson), aunque no ahonda mucho en la discucion de la evolucion de los modelos propuestos en un inicio y de su evolucion. Nosotros trabajaremos con los conceptos ya depurados de los economistas mas destacados de cada periodo.

Asi, analizaremos primeramente la proposicion de Walras, quien, aun a pesar de analizar un mercado de dos mercancias y cuya dinamica se considera inmovil (estatico), planto las bases para poder llevar el tema del equilibrio a un estudio detallado y minucioso.

Posteriormente, analizaremos el trabajo de Marshall, quien aprovechandose del concepto de utilidad, propuso un analisis economico que complementaba aquel realizado por Walras. Trataremos despues el trabajo de Hicks, trabajo este que generalizo la aplicacion del analisis estatico a un mercado con un numero arbitrario de mercancias. Generalizacion que fue hecha apoyandose en tecnicas matematicas muy elaboradas.

Finalmente, abordaremnos el trabajo de Samuelson, quien analizo la conducta del equilibrio en un mercado con un numero arbitrario de mercancias y con un caracter de dinamico, es decir, tambien intervendra en el modelo de Samuelson la variabilidad de la economia, lo cual, dependiendo del tiempo, es su posicion de momento economico que referiremos respecto al equilibrio, apoyandose en la teoria de ecuaciones diferenciales y estableciendo los criterios mediante los cuales el equilibrio es estable o no. Todo el desarrollo historico de la matematizacion del concepto de equilibrio, lo abordaremos en el Capitulo II del trabajo.

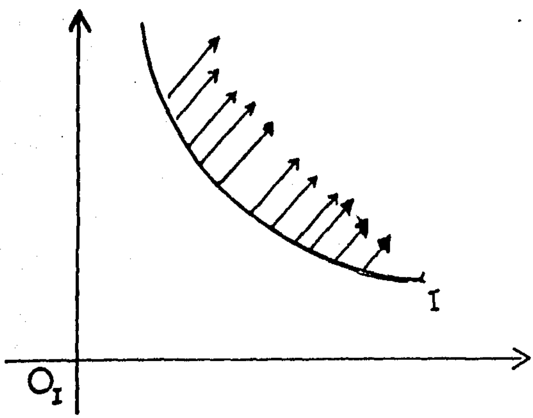
El problema de la existencia del equilibrio, que abordaremos en el Capitulo I, requiere de la tecnica de teoria de juegos de mercados asi como del teorema del punto fijo de Brower y algunos rudimentos de la teoria de conjuntos <conjuntos convexos>, la demostracion se apoya en la utilizacion de funciones de utilidad, los teoremas ahi tratados son un poco especializados, aunque no muy dificiles.

En el Capitulo III trabajaremos dos ejemplos mediante los cuales se potencia la aplicacion de la matematica dentro del terreno de la economia; uno de ellos se apoya en la tecnica de diagrama de fases, este es un ejemplo de un mercado con un numero arbitrario de mercancias y se utiliza la tecnica de ecuaciones diferenciales para su solucion. De paso, con estos ejemplos, mostraremos que la tecnica matematica, posee una aplicabilidad enorme en economia y la necesidad, tanto por parte de economistas como de matematicos, para abordarla de manera sistematica.

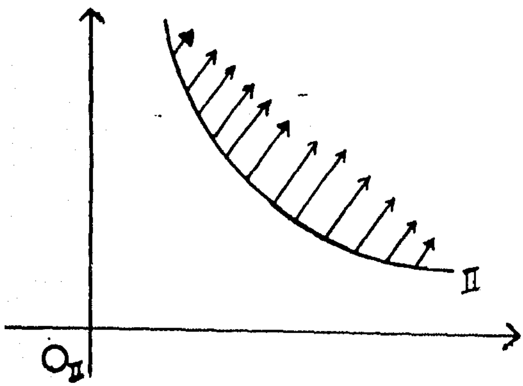
Para entrar en tema, consideremos el siguiente problema elemental:

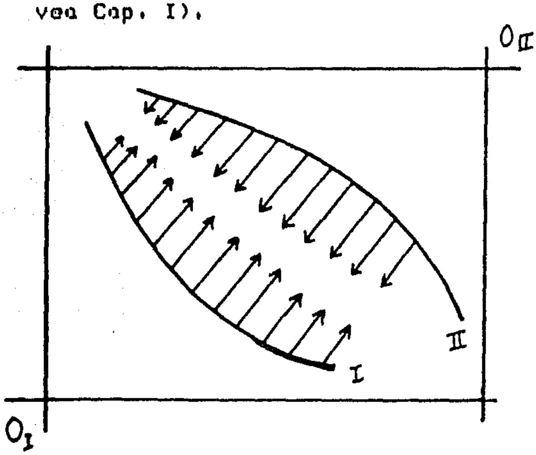
Suponga el lector que llegase a un lugar con una cierta cantidad de mercancias de su propiedad, para intercambiarlas con otros sujetos que tambien poseen un numero determinado de mercancias.

Es de esperarse que los sujetos, al intercambiar sus mercancias, procuren mejorar su posicion 'economica' o, al menos, deben tratar de permanecer en la posicion con la que llegaron al mercado.



En la figura, la curva I indica la cantidad de mercancias con las que el individuo I llego al mercado, luego, el procurara moverse hacia arriba de dicha curva, con el objeto de mejorar. Analogamente, supongase que un comerciante al que denominaremos el comerciante II, quien llega al mercado con una cantidad de mercancia denotada en la curva II, tambien pretendera, al negociar, estar por encima de su cantidad inicial de mercancias (con lo que llego). Asi, cada individuo pretendera mejorar su posicion actual, y en esa lucha por mejorar, sera necesario interactuar en el mercado y, para ello, tendra que confrontarse (en este caso, con el lector), y al hacerlo ambos mercaderes, buscaran su beneficio. En la grafica, ponemos de cabeza las coordenadas del comerciante II, con el objeto de dar la idea de confrontacion. (Esta manera de analizar la utilizo Edgewort, vea Cap. I).





Si unimos los ejes, tendremos una situacion como la que se observa en la figura. Cada uno, respecto a su punto de referencia, (O ; O) buscara su beneficio (se movera segun indican sus flechas) y luego su negociacion se llevara a cabo en la region de uso comprendido entre la curva I y la curva II.

En esa region habra puntos que convergan a ambos mercaderes mas que otros, y de esos puntos habra uno que sera el mas adecuado para hacer el intercambio. Dicho punto, sera denominado punto de equilibrio; el analisis de las caracteristicas y propiedades de dicho punto de equilibrio, forman parte del cuerpo de la obra (Capitulo II.- Evolucion Historica).

Finalmente, diremos que en el apendice matematico abordaremos los contenidos de las herramientas matematicas que se utilizaron a lo largo del trabajo y anexo algunas notas que me parece necesario agregar.

C A P I T U L O   I

EXISTENCIA DEL EQUILIBRIO COMPETITIVO.

Y sin embargo se mueve.
Galileo.

Juegos de Mercados. Owen.

Una clase importante de juegos n-personales es el relacionado con situaciones de mercado. Supondremos que los n-jugadores son vendedores avocados en vender sus (utilidades) mercancias para incrementar sus utilidades, esas mercancias no tienen otro valor que la utilidad que representan.

Supondremos que hay m-mercancias C , C ,..., Cm cada jugador tiene su paquete inicial, asi el jugador i-tiene un paquete de mercancias iniciales que denotaremos como:

$$W^i = (W_1^i, W_2^i, W_3^i, \ldots, W_m^i).$$

Cada jugador tiene una funcion de utilidad personal asignada.

$$U^i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \text{ tal que}$$

$U^i (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ es la utilidad del paquete $(X_1, X_2, \ldots X_m)$. Si S es una coalicion. Los miembros de dicha coalicion pueden redistribuir sus bienes en la forma que se desee y podran obtener cualquier S-uple de mercancias.

$$X (S) = (X^i)_{i \in S} = (X_1^i, X_2^i, \ldots, X_m^i) \quad i \in S.$$

que satisface

(13.3.2) $\left\langle \sum_{i \in S} X_j^i = \sum_{i \in S} W_j^i \quad \forall \; j = 1,2,\ldots,m \right.$

(13.3.3) $X_i^j \geq 0 \quad \forall \; i \in S \qquad j = 1,2,\ldots,m$

Cualquier S-uple de paquetes se llamaran paquetes factibles de S. Consideremos que no hay pagos. Para cada S. V(S) es el conjunto de todas las $(Y_1, Y_2, \ldots Y_m)$ para los cuales existe una localizacion factible $\bar{x}(S)$ que satisface:

(13.3.4) $Y_i \leq U^i (X_1^i, X_2^i, \ldots, X_m^i)$ para cada $i \in S$.

Generalizando, no se garantiza que el conjunto V(S) obtenido de esta manera, es convexo, sino son convexos, entonces hay dos alternativas.

Debemos disponer con la necesidad de convexidad [lo cual se incluye originalmente en la definicion de juego]. Podemos redefinir V(S) igual no al conjunto de todos los "Y" que satisfacen (13.3.4) sino mas bien a la cascara convexa del conjunto. Puede darse una posibilidad de una complicacion desafortunada. No hay ningun caso importante 'Y' cuando garantizamos la convexidad de V(S).

(XIII.3.1) Teorema.- Si las funciones U^i son concavas, los conjuntos V(S) definidos por (13.3.4), son convexos.

Demostracion: Sean $Y; \tilde{Y}$ V(S) y $0 \leq \lambda \leq 1$ tenemos para cada i e S

$$Y_i \leq U^i(x^i) \qquad \tilde{Y}_i \leq U^i(x^i)$$

donde $X = (X^i)$; $\tilde{X} = \bar{X}^i$ son paquetes factibles para S.

Pero entonces $\hat{X} = \lambda X + (1 - \lambda) \tilde{X}$

tambien es un paquete factible para S y por concavidad tenemos:

$U^i (\hat{X}^i) = U^i (X^i) + (1 - \lambda) U^i (\tilde{X}^i)$.

luego, para cada i: $\lambda Y_i + (1-\lambda) \tilde{Y}_i \leq U^i (\tilde{x}^i)$

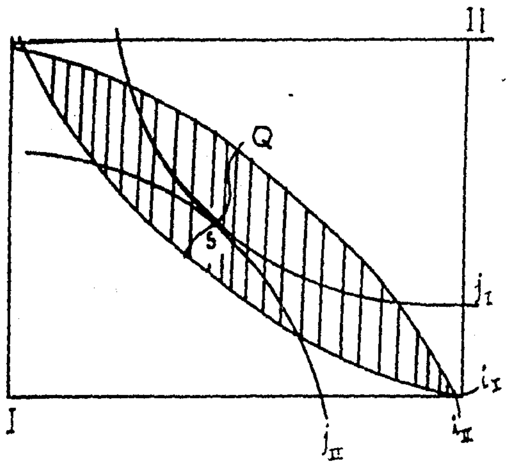
luego entonces $\lambda Y + (1 - \lambda) Y \in V(S)$ de modo que V(S) es convexo.

A continuacion exponemos unos conceptos que seran utiles para la demostracion den teorema siguiente:

Definicion: El corazon (de una economia) es el conjunto de todas las localizaciones (paquetes) factibles que no son bloqueados por ninguna coalicion, en otras palabras, es igual a:

$$h\left\{X \in A \;;\; B\,(X) = \emptyset\right\}.$$

Geometricamente, el corazon se interpreta como sigue: Consideremos una caja en la cual, en los vertices opuestos (de dicha caja), se halla el origen para cada consumidor (I; II). Las curvas que se intersectan en el punto R serian las curvas de recursos iniciales con las que los consumidores se presentan en el mercado.



Considerando al consumidor I Vemos que desde el punto I como origen de la curva i_I el consumidor I mejora su situacion, hacia abajo de la curva i_I empeora su situacion (la situacion inicial). Consideremos al consumidor II: Vemos que desde el punto II como origen, a partir de i_{II} hacia arriba, el mejora su situacion y hacia abajo empeora su situacion (inicial).

Asi pues, es de esperarse que negocien justamente en la parte sompreada, ahora cabe preguntarse ¿Todo punto de ese uso es bueno?. Si el lector es observador, notara que para una curva del consumidor I (digamos J_I), hay una curva del consumidor II (digamos J_{II}) que es tangente a J. Supongamos que son tangentes en **S**.

Escojamos un punto $T \notin S$ vemos que T es un punto en el que pierden tanto I como II por hallarse debajo de J_I; J_{II} respectivamente ese T. Asi es de esperarse que el punto de negociacion sean los puntos de tangencia exclusivamente. La curva descrita por todos los puntos de tangencia se denomina curva de contrato, que en la figura lo denotamos mediante la curva $\overline{PQ}$.

Observacion: Un punto de la caja supone el consumo de las mercancias involucradas, lo unico que varia son las distribuciones entre los agentes que interactuan.

Definicion: Diremos que X domina a X' a traves de la coalicion S y lo denotaremos como X' Bs X.

Estamos en posibilidad de analizar el siguiente teorema:

XIII.3.2 Teorema. Si las funciones U^i son concavas, el juego V, tiene un corazon no vacio.

Demostracion: Sea $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ una coalicion con vector de balance $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_k)$ suponga que $Y \in \bigcap_{j=1}^{k} V(S_k)$

Para cada Sj hay un paquete factible $X^j(S^j) = ({}^jX^i) \quad j \in S_j$

$$\ni.\ Y_i \leqq U^i({}^jX^i) \quad \forall i \in S_j$$

escojamos para cada ieN $\hat{X}^i = \sum_j^k \lambda_j({}^jX^i) \quad i \in S_j$

no es dificil verificar que: $\hat{X} = (\hat{X}_i)$ ieN.

es un paquete factible para N, ahora por concavidad

$$U^i(\hat{X}^i) \geq \sum_j \lambda_j U({}^jx^i) \qquad i \in S_j$$

en consecuencia $\sum_j \lambda_j = 1 \quad i \in S_j$ de donde $Y_i \leq U^i(\hat{X}^i)$

en consecuencia, $Y \in V(N)$ es decir el juego tiene un corazon no vacio.

Definicion: (Vector de balance) sea $C=\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ una coleccion de subconjuntos no vacios de $N=\{1, 2, 3, \ldots, N\}$, decimos que C es n-balanceado (o simplemente balanceado cuando no hay confusion de la especificidad de N) si existen numeros positivos $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ para cada $i \in N$.

$$\sum_{i,j \in S_j} Y_i \neq 1$$

entonces $Y=(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ se denomina vector de balance para C. Los Yi son coeficientes de balance.

El corazon es ademas, un concepto de equilibrio: Puntos en el corazon son de equilibrio en el sentido de que ninguna coalicion tiene la capacidad y la razon de perturbarlo. Los economistas se interesan en una nocion fuente del equilibrio originado por un sistema de precios.

Supongamos que se da un sistema de precios para nuestras condiciones. Esto no necesariamente implica que haya dinero; asi las magnitudes de los precios representan razones en las cuales las comodidades se pueden intercanbiar. Sea $P=(P_1, P_2, \ldots, P_m)$ un vector de precios. En este caso, cada jugador quiere cambiar su paquete inicial W^i por un nuevo paquete X^i el cual proporciona mayor utilidad. Escribiremos esto como:

(13.3.5) Maximise $U^i(X_1^i, X_2^i), \ldots, X_m^i)$

$$(13.3.6) \sum P_j X_j^i \leq \sum P_j W_j^i$$

$$(13.3.7) \quad X_j^i \geq 0 \qquad j=1,2,\ldots,m$$

Hay ademas una pregunta para la existencia y unicidad de este maxima. Suponiendo que todos los precios Pj sean positivos, el conjunto de restricciones (13.3.6) y (13.3.7) es compacto y por ello garantizamos la continuidad de U^i y aseguramos la existencia de un maximo. La unicidad es una cuestion complicada, pero poco importante, lo que interesa es que las distribuciones obtenidas de esta forma $\bar{X}=(X^i)$ ieN no seran factibles. En algunos casos lo seran, este sera el caso interesante.

XIII.3.3 Definicion: Un equilibrio competitivo es un par $\langle P;\bar{X}\rangle$ donde $P=(P_1,\ldots,P_m)$ es un vector de precios y $\bar{X}=(X^i)$ieN es un paquete de mercancias que satisface

$$\sum_{i\in N} X_j^i = \sum W_j^i \quad i=1,2,\ldots,m \quad X_j^i \geq 0 \; j=1,2,\ldots,m$$

tal que cada i

$$U^i(X^i) = \operatorname{Max} U^i(\xi^i)$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{m} P_j \xi_j^i \leq \sum_{j=1}^{m} P_j W_j^i \qquad \xi_j^i \geq 0 \quad j=1,\ldots,m$$

Podemos ver la importancia de un equilibrio: se da un conjunto de precios, cada jugador intercambia para maximizar su utilidad, sujeto a la restriccion de precios obvia; que el valor del paquete final que obtiene, no sea mayor que el valor del paquete inicial en el mercado. Si los precios se han elegido apropiadamente i.e si hay precios de equilibrio, este proceso ajusta claramente el mercado. Para ello sera suficiente que toda mercancia satisfaga la demanda de todos los compradores y no mas. Si, por el contrario, se escoge el peeor sistema de precios, entonces se desbalanceara el mercado en algun momento. Ello acarreara una demanda de exceso en el mercado (lo cual originara que el precio suba). Es clara la importancia que esto reviste para una economia basada en el libre mercado, la pregunta que se sugiere, es Cuando existe el equilibrio competitivo?. Para responderla, veamos el siguiente teorema:

XIII.3.4 Teorema: Supongamos que las funciones U son continuas concavas y monotonas no decrecientes en cada variable. Entonces existe el equilibrio competitivo.

Demostracion: Supongamos primero que las funciones U son estrictamente concavas para un vector de precios arbitrario.

$P=(P_1, P_2, \dots, P_m) \geq 0 \quad \therefore \quad \sum P_j = 1$

Consideremos un equilibrio competitivo

Sea $X^i(P)=(X_1^i, X_2^i, \dots, X_m^i)$ tal que:

Maximise $U^i(\xi_1, \dots, \xi_m)$

Sujeto a: $\sum_{j=1}^{m} P_j \xi_j \leq \sum_{j=1}^{m} P_j W_j^i$

tal que $\xi_j \geq 0 \quad \xi_j \leq M \quad j=1,2,\dots,m$

donde M es un numero suficientemente grande $M > \sum_{i \in N} W_j^i$

Una hipotesis que debe existir es:

$\sum_{i \in I} \xi_i^* = C$ donde $C=(C_1, C_2, \dots, Cx)$ es el paquete de mercancias existentes.

Por compacidad podemos asegurar que X^i existe.

Consideremos $A=\{ \xi / \sum P_i \xi_i \leq \sum P_i W_i^k \; y \; \xi_j \geq 0 \; ; \xi_j < M \}$

Para asegurar la compacidad, necesitamos comprobar que sea cerrado y acotado el lugar donde encuentra X^i,

Consideremos los conjuntos:

$$B=\{ \xi / \sum P_j \xi_j \leq \sum P_j W_j^k \}.$$
$$C=\{ \xi / \xi_j \geq 0 \}.$$
$$D=\{ \xi / \xi_j \leq M \; \forall j \}$$

Tenemos: $A=B \cap C \cap D$

$C=\Omega^n$ (el hiperplano positivo) que es cerrado.

D= La parte positiva de ξ_j menor que M es cerrado y acotado.

Consideremos F una funcion tal que $F(\xi)=\sum P_j \xi_j$

sea $r=(-\infty, M)$ $\quad F(r)=\sum P_j(\xi_j) \quad \xi \in (-\infty, M)$.

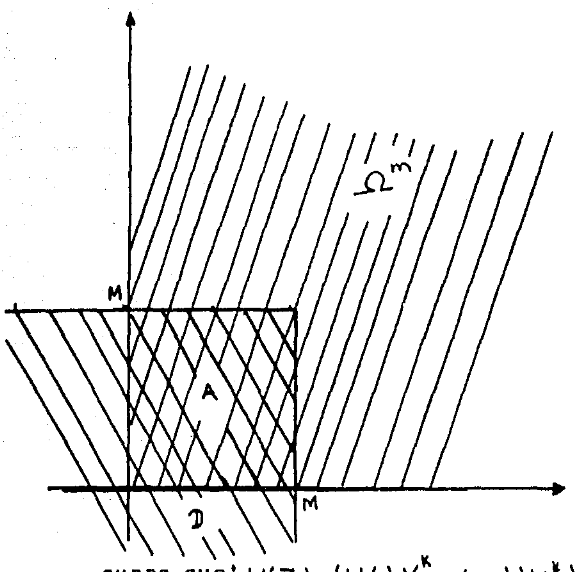
$F^{-1}(r)$=B (r es un cerrado) y F^{-1} que es una funcion lineal, es continua, luego el dominio de r bajo F^{-1} es B. como r es cerrado y F es continuo, entonces tambien B es cerrado.

Resta unicamente comprobar que es acotado (Para ver que es compacto).

M es una cota, dentro del cuadrado de lado M esta D.

Luego, $B=\{\xi / P(\xi_j - W_j) \geq 0\}$ es el conjunto de rectas que como $A=B\cap C\cap D$ el cuadrado de lado M cuyos componentes son positivos pero acotado por M, resulta que A es acotado.

En consecuencia, debe haber una X^{λ} que este en A, dado que no es vacio.



Ahora se asegura por concavidad estricta que X^{λ} es unica. Supongamos que existe una XK tal que maximiza U^{λ}(XK) y que tambien hay una XK tal que maximiza $U^{\lambda}(X^*)$. En consecuencia como XK;X* estan en A, ocurre que existe una $0\leq\lambda\leq 1$ tal que $Z=\lambda X^K+(1-\lambda)X^*$

Por concavidad estricta ocurre que: $U(Z)='U(\lambda X^K+(1-\lambda)X^*)\geq \lambda U(X^K)+(1-\lambda)U(X^*)$

Supongamos que el maximo es T. i.e U(XK)=T y tambien U(X*)=T, dado que XK; X* maximizan. Luego

$$W = \lambda U(Xk) + (1-\lambda) U(X*) = \lambda(T)+(1-\lambda)T = T \qquad U(Z) \geq T$$

Basta con demostrar que A es convexo para asegurar que $Z \in A$ (dado que Z es combinacion convexa). Como $A = B \cap C \cap D$ y cada uno de esos conjuntos es convexo, entonces su interseccion es convexa dado que si suponemos lo contrario, caeriamos en una contradiccion. Luego $Z \in A \; ; \; U(z) \geq T$ es una contradiccion.

$$Z \in A \ni U(X*) = U(Z) \quad \forall Z \in A$$

Como U^i es monotona, podemos asegurar que:

$$\sum_{j=1}^{n} P_j X_j^i = \sum_{j=1}^{n} P_j W_j^k$$

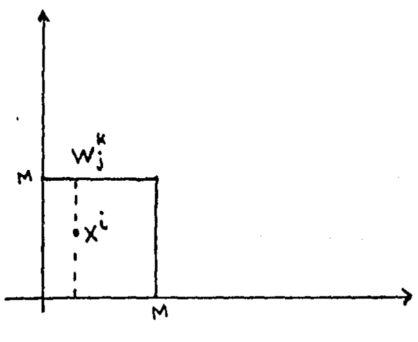
de nuestras restricciones tenemos que:

$$\sum_{j=1}^{n} P_j X_j^i \leq \sum_{j=1}^{n} P_j W_j^k$$

Para concluir la igualdad, necesitamos que se de la desigualdad contraria lo cual supone que X^i maximiza la funcion de utilidad. Sabemos que $\varepsilon_j < M \; \forall j$.

Supongamos que X es menor que Xi en alguna componente, definamos la siguiente funcion:

$$\hat{X}_j^i = \begin{cases} \hat{X}_j^i & \text{si } i \neq j \\ \hat{X}_j^i = X_j^i + \varepsilon & \text{si } i = j \end{cases}$$



Necesitamos que E no sea suficientemente grande y que X >0, X <M tenemos:

$$\sum_{j=1}^{n} P_j \hat{X}_j^i \leq \sum_{j=1}^{n} P_j W_j^i$$

$$\therefore \sum_{j\neq i}^{n} p_j x_j^i + p_j x_j^i + p_j \varepsilon \leq \sum_{j=1}^{n} p_j w_j^i$$

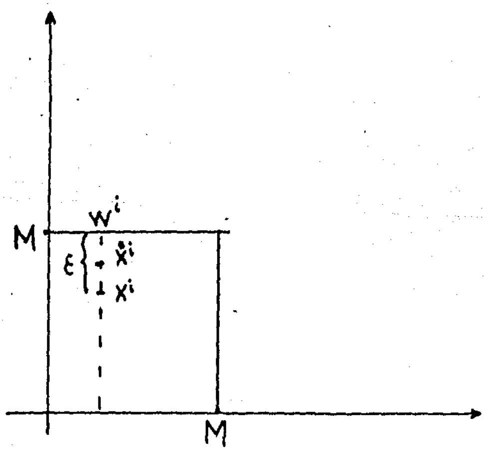
$$\therefore \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^i + p_j \varepsilon \leq \sum_{j=1}^{n} p_j w_j^i$$

$$\Rightarrow \quad p_j \varepsilon \leq \sum_{j=1}^{n} p_j w_j^i - \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^i$$

de donde $\varepsilon \leq \dfrac{\sum p_j w_j^i - \sum p_j x_j^i}{p_j}$ necesariamente $P_j \neq 0$

Consideremos ahora un punto $\overset{*}{X}{}^i$ tal que $\overset{*}{X}{}^i = X^i$ excepto en la j-esima componente en la cual sea mayor a la de X^i pero menor que la de W_i, es decir

$$\overset{*}{X}{}^i = \begin{cases} \overset{*}{x}{}_j^i = x_j^i & si \ i \neq j \\ \overset{*}{x}{}_j^i = x_j^i + \frac{\varepsilon}{2} & si \ i = j \end{cases}$$



Luego $U(\overset{*}{X}{}^i) = U(X^i)$! dado que habiamos supuesto que X^i maximizaba la funcion de utilidad. Consecuentemente

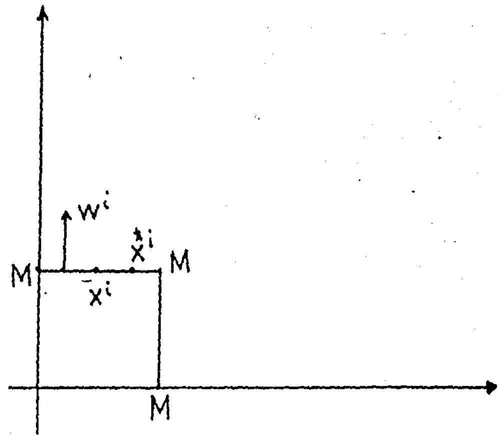
$$\sum p_j x_j^i = \sum p_j w_j^i$$

Mas aun, $x_j^i = M$ si $P_j = 0$ en el caso (2X2) que $J=0$ P.A(j) implica que el vector de precios sera paralelo a uno de los ejes (aquel cuya componente no sea cero).

Tenemos que $E_j = M$

$$\sum p_j \xi_j \leq \sum p_j w_j^i$$

Analogamente como en el caso anterior: $x_j^i = \begin{cases} \hat{x}_j^i & si \ j \neq i \\ \hat{x}_j^i = x_j^i + \Theta & si \ i = j \end{cases}$



Necesitamos $0 \leq \hat{x}_j^i \leq M$

$$\sum p_j \hat{x}_j^i \leq \sum p_j w_j^i$$

$$\sum p x_j^i + p x_j^i + p_j \theta \leq \sum p_j w_j^i$$

$$0 = p_j \theta \leq \sum p_j w_j^i - \sum p_j x_j^i$$

esta condicion se cumple para todo $\theta > 0$.

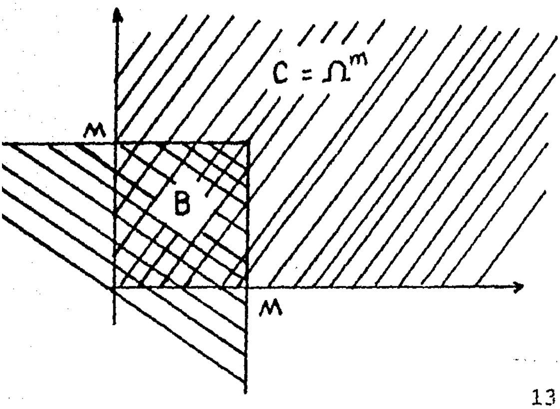
Tomamos $\overset{*}{x}^i = x^i$ excepto en su componente j-esima que sea mayor a la de x^i pero menor a la j-esima componente de W^i. Luego

$$U(\overset{*}{x}^i) \geq U(x^i) \quad ! \quad \therefore \; U(x^i) = M$$

Definicion: $U : \Omega^m \to \mathbb{R}$ estrictamente concava y $\omega \geq \bar{0}$ sea

No es dificil cerciorarse que $A(P)$ es compacto y convexo $A(P) = C \cap B$.

