36
2l

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DESCOMPOSICION EN INESCINDIBLES PARA MODULOS SOBRE ANILLOS Y CATEGORIAS ASOCIADAS

T E S I S

Que para obtener el titulo de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

Edith Corina Sáenz Valadez
Diciembre de 1988

INDICE

Compra la verdad, y no la vendas;
La sabiduría, la enseñanza
y la inteligencia.
PR 23:23

INTRODUCCION

El problema que se considera en este trabajo es el de la descomposición de módulos en suma directa de módulos inescindibles y el problema de la unicidad de dichas descomposiciones. Tratamos este problema sobre dos tipos importantes de estructuras: anillos y categorías localmente acotadas.

El problema de descomposición de módulos sobre anillos ha sido considerado desde hace mucho tiempo. Tenemos así: el teorema de descomposición para grupos abelianos finitos ; la forma canónica de Jordan , etc. En la primera parte de este trabajo consideramos dos de las teoremas más generales que se conocen para módulos sobre un anillo A:

Teorema de Krull-Schmidt: Todo módulo de longitud finita tiene una descomposición inescindible única hasta equivalencia de descomposición.

Teorema de Warfield: Si $M = \oplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ con M_α módulo numerablemente generado , tal que $\mathrm{End}_A(M_\alpha)$ es local , entonces esta descomposición es única hasta equivalencia.

En años recientes , la teoría de representaciones de álgebras ha recibido un impulso importante. Esta teoría estudia los módulos sobre K-álgebras de dimensión finita (tomaremos aquí un campo algebraicamente cerrado). Una herramienta importante en esta teoría ha sido el uso de los carcajes , que dan lugar a las K- categorías . La aparición de las técnicas cubrientes obliga al estudio de las K-categorías (localmente acotadas) con (posiblemente) infinitos objetos.

Sea Λ una K-categoría localmente acotada. Un Λ- módulo (localmente finito) es un K-funtor $M: \Lambda \to \mathrm{mod}\, K$ (tal que $\dim_K M(x) < \infty$ para cada objeto x en Λ). En este trabajo demostramos:

Teorema: Si M es un Λ- módulo localmente finito , entonces M tiene una descomposición en Λ-módulos inescindibles , esta descomposición es única hasta equivalencia.

Este resultado parece haber sido redescubierto en varias ocasiones

([P] , [DS] , ...) pero la demostración no aparece en la literatura.

Describimos brevemente el contenido de los capítulos de este trabajo:

El capítulo 1 es una recopilación de los resultados asociados con descomposiciones inescindibles de módulos sobre anillos que figuran en [AF]. En el capítulo 2 damos demostraciones de los teoremas de Krull-Schmidt-Warfield (nuestras fuentes son [AF] , [B] , [W]).

En el capítulo 3 se esboza la relación entre las K-álgebras de dimensión finita , los carcajes y las K-categorías. Los módulos se interpretan como K-funtores. En el capítulo 4 consideramos las K-categorías localmente acotadas y probamos el teorema de descomposición para módulos localmente finitos.

CAPITULO 1

El propósito de este Capítulo es presentar los resultados básicos de la Teoría de Módulos, que servirán como punto de partida para el desarrollo de los Capítulos 2 y 3.

El material de este Capítulo está escencialmente contenido en el libro *"Rings and Categories of Modules"* de Frank W. Anderson y Kent R. Fuller; por lo cual sólo se presentan aquellas pruebas en las cuales hay construcciones o ideas que son de importancia y/o utilidad para los siguientes Capítulos, así como algunos ejemplos.

Nuestros anillos siempre serán asociativos con unidad. "Módulo" (e "Ideal") deberá entenderse como "R-Módulo izquierdo" ("Ideal izquierdo"); análogamente por "Homomorfismo" entenderemos "R-homorfismo."

Si M y K son módulos. $K \subseteq M$ denotará que K es un submódulo de M.

El simbolo $\langle X\rangle$, se usará para indicar el módulo generado por el conjunto X.

§1 PRELIMINARES

Sea R un anillo.

Lema 1.1.1.- Sea M un módulo y sean H, K y L submódulos de M. Entonces
$$H \cap (K + L) \supseteq H \cap K + H \cap L.$$
$\square$

Ejemplo 1.1.2.-

a) Sea $M = \mathbb{Z}$, $H = 4\mathbb{Z}$, $K = 7\mathbb{Z}$, $L = 5\mathbb{Z}$. Entonces
$4\mathbb{Z} \cap (7\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z}) \supseteq 4\mathbb{Z} \cap 7\mathbb{Z} + 4\mathbb{Z} \cap 5\mathbb{Z} = 28\mathbb{Z} + 20\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}$.
(En este caso se dá la igualdad).

b) Sea $M = \mathbb{Z}^2$, $H = \langle(1,1)\rangle$, $K = \langle(1,0)\rangle$, $L = \langle(0,1)\rangle$. Tenemos:
$H \cap (K + L) = \langle(1,1)\rangle$ $H \cap K = (0,0)$ y $H \cap L = (0,0)$.
De donde $H \cap (K + L) \supsetneq H \cap K + H \cap L$.
(En este caso la inclusión es propia).

c) Sea $M = \mathbb{R}^3$. Sea $K = \langle(\alpha, \beta, 0)\rangle$ con $\alpha \neq 0 \neq \beta$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
$H = \langle(0,1,0),(1,0,0)\rangle$, $L = \langle(0,0,1)\rangle$. En este caso
$H \cap (K + L) = H \cap K + H \cap L$.

Generalicemos esto en el siguiente lema.

Lema 1.1.3.- (Ley Modular). Sea M un módulo y sean H, K y L submódulos de M tales que $K \subseteq H$. Entonces $H \cap (K + L) = K + (H \cap L)$.

$\square$

Teorema 1.1.4.- Sean M, M', N y N' módulos y sea $f: M \to N$ un homomorfismo.

a) Si $g: M \to M'$ es un epimorfismo con $\text{Ker}g \subseteq \text{Ker}f$, entonces existe un único homomorfismo $h: M' \to N$ tal que $f = h \circ g$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & N \\ & M' \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

(En este caso decimos que f se factoriza através de g).

Además, $\text{Ker}h = g(\text{Ker}f)$ e $\text{Im}h = \text{Im}f$, así que h es monomorfismo, si $\text{Ker}g = \text{Ker}f$ y h es epimorfismo si f es epimorfismo.

b) Si $g: N' \to N$ es monomorfismo con $\text{Im}f \subseteq \text{Im}g$, entonces existe un único homomorfismo $h: M \to N'$ tal que $f = g \circ h$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & N \\ & N' \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Además $\text{Ker}h = \text{Ker}f$ e $\text{Im}h = g^{-1}(\text{Im}f)$, así que h es monomorfismo si f es monomorfismo y h es epimorfismo si $\text{Im}f = \text{Im}g$. $\square$

Corolario 1.1.5.- (Teoremas de Isomorfismo)

Sean M y N módulos.

a) Si $f: M \to N$ es un epimorfismo con $\text{Ker}f = K$, entonces hay un único isomorfismo $\eta: M/K \to N$ tal que $\eta(m + K) = f(m)$ para toda $m \in M$.

b) Si $K \subseteq L \subseteq M$. Entonces $M/L \simeq (M/K)/(L/K)$.

c) Si $H \subseteq M$ y $K \subseteq M$. Entonces $(H + K)/K \simeq H/(H \cap K)$. $\square$

Lema 1.1.6.- Sean M y N módulos y $f: M \to N$ y $h: N \to M$ homomorfismos, tales que:

$$f \circ h = 1_N.$$

Entonces $M = \mathrm{Im}h \oplus \mathrm{Ker}f$. $\square$

Definición 1.1.7.-

a) Sean M y N módulos, y sean $f: M \to N$ y $h: N \to M$ homomorfismos, con $f \circ h = 1_N$, decimos que:

   I) f es un epimorfismo que se escinde.

   II) h es un monomorfismo que se escinde.

b) La sucesión exacta corta :

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$$

se escinde, en caso de que f es un monomorfismo que se escinde.

Proposición 1.1.8.- Sea $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ una sucesión exacta corta. Son equivalentes:

a) La sucesión se escinde.

b) El epimorfismo $g: M \to M_2$ se escinde.

c) $\mathrm{Im}f = \mathrm{Ker}g$ es un sumando directo de M.

d) Cada homomorfismo $h: M_1 \to N$ se factoriza a través de f

e) Cada homomorfismo $h: N \to M_2$ se factoriza a través de g $\square$

Definición 1.1.9.-

Sea K un sumando directo de M, con sumando directo complementario K', es decir $M = K \oplus K'$. Entonces $P_K: k + k' \mapsto k$ (con $k \in K, k' \in K'$) define un epimorfismo $P_K: M \to K$ llamado la proyección de M sobre K a lo largo de K'

Proposición 1.1.10.- Si $M = K \oplus K'$, entonces la proyección de M sobre K a lo largo de K', es el único epimorfismo

$$M \xrightarrow{P_K} K \longrightarrow 0$$

que satisface $P_K|_K = 1_K$ y $\mathrm{Ker}P_K = K'$. $\square$

Lema 1.1.11.- Sea $M = K \oplus K'$ y P_K la proyección de M sobre K a lo largo de K', y $L \subseteq M$ submódulo, entonces

$$P_K(L) = (L + K') \cap K.$$

Demostración.-

$P_K(L) = P_K(L + K') = P_K((L + K') \cap (K + K'))$
por el lema (1.1.3)
$P_K(L) = P_K((L + K') \cap K + K') = P_K((L + K') \cap K) = (L + K') \cap K.$ $\square$

Observación 1.1.12.- $P_{K'}: M \to K'$ (la proyección de M sobre K' a lo largo de K) es:

$$m \mapsto m - P_K(m) \qquad (m \in M).$$

Proposición 1.1.13.- Sea $M = K \oplus K'$, sea P_K la proyección de M sobre K a lo largo de K' y sea L un submódulo de M. Entonces $M = L \oplus K'$ si y solamente si $P_K|_L: L \to K$ es un isomorfismo.

Demostración.-

$\Rightarrow$) Por el lema (1.1.11), $P_K|_L$ es epimorfismo y el $\mathrm{Ker} P_K|_L = L \cap \mathrm{Ker} P_K$
Por la proposición (1.1.10), $\mathrm{Ker} P_K|_L = L \cap K'$ y $L \cap K' = 0$ pues $M = L \oplus K'$. Por lo tanto $P_K|_L: L \to K$ es un isomorfismo.

$\Leftarrow$) Como $P_K|_L$ es un isomorfismo, entonces $P_K(L) = K$ pero por el lema (1.1.11) $P_K(L) = (L + K') \cap K$ de donde $K \subseteq L + K'$. Entonces $L + K' = M$ y $L \cap K' = \mathrm{Ker} P_K|_L = 0$

$\square$

§2 IDEMPOTENTES

Sea R un anillo y M un R-módulo.

Definición 1.2.1.- Un elemento $e \in R$ es un idempotente, en caso de que $e^2 = e$ (un anillo siempre tiene al menos dos idempotentes 0 y 1).

Lema 1.2.2.- Si $e \in R$ es idempotente, entonces $1 - e$ también es idempotente.

Demostración.- En efecto $(1 - e)^2 = 1 - e - e + e^2 = 1 - e - e + e = 1 - e$ $\square$

Definición 1.2.3.- Un par de idempotentes e_1 y e_2 en un anillo R, se dice que son ortogonales, si

$$e_1 e_2 = 0 = e_2 e_1.$$

Ejemplo 1.2.4.- Si e es idempotente, entonces e y $1 - e$ son idempotentes ortogonales.

Lema 1.2.5.- Sea e un idempotente en $\mathrm{End}_R(M)$. Entonces

a) $\mathrm{Ker}e = \{x \in M | (1-e)(x) = x\} = \mathrm{Im}(1-e)$.

b) $\mathrm{Im}e = \{x \in M | e(x) = x\} = \mathrm{Ker}(1-e)$.

c) $M = e(M) \oplus (1-e)(M)$. □

Proposición 1.2.6.- Si $M = K \oplus K'$, entonces hay un único idempotente $e_K \in \mathrm{End}_R(M)$, tal que $e_K(M) = K$ y $(1-e_K)(M) = K'$.

Demostración.- Consideremos.

$$\begin{aligned} e_K : M &\longrightarrow M \\ m &\longmapsto P_K(m) \end{aligned}$$

y el resultado se sigue de la proposición (1.1.10) y del lema (1.2.5) □

Corolario 1.2.7.- Un submódulo K de M es un sumando directo de M, si y solamente si $K = \mathrm{Im}e$, para algún endomorfismo idempotente e de M.

Demostración.-

$\Leftarrow$) Se sigue del lema (1.2.5)
$\Rightarrow$) Se sigue de la proposición (1.2.6) □

Observación 1.2.8.- Un sumando directo K de M puede ser la imagen de varios endomorfismos idempotentes de M.

Ejemplo 1.2.9.-

a) Sea $M = \mathbb{R}^2 = \langle(1,0)\rangle \oplus \langle(0,1)\rangle$ y sea $e \in \mathrm{End}_R(M)$ el idempotente dado por: $e(x,y) = (x,0)$, es claro que $e(\mathbb{R}^2) = \langle(1,0)\rangle$.
Sea $f \in \mathrm{End}_R(M)$ el idempotente dado por:
$f(x,y) = (x+y,0)$, donde es claro que $f(\mathbb{R}^2) = \langle(1,0)\rangle$ y $f \neq e$.

b) Sea $M = N \oplus K$ y $e \in \mathrm{End}_R(M)$ idempotente, sea $f \in \mathrm{End}_R(M)$. Entonces $t = e + ef(1-e)$ es también idempotente. Además $\mathrm{Im}t = \mathrm{Im}e$.
En efecto $\mathrm{Im}t = \mathrm{Im}e + \mathrm{Im}ef(1-e)$ pero $\mathrm{Im}ef(1-e) \subseteq \mathrm{Im}e$, por lo tanto $\mathrm{Im}t = \mathrm{Im}e$.

En el ejemplo a) $f = e + ef(1-e)$.

Proposición 1.2.10.- Sea e un idempotente en $\mathrm{End}_R(M)$. Entonces:

a) Existe un isomorfismo de anillos $\Phi: e\mathrm{End}_R(M)e \to \mathrm{End}_R(e(M))$.

b) e es la identidad en $e\mathrm{End}_R(M)e$

Demostración.- Construimos $\Phi(ese) : e(x) \longmapsto ese(x)$ para toda $s \in \mathrm{End}_R(M)$ $\square$

Definición 1.2.11.-

Sea $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ un conjunto de submódulos de M con índices en A.

a) Se dice que $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ es independiente en caso de que para toda $\alpha \in A$

$$M_\alpha \cap (\sum_{\alpha \neq \beta} M_\beta) = 0.$$

b) Se dice que $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ se extiende sobre M si:

$$\sum_{\alpha \in A} M_\alpha = M.$$

Observación 1.2.12.- Es posible sin embargo tener $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ con $M_\alpha \cap M_\beta = 0$ para todo $\alpha \neq \beta$ y que $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ no sea independiente.

Ejemplo 1.2.13.- Consideremos $M = \mathbb{R}^2$ y sea M_α la recta que pasa por$(0,0)$ y con pendiente α. Es claro que $M_\alpha \cap M_\beta = 0$ si $\alpha \neq \beta$, pero $(M_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ no es independiente.

Proposición 1.2.14.- Para $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ son equivalentes:

a) $M = \bigoplus_A M_\alpha$.

b) $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ es independiente y se extiende sobre M.

c) Cada $x \in M$ tiene una única expresión como suma, de la forma $x = \sum_A x_\alpha$ con $x_\alpha \in M_\alpha$, y $x_\alpha = 0$ para casi toda $\alpha \in A$.

Lema 1.2.15.- Supongamos $M = \bigoplus_A M_\alpha$ y N un submódulo de M no cero. Entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ conjunto finito con $\alpha_i \in A$ $(i = 1, \ldots, n)$ tal que:

$$N \cap (M_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus M_{\alpha_n}) \neq 0.$$

$\square$

Proposición y Definición 1.2.16.- Sea $M = \bigoplus_A M_\alpha$. Entonces para cada $\alpha \in A$ existe un único idempotente $e_\alpha \in \mathrm{End}_R(M)$ tal que:

$$\mathrm{Im} e_\alpha = M_\alpha \quad \text{y} \quad \sum_{\beta \neq \alpha} M_\beta = \mathrm{Ker} e_\alpha.$$

Demostración.- Supongamos $M = \bigoplus_A M_\alpha$. Entonces por la proposición (1.2.6) hay un único idempotente $e_\alpha \in \mathrm{End}_R(M)$ con $M_\alpha = \mathrm{Im} e_\alpha$ y $(1-e_\alpha)(M) = \bigoplus_{\beta \neq \alpha} M_\beta$. Por la proposición (1.2.5) $\bigoplus_{\beta \neq \alpha} M_\beta = \mathrm{Ker} e_\alpha$. □

Llamamos a $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ los idempotentes de la descomposición $M = \bigoplus_A M_\alpha$. Para cada $\alpha \in A$, llamamos e_α el idempotente para M_α en esta descomposición.

Proposición 1.2.17.- Sean $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ submódulos de un módulo M. Entonces $M = \bigoplus_A M_\alpha$ si y solamente si existe un conjunto (único) $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ de endomorfismos idempotentes de M tales que para toda $\alpha \in A$, $\mathrm{Im} e_\alpha = M_\alpha$ y $\sum_{\beta \neq \alpha} M_\beta = \mathrm{Ker} e_\alpha$.

Más aún, si tales endomorfismos idempotentes existen, e_α es el idempotente para M_α en la descomposición $M = \bigoplus_A M_\alpha$.

Demostración.-

$\Rightarrow$) Por la proposición (1.2.16)

$\Leftarrow$) Por el lema (1.2.5 c) , tenemos $M = e_\alpha(M) \oplus (1 - e_\alpha)(M)$ para cada $\alpha \in A$, por el lema (1.2.5 a), $\mathrm{Im}(1 - e_\alpha) = \mathrm{Ker} e_\alpha$, luego $\mathrm{Im} e_\alpha \cap \mathrm{Ker} e_\alpha = 0$, de donde $M_\alpha \cap (\sum_{\beta \neq \alpha} M_\beta) = 0$, por tanto $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ es independiente.

Análogamente $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ se extiende sobre M y por la proposición (1.2.14)

$$M = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$$

□

Definición 1.2.18.- Un conjunto $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ de idempotentes en un anillo R se dice que es ortogonal, en caso de que este sea ortogonal por parejas. Es decir $e_\alpha \circ e_\beta = \delta_{\alpha\beta} e_\alpha$, con $\alpha, \beta \in A$; donde $\delta_{\alpha\beta}$ es la delta de Kronecker.

Corolario 1.2.19.- Los idempotentes $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ para una descomposición $M = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ son ortogonales. Más aún, si $x \in M$, entonces $e_\alpha(x) = 0$ para casi toda $\alpha \in A$ y $x = \sum_{A} e_{\alpha}(x)$ □

§3 RADICALES

Sea R un anillo, M un R-módulo.

Definición 1.3.1.-

a) La intersección de todos los ideales (izquierdos) maximales de R se denotará por $J(R)$ (o solamente J si no hay confusión alguna) y se llama el radical de R.

b) $\text{rad}M = \cap\{N | N \subseteq M \text{ maximal}\}$ es el radical de M.

c) Un submódulo N de M se llama superfluo en M, si para cada submódulo N' de M con $N + N' = M$ se tiene $N' = M$. Escribiremos $N \ll M$.

Ejemplo 1.3.2.-

a) Consideremos $\mathbb{R}^2$, $\text{Rad}\mathbb{R}^2 = \{(0,0)\}$.

b) Sea K un campo, $\text{Rad}K = 0$.

c) El radical de $\mathbb{Z}_4$ es $\langle\overline{2}\rangle$.

Más adelante presentaremos algunos resultados que nos facilitarán el cálculo del Radical de un módulo o de un anillo. Se darán más ejemplos.

Definición 1.3.3.-

a) Un módulo M se llama simple si no tiene submódulos diferentes de 0 y M.

b) Un módulo M se llama semisimple, si es la suma directa de módulos simples.

Proposición 1.3.4.- Para un módulo M, son equivalentes:

a) M es semisimple.

b) $M = \sum_{i \in I} S_i$ con $S_i \subseteq M$ simple.

c) Todo submódulo de M es sumando directo de M. □

Observación 1.3.5.- Si N es submódulo de M y $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$ con S_i simple, existe

$I' \subset I$ con $N \simeq \bigoplus_{i \in I'} S_i$. $\square$

Ejemplo 1.3.6.- Si $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$, S_i simple. Entonces Rad$M$=0.

En efecto. Sea $r \in \text{Rad}M$. Consideremos $f: M \to \bigoplus_{\alpha \neq \beta} S_\alpha$ la proyección de M sobre $\bigoplus_{\alpha \neq \beta} S_\alpha$ a lo largo de S_β. Por la proposición (1.1.10) y por el corolario (1.1.5) $M/S_\beta \simeq \bigoplus_{\alpha \neq \beta} S_\alpha$ que es submódulo maximal de M. Por tanto $r \in \bigoplus_{\alpha \neq \beta} S_\alpha$ y como β es arbitrario, entonces r=0.

Lema 1.3.7.- Sea M un módulo. Entonces
rad$M = \cap\{\text{Ker}h | 0 \neq h: M \to S$ morfismo con S simple $\}$
$= \sum\{N | N$ es superfluo en $M\}$.

Demostración.-

(primera igualdad)

($\subset$) Sea $0 \neq h: M \to S$ morfismo con S simple. Entonces $M/\text{Ker}h \simeq S$ de donde $M/\text{Ker}h$ es simple, y Ker$h$ es maximal. Por tanto
rad$M \subseteq \cap\{\text{Ker}h | 0 \neq h: M \to S$ morfismo con S simple $\}$.

($\supset$) Sea $x \in \cap\{\text{Ker}h / 0 \neq h: M \to S$ morfismo con S simple$\}$. Sea $N \subset M$ maximal. Sea $0 \neq h: M \to M/N$ el morfismo canónico. Como M/N es simple, entonces $x \in \text{Ker}h = N$.

(segunda igualdad)

($\supset$) Supongamos $N \ll M$ y sea $K \subseteq M$ maximal. Si $N \not\subset K$, se tendría $N + K = M$ y luego $K = M$ que es una contradicción. Así, $N \subseteq$rad$M$, por tanto $\sum\{N | N \ll M\} \subseteq$ rad$M$.

