Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGORITMO SIMPLEX REVISADO

UN ENFOQUE PEDAGOGICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A N:

Alejandra Méndez Mendoza

Noé Moacyr Vallejo González

MEXICO, D. F. 1988

INTRODUCCION

El objetivo del presente trabajo es el de realizar un sistema que resuelva problemas de Programación Lineal (P.P.L.), haciendo uso del Algoritmo Simplex Revisado y de números racionales, ésto último con el fin de no incurrir en errores debido al truncamiento o redondeo de cifras.

En el sistema se considera la posibilidad de diferentes formatos para las salidas intermedias. Como ejemplo de lo anterior tenemos:

Exhibición de variables con sus correspondientes valores, coeficientes de costo reducido, valor de la función objetivo, variable que sale y variable que entra a la base.

Además el usuario puede interactuar con el sistema introduciendo una base inicial y/o eligiendo las variables a entrar a la base, entre las posibles.

Desarrollamos la teoría general que nos permitiera justificar los pasos a seguir en los algoritmos Simplex y Simplex Revisado, así como una comparación entre ellos.

Se resuelven una serie de problemas de P.P.L., los cuales cumplen ciertas caracteristicas, con y sin la ayuda del sistema con el fin de comparar resultados.

Por último se anexa el diagrama de flujo correspondiente al sistema diseñado.

INDICE

CAPITULO III

Método Simplex Revisado

CAPITULO IV

CAPTIULO V

Ejemplos

CAPITULO I.

¿Qué es la Programación Lineal?

En este capítulo veremos en que consiste la Programación Lineal, las diferentes formas en que se puede escribir un problema de Programación Lineal, y haremos mención de algunos métodos para resolver este tipo de problemas.

Programación Lineal.

La Programación Lineal trata con el problema de optimizar una función lineal de varias variables sujeta a restricciones lineales del tipo desigualdad ó igualdad. Es el más simple y extensamente usado de una larga clase de modelos llamados de Programación Matemática, en los cuales se tiene una función a optimizar, sujeta a ciertas restricciones que pueden ser ecuaciones o desigualdades algebraicas, y las variables siempre están restringidas a ser no negativas.

Además la Programación Lineal es una de las más importantes técnicas de optimización desarrollada en el campo de la Investigación de Operaciones.

Forma General de un problema de Programación Lineal (P.P.L).

La función a maximizar o minimizar llamada *función objetivo* (z) tiene la forma

$$z = f(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) = c^1x_1 + c^2x_2 + \ldots\ldots + c^nx_n$$

donde c^j $\forall j \in \{1,2,\ldots n\}$ es constante dada, llamada *coeficiente de costo* correspondiente a la variable x_j

Se tienen m restricciones, $r_1, r_2, \ldots, r_m$ las cuales pueden ser del tipo:

$$r_i : a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + \ldots\ldots + a_i^n x_n \leq b_i$$

ó

$$r_i : a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + \ldots\ldots + a_i^n x_n \geq b_i$$

ó

$$r_i : a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + \ldots\ldots + a_i^n x_n = b_i$$

con a_i^j y b_i constantes dadas $\forall j \in \{1,2,\ldots,n\}$ y $\forall i \in \{1,2,3,\ldots,m\}$ donde a_i^j es el *coeficiente* en la restricción i asignado a la variable x_j y b_i es el *término independiente* de la restricción i.

Tenemos una condición extra que es la de no-negatividad de las variables, es decir:

$$x_j \geq 0 \ \forall j \in \{1,2,\ldots n\}.$$

Usando la relación $\min(f(x)) = -\max(-f(x))$, en la cual $f(x)$ representa la función a optimizar, el problema siempre puede ser expresado en la forma de un problema de maximización (o minimización). Dicho ésto, siempre trabajaremos maximizando la función objetivo.