Tenemos $C = \Omega^m$ $\quad B = \{x \in \Omega^m / x_i < M \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m\}$



luego entonces B es cerrado y acotado, C es un conjunto que admite solo valores positivos.

Luego, la interseccion es un

conjunto compacto. Para checar que es convexo es suficiente demostrar que es interseccion de conjuntos convexos.

$\hat{X}(P)$= El punto de A(P) donde se maximiza U dentro de A(P).

Consideremos $\hat{X}$ como continuo en $\bar{P} \geqq 0$ si $W = \bar{0}$ $P(1,0)$ $W = (0,0)$ $A(P)=\{X \epsilon \Omega^m / X \leq 0 \; X_i \leq M\}$ Si $P>0$. $A(P)=\{X \epsilon \Omega^m / P_1 X_1 + P_2 X_2 \leq 0; A(P)=$ $X(P)>0$. Si $P(1,0)$ $X(1,0)=(0,M)$ hay un brinco aunque tambien ocurre eso para $P=(0,1)$ $W=(1,0)$.

Estamos en condiciones de considerar lo siguiente:

Proposicion: Si $W>\bar{0}$ entonces la funcion demanda de exceso es continua para $P \geqq \bar{0}$.

Demostracion: Sea $\Sigma = \{p \geq 0 / \sum p_i = 1\}$

Paso 1.- Sea $R=(M,\ldots,M)$ $P \epsilon \Sigma$

$X(P) \epsilon K$ donde $K=\{x \epsilon \Omega^m / x \leq R\}$

Paso 2.- $\mathring{X}=\hat{X}(P^o)$

$$\exists \varepsilon>0 \text{ s.} \forall \delta>0 \quad \exists p \text{ s. } |p-p^o|<\delta \text{ y } |\hat{x}(p)-\mathring{x}| \geq \varepsilon \;\therefore\; x' \neq \mathring{x}$$

Paso 3.- $p^r \hat{x}(p^r) \leq p^r w$

$p^o x' \leq p^o w \;\therefore\; x \epsilon A(p^o)$ el conjunto factible.

$$\therefore \; U(\mathring{x}) > U(x')$$

Paso 4.- Sea $t_r = \min\left(1, \dfrac{p^r \cdot w}{p^r \cdot \mathring{x}}\right)$ sea $X^r = t_r \mathring{x}$

tenemos que $t_r \to 1$ en cualquier caso y como consecuencia $X_r = \mathring{X}$ cuando $r \to \infty$

Paso 5.- Existe un r^o tal que $U^k(\hat{x}(p^{r_o})) < U^k(x^{r_o})$

Demostracion:

Sea $P = \dfrac{U^k(\mathring{x}) - U^k(x^r)}{2} > 0$ hecho que se desprende del paso (3)

$$\exists \delta > 0 \ \ni . \ |x - x'| < \delta \Rightarrow |U^k(x) - U^k(x')| < p$$

$$|x - \mathring{x}| < \delta \Rightarrow |U^k(x) - U^k(\mathring{x})| < p$$

Sea r_0 $\ni$.

$$|x^k(p^{r_0}) - x'| < \delta \ ; \quad |x^{r_0} - \mathring{x}| < \delta$$

Entonces $|U^k(x^k(p^{r_0})) - U^k(x')| < p$

$$|U^k(x^{r_0}) - U^k(\mathring{x})| < p$$

entonces

$$U^k(\hat{x}^k(p^{r_0})) < U^k(x') + p = U^k(x') + U^k(\mathring{x}) = U^k(\mathring{x}) - p < U(x^{r_0})$$

La conclusion del paso 5 es un absurdo que se desprende de la suposicion de que $\hat{X}^k$ es continua en $\mathring{P}$.

Brower! (Teorema del punto fijo) Sea $B > 0$ Sea $D = \{x \in \mathbb{R} \ / \|x\| < B\}$ cualquier funcion continua de dominio D. tiene cuando menos un punto fijo.

Consideremos ahora

$f_j(p) = \sum x_j^i(p) - \sum w_j^i$ sera la demanda de exceso para Cf.

Necesitamos una P para la cual todas las demandas de exceso se anulen. Definamos:

$$g_j = \max\{0, f_j\} \qquad p_j' = \frac{p_j + g_j}{1 + \sum_{k=1}^{n} g_k}$$

No es dificil ver que f_j ; g_j y en consecuencia P_j dependen continuamente de P.

Luego tenemos $\sum p_j' = \dfrac{\sum p_j + \sum g_j}{1 + \sum g_k} = 1$

esto dado que $\sum p_j = 1$ y por ello $p_j \geq 0$

$\therefore\ p_j \geq 0\ ;\ g_j \geq 0$ por ello, la transformacion T(P)=P' es un mapeo continuo de la unidad compleja en-si misma que, ademas tendra un punto fijo P*.

$$T(P^*) = P^*.$$

Probaremos que P* es un vector de precios de equilibrio.

Para analizar esto, veamos antes que nada, que $P_j^* > 0$. Supongamos que $P_j^* = 0$ P.A(j). Entonces podra cada i X_j^i =M y entonces

$$f_j(p) = nM - \sum w_j^i > 0$$

$$g_j > 0\ ;\ p_j = \frac{p_j - g_j}{1 + \sum g_k} > 0$$

Observemos tambien que no es posible que toda fj sea positiva. De hecho tenemos:

$$\sum_j p_j f_j = \sum_j p_j \left(\sum x_j^i - \sum_i w_j^i\right) = \sum_i \left(\sum_j p_j x_j^i - \sum_j p_j w_j^i\right)$$

si esto se anula, cada uno de los miembros del parentesis anterior se anula. Ademas, como toda P j>0 concluimos que entonces toda fj=0 o si alguna fj>0, entonces otra es menor que cero i.e f<0 entonces $g_\ell = 0$

Supongamos entonces que fj>0 y que $f_\ell < 0$. Entonces:

$$P_\ell' = \frac{p_\ell + g_\ell}{1 + \sum g_k} = \frac{p_\ell}{1 + \sum g_k} < P_\ell$$

En consecuencia $P_\ell > 0$ para el denominador es mayor que 1. Entonces concluimos que

$$f_j\ (P^*)=0\ \forall j$$

Mostraremos que las restricciones que introdujimos para garantizar la existencia de un maximo no presentan problema. De hecho, podra cualquier j, sabemos que:

$$\sum \bar{x}_j^i(p^*) = \sum w_j^i$$

y como toda $X_j^i j = 0$ tenemos para cada i

$$x_j^i \leq \sum_{i \in N} w_j^i < M$$

Supongamos que el maximo se alcanza i.e el maximo sin la restriccion $\xi_j<M$ donde ocurre en algun punto $Z_j^i>M$. Entonces, podemos encontrar por concavidad, que para toda t .}. $0<t<1$

$$U^i(\ t z + (1 - t) z\ ) > U^i(x^i)$$

Pero para valores pequeños de t

$$U^i(\ (1-t)\,x^i + t z^i) > (1-t)\,U^i(x^i) + t\,U^i(x^i) \geq U\,(x^i) + (1-t)\,x^i + t Z^i < M$$

Esto puede contradecir la maximalidad de $U^i(X^i)$ por ello concluimos que el par (P^*,X) donde $X=(X^i(P^*)$ es un equilibrio.

Hasta aqui la prueba de cuando U^i es estrictamente concava.

Si unicamente es concava, procedemos como sigue:

Sea $\tilde{U}^i(x) = U^i(x) - \varepsilon \sum_{j=1}^{m} (M - X_j)^2$ donde $E>0$ es pequeña.

Es facil ver que $\tilde{U}^i$ es estrictamente convexa.

Sea $X \neq Y$

$$(1 - t)x + tY) = U^i((1-t)\ x + t y) + \varepsilon \sum [M - (1-t)x_j + t y]^2$$

Consideremos (X+he.j).

$$\hat{U}^i(x+h\,e_j) > \tilde{U}^i(x)$$

Analicemos que ocurre con esos componentes:

$$U^i(x+he_j) = U^i(x+he_j) - \varepsilon\sum[M-(x_k+h\delta_{kj})]^2$$

tenemos que $\tilde{U}^i(x+he_j) > \tilde{U}^i(x)$

Veamos que ocurre con:

$$-\varepsilon\sum(M-(x_k+h\delta_{kj}))^2 - \varepsilon\sum^{m}(M-x_k)^2 = \varepsilon[(M-x_k) - 2(M-x_k)h\delta_{kj} + h^2\delta_{kj}^2 - (M-x_k)^2] =$$

$$= -2\varepsilon(M-x_k)\delta_{kj}h - \varepsilon h^2\delta_{kj}^2$$

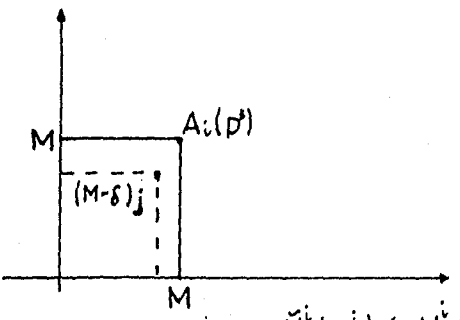
$$M - x_k > h \qquad \delta_{kj} = \delta_{kj}^2 = 1$$

$$\therefore (M-x_k)h > h^2$$ lo que se pedia

$$\tilde{U}^i(x+he_j) > \tilde{U}^i(x)$$

de lo anterior se desprende que $\tilde{U}^i$ es convexa y monotona en un conjunto acotado $0 \leq X \leq M$.

Este juego tendra un equilibriio competitivo cuando E->0



Sea $x^i \in A^i(p^*)$

P.D $U^i(x^i) \leq U^i(\overset{*}{x}^i)$

debemos demostrar que hay un x_k^i, y.

1) $X_k^i \in \bar{A}^i(P^*_{\psi_k})$ $\forall k=1,2$

2) $X_k^i \longrightarrow X^i$ cuando $k \longrightarrow \infty$

Sabemos que: $\tilde{U}_k^i(x_k^i) \leq U_k^i(\overset{*}{x}{}^i_{\psi_k})$

$$U^i(x_k^i) - \varepsilon_k\sum(M-x_{kl}^i)^2 \leq U^i(\overset{*}{x}{}^i_{\psi_k}) - \varepsilon_k\sum(M-X^i_{\psi_k l})^2$$

Si E->0 tenemos: $U^i(x^i) \leq U^i(\overset{*}{x}^i)$

Sea $\hat{X}^i$; $t \in (0,1)$ tales que: $U^i(\hat{X}^i) > U^i(X^{*i})$

$$U^i(t\hat{X}^i+(1-t)X^{*i}) \geq tU^i\hat{X}^i+(1-t)U^i(X^{*i}) \geq tU^i(X^{*i})+(1-t)U^i(X^{*i}) =$$
$$= U^i(X^{*i})$$

Podemos observar en este caso que es posible que alguna $Pj=0$ Esto generalmente, representa un fenomeno de saturacion, considerando un cierto punto de distribucion de bienes. Este anuncio en efecto que una comodidad se substituye y su precio se anula.

Consideremos ahora para redondear ideas el siguiente teorema

XIII.3.5 Si (P^*,X) es un equilibrio competitivo, para un juego de mercado, entonces el vector de distribucion X esta en el corazon.

Demostracion:

Supongamos que X no esta en el corazon, por ese hecho existira una coalicion $S\subset N$ que bloquea a X i.e

existira una X tal que:

1) $U(X'_i) > U(Xi)$

2) $\sum Xi = \sum Xi^*$

Nosotros tenemos que

$P^*X'_i i > P^*Wi$ y $\sum P^* Xi' > \sum P^* Wi$

luego $P^*(\sum X'_i - \sum Wi) > 0$

Esta contradiccion se desprende del paso (2) X esta en el corazon.

Con las lineas escritas anteriormente queda expuesto el problema que vamos a abaordar. Necesitamos desarrollar ciertos conceptos, los cuales se abordaran a continuacion.

C A P I T U L O   I I

EVOLUCION HISTORIA DEL CONCEPTO DE ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO COMPETITIVO.

"Cuando el mundo esta al reves, nosotros estamos al derecho. Pero cuando el mundo esta al derecho, nosotros estamos al reves. Bueno, pues, cuando el mundo y nosotros estamos al derecho, creemos estar al reves."

Don Juan Matus.

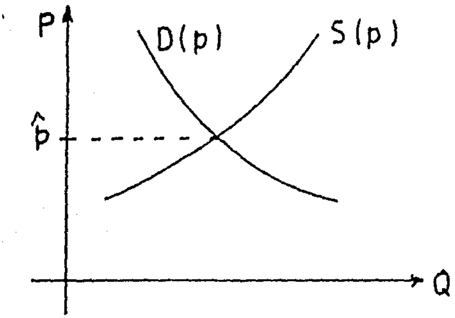
LA ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO COMPETITIVO.

Consideremos un unico mercado (competitivo) con una mercancio (digamos A). Supongamos que la demanda de A la denotamos por D(A). Que sera una funcion de su precio P. Y supongamos ademas, que la oferta de A la denotamos por S(A) sera tambien una funcion de su precio. Un precio de equilibrio p es un precio tal que ocurre DCp)=SCp). ¿Cuando existe o no ese p es el problema de la existencia del equilibrio?. Esta existencia se garantiza cuando la curva de demanda y la curva de oferta se cruzan. Si se cruzan en muchos puntos, habra una gran cantidad de precios de equilibrio; tantos como intersecciones de las graficas. Supongamos que el precio P de una mercancia A, dista de un cierto precio de equilibrio p. La pregunta entonces es que pasa con la trayectoria de P en el tiempo. En particular queremos ver si P converge al p original. Esta es la pregunta de estabilidad. Para resolver este problema de estabilidad impondremos una suposicion basica: Un exceso de demanda de A eleva su precio P, y un exceso de oferta hace bajar su precio.

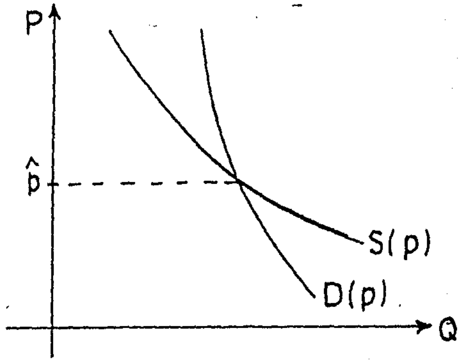
Matematicamente $\frac{dp}{dt} \gtreqless 0$ de acuerdo a cuando $D(p) - S(p) \gtreqless 0$

Donde dp/dt es la derivada de P respecto del tiempo. Para facilitar el entendimiento del problema, supongamos que tenemos solo un precio de equilibrio p tal que DCp=SCp. La pregunta cuando se hace de esta manera, tenemos que se puede resolver tambien, mediante un analisis diagramatico.

La figura de la izquierda en la figura 3.1 ilustra el caso de un equilibrio estable y el lado derecho ilustra el caso de un equilibrio inestable. El lector podra facilmente checar la direccion en la cual P se mueve, cuanto esta fuera del precio de equilibrio $\hat{p}$.

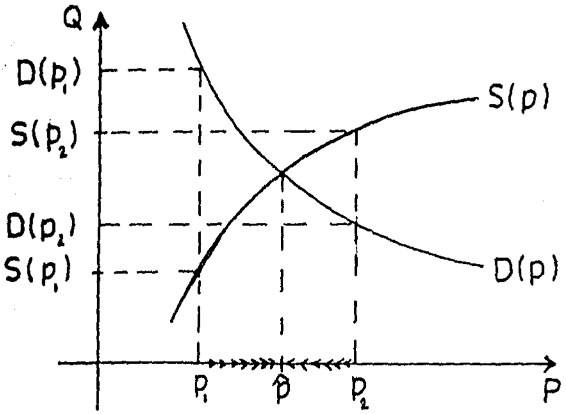


EQUILIBRIO ESTABLE



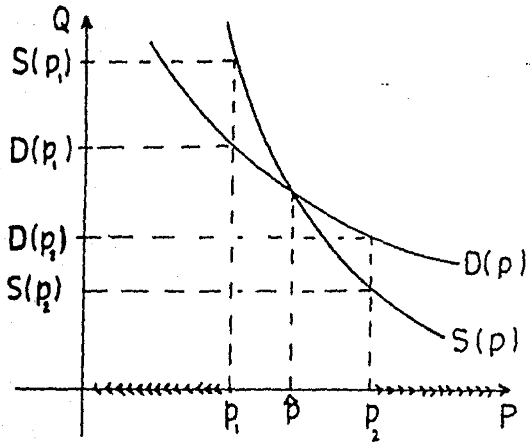
EQUILIBRIO INESTABLE

Para analizar lo que dicen las figuras, en el caso de la figura de la izquierda, tomemos un P p, que conducta adopta el mercado bajo este hecho.



Si tomamos un P <p vemos que la demanda de la mercancia es mayor que su oferta.

Si tomamos un P_2 mayor que $\hat{p}$ notamos que la tendencia es que $S(P_2)>D(P_2)$, luego por nuestro supuesto basico el precio de la mercancia tiende a bajar y vemos que en ambos casos, la tendencia cuando estamos tanto en P como en P es a no alejarse demasiado de p, esto justamente se parece (o mejor dicho) al hecho de estabilidad de la conducta en el mercado.



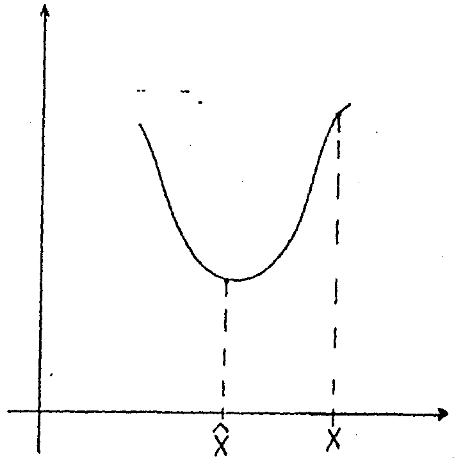
Ahora consideremos el caso de la figura de la derecha: Analogo al caso anterior, consideremos un P p y veamos que ocurre.

Tomemos primero una $P_1 < \hat{p}$, al hacer esto, observamos que $S(P_1) > D(P_1)$ luego, la tendencia de los precios dado nuestro supuesto basico, es que el precio disminuira.

Consideremos ahora una $P_2 > \hat{p}$, de donde de nuestra grafica observamos que $D(P_2) > S(P_2)$ y esto implica que la tendencia de los precios es a aumentar, por tanto, vemos que en este caso los precios no permanecen cerca del precio de equilibrio tienden a alejarse de $\hat{p}$.

Para considerar un problema mas general, supondremos que una economia determinada se describe por n-ecuaciones, las cuales describen la relacion de equilibrio de la economia.

Sea $X=(X1,X2,...,Xn)$ los componentes son las variables que deben ser determinadas para este sistema de n-ecuaciones. La relacion de equilibrio de la economia la describiremos por $fi(X)=0$ $i=\widehat{1,n}$ o $[f(X)=0]$. El valor de X que satisface el sistema anterior (suponiendo que exista dicha X) se denomina un valor de equilibrio de la economia, y lo denotamos como $\hat{X}$. El problema es ahora cuando existiendo el equilibrio se da la estabilidad.



Entonces debemos analizar la conducta de X cuando se desvia de $\hat{X}$. Nuestro interes particular es de cuando X converge a $\hat{X}$. Un ejemplo de un sistema de equilibrio con esas caracteristicas, es el sistema de un mercado competitivo donde fi denota la demanda de exceso de la i-esima comodidad y Xi denota el precio de la i-esima de mercancia.

Otro ejemplo de un sistema de equilibrio, es el clasico sistema de equilibrio macro Keinesiano, el cual tipicamente consiste de la relacion que describen; los bienes del mercado, el dinero del mercado y el trabajo disponible en el mercado.

Supongamos que el valor inicial de X esta dado en X^0, supongamos que X no es un valor de equilibrio lo cual implica que $f(X^0)\neq 0$ (Suposicion analoga, hecha como con la demanda de exceso) Supongamos que esto genera un cierto proceso de ajuste, del cual el tiempo de ajuste de X, que denotamos por X(t) queda descrito por el siguiente sistema de ecuaciones:

$Fi[X(t),t]=0 \quad i=\widehat{i,n}.$

o simplemente como $F[X(t),t]$ con $X(0)=X^0$

casi siempre este sistema de ecuaciones es generado por un sistema de ecuaciones diferenciales o en (diferencia) que describen el proceso de ajuste. El analisis de estabilidad se refiere a la solucion del sistema de arriba o de cuando un valor $X(t)$ converge al valor de equilibrio $\bar{\bar{X}}$. Comunmente, el sistema de ecuaciones diferenciales que da origen al sistema dinamico de arriba se describe como: $\dfrac{\Delta x(t)}{\Delta t} = h_i\left[f_i(x(t))\right]$

En el caso de un equilibrio competitivo se dice que la variacion del i-esimo precio $\Delta x/\Delta t$, esta en funcion de la demanda de exceso de la i-esima mercancia fi (o demanda de exceso para todas las comodidades f). Cuando el problema se escribe mediante ecuaciones diferenciales, uno espera que la teoria de la estabilidad desarrollada en ecuaciones diferenciales pueda ser de alguna utilidad (en nuestro estudio). Este es el sentido por el cual se desarrollo la seccion B, en ese capitulo veremos el material basico de ecuaciones diferenciales, discucion que sera util en capitulos posteriores.

Para concluir esta seccion introductoria, es importante hacer una discucion para distinguir entre la 'estabilidad Walrasiana' y la 'estabilidad Marshaliana'.

En la exposicion introductoria del problema de estabilidad de un equilibrio competitivo, consideramos el postulado basico en la forma: $\dot{P}_i(t) = h_i\left[f_i(p(t))\right] \qquad i=1,2,\cdots,n$

donde P_i es el precio de la i-esima comodidad, $P(t)$ es un n-vector del cual el i-esimo componente es P_i y $P_i(t) = \frac{\Delta p}{\Delta t}$. Como antes $f_i(P(t))$es la demanda de exceso de la i-esima mercancia y h_i es cualquier funcion fija diferenciable real valuada monotona creciente. Para el caso de un mercado libre con una mercancia, escribiremos esta ecuacion como: $\dot{P} = h\left[D(p) - S(p)\right]$

donde h es una funcion real valuada fija de incremento monotona creciente fija y diferenciable. Necesariamente h>0 ya que de lo contrario p podria ser negativa lo cual no es posible.

La ecuacion anterior la podemos escribir de una manera mas simple como: $\dot{P} = \left[D(p) - S(p)\right] K$

donde K>0 (un numero real) se puede interpretar como la rapidez de ajuste del mercado. Hay dos premisas importantes en la formulacion anterior; una es que ningun agente; ni productor ni comprador puede alterar los precios del mercado, ellos simplemente acatan los precios como dados, esta es la premisa de un mercado competitivo. La segunda premisa es que los unicos parametros de ajuste del mercado son los precios.

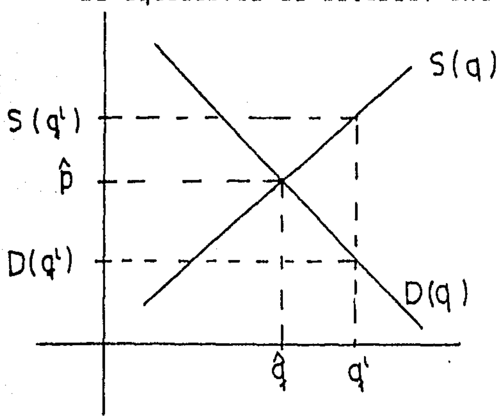
En cada momento, compradores y vendedores, ajustan respectivamente, la cantidad que ellos quieren comprar o vender, basandose unicamente en la informacion del precio que tiene la mercancia. El ajuste se supone que se hara instantaneamente. Asi el precio varia segun lo describe la ecuacion diferencial de arriba.

Cuando el precio se mueve la cantidad de demanda excesiva varia, y la estabilidad del mercado se realiza cuando el precio se mueve en forma tal que la demanda de exceso se anula.

En contraste con un proceso de ajuste de precios, la cantidad de mercancias de tipo de ajuste se considera importante. En la figura 3.2 supongamos que es la cantidad dada de la mercancia. Denotaremos por $D(q^{l})$ y $S(q^{l})$ respectivamente el precio que los compradores estan dispuestos a pagar. Y el precio que el vendedor desea poner a una mercancia determinada que la dinamica de la ecuacion de ajuste del mercado puede escribirse como:

$$\dot{q} = [D(q) - S(q)]\ \tilde{K} \ldots (*)$$

donde $\tilde{K}$ denota la rapidez de ajuste del mercado. Esto refleja el hecho que si $D(q)>S(q)$ por ejemplo el vendedor puede incrementar en gran medida la cantidad ofrecida. Si el tiempo de recorrido de la solucion de la ecuacion diferencial converge a la cantidad de equilibrio $\hat{q}$, cuando f crece ilimitadamente, entonces diremos que el equilibrio es estable. Una estabilidad obtenida de este modo y descrita mediante la ecuacion (*) la denominaremos estabilidad Marshaliana.



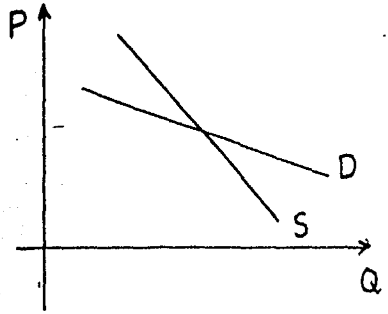
Con la estabilidad ajustando el precio como se discute anteriormente, se denomina estabilidad Walrasiana descrita mediante la ecuacion

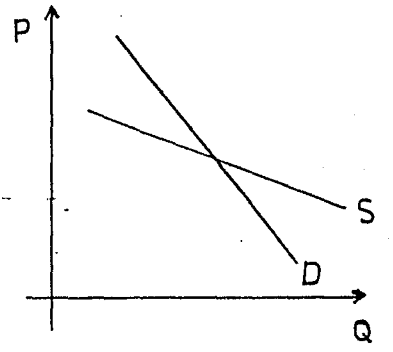
Estos dos definiciones de estabilidad aparentemente no coinciden, el mercado puede ser estable Walrasiano (respectivamente inestable) pero inestable Marshaliano (respectivamente estable).

En la literatura economica esto se describe comunmente, mediante diagramas como los que se muestran en la figura 3.3. Luego, la comparacion de estos dos conceptos como se muestra en esos diagramas, da pie a una confusion muy seria. Consecuentemente esos dos conceptos son completamente diferentes y no se pueden comparar con la misma figura.

El origen de esta confusion se puede atribuir probablemente a Hicks [(p)p.62] sobre la discucion entre estos dos conceptos, el argumenta que el concepto de estabilidad Marshaliana es mas apropiado en condiciones de monopolio que en el de competencia perfecta.

Para dejar mas claro las definiciones tanto de Marshal como de Walras,

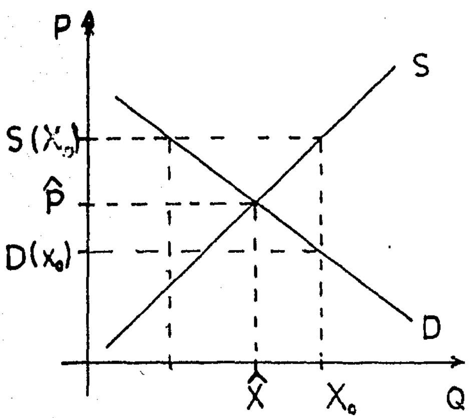




(a) Fig. 3.3 (b)

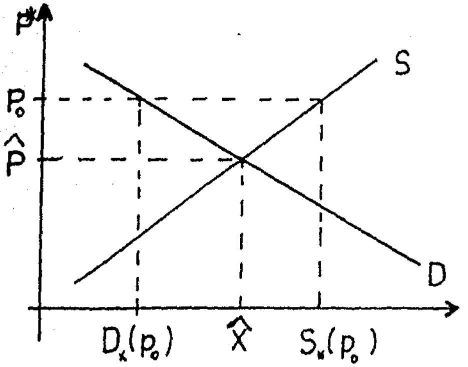
Para dejar mas claro las definiciones tanto de Marshal como de Walras

Diremos que un mercado posee estabilidad Marshaliana, si cuando la cantidad es mayor que el nivel de equilibrio, el precio de oferta asociado a esta cantidad excede al precio de demanda asociado a dicha cantidad y se cumple lo contrario cuando las cantidades son menores.