($\subset$) Sea $x \in$ rad$M$ y tomemos $N' \subseteq M$ con $Rx + N' = M$. Si $N' \subsetneq M$, por el lema de Zorn, existe un submódulo K de M satisfaciendo $N' \subset K$, $x \notin K$ y maximal con esta propiedad. Afirmamos que K es maximal en M. En efecto si $K \subsetneq K' \subset M$, entonces $x \in K'$, luego $Rx \subset K'$ y como $N' \subset K'$ entonces $Rx + N' = M \subset K$. Así $K = M$. Lo cual es una contradicción. Entonces , debería tenerse $x \in K$, otra contradicción. Luego , $N' = M$, es decir Rx es superfluo en M, con lo cual rad$M \subseteq \sum\{N | N \ll M\}$

$\square$

Corolario 1.3.8.- Sea $f: M \to N$ un homomorfismo de módulos. Entonces $f(\text{Rad}M) \subset \text{Rad}N$. $\square$

Corolario 1.3.9.- Sea $f: M \to N$ un epimorfismo y Ker$f$ $\subset$Rad$M$. Entonces f(Rad$M$) =Rad$N$.

Demostración.-

$\subset$) Se sigue del corolario anterior.

$\supset$) Se sigue del lema (1.3.7) y del teorema (1.1.4) □

Corolario 1.3.10.- Rad(M/Rad$M$) = 0. □

Corolario 1.3.11.- J es el único ideal supefluo maximal de R. Además J es bilateral.

Demostración.- (veamos que es superfluo)

Sea N un ideal propio de R. Como R tiene 1, existe K ideal maximal con $N \subset K$. Luego $J \subset K$ y $N + J \subseteq K \subsetneq R$; de este modo J es superfluo, y por el lema (1.3.7), J es el único ideal superfluo maximal de R.

(bilateral) : Sea $r \in R$, $h: R \to R$; $x \mapsto xr$, es homomorfismo de módulos. Por el corolario (1.3.8), $J \supset h(J) = Jr$. □

Definición 1.3.12.-

a) El socle de un R-módulo M es Soc$M$ = $\sum\{S | S$ es submódulo simple de $M\}$.

b) Un submódulo N de M se dice esencial si para todo submódulo K de M con $N \cap K = 0$ se tiene $K = 0$, se escribe $N \triangleleft M$

Lema 1.3.13.- Soc$M$ = $\sum\{K|K$ es submódulo minimal de $M\}$ = $\cap\{L|L$ es submódulo esencial de $M\}$

Demostración.- La primera igualdad es obvia. Mostraremos la segunda igualdad.

($\subset$) Sea S submódulo simple de M. Sea $L \triangleleft M$. Luego $S \cap L \neq 0$ y $S \subset L$. Así, Soc$M \subset \cap\{ L|\ L \triangleleft M\}$

($\supset$) Escribimos $K = \cap\{L|L \triangleleft M\}$. Probaremos que K es semisimple. Por Proposición 1.3.4 basta demostrar que todo submódulo de K es sumando directo de K. Sea N submódulo de K. Sea N' submódulo de M maximal respecto a $N \cap N' = 0$. Ahora $N \oplus N' \triangleleft M$ (En efecto si $0 \neq L$ tal que $(N \oplus N')\cap L = 0$ se tiene $N \cap (N' \oplus L) = 0$, contradiciendo la maximalidad de N'). Luego $K \subset N \oplus N'$ y por el lema (1.1.3), $K = N\oplus (N' \cap K)$.

□

Definición 1.3.14.-

a) $r \in R$ se llama nilpotente, si existe $n \in N$ tal que $r^n = 0$.

b) Un ideal I de R se llama nilpotente, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I^n = 0$.

c) Un ideal I de R se llama nil, si todos sus elementos son nilpotentes.

Lema 1.3.15.- Sea I un ideal nilpotente de R, entonces I es superfluo.

Demostración.- Supongamos $I^n = 0$, con $I^{n-1} \neq 0$, y sea N ideal de R tal que $I + N = R$; entonces $I^2 + NI = RI = I$, pues $RI \subseteq I$ por ser I ideal y $RI \supseteq I$ pues $1 \in R$. Tenemos $(I^2 + NI) + N = R$, continuando sucesivamente tenemos: $I^n + NI^{n-1} + \ldots + NI + N = R$, y como $I^n = 0$ y $NI^m \subseteq N$ para $m = 1, \ldots, n-1$, entonces tenemos $N = R$, lo cual demuestra que I es superfluo en R. □

Corolario 1.3.16.- Sea I un ideal nilpotente de R, entonces $I \subset J$.

Demostración.- Se sigue del lema anterior, y del lema (1.3.7.) □

Lema 1.3.17.- $J = \{x \in R |$ para toda $r \in R$ existe $y \in R, y(1 - rx) = 1\}$.

Demostración.-
$\subseteq$) Sea $x \in J$, de forma que $rx \in J$. Claramente $R = R(rx) + R(1 - rx)$. Siendo J (y por tanto $R(rx)$) superfluo en R, $R(1 - rx) = R$.
$\supseteq$) Sea $x \in R$ tal que para cada $r \in R$, existe $y \in R$ con $y(1 - rx) = 1$. Sea K ideal maximal de R y supongamos $x \notin K$. Así $Rx + K = R$ y existen elementos $r \in R$, $k \in K$ con $rx + k = 1$. Ahora existe $y \in R$ con $y(1 - rx) = 1$. Luego, $1 = yk \in K$ contradicción. □

Observación 1.3.18.- Basta pedir I ideal nil para que $I \subset J$.

Demostración.- Sea $y \in I$, $r \in R$, entonces $ry = x \in I$ y sea n tal que $x^n = 0$. Así $(1 + x + \ldots + x^{n-1})(1 - x) = 1$ y $x \in J$. □

Definición 1.3.19.- Sea M un módulo.

a) M se llama finitamente generado, si para todo conjunto S de submódulos de M con $\sum_{N \in S} N = M$, existe $F \subset S$ subconjunto finito, tal que $\sum_{N \in F} N = M$.

b) M se llama finitamente cogenerado, si para todo conjunto S de submódulos de M con $\bigcap_{N \in S} N = 0$, existe un subconjunto finito $F \subset S$ con $\bigcap_{N \in F} N = 0$.

Lema 1.3.20.- Sea M un módulo. Son equivalentes:

a) M es finitamente generado.

b) Para todo epimorfismo $\bigoplus_{i \in I} N_i \xrightarrow{(f_i)} M \to 0$, existe $I' \subset I$ subconjunto finito con $\bigoplus_{i \in I'} N_i \xrightarrow{(f_i)} M \to 0$ epimorfismo.

c) Existe $n \in \mathbb{N}$ y un epimorfismo $R^n \longrightarrow M$

d) M contiene un conjunto generador finito.

□

Proposición 1.3.21.- Sea M un módulo.Entonces:

a) M es finitamente generado si y sólo si $M/\text{Rad}M$ es finitamente generado y $\text{Rad}M \ll M$.

b) M es finitamente cogenerado si y sólo si $\text{soc}M$ es finitamente cogenerado y $\text{soc}M$ es esencial en M □

Corolario 1.3.22.- Sea M un módulo semisimple. Son equivalentes:

a) M es finitamente generado.

b) $M = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i$, con S_i simple.

c) M es finitamente cogenerado. □

Lema 1.3.23.- (Nakayama)

Sea I un ideal de R. Son equivalentes:

a) $I \subset J$

b) Para todo módulo finitamente generado M, $IM = M$ implica $M = 0$

c) Para todo módulo finitamente generado M, $IM \ll M$.

□

Corolario 1.3.24.- $J = \{x \in R | xS = 0 \text{ para todo módulo simple } S\}$.

Corolario 1.3.25.- Sea M un módulo. Entonces $JM \subset\text{Rad}M$.

Demostración.- Como $\text{Rad}(M/\text{Rad}M) = 0$, existe una familia de módulos simples

$(S_\alpha)_{\alpha\in I}$ tal que $0 \to M/\mathrm{Rad}M \longrightarrow \prod_{\alpha\in I} S_\alpha$ es exacta. Por el corolario anterior $J(M/\mathrm{Rad}M) = 0$, o bien $JM \subset \mathrm{Rad}M$. □

§4 CONDICIONES DE CADENA

Definición 1.4.1.- Sea M un módulo. Se dice que:

a) M es noetheriano, si y sólo si, para cada cadena ascendente $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de submódulos de M. (Es decir $M_n \supseteq M_{n-1}$ para toda n) existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $M_n = M_m$ para toda $n \geq m$.

b) M es artiniano, si y sólo si, para cada cadena descendente $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de submódulos de M, se tiene $M_n = M_m$ para alguna $m \in \mathbb{N}$ y toda $n \geq m$.

Lema 1.4.2.- Para un módulo M, son equivalentes:

a) M es noetheriano.

b) Todo submódulo de M es finitamente generado.

c) Todo conjunto no vacío de submódulos de M tiene un elemento maximal. □

Lema 1.4.3.- Para un módulo M, son equivalentes:

a) M es artiniano.

b) Todo cociente de M es finitamente cogenerado.

c) Todo conjunto no vacío de submódulos de M tiene un elemento minimal. □

Lema 1.4.4.- Consideremos una sucesión exacta corta de módulos

$$0 \to M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \to 0.$$

Entonces

a) M es noetheriano, si y sólo si M' y M'' son noetherianos.

b) M es artiniano, si y sólo si M' y M'' son artinianos.

□

Corolario 1.4.5.- Supongamos $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$. Entonces M es noetheriano (artiniano), si y sólo si, cada M_i es noetheriano (artiniano)

□

Corolario 1.4.6.- Sea M semisimple. Entonces M es artiniano si y sólo si M es noetheriano.

Demostración.- $\Leftarrow$) Por el lema (1.4.2), M es finitamente generado. Por el corolario (1.3.22), $M = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i$ con S_i simple. Por el corolario anterior M es artiniano.

$\Rightarrow$) Por el lema (1.4.3), M es finitamente cogenerado. Por el corolario (1.3.22), $M = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i$ con S_i simple. Por el corolario anterior M es noetheriano. □

Corolario 1.4.7.- Para M un módulo son equivalentes:

a) $\mathrm{Rad}M = 0$ y M es artiniano.

b) M es semisimple y noetheriano.

Demostración.-

$\Leftarrow$) Por el corolario anterior y ejemplo (1.3.6)

$\Rightarrow$) $\mathrm{Rad}M = 0$ implica que $0 \to M \longrightarrow \prod\{S|S$ simple y $0 \neq h: M \to S$ morfismo $\}$ es exacta. Siendo M finitamente cogenerado, el resultado se sigue de la observación (1.3.5) y de la proposición (1.3.21) □

Corolario 1.4.8.- Si M módulo artiniano . Entonces $M/\mathrm{Rad}M$ es semisimple.

Demostración.- $\mathrm{Rad}(M/\mathrm{Rad}M) = 0$ por el corolario (1.3.10) y $M/\mathrm{Rad}M$ es artiniano. Se sigue del corolario anterior.

□

Definición 1.4.9.-

a) El anillo R se llama artiniano si y sólo si el módulo $_RR$ es artiniano

b) El anillo R se llama noetheriano si y sólo si el módulo $_RR$ es noetheriano.

Ejemplo 1.4.10.-

a) Son anillos noetherianos:

I) Los enteros $\mathbb{Z}$.

II) $\mathbb{Z}[i]$ los enteros gaussianos de la forma $a + bi$ con $a, b \in \mathbb{Z}$, como subanillo de $\mathbb{C}$.

III) $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$ donde $n \in \mathbb{Z}$, como subanillo de $\mathbb{C}$.

IV) Si R es noetheriano , x es indeterminada , $R[x]$ es noetheriano.

V) Todo anillo artiniano es noetheriano (1.4.19).

b) Son anillos artinianos:

I) Todo anillo finito.

II) El anillo de matrices $M_n(K)$, donde K es campo.

III) Si K es un campo , toda K-álgebra Λ de dimensión finita. (Una K-álgebra Λ es un anillo con estructura de K-espacio vectorial de forma que el producto es K-bilineal.)

c) $\mathbb{Z}$ es un anillo noetheriano , no artiniano.

d) Anillos no noetherianos:

I) $K[x_1, x_2, \ldots]$ el anillo de polinomios sobre infinitas indeterminadas.

II) $C([0,1], \mathbb{R})$, el anillo de funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$.

Lema 1.4.11.- Sea R un anillo artiniano, I ideal de R tal que R/I es semisimple. Entonces $J(R) \subset I$.

Demostración.- Supongamos ${}_{R/I}R/I = \bigoplus_{\alpha \in A} S_\alpha$ con ${}_{R/I}S_\alpha$ simples. Cada ${}_{R/I}S_\alpha$ es R-módulo simple. En efecto, si $r \in R$, $s \in S_\alpha$, se define $rs = (r + I)s$.

Veamos que son R-módulos simples: Supongamos $0 \neq J \subsetneq S_{\alpha_0}$, con J un R–módulo. Como S_{α_0} es R/I-módulo , J es R/I-módulo. Contradicción. Por tanto ${}_R(R/I)$ es semisimple. Por el ejemplo (1.3.6) $0 = \mathrm{Rad}\,_R(R/I)$. Y por el corolario (1.3.25) $J(R)(R/I) \subset \mathrm{Rad}_R(R/I) = 0$. Por tanto $0 = J(R)(R/I) = J(R)R/(J(R)R \cap I) = J(R)/(J(R) \cap I)$. Por tanto $J(R) = J(R) \cap I \subset I$. □

Lema 1.4.12.- Sea R un anillo, M un módulo finitamente generado. Entonces:

a) R artiniano implica M artiniano.

b) R noetheriano implica M noetheriano. □

Definición 1.4.13.-

a) Sea M un módulo, una serie de composición para M es una cadena finita descendente $M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_n = 0$ de forma que cada factor M_i/M_{i+1} es simple.

b) El módulo M_i/M_{i+1} se llama factor de composición de M.

Teorema 1.4.14.- (Teorema de Jordan-Holder)

Sea M un módulo, entonces M es noetheriano y artiniano, si y sólo si, M posee un serie de composición.

Supongamos que tenemos dos series de composición para M: $M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_m = 0$ y $M = N_o \supset N_1 \supset \ldots \supset N_n = 0$. Entonces las series son equivalentes, ésto es, $m = n$ y existe una permutación $\sigma: \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m\}$, tal que: $M_i/M_{i+1} \simeq N_{\sigma(i)}/N_{\sigma(i)+1}$ para cada $i < m$. □

Definición 1.4.15.- Sea M un módulo artiniano y noetheriano, $l(M)$ (la longitud de M) es la longitud de una serie de composición. Se dice que M es de longitud finita.

Lema 1.4.16.- Si $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ es una sucesión exacta de módulos, con M artiniano y noetheriano, entonces $l(M) = l(M') + (M'')$.

Demostración.- Como M es artiniano y noetheriano M' y M'' tienen series de composición $M' = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_{l(M')} = 0$ y $M'' = N_0 \supset N_1 \supset \ldots \supset N_{l(M'')} = 0$. Para cada $i = 0, \ldots, l(M')$, sea $M_i' = f(M_i)$, y para cada $j = 0, \ldots, l(M'')$, sea $N_j' = g^{-1}(N_j)$. Se tiene que: $M = N_0' \supset N_1' \supset \ldots \supset N_{l(M'')}' = M_0' \supset M_1' \supset \ldots \supset M_{l(M')}' = 0$ es una serie de composición para M. □

Lema 1.4.17.- (lema de Fitting). Sea M un módulo y $f: M \to M$ un endomorfismo. Entonces:

a) Si M es artiniano, entonces existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $M = \mathrm{Im} f^n + \mathrm{Ker} f^n$ si $n > N$. En particular f es isomorfismo, si y sólo si, f es monomorfismo.

b) Si M es noetheriano, entonces existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $0 = \mathrm{Im} f^n \cap \mathrm{Ker} f^n$ si $n > N$. En particular f es isomorfismo, si y sólo si, f es epimorfismo.

□

Corolario 1.4.18.- Si M es de longitud finita y $f: M \to M$ es endomorfismo, entonces $M = \mathrm{Im} f^n \oplus \mathrm{Ker} f^n$ para toda n mayor que cierta $N \in \mathbb{N}$. □

Teorema 1.4.19.- (Hopkins) Sea R un anillo. Sea J el Radical de R. Entonces R es artiniano si y solamente si R es noetheriano, J es nilpotente y R/J es semisimple.

□

§5 MODULOS INESCINDIBLES Y ANILLOS LOCALES

Sea R un anillo.

Definición 1.5.1.- Un módulo M, se dice inescindible, si $M \neq 0$ y para cada descomposición $M = N \oplus N'$ se tiene $N = 0$ ó $N' = 0$.

Ejemplo 1.5.2.-

a) Los módulos simples son inescindibles.

b) $\mathbb{Z}$ considerado como $\mathbb{Z}$-módulo es inescindible.
En efecto, sabemos que los submódulos de $\mathbb{Z}$ son de la forma $n\mathbb{Z}$ y $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ si $(m, n) = 1$. Pero $n \cdot m \in n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$. Luego $\mathbb{Z}$ es inescindible.

c) Consideremos el anillo

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

Los inescindibles de ${}_R R$ hasta isomorfía son:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ y} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

En el capítulo 3 veremos más ejemplos.

Lema 1.5.3.- Sea M un módulo inescindible de longitud finita y $f: M \to M'$ un endomorfismo. Son equivalentes:

a) f es un isomorfismo

b) f es un monomorfismo

c) f es un epimorfismo

d) f no es nilpotente.

Demostración.- Por el lema (1.4.17) tenemos a) $\Leftrightarrow$ b) y a) $\Leftrightarrow$ c); c) $\Rightarrow$ d) es obvia, basta ver d) $\Rightarrow$ b).

Por el corolario (1.4.18) $M = \mathrm{Im} f^n \oplus \mathrm{Ker} f^n$, para alguna $n \in \mathbb{N}$. Como M es inescindible y $\mathrm{Im} f^n \neq 0$, entonces $\mathrm{Ker} f^n = 0$. Luego $\mathrm{Ker} f = 0$ y f es monomorfismo.

□

Observación 1.5.4.- Sea $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $n \mapsto 2n$, este no es isomorfismo ni nilpotente.

Definición 1.5.5.- Un anillo A se llama local siempre que $a+b$ invertible implique a ó b invertible $(a, b \in A)$.

Lema 1.5.6.- Para un anillo A con unidad, son equivalentes:

a) A es local.

b) A tiene un único ideal maximal.

c) $\mathfrak{M} = \{x \in A | x \text{ no es unidad}\}$ es un ideal de A (claramente maximal).

Demostración.-

b) $\Rightarrow$ a) Sea L el único ideal maximal. Sean $a, b \in A$, supongamos $a+b$ es invertible, entonces $a+b \notin L$ y a ó $b \notin L$ (pues si $a, b \in L$ entonces $a+b \in L$ lo cual es una contradicción).

Supongamos $a \notin L$. Si $\langle a \rangle \subsetneq A$, por el lema de Zorn, existe un ideal maximal I en A, tal que $\langle a \rangle \subseteq I$. Luego $I = L$ que nos dá una contradicción.

a) $\Rightarrow$ c) Sean $a, b \in \mathfrak{M}, r \in A$, si $ra \notin \mathfrak{M}$, entonces existe $u \in A$ tal que $1 = u(ra) = (ur)a$, entonces $a \notin \mathfrak{M}$ lo que es una contradicción. Que $a+b \in \mathfrak{M}$ se sigue de la definición.

c) $\Rightarrow$ b) es obvio. □

Lema 1.5.7.- Sea M un módulo, si $\mathrm{End}_R M$ es local, entonces M es inescindible.

Demostración.- Supongamos $M = M_1 \oplus M_2$ y consideremos los morfismos canónicos $e: M \xrightarrow{\pi_1} M_1 \xhookrightarrow{\sigma_1} M$. Así $e \in \mathrm{End}_R M$ con $e^2 = e$. Basta probar que $e = 0$ ó $e = 1$. (Pues e es el idempotente para M_1 en la descomposición $M = M_1 \oplus M_2$).

Supongamos $0 \neq e \neq 1$.

Sea $\mathfrak{M}$ el ideal maximal de $\mathrm{End}_R M$. Si $e \notin \mathfrak{M}$, por el lema (1.5.6) existe $u \in \mathrm{End}_R M$ con $ue = 1$, de donde $e = ue^2 = ue = 1$ contradicción, luego $e \in \mathfrak{M}$. Como también $0 \neq 1 - e \neq 1$ y por el lema (1.2.2) , $1 - e$ es idempotente, se tiene (análogamente a e) $1 - e \in \mathfrak{M}$. De donde $1 = e + (1 - e) \in \mathfrak{M}$ contradicción, por tanto $e = 0$ ó $e = 1$.

□

Lema 1.5.8.- Sea M un módulo de longitud finita. Entonces M es inescindible, si y sólo si, $\mathrm{End}_R M$ es local.

Demostración.-

($\Rightarrow$) Supongamos M inescindible, por el lema (1.5.3) en el anillo $\mathrm{End}_R M$ todo elemento es invertible o nilpotente.

($\Leftarrow$)Basta ver que $\mathfrak{M} = \{x \in \mathrm{End}_R M | x \text{ nilpotente}\}$ es ideal de $\mathrm{End}_R M$. Sean $x, y \in \mathfrak{M}, r \in \mathrm{End}_R M$. Si $rx \notin \mathfrak{M}$, existe u con $u(rx) = 1$. Supongamos $x^n = 0$, $x^{n-1} \neq 0$. Así, $0 = urx^n = u(rx)x^{n-1} = x^{n-1}$ contradicción. Luego $rx \in \mathfrak{M}$.

Si $x + y \notin \mathfrak{M}$, existe u con $u(x + y) = 1$. Así $ux + uy = 1$; entonces $uy \in \mathfrak{M}$, $1 - uy = ux \in \mathfrak{M}$.

Supongamos $(uy)^n = 0$, entonces $(1 - uy)(1 + uy + (uy)^2 + \cdots + (uy)^{n-1}) = 1$ es una contradicción por el lema (1.5.3) ; esto muestra que $x + y \in \mathfrak{M}$.

□

Definición 1.5.9.- Sea $M = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ una descomposición de un módulo M como suma directa de submódulos $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$, con $M_\alpha \neq 0$, se dice que es una **descomposición inescindible**, si M_α es inescindible para toda $\alpha \in A$.

Lema 1.5.10.- Sea M un módulo noetheriano ó artiniano. Entonces existe una descomposición inescindible de M.