Entonces todo P.P.L es de la forma:

Maximizar $z = c^1 x_1 + c^2 x_2 + \ldots\ldots + c^n x_n$

Sujeto a las condiciones
(S.C.)

$$a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots\ldots + a_1^n x_n \leq b_1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_k^1 x_1 + a_k^2 x_2 + \ldots\ldots + a_k^n x_n \leq b_k$$

$$a_{k+1}^{1}x_1+a_{k+1}^{2}x_2+\ldots\ldots+a_{k+1}^{n}x_n\geq b_{k+1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_l^{1}x_1+a_l^{2}x_2+\ldots\ldots\ldots+a_l^{n}x_n\geq b_l$$

$$a_{l+1}^{1}x_1+a_{l+1}^{2}x_2+\ldots\ldots+a_{l+1}^{n}x_n= b_{l+1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_m^{1}x_1+a_m^{2}x_2+\ldots\ldots\ldots+a_m^{n}x_n= b_m$$

$$x_j\geq 0 \ \forall j\in\{1,..,n\}$$

Si tenemos una restricción del tipo $\geq$, la podemos multiplicar por -1 para convertirla al tipo $\leq$.

Definición: Una *variable de holgura* es aquella que se suma (o resta) a una desigualdad $\leq$ (ó $\geq$) para convertirla en ecuación, y es no negativa.

Usando variables de holgura, la Forma General de un P.P.L. da como resultado la:

Forma Estándar de un P.P.L.

$$\text{Max } z = c^1x_1+c^2x_2+\ldots\ldots\ldots+c^nx_n$$

s.c.

$$a_1^{1}x_1+a_1^{2}x_2+\ldots\ldots+a_1^{n}x_n= b_1$$

$$a_2^{1}x_1+a_2^{2}x_2+\ldots\ldots+a_2^{n}x_n= b_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_m^{1}x_1+a_m^{2}x_2+\ldots\ldots+a_m^{n}x_n= b_m$$

$$x_j\geq 0 \ \forall j\in\{1,2,\ldots,n\}$$

Otro modo de escribir un P.P.L. es la Forma Canónica, donde todas sus restricciones son desigualdades del mismo tipo, supongamos sin pérdida de generalidad, de la forma $\leq$.

Forma Canónica de un P.P.L.

$$\text{Max } z = c^1x_1+c^2x_2+\ldots\ldots+c^nx_n$$

s.c.

$$\begin{array}{l} a_1^1x_1+a_1^2x_2+\ldots\ldots+a_1^nx_n \leq b_1 \\ a_2^1x_1+a_2^2x_2+\ldots\ldots+a_2^nx_n \leq b_2 \\ \ldots\ldots \qquad\qquad \ldots \\ \ldots\ldots \qquad\qquad \ldots \\ a_m^1x_1+a_m^2x_2+\ldots\ldots+a_m^nx_n \leq b_m \\ x_j \geq 0 \ \forall j \in \{1,2,\ldots,n\} \end{array}$$

Sean:

$$A=\begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & & & & \ldots \\ \ldots & & & & \ldots \\ a_m^1 & a_m^2 & a_m^3 & \ldots & a_m^n \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c^1 & c^2 & c^3 & \ldots & c^n \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Tanto la Forma Estándar como la Forma Canónica las podemos expresar como producto de matrices (A,b,C,X) dando como resultado la :

Forma Matricial de un P.P.L.

$$\begin{cases} \text{Max } z = CX \\ \text{S.c.} \\ \quad AX = b \\ \quad X \geq 0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} \text{Max } z = CX \\ \text{S.c.} \\ \quad AX \leq b \\ \quad X \geq 0 \end{cases}$$

Nota: Siempre se considerarán las siguientes dimensiones para las matrices:

$$A_{mxn},\ X_{nx1},\ b_{mx1},\ C_{1xn}$$

Métodos para resolver un P.P.L.

Los métodos más comunes para resolver un P.P.L. son los siguientes:

1. Método de Graficación.
2. Método Simplex.
3. Método Dual Simplex.
4. Método Simplex Revisado.

En éste trabajo se desarrollará el Método Simplex Revisado, lo cual se hará en los siguientes capítulos.

CAPITULO II.

Definiciones y Propiedades Fundamentales de la Programacion Lineal.

En este capítulo veremos las definiciones y proposiciones necesarias para el desarrollo del Algoritmo Simplex Revisado.

Definición 1. $X \in \mathbb{R}^n$ es una *solucion* si $AX \leq b$ (ó $AX = b$).

Definición 2. $X \in \mathbb{R}^n$ es *solución factible* si es solución y además $X \geq 0$.

Definición 3. $X^* \in \mathbb{R}^n$ es *solución factible optima* si es una solución factible y además $CX^* \geq CX$ $\forall X \in \mathbb{R}^n$ solución factible.

Definición 4. Un conjunto C es convexo si $\forall X, Y \in C$ existe un segmento de recta ℓ contenido en C que une a X con Y.