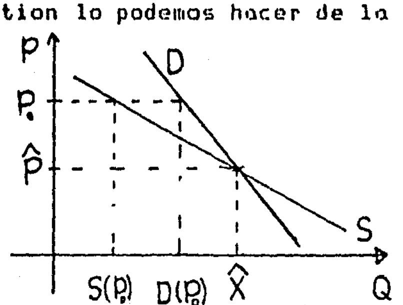
Graficamente esto queda expresado como demuestra en la figura. X.>X luego S(Xo)>D(X.) y analogamente S(X)<D(X) si X <X.

Diremos que un mercado es Walrasionamente estable si cuando el precio es mayor que el precio de equilibrio, la cantidad demandada a este precio es menor que la cantidad ofrecida a este mismo precio y ocurre lo contrario para precios menores que el precio de equilibrio.

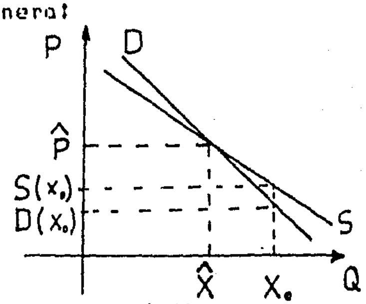


Se observa de la figura que siendo Po>p ocurre que Dx(Po)<Sx(Po) y analogamente si P<P Dx(P)>Sx(P).

Una vez que tenemos un poco mas asequibles los conceptos tanto de estabilidad Marshaliana y la Walrasiana podemos pasar a hacer el analisis de la figura 3.3. La figura (a) es estable en el sentido de Walras pero inestable en el sentido de Marshal, mientras que en la figura (b) vemos que se da la estabilidad de Marshal pero no la de Walras. El analisis grafico de esta cuestion lo podemos hacer de la siguiente manera:

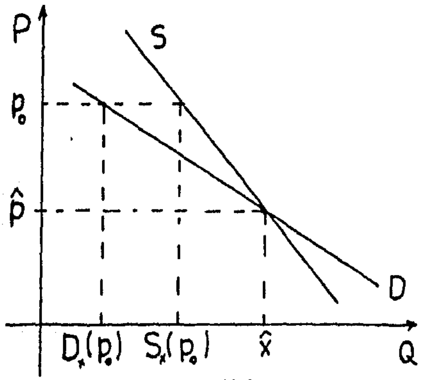


(a)

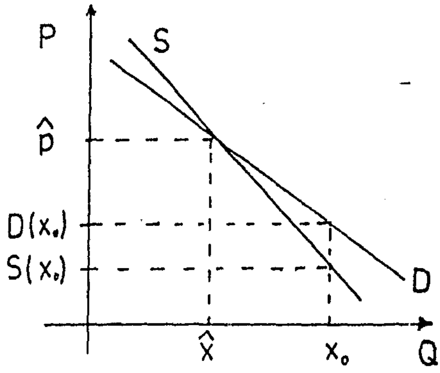


(a')

Vemos en la figura (a) que es una grafica correspondiente a una inestabilidad en el sentido de Walras, mientras que la figura (a') muestra ser estable en el sentido de Marshal.



(b)



(b')

Vemos en la figura (b) una grafica que representa una estabilidad en el sentido de Walras, mientras que la (b) muestra una inestabilidad en el sentido de Marshal.

Newman hizo notar ([3] p.p.106-108) que la confusion comun entre la estabilidad Walrasiana y la Marshaliana, radica en el hecho de distinguir la teoria del cambio, de la teoria de la produccion. Las condiciones de la estabilidad Marshaliana estan designadas explicitamente para la teoria de la produccion. Mientras que la Walrasiana se ajusta mejor a la teoria del cambio consecuentemente, estos dos conceptos no se pueden comparar en la misma dimension [bajo la misma optica]. Asi, no tiene sentido hacer la comparacion que la estabilidad Walrasiana implica inestabilidad Marshaliana. Aqui hay un error sustantivo dado que se intercambia, la produccion por el cambio (Newman [3] p.107). Como Newan hace notar esta confusion se encuentra frecuentemente en la literatura.

Ahora cabe hacer la siguiente pregunta. ¿Cual es la diferencia esencial entre el problema del cambio y el problema de la produccion?. Vemos que una diferencia esencial es el tiempo en los dos problemas. El cambio se puede pensar como un problema temporal, mientras que la produccion se puede considerar como un problema de corto-plazo.(2) Esto se basa en el reconocimiento de que los productores toman un periodo significativo de tiempo antes de llegar a sus posiciones optimas, mientras que los ajustes de los consumidores se pueden hacer mucho mas rapido.

Tomando como ejemplo un mercado libre para una mercancia, digamos 'manzanas'. Cuando las manzanas se cosechan en el otoño, la cantidad que cada productor puede ofrecer en el mercado, se considerara como fija, consecuentemente la cantidad de manzanas ofrecidas en el mercado es esa cantidad fija. El mercado asi considerado es la razon de cambio de la produccion. El proceso de ajuste Walrasiano es una excelente forma de explicar los mecanismos para alcanzar un precio de equilibrio. Consecuentemente un precio de equilibrio se determina, y una vez determinado los productores determinan la cantidad a ofrecer para el siguiente año, todo basado en el precio de este año. Aqui el proceso de ajuste de salida Marshaliano es en este caso quiza mas relevante. Observese en este ejemplo que la cantidad de manzanas es fijo en el proceso de ajuste Walrasiano y que el precio de las manzanas es fijo en el proceso de ajuste Marshaliano.

En este ejemplo, el desarrollo del mercado es muy similar al descrito en el modelo de Cobweb (3). En general esto no ocurre. Por ejemplo, el mercado ofrece una mercancia que puede estar siempre en funcion del precio si la cantidad total (de mercancia) es fija (hasta que aparezca la produccion del siguiente periodo).

En cualquier caso, lo que el ejemplo de las manzanas ilustra es que el proceso de ajuste del precio Walrasiano no es mas apropiado para periodos temporales, en el cual la produccion no es completa, mientras el ajuste Marshaliano es mas apropiado para periodos de corto plazo en el cual el ajuste de salida se considera explicitamente.

Es importante notar que el proceso Marshaliano de ajuste de salida es contrario a lo que observa Hicks, que es perfectamente relevante en un mercado competitivo. Los productores, en el mercado de manzanas descrito anteriormente, son competitivos en el sentido de que ellos toman el precio de las manzanas en el mercado como dados, la discucion usual de que el proceso Marshaliano es mas apropiado para monopolio, es falso.

Un analisis, clasico y brillante, del analisis diagramatico del mecanismo de ajuste de Marshal, se encuentra en los manuscritos de Marshall, "La teoria pura del mercado internacional". Las curvas descritas fueron conocidas posteriormente como "curvas de oferta". La interseccion de dos curvas de oferta, determinan la salida de equilibrio de dos comodidades involucradas. Se supone que los consumidores ajustan a su posicion optima instantaneamente y el proceso de ajuste Walrasiano se lleva a cabo instantaneamente. (La estabilidad en el proceso Walrasiano se supone implicitamente). La forma de ajuste para el punto de equilibrio descrito anteriormente se refiere unicamente al ajuste de salida(4).

Debemos observar que tanto Marshal como Walras, marcan claramente que hay esos dos tipos de ajuste y ambos lo usan en su propio contexto (5).

Tenemos razon si llamamos a la estabilidad del precio en su proceso de ajuste, la 'Estabilidad Walrasiana'. Y la estabilidad en el ajuste de salida la 'Estabilidad Marshaliana'. Consecuentemente esta practica se hara mas comun si no cambiamos esto. Una diferencia entre estas dos pruebas es quiza que Marshal enfatizo el periodo corto de mecanismos de ajuste de salida y utiliza la tecnica diagramatica para su ajuste en su teoria del cambio bipersonal (6). En cambio Walras [5] en su teoria de produccion trata el proceso de ajuste de salida como lo que ocurre simultaneamente con el proceso de ajuste del precio (7).

Podemos preguntar: ¿Cuando el proceso de ajuste del precio Walrasiano es relevante en la teoria del cambio? Se cree que no. Que tanto la demanda como la oferta son funciones del precio, los precios seran el parametro de ajuste final. Despues los ajustes de temporaneidad y el de corto-plazo se completaran y hallaremos la posicion de equilibrio en el cual D(P)=S(P).

En consecuencia, si abstraemos el proceso de 'temporaneidad' y el de 'corto-plazo', supondremos simplemente que tanto la demanda como la produccion se ajustan instantaneamente al precio y consideraremos al tiempo de circulacion (ajuste) descrito mediante la formula:

$$P=K[D(P)-S(P)]$$

De este modo, podemos considerar el precio justamente como el que describe el mecanismo del equilibrio final (Vea Teoria de la Produccion de Walras [5]) (8).

En el repaso anterior de la teoria de estabilidad, hablamos de Hicks [1] y Samuelson [4]. El proceso de ajuste Walrasiano se uso ampliamente y se le presto poca atencion al pago en el ajuste de salida. Esto es muy grave, pero como el precio es la unica variable independiente en un mercado competitivo, sera necesario enfatizar el proceso de ajuste de los precios (ello como una teoria de equilibrio temporal de cambio, o como una teoria de equilibrio corto-plazo cuando todos los ajustes que incluyen salida se completan).

En cualquier caso, este capitulo esta dedicado a explorar el desarrollo reciente en la teoria de ajuste del precio. No unicamente analizaremos la tecnica matematica y los desarrollos conceptuales en el contexto de la reciente teoria. La explicacion sirve como un hermoso ejemplo de la aplicacion de la teoria de las ecuaciones diferenciales a la economia.

Despues del trabajo de Marshal y Walras, se continuaron realizando esfuerzos por afinar y depurar el concepto de estabilidad. Entre los economistas que mas contribuyeron a la ejecucion de esta labor aparecen Hicks y Samuelson. El trabajo de Hicks fue una continuacion del trabajo de Walras la continuacion, logro una generalizacion a un mercado de n-mercancias del concepto de estabilidad del profesor Walras. La tecnica que utilizo el economista Hicks fue la de la estatica comparativa.

Por otro lado, tenemos que el trabajo de Samuelson trato de ajustar los conceptos de las ecuaciones diferenciales al analisis economico, alcanzando con ello una manera de comparacion un tanto mas dinamica.

Aunque el trabajo de Hicks no abarca muy a fondo el problema que estamos atacando, es de importancia para el analisis historico, retomar sus conceptos.

Hicks: Continuando con el trabajo de Walras el economista Hicks analiza la medida en que el cambio en el precio de una mercancia puede afectar el precio en las demas mercancias. (Cuando el precio de las demas no varia). Para comenzar a manejar su teoria Hicks establece las siguientes definiciones:

Estabilidad imperfecta: Esta se dara cuando la demanda de exceso para una mercancia cualquiera sera negativa, cuando su precio este por encima del precio de equilibrio (y la demanda de exceso sera positiva cuando el precio este por debajo del precio de equilibrio), mientras los precios restantes se ajustan para permanecer equilibrados.

Una forma de escribir esto matematicamente seria la siguiente:

Sea P* un vector de precios de equilibrio.

P* sera imperfectamente estable respecto a

Si al definir $\Gamma_{i_0} = \{p \,/\, Z_i(p) \equiv 0\}$

Se tiene que: i) $\forall P \in \Gamma_{i_0}$ con $P_{i_0} > P^*_{i_0} \Rightarrow Z_{i_0}(P) < 0$

ii) $\forall P \in \Gamma_{i_0}$ con $P_{i_0} < P^*_{i_0} \Rightarrow Z_{i_0}(P) > 0$

Estabilidad Perfecta: (estabilidad en el sentido de Hicks) Si la demanda de exceso para cualquier mercancia es negativa cuando su precio esta por encima del precio de equilibrio (y positivo cuando el precio esta por debajo del precio de equilibrio) cuando un conjunto de precios puede ajustarse permaneciendo los demas fijos; de manera que los mercados de aquellas mercancias cuyos precios se ajustan, permanezcan equilibrados.

Una manera de escribir esto matematicamente es:

Definamos: $M_{i_0} = \{ p \,/\, \forall i \neq i_0 \;\; Z_i(p) \equiv 0 \text{ ó } P_i = p^*_i \}$

Entonces diremos que P* es perfectamente estable si para todo i' tenemos:

i) $\forall\, p \in M_i$ y si $p_i > p^*_i \Rightarrow Z_i(p) < 0$

II) $\forall\, p \in M_i$ y si $p_i < p^*_i \Rightarrow Z_i(p) > 0$

Un poco mas adelante analizaremos graficamente el significado de la estabilidad perfecta para el caso de 2 mercancias.

El trabajo de Hicks consistio centralmente en analizar las condiciones necesarias y suficientes para poder establecer la estabilidad perfecta.

Su analisis es como sigue:

Supongase que en un mercado se producen y consumen n+1 mercancias y consideremos las funciones demanda de exceso.

$$Z_i = \sum_{j=1}^{m}\left[X_{ij} - X_{ij}^{0}\right] - \sum_{K=1}^{l} y_{iK} = F_i(p)$$

donde Xi.j! es el consumo de la j-esima mercancia por el i-esimo consumidor.

Xi.j! Las existencias iniciales de la j-esima mercancia que posee el j-esimo consumidor.

YiK! La cantidad de la i-esima mercancia que ofrece el productor K.

P=(PiP!,...,P') Vector de precios.

Supondremos ademas que las funciones de demanda de exceso son homogeneas de grado cero i.e

$F_i(\lambda P)=Fi(P) \quad \forall\lambda \quad \forall i$.

Normalizando P! Po=1, luego Pi es la cantidad de la mercancia cero (Mo) que se intercambia por una unidad de la mercancia i

Asi podemos escribir las funciones demanda de exceso como!

$Zo=Fo(I,P_1,\ldots,Pn)$

$Z1=Fo(I,P_1,\ldots,Pn)$

.

.

.

$Zn=(Fn(I,P_1,\ldots,Pn)$

Como siempre su P es un vector de precios de equilibrio, entonces $Z_i(P)=0 \ \forall i$

Supondremos que:

1).- Se cumple la ley de Walras, que es:

$$\sum_{i=0}^{n} P_i Z_i = 0$$

Esta ley se cumple cuando las ecuaciones:

$$\sum_{i=0}^{n} P_i \left[X_{ij} - X_{ij}^{\circ}\right] - \sum_{K=1}^{l} \delta^{kj} \sum_{i=0}^{n} P_i \ Y_{ik} \leqq 0$$

que se conocen como ecuaciones de balance, son satisfechas como una igualdad.

En la ecuacion, el (termino

$$\delta^{kj} \sum_{i=1}^{n} P_i Y_{ik}$$

son las ecuaciones de la K-esima empresa que corresponden al j-esimo consumidor, y supondremos que si las acciones estan totalmente distribuidos en la sociedad, entonces

$$\sum \delta^{kj} = 1 \qquad K=1, 2, 3, \ldots, l.$$

Entonces tenemos que la ecuacion

$$\sum_{j=0} \sum_{i=0} P_i \left[X_{ij} - X_{ij}^{\circ}\right] - \sum_{k=1}^{l} \delta^{kj} \sum_{i=0}^{n} P_i \ Y_{ik} \leqq 0$$

Se satisface como una igualdad.

$$\sum \sum P_i \left[X_{ij} - X_{ij}^{\circ}\right] - \sum \sum \delta^{kj} \sum P_i \ Y_{ik} = 0$$

Trasponiendo tenemos:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{m} P_i [X_{ij} - X_{ij}^{o}] - \sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{j=1}^{m} \delta^{kj} \sum_{i=1}^{n} P_i Y_{ik} \right) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} P \sum_{j=1}^{m} [X_{ij} - X_{ij}^{o}] - \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=0}^{n} P_i Y_{ik} =$$

$$\sum_{i=0}^{n} P_i \left[\sum_{j=1}^{m} (X_{ij} - X_{ij}^{o}) - \sum_{k=1}^{l} Y_{ik} \right] = 0$$

entonces $\sum P_i f_i = 0$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} P f + P_o f_o = 0$$

y $\sum P_i f_i = -P_o f_o$ como hicimos: Po=1

$$\sum P_i f_i = - f_o$$

esto lo podemos interpretar como: la funcion de demanda de exceso de la mercancia cero, queda definida en funcion de las demandas de exceso de las mercancias restantes.

Luego podemos considerar las ecuaciones siguientes:

$$\frac{d Z_1}{d p_1} = F_{11} \frac{d p_1}{d p_1} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + F_{1n} \frac{d p_n}{d p_1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d Z_n}{d p_1} = F_{n1} \frac{d p_1}{d p_1} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + F_{nn} \frac{d p_n}{d p_1}$$

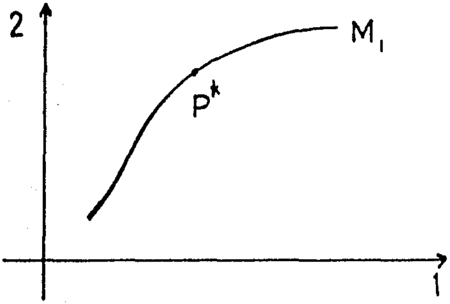
donde Fim= dF_i/dp_m i;m=1,...,n.

considerando la Ley de Walras tenemos:

si $\dfrac{dp_i}{dp_1} \neq 0$ entonces $\dfrac{dz_i}{dp_1} = 0$

Analicemos el caso de dos mercancias para ejemplificar.

En este caso podemos olvidar la mercancia Mo, dado que Po=1.



Caso en que Z (P)=0

Analizaremos las mercancias (1) y (2).

Tenemos:

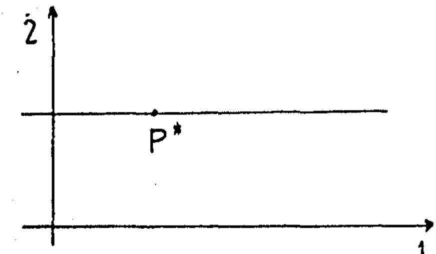
$Z_1(P);Z\ (P)$

Ahora construimos:

$M = \left\{ p/Z_2(P)=0 \text{ ó } P_2 = P_2^* \right\}$

En caso de que $Z_2(P)=0$ entonces M sera una curva que pasa por P^*.

En caso de que P =P * tendremos una constante.



Caso en que P=P*

Asi pues, uniendo ambos casos, tendremos una combinacion de dos trayectorias y queda como se ve en la figura ".

La estabilidad perfecta; mientras mas vamos aumentando el numero de dimensiones, mas complicada va siendo su representacion grafica.

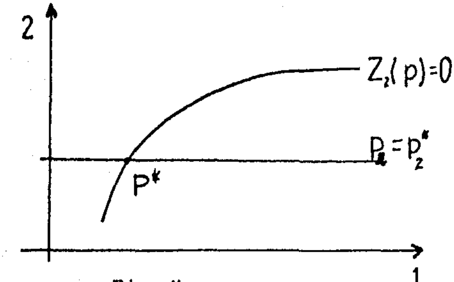


Fig.".

Observacion, en el caso en que Z =(P)=0 tenemos que varian tanto P_1 como P_2. Y en el caso en que $P_2 = P_2^*$ unicamente varia el precio de la mercancia P_1.

Bien puede ocurrir que nos movamos en la curva o que nos movamos sobre la recta.

Si nos movemos en la curva, entonces:

$$dp_i/dp_1 \neq 0 \Rightarrow dZ_i/dp_1 = 0$$

Y en caso que nos movamos sobre la recta tenemos:

$$dp_i/dp_1 = 0 \quad \text{cuando} \quad dZ_i/dp_1 = 0 \qquad i=1, 2, \ldots, n$$

dondequiera que nos movamos podemos parametrizar respecto al parametro P_1.

Asi, el vector de precios queda establecido en funcion de P como $P = \Pi(P_1)$.

En esta caso ocurre: $Z(P) = F(P), \ldots, Zn(P) = Fn(P)$.

Pero dado que P es funcion de P tenemos:

$Z_1(P) = F(\Pi(P_1))$.

.

.

.

$Zn(P) = F(\Pi(P_n))$.

Derivando esta ecuacion obtenemos:

$$\frac{dZ_1}{dp_1} = \frac{dF_1}{dp_1}\frac{dp_1}{dp_1} + \cdots + \frac{dF_n}{dp_1}\frac{dp_n}{dp_1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{dZ_1}{dp_1} = \frac{dF_n}{dp_1}\frac{dp_1}{dp_1} + \cdots + \frac{dF_n}{dp_1}\frac{dp_n}{dp_1}$$

Ahora retomemos los casos anteriores: supongamos que $Z_i(P)=0$ $i=1$. Luego las ecuaciones nos quedan como:

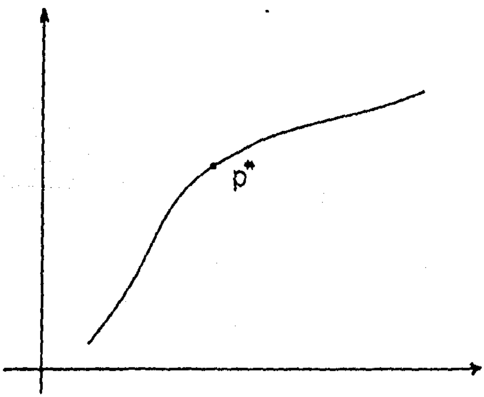
$$\frac{dZ_1}{dp_1}=\frac{\partial F_1}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dp_1}+\cdots+\frac{\partial F_n}{\partial p_1}\frac{dp_n}{dp_1}$$

$$\frac{dZ_2}{dp_1}=0$$

$$\vdots$$

$$\frac{dZ_n}{dp_1}=0$$

Esto en el caso de dos dimensiones queda como: Si $P_1>P_1^*$



(Sabemos que P_2 queda parametrizado respecto a P_1 i.e $P_2=\psi(P_1)$; $\pi(P_1)=(P_1,\psi(P_1))$

De las condiciones de Hicks tenemos como $P_1>P_1^* \Rightarrow Z_1(P)<0$

luego: $$\frac{dZ_1}{dp_1}=\frac{\partial F_1}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dp_1}+\frac{\partial F_2}{\partial p_1}\frac{dp_2}{dp_1}$$

Regresando al caso general, tenemos:

Supongamos que nos movemos sobre la recta, tenemos:

$P_2=P_2^*,\ldots,P_n=P_n^*$ y P_1 esta variando.

Entonces:

$\Pi(P)=(P_1, P_2^*, \ldots, P_n^*)$

$$\frac{dZ_i}{dp_1} = F_{i1}\frac{dp_1}{dp_1} + F_{i2}\,0 + \ldots + F_{ii}\,0$$

Para el caso 1 tenemos $\frac{dZ_1}{dp_1} = F_{11} \therefore F_{11} < 0$ ya que $Zio(Pio)<0$.

Luego tenemos $Fii<0$

Asi, si P^* es perfectamente estable en el sentido de Hicks $\Rightarrow Fii<0$. i.

Luego, nuestro sistema de ecuaciones lo podemos escribir como:

$$\begin{bmatrix} \frac{dZ_1}{dp_1} \\ \frac{dZ_2}{dp_2} \\ \vdots \\ \frac{dZ_n}{dp_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \ldots & F_{2n} \\ & & & \\ F_{n1} & F_{n2} & \ldots & F_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{dp_2}{dp_1} \\ \vdots \\ \frac{dp_n}{dp_1} \end{bmatrix}$$

donde

$$dZ_1/dp_r = \sum_{r=1}^{n} F_{1r}\left(dp_r/dp_1\right)$$

Variando P cuando varia P y dejando las demas constantes tenemos:

$$\frac{dZ_1}{dp_1} = F_{11} + F_{12}\frac{dp_2}{dp_1} \quad ; \quad 0 = F_{21} + F_{22}\frac{dp_2}{dp_1}$$

luego:

$$\frac{dZ_1}{dp_1} = F_{11} - F_{12}\left(\frac{F_{21}}{F_{22}}\right) = \frac{F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}}{F_{22}}$$

de las condiciones de Hicks tenemos:

$$F_{22} < 0 \quad y \quad \frac{dZ_1}{dP_1} < 0.$$

$$\frac{dZ_1}{dP_1} \cdot F_{22} = F_{11} \quad F_{22} - F_{12} \quad F_{21} > 0.$$

Pero justamente $F_{11} \quad F_{22} - F_{12} \quad F_{21} = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} > 0$

que era lo que queriamos comprobar.

Ahora, analicemos el caso para cuatro comodidades.

Asi pues, supongamos que varian P y P al mismo tiempo que varia P y que los precios de las demas mercancias permanecen constantes, luego nuestro sistema queda como:

$$\frac{dZ_1}{dP_n} = F_{11} + F_{12}\frac{dP_2}{dP_1} + F_{13}\frac{dP_3}{dP_1} + F_{14} \cdot 0 + \ldots + F\, n \cdot 0$$

$$0 = F_{21} + F_{22}\frac{dP_2}{dP_1} + F_{23}\frac{dP_3}{dP_1} + F_{24} \cdot 0 + \ldots + F\, n \cdot 0$$

$$0 = F_{31} + F_{32}\frac{dP_3}{dP_1} + F_{33}\frac{dP_3}{dP_1} + F_{34} \cdot 0 + \cdots + F\, n \cdot 0$$

.

.

.

$$\frac{dZn}{dP_1} = 0$$

Luego, el sistema queda como:

$$\begin{vmatrix} \frac{dZ_1}{dP_1} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{dP_2}{dP_1} \\ \frac{dP_3}{dP_1} \end{bmatrix}$$

Este sistema lo podemos resolver como:

$$1 = \begin{vmatrix} dZ_1/dp_1 & F_{12} & F_{13} \\ 0 & F_{22} & F_{23} \\ 0 & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix} \Big/ \Delta$$

Donde Δ es el determinante del sistema:

Luego despejando tenemos:

$$\Delta = \frac{dZ_1}{dp_1} \begin{vmatrix} F_{22} & F_{23} \\ F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}$$

De esta ecuacion sabemos que:

$$\frac{dZ_1}{dp_1} < 0; \quad ; \quad \begin{vmatrix} F_{22} & F_{23} \\ F_{32} & F_{33} \end{vmatrix} > 0$$

Asi pues, para $\Delta = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}$ es negativo.

Siguiendo este analisis utilizando induccion tenemos:

Supongamos que para K su determinante sea positivo (analogamente negativo) por demostrar que el determinante de orden (K+1) sera negativo (analogamente positivo).

Supongamos que varian P_2 P_3 ......P_K mientras las restantes permanecen constantes i.e $PK+1=PK+1, \ldots, Pn=Pn^*$.

El sistema queda como:

$$\frac{dZ_1}{dp_1} = F_{11} + F_{12}\frac{dp_2}{dp_1} + \cdots + F_{1K}\frac{dp_K}{dp_1}$$

.

.

$$0 = F_{k1} + F_{k2}(dp_2/dp_1) + \; . \; . \; . \; + F(dp_k/dp_1).$$

Lo podemos resolver como:

$$1 = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{dZ_1}{dP_1} & F_{12} & F_{13} & \cdots & F_{1k} \\ 0 & F_{22} & F_{23} & \cdots & F_{2k} \\ \vdots & & & & \\ 0 & F_{k2} & F_{k3} & & F_{kk} \end{vmatrix}}{\Delta_K}$$

Supongamos que Λ es positivo (analogamente negativo)

Para K+1 variables, el sistema queda como:

$$\frac{dz_1}{dp_1} = F_{11} + F_{12}(dp_2/dp_1) + \; . \; . \; . \; + F_{1,k+1}(dp_{k+1}/dp_1)$$

$$0 = F_{21} + F_{22}(dp_2/dp_1) + \; . \; . \; . \; + F_{2,k+1}(dp_{k+1}/dp_1)$$

.

.