Demostración.-

Sea M un módulo artiniano . Si M no es inescindible , existen submódulos no triviales M_1 y M_1' con

$$M = M_1 \oplus M_1'.$$

Si M_1 y M_1' son ambos inescindibles hemos acabado. Si no , podemos suponer que M_1 no es inescindible y tenemos

$$M_1 = M_2 \oplus M_2'.$$

Así obtenemos $M \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \ldots$

Como M es artiniano, este proceso debe detenerse y damos una descomposición inescindible de M.

El caso en que M es noetheriano es similar.

□

Ejemplo 1.5.11.-

a) Sea $\mathbb{Z}_1 = \{(z,0)|z \in \mathbb{Z}\}$ y $\mathbb{Z}_2 = \{(0,z)|z \in \mathbb{Z}\}$ así $\mathbb{Z}_1 \oplus \mathbb{Z}_2$ es una descomposición inescindible de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b) Sea K un campo.
$$M_{2\times 2} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ K & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

es una descomposición inescindible de $M_{2\times 2}$. (En general, si M es semisimple, M tiene una descomposición inescindible).

Definición 1.5.12.- Sea M un módulo y K sumando directo de M, decimos que K es sumando directo maximal de M, si tiene un complemento directo K' inescindible.

Definición 1.5.13.- Una descomposición $M = \oplus M_\alpha$ de un módulo M, como suma directa de submódulos diferentes de cero $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$, se dice que complementa sumandos directos (respectivamente complementa sumandos directos maximales), en caso de que para todo sumando directo (respectivamente maximal) K de M, hay un subconjunto $B \subseteq A$ con
$$M = (\oplus_B M_\alpha) \oplus K$$

Ejemplo 1.5.14.- Una descomposición que complementa sumandos directos, complementa sumandos directos maximales, pero no al revés.

Sea A el anillo de funciones continuas $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Sea $\lambda \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Definimos

$$\epsilon_\lambda: \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \qquad q \mapsto \begin{cases} 1, & \text{si } q < \lambda; \\ 0, & \text{si } q > \lambda. \end{cases}$$

$$\chi_\lambda: \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \qquad q \mapsto \begin{cases} 0, & \text{si } q < \lambda; \\ 1, & \text{si } q > \lambda. \end{cases}$$

$\epsilon_\lambda, \chi_\lambda \in A$ y se tiene $\epsilon_\lambda^2 = \epsilon_\lambda$, $\chi_\lambda^2 = \chi_\lambda$, $\epsilon_\lambda + \chi_\lambda = 1$.

a) Sea $M_\lambda = \epsilon_\lambda A$, $N_\lambda = \chi_\lambda A$. Entonces $A = M_\lambda \oplus N_\lambda$.

b) ${}_A A$ no tiene sumandos directos inescindibles. En particular ${}_A A$ no tiene sumandos directos maximales.

Supongamos K sumando directo de ${}_A A$. Existe $0 \neq e \in \mathrm{End}_A(A) = A$ idempotente tal que $eA = K$. Sea $s \in \mathbb{Q}$ tal que $e(s) \neq 0$. Como e es idempotente $e(s) = 1$. Como e es continua , existe $\epsilon > 0$ tal que , para toda $t \in (s-\epsilon, s+\epsilon) \cap \mathbb{Q}$, $e(t) = e(s)$. Sea $\lambda \in (s-\epsilon, s+\epsilon) - \mathbb{Q}$. Consideremos $a = e\epsilon_\lambda$, $b = e\chi_\lambda \in A$. Como $a \neq 0 \neq b$, $ab = 0$ y $a + b = e$, se tiene $K = eA = aA \oplus bA$ con $aA \neq 0 \neq bA$. Luego K no es inescindible.

Sea $\lambda \notin \mathbb{Q}$, entonces la descomposición $A = M_\lambda \oplus N_\lambda$ complementa sumandos directos maximales.

c) La descomposición $A = M_\lambda \oplus N_\lambda$ $(\lambda \notin \mathbb{Q})$ no complementa sumandos directos. En efecto , si $\lambda \neq \mu$, $\mu \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, tenemos $A = M_\lambda \oplus N_\lambda = M_\mu \oplus N_\mu$. Pero $M_\lambda \cap M_\mu \neq 0$ y $1 \notin N_\lambda + M_\mu$.

□

Lema 1.5.15.- Sea $M = \bigoplus_A M_\alpha$ una descomposición que complementa sumandos directos, entonces cada M_α es inescindible.

Demostración.- Sea $\alpha_0 \in A$ y supongamos $M_{\alpha_0} = \overline{M}_1 \oplus \overline{M}_2$ con $\overline{M}_1 \neq 0$. Entonces existe $A' \subseteq A$, tal que $M = \overline{M}_1 \oplus (\bigoplus_{A'} M_\alpha)$ y como $M = \overline{M}_1 \oplus \overline{M}_2 \oplus (\bigoplus_{A-\{\alpha_0\}} M_\alpha)$ tenemos que $\alpha_0 \notin A'$ (pues de lo contrario $\overline{M}_1 \cap (\bigoplus_{A'} M_\alpha) \supseteq \overline{M}_1 \cap M_{\alpha_0} = \overline{M}_1 \neq 0$ lo que contradice que la suma $M = \overline{M}_1 \oplus (\bigoplus_{A'} M_\alpha)$ sea directa). De este modo $A' \subseteq A - \{\alpha_0\}$. Sea $B = (A - \{\alpha_0\}) - A'$, entonces $M = \overline{M}_1 \oplus (\bigoplus_{A'} M_\alpha) \oplus (\bigoplus_B M_\alpha) \oplus \overline{M}_2$ ya que $A = A' \cup B \cup \{\alpha_0\}$ y la unión es ajena. Por el corolario (1.1.5) tenemos que: $M / \left(\overline{M_1} \oplus (\bigoplus_{A'} M_\alpha)\right) \simeq (\bigoplus_B M_\alpha) \oplus \overline{M_2}$ y $M / \left(\overline{M_1} \oplus (\bigoplus_{A'} M_\alpha)\right) \simeq 0$, de este modo $\overline{M_2} \oplus (\bigoplus_B M_\alpha) \simeq 0$, con lo cual $\overline{M_2} = 0$ y por tanto M_{α_0} es inescindible.

□

Ejemplo 1.5.16.-

a) Sea $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_1 \oplus \mathbb{R}_2$ donde $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$ y $\mathbb{R}_2 = \{0\} \times \mathbb{R}$. Es una descomposición inescindible de $\mathbb{R}^2$ que complementa sumandos directos.

b) En general las descomposiciones inescindibles no complementan sumandos directos. Ver ejemplo (1.5.26). Veamos un caso positivo.

Definición 1.5.17.- Un conjunto $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ de submódulos de M, es **homológicamente independiente**, en caso de que $\alpha \neq \beta$ implique $\mathrm{Hom}(M_\alpha, M_\beta) = 0$.

Lema 1.5.18.- Sea $M = \bigoplus\limits_A M_\alpha$ una descomposición inescindible de M con $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ homológicamente independiente, entonces $M = \bigoplus\limits_A M_\alpha$ complementa sumandos directos.

Demostración.- Sea K sumando directo de M ($K \neq 0$). Sea $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ los idempotentes para la descomposición $M = \bigoplus\limits_A M_\alpha$. Sea $B = \{\alpha | e_K \circ e_\alpha \neq 0\}$, donde e_K es el idempotente para K en la descomposición $M = K \oplus N$. Sabemos por el corolario (1.2.19) que $K = \sum\limits_A e_K e_\alpha(K) = \sum\limits_B e_K e_\alpha(K)$, luego
$K = \sum\limits_{\beta\in A} e_\beta(\sum\limits_{\alpha\in B} e_K e_\alpha(K)) = \sum\limits_{\beta\in A}(\sum\limits_{\alpha\in B} e_\beta e_K e_\alpha(K))$ y por hipótesis
$K = \sum\limits_B e_\alpha e_K e_\alpha(K) \subseteq \bigoplus\limits_B M_\alpha$ pues $\mathrm{Hom}(M_\alpha, M_\beta) = 0$.
Tenemos que $0 \to M_\alpha \cap K \xrightarrow{i} M_\alpha \longrightarrow M_\alpha/M_\alpha \cap K \to 0$ es exacta y se escinde, pues $f = e_K \circ e_\alpha|_{M_\alpha} : M_\alpha \longrightarrow M_\alpha \cap K$ es tal que $f \circ i = 1_{M_\alpha \cap K}$. Veamos que f está bien definida. Es claro que $f(M_\alpha) \subseteq K$. Sea $m_\alpha \in M_\alpha$ entonces

$$f(m_\alpha) = \sum_{\beta\in A} e_\beta(f(m_\alpha)) = \sum_{\beta\in A} e_\beta(e_K e_\alpha)(m_\alpha) = \sum_{\beta\in B} e_\beta(e_K e_\alpha)(m_\alpha) = e_\alpha e_K e_\alpha(m_\alpha)$$

(pues $e_\beta e_K e_\alpha(m_\alpha) = 0$ si $\alpha \neq \beta$ por ser homológicamente independientes). Así $f(m_\alpha) = e_\alpha e_K(m_\alpha)$ de este modo $f(m_\alpha) \in M_\alpha$ y es claro que es la identidad $f \circ i = 1_{M_\alpha \cap K}$. Por lo cual $M_\alpha \simeq (M_\alpha \cap K) \oplus M_\alpha/(M_\alpha \cap K)$ y como M_α es inescindible, entonces $M_\alpha \cap K = 0$ ó $M_\alpha/M_\alpha \cap K = 0$ de donde $M_\alpha \cap K = 0$ ó $M_\alpha \cap K = M_\alpha$. Para $\alpha \in B$, $0 \neq e_K e_\alpha(M) \subseteq M_\alpha \cap K$ entonces $M_\alpha \cap K = M_\alpha$ es decir $M_\alpha \subseteq K$, de donde $\bigoplus\limits_B M_\alpha \subseteq K$. Así $K = \bigoplus\limits_{\alpha\in B} M_\alpha$.

□

Lema 1.5.19.- Sea $M = \bigoplus\limits_A M_\alpha$ una descomposición que complementa sumandos directos maximales y N sumando directo inescindible de M tal que $M = K \oplus N$. Entonces existe $\alpha \in A$ tal que $M = M_\alpha \oplus K$ y $M_\alpha \simeq N$.

Demostración.- Como $M = K \oplus N$, entoneds existe $B \subseteq A$ tal que $\left(\bigoplus\limits_B M_\beta\right) \oplus K = M$ por la proposición (1.1.13) , $\bigoplus\limits_B M_\beta \simeq N$ pero como N es inescindible, entonces B consta de un sólo elemento, pues $M_\beta \neq 0$ es decir $M_{\alpha_0} \simeq N$ para $\alpha_0 \in B$, por lo tanto $M_{\alpha_0} \oplus K = M$ y $M_{\alpha_0} \simeq N$.

□

Proposición 1.5.20.- Sea $M = \bigoplus_A M_\alpha$ una descomposición que complementa sumandos directos maximales. Si

$$M = N_1 \oplus \ldots \oplus N_n \oplus K$$

con N_i inescindibles, entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ tales que

$$M_{\alpha_i} \simeq N_i \quad , \quad (i = 1, \ldots, n)$$

y para cada $1 \leq l \leq n$

$$M = M_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus M_{\alpha_l} \oplus N_{l+1} \oplus \cdots \oplus N_n \oplus K.$$

Demostración.- (por inducción sobre n)

Supongamos $n = 1$.
Entonces $M = N_1 \oplus K$, con N_1 inescindible y por el lema anterior se tiene el resultado.

Supongamos $M = N_1 \oplus \ldots \oplus N_{n+1} \oplus K$ con $N_1, \ldots, N_{n+1}$ inescindibles. Como $M = N_1 \oplus \ldots \oplus N_n \oplus K'$ con $K' = N_{n+1} \oplus K$. Sean $M_{\alpha_1}, \ldots, M_{\alpha_n}$, tales que $M_{\alpha_i} \simeq N_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ y para cada $1 \leq l \leq n$
$M = M_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus M_{\alpha_l} \oplus N_{l+1} \oplus \cdots \oplus N_n \oplus K'$, entonces haciendo $l = n$ tenemos $M = M_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus M_{\alpha_n} \oplus K' = M = M_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus M_{\alpha_n} \oplus N_{n+1} \oplus K$ de donde $M' = M_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus M_{\alpha_n} \oplus K$ es un sumando directo maximal de M y por el lema anterior existe $\alpha_{n+1} \in A$ tal que $M = M_{\alpha_{n+1}} \oplus M_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus M_{\alpha_n} \oplus K$ y $M_{\alpha_{n+1}} \simeq N_{n+1}$.

□

Lema 1.5.21.- Sea $M = \bigoplus_A M_\alpha$ una descomposición de M que complementa sumandos directos (maximales). Sean $A' \subseteq A$ y $M' = \sum_{A'} M_\alpha$. Entonces $M' = \bigoplus_{A'} M_\alpha$ es una descomposición de M' que complementa sumandos directos (maximales).

Demostración.- Es claro que $M' = \bigoplus_{A'} M_\alpha$ es una descomposición de M'. Supongamos que K es sumando directo de M', entonces $(\bigoplus_{A-A'} M_\alpha) \oplus K$ es sumando directo de M, por hipótesis existe $B \subseteq A$ tal que $M = (\bigoplus_{A-A'} M_\alpha) \oplus K \oplus (\bigoplus_B M_\beta)$ y por ser suma directa, tenemos que $(\bigoplus_{A-A'} M_\alpha) \cap (\bigoplus_B M_\beta) = 0$ de donde $B \subseteq A'$ y $M' = \bigoplus_B M_\beta \oplus K$.

$\square$

Corolario 1.5.22.- Si M tiene una descomposición que complementa sumandos directos, entonces cada sumando directo de M tiene una descomposición que complementa sumandos directos. (Respectivamente si M tiene una descomposición que complementa sumandos directos maximales).

Demostración.- Sea $M = \bigoplus_{A} M_\alpha$ una descomposición que complementa sumandos directos y sea N un sumando directo de M, sea $B \subseteq A$ tal que $(\bigoplus_{B} M_\beta) \oplus N = M$, entonces por la proposición (1.1.13), $N \simeq \bigoplus_{A-B} M_\alpha$ y por el lema (1.5.21) N complementa sumandos directos.

$\square$

Definición 1.5.23.- Dos **descomposiciones directas** $\bigoplus_{A} M_\alpha = M = \oplus_B N_\beta$ de M, se dice que son **equivalentes**, en caso de que haya una biyección σ, llamada **función de equivalencia**, tal que $\sigma: A \to B$, y para cada $\alpha \in A$, $M_\alpha \simeq N_{\sigma(\alpha)}$.

Teorema 1.5.24.- Sea $M = \bigoplus_{A} M_\alpha$ una descomposición inescindible que complementa sumandos directos maximales. Entonces todas las descomposiciones de M son equivalentes.

Demostración.-

Supongamos que $M = \bigoplus_{A} M_\alpha$ y $M = \bigoplus_{C} N_\gamma$ descomposiciones inescindibles de forma que la primera complementa sumandos directos maximales.

Para cada sumando directo inescindible L de M, construímos

$$A(L) = \{\alpha \in A / M_\alpha \simeq L\} \quad \text{y}$$

$$C(L) = \{\gamma \in C / N_\gamma \simeq L\}$$

Entonces para completar la prueba será suficiente probar que para cada L, (Sumando directo inescindible de M) hay una biyección de $A(L)$ sobre $C(L)$ o equivalentemente que:

$$Card A(L) = Card C(L)$$

Primero , supongamos $A(L)$ es finito. Por la proposición (1.5.20) para cada subconjunto finito $F = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \subset C(L)$, hay una función inyectiva $\tau_F: F \to A$ tal que:

$$L \simeq N_{\gamma_i} \simeq M_{\tau_F(\gamma_i)} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

De donde $\mathrm{Im}\tau_F \subset A(L)$. Y en este caso $CardC(L) \leq CardA(L)$.

Segundo, supongamos $A(L)$ es infinito. Sea $(P_\gamma)_{\gamma \in C}$ las proyecciones para la descomposición $M = \bigoplus_C N_\gamma$. Para cada $\alpha \in A$, definimos el conjunto

$$F_\alpha = \{\gamma \in C / M = M_\alpha \oplus (\bigoplus_{\beta \neq \gamma} N_\beta)\}.$$

Claramente por la proposición (1.1.13), $\gamma \in F_\alpha$ si $P_\gamma|_{M_\alpha}: M_\alpha \to N_\gamma$ es un isomorfismo. Como $M = \bigoplus_A M_\alpha$ complementa cada $\bigoplus_{\beta \neq \gamma} N_\beta$. Entonces $C(L) = \cup_{A(L)} F_\alpha$.

Sea $\alpha \in A$. Como $(N_\gamma)_{\gamma \in C}$ se extiende sobre M, existen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in C$ con

$$M_\alpha \cap (N_{\gamma_1} \oplus \cdots \oplus N_{\gamma_n}) \neq 0.$$

Sea $0 \neq m_\alpha$ en esta intersección. Entonces $\mathrm{Ker}(P_\gamma|M_\alpha) = 0$ implica que $\gamma \in \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ (Pues supongamos que $\gamma \notin \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$. Entonces $P_\gamma|_{M_\alpha}(m_\alpha) = 0$ de donde $\mathrm{Ker}(P_\gamma|_{M_\alpha}) \neq 0$ .Lo cual es una contradicción). Por tanto , cada F_α es finito. Pero esto significa que $\alpha \mapsto F_\alpha$ es una función de $A(L)$ a un conjunto de subconjuntos finitos de $C(L)$. Por tanto,

$$CardC(L) \leq \sum_{\alpha \in A(L)} CardF_\alpha \leq Card(\mathbb{N} \times A(L)) = CardA(L)$$

Tenemos ahora que para cada sumando directo inescindible L de M. $CardC(L) \leq CardA(L)$. Esto es hay una función inyectiva $\sigma: C \to A$ tal que $N_\gamma \simeq M_{\sigma(\gamma)}$ para cada $\gamma \in C$. Por tanto hay un isomorfismo

$$f: M = \bigoplus_C N_\gamma \to \bigoplus_C M_\sigma(\gamma)$$

tal que $f(N_\gamma) = M_{\sigma(\gamma)}$, para cada $\gamma \in C$

Entonces por el lema (1.5.21) , la descomposición $M = \bigoplus_C N_\gamma$ también complementa sumandos directos maximales.

Podemos cambiar los roles de A y C , e inferir que para cada módulo inescindible L,

$$CardA(L) \leq CardC(L)$$

Así que hay una biyección $C(L) \to A(L)$. Por tanto hay una función biyectiva $\varphi: C \to A$ tal que $N_\gamma \simeq M_{\varphi(\gamma)}$.

□

Corolario 1.5.25.- Si un módulo M tiene una descomposición inescindible que complementa sumandos directos (maximales). Entonces, cada descomposición inescindible de M complementa sumandos directos (maximales).

□

Ejemplo 1.5.26.- No todas las descomposiciones inescindibles son equivalentes:

Construiremos el ejemplo en varios pasos.

a) Sean I, J ideales de un anillo R . Supongamos que $I + J = R$. Entonces $I \oplus J \simeq R \oplus (I \cap J)$. En efecto , la sucesión

$$0 \to I \cap J \longrightarrow I \oplus J \xrightarrow{\nu} R \to 0$$

es exacta. Sea $\mu: R \to I \oplus J$ el R-homomorfismo tal que $\mu(1) = (a, b)$ con $(a, b) \in I \oplus J$ cualquier elemento tal que $a + b = \nu(a, b) = 1$. Como $\nu\mu = 1$, la sucesión se escinde y por la proposición (1.1.8), $I \oplus J \simeq R \oplus (I \cap J)$.

b) Sea $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Para $r = a + b\sqrt{-5}$, definimos $||r|| = a^2 + 5b^2 \in \mathbb{N}$. Es fácil probar que $||r||||s|| = ||rs||$ y que el anillo R es noetheriano.

Sea I el ideal generado por $\{3, 2 + \sqrt{-5}\}$. Probaremos que I no es principal. Si lo fuere , $I = xR$, implica $3 = xr$, $2 + \sqrt{-5} = xs$ para algunas $r, s \in R$. Sea $x = a + b\sqrt{-5}$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

Si $b = 0$, $x \in \mathbb{Z}$ y como divide a 3 y a 2, entonces $x = 1$. Existen entonces $y = y_1 + y_2\sqrt{-5}$, $z = z_1 + z_2\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[-5]$ tales que $3y + (2 + \sqrt{-5})z = 1$. Luego

$$3y_1 + 2z_1 - 5z_2 = 1$$

$$3y_2 + z_1 + 2z_2 = 0$$

Así, $3[y_1 - 2y_2 - 3z_2] = 1$. Contradicción.

Si $b \neq 0$. Como $9 = ||3|| = ||x||||r|| = ||r||(a^2 + 5b^2)$, $b = 1$, $a = 2$ y $||r|| = 1$. Entonces $r = 1$, $3 = x$, contradicción.

De manera similar J generado por $\{3, 2-\sqrt{-5}\}$ no es principal.

Además , como $\{3,4\} \in I+J$, entonces $I+J=R$. Por (a) , tenemos que $I \oplus J \simeq R \oplus (I \cap J)$.

c) Hay un módulo $_RM$ con descomposiciones inescindibles no equivalentes.

Sea $M = R \oplus (I \cap J)$.

Como $I \cap J = 3R$, $I \cap J \simeq R$.

Probaremos que $_RR$ es inescindible. En efecto , sea $0 \neq e \in \mathrm{End}_R(R) = R$ idempotentes , $e = a + b\sqrt{-5}$. Entonces

$a + b\sqrt{-5} = e = e^2 = (a^2 - 5b^2) + 2ab\sqrt{-5}$. Así,

Si $b \neq 0$, $2a = 1$ con $a \in \mathbb{Z}$, contradicción. Luego , $b = 0$, $a = 1$. Entonces $e = 1$. Por tanto , $M = R \oplus (I \cap J)$ es descomposición inescindible.

Si I y J son inescindibles $M = I \oplus J$ es una descomposición inescindible no equivalente a $M = R \oplus (I \cap J)$, por b).

Si I ó J no son inescindibles , como M es noetheriano por (1.5.10) , existen descomposiciones $I = \bigoplus_{i=1}^{n} I_i$, $J = \bigoplus_{j=1}^{m} J_j$ en inescindibles con $n+m>2$. Luego

$M = (\bigoplus I_i) \oplus (\oplus J_j)$ no es equivalente a $M = R \oplus (I \cap J)$.

d) Finalmente , observemos que la descomposición $M = R \oplus (I \cap J)$ no complementa sumandos directos.