Proposición 1. El conjunto de soluciones factibles del P.P.L. es convexo.

Dem. Sea C el conjunto de soluciones factibles.

Si $C = \emptyset$ ó C tiene un solo elemento entonces C es convexo.

Si no, sean X y $Y \in C$.

Consideremos $\lambda X + (1-\lambda)Y$ con $0 \leq \lambda \leq 1$, la parametrización del segmento de recta ℓ.

Por demostrar que ℓ está contenida en C

$$A[\lambda X + (1-\lambda)Y] = A[\lambda X] + A[(1-\lambda)Y] = \lambda A[X] + (1-\lambda)A[Y] \leq$$
$$\leq \lambda b + (1-\lambda)b = b$$
$$\therefore A[\lambda X + (1-\lambda)Y] \leq b$$

Además $(1-\lambda) \geq 0, X \geq 0, Y \geq 0, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda X + (1-\lambda)Y \geq 0$

$$\therefore \lambda X + (1-\lambda)Y \in C \blacksquare$$

Definición 5. $X \in C$ es un *punto extremo* del conjunto convexo C si no existen X^1 y $X^2 \in C$, $X^1 \neq X^2$ tales que $X = (X^1+X^2)/2$

Definición 6. Una *base* de un P.P.L. es un cojunto de columnas de A; $A^{i1}, A^{i2}, \ldots, A^{ik}$ tales que

i) $\{A^{i1}, A^{i2}, \ldots, A^{ik}\}$ es linealmente independiente.
ii) Cualquier otra columna de A se puede escribir como combinación lineal de "ellas".

Sea $I=\{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_m\}$ entonces denotamos a una base como A^I, submatriz de A. Como A^I es un cojunto de columnas linealmente independientes se asegura que la matriz inversa de A^I, $(A^I)^{-1}$, existe

Observación: Se puede tener una nueva base si se intercambia una columna A^k, fuera de la base por una A^l, que está en la base, solamente si $\lambda_l \neq 0$ donde $A^k = \sum_{i \in I} \lambda_i A^i$.

Definición 7. $X \in \mathbb{R}^n$ es *solución básica* asociada a la base A^I, si es una solución y además

$$A^I X_I = b$$
$$X_J = 0$$

con A^I una base y $J=\{1,2,\ldots,n\} \setminus I$.

Definición 8. $X \in \mathbb{R}^n$ es una *solución básica factible* si es solución básica y además $X_I \geq 0$.

Definición 9. A^I es una *base factible* si es base y

$$A^I X_I = b$$
$$X_I \geq 0$$
$$X_J = 0$$

Proposición 2. Sea X una solución básica asociada a una base A^I, tal que $X\geq 0$.

Entonces X es un punto extremo de C.

Dem. Supongamos que X no es un punto extremo de C, es decir, $\exists$ X^1, X^2 soluciones factibles tales que $X=(X^1+X^2)/2$ con $X^1\neq X^2$.

Como $X^1, X^2\in C$ se cumple que:

$$AX^1=b \qquad y \qquad AX^2=b$$
$$X^1\geq 0 \qquad\qquad X^2\geq 0$$

Además :

$$AX=b \qquad y \qquad A^I X_I=b$$
$$X\geq 0 \qquad\qquad X_I\geq 0$$

$$\text{Como } X=(X^1+X^2)/2 \Rightarrow X_J=(X_J^{\,1}+X_J^{\,2})/2$$

$$\text{pero } X_J=0 \Rightarrow 0=(X_J^{\,1}+X_J^{\,2})/2$$

$$\text{pero } X_J^{\,i}\geq 0 \ i\in\{1,2\} \Rightarrow X_J^{\,1}=X_J^{\,2}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} A^I X_I^{\,1}=b \\ A^I X_I^{\,2}=b \end{array}\right\} \Rightarrow A^I(X_I^{\,1}-X_I^{\,2})=0$$

$$\Rightarrow \sum_{i\in I}(x_i^{\,1}-x_i^{\,2})A^i=0$$

como las columnas de A^I son linealmente independientes

$$\Rightarrow (x_i^1 - x_i^2)=0 \Rightarrow x_i^1 = x_i^2 \ \forall i.$$

$\therefore$ X es un punto extremo de C.■

Definición 10: x_i es una *variable básica* (respecto a una base A^I) si $i \in I$.