.

$$0 = F_{(k+1)1} + F_{(k+1)2}(dp_2/dp_1) + \; . \; . \; . \; + F_{(k+1)(k+1)}(dp_{k+1}/dp_1)$$

Que resolviendo nos queda como:

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{dz_1}{dp_1} & F_{12} & F_{13} & \cdots & F_{1(k+1)} \\ 0 & F_{22} & F_{23} & \cdots & F_{2(k+1)} \\ \vdots & & & & \\ 0 & F_{(k+1)2} & F_{(k+1)3} & \cdots & F_{(k+1)(k+1)} \end{vmatrix} \qquad \therefore \quad \Delta = \frac{dz_1}{dP_1} \cdot \Delta k.$$

AK+I sera negativo dado que $\frac{dz_1}{dP_1}$ <0; AK>0

(Analogamente si AK<0 y $\frac{dz_1}{dP_1}$ <0 AK+1=AK >0)

Luego en general tenemos que, satisfaciendoo las condiciones de estabilidad perfecta de Hicks se satisface que los menores deben comportarse sus menores de la siguiente manera:

$$F_{ii} < 0 \qquad \begin{vmatrix} F_{ii} & F_{ir} \\ F_{ri} & F_{rr} \end{vmatrix} > 0 \qquad \begin{vmatrix} F_{ii} & F_{ir} & F_{ik} \\ F_{ri} & F_{rr} & F_{rk} \\ F_{ki} & F_{kr} & F_{kk} \end{vmatrix} < 0$$

Los menores impares son negativos, los menores pares son positivos.

Ahora cabe preguntarse: Si los menores alternan se cumplira la estabilidad perfecta de Hicks?

Veamos el siguiente ejemplo:

Tomemos la matriz:

$$\begin{vmatrix} E & 1 & 0 & 0 \\ 0 & E & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1+E \end{vmatrix}$$

Su menor de orden 2 es E >0.

Su menor de orden 3 es E >0.

Su menor de orden 4 es (E+E +1)+1+1=E +E+3>0

Luego, no satisface las condiciones de determinante de Hicks. Analicemos su convergencia:

Tomemos el determinante de orden dos:

$$\begin{vmatrix} E & 1 \\ 0 & E \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E-\lambda & 1 \\ 0 & E-\lambda \end{vmatrix} = (E-\lambda)^2$$

Buscando sus raices tenemos:

$$\lambda_{12} = \frac{2E \pm \sqrt{4E^2 - 4E^2}}{2} = E$$

Haciendo E<0 (dado que el determinante es E no hay problema), luego la solucion sera:

$$e^{tE}$$

Y tomando limite tenemos

$$\lim_{t \to \infty} e^{tE}$$

el sistema es estable sin satisfacer las condiciones de Hicks.

. o O o .

Otro de los continuadores en el estudio de la estabilidad del equilibrio es Samuelson, que por cierto apoya sus conjeturas y su analisis en argumentos que caen mas dentro del terreno de las matematicas. Su trabajo se enfoca mas hacia el terreno de las ecuaciones diferenciales. Aunque su atencion la centro hacia los sistemas lineales, tambien analiza algunos problemas que requieren de ecuacion en diferencias, asi como ecuaciones diferenciales no lineales y ecuaciones integrales.

Un tanto el trabajo de Samuelson, fue una preocupacion por proporcionar luz, sobre el tema, aunque para lograrlo exige que su publico lector tenta una formacion adecuada en matematicas.

Al ir obteniendo sus resultados, el va mostrando, bajo que condiciones su trabajo y el trabajo de Hicks (considerado un tanto como el maximo expositor de la teoria de sus antecesores) coinciden y en que momento (bajo que condiciones) comienzan a separarse, en el sentido de que la estatica comparativa de Hicks se queda unicamente, en el museo de la historia sin poder dar solucion a un sinnumero de problemas.

Comencemos con nuestra discucion acerca del contenido de Samuelson. Considera la siguiente ecuacion diferencial:

$$\frac{dP_i}{dt} = k_i f_i \left[p_1(t), \ldots, p_n(t) \right]$$

Ki es la rapidez de ajuste del i-esimo mercado. Ki es estrictamente positiva.

Tambien podemos formular el supuesto mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

Pi(t+1) - Pi(t) = Kifi [P(t)] i=1, 2,...,n

(Lo cual podria obtenerse de integrar en el intervalo (t,t+1) respecto a la variable t

$$\text{i.e} \quad \int_t^{t+1} \frac{pt}{dt}\, dt = \int_t^{t+1} k_i f_i [p(t)] = p(t) \Big|_t^{t+1} = k_i f_i [p(t)] \,)$$

en este nuevo sistema, Ki tambien representa la rapidez de ajuste del mercado.

Siempre estableceremos que un vector de precios de equilibrio (P) es estable si al partir de una posicion inicial P (P =P) y al transcurrir el tiempo P converge hacia P. A este tipo de puntos de equilibrio, Samuelson los denomina dinamicamente estable. Nos avocaremos al estudio de estabilidad global y local pero centrandonos fundamentalmente en la estabilidad de tipo local.

El tratamiento que se presenta aqui es mucho mas claro que la que fue representada por Hicks, dado que cumple con la naturaleza del equilibrio general en el analisis de estabilidad, y permite esclarecer el caracter dinamico del proceso de ajuste alrededor de un vector de precios de equilibrio.

Para entrar mas en materia, consideremos una aproximacion lineal (del desarrollo de las series de potencias de las ecuaciones fi). Tenemos que fi:(P) = 0 Cuando P es un equilibrio. Luego:

$$\frac{dP_i}{dt} = \sum k_i a_{ij} (p_j(t) - \bar{p}_j) \qquad i=1,2,\dots,n$$

donde $a_{ij} = df_i/dp_j$ Asi lo podemos escribir en notacion vectorial como:

$$\frac{dP}{dt} = k\, A\, (p(t) - p)$$

donde tenemos que A = [Ai,J] K: es una matriz diagonal con elementos diagonales Ki y ceros en lo demas. Teniendo escrito asi nuestro sistema de ecuaciones diferenciales, vemos que una condicion necesaria y suficiente para la estabilidad del sistema es que la parte real de los eigen valores sea negativa. (Vea Apendice Matematico; Teorema Routh-Hurwicz). Otra observacion que podemos hacer es: si el punto de equilibrio es globalmente estable en el sistema de aproximacion lineal, entonces sera localmente estable en el sistema original (Vea Apendice Matematico, Teorema [ ])

Despues de tener a disposicion esta herramienta matematica Samuelson, comienza a establecer los lazos que atan la economia de Hicks, con la dinamica que el propone.

Lo primero que trata de esclarecer Samuelson es la distancia que hay entre la teoria de Hicks y la suya. Expone la matriz:

$$\begin{vmatrix} E & 1 & 0 & 0 \\ 0 & E & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1+E \end{vmatrix}$$

Tiene todos sus menores principales positivos para E-suficientemente pequeño (i.e no cumple la condicion de Hicks) y sin embargo, sus raices tienen partes reales negativas, lo cual prueba que incluso la estabilidad perfecta no asegura la estabilidad dinamica.

Posteriormente, considera el siguiente sistema:

$$\begin{cases} P = -2P + 4P \\ P = -P + P \end{cases} \quad \text{de donde } A = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Luego, su ecuacion caracteristica es:

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

$$\therefore \lambda_{12} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{7}}{2}$$

Como las soluciones del sistema son de la forma tenemos $e^{-\frac{1}{2}t} \cdot e^{\pm i \frac{\sqrt{7}}{2} t}$ el sistema es estable.

Pero no es ni perfecto ni imperfectamente estable.

- El sistema:

$$\begin{cases} P = P - P \\ P = 2P + P \end{cases} \text{ tiene matriz } A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

A - I queda como:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \quad \text{luego } \lambda_{12} = 1 \pm \frac{i\sqrt{8}}{2}$$

las soluciones seran del estilo:

$$\lim_{t \to \infty} \cancel{e^{t} e^{i\frac{\sqrt{8}}{2}t} \to 0}$$

Con estos ejemplos, Samuelson proporciona elementos para comenzar a argumentar analogias y diferencias entre el y Hicks. La primera proposicion que se establece es la siguiente:

Proposicion I.- Si A es simetrica y si Ki=1 para toda i, entonces la condicion de Hicks es equivalente a la condicion dinamica.

[Se observa claramente que si A es simetrica y satisface las condiciones de Hicks, entonces es definida negativa].

Demostracion: Esta proposicion queda establecida por el hecho de que una matriz hermitiana y simetrica es definida negativa (vease el Apendice Matematico). Aqui proporcionaremos un ejemplo sencillo que establezca el asunto.

Supongamos una matriz asimetrica y que satisfaga la condicion de Hicks, i.e

$$a_{ii} < 0 \qquad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

como A es simetrica $\Rightarrow a_{11} a_{22} > a_{12}^2$

y como $a_{11} < 0 \Rightarrow a_{22} < 0$

luego escribiendo el polinomio caracteristico: $A - \lambda I$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

Por la condicion de Hicks tenemos: $a_{11} \cdot a_{22} > a_{12}^2$

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + c_1 \qquad c_1 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$$

$$-\lambda(a_{11} + a_{22}) = c_2 \lambda \qquad \therefore c_2 = -(a_{11} + a_{22}) > 0$$

$$\lambda^2 + c_2 \lambda + c_1 = 0$$

donde tanto C_2 como C_1 son positivos, luego las raices tendran parte real negativa.

$$\lambda_{12} = \frac{C_2}{2} \pm \frac{\sqrt{C_2^2 - 4C_1}}{2}$$

luego $\left(-\frac{C_2}{2}\right)$ es un numero negativo dado que $C_2>0$.

Proposicion II.- Si A es definida cuasi-negativa [i.e es definida negativa, donde A' = A].

Y si Ki = 1 , entonces la condicion de Hicks es equivalente a la condicion de Samuelson.

Prueba: Analicemos la siguiente proposicion:

Si $\frac{A + A'}{2}$ es definida negativa, entonces es definida negativa. O equivalente:

Si A + A' es definida negativa, entonces el sistema es globalmente estable.

Demostracion: Sea $V = (\frac{1}{2})\sum_{i=1}^{m} f_i^2$ la desigualdad $\frac{dv}{dt}<0$ se cumple cuando $f_i = 0$ $\forall i$ luego

$$dv/dt = \sum_{j,r} f_j (d f_j / dp_r)(dp_r/dt) = \sum_{j,r} f_j a_{jr} f_r$$

Escribiendolo en forma vectorial, tenemos:

$$dv/dt = f'A f = f'(\tfrac{1}{2}(A + A'))f$$

la desigualdad se cumple de la hipotesis del teorema.

Proposicion III.- Si el proceso es dinamico, y no se toman en cuenta la rapidez de ajuste Hicks, (entonces se satisface la condicion de Hicks).

Demostracion: Tomemos en consideracion la ecuacion dinamica:

$$dp(t)/dt = kA(p(t) - \hat{p})$$

Segun las condiciones (no tomar en cuenta K)

tenemos: $d\,p(t)/dt = A(\,p(t) - \hat{p})$

Si el sistema es estable, entonces A es definida negativa y por lo tanto, sus menores pares son positivos. Y sus menores impares son negativos.

Proposicion IV.- Dada una matriz cuyos coeficientes no diagonales son todos positivos ($A_{ij} > 0$) y satisface la condicion de Hicks, entonces satisface la condicion de Samuelson.

Demostracion: Queremos ver que nuestra matriz A la cual satisface que $A_{ii}<0$ y que $A_{ij}>0$ luego podemos escribir donde $\lambda = \max_i |A_{ii}|$

$b_{ii} = \lambda + A_{ii} > 0$

$b_{ij} = A_{ij}$ luego una matriz B definida asi es positiva.

Luego $\lambda I - B = -A$.

Si A no es negativa y la matriz de Leontief es prod. => , se cumple H-S $-\frac{1}{\lambda} A = I - \frac{1}{\lambda} B$

$-\frac{1}{\lambda} B$ es de Leontief $\therefore \frac{1}{\lambda} B$ es productiva.

Sea $C = \frac{1}{\lambda} B$ como es productiva $\Rightarrow \exists\, \bar{X} > 0 \ni X - CX > \bar{0}$

$\left(-\frac{1}{\lambda} A\right) X > 0$ lo cual es D. D.

Sea $D = -\frac{1}{\lambda} A \quad \therefore DX > \bar{0}$

$$\sum d_{ij} x_{ij} > 0 \quad \therefore \quad d_{ii} x_j > -\sum d_{ij} x_j$$

Necesitamos que $-A$ sea D. D. en el sentido de Haddamar. A cumple Hicks y $-\frac{1}{\lambda}A$ es d.d. en ese sentido ($-\frac{1}{\lambda}AX>0$) queremos ver que sus raices tienen parte real negativa.

Sea $\rho \in \mathbb{C}$ Parte real no positivo.

Consideremos $(\rho I - D)$.

$P.\ \underline{D}$ $\rho I-D$ es no singular $\therefore \rho$ no es valor propio.

$|\rho - d_{ii}| > |d_{ii}|\ \forall i$ dado que $d_{ii} > 0 \Rightarrow -d_{ii} < 0$

y $\rho < 0$ luego se deduce la desigualdad y tambien

$$|\rho - d_{ii}|\, x_i \geq |d_{ii}|\, x_i > \sum x_j |d_{ij}|$$

no es singular y $\rho I - D$ en sus eigenvalores y como $D = -\frac{1}{\lambda}A \Rightarrow A$ tiene eigenvalores con parte real negativa.

Si una matriz tiene eigenvalores cuya parte real sea negativa, entonces la matriz satisface Hicks y $A_{ii}>0$.

Consideremos una eigenvalor del polinomio caracteristico, luego es una raiz del polinomio de Frouznius $(\lambda I-A)X>0$ la cual tenemos que satisface H-S. Luego, sus menores son positivos pero como $RE\,\lambda<0 \Rightarrow$ Hay un factor negativo alterando la matriz diagonal Los menores de A alternan que es la condicion de Hicks, hace falta ver que los elementos no diagonales son positivos, pero ello se desprende del hecho de tener raices de Frobenius.

De aqui se deducen las siguientes definiciones:

Substituibilidad: Se refiere al efecto positivo de un cambio en el precio de la mercancia J sobre la demanda de la comodidad i cuando el ingreso real se compensa.

Sustituibilidad burda: Si > 0 para todos los precios diremos que la comodidad-i es un sustituto burdo de J para el consumidor K con respecto al cambio en el precio de la mercancia J: (i = j).

Para finalizar con el trabajo de Samuelson, establezcamos y probemos una serie de afirmaciones.

I.- Si > 0 (i = j) entonces el punto de equilibrio es estable en el sistema de aproximacion lineal, por tanto sera localmente estable en el sistema original.

II.- El sistema original es globalmente estable si todas las mercancias son burdamente sustituibles.

III.- Podemos hacer Ki = 1 . Asi, nuestro sistema queda como:

$$\frac{d P_*(t)}{dt} = f_i(P(t)).$$

IV.- Considerando nuestro sistema en un equilibrio p = 0 una mercancia puede elegirse como numerario. (P. ej. Po = 1) [Aqui aparecen las definiciones de sistema normalizado y no normalizado].

No respetaremos el orden establecido y comenzaremos probando el argumento (IV).

Prueba (IV).- Tomemos un punto de equilibrio p - t. ff (P)=0 y consideremos una mercancia como numerario P. eJ. (Po = 1).

Consideremos un caso particular (para dos mercancias). Sea X = Y, donde X denota el numerario.

Supondremos que los individuos tienen una funcion de utilidad continua y estrictamente concava. Estrictamente decreciente en varias variables y la demostraremos como:

$$(1) \quad \begin{cases} U(x,y') > U(x,y'') & \text{sii } y' > y'' \\ U(x',y) > U(x'',y) & \text{sii } x' > x'' \end{cases}$$

Sean X ; Y las cantidades iniciales que posee un individuo. P denota el precio de Y en terminos de X. (El precio de X es igual a 1).

f (P); G(P) Determinan las funciones de demanda de exceso del individuo para las mercancias X;Y respectivamente.

Consideremos el siguiente teorema:

Teorema: Si se cumplen las condiciones impuestas en (1) (diremos que no hay saturacion). El hecho X > 0 implica que $\lim_{n \to 0^+} G(P) = \infty$ analogamente si y° $\lim_{p \to \infty} f(P) = \infty$

Demostracion: Supongamos que el teorema es falso, entonces existe una sucesion (P_1 , P_2 , ..., Pn,....) y un numero M

tal que $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$; $g(P_n) \leq M$

luego G (Pn) = $-Y^o$ de donde $\lim_{n\to\infty} f(Pn)=0$

Definamos las siguientes sucesiones:

$$\begin{cases} Xn=-Pn \dfrac{M+1}{1+P_n} \\ Yn= \dfrac{M+1}{1+P_n} \end{cases}$$

Asi queda satisfecha la restriccion:

$Xn + Pn\ Yn = 0.$

Ahora si $X^o > 0$ por hip y si $\lim_{n\to\infty} Xn=0$

$$X^o + Xn > 0.$$

Si escogemos M de modo que sea positivo, tendremos:

$$Y^o + Yn > Y^o > 0.$$

Y como f;g se definieron para maximizar la utilidad bajo las restricciones planteadas para n-suficientemente grande, tendremos:

(8) $U (X^o + F (PnP), Y^o + G (Pn) = U (X^o + Xn, Y^o + Yn).$

de (2) y de la monotonia tenemos:

(9) $U (X^o + f (Pn), Y^o + G (Pn) = U (X^o + f (Pn), Y^o + M)$

de las desigualdades (8); (9) se sigue que:

(10) $U (X^o + f (Pn), Y^o + M) = U (X^o + Xn, Y^o + Yn)$

Pero entonces las n-tienden a infinito. Por la continuidad de las funciones de utilidad podemos sustituir en la ecuacion (10) los limites de f (Pn) Xn; Yn de (3); (4) asi tenemos:

(11) $U (X^o, Y^o + M) = U (X^o, Y^o + M + 1)$

lo cual contradice la suposicion de monotonia respecto a la funcion de utilidad. Asi aseguramos la primera afirmacion intercambiando X;Y y reemplazando p por ( ) tenemos de manera analoga una prueba de la segunda afirmacion.

Tomando en cuenta el mercado de n-mercancias el teorema se cumple si todos los individuos tienen utilidad no-saturada y le satisface la siguiente condicion:

$$\sum X^{oi} > 0 \quad \sum Y^{oi} > 0$$

ahora podemos establecer:

Teorema: Sea $\sum X^{oi} > 0$; $\sum Y^{oi} > 0$ y supongamos que las funciones de utilidad de todos los individuos son monotonas y continuas en cada mercancia. Luego g (p) es continua. Entonces al menos algun punto de equilibrio existe.

Luego $g(p) > 0 \ \forall p \ \text{t.q.} \ 0 < p < p'$; $g(p) < 0 \ \forall p \ \text{t.q.} \ p > p''$

donde P′; P" son dos numeros positivos finitos, el sistema sera estable (Podremos tomar una mercancia como numerario?).

Demostracion: La solucion es analoga a la del teorema anterior y en la segunda parte debe tomarse: g (P) = $-\frac{1}{p}$ f(P).

Con esto puede verificarse el argumento (IV) ahora analizaremos un teorema que ataca a la vez las afirmaciones primera y segunda.

Recordemos la definicion de sustituibilidad burda:

Sust. burda Prevalece cuando

$$a_{rs} \equiv \frac{d f_r}{d P_s} \geqq 0 \quad (r \neq s \; ; \; r=0,1,\ldots,m \quad s=1,2,\ldots,m).$$

o vectorialmente:

$$a_{rs}^{i} = \frac{d f_r^{i}}{d p_s} \quad ; \quad (a_{rs}^{1}, a_{rs}^{2}, \ldots a_{rs}^{n}) \geqq 0$$

Ahora estamos en condiciones de establecer el siguiente teorema:

Teorema 9.- Suponga $\hat{P} > 0$ y la matriz $A = \| a_{rs} \|$ que sea no singular. Supongamos tambien que $\partial f_k / \partial p_j \geqq 0 \; k \neq j$ (i.e sustituibilidad burda), entonces el punto de equilibrio $\hat{P}$ es localmente estable.

Demostracion:

Analicemos la siguiente afirmacion:

Teorema: Supongamos que las funciones demanda exceso FK (P) son uni-valuadas continuas y positivamente homogeneas de grado cero. Ademas supongamos que existen vectores de precio de equilibrio positivos (P > 0) y que prevalece la sustituibilidad burda.

[Que las funciones sean homogeneas de grado cero significa que $F_k(\lambda P) = F_k(P) \quad \forall \lambda > 0$ que prevalezca la sustituibilidad burda significa que lo siguiente se cumple:

$$F(P) \neq 0 \qquad F(\bar{P}) = 0 \qquad P_{k'} / \bar{P}_{k'} = \max_k \left(P_k / \bar{P}_k \right)$$

$$P_{k''} / \bar{P}_{k''} = \min_k \left(P_k / \bar{P}_k \right) \Rightarrow \quad F_{k'}(P) < 0 \; ; \quad F_{k''}(P) > 0$$

].*

Entonces, para $P^0 > 0$

A1) Toda solucion a traves de P^0 del proceso no normalizado

(I) confusiones HK continuas que preservan -signo i.e toda $\psi^{I}(t,P^{\circ})$ converge a algun vector de precio de equilibrio $\bar{P}$;

A2) La convergencia de $\psi^{I}(t,P^{\circ})$ es estrictamente monotona en la norma $\| \|_M$ definida anteriormente.

* [El proceso normalizado queda determinado por la ecuacion diferencial $\dfrac{dP_k}{dt} = H_k[F_k(p)]$ $k=0,1,\ldots,m$ Y para $\bar{P}_r^{\circ} > 0$.

b$_1$) Toda solucion a traves de P° del proceso normanizado II con las funciones hy continuas que preservan signo i.e. toda solucion $\psi^{II}(t,p^{\circ})$ converge al vector de precio normalizado unico. $\bar{P}$ y

b$_2$) La convergencia de $\psi^{II}(t,p^{\circ})$es estrictamente monotona en $\| \|_M$ definida antes.

* [$\| \|_M$ la definimos como: $\|P\|_M = \max |P_k|$]*

(*)....Demostracion de (A$_1$), (A$_2$).

Consideremos la ecuacion: $\dfrac{dP_k}{dt} = H_k[f_k(p)]$ $k=0,1,\ldots,m$

$p^{\circ}>0$; $F(p^{\circ})\neq 0$.

Sea $\bar{P} > 0$ un vector de equilibrio y hagamos la siguiente transformacion de variables: $Q_k = P_k/\bar{P}_k$

luego obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales

$$P_k \dot{Q}_k = H_k[F_k(Q_0\bar{P}_0, Q_1\bar{P}_1,\ldots,Q_m\bar{P}_m)]$$

o

$$\dot{Q}_k = G_k(Q) \qquad Q_k^{\bullet} = P_k^{\bullet}/\bar{P}_k$$

de donde tenemos

$$G_k(Q) = \left(\frac{1}{\bar{P}_k}\right) H_k[F_k(Q_0\bar{P}_0,\ldots,Q_m\bar{P}_m)].$$

Verificaremos que el sistema (1) satisface la hipotesis del lema (6). Tenemos $Q^{0}>0$; $P^{0}>0$; $\bar{p}>0$ Tambien GK es continuo, FK; H son continuas. Esto permite que se verifique la condicion (5) del lema 6. Ahora si QK' max QK luego tenemos (por definicion de QK) $\frac{p_{k'}}{\bar{p}_{k'}} \geq p_k/\bar{p}_k \quad \forall k.$

Sea G(Q)=0 HK preserva signo => F(P)$\neq$0 y (S*)=>FK' (P)<0

Sea $G_{k'}(Q)$ = (1/PK')HK'[FK'(P)]<0. Dado que HK' preserva signo.

Para probar que QK*$=\min\limits_{k} Q_k$ implica GK*(Q)>0 es analoga.

Luego el lema 6 es aplicable al sistema (1)

Luego existe $\lambda_o \ni Q(t)\rightarrow\lambda_o$ cuando $t\rightarrow\infty$ i.e para K

$$p_k(t)/\bar{p}_k \longrightarrow \lambda_o \qquad \text{cuando } t\rightarrow\infty$$

a equivalentemente

$$p(t)\rightarrow\lambda_o\bar{P} \quad \text{cuando } t\rightarrow\infty$$

Por homogeneidad (H) $\lambda_o P$ es un vector de precio de equilibrio en consecuencia, es unica.

Luego esa convergencia es por la afirmacion (C) del lema (6) es estrictamente monotona en la norma $\|P\|_H = max\left(|p_k|/\bar{p}_k\right)$ donde $\bar{P}$ es un vector de precios de equilibrio i.e la distancia de P(t) a cualquier vector de precio de equilibrio $\bar{P}$ dado por

decrece. Y este decrecimiento es equivalente a que decrezca en por el lema 6.

(*) Demostracion de (b) y (b)

Consideremos la ecuacion diferencial

(1)

o el sistema:

(2)

donde $g_j = P_j/P_j$. Las afirmaciones del teorema quedan claramente establecidas si pueden establecerse para las P'S del lema (7). Todo se verifica facilmente excepto tal vez la condicion (5) tomamos:

es equivalente a:

Po = 1 esto se deduce de que

Si K' es considerada igual a J;

J' como minimo suscrito se trata de manera analoga.

C A P I T U L O I I I

EL EQUILIBRIO GENERAL EN UN CASO DE TRES MERCANCIAS Y EN EL CASO DE UN NUMERO ARBITRARIO DE MERCANCIAS.

Comencemos ahora a ejemplificar la estabilidad del equilibrio competitivo. Para ello, analicemos un mercado con tres mercancias haciendo unicamente suposiciones basicas para el sistema.

Sea Fi(P) (donde $P=(P_1, P_2, P_3)$ que denota la funcion demanda de exceso de la i-esima mercancia, como siempre, si P es un punto de equilibrio, entonces:

$$fi(\hat{P})=0 \quad i=1,2,3$$

Hagamos las siguientes suposiciones (economicas)

1) (Estabilidad burda) $fij(P)>0 \ \forall P \ i\neq j \ i=1,,2,3.$

2) (Homogeneidad) Fi(P)i=1,,2,3) son homogeneas positivas de grado cero i.e fi(P)=fi(P)V >0 .

3) (Ley de Walras) $\sum_{i=1}^{3} P_i f_i(P)=0 \quad \forall P$

4) $Pi>0 \ i=1,2,3.$

5) Existe al menos un $\hat{P}$ que es punto de equilibrio.

Bajo estas suposiciones, probaremos que el punto de equilibrio que es unico, es globalmente estable.

Normalizando podemos reducir nuestro analisis a un mercado con dos mercancias (esto se deduce de la Ley de Walras)

$$\sum_{i=1}^{3} P_i f_i(P)=0 \ \forall P \Rightarrow \text{si: } f_1=0 \ ; f_2=0 \Rightarrow f_3=0$$

i.e si los dos primeros mercados estan en equilibrio, entonces el tercer mercado tambien estara en equilibrio. La tecnica de diagrama de fase nos permite observar la trayectoria de $P(t, P^0)$ y saber si converge o no al supuesto punto de equilibrio. Dicha tecnica consiste en lo siguiente:

Cada curva $\dot{P}i=Kifi(P)=0$ divide al plano en dos regiones, aquella en la cual $\dot{P}i>0$ y donde $\dot{P}i<0$ con $i=1,,2,3$. Recordemos que tambien $P_3=1$. Por ello, podemos omitir cualquier consideracion de P_3; $\dot{P}_3$ lo cual implica que unicamente veremos el plano tridimensional.

Dibujemos primero las curvas $fi(P)=0$ los cuales aseguramos que se abren hacia arriba por el hecho de que tienen derivadas positivas. Para ver esto, consideremos el vector de precios no normalizado P_0, P_1, P_2 sobre la demanda de la K-esima mercancia ($K\geq 1$) luego, (tomando λ como factor proporcional)

$$\frac{dX_k}{d\lambda}=\sum_{r=0}^{m}\frac{df_k}{dP_r}\cdot\frac{dP_r}{d\lambda}$$

Pero $\frac{dX_k}{d\lambda}=0$ (Por ser XK una constante).

$$\frac{dP_r}{d\lambda}=P_r \qquad P\cdot\frac{dF_k}{dP_r}=a_{rk}$$

Por lo tanto

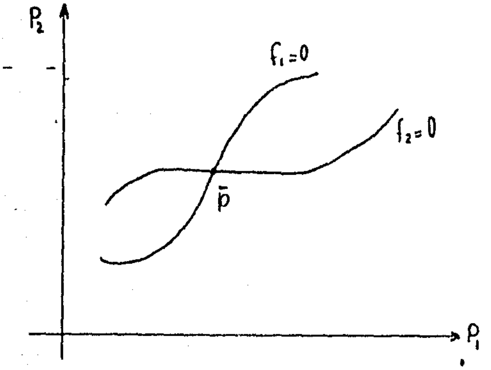
$$\sum_{r=0}^{m}a_{kr}P_r=0$$

luego como $P>0$, entonces no todas las $Akr(r=0, 1,\dots,m)$ seran positivas. Luego si $Akr>0$ para $k\neq r$ (sustituibilidad burda) se sigue que $AKK<0$. Aplicando este argumento a $K=1,2$ tenemos:

$$f_1=0=A_{11}\,dp_1+A_{12}\,dP_2 \qquad \therefore\; -a_{11}\,dP_1=a_{12}\,dP_2 \Rightarrow -\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{dP_2}{dP_1}$$

luego para $f_2 = 0 = -A_{21}\, dp_1 \neq A_{22}\, dp_2$

del argumento anterior A_{21} ; A_{12} son positivas y A_{11} ; A_{22} son negativas ambas derivadas son positivas. Asi, P_2 es una funcion monotona creciente respecto a P_1. De este argumento deducimos que de existir un punto de equilibrio, entonces sera unico.