□

CAPITULO 2

En este capítulo veremos dos de los resultados más conocidos de unicidad de descomposiciones inescindibles de módulos: el teorema de Krull-Schmidt y el teorema de Warfield.

§1 TEOREMA DE KRULL-SCHMIDT-AZUMAYA

Lema 2.1.1.- Sea $M = \bigoplus_A M_\alpha$ una descomposición de M, con $\mathrm{End}_R(M_\alpha)$ local para toda $\alpha \in A$. Sea $0 \neq N$ un sumando directo de M. Entonces existe $\alpha \in A$ tal que N tiene un sumando directo K isomorfo a M_α y el isomorfismo está dado por:

$$e_N|_{M_\alpha} : M_\alpha \to K$$

donde $e_N \in \mathrm{End}_R(M)$ es el idempotente para la descomposición $M = N \oplus N'$.

Demostración.- Por el lema (1.2.15) , existen $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in A$ tal que

$$N \cap (M_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus M_{\alpha_n}) \neq 0.$$

Por la proposición (1.2.6) existe $e_N \in \mathrm{End}_R(M)$ idempotente único tal que

$$e_N(M) = N \qquad y \qquad (1 - e_N)(M) = N'.$$

Por la proposición (1.2.16) existe $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ los idempotentes de la descomposición $M = \bigoplus_A M_\alpha$. Sea $e_1 = e_{\alpha_1}$ el idempotente para M_{α_1} en esta descomposición.

Por la proposición (1.2.10) $e_1 \mathrm{End}_R(M) e_1$ es un anillo local y

$$e_1 = e_1 e_N e_1 + e_1(1 - e_N)e_1$$

es la identidad en $e_1 \mathrm{End}_R(M) e_1$ de donde $e_1 e_N e_1$ ó $e_1(1 - e_N)e_1$ es invertible en $e_1 \mathrm{End}_R(M) e_1$. Esto es, para algún $f_1 \in \{e_N, 1 - e_N\}$, $e_1 f_1 e_1$ debe ser invertible.

Sea $K_1 = Im(f_1 e_1)$ y como $e_1 f_1 e_1$ y e_1 son isomorfismos de M_{α_1} a M_{α_1} entonces:

$$e_1|_{K_1}: K_1 \to M_{\alpha_1} \qquad y \qquad f_1|_{M_{\alpha_1}}: M_{\alpha_1} \to K_1$$

son isomorfismos. Como $e_1|_{K_1} = i \circ P_{M_{\alpha_1}}|_{K_1}$ tenemos por proposición (1.1.13) que $M = K_1 \oplus (\bigoplus_{\alpha \neq \alpha_1} M_\alpha)$

Si $n > 1$, sea e_2 el idempotente para M_{α_2} en la descomposición

$$M = K_1 \oplus (\bigoplus_{\alpha \neq \alpha_1} M_\alpha)$$

repitiendo el proceso anterior obtenemos $f_2 \in \{e_N, (1 - e_N)\}$, con $K_2 = \mathrm{Im}(f_2 \circ e_2)$ y :

$$e_2|_{K_2}: K_2 \to M_{\alpha_2} \quad , \quad f_2|_{M_{\alpha_2}}: M_{\alpha_2} \to K_2$$

isomorfismos y dado que: $e_2|_{K_2} = i \circ P_{M_{\alpha_2}}|_{K_2}$, tenemos por proposición (1.1.13)

$$M = K_1 \oplus K_2 \oplus (\bigoplus_{A - \{\alpha_1, \alpha_2\}} M_\alpha).$$

Continuando análogamente tenemos:

$$M = K_1 \oplus \cdots \oplus K_n \oplus (\bigoplus_{A - \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}} M_\alpha).$$

y una sucesión de elementos $f_1, \ldots, f_n$ en $\{e_N, 1 - e_N\}$ con cada

$$f_i|_{M_{\alpha_i}}: M_{\alpha_i} \to K_i$$

un isomorfismo.

Por último uno de los f_i debe ser e_N , ya que si f_i es $1 - e_N$ para todo $i = 1, \ldots, n$ entonces

$$1 - e_N|_{M_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus M_{\alpha_n}}: M_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus M_{\alpha_n} \to K_1 \oplus \cdots \oplus K_n$$

sería un isomorfismo. Pero ésto es imposible pues:

$$\mathrm{Ker}(1 - e_N) \cap (M_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus M_{\alpha_n}) = N \cap (M_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus M_{\alpha_n}) \neq 0$$

Por tanto , para alguna $1 \leq i \leq n$, $f_i = e_N$ y tenemos que K_i es un sumando directo de M , que está contenido en N tal que:

$$e_N|M_{\alpha_i}: M_{\alpha_i} \to K_i$$

es un isomorfismo.

$\square$

Teorema 2.1.2.- (Azumaya).

Si un módulo M tiene una descomposición directa $M = \bigoplus_A M_\alpha$, donde cada anillo de endomorfismos $\mathrm{End}_R(M_\alpha)$ es local. Entonces:

a) Esta descomposición es inescindible.

b) Cada sumando directo $0 \neq N$ de M tiene a su vez un sumando directo K con $e_N|_{M_\alpha}: M_\alpha \to K$ un isomorfismo, para alguna $\alpha \in A$, donde e_N es el idempotente para N en la descomposición $M = N \oplus N'$.

c) Para todo L sumando directo maximal de M, existe $\alpha \in A$ tal que $L \oplus M_\alpha = M$. (En particular $M = \bigoplus_A M_\alpha$ complementa sumandos directos maximales.)

d) Todas las descomposiciones inescindibles de M son equivalentes.

Demostración.-

a) Por el lema (1.5.7).

b) Se sigue del lema (2.1.1)

c) Sea L un sumando directo maximal de M, entonces L tiene un sumando directo L' inescindible por complemento directo (Esto es $L \oplus L' = M$).

Como $L' \neq 0$ entonces por b) , L' tiene un sumando directo K con

$$e_{L'}|_{M_\alpha}: M_\alpha \to K$$

un isomorfismo para alguna $\alpha \in A$ (Donde $e_{L'}$ es el idempotente asociado a L' en la descomposición $M = L \oplus L'$). Por tanto K es inescindible y $L' = K$. De donde $M = K \oplus L$. Por proposición (1.1.13) , $M = M_\alpha \oplus L$. Por tanto , $M = \bigoplus_A M_\alpha$ complementa sumandos directos maximales.

d) Se sigue de c) y del teorema (1.5.24).

$\square$

Corolario 2.1.3.- Si M tiene una descomposición finita $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$, donde cada anillo de endomorfismos $\mathrm{End}_R(M_i)$ es local, $(i = 1, \ldots, n)$. Entonces esta descomposición complementa sumandos directos.

Demostración.-

Sea L un sumando directo de M, es decir $M = L \oplus K$.

Si $K = 0$, $M = \bigoplus_{0} M_i \oplus L$.

Si $K \neq 0$, por el teorema (2.1.2) (b) existe un sumando directo N_1 tal que $K = N_1 \oplus N_2$ y

$$e_K|_{M_i}: M_i \to N_1$$

es un isomorfismo para alguna $i = 1, \ldots, n$, ésto es:

$$M = N_1 \oplus N_2 \oplus L$$

.

Como $e_{N_1}|_{M_i}: M_i \to N_1$ coincide con $e_K|_{M_i}: M_i \to N_1$ pues $N_1 \subset K$ y $e_K = i \circ p_K$, entonces por la proposición (1.1.13)

$$M = M_{i_1} \oplus N_2 \oplus L$$

.

Si $N_2 \neq 0$ por el procedimiento anterior tendríamos $M = M_{i_1} \oplus M_{i_2} \oplus N_3 \oplus L$, con $i_1 \neq i_2$. Continuando así , existe $k \leq n$ tal que $N_k = 0$ y en cuyo caso

$$M = M_{i_1} \oplus M_{i_2} \oplus \ldots \oplus M_{i_k} \oplus L$$

$\square$

Teorema 2.1.4.- (Krull-Schmidt).

Sea $0 \neq M$ un R-módulo de longitud finita.Entonces:

a) M tiene una descomposición inescindible finita

$$M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$$

tal que:

b) Todas las descomposiciones inescindibles de M son equivalentes.

c) La descomposición $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ complementa sumandos directos.

Demostración.-

a) Por el lema (1.5.10).

c) Es claro que M_i $(i = 1, ..., n)$ son de longitud finita y como son inescindibles, entonces por el lema (1.5.8) $\mathrm{End}_R(M_i)$ es local, $i = 1, ..., n$ y por el corolario (2.1.3) la descomposición $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ complementa sumandos directos

b) Se sigue del lema (1.5.20) y del inciso c)

$\square$

Corolario 2.1.5.- Sea R un anillo artiniano y M finitamente generado.Entonces:

a) M tiene una descomposición inescindible finita

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$$

b) Todas las descomposiciones inescindibles de M son equivalentes.

Demostración.-

Por el lema (1.4.12 a) M es artiniano y por las proposiciones (1.4.19) y (1.4.12 b) , M es noetheriano. Luego, M es de longitud finita. El resultado se sigue del teorema anterior.

$\square$

A continuación se dará una variante a la demostración del teorema de Krull-Schmidt . Esta demostración será útil en las generalizaciones que veremos en el capítulo 4.

Lema 2.1.6.- Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : M \oplus N \longrightarrow K \oplus L$ un R-isomorfismo con $a: M \longrightarrow K$ isomorfismo. Entonces $N \simeq L$.

Demostración.- Consideremos el isomorfismo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -ca^{-1} & 1 \end{pmatrix} : K \oplus L \to K \oplus L$$

y $\beta : M \oplus N \to K \oplus L$ la composición $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -ca^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d' \end{pmatrix}$ que es también isomorfismo. El siguiente diagrama es exacto y conmutativo:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & M & \xrightarrow{\binom{1}{0}} & M \oplus N & \xrightarrow{(0,1)} & N & \to & 0 \\
 & & \downarrow a & \binom{1}{0} & \downarrow \beta & (0,1) & \downarrow d' & & \\
0 & \to & K & \longrightarrow & K \oplus L & \longrightarrow & L & \to & 0
\end{array}
$$

Luego, d' es isomorfismo. □

Proposición 2.1.7.- Supongamos $M \oplus N \simeq K_1 \oplus \cdots \oplus K_n$ y $\mathrm{End}_R(M)$ anillo local. Entonces, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$, de forma que $K_j \simeq K_j' \oplus K_j''$ con $M \simeq K_j'$ y $N \simeq K_j'' \oplus (\oplus_{i \neq j} K_i)$.

Demostración.- Consideremos $\sigma_M : M \to M \oplus N$, $\pi_M : M \oplus N \to M$ la inclusión y proyección canónicas. Similarmente, (σ_N, π_N), (σ_i, π_i) las correspondientes para N y K_i. Tenemos $1 = \pi_M \sigma_M = \sum_{i=1}^{n} \pi_M \sigma_i \pi_i \sigma_M$, donde $x_i = \pi_M \sigma_i \pi_i \sigma_M \in \mathrm{End}_R M$

Como $\mathrm{End}_R(M)$ es local alguno de los x_i es isomorfismo. Podemos suponer que x_1 es isomorfismo. Esto significa que la siguiente sucesión exacta se escinde:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & M & \xrightarrow{\pi_1 \sigma_M} & K_1 & \longrightarrow & K_1'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow s & & \| & & \| & & \\
0 & \to & \mathrm{Im}\pi_1 \sigma_M = K_1' & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & K_1'' & \to & 0
\end{array}
$$

Así , $K_1 \simeq K_1' \oplus K_1''$ con $M \simeq K_1'$. Además, obtenemos un isomorfismo

$$
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : M \oplus N \to K_1' \oplus (K_1'' \oplus K_2 \oplus \cdots \oplus K_n)
$$

cuya componente $a = s$ es un isomorfismo. Por el lema anterior,

$$
N \simeq K_1'' \oplus K_2 \oplus \cdots \oplus K_n
$$

□

Damos la otra demostración del teorema (2.1.4)

2.1.8.- Segunda demostración del teorema de Krull-Schmidt.

(Existencia). Como antes.

(Unicidad). Como M_1 es de longitud finita, $\mathrm{End}_R(M_1)$ es local. Por la proposición anterior , existen N_j' , N_j'' con $N_j = N_j' \oplus N_j''$, $M_1 \simeq N_j'$ y

$$M_2 \oplus \ldots \oplus M_m \simeq N_j'' \oplus (\bigoplus_{i \neq j} N_i)$$

Como N_j es inescindible, $N_j'' = 0$ y el resultado se sigue por inducción. $\square$

Lema 2.1.9.-

a) Sea M un R-módulo tal que dados f, $g \in \mathrm{End}_R(M)$ con $(f - g) = 1_M$ se tiene que f o bien g es un automorfismo. Entonces $\mathrm{End}_R(M)$ es un anillo local.

b) Sea M un módulo inescindible. Sea

$$M_1 = \{(m, o) | m \in M\} \quad y \quad M_2 = \{(o, m) | m \in M\}$$

Sea $M^2 = M \times M = M_1 \oplus M_2$ una descomposición que complementa sumandos directos maximales. Entonces $\mathrm{End}_R(M)$ es un anillo local.

Demostración.-

a) Sean h, $k \in \mathrm{End}_R(M)$ tales que $h + k$ es invertible. Entonces existe $l \in \mathrm{End}_R(M)$ tal que $(h + k)l = 1_M$ de donde $h \circ l + k \circ l = 1_M$. Se sigue que $h \circ l$ o bien $-k \circ l$ es un automorfismo. Luego , $\mathrm{End}_R(M)$ es local.

b) Sea $\pi_i: M^2 \longrightarrow M_i$ $(i = 1, 2)$ las proyecciones naturales con $\mathrm{Ker}\pi_i = M_j$ $(j \neq i)$. Sean $f, g \in \mathrm{End}_R(M)$ con $f - g = 1_M$ por (a) será suficiente probar que f o bien g es un automorfismo.

Definimos:

$$M' = \{(f(m), g(m)) | m \in M\} \text{ y } M_d = \{(m, m) | m \in M\}.$$

Entonces como $(f(m), g(m)) = (n, n)$ implica $f(m) = n = g(m)$ tenemos que $f(m) - g(m) = n - n = 0$ y dado que $f - g = 1_M$ entonces $m = 0$. Además $(m, n) = (f(m - n), g(m - n)) + (m - f(m - n), m - f(m - n))$.

Entonces $M^2 = M_d \oplus M'$.

Dado que $\varphi: M \longrightarrow M_d$ es un isomorfismo tenemos M_d es inescindible y por tanto M' es un sumando directo maximal de M^2.

Por tanto $M^2 = M_1 \oplus M'$ ó $M^2 = M_2 \oplus M'$ y por la proposición (1.1.13),

$$\pi_2|_{M'}: M' \longrightarrow M_2 \text{ o } \pi_1|_{M'}: M' \longrightarrow M_1$$

es un isomorfismo. Supongamos $\pi_2|_{M'}: M' \longrightarrow M_2$ es un isomorfismo. Entonces $g: M \longrightarrow M$ es un automorfismo. $\square$

Proposición 2.1.10.- Sea $M = \bigoplus_A M_\alpha$ una descomposición inescindible que complementa sumandos directos maximales. Si existe $\alpha \neq \beta \in A$ tal que $M_\beta \simeq M_\alpha$. Entonces $\mathrm{End}_R(M_\alpha)$ es un anillo local.

Demostración.- Se sigue del lema (1.5.21) y del lema (2.1.9) $\square$

§2 EL TEOREMA DE WARFIELD

Definición 2.2.1.- Un R-módulo N es c-generado en caso de que exista un conjunto $(x_\gamma)_{\gamma\in D}$ con card$D = c$ y $(x_\gamma)_{\gamma\in D}$ genera a N.

Lema 2.2.2.- Sea c un cardinal infinito. Sea $M = \bigoplus_A M_\alpha$ y sea $N \subset M$. Si N es c-generado, entonces hay un subconjunto $B \subset A$, con card $B \leq c$ y $N \subset \bigoplus_B M_\beta$.

Demostración.-

Sea $(x_\gamma)_{\gamma\in D}$, un conjunto generador de N y sea card$D$=c.

Entonces para cada $\gamma \in D$, existe una expresión de la forma

$$x_\gamma = m_{\alpha_1} + \cdots + m_{\alpha_n}$$

con $m_{\alpha_i} \in M_{\alpha_i}$. Luego hay una función $F: \gamma \mapsto F(\gamma)$ de D a los subconjuntos finitos de A con $x_\gamma \in \bigoplus_{F(\gamma)} M_\alpha$, para cada $\gamma \in D$. Sea $B = \cup_\gamma F(\gamma)$ y como D es infinito card $D \geq$ card B. $\square$

Lema 2.2.3.- Sea c cardinal infinito. Entonces:

a) Si $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una familia de módulos c generados y *Card* $A \leq c$, entonces $\bigoplus_A M_\alpha$ es c-generado.

b) Imágenes homomorfas de módulos c-generados son c-generados.

Demostración.-

Como c es cardinal infinito $\bigoplus_A M_\alpha$ es c-generado. Sea $(x_\gamma)_{\gamma\in S}$ con card$S = c$ un conjunto generador de $\bigoplus_A M_\alpha$. Tenemos que $e((x_\gamma)_{\gamma\in S})$ es un conjunto generador de $e(\bigoplus_A M_\alpha)$.

$\square$

Lema 2.2.4.- Sea M un R-módulo y sean K , K' submódulos de M tales que $K' \subset K$ y K' es sumando directo de M. Entonces , existe $K'' \subset K$ tal que $K' \oplus K'' = K$.

Demostración.-

Sea $M = K' \oplus L$, entonces $K = K \cap M = K \cap (K' \oplus L)$ y por el lema (1.1.3) $K = K' \oplus (K \cap (L)$.

□

Teorema 2.2.5.- (Kaplansky).

Si un módulo M es suma directa de submódulos c-generados. Entonces cada sumando directo de M es también suma directa de submódulos c-generados.

Demostración.-

Sea $M = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$, donde M_α es c-generado. Sea $M = K \oplus L$ otra descomposición de M. Sean $(K_\beta)_{\beta \in B}$ y $(L_\gamma)_{\gamma \in C}$ las familias de todos los submódulos c-generados de K y L respectivamente.

Sea $\wp = \{(A', B', C')/A' \subset A, B' \subset B, C' \subset C \text{ y } \bigoplus_{A'} M_\alpha = (\bigoplus_{B'} K_\beta) \oplus (\bigoplus_{C'} L_\gamma)\}$

Tenemos $\wp \neq \emptyset$, pues $(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in \wp$

Definimos el siguiente orden parcial $\subseteq$ en $\wp$.

$(A', B', C') \subseteq (A'', B'', C'')$ en caso de que: $A' \subset A'', B' \subset B'', C' \subset C''$. Se verifica que $(\wp, \subseteq)$ cumple la hipótesis del Lema de Zorn.Así que $(\wp \subseteq)$ tiene un elemento maximal (A', B', C').

Probaremos que $A = A'$ de donde:

$$M = K \oplus L = \bigoplus_{A} M_\alpha = \bigoplus_{A'} M_\alpha = \left(\bigoplus_{B'} K_\beta \right) \oplus \left(\bigoplus_{C'} L_\gamma \right)$$

y así por el lema(2.2.4) , $K = \bigoplus_{B'} K_\beta$ y $L = \bigoplus_{C'} L_\gamma$

Supongamos $A' \neq A$ y sean $e, f \in \mathrm{End}_R(M)$ los idempotentes para la descomposición $M = K \oplus L$. Esto es $e(M) = K$ y $(1 - e)(M) = L$. Sea $\alpha \in A - A'$. Entonces por el lema (2.2.3) , $e(M_\alpha) + f(M_\alpha)$ es c-generado y por el lema (2.2.2) existe $D_1 \subset A$ a lo más de cardinalidad c tal que

$$e(M_\alpha) + f(M_\alpha) \subset \bigoplus_{D_1} M_\delta$$

y sabemos que

$$M_\alpha \subset e(M_\alpha) + f(M_\alpha) \subset \bigoplus_{D_1} M_\delta$$

Continuando análogamente con $\bigoplus_{D_1} M_\delta$ tenemos que , dado que $\bigoplus_{D_1} M_\delta$ es c generado , entonces por el lema (2.2.3) , $e(\bigoplus_{D_1} M_\delta) + f(\bigoplus_{D_1} M_\delta)$ es c-generado. Por el lema (2.2.2) existe $D_2 \subset A$ a lo más de cardinalidad c tal que

$$e(\bigoplus_{D_1} M_\delta) + f(\bigoplus_{D_1} M_\delta) \subset \bigoplus_{D_2} M_\delta$$

Además ,

$$\bigoplus_{D_1} M_\delta \subset e(\bigoplus_{D_1} M_\delta) + f(\bigoplus_{D_1} M_\delta) \subset \bigoplus_{D_2} M_\delta$$

Por tanto $D_1 \subset D_2$.

Continuando así tenemos que existe una sucesión creciente de subconjuntos de A, de a lo más de cardinalidad c

$$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots$$

tales que:

$$M_\alpha \subset e(M_\alpha) + f(M_\alpha) \subset \bigoplus_{D_1} M_\delta$$

$$\bigoplus_{D_1} M_\delta \subset e(\bigoplus_{D_1} M_\delta) + f(\bigoplus_{D_1} M_\delta) \subset \bigoplus_{D_2} M_\delta$$

$$\bigoplus_{D_n} M_\delta \subset e(\bigoplus_{D_n} M_\delta) + f(\bigoplus_{D_n} M_\delta) \subset \bigoplus_{D_{n+1}} M_\delta$$

Sea $D = \cup_{n=1}^{\infty} D_n$.

Es claro que $D \not\subset A'$ pues $\alpha \in D_1 \subset D$ y $\alpha \notin A'$. Nótese también que:

$$e(\bigoplus_{D} M_\delta) \subset \bigoplus_{D} M_\delta \quad , \quad f(\bigoplus_{D} M_\delta) \subset \bigoplus_{D} M_\delta$$

(En efecto , $x \in \bigoplus_D M_\delta$, existe n tal que $x \in \bigoplus_{D_n} M_\delta, e(x) \in \bigoplus_{D_{n+1}} M_\delta \subset \bigoplus_D M_\delta$.) y que $\bigoplus_D M_\delta$ es c-generado.

Ahora sea:

$$M' = \bigoplus_{A'} M_\alpha \quad K' = \bigoplus_{B'} K_\beta \quad L' = \bigoplus_{C'} L_\gamma$$

Entonces por hipótesis $M' = K' \oplus L'$.