Definición 11: x_j es una *variable no básica* (o secundaria) si $j \in J$ con $J=N\setminus I$ y $N=\{1,2,\ldots,n\}$.

Definición 12: X_I es *solución básica degenerada* si existe al menos una $i \in I$ tal que $X_i=0$.

Definición 13: Dado un conjunto convexo, un vector d distinto de cero, se llama *dirección del conjunto* si, para cada x_0 en el conjunto, el rayo $\{x_0+\lambda d \ :\lambda \geq 0\}$ también pertenece al conjunto. Si el conjunto es acotado, entonces no tiene direcciones.

Definición 14: Una *dirección extrema* de un conjunto convexo es una dirección del conjunto que no se puede representar como una combinación lineal positiva de dos direcciones distintas del conjunto.

d_1 y d_2 son distintos, o no equivalentes, si d_1 no se puede representar como múltiplo de d_2.

Observaciones:

- Una combinación lineal convexa es una combinación lineal que cumple:

a) Los coeficientes son mayores o iguales a cero.

b) La suma de los coeficientes es uno.

- Sea $C = \{x \ :Ax=b, \ x\geq 0\}$ un conjunto no vacío. Entonces, el conjunto de puntos extremos es no vacío y tiene un número finito de puntos, digamos $x_1,x_2,\ldots,x_k$.

Más aún, el conjunto de direcciones extremas es vacío si, y sólo si, C es acotado. Si C es no acotado, entonces el conjunto de direcciones extremas es no vacío y tiene un número finito de vectores, por decir algo $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_l$. Asimismo, $x \in C$ si, y sólo si, x se puede representar como combinación lineal convexa de $x_1, \ldots, x_k$ más una combinación lineal no negativa de $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_l$, es decir,

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{x}_j + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \mathbf{d}_j$$

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$$

donde $\lambda_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots,k$

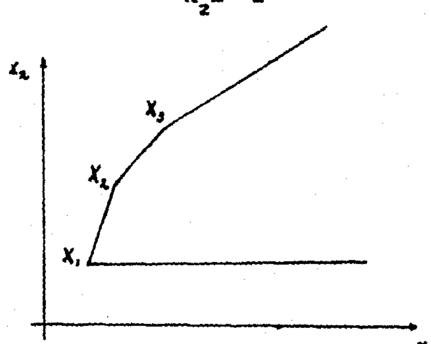
$\mu_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots,l$

Ejemplo:

Considérese la región C definida por las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 &\leq -2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ -x_2 &\leq -2 \end{aligned}$$

Gráficamente tenemos:



Resolviendo los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} -3x_1 + x_2 &= -2 \\ -x_2 &= -2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} -3x_1 + x_2 &= -2 \\ -x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 &= 8 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Se obtienen los puntos extremos X_1, X_2 y X_3 respectivamente.

$$\therefore\ X_1 = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$ es una dirección de C si, sólo si, $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\forall X_0 \in C$, $(X_0 + \eta d) \in C$, $\forall \eta \geq 0$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 + \eta(-3d_1 + d_2) &\leq -2 \quad (1) \\ -x_1 + x_2 + \eta(-d_1 + d_2) &\leq 2 \quad (2) \\ -x_1 + 2x_2 + \eta(-d_1 + 2d_2) &\leq 8 \quad (3) \\ -x_2 + \eta(d_2) &\leq -2 \quad (4) \qquad \forall \eta \geq 0 \end{aligned}$$

Las desigualdades (1), (2), (3) y (4) deben cumplirse para x_1 y x_2 fijos y $\forall \eta \geq 0$

Por lo tanto:

En (1) $\qquad -3d_1 + d_2 \leq 0 \Rightarrow d_2 \leq 3d_1$

$$
\begin{array}{ll}
\text{En (2)} & -d_1 + d_2 \le 0 \Rightarrow d_2 \le d_1 \\
\text{En (3)} & -d_1 + 2d_2 \le 0 \Rightarrow 2d_2 \le d_1 \\
\text{En (4)} & -d_2 \le 0 \Rightarrow d_2 \ge 0
\end{array}
$$

Entonces **d** es dirección si , sólo si

$$
\begin{gathered}
d_1 \ge 0 \text{ y } d_2 \ge 0 \\
d_2 \le 3d_1 \\
d_2 \le d_1 \\
2d_2 \le d_1
\end{gathered}
$$

Sean $\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ las cuales satisfacen las desigualdades anteriores.