Analicemos los signos de $\dot{P}_1 = K_1 f_1(P)$ y $\dot{P}_2 = K_2 f_2(P)$.

La siguiente ecuacion se cumple usando el argumento (2)

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\, p_j = 0 \quad \forall p \quad i=1,2,3$$

del argumento (1) tenemos $f_{ij} > 0$ $(i \neq j)$ $P_i > 0$ $i=1,2,3$ para que la ecuacion sea cero, es necesario que $a_{ii} < 0$ $\forall p$ tomemos en cuenta los valores de P_1 ; P_2 para los cuales $f_1 = 0$ en el plano $(P_1 - P_2)$. Esto define una curva (como la que se muestra en la figura).

$A_{12} > 0$ $\forall (P)$ a la izquierda de f_1. Y analogamente $A_{12} < 0$ $\forall P$ a la derecha de f_1. En consecuencia, $A_{21} > 0 \forall P$ a la izquierda de la curva $f_2(P) = 0$ y $A_{21} < 0$ $A_{12} < 0 \forall P$ a la derecha de la curva $f_2(P) = 0$.

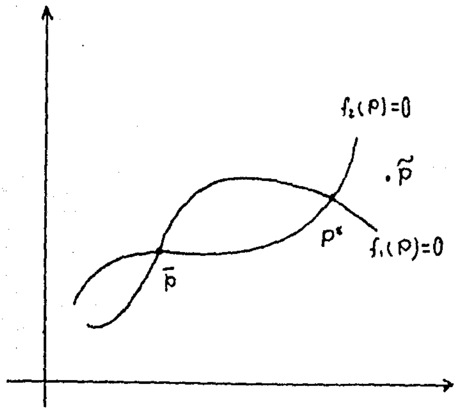
(Posteriormente podemos utilizar los hechos de que $f_{11} < 0$ o $f_{22} < 0$. Asi como los de que $f_{12} > 0$; $f_{21} < 0$.

Del argumento 5 tenemos que existe al menos un punto de equilibrio, por ello, las curvas $f_1(P)=0$; $f_2(P)=0$ se intersectan al menos una vez. (Verifiquemos que tal interseccion se presenta solo una vez).

Procedamos por contradiccion:

Supongamos que $P^*>0$ es tal que $f(P^*)=0$ y tal que $P^*=\bar{P}$ y tales que $P_3^*=P_3=1$.

Bajo esta suposicion tenemos que las curvas f_1, f_2 se intersectan en los puntos $P^*;\bar{P}$.



Luego, en uno de los puntos ocurre que $f_1(P)=0$ intersecta a la curva $f_2(P)=0$ hacia la (derecha?). [Supongamos que ocurre en P^*] como se observa en la figura.

Consideremos un $\tilde{P}$ (que no esta sobre ninguna de las curvas).

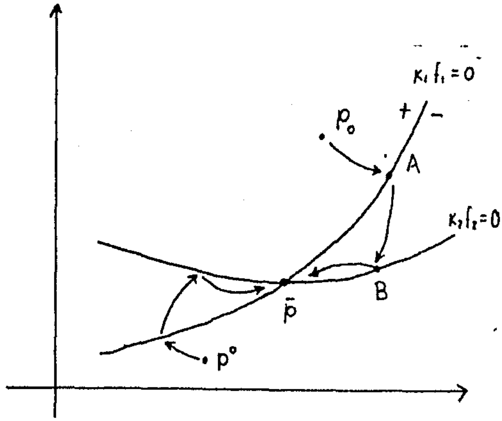
Supongamos que $\tilde{P}$ es tal que: $\tilde{P}_1>P_1^*$; $\tilde{P}_2>P_2^*$ (Notese, sin embargo, que $\tilde{P}_3=P_3^*=P_3=1$). Luego, $f_1(\tilde{P})=0$; $f_2(\tilde{P})=0$. Sacando diferencial respecto a $f_3(P)$ $\partial f_3=\partial f_{31}P_1+f_{32}\partial P_2$ $\therefore$ $\partial P_3=0$ ó $P_3=1$. comparandose los puntos $P^*;\tilde{P}$.

Como $f_3(P^*)\neq 0$ la ecuacion anterior implica que $f_3(\tilde{P})>0$.

($\therefore$ $f_{31}>0$; $f_{32}>0$; $dP_1>0$ $dP_2>0$. ; $\partial f_3>0$). lo cual implica $df_i>0$ $\forall i=1, 2, 3$. Esto contradice la ley de Walras.

Asi queda establecida la unicidad del punto de equilibrio, luego, P* no puede ser punto de equilibrio. Esto implica que $f_1(P)$ intersecte a $f_2(P)$ unicamente en $\bar{P}$.

Analicemos el siguiente diagrama donde se aprecia facilmente la estabilidad global de $\bar{P}$.



Consideremos dos posibles puntos iniciales P_0 ; P^o. Consideremos P_0 $f_1 > 0$; $f_2 < 0$ son tales que $\dot{P}_1^o > 0$; $\dot{P}_2^o < 0$. En otros terminos, P_1 se incrementa cuando $\dot{P}_2$ decrece. Asi, las trayectorias chocan con la curva $f_1(P) = 0$. (Supongamos que chocan en el punto A.) Tenemos que en el punto A; $\dot{P}_1 = 0$ y $\dot{P}_2 < 0$, asi, la trayectoria de los precios entra en la region en la que: $f_1 < 0$ y $f_2 < 0$, donde tanto P_1 como P_2 decrecen con el tiempo. Supongamos que las curvas chocan con la curva $f_2(P) = 0$ en el punto B. En dicho punto, $\dot{P}_2 < 0$ consecuentemente, la trayectoria de los precios volvera a entrar en la region donde $f_1 < 0$; $f_2 < 0$. Aproximandose asi al punto de equilibrio $\bar{P}$.

Algo analogo sucede cuando partamos del punto P^o, comenzara chocando con el punto A', en el cual $\dot{P}_1 = 0$; $\dot{P}_2 > 0$, por lo cual ascendera; supongamos que hasta el punto B' en el cual $\dot{P}_2 > 0$; $\dot{P}_1 = 0$ luego las trayectorias ascenderan hasta llegar a $\bar{P}$.

En el diagrama se prueba la estabilidad apoyandose en el hecho de la sustituibilidad burda. La trayectoria del precio $[P_1(t), P_2(t)]$ cae en la region en la que $\dot{P}_1 < 0$; $\dot{P}_2 < 0$ cuando $P_1 > \bar{P}_1$ $P_2 > \bar{P}_2$ y cae en la region $\dot{P}_1 > 0$; $\dot{P}_2 > 0$ cuando $P_1 < \bar{P}_1$; $P_2 < \bar{P}_2$.

II.- Ahora pasemos a hacer un estudio mas general, buscaremos una pruebā de estabilidad global centrandonos principalmente en la sustituibilidad burda para el caso de n-mercancias.

Consideremos el siguiente sistema normalizado de una economia de cambio puro en n-mercancias:

$$(1) \quad \frac{dP_i(t)}{dt} = f_i[P_1(t), P_2(t), \ldots, P_n(t)] =$$
$$= X_i[P_1(t), P_2(t), \ldots, P_n(t)] - \bar{X}_i \quad i=1,2,3,\ldots,n.$$

tenemos que las funciones fi estan definidas en el ortante no negativo de $\mathbb{R}^n$, y supondremos ademas que son continuamente diferenciables. Supondremos tambien que todas las rapidez de ajuste seran identicamente uno. Adoptaremos el hecho de que $P=(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ se considera como una funcion del tiempo i.e $P=P(t)$. $P(t)$ se supondra que es solucion del sistema de ecuaciones diferenciales anterior y que satisface la condicion inicial $P(0)=P^0$ (al cual supondremos que es positivo) y para cualquier solucion P^0 supondremos que existe una unica solucion $P(t, P^0)$ $t \in (0, \infty)$.

Supondremos que para el sistema dinamico anterior existe un vector de precios de equilibrio P el cual es positivo, en el cual la funcion de demanda de exceso toma valores singulares, y son continuamente diferenciales, finalmente, supondremos que las siguientes relaciones se cumplen:

1).- (Ley de Walras) $\sum_{i=1}^{n} p_i\, f_i(p) = 0$

2).- (Homogeneidad) $x_i(p) = x_i\, \alpha(p) \quad i=1,2,\dots,n \quad \forall \alpha>0$

3).- (Sustituibilidad burda) $\dfrac{d\, x_i(p)}{d\, p_j} > 0 \quad \forall p \quad i \neq j \quad i,j = 1,2,\dots,n$

Supondremos que todas las relaciones anteriores se cumplen para cualquier t ≥ 0 y P(t)>0 por lo cual podremos reescribir la Ley de Walras como: $\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\, f_i[p(t)] = 0$

y la suposicion de homogeneidad implica que $f_i(P)$ es homogenea de grado cero. Y luego podemos escribir la ecuacion de Euler como:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(t)\, f_{ij} = 0 \quad i=1,2,\dots,n$$

donde $f_{ij} = \dfrac{d f_i}{d\, p_j}$ en vista de (3) $f_{ij} > 0 \quad i \neq j \quad i,j = 1,2,\dots,n$

Bajo estas consideraciones, podemos escribir el siguiente lema:

Lema 3.E.1 Suponiendo la Ley de Walras tenemos:

$$\|P(t)\| = \|P(0)\| \quad \forall t \geq 0 \quad \text{donde} \quad \|P(t)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} P_i^2(t).$$

Demostracion: Tomando la diferencial respecto a t de $\|P(t)\|^2$ tenemos:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} P_i^2(t)\right] = 2 \sum_{i=1}^{n} P_i(t)\, \dot{P}_i(t) = 2 \sum_{i=1}^{n} P_i(t)\, f_i(P(t)) = 0$$

esto se cumple dada la Ley de Walras, luego tenemos:

$$\|P(t)\| = \|P(0)\| = cte.$$

Ahora consideremos el siguiente:

Lema 3.E.2 La suposicion de homogeneidad y sustituibilidad burda (2) y (3) implican que el vector de precios de equilibrio es unico para un (multiplo) escalar positivo.

Demostracion: Hagamos la prueba por contradiccion:

Supongamos entonces que $\hat{P}$; P^* son dos vectores de precio de equilibrio tales que $P^* \neq \alpha\hat{P}$, para cualquier $\alpha > 0$.

Sean $\hat{P}/P^* = m$; $\{\hat{P}_1/P_1^*, \hat{P}_2/P_2^*, \ldots, \hat{P}n/Pn^*\}$.

Y escribamos $\mu = \hat{P}_i/P_i^*$. Por definicion $\mu \leq \hat{P}_i/p_i^* \; \forall i \quad \hat{P}_i \geq P_i^* \; \forall i$

Consecuentemente $P^* \neq \alpha P$. Para cualquier $\alpha > 0$. $\hat{P}i > \mu Pi^*$ para cualquier $i \neq I$. Escribamos $\tilde{P}i \geq \mu Pi^*$, en consecuencia, $\tilde{P}i \geq \hat{P}i$ para toda i, la desigualdad estricta se cumple cuando $i \neq I$.

De la suposicion de estabilidad burda tenemos:

$X_I(\hat{P}) > X_I(\tilde{P})$ y de la suposicion de homogeneidad tenemos $fi(P^*) = 0$. Lo cual implica que $fi(\tilde{P}) = 0$. Por lo tanto, tenemos $\bar{X}_I = X_I(\tilde{P}) > 0 > \tilde{X}_I$ pero esto es una contradiccion.

Observaciones: I) Este lema establece que cualquier vector de precios de equilibrio se expresara en la forma $\alpha\hat{P}$ donde α es algun numero positivo. Geometricamente, esto quiere decir que hay un rayo de equilibrio unico (la estabilidad se presenta en una unica direccion) $\{\alpha\hat{P} ; \alpha > 0\}$

II) Observe que nunca utilizamos la ley de Walras

III) Del lema 3.E.1 sabemos que P(t) se mueve sobre la esfera del radio $\|P(0)\|$. En consecuencia, el lema (3.E.2) implica que si $P(t) \to \tilde{P}$ (un vector de precios de equilibrio), entonces $\hat{P}$ es unico y queda restringido a una esfera.

IV) Al establecer esta prueba se cometio un error que corregiremos en el apendice (lema [1]) de este capitulo. -

Consideremos ahora el siguiente:

Lema 3.E.3 Sea $\hat{P}$ un vector de precios de equilibrio y supongamos que se cumple la Ley de Walras, la homogeneidad y la sustituibilidad burda.

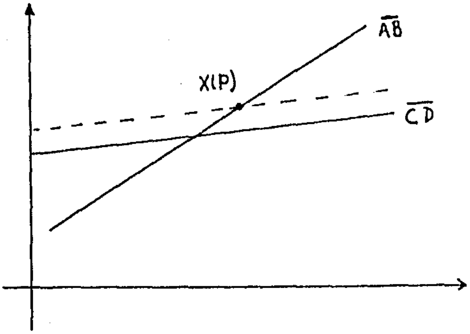
Tenemos que: $\sum \hat{p}_i f_i(p) > 0 \quad \forall p > 0 \ni p = \alpha \hat{p} \quad \forall \alpha > 0$

Demostracion: El punto $\hat{X}$ de la figura 3.7 representa los stocks de las dos mercancias $\bar{X}=(X_1, X_2)$ para un vector de precios de equilibrio $\hat{P}$. Entonces $X_1(\hat{P})=\bar{X}_1$; $X_2(\hat{P})=\bar{X}_2$. Sea P un vector de precios tal que $p \neq \alpha \hat{p} \ \forall \alpha > 0$.

Por el lema 3.E.2 "P" no es un vector de precios de equilibrio. Como una consecuencia de la Ley de Walras tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i(p) = \sum_{i=1}^{n} p_i \bar{x}_i$$

en consecuencia un punto $[X_1(P), X_2(P)]$ esta sobre la linea $\overline{AB}$, los cuales pasan por el punto $\bar{X}$, cuya pendiente esta dada por P.



Sea $\overline{CD}$ la linea que pasa por $\bar{X}$ y cuya pendiente esta dada por $\hat{P}$. Supongamos que

$\hat{P}_1/\hat{P}_2 > P_1/P_2$ (bajo la suposicion en que $\hat{P}_1/\hat{P}_2 < P_1/P_2$ el lema se prueba de manera analoga).

En otras palabras, supondremos que $\overline{CD}$ tiene una pendiente mayor que $\overline{AB}$.

Esta suposicion supone que $\hat{P}_1/P > P_1/P$.

Escribamos $\mu = \hat{P}_2/P_1$, entonces $\hat{P}_1 > \mu P_1$ y $\hat{P}_2 > \mu P_2$. Luego a consecuencia de la sustituibilidad burda tenemos: $X_2(\hat{P}) > X_2(\mu(P))$

Pero la ley de Walras implica que:

$$\mu P_1 X_1(\hat{P}) + \mu P_2 X_2(\hat{P}) = \mu P_1 \bar{X}_1 + \mu P_2 \bar{X}_2 = \mu P_1 X_1(\mu(P)) + \mu P_2 X_2(\mu(P)) \therefore$$

$$X_1(\hat{P}) < X_1 \mu(P).$$

Usando la suposicion de homogeneidad, tenemos:

$$X_1(P) = X_1 \mu(P) > X_1(\hat{P}) = \bar{X}_1 X_2(P).$$

luego el punto $X(P) = [X_1(P)\ X_2(P)]$ esta en la recta del punto $\bar{X}$ en la figura 3.7. Ahora, dibujemos una linea paralela a CD que pase por X(P). En consecuencia, tenemos que:

$\hat{P}X(P) > P.\bar{X}$ $\hat{P}.f(P) > 0$ donde $f(P) = [f_1(P), f_2(P)]$ Q. E. D.

Observaciones: I) El lema establece que en cualquier situacion de desequilibrio, la suma de las demandas de exceso ponderada por los precios de equilibrio, tambien son positivos. Luego, el axioma debil de preferencias reveladas de Samuelson establece que:

$$P.\Delta x \leq 0 \Rightarrow P'\Delta x < 0.).\Delta x = X(P') - X(P)$$

este axioma se cumple para la demanda total de mercados. La Ley de Walras implica que: $P.X(P) = \bar{X}.P = P.X(\hat{P})$ donde $\hat{P}$ es un vector de precios de equilibrio.

Queremos ver cuando $P.\Delta X = 0 \Rightarrow \hat{P}\,[X(P) - X(P)]$. A consecuencia del axioma debil tenemos que:

$$\hat{P}\cdot\Delta X<0 \Rightarrow \hat{P}[X(\hat{P})-X(P)]<0 \quad \int P\cdot[X-X(P)<0$$

lo cual se deduce del axioma de Samuelson.

II) Si se cumple el axioma debil, entonces el equilibrio es unico $P\cdot Q\alpha>0$. La demostracion aqui se hace por contradiccion i.e Sup $p^{*}\neq\alpha\hat{p}$ sea $fi(P^{*})=0\ \forall i$.

Por la suposicion tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n}\hat{p}_i f_i(p^{*})>0$$

$\forall$ Aqui la sustituibilidad burda no es necesaria.

Observaciones: III) Observese que la unicidad es una consecuencia de la suposicion restrictiva de la sustituibilidad burda o del axioma debil de Samuelson.

Para finalizar este capitulo, analicemos el siguiente:

Teorema 3.E.1: (Arrow, Block, Hurwicz) Sea $\hat{P}$ un vector de precios de equilibrio, bajo la suposicion de :

1) Ley de Walras

2) Homogeneidad

3) Sustituibilidad burda

El sistema descrito por:

$$\frac{d\,P_i(t)}{dt}=f_i\left[P_1(t),P_2(t),\ldots,P_n(t)\right]=X_i\left[P_1(t),\ldots,P_n(t)\right]-\bar{X}_i$$

Es globalmente estable.

Demostracion:

Consideremos la distancia Euclidiana entre: $P(t)$ y $\hat{P}$. Probaremos que esta distancia converge a cero cuando $t \to \infty$. Sea $D(t) = \|P(t)-\hat{P}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} [P_i(t) - \hat{P}_i]$ del lema (3.E.1) tenemos:

$\|P(t)\| = \|P(0)\|$. diferenciando $D(t)$ respecto a t tenemos:

$$dD(t)/dt = \frac{d}{dt}\left[\sum^{n} P_i(t) - \hat{P}_i\right]^2 = 2\sum (P_i(t) - \hat{P}_i)\ \frac{dP_i}{dt} =$$

$$2\sum (P_i(t) - \hat{P}_i)\cdot f_i(P) = 2\left[\sum_{i=1}^{n} P_i(t) f_i(P) - \sum_{i=1}^{n} \hat{P}_i f_i(P)\right] =$$

$$= -2\sum_{i=1}^{n} \hat{P}_i f_i(P) \quad \text{por la Ley de Walras.}$$

Luego $dD(t)/dt < 0$ Por 3.E.3 $P \neq \alpha\hat{P}$ $\forall \alpha > 0$.

Si $P = \alpha\hat{P} \Rightarrow dD(t)/dt = 0$; [$f_i(\alpha\hat{P}) = 0$ $\forall i$].

Bajo la suposicion de que $P \neq \alpha\hat{P} \Rightarrow dD(t)/dt < 0$

$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} P(t) \to \hat{P}$. $D(t)$ siempre sera acotada por cero, luego $P(t)$ esta acotado por $\hat{P}$.

Sea $P \equiv \{ P_i \| P\| = \|P(0)\|\} \Rightarrow \exists V_\delta(\hat{P})$ $\cdot\ni\cdot$ $\delta > 0$

luego $P(t) \in \bar{P} = \{p / B_\epsilon(\hat{P})\ \forall t\}$ $\therefore$ $\bar{P}$ es compacto

$\frac{dD}{dt}$ es continua en P. $\frac{dD}{dt}$ alcanza su maximo en $\bar{P}$ (Por Weierstrass).

Luego $\frac{dD}{dt} < 0$ en $\bar{P} \Rightarrow \exists \delta^* > 0$ $\cdot\ni\cdot$ $\frac{dD}{dt} \leq -\delta^* < 0$

integrando de 0 hasta t tenemos:

$$\int_0^t \frac{dD}{dt}\cdot dt \leq -\int_0^t \delta^* dt \ \therefore\ D(t) - D(0) \leq -\delta^*(t) \ \therefore\ D(t) \leq D(0) - \delta^*(t)$$

Para t suficientemente grande $D(t)<0$▼

La norma es no negativa.∎

Observacion: I) La suposicin de sustituibilidad burda se sustituye por el axioma debil de Samuelson.

II) Arrow, Block y Hurwicz dan una prueba basandose en la norma maxima $Dm=\max_i \{ P_i(t) - \hat{p}_i / \hat{p}_i \}$ .La prueba bajo la norma maxima no necesariamente implica la convergencia monotona bajo la norma Euclidiana.

A P E N D I C E

C A P I T U L O   I I I

ALGUNOS PROBLEMAS BASICOS SOBRE FUNCIONES.

DEMANDA DE EXCESO

"Estas notas abordan los problemas basicos de las funciones demanda de exceso que aparecen en el escrito "Sobre la Estabilidad del Equilibrio Competitivo II" escrito por Arrow; Block; Hurwickz. intento mostrar que es posible obtener los mismos resultados con algunas modificaciones de los metodos de demostracion de los lemas"

1.

Usaremos la misma notacion y las mismas definiciones que utilizaron Arrow; Block; Hurwicz. Primero echaremos un vistazo a su lema 1.

Lema 1.- Si las funciones demanda de exceso son homogeneas positivas (H) y satisfacen la forma diferencial (Sd) de sustituibilidad burda, entonces la demanda de exceso para cualquier mercancia libre es positivo infinito, se prueba que no todas las mercancias son libres i.e si $P \geq 0$ y para alguna $r \geq 0$, $P_r=0$ entonces $F_r(P)=+\infty$

Corolario al lema 1: Bajo condiciones del Lema 1 si $\bar{P}$ es un vector de precios de equilibrio, entonces $\bar{P}>0$; $F(\bar{P})=0$.

En este lema tanto (H) como (S) se asumen. Pero en este caso $F(P)$ no tiene valor definido si $P \neq 0$ y algunos de sus componentes se anulan.

Supongase sin perdida de generalidad $P=(P_o, P_1, \ldots, Pr, 0.., 0)$ $(P_i>0 \quad i=0,1,\ldots,r; 0=r=m)$. Entonces $Fr+1(P_o, \ldots, 0, Pr, 0\ldots, 0) < Fr+1 (2Po, \ldots, 2Pr, 0, \ldots, 0) = Fr+1(Po, \ldots, Pr, 0\ldots, 0)$.

Por (S_F) y (H) esto es una contradiccion. Por ello F no tiene significado cuando P es un punto acotado de $\mathbb{R}+^{m+1}$, el ortante positivo del espacio Euclidiano de dimension m+1. Luego esto implica que si $\bar{P}$ es un vector de precios de equilibrio i.e tiene un valor definido $F(\bar{P})=0$ entonces $\bar{P}>0$.

Asi el corolario anterior proporciona mas bien una definicion y no algo que mostrar. Por ello adoptemos la siguiente definicion.

Definicion: Una funcion demanda de exceso F(P) es un mapeo continuo de $\mathrm{int}(\mathbb{R}+^{m+1}) \to \mathbb{R}^{m+1}$ el cual posee un punto de equilibrio. i.e existe un punto $\bar{P}$ en $\mathrm{int}+(\mathbb{R}+^{m+1})$ tal que $F(\bar{P})=0$.

En consecuencia, F(P) no tiene significado sobre algun punto acotado en $\mathbb{R}^{m+1}$ uno puede esperar interpretar el Lema 1 del siguiente modo: Fr(P) tiene un limite en el infinito cuando P tiende a cero, ningun otro componente de P permanece fijo. Pero esto no es cierto siempre como deja ver el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.- Sea m=1 y $Fo(Po,P_1)=-F_1(Po,p_1)=A(Po,P_1)-(\pi/4)$ donde $0<A(Po,P_1)<\pi/2$ y entonces $(A(Po,P_1))=P_1/Po$. De aqui se desprende inmediatamente que F satisface las condiciones de las funciones de demanda de exceso (S_D);(H). Pero $\lim_{P_r\to 0} Fr(Po,P_1)=\frac{\pi}{4}<+\infty$.

Esto permite que haya puntos que sirvan fuera justo donde las pruebas de Arrow, Block y Wurwuicz fallan. No usamos para nada la ley de Walras. Por ello en la prueba supuesta del Lema 1 Aparecen errores en la desigualdad (6) (vea Pag.87 de [1]). Para $t=0$ no hay ninguna cosa en la prueba la que se puede requerir que (6) se cumpla.

Lema 1(W): Supongamos (H); (W); (Sf) se cumplen. Fijando P_i'S $(i\neq j)$ arbitrariamente $F_j(P_0,\dots,P_m)$ tienden a infinito positivo cuando P_j tiende a cero.

Demostracion: Sin perdida de generalidad podemos suponer que $j=0$, escojamos λ tal que $\lambda P_i > \bar{P}_i$ para toda $i\geq 1$.

donde de $F(\bar{P})=0$. Entonces

$$F_0(\bar{P}_0, \lambda P_1,\dots, \lambda P_m) > F_0(\bar{P}_0,\bar{P}_1,\dots,\bar{P}_m)=0.$$

Si $P_0<\bar{P}_0$

$$\bar{P}_0 \bar{F}_0(\bar{P}_0, \lambda P_1,\dots,\lambda P_m) = -\sum_{i=1}^{m} \lambda P_i F_i(P_0, \lambda P_1,\dots,\lambda P_m) <$$

$$< -\sum_{i=1}^{n} \lambda P_i F_i(P_0, \lambda P_1,\dots \lambda P_m)$$

$$= P_0 F_0(P_0, \lambda P_1,\dots, \lambda P_m).$$

haciendo que P_0 tienda a cero hacemos que se cumpla el lema.

2.

En la pagina 89 de su articulo Arrow Block y Hurwicz establecen el siguiente lema:

Lema 4.- (S*) y (H) implican la unicidad del vector de precio de equilibrio. i.e (W) si $F(\bar{P}^*)=F(\bar{P}')=0$ entonces $\bar{P}^*=\lambda\bar{P}'$ para alguna $\lambda>0$.

Pero esta disposicion no se cumple como se establece, como se deja ver en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.- Sea $m=1$ $A(Po,p_1)$ se define como en el ejemplo 1 y

$Fo(Po,P_1)=-F_1(Po,P_1)$.

$$= \begin{cases} A(Po,P_1)-\pi/4 & \text{si } (\pi/4)<A(Po,P_1)<(\pi/2) \\ 0 & \text{si } (\pi/6)<A(Po,P)\leq(\pi/4) \\ A(Po,P)-(\pi/6) & \text{si } 0<A(Po,P_1)<(\pi/6) \end{cases}$$

Se observa claramente que F satisface la condicion (H).

Pero la prueba de que F satisface (S*) falla.

Si $F(P)\neq 0$ entonces se sigue que o (i)$(\pi/2)>A(Po,P_1)>(\pi/4)$

o (ii) $\pi/6>A(Po,P_1)>0$. Consideremosles por separado.

(i) Sea $\bar{P}$ un punto de equilibrio. Entonces $\lambda P_1=\bar{P}o$, $\lambda Po<\bar{P}o$ para alguna $\lambda>0$ en consecuencia $\lambda P_1/\bar{P}_1=1>\lambda Po/\bar{P}o$ y $P_1/\bar{P}_1>Po/\bar{P}o$

Haciendo $K'=0$; $K'=1$ y

$FK'(P)=F_1(P)=-(A(Po,P_1)-(\frac{\pi}{4}))<0$.

$FK'(P)=Fo(P)=A(Po,P_1)-(\frac{\pi}{4})>0$

(ii) En este caso existe $\lambda>0$ tal que $\lambda P_1/\bar{P}_1<1=\lambda Po/\bar{P}o$ y la prueba es analoga a la anterior.