También sea:

$$M'' = \bigoplus_{A' \cup D} M_\nu \quad , \ K'' = e(M'') \ \ y \ \ L'' = f(M'').$$

Entonces:

$$K'' = e(M'') = e(K' + L' + (\bigoplus_D M_\delta)) = K' + e(\bigoplus_D M_\delta) \subset K' + \bigoplus_D M_\delta$$

$\subset M' + \bigoplus_D M_\delta \subset M''$.

Análogamente:

$$L'' \subset M''.$$

Por tanto $K'' \oplus L'' \subset M''$. Como $M'' \subset e(M'') \oplus f(M'') = K'' \oplus L''$. Tenemos entonces que:$M'' = K'' \oplus L''$. Ahora como K' y L' son sumandos directos de M y $K' \subset K''$ y $L' \subset L''$, entonces por el lema (2.2.4) , existen $K_1' \subset K''$ y $L_1' \subset L''$ tales que:

$$K'' = K' \oplus K_1' \quad L'' = L' \oplus L_1'$$

Entonces:

$$M'' = K'' \oplus L'' = (K' \oplus K_1') \oplus (L' \oplus L_1') = M' \oplus (K_1' \oplus L_1').$$

Ahora

$$K_1' \oplus L_1' \simeq M''/M' \quad \text{y} \quad \text{también} \quad M''/M' \simeq \oplus_{D-A'} M_\delta \supset M_\alpha \neq 0$$

Por tanto

$$K_1' \oplus L_1' \simeq \oplus_{D-A'} M_\delta \quad \text{y} \quad K_1' \oplus L_1' \neq 0$$

y además c-generado.

Pero esto contradice la maximalidad de (A', B', C')

Por tanto $A = A'$, y esto concluye la demostración del teorema.

$\square$

Lema 2.2.6.- Supongamos que N, H, H', K y L son submódulos de M, con $\mathrm{End}_R(N)$ un anillo local y

$$M = N \oplus H \oplus H' = H \oplus K \oplus L \quad \text{dos descomposiciones de} \quad M$$

Entonces :

a) Existen sumandos directos $K' \subset K$ y $L' \subset L$ de M tales que:

$$M = N \oplus H \oplus K' \oplus L'.$$

b) K' y L' son sumandos directos de K y L respectivamente

Demostración.-

Sean e, e', g los idempotentes para la descomposición $M = H \oplus K \oplus L$ (ésto es $e(M) = K, e'(M) = L$ y $g(M) = H$) y f y $1-f$ los idempotentes para la descomposic'ón $M = N \oplus (H \oplus H')$ tal que $f(M) = N$ y $(1-f)(M) = H \oplus H'$. Por el lema (1.2.10), $f\mathrm{End}_R(M)f$ es un anillo local con identidad f. Como $f = fef + fe'f$, podemos asumir que fef invertible en $f\mathrm{End}_R(M)f$. Entonces existe $s = fhf \in f\mathrm{End}_R(M)f$ tal que $fsf = s$ y $s(fef) = (fef)s = f$. Entonces en $\mathrm{End}_R(M)$, $(ese)^2 = (esese) = e(fhfefhfe) = e(fhfef)hfe = (ef)hfe = ese$. Así por el lema (1.2.5), $M =$Im $ese\oplus$ Ker ese.

Pero como $(1-e)(M) = L \oplus H$ y por el lema (1.2.5 a), $L \oplus H = (1-e)(M) \subset$Ker $e \subset$ Ker ese. Tenemos por el lema (1.1.3) ,

Ker $ese =$(Ker $ese) \cap (K \oplus L \oplus H) = [($Ker $ese) \cap K] \oplus L \oplus H$.

Sea $K' =$ (Ker $ese) \cap K$, entonces $M = ese(M) \oplus K' \oplus L \oplus H$..

Consideremos la proyección P de M sobre $ese(M)$ a lo largo de $K' \oplus L \oplus H$ y consideremos $ese\colon M \to ese(M)$. Como $ese|_{ese(M)} = 1_{ese(M)}$ pues $(ese)^2 = ese$ y además Ker $ese = K' \oplus L \oplus H$, tenemos por la proposición (1.1.10) que $P = ese$.

Ahora consideremos $P|_N: N \to ese(M)$, como $ese(M) = (ese)^2(M) = esese(M) = ese(se(M)) \subset ese(s(M)) = ese(fhf(M)) \subset ese(f(M)) = ese(N) \subset ese(M)$. Se tiene $ese(M) = ese(N)$. Por tanto $P|_N = ese|_N$ es epimorfismo.

Como $P|_N = esef = (ef)s(fef)$ es una composición de monomorfismos. Por tanto $P|_N$ es un isomorfismo y por la proposición (1.1.13)

$$M = N \oplus K' \oplus L \oplus H$$

b) Como $M = H \oplus K \oplus L = N \oplus H \oplus K' \oplus L'$ con $K' \subset K$ y $L' \subset L$ por el lema (2.2.4) existe $K_1' \subset K$ y $L_1' \subset L$ tales que:

$$K = K' \oplus K_1' \;\; \text{y} \;\; L = L' \oplus L_1'$$

□

Proposición 2.2.7.- Sea M un módulo con una descomposición $M = K \oplus L$. Sea N un sumando directo de M tal que $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$ con $\mathrm{End}_R(N_i)$ local. Entonces:

a) Existen sumandos directos de M , K' y L' con $K' \subset K$, $L' \subset L$ tales que $M = N \oplus K' \oplus L'$.

b) K' y L' son sumandos directos de K y L respectivamente.

Demostración.-

Supongamos $M = N_1 \oplus \tilde{N}$ con $\mathrm{End}_R(N_1)$ local. Por el lema (2.2.6 b) existen $K' \subset K$ y $L' \subset L$ tales que $M = N_1 \oplus K' \oplus L'$.

Además por el lema (2.2.6 b) K' y L' son sumandos directos de K y L respectivamente.

Supongamos $M = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_n \oplus N_{n+1} \oplus \tilde{N}$ con $\mathrm{End}_R(N_i)$ local $i = 1, \ldots, n+1$. Entonces por hipótesis de inducción $M = N_1 \oplus \ldots \oplus N_n \oplus K' \oplus L'$ con $K' \subset K$ y $L' \subset L$ sumandos directos de M y $K = K' \oplus K_1'$, $L = L' \oplus L_1'$

Sea $H = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$, entonces $M = N_{n+1} \oplus H \oplus \tilde{N} = H \oplus K' \oplus L'$. Aplicando el lema (2.2.6 a) existen sumandos directos $K'' \subset K'$ y $L'' \subset L'$ de M tales que:

$M = N_{n+1} \oplus H \oplus K'' \oplus L''$ y por el lema (2.2.6 b) , $L' = L'' \oplus L_2$, $K' = K'' \oplus K_2$. Por tanto $M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_{n+1} \oplus K'' \oplus L''$ y $K = K'' \oplus K_2 \oplus K_1'$ y $L = L'' \oplus L_2 \oplus L_1'$.

□

Lema 2.2.8.- Si un módulo M es suma directa de módulos $M = \bigoplus_A M_\alpha$ con

$\mathrm{End}_R(M_\alpha)$ local para todo $\alpha \in A$. Entonces para todo sumando directo K de M y para todo elemento $k \in K$ se tiene que existe H_k sumando directo de M satisfaciendo:

a) H_k es sumando directo de K.

b) $k \in H_k$.

c) $H_k \simeq \bigoplus_{F_k} M_\alpha$, para algún $F_k \subset A$ finito.

Demostración.-

Supongamos que $M = K \oplus L$. Sea $k \in K$. Entonces existe un conjunto finito $G \subset A$ con $k \in \bigoplus_G M_\alpha$. Sea $N = \bigoplus_G M_\alpha$, por el teorema (2.2.7) existen sumandos directos K' y L' de L y K respectivamente (digamos $L = L' \oplus I$ y $K = K' \oplus H$) tales que $M = K' \oplus L' \oplus N$.

Consideremos $K = K' \oplus H$. Por el lema (2.2.4) tenemos que $H = K \cap (N \oplus L')$. Entonces $k \in K \cap N \subset H$.

Como $M = K \oplus L = K' \oplus L' \oplus N = H \oplus K' \oplus I \oplus L'$. Entonces:

$$N \simeq M/K' \oplus L' \simeq H \oplus I.$$

Por el corolario (2.1.3) , $N = \bigoplus_G M_\alpha$ complementa sumandos directos, entonces H es isomorfo a $\bigoplus_F M_\alpha$ para algún subconjunto finito $F \subset A$.

□

Teorema 2.2.9.- (B.Jønsson, P.Crawley, R.B.Warfield).

Si un módulo M es suma directa de módulos $M = \bigoplus_A M_\alpha$ con M_α numerablemente generados y con anillo de endomorfismo local , entonces todo sumando directo N de M es de la forma $N = \bigoplus_{\beta \in B} N_\beta$ tal que para toda $\beta \in B$, $N_\beta \simeq M_\alpha$, para alguna $\alpha \in A$

Demostración.-

Por teorema (2.2.5) se sigue que cada sumando directo de M es suma directa de submódulos numerablemente generados de M. (Necesariamente sumandos directos). Así que será suficiente probar el resultado para un sumando directo numerablemente generado K de M.

Así que sea $M = K \oplus L$ con K numerablemente generado.

Sea $k_1, k_2, \ldots,$ un conjunto generador para K , por el lema (2.2.8) existe H_1

tal que $K = H_1 \oplus K_1$

$$H_1 \simeq \bigoplus_{F_1} M_\alpha \quad , \quad F_1 \text{ finito y } k_1 \in H_1$$

Asumiremos que existe una descomposición:

$$K = H_1 \oplus \cdots \oplus H_n \oplus K_n$$

de K y subconjuntos finitos $F_1, \ldots, F_n$ de A tales que $k_1, \ldots, k_n \in H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$ con $H_i \simeq \bigoplus_{F_i} M_\alpha$ $(i = 1, \ldots, n)$. Entonces existe $h_n \in H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$ y $k_n \in K_n$ con $k_{n+1} = h_n + k_n$. Como $k_n \in K_n$ el lema (2.2.8) asegura que existen submódulos H_{n+1} y K_{n+1} de K_n y un conjunto finito $F_{n+1} \subset A$ con $K_n = H_{n+1} \oplus K_{n+1}$ con $k_n \in H_{n+1} \simeq \bigoplus_{F_{n+1}} M_\alpha$

Continuando así podemos encontrar una sucesión $H_1, H_2, \ldots$ de submódulos de K y una sucesión $F_1, F_2 \ldots F_n$ de subconjuntos finitos de A con $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ independiente y $H_n \simeq \bigoplus_{F_n} M_\alpha$.

Mostraremos que $K = \oplus_{n=1}^{\infty} H_n$.

Como $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ es independiente sólo queda probar $K = \sum_{n=1}^{\infty} H_n$

Sea $k \in K$, existe n , $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$ tales que $k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i$. Entonces $k \in \bigoplus_{i=1}^{n} H_i$. Por tanto $k \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} H_n$.

□

Corolario 2.2.10.- Sea $M = \bigoplus_{A} M_\alpha$ donde cada M_α es numerablemente generado y tiene anillo de endomorfismos local. Si $M = \bigoplus_{B} N_\beta$ es otra descomposición de M , entonces hay una partición $(A_\beta)_{\beta \in B}$ de A tal que para toda $\beta \in B$,

$$N_\beta \simeq \bigoplus_{\alpha \in A_\beta} M_\alpha$$

Demostración.-

Se sigue del teorema de Azumaya y del teorema anterior.

□

CAPITULO 3

El propósito de este capítulo es construir algunos ejemplos de álgebras que pueden ser tratadas "geométricamente". Estos ejemplos servirán de puente entre la situación considerada en el Capítulo 2 y las categorías tratadas en el Capítulo 4. Daremos sólo un breve esbozo de las pruebas. Los detalles pueden consultarse en [G] o en [CLS].

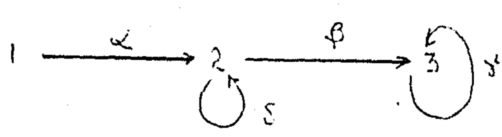
§1 CARCAJES Y REPRESENTACIONES

En este capítulo K denotará un campo algebraicamente cerrado. Por K−álgebra siempre entenderemos K−álgebra de dimensión finita.

Definición 3.1.1.- Un carcaj C es una gráfica orientada (conexa y finita a lo largo de todo el capítulo 3). Por C_0 denotaremos el conjunto de vértices de C y por C_1 el de sus flechas.

Definición 3.1.2.- Un camino dirigido en C es una sucesión de flechas $\alpha_n \ldots \alpha_1$ tal que el vértice final de α_i es el vértice inicial de α_{i+1}. Por τ_x denotaremos el camino trivial en x.

Ejemplo 3.1.3.-



$\gamma^2\beta\delta^3\alpha$ es un camino dirigido del vértice 1 al 3.

Definición 3.1.4.- $K[C]$ es el K-espacio vectorial con base todos los caminos dirigidos en C.

Lema 3.1.5.-

a) $K[C]$ tiene estructura de K-álgebra.

b) $\{\tau_x : x \in C_o\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos de $K[C]$.

Demostración.-

a) Definimos el producto de dos caminos por yuxtaposición si ésto es posible , y si no como cero. Este producto se extiende bilinealmente.

b) Es claro que $\tau_x^2 = \tau_x$, $\tau_x \tau_y = 0$ para toda $x, y \in C_o$. Además , $\sum_{x \in C_o} \tau_x = 1$. En efecto:

Sea $\beta \in K[C]$ camino dirigido y supongamos $\beta = \alpha_n \dots \alpha_1$, entonces $(\sum_{x \in C_o} \tau_x)\beta = (\sum_{x \in C_o} \tau_x)(\alpha_n \dots \alpha_1) = \tau_{x_n}(\alpha_n \dots \alpha_1) = (\alpha_n \dots \alpha_1) = \beta$, donde x_n es el vértice final de α_n y análogamente $\beta(\sum_{x \in C_o} \tau_x) = \beta$. Así tenemos que $\{\tau_x : x \in C_o\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales.

Veamos que son primitivos.

Supongamos $\tau_x = f + g$ con f, g idempotentes ortogonales. Como $\tau_x = f + g = \tau_x^3 = \tau_x(f+g)\tau_x = \tau_x f \tau_x + \tau_x g \tau_x$, podemos suponer $0 \neq \tau_x f \tau_x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \rho_i$ con ρ_i camino dirigido de x en x y $\lambda_i \in K$. Si ρ_j es el camino más largo entre los ρ_i , en $\tau_x f^2 \tau_x$ aparece $\lambda_j^2 \rho_j^2$ que es de longitud mayor. Pero $(\tau_x f \tau_x)^2 = \tau_x f \tau_x$. Luego $\tau_x f \tau_x = \lambda \tau_x$ de donde $\tau_x f \tau_x = \tau_x$ y $f = \tau_x$

□

Definición 3.1.6.- Un anillo R se llama descomponible si existen anillos R_1 y R_2 tales que $R = R_1 \times R_2$. Si no es descomponible se dice indescomponible.

Lema 3.1.7.- Si $R = R_1 \times R_2$, entonces Mod $R \simeq$Mod $R_1 \times$ Mod R_2

□

Proposición 3.1.8.- R es indescomponible si y sólo si los únicos idempotentes centrales son 0 y 1.

□

Definición 3.1.9.- Sea R un anillo con una descomposición ${}_R R = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$ con P_i proyectivos inescindibles. El anillo R se llama básico si y sólo si $P_i \not\simeq P_j$ si $i \neq j$.

Proposición 3.1.10.- $K[C]$ es indescomponible y básica.

Demostración.- Que $K[C]$ sea indescomponible es equivalente a la conexidad de C. Además, ${}_{K[C]}K[C] = \bigoplus_{x \in C_o} K[C]r_x$ y $K[C]r_x \not\cong K[C]r_y$ si $x \neq y$

□

Proposición 3.1.11.-

a) $K[C]$ es de dimensión finita si y sólo si C no tiene ciclos dirigidos.

b) Si C no tiene ciclos dirigidos el radical de $K[C]$ es el ideal F generado por las flechas.

□

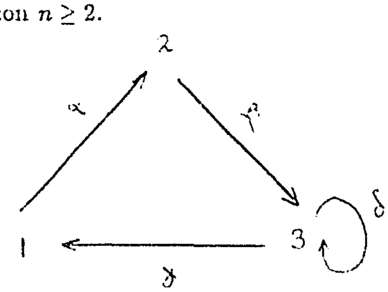
§2 IDEALES ADMISIBLES

Definición 3.2.1.- Un ideal bilateral I de $K[C]$ se llama admisible si y sólo si , existe $n \in \mathbb{N}$ con $F^n \subset I \subset F^2$, donde F es el ideal de $K[C]$ generado por las flechas de C.

Ejemplo 3.2.2.- Son ideales admisibles:

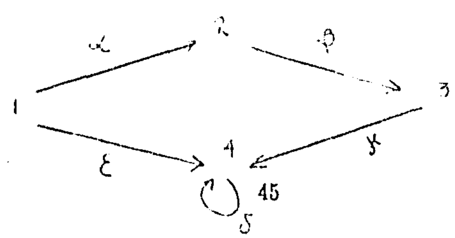
a) Los ideales F^n con $n \geq 2$.

b) C :



El ideal I generado por δ^2, $\gamma\delta$, $\beta\alpha$ es admisible pues para cualquiera $\rho = \rho_3\rho_2\rho_1 \in F^3$ con $\rho_i \in F$ implica que $\rho_2\rho_1 \in I$ ó $\rho_3\rho_2 \in I$ de donde $\rho \in I$. Luego , $F^3 \subset I \subset F^2$.

c) C :



El ideal I generado por $\beta\alpha$, $\gamma\beta$, $\delta\epsilon$, $\delta\gamma$, δ^2 es admisible pues $F^3 \subset I \subset F^2$

Lema 3.2.3.- Sea I un ideal admisible de $K[C]$, entonces $K[C]/I$ es K-álgebra de dimensión finita. En particular $K[C]/I$ es K-álgebra artiniana.

Demostración.-

Sea $n \in \mathbb{N}$ con $F^n \subset I \subset F^2$. Como $K[C]/F^n$ está generada por las clases de caminos de longitud menor o igual que $n-1$, $K[C]/F^n$ es de dimensión finita. Como $K[C]/F^n \to K[C]/I$ donde $\alpha + F^n \mapsto \alpha + I$ es sobre , tenemos que $K[C]/I$ es K-álgebra de dimensión finita.

□

Observación 3.2.4.- En el lema anterior es suficiente pedir I ideal bilateral de $K[C]$ tal que $F^n \subset I$.

Proposición 3.2.5.- Sea I un ideal admisible de $K[C]$. Entonces:

a) $\{\overline{\tau}_x : x \in C_o\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de $K[C]/I$.

b) $K[C]/I$ es una K-álgebra básica e indescomponible.

Demostración.-

a) Consideremos la proyección $K[C] \xrightarrow{\pi} K[C]/I$, de ésta resulta que $\{\overline{\tau}_x : x \in C_o\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales. Basta ver que son primitivos.

Supongamos $\overline{\tau}_x = \overline{f} + \overline{g}$ con $\overline{f}$, $\overline{g}$ idempotentes ortogonales en $K[C]/I$. Así , $f^2 - f \in I \subset F^2 \subset F$ y el coeficiente λ de τ_x en f es 0 ó 1. (En efecto $f = \sum \lambda_\gamma \gamma$ como I es admisible y $\overline{f}^2 = \overline{f}$, entonces $f^2 - f \in I \subset F$ de donde $\lambda_{\tau_x}^2 - \lambda_{\tau_x} = 0$ pues $\tau_x \notin F$ y así $\lambda_{\tau_x}^2 = \lambda_{\tau_x}$. Por tanto $\lambda_{\tau_x} = 0$ ó $\lambda_{\tau_x} = 1$). Si se tiene $\lambda = 0$, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $F^n \subset I$, se tiene $f^n \in I$. Por tanto $0 = \overline{f}^n = \overline{f}$. Si es $\lambda = 1$ entonces $\overline{\tau_x - f} = 0$ ya que $(\tau_x - f) \in F$ de donde $(\tau_x - f)^n \in F^n \subset I$. Por tanto $\overline{(\tau_x - f)}^n = 0$ pero como además $\overline{(\tau_x - f)}^2 = \overline{\tau_x}^2 - \overline{\tau_x}\overline{f} - \overline{f}\overline{\tau_x} + \overline{f}^2 = \overline{\tau_x}^2 - 2\overline{f} + \overline{f} = \overline{\tau_x} - \overline{f}$. Entonces $\overline{\tau_x - f} = 0$. Por tanto $\overline{f} = \overline{\tau_x}$.

b) Consideremos $K[C]/I = \oplus_{x \in C_0} (K[C]/I)\tau_x$

□

Lema 3.2.6.- Sea I ideal admisible de $K[C]$, F el ideal generado por las flechas, sea $\widetilde{F} = F/I$. Entonces $\widetilde{F}$=Rad$K[C]/I$.

Demostración.-

Como existe $n \in \mathbb{N}$ con $F^n \subset I$ se tiene que $\widetilde{F^n} = 0$ y por los lemas (1.3.15) y (1.3.7) , se tiene $\widetilde{F} \subset$Rad$K[C]/I$.

Como $(K[C]/I)/\widetilde{F} \simeq K[C]/F \simeq \bigoplus_{x \in C_o} K\tau_x$ semisimple. Entonces por el lema (1.4.11) , $F/I \supset$Rad $K[C]/I$. Por tanto , $\widetilde{F} =$ Rad$K[C]/I$.

□

En el ejemplo (3.2.2 b)

I generado por δ^2 , $\gamma\delta$, $\beta\alpha$. Tenemos $\widetilde{F} = F/I = K\overline{\alpha} \oplus K\overline{\beta} \oplus K\overline{\gamma} \oplus K\overline{\delta} \oplus K\overline{\alpha\gamma} \oplus K\overline{\delta\beta} \oplus K\overline{\gamma\beta}$ =Rad$K[C]/I$.

§3 EL CARCAJ (DE GABRIEL) DE UN ALGEBRA

Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita , indescomponible y básica. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos de Λ.

Definición 3.3.1.- El carcaj (de Gabriel) C_Λ de Λ se define como sigue:

Los vértices de C_Λ , $(C_\Lambda)_o = \{1, \ldots, n\}$. El número de flechas del vértice i al j es $\dim_K$ $(e_j(\text{Rad}\Lambda/\text{Rad}^2\Lambda)e_i)$

Lema 3.3.2.- El carcaj C_Λ de Λ es conexo.