$\therefore$ $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ son direcciones y son extremas, ya que no se pueden representar como una combinación lineal positiva de dos direcciones distintas del conjunto.

Sea $X = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \in C$. Entonces X se puede representar como

$$\mathbf{X} = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \mu_1 \mathbf{d}_1 + \mu_2 \mathbf{d}_2 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 4/3 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De donde

$$
\begin{gathered}
4 = 4/3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + \mu_1 + 2\mu_2 \\
3 = 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 6\lambda_3 + 0\mu_1 + \mu_2 \\
\text{Si } \lambda_1 = \lambda_2 = 1/2 \text{ y } \lambda_3 = 0 \Rightarrow \mu_1 = 7/3 \text{ y } \mu_2 = 0 \\
\therefore \mathbf{X} = 1/2\ \mathbf{X}_1 + 1/2\ \mathbf{X}_2 + 7/3\ \mathbf{d}_1
\end{gathered}
$$

Proposición 3; **Si un P.P.L. tiene solución factible óptima entonces existe al menos un punto extremo de la región de soluciones factibles, C, donde la función objetivo alcanza su óptimo.**

Dem. Supongamos que tenemos el siguiente problema en forma matricial

$$\text{Max } Z = cx$$

s.c.

$$Ax=b$$
$$x\geq 0$$

Sean $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ los puntos extremos de C y $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_l$ las direcciones extremas de C. Por la observación anterior sabemos que todo $x \in C$ lo podemos representar como

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d_j$$

donde

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$$
$$\lambda_j \geq 0 \qquad j= 1,2,\ldots,k$$
$$\mu_j \geq 0 \qquad j= 1,2,\ldots,l$$

Por lo tanto, el problema de programación lineal se puede transformar en un problema de las variables $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$, el cual se puede expresar como

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (cx_j) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j (cd_j)$$

S.c.

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$$
$$\lambda_j \geq 0 \qquad j= 1,2,\ldots,k$$
$$\mu_j \geq 0 \qquad j= 1,2,\ldots,l$$

Dado que las μ_j se pueden hacer arbitrariamente grandes, el máximo no existe (es infinito) si $cd_j>0$ para alguna $j\in\{1,2,\ldots,l\}$. Si $cd_j\leq 0$ $\forall j\in\{1,2,\ldots,l\}$ entonces la correspondiente μ_j se puede tomar igual a cero. Ahora bien, para maximizar $\sum_{j=1}^{k}(cx_j)\lambda_j$ sobre las variables $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ tales que $\lambda_j\geq 0$ para $j\in\{1,2,\ldots,k\}$ y $\sum_{j=1}^{k}\lambda_j=1$, simplemente se determina el máximo cx_j, por decir algo, cx_p, y se toma $\lambda_p=1$ y todas las otras λ_j iguales a cero.

Por lo que, la solución óptima del problema es finita si, y solo si, $cd_j\leq 0$ para todas las direcciones extremas. Además, si este es el caso, se puede entonces determinar el punto máximo seleccionando el máximo valor objetivo entre todos los puntos extremos. Esto demuestra que si existe una solución óptima, debe encontrarse un punto extremo en donde alcanza su óptimo.
Si el máximo cx_j ocurre en más de un índice entonces cada punto extremo correspondiente es un punto óptimo y cada combinación lineal convexa de estos puntos es una solución óptima. ∎

FORMA EXPLICITA DE UN P.P.L.
Tenemos el siguiente P.P.L., en forma matricial :

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = CX \\ &\text{s.c.} \\ &\qquad AX=b \\ &\qquad X\geq 0 \end{aligned}$$

donde A es una matriz de mxn, con m<n y m columnas linealmente independientes.