El lector encontrara que los autores gastaron energia inutilmente en el topico de la pagina 90 en [1]. En la linea 4 establecen correctamente que $P'''<P'$. Pero esto no se sigue de (S*) que $F_k(P''')>0$ en consecuencia si $FK(P''')=0$ esto no puede ser una contradiccion para (S*). Es claro que el lema es valido si usamos (Sf) en vez de (S*).

3.

Se puede dar un contraejemplo a la prueba del lema 3.

Ejemplo 3.- Sea $P-(Po,P_1)Po<P_1$; entonces $V=0$. Luego $\overset{v}{X}{**} = \overset{o}{X}{**} = X_1^o$

$F_1 (Po,P_1)=0$ y $1!\overset{o}{X}{**} = 0$ lo cual contradice el argumento dado en la pagina 93 (nueve lineas de abajo hacia arriba).

Pero podemos obtener la misma conclusion modificando la prueba. Para $K \leq V$ $X_k^{v+1} - X_k^{v} > 0$ por (Sf). En consecuencia.

$$P_{\ast}^{v} (X*^{v+1} - X*^{v})(P*^{v+1}, \dots, Pm^{v+1})(X*^{v+1} - X*^{v}) =$$

$$= (Pv+1, \dots, Pv+1)(X*^{v+1} - X*^{v})$$

Y la desigualdad estricta se cumple en la pagina 93 (quince lineas de abajo hacia arriba).

C A P I T U L O   I V

A P E N D I C E   M A T E M A T I C O

Aqui estan las piedras de cimiento
Sobre este basamento podeis vivifar
Buestras sospechas y hacerlas penetrar
En el terreno de lo cierto

ALGEBRA LINEAL

En esta parte del apendice matematico enunciaremos, sin demostrar, los resultados que se requieren a lo largo del texto y que estan mas apegados al tema.

Teorema:- Consideremos BX=C donde b_{ij} 0.

Para todo i j, las siguientes condiciones con equivalentes:

(I) Dado $C>0, X\geq 0$

(II) Dado $C\geq 0$, $X\geq 0$

(III) Los menores principales del lado izquierdo de B, son positivos.

(IV) B es una P-matriz (i.e todos los menores principales de B son positivos).

Definicion.- Una matriz cuadrada A es descomponible si existe una matriz de permutacion P tal que:

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} \\ 0 & A^{22} \end{bmatrix}$$

donde A^{11} y A^{22} son submatrices cuadrada no necesariamente del mismo orden y 0 denota la submatriz -cero.

La matriz cuadrada A es indescomponible si no es descomponible.

Teorema:- Consideremos BX=C, donde $b_{ij}\leqq 0$ para todo $i\neq j$.

Sea A una p-matriz indescomponible, entonces, tendremos $X>0, C\gneqq 0$

Teorema:- Consideremos $B'p = v$ doonde $b_{ij}\leqq 0$.

Para todo $i\neq j$. Las siguientes condiciones son equivalentes.

I) Dado $V>0$ $P\geq 0$

II) Dado $V\geq 0$ $P\geq 0$

III) Los menores principales de la parte superior B′ son positivos.

IV) B′ es una P-matriz.

Teorema:- BX=C tiene solucion factible si $B'p=v$ tiene solucion factible.

Definicion:- La matriz cuadrada A tiene una diagonal dominante en el sentido original si

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| = Q_j \qquad j=1,\ 2,\dots,n$$

esta definicion se establecio en terminos de suma de columnas una definicion equivalente.

Puede establecerse con sumas de renglones y quedaria expresado como:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| = P_j \qquad i=1,\ 2,\dots,n$$

Podemos obtener el siguiente resultado.

Teorema:- Si A tiene diagonal dominante, entonces no sera singular.

Teorema:- Cada raiz de A esta en, al menos, uno de los circulos

- $|Z - a_{jj}|\leq Q_j$ $j=1,\dots,n$ Y, al menos, uno de los circulos

$|Z - a_{ii}|\leq P_i$ $i=1,\ 2,\dots,n$

Teorema:- Si A tiene diagonal dominante negativa, la parte real de cada raiz de A, es negativa.

Teorema:- Sea A indescomponible. Si $|a_{jj}| \geq Q_j$ Para todo j donde, al menos, una desigualdad es estricta, entonces A es no singular.

Definicion:- La matriz cuadrada A tiene diagonal dominante en sentido extendido (D.D) si existe di>0 i=1, 2,....,n tal que:

$$d_j | a_{jj}| > \sum_{i \neq j} d_i | a_{ij}|$$

Se observa facilmente que si A tiene D. D., entonces B=DA tiene d.d y donde $D=|d_i \delta_{ij}|$.

Teorema:- Si la matriz cuadrada A tiene D. D (diagonal dominante en sentido extendido), entonces, A no es singular.

Teorema:- Si A es indescomponible y existe di>0 i=1,....,n tal que

$d_j| a_{jj}| \geq \sum d_i| a_{ij}|$ para toda j, al menos, una desigualdad estricta. Entonces, A no es singular.

Definicion:- La matriz cuadrada A tiene diagonal cuasi dominante si:

I) Cuando A es indescomponible existe di>0 i=1, 2,....,n tal que $d_j | a_{jj}| \geq \sum_{i \neq j} d_i | a_{ij}|$ para toda j, con al menos, una desigualdad estricta.

II) Cuando A es descomponible existe di>0 i=1,....,n tal que $d_j |a_{jj}| \geq \sum d_i |a_{ij}|$ para toda j, al menos, una desigualdad estricta para j.

Teorema:- Si A es cuasi diagonal dominante, entonces A no es singular.

Teorema:- Si A es cuasi diagonal dominante negativa, entonces, la parte real de cada raiz de A es negativa.

Teorema:- Sea B una matriz cuadrada con $b_{ii}>0$ para toda i y $b_{ij}<0$ para toda $i\neq j$. Entonces, $BX=C$ tiene una unica solucion X 0, donde C 0 sii B es cuasi diagonal dominante.

Teorema:- Sea B una matriz cuadrada donde $b_{ii}>0$ para toda i b_{ij} 0 para toda $i\neq j$. Entonces, $BX=C$; $X\geqq 0$; $C\geqq 0$ sii B tiene diagonal cuasi dominante.

Teorema:- Sea A una matriz cuadrada positiva entrada a entrada. Entonces, existe una raiz no negativa de A, que la describiremos por $\lambda^*(A)$ y su vector caracteristico correspondiente, que sera semi positivo.

Lema:- Sea B una matriz cuadrada tal que $b_{ij}\leq 0$ $i\neq j$, entonces $B^{-1}\geq [0]$ sii B es una p-matriz.

Definicion:- Sea $A\geqq[0]$. Definimos $H(A)=\{\alpha : (\alpha I-A)^{-1}\geqq[0]\}$. H(A) es el conjunto de escalares α tal que $\alpha I-A$ satisface el teorema HawKin-Simons.

Veamos algunas propiedades de este conjunto H(A).

Lema:- $H(A)\neq\emptyset$

Lema:- Si $\alpha\in H(A)$; $\beta\in H(A)$ para todo $\beta\geq\alpha$.

Definicion:- Sea $\lambda^*(A)=\inf\{\alpha / \alpha\in H(A)\}$; $\lambda^*(A)\geqq 0$

luego, podemos escribir

Lema:- $\lambda^*(A)\notin H(A)$

Lema:- $\alpha;\beta\in H(A), \beta>\alpha$ entonces $Y(\alpha)> Y(\beta)$

Matrices indescomponibles.

Teorema: Si $A \geq [0]$ es indescomponible, entonces $\lambda^*(A) > 0$ y si su vector caracteristico correspondientes es positivo.

Teorema:- Si A es indescomponible y $A \geq B \geqq (0)$, entonces:

$\lambda^*(A) \geqq \lambda^*(B)$

Teorema:- Todos los menores principales, excepto el determinante de $\lambda^*(A)I-A$ son positivos.

Teorema:- $\lambda^*(A)$ es una raiz simple de A.

Teorema:- Sea $A \geq [0]$. La ecuacion $(I-A)X=C$ tiene una solucion $X \geq 0$ para $C \geq 0$ sii $1 > \lambda^*(A)$.

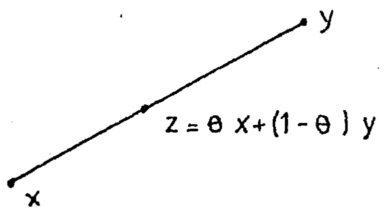
Teorema:- Sea $A \geq [0]$. Entonces $|\lambda_i(A)| < 1$ sii $I-A$ es una p-matriz

CONJUNTOS CONVEXOS.

Consideremos un espacio lineal arbitrario X y no necesariamente debe ser $\mathbb{R}^n$. Aunque puede tomar a $\mathbb{R}^n$ si lo desea.

Definicion.- Dado X ; Y en el espacio X si definimos $Z=\theta X+(1-\theta)Y$ $0 \leq \theta \leq 1$ con $\theta \in \mathbb{R}$, diremos que Z es combinacion convexa de X ; Y

El concepto de combinacion convexa podemos representarlo graficamente como:



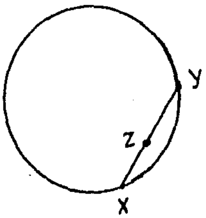
En la figura ocurre que si $\theta = 1$, entonces $Z=X$

Pero si $\theta = 0$, entonces $Z=Y$.

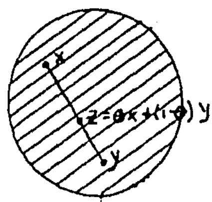
Definicion.- Sea $S \subset X$ siendo X un espacio lineal. Si una combinacion convexa arbitraria de cualquier dos puntos de S, tambien esta en S, entonces diremos que S es convexo, algebraicamente lo escribiremos como si X ; $Y \in S$ y S es convexo, entonces

$$\theta \bar{X} + (1 - \theta) Y \in S \quad \text{para} \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Ejemplo: Un circulo no es un conjunto convexo dado que si unimos dos puntos de el, la recta que las une cae fuera del circulo, si observamos la figura, vemos que no esta en el circulo.



Pero ocurre que, si en vez de ello tomasemos la region que queda encerrada en el circulo, se observa que esa region si sera convexa, dado que cualesquiera dos puntos, que estan en ella, al unirse, sucede que su linea de union queda en la region.



Definicion.- Dados m puntos X^1, X^2, ..., X^m en un espacio lineal X y si definimos X por:

$$X = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \, X^i \quad \text{donde} \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

donde 1=1, 2,....,m y $\sum_{i=1}^{m} \theta_i = 1$, se denomina una combinacion convexa de los m-puntos.

Teorema.- Un conjunto S en un espacio lineal X es convexo si Y solo si toda combinacion convexa de (dos o mas) puntos en S pertenece a S.

ii) Cualquier interseccion finita (o infinita) de conjuntos convexos tambien es convexa.

La primera parte se desprende de lo anotado previamente. la segunda parte puede pensarse de la siguiente manera: Como la interseccion de los conjuntos convexos esta en cada uno de ellos, entonces tambien debe ser convexa. dado que si no. el conjunto que la contiene no seria convexo. ello por la definicion de conjunto convexo.

Definicion: Sea $S \subset X$ donde X es un espacio lineal. Dados m puntos en S, X^1, $X^2, \ldots, X^m$ y definamos $X = \sum \alpha_i X^i$, donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $i = 1, 2, \ldots, m$ y ademas $\alpha_i \geq 0$, diremos que es una combinacion lineal no negativa de esos m puntos.

El siguiente teorema es muy usual:

Teorema: Sean Si i=1, 2,...,n conjuntos convexos en un espacio lineal X. Entonces se cumple lo siguiente:

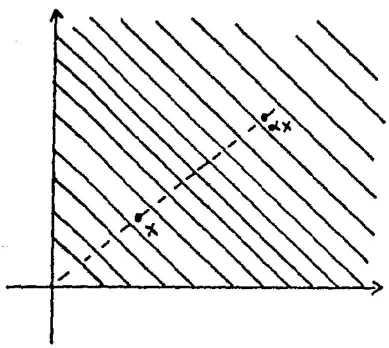
1) La suma lineal $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i S_i$ tambien es convexo.

2) El producto cartesiano $\bigotimes_{i=1}^{m} S_i$ tambien es convexo.

Por producto cartesiano de los Si entendemos los conjuntos de m-uplos $(X^1, X^2, \ldots, X^m)$ donde $X^i \in S_i$ $i=1, 2, \ldots, m.$

Definicion: Sea $K \subset X$ donde X es un espacio lineal. K se denomina un cono convexo con vertice en el origen, si $\alpha \geq 0$ $\alpha \in \mathbb{R}$ y si $X \in K$ implica que $\alpha X \in K$.

Tenemos que el semiplano positivo del plano cartesiano sera

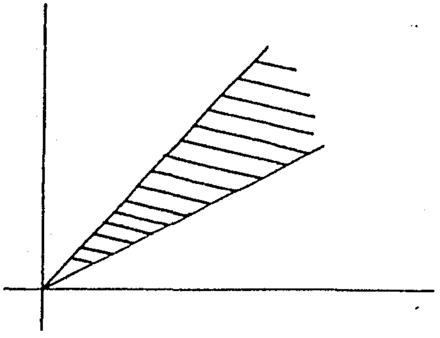


un cono formalmente, este cono se denomina Ω^m y es el hiperplano con coordenadas positivas, es decir, si $(X^1, \ldots, X^m) \in \Omega^m$ entonces $X^i \geq 0$ $\forall i=1, 2, \ldots, m$

Definicion: Sea $K \subseteq X$ donde X es un espacio lineal. K es denominado cono convexo con vertice en el origen si es un cono con vertice en el origen y con la siguiente propiedad

$X, Y \in K$ implica $X + Y \in K$.

es posible definir un cono convexo con vertice distinto del origen, aunque nosotros unicamente utilizamos conos convexos con vertice en el origen. Tenemos que todo cono convexo es un conjunto convexo y tambien todo cono contendra al origen (al menos aqui). Podemos observar que la region comprendida entre dos lineas es un cono convexo.



Podemos establecer un teorema equivalente al anterior.

1) $\sum_{i=1}^{m}$ Ki es un cono convexo si las Ki son conos convexos para todo i.

2) Cualquier interseccion finita o infinita de conos convexos es tambien un cono convexo.

La union de dos conos convexos no necesariamente es un cono convexo, dado que la combinacion convexa puede salirse de la region, dado que tambien es conjunto convexo.

Definicion: Dado un conjunto S en un espacio lineal X, la interseccion de todos los conos convexos que contienen a S se denomina un cono convexo generado por S, y lo denotaremos por K(S).

Debemos observar que K(S) es el menor cono convexo que contiene a S podemos definir a K(S) como:

$$\bar{K}(S)=\sum \alpha_i X^i ; X^i \in S, \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \qquad \alpha_i \geqq 0 \ i=1, 2, \ldots, m$$

donde m, X^i, α^i se eligen arbitrariamente.

Si S consta de un numero finito de puntos, entonces K(S) se denomina un cono poliedrico convexo, p. ej. en $\mathbb{R}^2$ los dos puntos (0, 1) y (1, 0) generan el poliedro K(S) que es el octante positivo.

Finalizamos esta retahila de conceptos con los siguientes teoremas:

Teorema: Sea f una funcion lineal de un espacio lineal X en un espacio lineal y. Si S es un subconjunto convexo de X, entonces, su imagen f(S) sera un subconjunto convexo de y.

Teorema: Todo cono poliedrico convexo sera cerrado.

Teorema: Sea $\bar{X}$ un conjunto convexo no vacio en $\mathbb{R}^n$. Sea $X_c \notin \bar{X}$, entonces es cierto lo siguiente:

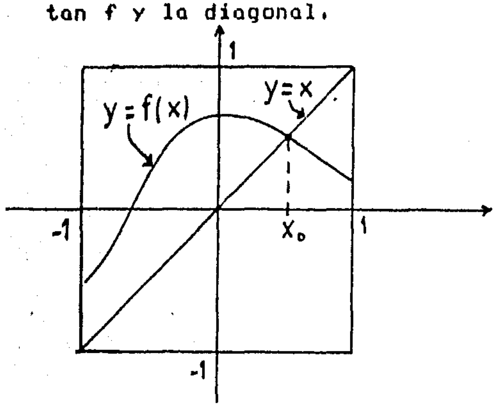
1).- Existe un punto a en $\bar{X}$ tal que $d(X_o, a) \leq d(X_o, X)$, para todo punto $X \in \overline{X}$ y $d(X_0, a)>0$.

2).- Existe un $p \in \mathbb{R}^n$ $p \neq 0$, $\|p\| < \infty$ y un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $p.X \geq \alpha$ para todo $X \in \overline{X}$ y $p.X_0 < \alpha$

Teorema.- Sean X: Y conjuntos convexos no vacios en $\mathbb{R}^n$ (no necesariamente cerrados) tal que $X \cap Y = \emptyset$. Entonces existe $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq \bar{0}$ $\|p\| < \infty$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $p \cdot X \geqq \alpha$ para todos $x \in X$. y $p \cdot Y \leqq \alpha$ $\forall y \in Y$.

TEOREMAS DE PUNTOS FIJOS.

Sea f una funcion continua del intervalo cerrado $[-1,1>$ en el mismo. En la figura tenemos que f corta a la recta diagonal en un punto y es tal que f(X)o=Xo donde Xo es el punto donde se cortan f y la diagonal.



Topologicamente podemos definir esto como sigue: Un espacio topologico X se llama espacio de punto fijo si toda funcion continua de X en si mismo tiene un punto fijo. en el sentido de que f(Xo)=Xo para algun $Xo \in X$.

A continuacion expondremos los principales teoremas del punto fijo:

Teorema del punto fijo de Brower!- La esfera unitaria

$S=\{ x : \|x\|<1\}$ en $\mathbb{R}^n$ es un espacio de punto fijo.

Teorema del punto fijo de Shauder!- Todo subespacio compacto y convexo de un espacio de Banach es un espacio de punto fijo.

Teorema de Picard!- Si f(X,Y) y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en un rectangulo cerrado R= $\{ (X,Y) / a_1 \leq X \leq a_2 ; b_1 \leq Y \leq b_2 \}$ y si (Xo,Yo) esta en el interior de R, entonces la ecuacion diferencial

$$\frac{dy}{dx}=f(X,Y)$$

tiene una unica solucion Y=g(X) la cual pasa a traves de (Xo,Yo).

ECUACIONES DIFERENCIALES.

En el presente trabajo hemos discutido alrededor del equilibrio competitivo central sus conceptos de existencia y de su estabilidad. comenzaremos discutiendo la tecnica de ecuaciones diferenciales para poder cimentar de manera compacta muchos de los resultados que a lo largo del trabajo fuimos utilizando, la estructura que le daremos a esta seccion del apendice a grosso-modo sera! sistemas de ecuaciones diferenciales en forma normal con coeficientes reales, luego abordaremos el caso mas general que es cuando los coeficientes son complejos, aunque el sistema debera seguir siendo normal. Muchos de los teoremas que considero interesantes los anotaremos sin prueba, dado que su dominio ha sido ampliamente tratado en una gran variedad de textos. Uno de los teoremas que sin duda es de gran interes para nosotros y que enunciaremos sin prueba sera el tteorema de Liapunov acerca de la

estabilidad.

I.- Sistemas normales de ecuaciones diferenciales.

Un sistema del estilo $\dot{X}^i = f^i(t, X^1, X^2, \ldots, X^n)$ i=1,2,...,n se denominara normal (o canonico) en este sistema vemos que t es la variable independiente y $X^1, X^2, \ldots, X^n$ son funciones desconocidas de esta variable y las $f^1, f^2, \ldots, f^n$ son funciones de n+1 variables, supondremos que estas funciones son continuas para un cierto Γ y ademas supondremos que dichas f^i tienen derivadas parciales continuas de la forma

$$\frac{\partial f^i(t, x^1, x^2, \ldots, x^n)}{\partial x} \qquad i; j = 1, 2, \ldots, n$$

Las derivadas parciales de esta ecuacion unicamente miden su razon de variacion respecto a las X^i .

Diremos que $\varphi^i(t) = X^i$ i=1, 2,....n es un conjunto de soluciones del sistema normal definidas en cierto intervalo $r_1 \leq t \leq r_2$ al cual denominaremos intervalo de definicion de la solucion. La solucion como su nombre lo indica, presupone que al sustituirla en el sistema normal, este se satisfara como una identidad.

Y ademas, para cada punto de coordenadas

$$t, \varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t).$$

este debe pertenecer al conjunto Γ para todos los valores de $t \in (r_1, r_2)$

Analogamente, que con las ecuaciones algebraicas, una pregunta que es de vital importancia es: ¿Cuando y bajo que circunstancias existiran las soluciones para un sistema normal determinado?.

A diferencia de una ecuacion algebraica, un sistema normal posee como soluciones, funciones (las algebraicas tienen como soluciones <raices> valores constantes), que son las X^i y que debemos determinar de alguna manera, para ello enunciaremos el siguiente teorema:

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD PARA SISTEMAS NORMALES:

Consideremos el sistema de ecuaciones normales

$$\dot{X}^i = f^i(t, X^1, X^2, \ldots, X^n) \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

supongamos que las f^i estan definidas sobre cierta region Γ y que son continuas tanto las fi como sus derivadas parciales dentro de esa region Γ . En estas condiciones, para cada uno de los puntos de la forma $t_o, X^1_o, X^2_o, \ldots, X^n_o$ de Γ, existe una solucion

$$X^i = \varphi^i(t) \qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

del sistema (1) (el normal) definida sobre cierto intervalo que contiene al punto t y que satisface

$$\varphi^i(t_o) = X^i_o, \quad i= 1, 2, \ldots, n.$$

Resulta que si se tienen dos soluciones cualesquiera

$$x^i = \psi^i(t) \qquad i=1, 2, \ldots, n$$

$$x = \chi^i(t) \qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

del mismo sistema normal y ademas verifican:

$$\psi^i(t_0) = \chi^i(t_0) = x_0^i \qquad i=1,2,\ldots,n$$

de manera que cada solucion tiene su propio intervalo de definicion para t, el cual contiene a to, dichas soluciones coinciden en todo punto de su intervalo, donde se intersecten los dominios.

Una manera equivalente, pero mas intuitiva de enunciar este mismo teorema es:

Para cualesquier valor iniciales

$$t_0,\ x^1{}_0,\ x^2{}_0, \ldots,\ x^n{}_0$$

existe siempre una solucion del sistema

$$\dot{x}^i = f^i(t,\ x^1,\ x^2, \ldots,\ x^n) \qquad i=1, 2, \ldots, n$$

que satisface dichas condiciones iniciales y que esta definida sobre cierto intervalo que contiene a to. Cuando dos soluciones tienen identicas condiciones iniciales, cada una con su propio intervalo de definicion que contenga a to, tales soluciones coinciden en la parte donde se intersecten sus dominios.

Dentro de este tipo de ecuaciones diferenciales distinguir dos tipos, los cuales son:

A).- Sistemas autonomos: Un sistema autonomo, como su nombre lo indica, es independiente de la variable tiempo, los ejemplos mas conocidos de sistemas autonomos son las leyes de la fisica. Sabemos de nuestros cursos de bachillerato que la segunda Ley de Newton se cumple en cualquier tiempo i.e no importa cuando llevemos a cabo el experimento, nosotros sabemos que la formula V= y que A= son respectivamente las formulas de la velocidad y de la aceleracion. Hay una aceleracion constante que corresponde a la atraccion de los cuerpos hacia el centro de la tierra y que se denota por g.

Ley I.- Todo cuerpo continua en estado de reposo o de movimiento uniforme en una linea recta a menos que lo obligue a cambiar de estado una fuerza a el impresa.

Ley II.- El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y se efectua en direccion de la linea recta en que se imprime la fuerza.

$$F = m.a \quad \text{pero} \quad A = \frac{dv}{dt}$$

$$F = m.\frac{dv}{dt} .$$

y esta ecuacion diferencial se cumple siempre independientemente del dia, la hora y el clima.

B).- Sistemas no Autonomos: Un ejemplo de sistemas no autonomos sera grosso-modo, la competencia de remo. Para establecer una marca, ahi influyen factores como: el viento, la hora de ejecucion, el estado de animo, etc... asi que un record se establece bajo ciertas circunstancias y dependiendo de las condiciones de arranque, que sera la trayectoria de los resultados.

Una afirmacion que podemos hacer es la siguiente:

Ecuaciones diferenciales complejas.

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, se facilitan para obtener antes que las soluciones reales, las soluciones complejas y posteriormente las soluciones reales. ¿Como es una ecuacion diferencial compleja? Decimos que una funcion compleja $F(X)$ $r_1 < X < r_2$ se puede escribir como la funcion

$$F(X) = \varphi(X) + i\,\psi(X)$$

donde $\varphi(X)$ y $\psi(X)$ son funciones reales y decimos que $\varphi(X)$ es la parte real de la funcion y que $\psi(X)$ es la parte imaginaria de la funcion. Decimos que $F(X)$ es continua si sus funciones componente ($\varphi(X)$; $\psi(X)$ son ambas continuas, y $F(X)$ es derivable si sus componentes lo son, y denotaremos dicha derivada mediante

$$\dot{F}(X) = \dot{\varphi}(X) + i\,\dot{\psi}(X)$$

como φ; ψ son reales, entonces, las reglas de derivacion usuales se cumplen.

Consideremos a continuacion el siguiente sistema normal de ecuaciones diferenciales, cuyos valores de definicion son numeros complejos

$$\dot{Z}^j = h^j(t,\ Z^1,\ Z^2,\ldots,Z^n) \quad j=1,\ 2,\ldots,n$$

en ese sistema, cuales son sus soluciones complejas y es necesario saber de que manera obtenerlas, para ello, enunciaremos el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales de variable compleja.

$$\text{Sea } to,\ Z^1_o,\ Z^2_o, \ldots, Z^n_o\ .$$

donde los Z^i_o son numeros complejos y to es un numero real arbitrario tal que $q_1 < to < q_2$, luego existe una solucion

$$Z^i = X^i\ (t) \quad i=1,\ 2, \ldots, n$$

que satisface los condiciones iniciales

$$X\ \ (to) = \ \ o \qquad j=1,\ 2, \ldots, n$$

Dos soluciones cualesquiera con identicas condiciones iniciales coinciden sobre la interseccion de los intervalos de definicion. Un teorema de existencia y unicidad para funciones de variable compleja y normales, se puede escribir un teorema analogo de la seccion anterior.

Consideremos una ecuacion de variable compleja en la siguiente forma:

$$Z^j = X^j + i\,y^j \quad j=1,\ 2, \ldots, n$$

luego podemos escribir:

$$\dot{x}^j + i\dot{y}^j = f^j(t,\ X^1, \ldots, X^n,\ Y^1, \ldots, Y^n) + i\,g^j(t,\ X^1, \ldots X^n,\ Y_1, \ldots Y_n)$$

tambien podemos escribir como:

$$(*)\ \begin{cases} \dot{X}^j = f^j(t,\ X^1, \ldots, X^n,\ Y^1, \ldots, Y^n),\ j=1,\ 2, \ldots, n \\ \dot{Y}^j = g^j(t,\ X^1, \ldots, X^n,\ Y^1, \ldots, Y^n)\ j=1,\ 2, \ldots, n \end{cases}$$

asi, el sistema de ecuaciones diferenciales complejas

$$\dot{Z}^j = h^j\ (t,\ Z^1, \ldots, Z^n)$$

lo podemos escribir como un sistema normal como se muestra en el sistema (*).

Muchos sistemas de coeficientes reales pueden ser extendidos a una funcion compleja en la que se considera que la parte compleja sea cero, analogamente, aqui dado un sistema complejo arbitrario, todo sistema se puede reducir a un sistema normal.