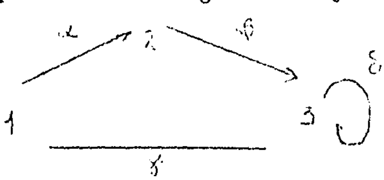
Demostración.- Se sigue de que Λ es indescomponible. □

También llamaremos a C_Λ el carcaj de Λ.

Ejemplo 3.3.3.-

a) Sea C un carcaj e I un ideal admisible de $K[C]$. Sea $\Lambda = K[C]/I$. El carcaj de Λ es C. En efecto si $\widetilde{F} = F/I$, entonces $\widetilde{F}/\widetilde{F}^2 \simeq F/F^2$ que tiene por base las clases de flechas de C. (Tenemos en mente (3.2.5).)

Ilustramos el ejemplo anterior en el siguiente carcaj.



I generado por δ^2 , $\beta\alpha$, $\gamma\delta$.

$$\Lambda = K[C]/I$$

Entonces $\mathrm{Rad}(K[C]/I) = K\overline{\alpha} \oplus K\overline{\beta} \oplus K\overline{\gamma} \oplus K\overline{\delta} \oplus K\overline{\alpha\gamma} \oplus K\overline{\delta\beta} \oplus K\overline{\gamma\beta}$

$$\mathrm{Rad}^2(K[C]/I) = K\overline{\alpha\gamma} \oplus K\overline{\delta\beta} \oplus K\overline{\gamma\beta}$$

Por tanto

$$\mathrm{Rad}\,(K[C]/I)\,/\mathrm{Rad}^2\,(K[C]/I) \simeq K\overline{\alpha} \oplus K\overline{\beta} \oplus K\overline{\gamma} \oplus K\overline{\delta}$$

b) Sea $\Lambda = K[x]/(x^n)$, $n \geq 2$.

Como el único idempotente $\neq 0$ de Λ es $\overline{1}$ tenemos que $(C_\Lambda)_o = \{1\}$.

Ahora , Rad $\Lambda = (\overline{x})$. En efecto $(\overline{x})$ es nilpotente. Por tanto por los lemas (1.3.15) y (1.3.7) , $(\overline{x}) \subset \mathrm{Rad}\ K[C]/I$. Además $(K[x]/(x^n))\,/(\overline{x})$ es semisimple .

Por tanto

$$\mathrm{Rad}\Lambda = (\overline{x})$$

Como $\mathrm{Rad}^2\Lambda = (\overline{x})(\overline{x}) = (\overline{x^2})$ se tiene:

$$\mathrm{Rad}\Lambda/\mathrm{Rad}^2\Lambda = (\overline{x})/(\overline{x^2}) \simeq K\overline{x}$$

que es de dimensión 1.

Así que $C = 1$. α

Además $\Lambda \simeq K[C]/(\alpha^n)$ donde (α^n) es el ideal admisible.

c) Sea $\Lambda = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ K & K & K \end{pmatrix}$. El radical de Λ es $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \end{pmatrix}$. (ya que $J^3 = 0$ y Λ/J es semisimple.)

Un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos está dado por las matrices $\{e_i\colon\ i = 1,2,3\}$ donde e_i tiene un 1 en la entrada (i,i) y 0 fuera de ella.

Así, $J/J^2 \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \end{pmatrix}$ y $e_2J/J^2e_1 \neq 0 \neq e_3J/J^2e_2$ con todos los demás productos cero. Como $\dim\, e_2J/J^2e_1 = \dim\, e_3J/J^2e_2 = 1$, por tanto

$$C: \quad 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$$

Además , $\Lambda \simeq K[C]$.

El resultado que muestra la importancia de los carcajes es el siguiente:

Teorema 3.3.4.- Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita,básica e indescomponible. Sea $C = C_\Lambda$ el carcaj de Λ. Entonces existe un ideal admisible I de $K[C]$ de forma que $K[C]/I \simeq \Lambda$.

Demostración.-

a) Construímos primeramente un morfismo $\varphi: K[C] \to \Lambda$. Para cada espacio $e_j(\mathrm{Rad}\Lambda/\mathrm{Rad}^2\Lambda)e_i$ elegimos elementos $\{x_\alpha: \alpha \in A_{ij}\}$ en $e_j\mathrm{Rad}\Lambda e_i$ de forma que $\{\overline{x}_\alpha: \alpha \in A_{ij}\}$ es una base de $e_j(\mathrm{Rad}\Lambda/\mathrm{Rad}^2\Lambda)e_i$. Aquí , A_{ij} es el conjunto de flechas de i en j. Definimos , $\varphi(\tau_i) = e_i$, $\varphi(\alpha) = x_\alpha$, si $\alpha \in A_{ij}$. Luego , extendemos a φ multiplicativamente: $\varphi(\alpha_m \ldots \alpha_1) = x_{\alpha_m} \ldots x_{\alpha_1}$. Entonces , φ se extiende a un morfismo de K-álgebras.

b) $\Lambda/\mathrm{Rad}\Lambda$ es isomorfo a una suma de copias del campo: Como $\Lambda/\mathrm{Rad}\Lambda$ es semisimple , por el Teorema de Wedderburn-Artin , tenemos un isomorfismo de K-álgebras , $\Lambda/\mathrm{Rad}\Lambda \simeq M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_l}(D_l)$ donde $M_{n_i}(D_i)$ es el anillo de matrices $n_i \times n_i$ con entradas en el anillo con división D_i. Pero , $D_i = K$, ya que K es algebraicamente cerrado. Como Λ es básica , $\Lambda/\mathrm{Rad}\Lambda$ también lo es (en efecto , $\Lambda/\mathrm{Rad}\Lambda = \bigoplus_{i=1}^{n} \Lambda e_i/\mathrm{Rad}\Lambda e_i$ es descomposición en inescindibles. Si $\Lambda e_i/\mathrm{Rad}\Lambda e_i \simeq \Lambda e_j/\mathrm{Rad}\Lambda e_j$ entonces $\Lambda e_i \simeq \Lambda e_j$). Luego cada bloque $M_{n_i}(K)$ debe ser básico. Es fácil ver que $M_{n_i}(K) = \bigoplus_{j=1}^{n_i} M_{n_i}(K)e_j$ donde $M_{n_i}(K)e_j \simeq M_{n_i}(K)e_{j'}$ para todo $j, j' \in \{1, \ldots, n_i\}$. Así $n_i = 1$ para cada i y $\Lambda/\mathrm{Rad}\Lambda \simeq K \times \ldots \times K$.

c) φ es suprayectivo: Supongamos $\mathrm{Rad}^m\Lambda = 0$. Tenemos un isomorfismo de K-espacios vectoriales $\Lambda \simeq (\Lambda/\mathrm{Rad}\Lambda) \oplus (\mathrm{Rad}\Lambda/\mathrm{Rad}^2\Lambda) \oplus \cdots \oplus (\mathrm{Rad}^{n-1}\Lambda/\mathrm{Rad}^n\Lambda)$. El espacio $\Lambda/\mathrm{Rad}\Lambda$ está generado por $\{\overline{e_i}: i = 1, \ldots, n\}$ y $\mathrm{Rad}\Lambda/\mathrm{Rad}^2\Lambda$ por $\{\overline{x}_\alpha: \alpha \in A_{ij}, i, j \in \{1, \ldots, n\}\}$ ambos cubiertos por φ. Supongamos que $\Lambda/\mathrm{Rad}\Lambda \oplus \cdots \oplus \mathrm{Rad}^{l-1}\Lambda/\mathrm{Rad}^l\Lambda$ está cubierto por φ. Sea $b \in \mathrm{Rad}^l\Lambda$. Podemos suponer que existen $b_1, \ldots b_l \in \mathrm{Rad}\Lambda$, tales que $b = b_1 \ldots b_l$. Para $b' = b_1 \ldots b_{l-1} \in \mathrm{Rad}^{l-1}\Lambda$, existe $a' \in K[C]$ tal que $\varphi(a') = \overline{b'} \in \mathrm{Rad}^{l-1}\Lambda/\mathrm{Rad}^l\Lambda$. También existe $a'' \in K[C]$ con $\varphi(a'') = \overline{b_l} \in \mathrm{Rad}\Lambda/\mathrm{Rad}^2\Lambda$. Así , $\varphi(a'a'') = \overline{b'b_l} = \overline{b} \in \mathrm{Rad}^l\Lambda/\mathrm{Rad}^{l+1}\Lambda$.

d) $\mathrm{Ker}\varphi \subset F$. Sea $a \in \mathrm{Ker}\varphi$. Escribimos $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tau_i + x$ con $x \in F$.

Así , $0 = \varphi(a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \varphi(x)$. Por construcción , $\varphi(x) \in \mathrm{Rad}\Lambda$, entonces $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in \mathrm{Rad}\Lambda$ que es nilpotente. Luego $\lambda_i = 0$ y $a \in F$.

e) Ker$\varphi \subset F^2$. Sea a $\in$Kerφ. Escribimos $a = \sum_{\alpha \in C_1} \lambda_\alpha \alpha + y$ con $y \in F^2$. Así , $0 = \varphi(a) = \sum_{\alpha \in C_1} \lambda_\alpha x_\alpha + \varphi(y)$. Por construcción , $\varphi(y)$ $\in$Rad$^2\Lambda$. Considerando esta igualdad en RadΛ/Rad$^2\Lambda$, tenemos $0 = \sum_{\alpha \in C_1} \lambda_\alpha \overline{x}_\alpha$. Por elección de las x_α debemos tener $\lambda_\alpha = 0$ y $a \in F^2$.

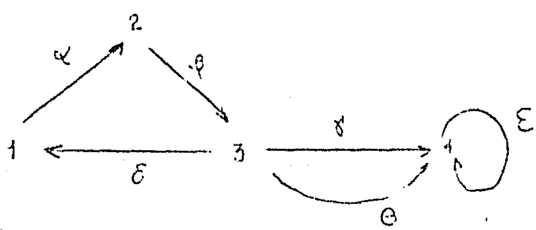
f) Existe $m \in \mathbb{N}$, con F^m $\subset$Kerφ. Por construcción , $F^r \subset \varphi^{-1}(\text{Rad}^r \Lambda)$ para cada $r \in \mathbb{N}$. Si Rad$^m\Lambda = 0$, se tiene $F^m \subset \varphi^{-1}(\text{Rad}^m\Lambda) = \varphi^{-1}(0)$ =Kerφ.

□

§4 REPRESENTACIONES DE CARCAJES

Definición 3.4.1.- Un elemento $\rho \in K[C]$ se llama legible si $\rho \in \tau_j K[C] \tau_i$ para algunas $i, j \in C_o$ (Es decir $\rho = \sum \lambda_\gamma \gamma$ combinación lineal con γ camino dirigido de i en j.)

Ejemplo 3.4.2.- Sea C :



$\rho = \epsilon\gamma\beta\alpha + \epsilon\theta\beta\alpha + \gamma\beta\alpha$ es un elemento legible de $K[C]$

Lema 3.4.3.- Sea I un ideal admisible de $K[C]$. Entonces:

a) I es finitamente generado.

b) Existen elementos legibles $\rho_1, \ldots, \rho_q$ que generan I.

Demostración.-

Sea m tal que $F^m \subset I$.

a) Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow F^m \longrightarrow I \longrightarrow I/F^m \rightarrow 0$$

Sabemos que F^m está generado por todos los caminos de longitud m que es un número finito (Pues el carcaj es finito.)

Ahora I/F^m es un ideal de $K[C]/F^m$ que es una álgebra de dimensión finita , de donde es una álgebra noetheriana. Por el lema (1.4.2) , I/F^m es finitamente generado. Luego I es finitamente generado.

b) Sea $\rho_1, \dots, \rho_q$ un sistema de generadores de I. Entonces $\rho_i = \sum_{s,t \in C_o} \tau_t \rho_i \tau_s$ con $\tau_t \rho_i \tau_s \in I$ legible. □

En la práctica nuestros ideales admisibles serán dados por un conjunto de generadores legibles.

Definición 3.4.4.-

a) Una K-categoría Λ es una categoría tal que para cada dos Mobjetos $x, y \in Ob\Lambda$, $\mathrm{Hom}(x,y)$ es un K-espacio vectorial y la composición es bilineal . (Donde K es un campo no necesariamente algebraicamente cerrado.)

b) Un K- funtor $F: \Lambda \to \Lambda'$ entre dos K-categorías es un funtor que preserva la estructura K-lineal para cada $\lambda \in K$. (Esto es $F(\lambda f) = \lambda F(f)$ y $F(f+g) = F(f) + F(g)$ para cada $\lambda \in K$; f y $g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(x,y)$, $x, y \in \mathrm{Ob}\Lambda$.)

Ejemplo 3.4.5.-

I) Si Λ es una K-álgebra de dimensión finita , entonces ModΛ(=la categoría de los Λ-módulos izquierdos.) y modΛ (=la categoría de los Λ-módulos izquierdos de dimensión finita sobre K) son K-categorías

II) Con C un carcaj e I un ideal admisible de $K[C]$.

a) $K[C]$ puede considerarse como K-categoría: Ob $K[C] = C_o$, $\mathrm{Hom}_{K[C]}(x,y) = \tau_y K[C] \tau_x$, para x, y en C_o.

b) $K[C]/I$ puede también interpretarse como K- categoría Ob $K[C]/I = C_o$ y $\mathrm{Hom}_{K[C]/I}(x,y) = \tau_y K[C]\tau_x / \tau_y I \tau_x$.

c) La proyección $\pi: K[C] \to K[C]/I$ es un K-funtor.

Definición 3.4.6.- Sea C un carcaj. Entonces

a) Una representación de C es un K-funtor $V: K[C] \to ModK$.

b) Un morfismo de representaciones $\eta: V \to V'$ es una transformación natural.

Lema 3.4.7.- Una representación V está determinada por $\left((V(x))_{x \in C_o}, (V(\alpha))_{\alpha \in C_1}\right)$ donde $V(x)$ es un K- espacio vectorial y $V(\alpha): V(x) \to V(y)$ transformación lineal, si $\underset{x \to y}{\alpha}$ es una flecha.

Demostración.-

Sea $\rho = \sum \lambda_\gamma \gamma$ una relación legible con $\gamma = \alpha_{\gamma_{n_\gamma}} \cdots \alpha_{\gamma_1}$ camino dirigido. Por ser V un K-funtor $V(\rho) = \sum \lambda_\gamma V(\gamma) = \sum \lambda_\gamma V(\alpha_{\gamma_{n_\gamma}}) \cdots V(\alpha_{\gamma_1}), con$ $V(\rho): V(x_{\alpha_{\gamma_1}}) \to V(y_{\alpha_{\gamma_{n_\gamma}}})$ con α_{γ_i} flecha de $x_{\alpha_{\gamma_i}}$ en $y_{\alpha_{\gamma_i}}$

□

Definición 3.4.8.- Sea I un ideal admisible de $K[C]$.

a) Se dice que la representación V de C satisface I si y sólo si para cada $\rho \in I$ $V(\rho) = 0$.

b) Sea $\Lambda = K[C]/I$, una representación V de Λ es un K-funtor $V: \Lambda \to$Mod$K$.

Denotamos:

Por Rep C la categoría de representaciones de C. Por Rep (C, I) la subcategoría de Rep$C$ de las representaciones de C que satisfacen I. Por RepΛ la categoría de representaciones de Λ.

Lema 3.4.9.-

a) Sea $\rho_1, \ldots, \rho_m$ un sistema legible de generadores de I. Una representación V de C satisface I , si y sólo si $V(\rho_i) = 0$ para cada $i = 1, \ldots, m$.

b) Rep$(C, I) \simeq$RepΛ.

Demostración.-

a) $\Rightarrow$ Como $\rho_i \in I$, entonces $V(\rho_i) = 0$ para cada $i = 1, \ldots, m$.

$\Leftarrow$ Sea $\rho \in I$, entonces $\rho = \sum u_i \rho_i v_i$ on ρ_i legible,$u_i, v_i \in K[C]$ y por ser V un K-funtor $V(\rho) = \sum u_i V(\rho_i) v_i = 0$

b) Sea F:Rep$\Lambda \to$ Rep(C, I), $V \mapsto V\pi$, donde $\pi: K[C] \to K[C]/I$ es el funtor canónico y $f: V \to V' \mapsto f\pi$ donde $(f\pi)_x = f_{\pi(x)}$. Es claro que F es una equivalencia.

□

En general identificaremos RepΛ con Rep(C, I) siendo en esta última categoría más sencillo trabajar.

Denotamos por rep(C, I) la subcategoría plena de Rep(C, I) con objetos $V \in$Rep(C, I) , $V: K[C] \to$ mod K. Similarmente , se define rep Λ.

Fijamos $\Lambda = K[C]/I$ con I admisible.

Teorema 3.4.10.- Las categorías RepΛ y ModΛ son equivalentes. La equivalencia induce otra entre repΛ y modΛ.

Demostración.-

Definimos F: Mod$\Lambda \to$ Rep (C, I). Sea $M \in$ModΛ, $FM = V$ dada por $V(x) = \overline{\tau_x}M$, $x \in C_o$. Si $(x \xrightarrow{\alpha} y) \in C_1$, entonces $V(\alpha): V(x) \to V(y)$, $\overline{\tau_x}m \mapsto \overline{\alpha}(\overline{\tau_x}m)$

Ahora, definimos G:Rep$(C, I) \to$ModΛ

Sea $V \in$Rep(C, I) , $GV = \bigoplus\limits_{x \in C_o} V(x) \in$ Mod$K$. Si $f: V \to V'$ morfismo de representaciones , $Gf = \bigoplus\limits_{x \in C_o} f_x: GV \to GV'$ es Λ-morfismo.

Por definición F y G se restringen a funtores entre repΛ y modΛ.

$\square$

CAPITULO 4

El propósito de este capítulo es demostrar un teorema del tipo Krull-Schmidt-Warfield para categorías de funtores asociadas a ciertas K-categorías.

En este capítulo K denotará un campo algebraicamente cerrado.

§1 ALGEBRAS Y CATEGORIAS

Definición 4.1.1.- Una K-categoría Λ se llama localmente acotada si:

a) $x \simeq y$ entonces $x = y$ para toda $x, y \in \mathrm{Ob}\Lambda$ (Esquelética).

b) Para toda $x \in \mathrm{Ob}\Lambda$, $\mathrm{Hom}_\Lambda(x,x)$ es un anillo local.

c) Para toda $x \in \mathrm{Ob}\Lambda$, $\sum_{y\in \mathrm{Ob}\Lambda} \dim \mathrm{Hom}_\Lambda(x,y) < \infty$ y

$\sum_{y\in \mathrm{Ob}\Lambda} \dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(y,x) < \infty$.

Por comodidad denotaremos en algunas ocasiones

$\mathrm{Hom}_\Lambda(x,y) = \Lambda(x,y)$

Observación 4.1.2.-
Si Λ es una K- categoría localmente acotada . Entonces :

a) Dado x , existe un número finito de objetos y en Λ para los cuales $\mathrm{Hom}_\Lambda(x,y) \neq 0$. Además $\dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(x,y) < \infty$ para toda $x, y \in \mathrm{Ob}\Lambda$.

b) El anillo $\mathrm{Hom}_\Lambda(x,x)$ es una K-álgebra local.

Ejemplo 4.1.3.- Sea A una K-álgebra básica de dimensión finita e indescomponible.

Tenemos que ${}_AA = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n$ donde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos.

Construímos $\Lambda(A)$ una categoría con $\mathrm{Ob}\Lambda(A) = \{1, \ldots, n\}$ y $\mathrm{Hom}_{\Lambda(A)}(i,j) = e_jAe_i$.

Afirmamos que $\Lambda(A)$ es una K-categoría , localmente acotada con finitos objetos.

a) Veamos que $\Lambda(A)$ es categoría.

Sea

$$\varphi: \mathrm{Hom}_{\Lambda(A)}(i,j) \times \mathrm{Hom}_{\Lambda(A)}(j,h) \to \mathrm{Hom}_{\Lambda(A)}(i,h)$$

$$(e_j a e_i, e_h b e_j) \mapsto (e_h (b e_j a) e_i)$$

I) φ es asociativa pues Λ es anillo.

II) Existe $e_i \in e_i A e_i$ la identidad.

b) Es rutinario ver que $\Lambda(A)$ es una K-categoría.

c) Veamos que $\Lambda(A)$ es localmente acotada.

I) Por el teorema (3.3.4) podemos suponer que $A = K[C]/I$ con I un ideal admisible. Supongamos $i \simeq j$ con $i \neq j$. Entonces existe $f \in e_j A e_i$ y $g \in e_i A e_j$ tales que $g \circ f = e_i$ y $f \circ g = e_j$. Como $\mathrm{Rad}\, A = F/I$, se tiene que $e_i A e_j = e_i \mathrm{Rad} A e_j$ si $i \neq j$. Luego $f \in e_j \mathrm{Rad} A e_i$ y $g \in e_i \mathrm{Rad} A e_j$ y se tiene que $e_i = g \circ f \in e_i \mathrm{Rad} A e_i \subset \mathrm{Rad} A$ por el lema (1.3.11). Esto es una contradicción.

II) Como Ae_i es inescindible , de longitud finita tenemos que $\mathrm{End}_A(Ae_i)$ es local y como

$$\varphi: End_A(Ae_i) \to e_i A e_i \qquad f: Ae_i \to Ae_i \mapsto e_i f(1) e_i$$

es un isomorfismo, por tanto $\mathrm{Hom}_{\Lambda(A)}(i,i) = e_i A e_i$ es un anillo local.

III) $\sum_{j\in\{1,\dots,n\}} \dim_K \mathrm{Hom}_{\Lambda(A)}(i,j) < \infty$ para toda $i \in \{1,\dots,n\}$ y

$\sum_{j\in\{1,\dots,n\}} \dim_K \mathrm{Hom}_{\Lambda(A)}(j,i) < \infty$ para toda $i \in \{1,\dots,n\}$ ya que $\mathrm{Hom}_{\Lambda(A)}(i,j)$, $\mathrm{Hom}_{\Lambda(A)}(j,i)$ son subespacios de A , de dimensión finita y la suma es finita.

Ejemplo 4.1.4.- Sea Λ una K-categoría localmente acotada con finitos objetos $x_1, \dots, x_n$. Construímos

$$A(\Lambda) = \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}_\Lambda(x_i, x_j)$$

Afirmamos $A(\Lambda)$ tiene estructura de K-álgebra de dimensión finita. Claramente, $A(\Lambda)$ es un K-espacio vectorial de dimensión finita.

Veamos que $A(\Lambda)$ es una K-álgebra.