Sea A^I una base factible, entonces tenemos:

$$A = \begin{bmatrix} A^I;\ A^J \end{bmatrix} \qquad A^I_{m\times m} \qquad A^J_{m\times(n-m)}$$

$$X = \begin{bmatrix} X_I \\ \vdots \\ X_J \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} C^I;\ C^J \end{bmatrix}$$

$$CX = \begin{bmatrix} C^I;C^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_I \\ \vdots \\ X_J \end{bmatrix} = C^I X_I + C^J X_J = z \qquad (I)$$

$$AX = \begin{bmatrix} A^I;A^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^I \\ \vdots \\ X^J \end{bmatrix} = A^I X_I + A_J X^J = b \qquad (II)$$

Premultiplicando (II) por $\left[A^I\right]^{-1}$ obtenemos

$$X_I + \left[A^I\right]^{-1} A^J\ X_J = \left[A^I\right]^{-1} b \qquad (III)$$

Sean

$$Y_I^{\,J} = \left[A^I\right]^{-1} A^J$$

$$\overline{X}_I = \left[A^I\right]^{-1} b$$

Sustituyendo en (III) obtenemos

$$X_I + Y_I^{\,J} X_J = \overline{X}_I \quad \text{equivalentemente}$$

$$X_i + Y_i^{\,J} X_J = \overline{X}_i \qquad i\in I \text{ o bien}$$

$$x_i + \sum_{j\in J} y_i^j x_j = \bar{x}_i \qquad i\in I$$

$$z = C^I X_I + C^J X_J = C^I(\bar{X}_I - Y_I^J X_J) + C^J X_J = C^I \bar{X}_I + (C^J - C^I Y_I^J) X_J \qquad \text{(IV)}$$

Sean

$$z_0 = C^I \bar{X}_I \qquad y \qquad z^J = C^I Y_I^J$$

De (IV) obtenemos

$$z = z_0 + (C^J - z^J) X_J = z_0 + \sum_{j\in J} (c^j - z^j) x_j$$

Definición 15: $c^j - z^j$ es el *coeficiente de costo reducido* correspondiente a la variable x_j.

Sea A^I una base, entonces se tiene la:

Forma Explícita de un P.P.L.

$$x_i + \sum_{j\in J} y_i^j x_j = \bar{x}_i \qquad i\in I$$

$$-z + \sum_{j\in J} (c^j - z^j) x_j = -z_0$$

Proposición 4: Sea A^I una base factible. Una condición suficiente para que la solución asociada a A^I sea óptima es que $c^j - z^j \leq 0$.

Dem. Como A^I es una base factible la solución básica X^* asociada a A^I satisface

$$X_I^* = \left(A^I\right)^{-1} b \geq 0$$

$$X_j^* = 0 \ \forall_j \in J$$

$$z = z_o + \sum_{j \in J} (c^j - z^j) x_j^* = z_o$$

Sea X cualquier otra solución factible

$$z = z_o + \sum_{j \in J} (c^j - z^j) x_j \leq z_o$$

ya que $x_j \geq 0$ y $(c^j - z^j) \leq 0 \ \forall_j \in J$ ∎

Proposición 5. Sea A^I una base factible. Sea $k \in J$ tal que $c^k - z^k > 0$ y $Y^k \leq 0$. Entonces existe una clase de soluciones factibles tales que $z \to \infty$ cuando $x_k \to \infty$.

Dem. Considerar la familia de soluciones tales que $x_j = 0$ $\forall_j \in J - \{k\}$

$$x_i + y_i^k x_k = \bar{x}_i \qquad i \in I$$

$$z_o + x_k (c^k - z^k) = z$$

$$z_o + x_k (c^k - z^k) > z_o \qquad \text{para } x_k > 0$$

$$\text{y} \qquad z_o + x_k (c^k - z^k) \to \infty \text{ cuando } x_k \to \infty$$

La clase de soluciones está dada por:

$$x_i = \bar{x}_i - y_i^k x_k \geq \bar{x}_i \geq 0 \ \forall i \in I, \ \forall x_k > 0$$

$$\therefore x_i \geq 0 \ \forall i \in I \ ∎$$

Proposición 6. Sea A^I una base factible.

Sea $k\in J$ tal que $c^k-z^k>0$ y $y_i^k>0$ para alguna $i\in\{1,\dots,m\}$.

Entonces existe una base $A^{I'}$ factible tal que $z_o'\geq z_o$ y donde I e I' difieren en un solo elemento.