Ejemplo: Dada la ecuacion $\quad Z = C e^{\lambda t}$

consideremos $Z = X+iy$ y $\lambda = U+iV$ un numero complejo, sabemos que $Z = Ce^{\lambda t}$ es solucion de la ecuacion, conde C es una constante, pero compleja. Supongamos que hay otra solución que denotaremos

Supongamos por $Z = \Psi(t)$ y supondremos que la solucion esta definida para todos los valores de t y que satisface las condiciones iniciales $\Psi(o) = Z_o$

Supongamos que para la solucion $\dot{Z} = Ce^{\lambda t}$ la constante tome el valor $C = re^{i\alpha}$ $r \geq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ luego la solucion se escribira como $\quad Z = re^{i\alpha} \cdot e^{\lambda t} \quad = re^{\lambda t + i\alpha}$

Analicemos ahora la parte real y la imaginaria de la ecuacion $\dot{Z} = \lambda Z$

$$\dot{x} + i\dot{y} = (\mu + i\rho)(X+iy) \qquad \lambda = \mu + i\rho$$

las cuales tienen parte real

$$\mu X - \rho y$$

y parte imaginaria

$$\mu y + \rho X \quad .$$

Y el sistema puede sustituirse entonces por:

$$\dot{X} = \mu X - \rho y$$

$$\dot{y} = \mu y + \rho X$$

Las soluciones habiamos dicho que son de la forma

$Z = re^{\lambda t + i\alpha}$ que podemos escribir como

$$r\cdot e^{\lambda t}e^{i\alpha} = r\,e^{(\mu+i\rho)t+i\alpha} = r\,e^{\mu t+i(\rho t+\alpha)}$$

$$= r e^{\mu t}(\mathrm{Cos}(\rho t+\alpha) + i\ \mathrm{Sen}(\rho t+\alpha))$$

luego, las soluciones seran de la forma

$$\varphi(t) = r e^{\mu t}\ \mathrm{Cos}(\rho t+\alpha)$$

$$(t) = r e^{\mu t}\ \mathrm{Sen}(\rho t+\alpha)$$

Estas son las soluciones real y compleja del sistema $\dot{Z} = \lambda Z$

ALGUNAS PROPIEDADES PARA SISTEMAS LINEALES HOMOGENEOS.

Decimos que un sistema es lineal cuando todas las funciones incognita y sus derivadas aparecen linealmente en la ecuacion diferencial. Podemos escribir un sistema lineal como:

$$\sum_{j,k} a_{ij_k}(t)(x^j)^k + b_i(t)=0 \quad i=1,\ldots,n$$

donde $X^1,\ldots,X^n$ son las funciones incognita.

$a_{ij_k}K(t)$ son coeficientes dados

$b_i(t)$ terminos independientes

En caso que un sistema lineal carezca de terminos independientes, diremos que es homogenea y lo escribimos como:

$$\sum_{j,k} a_{ij_k}(t)\ (X^j)^k = 0 \quad i=1,2,\ldots,a$$

para el sistema lineal general y para el sistema lineal homogeneo tenemos que se cumple:

Propiedad 1.- Si tenemos que $y^i = \Psi^i(t)$; $y^i(t) = \varphi^i(t)$ $i=1,\ldots,n$

son dos soluciones del sistema lineal homogeneo, entonces:

el sistema

$$y^i = c_1\ \varphi^i(t) + c_2\ \psi^i(t) \qquad i=1,\ 2,\ldots,n$$

tambien sera solucion del sistema lineal homogeneo.

Propiedad 2.- Consideremos dos soluciones del sistema lineal general

$$x^i = \chi^i(t) \quad x^i = \Psi^i(t) \qquad i=1,\ 2,\ldots,n.$$

luego el sistema de funciones

$$y^i = \chi^i(t) - \Psi^i(t) \qquad i=1,\ 2,\ldots,n$$

es solucion del sistema lineal homogeneo.

Propiedad 3.- Si $y^i = \varphi^i(t)$ $i=1,\ 2,\ldots,n$ es solucion del sistema homogeneo y si $x^i = \Psi^i(t)$ $i=1,\ldots,n$ es solucion del sistema general, entonces, las funciones

$$x^i = \varphi^i(t) + \Psi^i(t) \qquad i=1,\ldots,n$$

seran solucion del sistema lineal general.

Propiedad 4.- Supongamos que los terminos independientes del sistema lineal general son tales que se pueden escribir como:

$$b_i(t) = \alpha\, C_i(t) + \beta\, d_i(t).$$

Consideremos los sistemas lineales generales

$$(*)\ldots \qquad \sum_{j\,k} a_{ij}(t)(X^j)^k + Ci(t) = 0 \qquad i=1,\ 2,\ldots,n$$

$$(**)\ldots \quad \sum a_{ijk}(t)(X^j)^k + di(t) = 0 \qquad i=1,\ 2,\ldots,n$$

donde Ci ; di son las componentes de

$$bi(t) = \alpha\, Ci(t) + \beta\, di(t)$$

Luego, si Ψ_i es solucion del sistema (*), entonces las funciones

$X^i = \alpha\, \Psi^i(t) + \beta\, \Psi^i(t)$ seran solucion del sistema lineal general cuyo termino independiente es $b_i(t)$.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN n.

*Sistemas de ecuaciones diferenciales de orden n.

Una ecuacion diferencial de orden n tiene la forma:

$$f_o(X)Y^n + f_i(X)Y^{n-1} + \ldots + f_{n-1}(X)\,Y + f_n(X)\ Y = g(X).$$

donde $f_o(X) \neq 0$, si $g(X)=0$ decimos que el sistema es homogeneo.

Si dividimos la ecuacion por $f_o(X)$ y hacemos $a_i = \dfrac{f_i(x)}{f_o(X)}$ y hacemos $b(X) = \dfrac{g(x)}{f_o(X)}$ entonces el sistema tomara el aspecto:

$$Y^n + \frac{f_1(x)}{f_o(x)} Y^{n-1} + \ .\ .\ .\ + \frac{f_{n-1}(x)}{f_o(x)} Y + \frac{f_n(x)}{f_o(x)} = \frac{g(x)}{f_o(x)}$$

o equivalente

$$Y^n + a_1 Y^{n-1} + \ldots + a_{n-1} Y + a_n = b(x)$$

Para saber como son las soluciones de un sistema de este estilo tendremos los siguientes teoremas:

Teorema: Consideremos $X_o \in (\alpha, \beta) = I$ y sean C_o, C_1 ..... C_{n-1} constantes arbitrarias reales. Si f_o, ...,f_n son continuas asi como $g(x)$ en el intervalo I y si $f_o(X) \neq 0$ o para todo $X \in I$, entonces, existe una solucion unica $Y(X)$ de la ecuacion diferencial lineal de orden n definida esta en I y ella satisface

$$Y(X_o)+C_o;\quad Y'(C_o)=C_1, \ldots,\quad Y^{n-1}(X_o)=C_{n-1}$$

que esta expresado tambien mediante el siguiente teorema:

Teorema: Si $Y_1 (X)$; $Y_2 (X)$ son soluciones de una ecuacion diferencial homogenea

$$Y^n + a_1 Y^{n-1} + a_2 Y^{n-2} + \ldots + a_n Y = 0$$

entonces, $Y_3 = C_1 \cdot Y_1 + C_2 Y_2$ donde C_1; C_2 son constantes arbitrarias tambien es solucion de la ecuacion diferencial anterior.

Este teorema es analogo a uno que establecimos anteriormente para dar un criterio mas amplio, definamos el siguiente operador: Consideremos que $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ son diferenciables de orden $(n-1)$ para todo $X \in I$. El Wronskiano de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ en I queda definido por

$$W(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, X) = \begin{vmatrix} Y & Y & \ldots & Y_n \\ Y & Y & \ldots & Y_n \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ Y & Y & \ldots & Y_n \end{vmatrix}$$

que indica obtener el determinante de un sistema de derivados. Asi podemos enunciar el teorema:

Teorema: Si el wronskiano no es cero para todo $X \in I$, entonces $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ son linealmente independientes en I.

Dado este ultimo teorema, podemos expresar el siguiente teorema que conecta el teorema con las soluciones del sistema que es lo que nos interesa.

Teorema: Sean $f_0(X)$ $f_1(X)$ y $f_2(x)$ continuas en algun intervalo I y suponga que $f_0(X) \neq 0$ para todo $X \in I$. Si Y_1, Y_2 son soluciones linealmente independientes en I de la ecuacion homogenea de segundo orden

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad a_1 = \frac{f_1}{f_0} \quad a_2 = \frac{f_2}{f_0}$$

entonces, el wronksiano de Y_1, Y_2 no se anula en I.

Una proposicion general de este teorema no se cumple si $Y_1, \ldots,$ Yn son linealmente independientes, no necesariamente el wronsKiano se anula. Para ver esto, supongamos que

$Y_1(X) = X^3$; $Y_2(X) = |X|^3$ son funciones linealmente independientes en el intervalo (-2,2) pero $W(Y_1, Y_2, X) = 0$.

Para X (-2, 2) y $X \neq 0$.

Aunque bajo ciertas restricciones se puede establecer un resultado equivalente.

Teorema: Si $f_0(X)$, $f_1(X), \ldots, f_n(X)$ son continuas en algun intervalo I e $f_0(X) \neq 0$ $\forall X \in I$, entonces Y_1, $Y_2, \ldots,$Yn son soluciones linealmente independientes de la ecuacion lineal de orden n

$$Y^n + a_1 Y^{n-1} + \ldots + a_n Y = 0 \quad \ldots (*)$$

$$a_i = \frac{f_i}{f_0}$$

Si $Y_1, \ldots,$Yn satisfacen la ecuacion lineal homogenea anterior en el intervalo I, y tambien si

$$W_X(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \neq 0 \quad \text{p.a } X \in I.$$

Mediante el siguiente teorema, vemos un hecho relevante para nuestros sistemas de ecuaciones diferenciales.

Teorema:- Existen n soluciones linealmente independientes del sistema $Y^n + a_1 Y^{n-1} + a_2 Y^{n-2} + \dots + a_n Y = 0$.

Luego, toda la solucion puede escribirse como combinacion del sistema de soluciones, y lo formalizamos mediante el siguiente:

Teorema:- Si Y_1, $Y_2, \dots, Y_n$ son soluciones linealmente independientes del sistema $Y^n + a_1 Y^{n-1} + \dots + a_n Y = 0$ en I, entonces, cualquier solucion φ del sistema puede escribirse como

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} C_i Y_i \qquad C_i \text{ son constantes adecuadas.}$$

Para finalizar, enunciamos el siguiente resultado:

Teorema:- Si Y_p es cualquier solucion de la ecuacion diferencial no homogenea $Y^n + a_1 Y^{n-1} + a_2 Y^{n-2} + \dots + a_n Y = b(X)$

y si Y_1, $Y_2, \dots, Y_n$ son soluciones del sistema lineal homogeneo, $Y^n + a_1 Y^{n-1} + \dots + a_n Y = 0$

Entonces, cualquier solucion del sistema lineal no homogeneo se escribe en la forma:

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \dots + C_n Y_n + Y_p = Y_c + Y_p$$

Donde C_1 $C_2, \dots, C_n$ son constantes adecuadas.

SISTEMA NORMAL HOMOGENEO CON COEFICIENTES CONSTANTES

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\dot{X}^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i \, X^j \qquad i=1, 2, \dots, n. \quad \dots(*)$$

cuyos coeficientes son constantes.

Para resolver el sistema, utilizaremos el metodo de Jordan aplicado a la matriz $A=(a^i_j)$. Para ello, debemos considerar dos casos. Por un lado, cuando los eigenvalores son todos distintos en cuyo caso obtendremos la diagonalizacion de la matriz A. El otro caso es aquel en el que los eigenvalores del polinomio caracteristico se repiten (tienen multiplicidad mayor que uno).

Comenzamos la discusion de los posibles casos para los eigenvalores.

I.- Los eigenvalores de la matriz son todos distintos. El sistema de arriba (*) podemos escribirlo vectorialmente como:

$$\dot{X}= A\ X.$$

donde $A=(a^i_j)$ y $X=(X^1, X^2,\ldots,X^n)$ y $\dot{X}=(\dot{X}^1, \dot{X}^2,\ldots,\dot{X}n)$

Supongamos que K es un eigenvector cuyo valor propio (o caracteristico es λ), ello significa que:

$$A\ K = \lambda\ K$$

tendremos que la funcion $X=Ke^{\lambda t}$ sera una solucion del sistema $\dot{X}= AX$ y es solucion dado que:

$$\dot{x} = A\ Ke^{\lambda t} \quad y\ (K\ e^{\lambda t}\ )=AKe^{\lambda t}$$

$e^{\lambda t}\lambda K=AKe^{\lambda t}$, pero $\lambda K=AK$(por ser K eigenvector de A), luego $x=Ke^{\lambda t}$ es solucion de $\dot{X}=AX$.

Para generalizar esta propuesta, consideremos el siguiente

Teorema:- Sea $\dot{X}=AX$ un sistema de ecuaciones diferenciales tales que sus valores caracteristicos (eigenvalores) son distintos ninguno se repite, sea K_1, $K_2,\ldots,Kn$ los vectores propios de la matriz A. Consideremos

$$X_i = K_i e^{\lambda_i t} \qquad i=1, 2, \ldots, n$$

en estas condiciones, la funcion

$$X = C^1 X_1 + C^2 X_2 + \ldots + C^n X_n$$

donde C^i son constantes, es solucion de la ecuacion $\dot{X}=AX$.

II.- Consideremos el sistema $\dot{X}=AX$ tal que tiene eigenvalores repetidos (con multiplicidad mayor que uno).

Supongamos que $K_1, \ldots, K_r$

Son un conjunto de vectores con valor propio λ respecto a la matriz A, de modo que tenemos:

$$AK_1 = \lambda K_1 \;;\; AK_2 = \lambda K_2 + K_1 \;, \ldots ;\; AK_r = \lambda K_r + K_{r-1}$$

Definamos la siguiente sucesion de funciones

$$W_m(t) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} K_1 + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} K_2 + \ldots + K_m \qquad M=1, 2, \ldots, r$$

de donde resultan las funciones vectoriales:

$$X_m = W_m(t) e^{\lambda t} \qquad m=1, 2, \ldots, r$$

que son soluciones del sistema $\dot{X}=AX$.

donde ademas se tiene $X_m(0)=K_m$.

Por tanto, a todo conjunto de r vectores, corresponde un sistema de r soluciones.

Para ver que las funciones vectoriales

$$X_m = W_m(t) e^{\lambda t} \qquad m=1, 2, \ldots, r$$

son solucion, hagamos:

$$\dot{W}_m(t) = W_{m-1}(t) \qquad m=1, 2, \ldots, r$$

y tambien

$$AW_m(t)=\lambda W_m(t)+W_{m-1}(t) \qquad m=1,2,\dots,r.$$

Ademas, tenemos $\dot{W}_0(t)=0$

$$\dot{X}_m(t)=\dot{W}_m(t)\,e^{\lambda t}+\lambda W_m(t)\,e^{\lambda t}=(W_{m-1}(t)+\lambda W_m(t))e^{\lambda t}=$$

$$=AW_m(t)e^{\lambda t}=AX_m(t)$$

de donde deducimos que en efecto, son soluciones del sistema para establecer el caso general de las soluciones, consideremos el siguiente:

Teorema:- Sea $\dot{X}=AX$ un sistema de ecuaciones diferenciales homogeneo con coeficientes constantes. Existe una base $K_1, K_2, \dots, K_n$ respecto a la matriz A. Para mayor comodidad, supondremos que $K_1, \dots, K_{r_1}$ es un conjunto de vectores correspondiente al eigenvalor λ_1, y que $K_{r_1+1}, \dots, K_{r_1+r_2}$ otro conjunto correspondiente al valor propio y asi. Luego, a cada uno de estos conjuntos corresponde un conjunto de soluciones de modo que, una solucion del sistema lo podemos escribir como:

$$X_1=K_1e^{\lambda_1 t},\dots,X_{r_1}=\left(\frac{t^{r_1-1}}{(r-1)!}K_1+\dots+K_r\right)e^{\lambda_1 t},\dots,$$

$$X_{r_1+1}=K_{r_1+1}e^{\lambda_2 t},\dots,X_{r_1+r_2}=\left(\frac{t^{r_2-1}}{(r_2-1)!}K_{r+1}+\dots+K_{r_1+r_2}\right)e^{\lambda_2 t}$$

luego entonces, la formula

$$X=C^1X^1+\dots+C^mX^m$$

donde C^1, $C^2,\dots,C^m$ son constantes, es una solucion del sistema $\dot{X}=AX$ y, analogamente, toda solucion de la ecuacion $\dot{X}=AX$ debera ser de esa forma.

Aunque estas maneras de obtener la solucion del sistema $\dot{X}=AX$ son las mas frecuentes. no son las unicas. A continuacion, tenemos otras tecnicas para obtener soluciones.

III.- Cambio de Variable.

Esta tecnica lo que hace es sustituir las variables $X^1,\ldots,X^n$ por las variables $Y^1,\ldots,Y^n$ y ambas quedan relacionadas mediante

$$Y^i=\sum_{j=1}^{n} b^i_j X^j \quad = 1, 2,\ldots,n$$

donde los S^j_i son coeficientes constantes que forman una matriz no singular (invertible) $B=(b^i_j)$, asi podemos escribir el sistema como:

$$\dot{Y}^i=\sum_{j=1}^{n} b^i_j Y^j \qquad i=1, 2,\ldots,n$$

donde la matriz $B=(b^i_j)$ se obtiene mediante:

$$B = SAS^{-1}$$

tenemos que $Y=SX$; $\dot{Y}=S\dot{X}$ $\quad \dot{X}=AX$.

Luego: $\dot{Y}=S\dot{X}=SAX=SAS^{-1}Y=BY \qquad SAS^{-1}=B$

Son los posibles casos de solucion para estos sistemas.

PLANO DE FASE DE UN SISTEMA LINEAL HOMOGENEO

Consideremos el sistema

$$*. . . . \quad \begin{cases} \dot{x}^1 = a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 \\ \dot{x}^2 = a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 \end{cases}$$ donde a_j^i son reales y constantes

que vectorialmente podemos escribir como:

$$(\dot{X}_1, \dot{X}_2) = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = [a_1^1 x^1 + a_2^1 x , a_1^2 x + a_2^2 \vec{x}^2]$$

para cuestiones operativas, lo denotaremos como:

$$\dot{X} = AX.$$

El diagrama de fases depende de los coeficientes del sistema el origen de coordenadas (0,0) es un punto de equilibrio del sistema (*) y este equilibrio sera unico cuando el determinante del sistema no se anula o equivalentemente si sus eigenvalores no se anulan.

Si los eigenvalores son distintos y no nulos, podemos, por tanto, escribir la solucion como

$$X = C_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h_2 e^{\lambda_2 t} \quad .$$

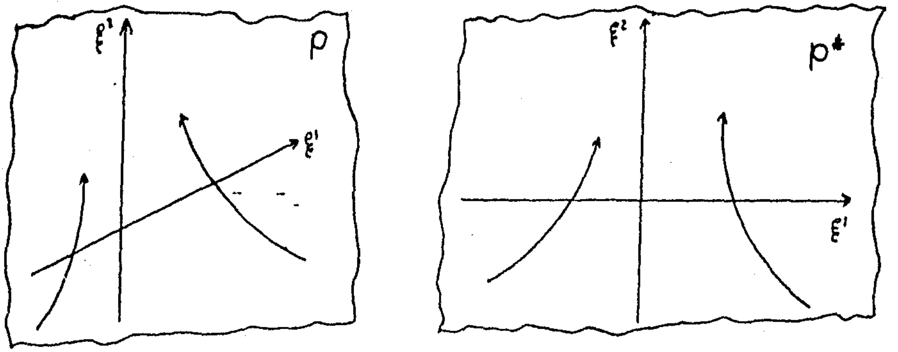
h_1, h_2 son los vectores propios reales linealmente independientes de A. λ_1 y λ_2 son eigenvalores reales del polinomio caracteristicos C_1; C_2 son constantes reales.

Escribamos

$X = \xi^1 h_1 + \xi^2 h_2$ luego las soluciones quedaran como:

$\xi^1 = c^1 e^{\lambda_1 t} \qquad \xi^2 = c^2 e^{\lambda_2 t}$

donde ξ^1 ; ξ^2 son las coordenadas en el plano fase P y las coordenadas del plano no necesariamente son rectangulares, aunque podemos hacer una transformacion que preserve distancias (a fin) hacia un plano P^* el cual tenga coordenadas rectangulares



y al hacer una transformacion del plano al plano las ecuaciones parametricas ξ^1 ; ξ^2 sufriran alguna modificacion. En el plano P^* podemos tener una trayectoria cuya ecuacion parametrica $\xi^1 = c^1 e^{\lambda_1 t}$; $\xi^2 = -c^2 e^{\lambda_2 t}$ que es una reflexion respecto al eje de las abscisas.

Y otra parametrizacion quedaria como:

$$\xi^1 = -c^1 e^{\lambda_1 t} \quad ; \quad \xi^2 = c e^{\lambda_2 t}$$

lo cual es una reflexion respecto al eje de las ordenadas.

Las trayectorias que se siguen, dependen de los signos de los numeros λ_1 ; λ_2 asi que, analizaremos caso por caso, las posibilidades que pueden presentarse. Previamente, haremos algunas observaciones preliminares.

Dadas las ecuaciones parametricas

$$\xi^1 = -c^1 e^{\lambda_1 t} \qquad \xi^2 = c^2 e^{\lambda_2 t}$$

tenemos que si

$C^1 = C^2 = 0$, la unica trayectoria que se obtendria, seria el punto de equilibrio (0,0). Si $C^1 = 0$ y $C^2 > 0$, obtendremos puntos del estilo $(0, C^2 e^{\lambda_2 t})$, lo cual equivale al semieje positivo de las ordenadas en ρ^*, si $C^1>0$; $C^2=0$, obtenemos el semieje negativo de las abscisas, dado que obtendriamos parejas del estilo $(-C_1 e^{\lambda_1 t}, 0)$. Habiendo hecho estas observaciones, pasemos a catalogar los distintos tipos de trayectorias que se pueden tener

I.- Puntos nodo: Supongamos que λ_1; λ_2 poseen igual signo y que:

$|\lambda_1| < |\lambda_2|$ aqui podemos considerar dos casos; uno, cuando ambos numeros son negativos; otro, cuando ambos numeros son positivos.

Caso 1).- Ambos numeros son negativos. $\lambda_1<0$; $\lambda_2<0$.

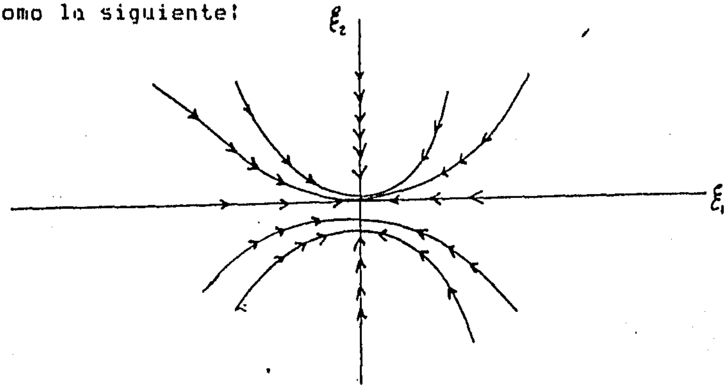
Tenemos que $\xi^1 = C^1 e^{\lambda_1 t}$ $\quad \xi^2 = C^2 e^{\lambda_2 t}$

Y como $\lambda_1<0$ y $\lambda_2<0 \Rightarrow C^1 \dfrac{1}{e^{\lambda_1 t}} = \xi^1 \quad C^2 \dfrac{1}{e^{\lambda_2 t}} = \xi^2$

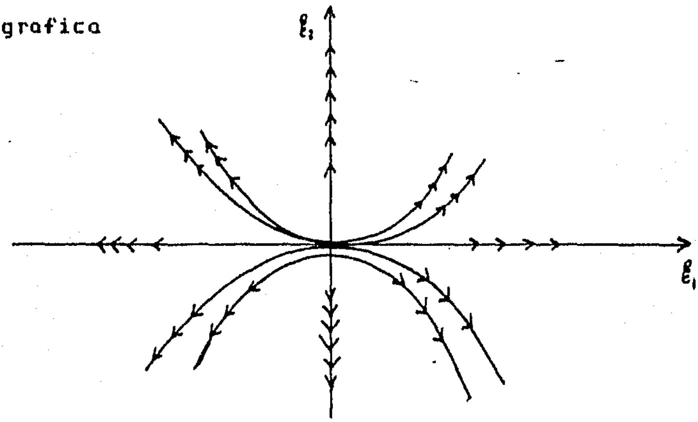
debemos tener presente que: $-\lambda_1>0$; $-\lambda_2>0$

cuando $t \to \infty$ tenemos $\dfrac{1}{e^{-\lambda_1 t}} \longrightarrow 0$; $\dfrac{1}{e^{\lambda_2 t}} \longrightarrow 0$

$\dfrac{1}{e^{-\lambda t}} = e^{\lambda t}$ dado que $t<0$ y por tanto, las trayectorias tenderan a alejarse del origen de coordenadas, obtenemos una grafica como la siguiente:

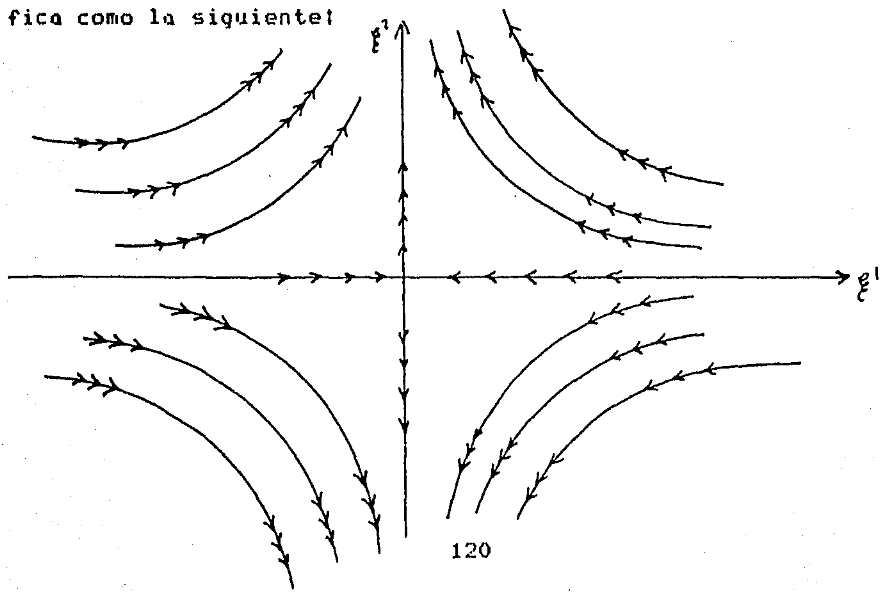


en caso de que $\lambda_1>0$ y $\lambda_2>0$, tendremos que las soluciones, cuando $t\to\infty$ son divergentes: $\xi^1=C^1 e^{\lambda_1 t}\to\infty$ $\xi^2=C^2 e^{\lambda_2 t}\to\infty$ y en caso que $t\to-\infty$ se alejan de 0 en sentido negativo y obtendremos la siguiente grafica



II.- Punto silla: Consideremos ahora el caso en que las tienen signos opuestos: $\lambda_1<0$; $\lambda_2>0$.

En este caso, ξ^1 se acercara al origen por las abscisas, mientras por las ordenadas, tendera a alejarse, quedando una grafica como la siguiente:



III.- Foco y centro: Considerando la ecuacion $\xi = C e^{\lambda t}$ y escribiendola en coordenadas polares, tenemos:

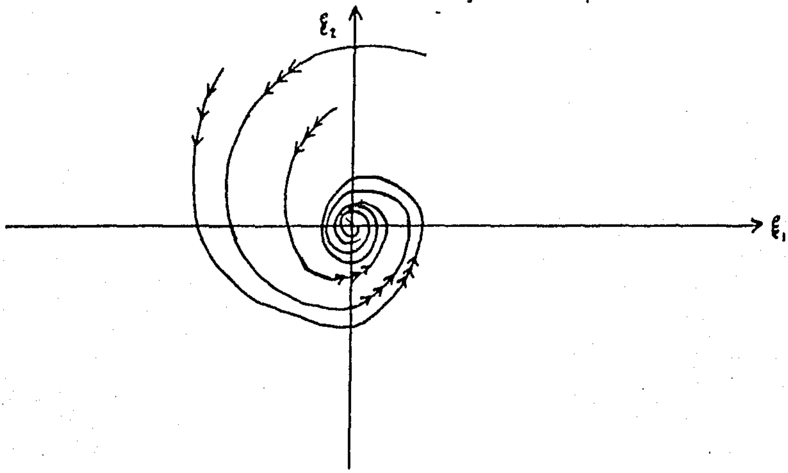
$$\xi = \rho e^{i\varphi} \qquad c = R e^{i\alpha}$$

luego tendremos:

$$\rho = R e^{\mu t} \qquad \varphi = r t + \alpha$$

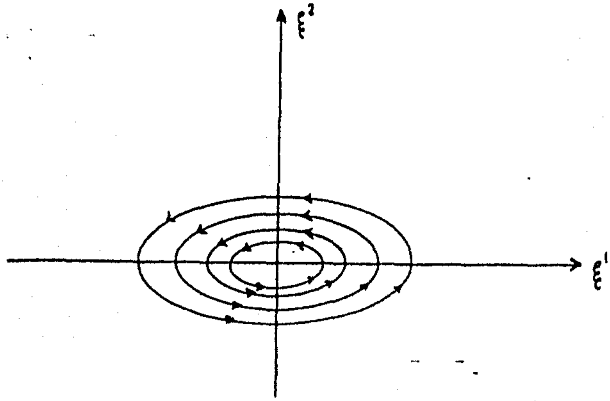
si $\mu \neq 0$ resulta la ecuacion de una espiral logaritmica.