Sea $(g_{ij})_{ij}$, $(f_{ij})_{ij} \in \bigoplus_{ij} \mathrm{Hom}_\Lambda(x_i,x_j)$, donde g_{ij} , $f_{ij} \in \mathrm{Hom}_\Lambda(x_i,x_j)$. Definimos

$$(g_{ij})_{i,j}(f_{ij})_{i,j} = (\sum_l g_{il} \circ f_{li})_{i,j}$$

Como Λ una K-categoría localmente acotada con finitos objetos, tenemos que $A(\Lambda)$ es una K-álgebra.

Veamos que $A(\Lambda)$ es básica.

Consideremos $P_i = \oplus_j \mathrm{Hom}_\Lambda(x_i,x_j)$ que tiene estructura natural de $A(\Lambda)$ módulo izquierdo , $A(\Lambda) = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$

Por el lema de Yoneda

$$\mathrm{End}_{A(\Lambda)} P_i \simeq \mathrm{End}_\Lambda(x_i) \quad \text{es local}$$

Por tanto por el lema (1.5.7) P_i es inescindible.

Supongamos $f: P_i \to P_j$ es un $A(\Lambda)$-isomorfismo y g es su inverso. Por el lema de Yoneda, existe $\alpha \in \mathrm{Hom}_\Lambda(x_j,x_i)$ tal que si $\gamma \in \mathrm{Hom}_\Lambda(x_i,x_l)$, $f(\gamma) = \gamma\alpha \in P_j$. Sea $\beta \in \mathrm{Hom}_\Lambda(x_i,x_j)$ que induce a g. Entonces , $1_{x_i} = gf(1_{x_i}) = 1_{x_i}\alpha\beta = \alpha\beta$ y $\beta\alpha = e_j$. Entonces $x_i \simeq x_j$. Por tanto $i = j$.

Observación 4.1.5.- Existe una biyección entre las K-álgebras básicas de dimensión finita y las K-categorías localmente acotadas con finitos objetos.

Definición 4.1.6.- Dada Λ una K- categorìa localmente acotada , definimos:

a) Un ideal de Λ es un bifuntor

$$L: \Lambda^{op} \times \Lambda \to \mathrm{Mod}K$$

tal que:

I) Para toda $x, y \in \mathrm{Ob}\Lambda$, $L(x,y)$ es subespacio de $\mathrm{Hom}_\Lambda(x,y)$.

II) Si $y \xrightarrow{f} z$ entonces $fL(x,y) \subset L(x,z)$.

III) Si $z \xrightarrow{g} x$ entonces $L(x,y) \subset L(z,y)$.

b) Si L es ideal de Λ , L^2 es el ideal dado por: $L^2(x,y) = \sum_{z \in Ob\Lambda} L(z,y)L(x,z)$ y si $(f,g) : (x_1,x_2) \to (y_1,y_2)$, entonces $L^2(f,g)(h) = ghf$.

c) El radical de $\mathrm{Hom}_\Lambda(x,y)$ es el ideal de Λ $\{f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(x,y) : f$ no es invertible$\}$ y lo denotamos por $\mathrm{Rad}_\Lambda(x,y)$.

d) Construímos el carcaj asociado a Λ (denotado por $Q = Q_\Lambda$) como sigue :

$Q_0 = \mathrm{Ob}\Lambda$, $n(x,y) = \dim_K$ $(\mathrm{Rad}_\Lambda(x,y)/\mathrm{Rad}^2_\Lambda(x,y))$, es el número de flechas de x a y.

e) Construímos F ideal de $K[Q_\Lambda]$ como sigue:

$$F : K[Q_\Lambda]^{op} \times K[Q_\Lambda] \to \mathrm{Mod}K$$

dado por $(x,y) \mapsto \langle\, f/f$ es un camino dirigido no trivial de x a $y\,\rangle$; y $(x_1,x_2) \to (y_1,y_2) \mapsto F(f,g) : F(x_1,x_2) \to F(y_1,y_2)$ donde $h \mapsto ghf$.

Es rutinario probar que F es ideal de $K[Q_\Lambda]$.

f) Dado I un ideal de $K[Q_\Lambda]$ decimos que I es admisible si:

I) Para todo $x,y \in \mathrm{Ob}\ K[Q_\Lambda]$, $I(x,y) \subset F^2(x,y)$.

II) Para todo $x \in Q_{\Lambda_0}$, existe n_x tal que $F^{n_x}(x,\ ) \subset I(x,\ )$ y $F^{n_x}(\ ,x) \subset I(\ ,x)$

g) Un carcaj Q se dice localmente finito si para todo $x \in Q_0$ salen y entran de x finitas flechas.

Teorema 4.1.7.- Λ es una K-categoría localmente acotada si y sólo si existe Q_Λ un carcaj localmente finito e I un ideal admisible de $K[Q_\Lambda]$ tal que $\Lambda \simeq K[Q_\Lambda]/I$.

Demostración.-

$\Longrightarrow$

Sea Q_Λ el carcaj asociado a Λ

a) Q_Λ es localmente finito: Se sigue de que la dimensión de $\mathrm{Hom}_\Lambda(x,y) < \infty$ para toda $x,y \in \mathrm{Ob}\Lambda$.

b) Sea $K[Q_\Lambda]$ la K-categoría asociada a Q_Λ

c) Construímos un funtor $\varphi : K[Q_\Lambda] \to \Lambda$ como sigue:

Para cada pareja $x,y \in \mathrm{Ob}\Lambda$ elegimos $n(x,y)$ elementos $\{x_\alpha \in \mathrm{Rad}_\Lambda(x,y)\}$ de forma que $\{\overline{x}_\alpha /\ \overline{x}_\alpha \in \mathrm{Rad}_\Lambda(x,y)/\mathrm{Rad}^2_\Lambda(x,y)\}$ es una base de $\mathrm{Rad}_\Lambda(x,y)/\mathrm{Rad}^2_\Lambda(x,y)$

Definimos $\varphi(x) = x$. Sea $x \xrightarrow{\alpha} y$ flecha en Q_Λ , $\varphi(\alpha) = x_\alpha$ y $\varphi(\tau_x) = 1_x$.

Extendemos a φ multiplicativa y bilinealmente. (Esto es $\varphi(\alpha_n \ldots \alpha_1) = x_{\alpha_n} \ldots x_{\alpha_1}$ y

$\varphi\left(\sum_i \lambda_i \alpha_n^{i_n}\dots\alpha_1^{i_1}\right) = \sum(\lambda_i x_{\alpha_n}^{i_n}\dots x_{\alpha_1}^{i_1}).$

Es claro que φ es K-funtor.

d) φ es denso y pleno.

Denso es claro y pleno es análogo a como se probó en el teorema (3.3.4)

e) Sea I =Kerφ. Es claro que I es ideal de $K[Q_\Lambda]$.

f) Construyo $K[Q_\Lambda]/I$ la categoría dada por:

Ob$(K[Q_\Lambda]/I)$ =Ob$K[Q_\Lambda]$ y $\mathrm{Hom}_{K[Q_\Lambda]/I}(x,y) = \mathrm{Hom}_{K[Q_\Lambda]}(x,y)/I(x,y)$.

Así , tenemos:

$$\begin{tikzcd} K[Q_\Lambda] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \Lambda \\ K[Q_\Lambda]/I \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

con $\overline{\varphi}$ equivalencia.

g) I es admisible:

Consideramos F el ideal de $K[Q_\Lambda]$ generado por las flechas.

$I(x,y) \subseteq F(x,y)$, $I(x,y) \subseteq F^2(x,y)$ es análogo a como se demostró en el Teorema (3.3.4)

Veamos que para toda $x \in Q_0$, existe n_x tal que:

$F^{n_x}(x,\ ) \subset I(x,\ )$.

Como $\sum_y \dim\Lambda(x,y) = \sum_y \dim\ \ \mathrm{Hom}_{K[Q]}(x,y)/I(x,y) = d < \infty$. Entonces:

I) Si $\mathrm{Hom}_k[Q_\Lambda](x,y)/I(x,y) = 0$, entonces $I(x,y) = \mathrm{Hom}_{K[Q_\Lambda]}(x,y) \supset F^n(x,y)$, para toda n.

II) Solo hay finitos $y_1, y_2, \dots, y_l$ tales que $\mathrm{Hom}_{K[Q_\Lambda]}(x,y_i)/I(x,y_i) \neq 0$. Además como $\mathrm{Hom}_\Lambda(y_i,y_i)$ es local , entonces $\mathrm{Rad}_\Lambda^{n_i}(y_i,y_i) = 0$. para alguna $n_i > 0$.

III) Si $0 \neq \gamma$ de x a y es camino de longitud $> \sum_i n_i$, entonces $\gamma \in I(x,y)$.

En efecto , supongamos:

$\gamma = \alpha_n \dots \alpha_1 \notin I(x,y)$; con $y_{\sigma(i)} \xrightarrow{\alpha_i} y_{\tau(i)}$. Si cada y_i aparece en esta lista $\leq n_i$ veces , entonces long $\gamma \leq \sum_i n_i$. Lo cual es una contradicción. Entonces , existe y_j que aparece $> n_j$ veces.Por tanto existe un subcamino γ' de γ de y_j en y_j que pasa más de n veces por y_j. Entonces , la clase $\overline{\gamma'}$ de γ'en Λ satisface $\overline{\gamma'} \in \mathrm{Rad}_\Lambda^{n_j}(y_j,y_j) = 0$. Así , $\overline{\gamma} = 0$.

$\Longleftarrow$ Es rutinario $\square$

§2 CATEGORIAS LOCALMENTE ACOTADAS INDESCOMPONIBLES

Definición 4.2.1.- Dada Λ una K-categoría y $\{\Lambda_i\}_{i\in I}$ K-subcategorías de Λ. Decimos que $\Lambda = \coprod_{i\in I}\Lambda_i$ si $\mathrm{Ob}\Lambda = \dot{\bigcup}_{i\in I}\mathrm{Ob}\Lambda_i$ y $\mathrm{Hom}_\Lambda(y,z) = \mathrm{Hom}_{\Lambda_{i_o}}(y,z)$ si existe $i_o \in I$ tal que $y,z \in \mathrm{Ob}\Lambda_{i_o}$ y $\mathrm{Hom}_\Lambda(y,z) = 0$ si no.

Definición 4.2.2.- Una K-categoría Λ se dice indescomponible , si dadas Λ' y Λ'' subcategorías de Λ con $\Lambda = \Lambda' \coprod \Lambda''$ se tiene que Λ' o Λ'' es la categoría vacía.

Lema 4.2.3.- Sea Λ una K categoría localmente acotada. Entonces existen $\{\Lambda_\alpha\}_{\alpha\in J}$ subcategorías plenas de Λ tales que $\Lambda = \coprod_{\alpha\in J}\Lambda_\alpha$, de forma que Λ_α es K-categoría localmente acotada indescomponible para todo $\alpha \in J$.

Demostración.-

(Existencia)

Sea $x \in \Lambda$. Definimos la siguiente relación: $x \sim y$ si existen $x = x_o, x_1, \ldots, x_n = y \in \mathrm{Ob}\Lambda$ tales que $\mathrm{Hom}_\Lambda(x_i, x_{i+1}) \neq 0$ o bien $\mathrm{Hom}_\Lambda(x_{i+1}, x_i) \neq 0$ $i = 1, \ldots, n$.

$\sim$ es relación de equivalencia: rutinario.

$\Lambda = \coprod_{\bar{x}\in \mathrm{Ob}\Lambda/\sim}\Lambda_{\bar{x}}$ donde $\Lambda_{\bar{x}}$ es la subcategoría plena de Λ con objetos $\{y \in \Lambda : x \sim y\}$.

Es claro que $\mathrm{Ob}\Lambda = \dot{\bigcup}_{\bar{x}\in \mathrm{Ob}\Lambda/\sim}\Lambda_{\bar{x}}$. Sean $a, b \in \mathrm{Ob}\Lambda$. Supongamos que existe $\bar{z} \in \mathrm{Ob}\Lambda/\sim$ tal que $a, b \in \mathrm{Ob}\Lambda_{\bar{z}}$. Entonces $\mathrm{Hom}_{\Lambda_{\bar{z}}}(a,b) = \mathrm{Hom}_\Lambda(a,b)$. Si $a \not\sim b$, entonces $\mathrm{Hom}_\Lambda(a,b) = 0$.

$\Lambda_{\bar{x}}$ es una K-categoría localmente acotada e indescomponible:

Claramente $\Lambda_{\bar{x}}$ es una K-categoría localmente acotada.

Veamos que $\Lambda_{\bar{x}}$ es indescomponible.

Supongamos C , D subcategorías de $\Lambda_{\bar{x}}$ (en particular K-categorías localmente acotadas) tales que $\Lambda_{\bar{x}} = C \coprod D$. Entonces dado que $x \in \mathrm{Ob}\Lambda_{\bar{x}}$ tenemos que $x \in C$ ó $x \in D$. Supongamos $x \in C$. Sea $y \in \mathrm{Ob}\Lambda_{\bar{x}}$, existen $x = x_1, \ldots, x_n = y$ tales que $\mathrm{Hom}_{\Lambda_{\bar{x}}}(x_i, x_{i+1}) \neq 0$ o bien $\mathrm{Hom}_{\Lambda_{\bar{x}}}(x_{i+1}, x_i) \neq 0$. Si $y \notin C$. Entonces existe x_i, x_{i+1} tales que $x_i \in C$ y $x_{i+1} \in D$ de donde $\mathrm{Hom}_{C\coprod D}(x_i, x_{i+1}) = 0$. Lo cual es una contradicción. Por tanto $y \in C$. Por tanto D es la categoría vacía . Asi $\Lambda_{\bar{x}} = C$.

□

Lema 4.2.4.- Si Λ es una K-categoría localmente acotada e indescomponible. Entonces ObΛ es numerable.

Demostración.-

Sea $x_0 \in$ObΛ.

Sean $x_1, \ldots x_{n_0} \in$ ObΛ tales que $x_i \neq x_0$ para $(i = 1, \ldots, n_0)$ y $\mathrm{Hom}_\Lambda(x_i, x_0) \neq 0$ o bien $\mathrm{Hom}_\Lambda(x_0, x_i) \neq 0$.

Sean $x_{n_0+1}, \ldots, x_{n_1} \in$ ObΛ tales que $x_j \neq x_i$ *para* $0 \leq i < j \leq n_1$ y $\mathrm{Hom}_\Lambda(x_1, x_j) \neq 0$ o bien $\mathrm{Hom}_\Lambda(x_j, x_1) \neq 0$ para $n_0 + 1 \leq j \leq n_1$.

Sean $x_{n_1+1}, \ldots, x_{n_2} \in$Ob$\Lambda$ tales que $x_j \neq x_i$ para $0 \leq i < j \leq n_2$ y $\mathrm{Hom}_\Lambda(x_2, x_j) \neq 0$ o bien $\mathrm{Hom}_\Lambda(x_j, x_2) \neq 0$ para $n_1 + 1 \leq j \leq n_2$.

Continuando así sean $x_{n_{(n_0-1)}+1}, \ldots, x_{n_{n_0}}$ tales que $x_j \neq x_i$ para $0 \leq i < j \leq n_{n_0}$ y $\mathrm{Hom}_\Lambda(x_{n_0}, x_j) \neq 0$ o bien $\mathrm{Hom}\Lambda(x_j, x_{n_0}) \neq 0$ para $n_{(n_0-1)} + 1 \leq j \leq n_{n_0}$.

Ahora sea $x_{n_{n_0}+1}, \ldots, x_{n_{(n_0+1)}} \in$Ob$\Lambda$ tales que $\mathrm{Hom}_\Lambda(x_{n_0+1}, x_j) \neq 0$ o bien $\mathrm{Hom}\Lambda(x_j, x_{n_0+1}) \neq 0$ para $j = n_{n_0} + 1, \ldots, n_{(n_0+1)}$ además , suponemos $x_i \neq x_j$ si $0 \leq i < j \leq n_{(n_0+1)}$.

Veamos que hemos numerado a todos los objetos de Λ.

Sea $x \in$ObΛ , como Λ es indescomponible existen $x_0 = y_0, y_1, \ldots, y_m = x \in$ ObΛ tales que:

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(y_{i-1}, y_i) \neq 0 \quad \text{o bien} \quad \mathrm{Hom}_\Lambda(y_i, y_{i-1}) \neq 0.$$

Entonces

$$y_1 = x_{i_1} \qquad 0 \leq i_1 \leq n_0$$

$$y_2 = x_{i_2} \qquad 0 \leq i_2 \leq n_{i_1}$$

$$x = y_m = x_{i_m} \qquad 0 \leq i_m \leq n_{i_{m-1}}$$

Por tanto ObΛ es numerable.

□

§3 MODULOS LOCALMENTE FINITOS

Definición 4.3.1.- Sea Λ una K-categoría y mod$K$ la K-categoría de los K-módulos de dimensión finita.

a) Definimos un Λ–módulo localmente finito como un K-funtor $M: \Lambda \to \text{mod}K$.

b) Dados M y M' módulos localmente finitos. Un morfismo de módulos localmente finitos es una transformación natural $\varphi: M \to M'$.

c) Si $M \neq 0$ es un Λ -módulo localmente finito , entonces M se dice inescindible si para cualesquiera N_1 , N_2 Λ módulos localmente finitos tales que $M = N_1 \oplus N_2$ se tiene que N_1 o N_2 es cero.

Denotamos por modΛ la K-categoría de Λ–módulos localmente finitos.

Ejemplo 4.3.2.- Consideremos

$$C: \quad x_0 \xrightarrow{\alpha_0} x_1 \xleftarrow{\beta_0} x_2 \xrightarrow{\alpha_1} x_3 \xleftarrow{\beta_1} x_4 \longrightarrow \ldots$$

Entonces , $\Lambda = K[C]$ es una K-categoría localmente acotada.

Sea

$$M_i: \Lambda \to \text{mod}K \quad \text{la representacion tal que :}$$

$$M_i(x_j) = \begin{cases} K\,, & \text{si } j \geq i; \\ 0\,, & \text{si no.} \end{cases}$$

para $x_j \xrightarrow{\gamma} x_l$ se define :

$$M_i(x_j) = \begin{cases} Id\,, & \text{si } j \text{ es par }, l \in \{j-1, j+1\} \text{ y } j \geq i+1; \\ 0\,, & \text{si no.} \end{cases}$$

Se tiene que M_i es Λ módulo localmente finito inescindible.

Veremos que algunos resultados demostrados en los capítulos 1 y 2 para módulos de longitud finita pueden probarse para módulos localmente finitos.

Lema 4.3.3.- Sea K un campo algebraicamente cerrado, V un K-espacio vectorial, $f: V \to V$ una transformación lineal y $V_\lambda = \{\, v \in V \ : \text{Existe } n, (f - \lambda 1)^n(v) = 0\}$. Entonces $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda$.

Demostración.-

a) Si $\lambda \neq \mu$, entonces $V_\lambda \cap V_\mu = 0$.

Supongamos $v \in V_\lambda \cap V_\mu$, existe n tal que

$(f-\lambda 1)^n(v)=0$ y $(f-\mu 1)^n(v)=0$

$(x-\lambda)^n$ y $(x-\mu)^n$ son primos relativos en $K[x]$ que es un dominio de ideales principales, por tanto existen $p(x), q(x) \in K[x]$ con $p(x)(x-\lambda)^n+q(x)(x-\mu)^n=1$. Por tanto:

$$p(f)(f-\lambda 1)^n+q(f)(f-\mu 1)^n=1.$$

Evaluando estos polinomios en v , obtenemos que $v=0$

b) $\sum_{\lambda\in K} V_\lambda = \bigoplus_{\lambda\in K} V_\lambda.$

Supongamos $\sum_{i=1}^n v_i=0$ con λ_i diferentes $v_i \in V_{\lambda_i}$, con n la mínima posible. $(f-\lambda_1 1)^{n_1}(v_1)=0$ y $\sum_{i=2}^n (f-\lambda_1 1)^{n_1}(v_i)=0$ con $(f-\lambda_1 1)^{n_1}(v_i)\in V_{\lambda_i}$. Por minimalidad de n ,$(f-\lambda_1 1)^{n_1}(v_i)=0$. Por tanto $v_i \in V_{\lambda_1}\cap V_{\lambda_i}=0$ para toda $(i=2,\ldots,n)$, por tanto también $v_1=0$.

c) Sea $0\neq v\in V$.

$$\text{Definimos } I=\{p(x)\in K[x] \;:\; p(f)(v)=0\}$$

I es claramente ideal y como $K[x]$ es dominio de ideales principales y K es algebraicamente cerrado existe $q(x)$ tal que $q(x)K[x]=I$ con $q(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)^{n_i}$, λ_i diferentes. Para toda $(i=1,\ldots,n)$, definimos $q_i(x)=\prod_{j\neq i}(x-\lambda_j)^{n_j}$. Entonces $q(x)=q_i(x)(x-\lambda_i)^{n_i}$ y mcd$\{\, q_i(x) : i=1,\ldots,n \,\}=1$. Entonces existen $s_i(x)\in K[x]$ tales que $\sum_{i=1}^n s_i(x)q_i(x)=1$. Por tanto

$$(f-\lambda_i 1)^{n_i} s_i(f)q_i(f)(v)=s_i(f)q(f)(v)=0$$

Entonces $s_i(f)q_i(f)(v)\in V_{\lambda_i}$ y $\sum_{i=1}^{n} s_i(f)q_i(f)(v)=v$.

□

Este resultado se conoce como el teorema de la descomposición prima (ver por ejemplo [HK]). Observar que nuestra demostración es válida para espacios de dimensión infinita.

Proposición 4.3.4.- Sea $M\colon\Lambda\to \mathrm{mod}K$ un módulo localmente finito . Sea $f\in \mathrm{Hom}_\Lambda(M,M)$. Para $\lambda\in K$ definimos

$$M_\lambda\colon\Lambda\to \mathrm{mod}K \quad \text{como el} \quad K-\text{funtor}$$

$$x \mapsto M_\lambda(x) = \{v \in M(x): \left(f_x - \lambda 1_{M(x)}\right)^m (v) = 0 \quad \text{para algun} \quad m \in \mathbb{N}\}$$

$$x \to y \mapsto M(\alpha): M_\lambda(x) \to M_\lambda(y),$$

Entonces

a) M_λ es submódulo de M.

b) $M = \bigoplus_{\lambda \in K} M_\lambda$.

Demostración.-

a) $M_\lambda(x) \in \text{mod}K$: es claro.

Sea $\underset{x \to y}{\alpha}$, veremos que $M(\alpha): M_\lambda(x) \to M_\lambda(y)$.

Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base de $M_\lambda(x)$ y $\{s_1, \ldots, s_n\}$ tales que

$$\left(f_x - \lambda 1_{M(x)}\right)^{s_i} (v_i) = 0.$$

Sea $s(x)_\lambda = \max\{s_1, \ldots, s_n\}$.