Dem.

$$x_i+\sum_{j\in J-\{k\}} y_i^j x_j + y_i^k x_k = \bar{x}_i \qquad i\in I$$

$$-z+\sum_{j\in J-\{k\}} (c^j-z^j)x_j + (c^k-z^k)x_k = -z_o$$

Se desea que los nuevos valores de las variables básicas sigan siendo no negativos cuando el valor de x_k se incremente manteniendo a las demás variables (no básicas) en cero.

$$x_i = \bar{x}_i - y_i^k x_k \qquad i\in I$$

$$z=z_o+(c^k-z^k)x_k$$

Se desea que $x_i\geq 0$ $\forall i\in I$ es decir $\bar{x}_i - y_i^k x_k\geq 0$ $\forall i\in I$

$$\Rightarrow x_k\leq \bar{x}_i/y_i^k \ \forall i\in I$$

Entonces,

para $i\in I$ tal que $y_i^k>0$ tenemos que $x_k\leq \bar{x}_i/y_i^k$

El máximo valor que puede tomar x_k es:

$$\min_{i/y_i^k>0} \left\{ \bar{x}_i / y_i^k \right\}$$

Sea $l \in I$ tal que $\bar{x}_l / y_l^k = \min_{i/y_i^k>0} \left\{ \bar{x}_i / y_i^k \right\}$

Para cualquier valor de x_k entre 0 y $\bar{x}_l / y_l^k$ se tendrán soluciones factibles, se desea el máximo valor de x_k para hacer crecer a z a lo más que se pueda.

$$x_l = \bar{x}_l - y_l^k x_k$$

Si $x_k = \bar{x}_l / y_l^k$ entonces:

$$x_l = \bar{x}_l - y_l^k \left[\bar{x}_l / y_l^k \right] = 0$$

$\therefore$ $x_l = 0$ (en este caso decimos que x_l "sale de la base" y x_k "entra a la base", es decir, A^k reemplaza a A^l en la base)

$\therefore$ Se tiene una nueva solución factible tal que el nuevo valor de z es tal que $z \geq z_0$.

Sea $I' = I \setminus \{l\} \cup \{k\}$.
Por demostrar que $A^{I'}$ es una nueva base factible.
Se sabe que A^I es una base factible $\Rightarrow$ que A^k se puede escribir como combinación lineal de las columnas $\{A^i / i \in I\}$.

$$Y^k = \left[A^I\right]^{-1} A^k \Rightarrow A^I Y^k = A^k \Rightarrow A^k = \sum_{i \in I} y_i^k A^i$$

Como $y_l^k \neq 0$ (>0) se puede intercambiar A^l con A^k.

$\therefore$ $A^{I'}$ es una base ■

Definición 16. La *arista* de una región de soluciones factibles C es el segmento de recta que une dos puntos extremos, tal que ningún punto sobre el segmento es punto medio de otros dos puntos en C que no estén sobre el segmento; en este caso se dice que los dos puntos son vecinos o adyacentes.

Proposición 7. La clase de soluciones factibles generada por incrementar el valor de una variable no-básica y ajustando los valores de las variables básicas en el cambio de una solución básica a la siguiente, corresponde a moverse a lo largo de una arista de la región de soluciones factibles, C.

Dem. Sea $p=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_m;0,\dots,0)$ una solución básica factible y $q=(0;\bar{x}^*_2,\bar{x}^*_3,\dots,\bar{x}^*_m,\bar{x}^*_{m+1};0,\dots,0)$ otra solución básica factible encontrada por reemplazar x_1 en la base por, digamos x_{m+1}. Cualquier punto $u=\lambda p+(1-\lambda)q$, con $0\leq\lambda\leq1$, sobre el segmento de recta que une a p con q tiene $u_{m+2}=u_{m+3}=\dots u_n=0$. Por lo que, si u es el punto medio de 2 puntos p' y q' los cuales están en el conjunto convexo de soluciones factibles, esas componentes de p' y q' deben también anularse. Esto permite expresar a cada una de las primeras m componentes de p' y q' como una función lineal de el valor de la $(m+1)$-ésima componente de p' y q', respectivamente. En efecto, para cualquier punto $X\in C$ cuyas componentes $x_{m+2}=x_{m+3}=\dots=x_n=0$ y x_{m+1} es arbitrario, tenemos