1).- En el caso que $\mu < 0$, la espiral converge al (0,0)=foco y denominaremos al (0,0) foco estable. Su grafica queda como:



2).- En caso de que $\mu > 0$, el punto se ajena del origen y diremos el foco =(0.0) es inestable.

3).- En caso que $\mu = 0$, tendremos trayectorias cerradas alrededor del punto (0,0), en cuyo caso diremos que el origen es un centro y su grafica la dibujamos a continuacion:



Centro

Ejemplo: Consideremos una matriz A, uno de cuyos eigenvalores al menos, sea cero.

Dado esto, tenemos varias posibilidades:

a).- Uno de los eigenvalores es cero:

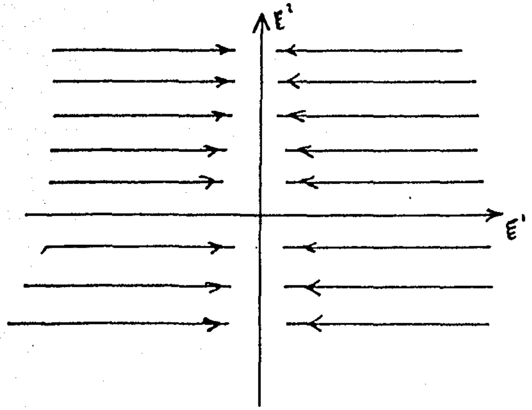
s.p.g. Supongamos $\lambda_1 \neq 0$ y que $\lambda_2 = 0$

podemos escribir las soluciones como:

$$\chi = C^1 h_1 e^{\lambda_1 t} + C^2 h_2 e^{\lambda_2 t} = \xi^1 h_1 + \xi^2 h_2$$

donde $\xi^1 = C^1 e^{\lambda_1 t}$ $\xi^2 = C^2 e^{\lambda_2 t}$.

Como $\lambda_2 = 0$, entonces $\xi^2 = C^2 e^{\lambda_2 t}$ es una constante. Por tanto, las trayectorias seran lineas rectas paralelas al eje de las abscisas y que convergen o divergen del eje de ordenadas.



Tenemos que las trayectorias tenderan a acercarse si $\lambda < 0$ o a alejarse si $\lambda > 0$

Caso <0

b).- Si ambos eigenvalores son cero, tendremos:

i) la solucion general se escribira como

$$X=c^1 h_1 e^{\lambda_1 t}+c^2 h_2 e^{\lambda_1 t} = X_0 e^{\lambda t}$$

donde la solucion tiene como valor inicial al vector (0,Xo) luego dada esa ecuacion, tenemos para $\lambda=0$ que quedara-

$$X = X_0 e^{0t} = X_0$$

ello implica que todas las rectas paralelas al eje de las ordenadas son posiciones de equilibrio y por tanto, todo punto del plano, sera una posicion de equilibrio.

ii).- Siendo $\lambda=0$, podemos escribir las soluciones como:

$$\xi^1=c^1 e^{\lambda t} + c^2 t e^{\lambda t} \qquad \xi^2=c^2 e^{\lambda t} .$$

y entonces, $\xi^1=c^1+c^2 t$ $\quad \xi^2=c^2 \therefore \xi^2=0$ son posiciones de equilibrio.

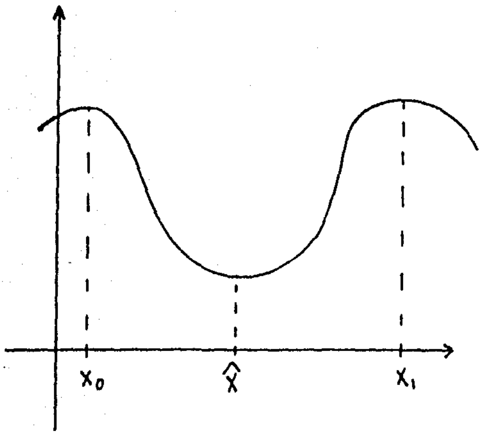
PUNTOS DE EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD

Definicion:- Un punto $\hat{X}\in X$ en el sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{X}(t)=f[X(t),t]$ se denominara punto de equilibrio (estable) si $f(X,t)=0$, $\forall t$. (En caso que el sistema de ecuaciones sea autonomo, $\hat{X}$ se denominara punto de equilibrio cuando $f(\hat{X})=0$).

Con esta definicion, pasamos a analizar cuando un sistema de ecuaciones diferenciales es estable; para ello, analizaremos el comportamiento de las soluciones de dichos sistemas.

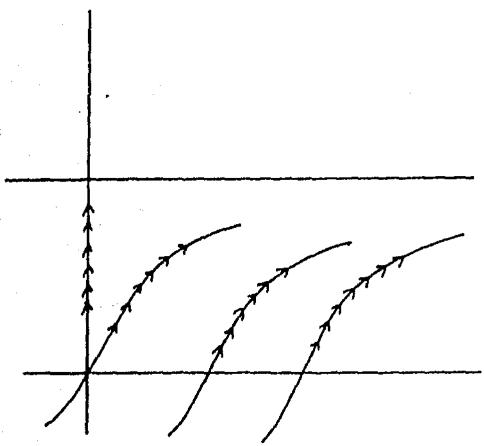
Tenemos que hay dos conceptos centrales al respecto.

Uno de ellos, es la estabilidad local, la cual implica que, unicamente, colocando nuestras condiciones iniciales suficiente-



mente cerca del punto de equilibrio localmente estable (notese en la Fig. 1) Observemos que si estamos en el intervalo (X_0, X_1), entonces (partiendo con unas condiciones iniciales en ese intervalo), llegaremos a nuestro punto de equilibrio $\hat{X}$.

En cambio, en caso que nos movamos en $(-\infty, X_0)$ o en (X_1, ∞), tendremos que nuestras soluciones no tenderan hacia $\hat{X}$, en cuyo



caso diremos que no hay estabilidad o que hay inestabilidad en la teoria de las ecuaciones diferenciales, el concepto de inestabilidad resulta, en la mayoria de los casos, muy util.

El otro concepto importante de estabilidad, es el de estabilidad global y el cual consiste en lo siguiente! diremos que ϕ es globalmente estable cuando (independientemente de la posicion inicial de la que se parta) al transcurrir el tiempo, la solucion se acerca al punto de equilibrio en el caso de la figura, las soluciones tienden todas hacia la recta t=p, independientemente del punto inicial del cual se parta.

Establezcamos las dos definiciones anteriores de una manera mas rigurosa.

Definicion! Un punto de equilibrio $\hat{X}$ se denominara globalmente estable si $\phi(t,Xo) \to \hat{X}$ cuanto $t \to \infty$ sin considerar la posicion inicial (Xo) o analogamente $\forall \varepsilon>0 \quad \exists \bar{t} \ \ni \ \|\phi(t,x_0)-\hat{x}\|<\varepsilon$

$\forall t>t_0+\bar{t}$ y donde $\|x_0\|<\delta$; δ puede ser tan grande como se quiera. (Notese que $\bar{t}$ depende de ε).

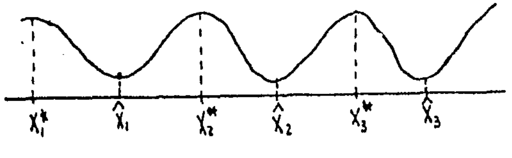
Definicion: Un punto de equilibrio $\hat{X}$ se denominara localmente estable si existe una vecindad cerrada B_{δ} (X) en torno a $\hat{X}$ y de radio (δ) tal que si una condicion inicial $x_0 \in B_\delta(\hat{x})$ ello implica que $\phi(t,Xo) \to \hat{X}$ cuando $t \to \infty$.

Mas especificamente. $\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta_\varepsilon \ ; \exists \bar{t} \in (\varepsilon, x_0) \ni \|x_0-\hat{x}\|<\delta$

$\Rightarrow \|\phi(t,x_0)-\hat{x}\|<\varepsilon \qquad \forall t>t_0+\bar{t}$

(Observese que t depende de X_0 y de ε).

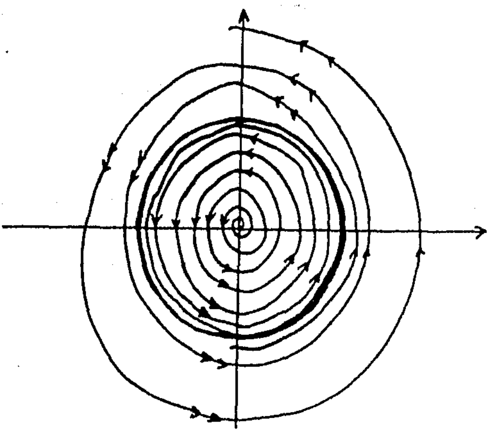
En este punto, cabe hacerse una pregunta. Una ecuacion diferencial tiene solo un punto de equilibrio? Pensemos en un sistema mecanico donde sus puntos de equilibrio son varios y supongamos que es como el que aparece en la figura, donde $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3, \ldots$ son los puntos de equilibrio.



Podemos sospechar que los puntos X_1^*, X_2^* , ... no son puntos de equilibrio, por ello, es necesario que nos hagamos otra pregunta:¿Sera local o globalmente estable nuestro sistema?.

Se observa que para cualquier posicion inicial X_0 el movimiento del objeto converge hacia algun $\hat{X}i$, luego aparece un nuevo concepto de estabilidad donde no esta involucrado solo un punto de equilibrio, sino todo un conjunto de puntos de equilibrio, diremos en caso de hallarnos en una situacion como esta, que el sistema es un sistema cuasiestable (Solo en el caso en que desde cualquier condicion inicial se converja hacia algun punto de equilibrio, como ocurre en la figura).

Podemos continuar con las preguntas, podemos preguntarnos ahora, ¿Si un sistema es cuasi estable, sera globalmente estable? Observemos la figura donde la trayectoria C es una trayectoria cuasi estable. Aunque debemos notar que para puntos iniciales X fuera de las soluciones se alejan de la trayectoria de equilibrio. Luego, siendo el sistema cuasi estable, no necesariamente es globalmente estable.



Aunque a la inversa, si es cierto. No puede dejarse de notar que, en el caso en que tenemos cuasi estabilidad y el punto de equilibrio no es unico, entonces, el sistema sera globalmente estable.

Trabajemos algunos ejemplos para aclarar ideas:

Ejemplo: Consideremos la ecuacion diferencial

$$\dot{X}(t)=-2X(t). \qquad t;X\in\mathbb{R}. \qquad X(to)=Xo.$$

Nos preguntamos si tendra punto de equilibrio.

Las soluciones son de la forma:

$$\phi(t,X_0)=X_0\,e^{-2(t-t_0)}=\frac{X_0}{e^{2(t-t_0)}}$$

tomando el limite cuanto $t\to\infty$ tenemos

$$\lim_{t\to\infty}\phi(t,X_0)=\lim_{t\to\infty}\frac{X_0}{e^{2(t-t_0)}}\nearrow 0$$

X=0 sera el punto de equilibrio. podemos observar que en la formula

$$\frac{X_0}{e^{2(t-t_0)}}$$ Xo puede ser sustituido por un valor arbitrario. p. ej. C. luego. la ecuacion de la solucion se puede escribir como $$\frac{C}{e^{2(t-t_0)}}$$

y entonces tenemos que nuestro sistema es globalmente estable.

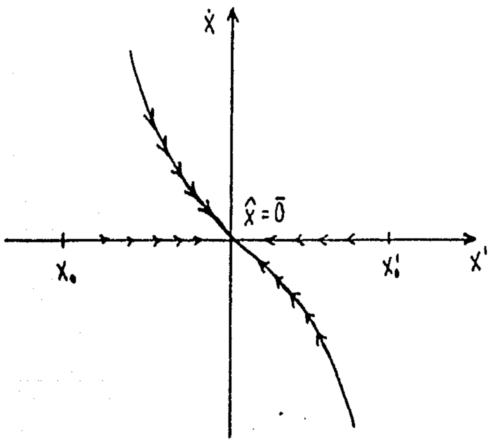
De la ecuacion diferencial original $\dot{X}(t)=-2X(t)$ debemos notar que si el coeficiente en vez de ser negativo hubiese sido positivo, el sistema hubiera sido inestable (la funcion exponencial hubiese disparadose). Por tanto, nos atrevemos a decir que: cuando tengamos una ecuacion diferencial del estilo $\dot{X}(t)=aX(t)$ con $t;X\in\mathbb{R}$; $X(to)=Xo$, entonces, el sistema sera globalmente estable, si $a<0$.

Ejemplo: Considermos la siguiente ecuacion diferencial:

$$\dot{X}(t)=-\frac{1}{5}X^3(t).$$

Tenemos que esta ecuacion corresponde a una parabola cubica, si suponemos que la condicion inicial es negativa, entonces $\dot{X}(t)$ sera positiva, dado que $X^3(t)$ sera negativo, luego, $-\frac{1}{5}X(t)>0$, luego, los valores se van pegando a $\hat{X}=0$.

Analogamente, si $X'o>0$, luego, la condicion inicial es tal, que $\dot{X}(t)<0$, por tanto, los valores decrecen y tienden hacia $\hat{X}=0$.



Aqui no resolvimos de manera explicita la ecuacion diferencial, vemos que $\hat{X}\neq0$ es punto de equilibrio. Para llegar a esta conclusion, nos apoyamos unicamente en la grafica, esto, justamente, se conoce como la tecnica de diagrama y la utilizamos en el Capitulo III.

En economia matematica, son muy usados los sistemas lineales de orden nXn, asi pues, extenderemos nuestros conceptos a un tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales mas amplios.

Consideremos el sistema:

$$\dot{X}(t)=AX(t) \qquad \text{donde } A=[Ai,j]$$

es una matriz nXn. Para este sistema, se propone que $\hat{X}=\bar{0}$ es una solucion del sistema y sera unico si A es una matriz no singular.

Podemos escribir la solucion de este sistema como:

Teorema: Si $\dot{X}(t)=AX(t)$ es un sistema de ecuaciones diferenciales, con $X(0)=X_0$, entonces, $\phi(t,X)= e^{At}.X_o$.

donde $$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}$$

y A^k es una matriz nXn.

Se propone que $\phi(t\ X_0)= e^{At}X_o$ es una solucion del sistema $\dot{X}(t)=AX(t)$. Entonces, por ser ϕ solucion, debe ocurrir que:

$$\dot{\phi}(t\ ,\ X_0)=A\phi(t)$$

Tenemos que $(e^{At}X_0) = A.\ e^{At}$

$$(X_o \sum A^k \frac{t^k}{k!} \quad)=A \sum A^k \frac{t^k}{k!}$$

$$X_o(A^0 + A^1 + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots.)=A.(A^0+A+\frac{A^2}{2!} \quad +\ldots)$$

$$X_o(A + \frac{A^2}{2} + \ldots. \qquad)=A+A^2+\frac{A^3}{3!} \quad +\ldots.$$

Podemos observar que Xo al tener la posibilidad de ser cualquier numero, hace que la igualdad se satisfaga.

Ahora pasemos a analizar cuestiones referentes a estabilidad

Decimos que un vector λ es eigenvalor de una matriz A si

$$AX= \lambda X. \qquad 0= \lambda X-AX=(A-\lambda I)X.$$

La siguiente afirmacion puede deducirse de la definicion:

Si una matriz A tiene n-eigenvalores distintos ,
entonces existe una matriz no singular P(nXn) tal que PAP^{-1} es una matriz diagonal, cuyos elementos diagonales son los eigenvalores de A.

Asi pues, podemos hacer las siguientes observaciones:

Si una matriz A es equivalente a una diagonal $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$

Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son eigenvalores distintos de A.

Si en el sistema $\dot{X}(t)=AX(t)$ A es tal que tiene elementos diagonales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ distintos que son sus eigenvalores, entonces, el sistema puede escribirse como:

$$\phi(t, X_0)=(P\, e^{At}\, P^{-1})X_0$$

donde P es una matriz no-singular (nXn) y donde

$$e^{At}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Obviamente, si Re $\lambda_i<0$, el sistema es estable, esto se deduce del hecho de que si $\lambda=a+ib \Rightarrow e^{\lambda}=e^{a+ib}=e^{a}e^{ib}$, $(e^{ib}=\cos b+i\,\mathrm{sen}\, b)$ pero (Cosb+isenb) es una funcion acotada, luego, si e^{a} es convergente, entonces, la funcion total es convergente.

Teorema: Si $\dot{X}(t)=A.X(t)$ tiene como punto de equilibrio $\hat{X}=0$, el sistema sera globalmente estable, si la parte real de todos los eigenvalores es negativo.

La solucion del sistema es:

$\phi(t,Xo)= e^{At}\, Xo.$

Si la matriz A tiene n-eigenvalores distintos, el problema queda facilmente comprobado de la afirmacion anterior. En caso de que algunos eigenvalores se repitan varias veces.

$$
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_1 \end{bmatrix} & & & \bigcirc \\
& \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_2 \end{bmatrix} & & \\
& & \ddots & \\
\bigcirc & & & \begin{bmatrix} \lambda_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_n & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
$$

Podemos descomponer en bloques la matriz, luego

$$
A = \begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_1 \end{bmatrix} & & \\
& \ddots & \\
& & \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
\; ; \; e_k^n = \begin{pmatrix} \lambda_k^n & \lambda_k^{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k^n & \lambda_k^{n-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \lambda_k^{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_k^n \end{pmatrix}
$$

luego

$$
\sum i t_k \frac{t^i}{i!} = t \sum \lambda_k^{i-1} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} = t\, e^{\lambda_k t}
$$

$$\phi(t, X_0) = (P\, e^{At} P^{-1})\, X_0$$

o matricialmente

$$P \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ \vdots & & & & t e^{\lambda_1 t} \\ 0 & \cdots & & \cdots & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{bmatrix} e^{\lambda_k t} & t e^{\lambda_k t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & & & t e^{\lambda_k t} \\ 0 & \cdots & & \cdots & e^{\lambda_k t} \end{bmatrix} \end{bmatrix} P^{-1} X_0$$

que puede escribirse como:

$$P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 & t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & 1 & t \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_k} \begin{bmatrix} 1 & t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & 1 & t \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} P^{-1} X_0$$

Asi pues, de esta descomposicion se observa que si λ_i es un eigenvalor de A, entonces si $\lambda_i<0$, la solucion del sistema es globalmente estable.

Si el sistema es estable, es definida negativa. Luego, la parte real de sus eigenvalores es negativa.

El polinomio caracteristico de una matriz triangular superior lo podemos escribir como:

$$f(X)=(X-C_1)^{r_1}(X-C_2)^{r_2}\cdot\ .\ .\ .(X-C_n)^{r_n}$$

donde r_i es la multiplicidad (i.e el numero de veces que se repite el valor propio) del C_i.

La cuestion entonces, para asegurar la estabilidad de una ecuacion diferencial lineal esta muy vinculada con los valores caracteristicos del sistema. Hay un teorema muy famoso, aunque poco difundido que asegura el hecho de cuando los eigenvalores de una ecuacion diferencial tienen parte real negativa.

Teorema: (Routh-Hurwitz): Una condicion necesaria y suficiente para que las raices de la ecuacion $a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_n=0$ con coeficientes reales, tengan parte real negativa, es que la siguiente condicion se cumpla:

$$a_1>0\ ;\ \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}>0\ ;\ \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}>0\ ;\dots$$

estas matrices tienen en su primer columna elementos impares, en la segunda puros elementos pares y asi van alternando.

Teorema de Hurwitz: La condicion necesaria y suficiente para que las partes reales del polinomio con coeficientes reales

$$Z^n + a_1 Z^{n+1} + \dots + a_{n-1} Z + a_n$$

sean negativas es que todos los menores diagonales principales de la matriz de Hurwitz.

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

sean positivas

Observese que en la diagonal principal de la matriz de Hurwitz estan los coeficientes del polinomio, tomados en su orden de numeracion desde A hasta An. Las columnas estan formadas sucesivamente (alternadas) con indices solo pares o solo impares incluyendo tambien el coeficiente Ao=1, por lo tanto, el elemento es $b_{ik} = a_{2i-k}$ los coeficientes que son mayores que n y menores que 0 se sustituyen por ceros.

Los menores diagonales principales de la matriz de Hurwitz los escribiremos como:

$$\Delta_1 = |a_1| \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & a_n \end{vmatrix}$$

$A_1 > 0$

Ejemplos de Hurwitz:

a).- $Z^2 + a_1 Z + a_2$ se necesita que $a_1 > 0$; $a_2 > 0$.

$$x_{12} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \qquad X_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{7}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{7}$$

y esto es que las partes reales sean negativas.

b).- $Z^3 + a_1 Z^2 + a_2 Z + a_3$

Requerimos $\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow a_1 \cdot a_2 - a_3 > 0$

$a_1 \cdot a_2 > a_3$ y $a_1 > 0$. $\therefore$ $a_2 > 0$.

Sea $a_1 = 4$; $a_2 = 5$; $a_3 = 7$

Asi, el polinomio $Z^3 + 4Z^2 + 5Z + 7$ tiene raices cuyas partes reales son negativas.

$Z^2 + a_1 Z + a_2$; $a_1 > 0$ $\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 > 0$ y $a_1 > 0$ $a_2 > 0$.

Sean $a_1 = 2$ y $a_2 = 6$

$$x_1 = \frac{-2 \pm \sqrt{4-24}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-20}}{2} = \frac{-2 + i\sqrt{20}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-2 - i\sqrt{20}}{2}$$

Analogamente $X < 0$.

Unicamente damos unos ejemplos.

La demostracion de este teorema es muy compleja, por lo cual se cita a Gentmacher teoria de matrices, tomo II, Cap. XV.

En caso que nuestro sistema sea no lineal y autonomo

$$\dot{X}(t)=f(X(t)).$$

Para hablar de la solucion del sistema para poder establecer la expresion de Taylor de f alrededor del valor de equilibrio X. ($\hat{X}$ es tal que $f(\hat{X})=0$). Uno de los metodos mas usados es dar una aproximacion lineal que se obtiene al ignorar de la expansion en serie de Taylor los terminos que sean de un orden mayor que dos.

Aqui debemos ver las restricciones bajo los cuales habiendo condicion lineal de estabilidad, ello implica que el sistema original (el no lineal) es tambien estable.

Tenemos la siguiente afirmacion: Si el sistema de aproximacion lineal es globalmente estable, entonces es localmente estable en el sistema original.

Supongamos el sistema $\dot{X}(t)=f(X(t))$.

Consideremos para el caso 2X2 lo siguiente:

$\dot{X}(t)=AX$ donde A es el jacobiano del sistema

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad a_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

un sistema lineal de esta forma si tiene al cero como punto de equilibrio, entonces, es globalmente estable en ese numero. Luego en el sistema original, dicho sistema sera localmente estable.

Sea $\hat{X}^*$ el punto de equilibrio

$$f(\hat{X}^*)=0,$$

$$\dot{x}_1 = a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}\tilde{x}_1 + a_{21}\tilde{x}_2$$

donde $\tilde{x}_1 = x_1 - x_1^*$

y

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

Ejemplos: Consideremos el siguiente sistema:

$$\dot{x}_1 = (-11 + x_1 + x_2)x_1$$

$$\dot{x}_2 = (5.6 - (.6)x_1) - (.5)x_2)x_2$$

cuyo punto de equilibrio factible es P =(1,10)

Sus equivalores son

$$\lambda_1 = -2+\sqrt{3} \qquad \lambda_2 = -2-\sqrt{3}$$

luego, el punto por ser numeros negativos, es un punto de esrabilidad local.

En cambio, si se considera al punto inicial P=(3,11) los soluciones tenderan a (∞ ,0) luego dicho punto no sera un equilibrio.

Expresaremos a continuacion uno de los teoremas mas importantes relacionados con el equilibrio conocido como teorema de Liapunov.

Definicion.- Una posicion de equilibrio $\hat{X}$ de la ecuacion $\dot{X}=f(X)$ se dice estable en el sentido de Liapunov si:

1o.- Existe un numero positivo ρ suficientemente pequeño tal que para $|\xi-\hat{X}|<\rho$ la solucion $\varphi(t,\xi)$ de la ecuacion $\dot{X}=f(X)$ esta definida para todos los valores t, y

2o.- Para todo numero positivo ε es posible hallar otro numero positivo $\delta<\rho.\gamma$. Para $|\xi-\hat{X}|<\delta$ sea $|\varphi(t,\xi)-\hat{X}|<\varepsilon$ para todo $t>0$. Si ademas, existe un numero positivo $\sigma<\rho$ tal que si $|\xi-\hat{X}|<\sigma$ se tenga que $\lim_{t\to\infty}|\varphi(t,\xi)-\hat{X}|=0$

diremos que $\hat{x}$ es asintoticamente estable

Enunciamos ahora el teorema de Liapunov.

Teorema:si la matriz $A=(aj^{i})$ es tal que todos sus valores propios tienen parte real negativa.

La posición de equilibrio $\hat{x}$ del sistema $\dot{x}=f(x)$ es asintoticamene estble o equivalentemente

Para un $\sigma>0$ suficientemente pequeño tal que $|\xi-\hat{x}|<\delta$

Se cumple que:

$$|\varphi(t,\xi)-\hat{x}|<r|\xi-\hat{x}|e^{-at}$$

donde r;a son positivos e independientes de ξ.

C O M E N T A R I O S

Comentarios!.- En esta parte quisiera manifestar algunas observaciones que desde mi caracter de matematico me causo la realizacion del presente trabajo. Como principio de cuentas, quiero destacar que muchas de las obras que, respecto al tema aborde, encierran hipotesis que resultan muy atrevidas, en varios casos, una misma idea es entendida o interpretada de manera distinta por varios autores, un compañero, mas compenetrado en el tema, me dijo que la economia matematica resulta muy inasible, toda vez que, no siendo economia, no esta al alcance de los especialistas y, al nò ser matematico, se permite ciertas libertades que escapan del rigor de esta. Asi que, para interpretarlo, debe contarse con una formacion basta en economia y rigurosa en matematicas. Los autores que intente compenetrar, estan catalogados como economistas burgueses, sostienen por ello una defensa de sus creencias y una posicion filosofica respecto al mundo, una de las hipotesis mas descabelladas con la que me encontre reza!

Supongamos que en nuestra economia, todos los individuos poseen mayor o menor medida de 'TODAS' las mercancias existentes en el mercado, esto, dadas mis vivencias particulares en este Mexico que cuenta con las economias familiares mas contrastantes, resulta de suyo una hipotesis que raya en el idealismo, analizar todas las contradicciones allanadas en el camino requeriria de un tratado aparte, pero como dice el refran! ...para muestra, basta un boton...

Desde luego, que hubiere sido mucho mas comodo para mi, realizar un trabajo que cayera dentro de la disciplina meramente matematica (algebra, analisis, calculo, geometria), aunque despues de haber realizado el presente trabajo, quedo convencido que es necesario aplicar la matematica en algun campo del conocimiento humano, en particular, la economia. Me permitio captar a fondo las tecnicas matematicas necesarias y sopesar su poder y alcance. Una labor de esta envergadura es, sin duda alguna, ardua, pero la cosecha paga con creces el esfuerzo realizado.

Asi, quedo convencido de las frases! Dominar la tecnica que es lo que nos permite dominar la naturaleza, dominar la naturaleza para poder convivir plenamente con nuestros semejantes.

BIBLIOGRAFIA

1 Ecuaciones Diferenciales y Calculo Variacional.
L. Elgolts. Ediciones de Cultura Popular.

2 Differential Ecuation.
Shepley L. Ross.

3 Ecuaciones Diferenciales.
Boice Diprima.

4 Ecuaciones Diferenciales y Notas Historicas.
Simmons.

5 Algebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales.
Hirsh Smail.

6 Economia Matematica.
O. Takayama.

7 Teoria del Equilibrio Competitivo.
OwirK-Saposnik.

8 Introduction to Topology and Modern Analisis.
G. F. Simmons. International Student Edition

9 Game Theory.
Owen.

10 Algebra Lineal.
Hoffman y Kunze.

11 Matriz Theory. Gentmacher T I y T II.

12 Mathematical Economics.
J. E. Wood. Longman.

13 Valor y Capital.
Hicks.

14 Analisis Economico.
Paul Anthony Samuelson.