Sea $v \in M_\lambda(x) = \text{Ker}(f_x - \lambda 1_{M(x)})^{s(x)_\lambda}$, entonces $M(\alpha)(v) \in M_\lambda(y)$. En efecto:

$$(f_y - \lambda 1_{M(y)})^{s(x)_\lambda}(M(\alpha)(v)) =$$

$$(f_y - \lambda 1_{M(y)})^{s(x)_\lambda - 1} M(\alpha) \left((f_x) - \lambda 1_{M(x)})(v)\right)$$

ya que

$$\begin{aligned}(f_y - \lambda 1_{M(y)})(M(\alpha)(v)) = \ & (f_y (M(\alpha)(v)) - \lambda M(\alpha)(v) \ = \\ & (f_y M(\alpha)) (v) - \lambda M(\alpha)(v) = \\ & M(\alpha) f_x(v) - M(\alpha) \left(\lambda 1_{M(x)}(v)\right) = \\ & M(\alpha) \left(\left(f_x - \lambda 1_{M(x)}\right)(v)\right).\end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned}&(f_y - \lambda 1_{M(y)})^{s(x)_\lambda}(M(\alpha)(v)) = \\ &M(\alpha)(f_x - \lambda 1_{M(x)})^{s(x)_\lambda}(v) = 0\end{aligned}$$

Por tanto $M(\alpha)(v) \in M_\lambda(y)$.

b) Se sigue del lema anterior.

$\square$

Definición 4.3.5.- Sea Λ una K-categoría localmente acotada y $M: \Lambda \to \text{mod}K$. un módulo localmente finito. Decimos que un endomorfismo $f: M \to M$ es localmente nilpotente si para todo $x \in \text{Ob}\Lambda$, existe n_x tal que $f_x^{n_x} = 0$.

Lema 4.3.6.- Sea $M: \Lambda \to \text{mod}K$ un módulo localmente finito. Sea $f: M \to M$ morfismo. Entonces f es localmente nilpotente si y sólo si $M = M_0$.

Demostración.-

$\Rightarrow$ Para todo $x \in \text{Ob}\Lambda$, existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $f_x^{n_x} = 0$.

Esto es $M_0(x) = M(x)$. Por tanto $M_0 = M$.

$\Leftarrow$ Supongamos $M = M_0$. Entonces:

$M(x) = M_0(x) = \{v \in M(x)/f_x^n(v) = 0$ para alguna $n \in \mathbb{N}\}$. Supongamos $M(x) \neq 0$. Como $M(x)$ es de dimensión finita , sea $\{v_1, \ldots, v_r\}$ base de $M(x)$ y sea $m = \max\{n_i: i = 1, \ldots, r\}$, donde $f_x^{n_i}(v_i) = 0$ $(i = 1, \ldots, r)$. Entonces $f_x^m = 0$. Por tanto f es localmente nilpotente.

$\square$

Lema 4.3.7.- Sea $M: \Lambda \to \text{mod}K$ localmente finito e inescindible y $f: M \to M$ morfismo. Son equivalentes:

a) f es isomorfismo.

b) f no es localmente nilpotente.

Demostración.-

$\Rightarrow$ Sea $x \in \Lambda$ con $M(x) \neq 0$ (Existe pues M es inescindible). Entonces $0 \neq f_x: M(x) \to M(x)$ es isomorfismo de espacios vectoriales. Por tanto f_x no es nilpotente.

$\Leftarrow$ Supongamos f no es localmente nilpotente. Entonces por el lema (4.3.6) $M \neq M_0$. Entonces $M_0 = 0$ (pues M es inescindible y por la proposición (4.3.4) $M = \bigoplus_{\lambda \in K} M_\lambda$). Consideremos $f_x: M(x) \to M(x)$. Dado que $M_0(x) = 0$, entonces f_x es monomorfismo. Por tanto f_x es isomorfismo. (Pues $M(x)$ es de dimensión finita.)

$\square$

Daremos una segunda demostación de (4.3.7) , la cual agradecemos al Dr. Leonardo Salmerón.

Lema 4.3.8.- (Fitting) Sea $M: \Lambda \to \mathrm{mod}K$ localmente finito y $f: M \to M$ un endomorfismo de M. Entonces:

$$M = \mathrm{Im} f^{\infty} \oplus \mathrm{Ker} f^{\infty}$$

donde $\mathrm{Im} f^{\infty} = \cap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Im} f^{n}$ y $\mathrm{Ker}\ f^{\infty} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Ker} f^{n}$.

Demostración.-

Claramente $\mathrm{Im} f^{\infty}$, $\mathrm{Ker} f^{\infty}$ son submódulos de M. Dado $x \in \mathrm{Ob}\Lambda$, por el corolario (1.4.18) , si n_x es suficientemente grande $M(x) = \mathrm{Im} f_x^{n_x} \oplus \mathrm{Ker} f_x^{n_x}$. Pero para n_x suficientemente grande $(\mathrm{Im} f^{\infty})_x = \mathrm{Im} f_x^{n_x}$ y $(\mathrm{Ker} f^{\infty})_x = \mathrm{Ker} f_x^{n_x}$.

□

4.3.9.- Segunda demostración del lema (4.3.7)

$\Rightarrow$ como antes.

$\Leftarrow$ Por el lema anterior , $M = \mathrm{Im} f^{\infty} \oplus \mathrm{Ker} f^{\infty}$. Si f no es iso , $\mathrm{Ker} f_x \neq 0$ para alguna $x \in \mathrm{Ob}\Lambda$. Entonces $\mathrm{Ker}(f^{\infty})_x \neq 0$ y , puesto que M es inescindible, $\mathrm{Im} f^{\infty} = 0$. Esto es , para cada $x \in \mathrm{Ob}\Lambda$, $(\mathrm{Im} f^{\infty})_x = 0$. De donde $\mathrm{Im} f_x^{n} = 0$ para n suficientemente grande.

□

Teorema 4.3.10.- Sea $M: \Lambda \to \mathrm{mod}K$ localmente finito . Entonces M es inescindible si y sólo si $\mathrm{End}_{\Lambda}(M)$ es local.

Demostración.- Si $\mathrm{End}_{\Lambda}(M)$ es local , entonces M es inescindible.Como en (1.5.6)

Por el lema (4.3.7) en $\mathrm{End}_{\Lambda}(M)$ todo elemento es isomorfismo o localmente nilpotente. Por el lema (1.5.6) basta ver que

$$\mathfrak{M} = \{ f \in \mathrm{End}_{\Lambda}(M) \ / \ f \quad \text{es} \quad \text{localmente} \quad \text{nilpotente} \ \}$$

es un ideal de $\mathrm{End}_{\Lambda}(M)$.

Sean $f, g \in \mathfrak{M}$, $r \in \mathrm{End}_{\Lambda}(M)$. Supongamos $rf \notin \mathfrak{M}$. Entonces existe u con $u(rf) = 1_M$. Sea $x \in \mathrm{Ob}\Lambda$ tal que $M(x) \neq 0$. Supongamos $f_x^n = 0$ con $f_x^{n-1} \neq 0$. Así $0 = (u_x r_x) f_x^n = u_x(r_x f_x^n) = (u_x(r_x f_x)) f_x^{n-1} = f_x^{n-1} \neq 0$. Lo que es una contradicción. Luego $rf \in \mathfrak{M}$. Si $f + g \notin \mathfrak{M}$, existe u con $u(f+g) = 1_M$. Así $uf + ug = 1_M$. Entonces ug y $1 - ug = uf \in \mathfrak{M}$. Sea $x \in \mathrm{Ob}\Lambda$ y supongamos que $(ug)_x^n = 0$, Entonces , $(1 - (ug))_x(1_x + (ug)_x + (ug)_x^2 + \cdots + (ug)_x^{n-1}) = 1$. De donde $(1 - ug)_x$ es un isomorfismo. Entonces por el lema (4.3.7), $(1 - ug)$ es un isomorfismo , y esto es una contradicción.

□

Observación 4.3.11.- Sea Λ una K-categoría localmente acotada. Como en el lema (4.2.3) escribimos $\Lambda = \coprod_{\overline{x}\in \mathrm{Ob}\Lambda/\sim} \Lambda_{\overline{x}}$

a) Si M $\in$mod$\Lambda_{\overline{x}}$. Podemos considerar a M $\in$modΛ de la siguiente manera:

Definimos $\overline{M}: \Lambda \to \mathrm{mod}K$. Como:

$$\overline{M}(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \notin \Lambda_{\overline{x}}; \\ M(y), & \text{si } y \in \Lambda_{\overline{x}}. \end{cases}$$

Supongamos $\underset{a\to b}{\overset{\alpha}{}}$. Entonces

$$\overline{M}(\alpha) = \begin{cases} M(\alpha), & \text{si } a, b \in \mathrm{Ob}\Lambda_{\overline{x}}; \\ 0, & \text{si no }. \end{cases}$$

Es claro que $\overline{M}: \Lambda \to \mathrm{mod}K$ es K-funtor. También es claro que F:mod$\Lambda_{\overline{x}}$ $\to$modΛ , $M \mapsto \overline{M}$ se extiende a un K- funtor que es equivalencia sobre su imagen.

b) Dado $M: \Lambda \to \mathrm{mod}K$. Denotamos por $M_{\overline{x}}: \Lambda_{\overline{x}} \to \mathrm{mod}K$ a la composición $\Lambda_{\overline{x}} \to \Lambda \to \mathrm{mod}K$ donde i es K-funtor inclusión de $\Lambda_{\overline{x}}x$ en Λ.

Se tienen las siguientes propiedades: En modΛ , $M = \bigoplus_{\overline{x}\in \mathrm{Ob}\Lambda/\sim} \overline{M_{\overline{x}}}$.

Además , si $M = \bigoplus_{\overline{x}\in \mathrm{Ob}\Lambda/\sim} \overline{N_{\overline{x}}}$ con $N_{\overline{x}} \in \mathrm{mod}\Lambda_{\overline{x}}$, entonces $M_{\overline{x}} = N_{\overline{x}}$.

Corolario 4.3.12.- Si Λ es una K-categoría localmente acotada. Entonces

$$Mod\Lambda \simeq \coprod_{\overline{x}\in \mathrm{Ob}\Lambda/\sim} Mod\Lambda_{\overline{x}}$$

□

El siguiente resultado nos será también de utilidad. (Comparar con el lema (2.1.6) del capítulo 2).

Lema 4.3.13.- Sean $M, N, U, L: \Lambda \to \mathrm{mod}K$ (localmente finitos). Sea $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}: M \oplus N \to U \oplus L$ (Transformación natural) un isomorfismo con $a: M \to U$ isomorfismo. Entonces $N \simeq L$.

Ver lema (2.1.6)

□

Proposición 4.3.14.- Sean $M, N, K_1, \ldots K_n : \Lambda \to \mathrm{mod}K$ módulos localmente finito. Supongamos $M \oplus N \simeq K_1 \oplus \ldots \oplus K_n$ y M es inescindible. Entonces , existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ de forma que :

$$K_j = K_j' \oplus K_j''$$

con $M \simeq K_j'$ y $N \simeq K_j'' \oplus (\oplus_{i \neq j} K_i)$.

Ver proposición (2.1.7)

□

§4 UN TEOREMA DE DESCOMPOSICION PARA MODULOS LOCALMENTE FINITOS

Teorema 4.4.1.- Sea Λ una K-categoría localmente acotada. Sea $0 \neq M: \Lambda \to \mathrm{mod}K$ un K-módulo localmente finito. Entonces, existe una descomposición $M = \bigoplus_{i \in I} N_i$ tal que N_i es inescindible $(i \in I)$. Además todas las descomposiciones inescindibles de M son equivalentes. Si Λ es indescomponible, I es numerable.

Demostración.-

Por el lema (4.2.3) $\Lambda = \coprod_{\overline{x} \in \mathrm{Ob}\Lambda/\sim} \Lambda_{\overline{x}}$ con $\Lambda_{\overline{x}}$ localmente acotada e indescomponible.

Veremos que basta tener el resultado para Λ localmente acotada e indescomponible.

En efecto, sea $M: \Lambda \to \mathrm{mod}K$ (K-módulo localmente finito). Consideremos $M_{\overline{x}}: \Lambda_{\overline{x}} \to \mathrm{mod}K$ (definido en observación (4.3.11). Tenemos por esta misma observación que $M = \bigoplus_{\overline{x} \in \mathrm{Ob}\Lambda/\sim} \overline{M}_x$. Supongamos que $M_{\overline{x}} = \bigoplus_{i \in I_x} N_i$ con $N_i: \Lambda_{\overline{x}} \to \mathrm{mod}K$ inescindible para toda $i \in I_x$. Entonces $\overline{M_{\overline{x}}} = \bigoplus_{i \in I_x} \overline{N}_i$ con $\overline{N}_i: \Lambda \to \mathrm{mod}k$ inescindible para toda $i \in I_x$. Finalmente $M = \bigoplus_{\overline{x} \in \mathrm{Ob}\Lambda/\sim} \left(\bigoplus_{i \in I_x} \overline{N}_i \right)$. La unicidad de esta descomposición se sigue de (4.3.11) y de la unicidad de cada descomposición de $M_{\overline{x}}$

Demostración del Teorema para Λ indescomponible.

a) Sea Λ indescomponible localmente acotada. Por el lema (4.2.4) , Λ tiene un número numerable de objetos.

Sea $\mathrm{Ob}\Lambda = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Podemos suponer que $M(x_1) \neq 0$. Definimos

$$S = \{(U,V): \quad U,V \quad \text{submodulos} \quad \text{de} \quad M; U \oplus V = M, V(x_1) \neq 0\}.$$

$S \neq \phi$, pues $(0, M) \in S$. Definimos el siguiente orden parcial en S : $(U_1, V_1) \subseteq (U_2, V_2)$ si y solamente si $U_1 \subseteq U_2$ y $V_2 \subseteq V_1$. Es claro que este orden es un orden parcial.

Veamos que S satisface la hipótesis del Lema de Zorn. Supongamos que $\{(U_n, V_n)\}_{n \in A}$ es una cadena en S. Sea $U = \cup_{n \in A} U_n$ y $V = \cap_{n \in A} V_n$. Entonces U y V son subfuntores de M. Tenemos que demostrar que $U \oplus V = M$ y $V(x_1) \neq 0$. Para esto demostraremos que $U(x) \oplus V(x) = M(x)$ para toda $x \in \mathrm{Ob}\Lambda$. Tenemos que $\cup U_n(x) = U(x) \subset M(x)$ que es de dimensión finita, de donde existe n

tal que $U(x) = U_n(x)$ y análogamente $M(x) = U_{r_x}(x) \oplus V_{r_x}(x) = U(x) \oplus V(x)$. Además $V(x_1) = \cap_{n\in A} V_n(x_1) = V_{r_{x_1}}(x_1) \neq 0$. Por lo tanto existe $(\overline{U},\overline{V}) \in S$ maximal. Veamos que $\overline{V}$ es inescindible. En efecto $\overline{V} = V_1 \oplus V_2$ y supongamos que $V_1(x_1) \neq 0$. Entonces $(\overline{U},\overline{V}) \subseteq (\overline{U} \oplus V_2, V_1) \in S$ y como $(\overline{U},\overline{V})$ es maximal, por lo tanto $\overline{V} = V_1$.

b) Tenemos $M = N_1 \oplus M_0$ con $N_1(x) \neq 0$ y N_1 inescindible. Si $M_0(x_1) \neq 0$ repetimos el argumento hasta obtener $M = N_{11} \oplus N_{12} \oplus \cdots \oplus N_{1s_1} \oplus M_1$ con $N_{1j}(x_1) \neq 0$ $(j = 1,\ldots,s_1)$ y $M_1(x_1) = 0$. (En este proceso existe M_1 tal que $M_1(x_1) = 0$ pues $M(x_1)$ es de dimensión finita.)

Ahora , continuamos a x_2. Esto es , si $M_1(x_2) \neq 0$ repito el argumento usado para x_1.

c) Así para toda m, $M = \bigoplus_{i=1}^{m} \left(\bigoplus_{j=1}^{s_i} N_{ij} \right) \oplus M_m$ con $s_i \in \mathbb{N}$, N_{ij} inescindible, $N_{ij}(x_i) \neq 0$, $M_m(x_i) = 0$ $(i = 1,\ldots,m)$ y $N_{(m+1)j}$ sumando directo de M_m para toda $j = 1,\ldots,s_{m+1}$.

d) Probaremos que $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \left(\bigoplus_{j=1}^{s_i} N_{ij} \right)$.

Como N_{ij} es submódulo de M para toda $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq s_i$ es suficiente probar que $M(x) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \left(\bigoplus_{j=1}^{s_i} N_{ij}(x) \right)$ para toda $x \in$ObA. Pero para toda m ,

$$M(x_m) = \bigoplus_{i=1}^{m} \left(\bigoplus_{j=1}^{s_i} N_{ij} \right)(x_m) \oplus M_m(x_m) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \left(\bigoplus_{j=1}^{s_i} N_{ij} \right)(x_m) \text{ pues } M_m(x_m) = 0$$

.

Veamos ahora la unicidad de esta descomposición.

Supongamos $\bigoplus_{i\in I} N_i = M = \bigoplus_{j\in J} N'_j$ tales que N_i , N'_j son inescindibles para toda $i \in I$, $j \in J$.

Definimos $A_1 = \{i \in I : N_i(x_1) \neq 0\}$ y $B_1 = \{j \in J : N'_j(x_1) \neq 0\}$

Como M es localmente finito, A_1 y B_1 son conjuntos finitos. Sea $i_0 \in A_1$ y escribimos $N_{i_0} \oplus \left(\bigoplus_{i\neq i_0} N_i \right) = M = \bigoplus_{j\in B_1} N'_j \oplus \left(\bigoplus_{j\notin B_1} N'_j \right)$. Por la proposición (4.3.14), N_{i_0} es sumando directo de algún N'_j con $j \in B_1$ (ya que $\bigoplus_{j\notin B_1} N'_j(x_1) = 0$).

Sea $\sigma_1(i_0) \in B_1$ tal que $N_{i_0} \simeq N'_{\sigma_1(i_0)}$ y $\bigoplus_{i\neq i_0} N_i \simeq \bigoplus_{j\neq\sigma_1(i_0)} N'_j$.

De esta forma luego de un número finito de pasos, obtenemos una función inyectiva $\sigma_1 : A_1 \to B_1$ tal que $N_i \simeq N'_{\sigma_1(i)}$ para toda $i \in A_1$ y

$$\bigoplus_{i \notin A_1} N_i \simeq \bigoplus_{j \notin \sigma_1(A_1)} N'_j$$

Como $\bigoplus_{i \notin A_1} N_i(x_1) = 0$, entonces $B_1 \subset \sigma_1(A_1)$ y σ_1 es biyectiva.

Sea $m > 1$. Supongamos , definidos $A_m \subset I$, $B_m \subset J$ subconjuntos finitos y una función biyectiva

$$\sigma_m : A_m \to B_m$$

tal que $N_i \simeq N'_{\sigma_m(i)}$ para cada $i \in A_m$ y $\bigoplus_{i \notin A_m} N_i \simeq \bigoplus_{j \notin B_m} N'_j$. Además , $\left(\bigoplus_{i \notin A_m} N_i\right)(x_j) = 0$ para $1 \leq j \leq m$

Sean $A'_{m+1} = \{i \in I - A_m : N_i(x_{m+1}) \neq 0\}$ y $B'_{m+1} = \{j \in J - B_m : N'_j(x_{m+1}) \neq 0\}$ (Conjuntos finitos).

Procediendo como antes , construímos $\sigma'_{m+1} : A'_{m+1} \to B'_{m+1}$ tal que $N_i \simeq N'_{\sigma'_{m+1}(i)}$ para $i \in A'_{m+1}$ y $\bigoplus_{i \notin (A_m \cup A'_{m+1})} N_i \simeq \bigoplus_{j \notin (B_m \cup B'_{m+1})} N'_j$. Además, $\bigoplus_{i \notin (A_m \cup A'_{m+1})} N_i(x_j) = 0$ para $1 \leq j \leq m+1$. Definimos $A_{m+1} = A_m \cup A'_{m+1}$, $B_{m+1} = B_m \cup B'_{m+1}$ y

$$\sigma_{m+1} : A_{m+1} \to B_{m+1} \quad \text{como} \quad \sigma_{m+1} = \begin{cases} \sigma_m(i), & \text{si } i \in A_m; \\ \sigma'_{m+1}(i), & \text{si } i \in A'_{m+1}. \end{cases}$$

Claramente esta función es biyectiva.

Por construcción $\sigma_{m+1}(i) = \sigma_m(i)$ si $i \in A_m$

Así , $\sigma : \cup_{m \in \mathbb{N}} A_m \to \cup_{m \in \mathbb{N}} B_m$, $\sigma(i) = \sigma_m(i)$ si $i \in A_m$ es función bien definida y biyectiva.

También por construcción $N_i \simeq N'_{\sigma(i)}$ para $i \in \cup A_m$.

Probaremos que $I = \cup_{m \in \mathbb{N}} A_m$. Sea $i \in I$. Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $N_i(x_r) \neq 0$. Si $i \notin A_{r-1}$, entonces $i \in A'_r = \{j \in I - A_{r-1} : N_j(x_r) \neq 0\}$ y entonces $i \in A_r$. Así, $r \in \cup_{m \in \mathbb{N}} A_m$.

Similarmente, $J = \cup_{m \in \mathbb{N}} B_m$.

□

BIBLIOGRAFÍA

[AF] ANDERSON,F., FULLER,K. , *Rings and categories of Modules*, New York Springer-Verlag Inc. New York (1973)

[B] BASS , *Algebraic K-Theory*. Benjamín (1968).

[CLS] CIBILS,C. , LARRION,F. , SALMERON, L. , *Introducción a la teoría de representaciones de álgebras*. Monografías I.M. , U.N.A.M.

[G] GABRIEL, P. , *Auslander-Reíten sequences and representation-finite algebras.* En Representation Theory I, Proceedings Ottawa (1979).

[DS] DOWBOR,P.,SKCWRONSKI,A. , *Covering techniques for representation - infinite algebras*. Comment.Math.Helvetici. (1986).

[HK] HOFFMAN,K. , KUNZE,R. , *Algebra lineal* Prentece/Hall , International (1981)

[P] DE LA PENA,J.A. *Notas* (1983).

[W] WARFIELD,R.B. , *A Krull-Schmidt Theorem for infinite sums of modules* Proc.Amer.Math.Soc.22 , 460-465 (1969).