(1) $$x_i=\bar{x}_i-y_i^{m+1}x_{m+1} \quad i\in\{1,2,\dots,m\}$$

en particular, tenemos para

$q=(0,\bar{x}^*_2,\bar{x}^*_3,\dots,\bar{x}^*_m,\bar{x}^*_{m+1},0,\dots,0)$ que

(2) $$\bar{x}^*_i=\bar{x}_i-y_i^{m+1}\,\bar{x}^*_{m+1} \quad i\in\{1,2,\dots,m\}$$

multiplicando (2) por $\lambda=x_{m+1}/x^*_{m+1}$ y restando de (1) obtenemos:

$$x_i=\lambda\bar{x}_i^*+(1-\lambda)\bar{x}_i \qquad (i=1,2,3,\ldots,m)$$

$$x_{m+1}=\lambda\bar{x}^*_{m+1}+(1-\lambda)0$$

$$x_j=\lambda 0+(1-\lambda)0 \qquad (j=m+2,\ldots,n)$$

Esto demuestra que cualesquiera dos puntos. **p'** y **q'** en C, cuyo punto medio es **u**, con **u** en el segmento de recta que une a **p** con **q**, también están en la recta que une a **p** y **q**. La suposición de que **p** y **q** son puntos extremos implica que $0\leq\lambda\leq1$, por lo que **p'** y **q'** están en el segmento de recta que une a **p** con **q**, con lo cual se prueba que el segmento de línea que une a **p** y **q** forma una arista.∎

CAPITULO III.

Método Simplex Revisado.

En este capítulo describiremos el Método Simplex y el Método Simplex Revisado. Además se mencionarán las ventajas que tiene el utilizar el segundo de los métodos.

Método Simplex.

Se tiene el siguiente P.P.L.

$$\begin{aligned} &\text{Max } z=CX \\ &\text{S.c.} \\ &\qquad AX=b \\ &\qquad X\geq 0 \end{aligned}$$

(b_{mx1}, X_{nx1}, A_{mxn}, rango(A)=m, m<n y A^I base factible).

Definición. Una *tabla simplex* es un arreglo que consta de m+1 renglones y n+1 columnas el cual se divide en tres arreglos a su vez, uno de ellos de dimensión (mxn) contiene las y_i^j $\forall i\in\{1,..,m\}$ y $\forall j\in\{1,..,n\}$, otro, de dimensión (mx1) que contiene los valores de x_i $\forall i\in I$ y el último de dimensión (1x(n+1)) que contiene a c^j-z^j $\forall j\in\{1,..,n\}$ y el valor de $-z$. La tabla simplex queda de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c|c|c} & x_1, x_2, \ldots, x_m & \\ \hline x_{i1} & & \\ \vdots & \left[A^I\right]^{-1}A & \left[A^I\right]^{-1}b=\bar{X}_I \\ x_{im} & & \\ \hline -z & C^J-C^I(A^I)^{-1}A & -C_I^I\bar{X}_I \end{array}$$

A continuación se mencionarán los pasos a seguir en el Método Simplex teniendo el P.P.L. mencionado anteriormente.

0. Se tiene una base inicial factible A^I y la tabla simplex asociada. Ir a (1).

1. Sea $J=\left\{j\in J/(c^j-z^j)>0\right\}$

   -Si $J=\emptyset$, es decir, $(c^j-z^j)\leq 0$ $\forall j\in J$, se tiene una solución factible óptima. Terminar.

   -Si $J\neq\emptyset$ ir a (2).

2. Examinar Y^j $\forall j\in J$.

   - Si existe $k\in J$ tal que $Y^k\leq 0$, entonces existe una clase de soluciones factibles tales que $z\to\infty$ cuando $x_k\to\infty$.
   - Si no, ir a (3).

3. Sea $k\in J$ tal que $(c^k-z^k)=\max\limits_{j\in J}\left\{c^j-z^j\right\}$. Ir a (4).

4. Calcular el máximo valor permitido para x_k (conservando la factibilidad de la solucion).

   Se escoge $l\in I$ tal que $\bar{X}_l/y_l^k=\min\limits_{i/y_i^k>0}\left\{\bar{X}_i/y_i^k\right\}$. Ir a (5).

5. Con $y_l^k(>0)$ como elemento pivote, escribir la tabla simplex asociada a la nueva base $A^{I'}$. $I'=\{k\}\cup I\setminus\{l\}$. Ir a (1).

Ejemplo:

$$\text{Max } z = -x_1-2x_2-x_4-x_5+5x_6$$

S. c.

$$\begin{aligned}
6x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5+2x_6+x_7 &= 4\\
2x_1-1/3x_2-x_3+x_4+1/2x_5+x_8 &= 3\\
3x_1-x_2+2x_3+4x_4+1/2x_5+x_6+x_9 &= 2\\
x_i\geq 0 \ \forall i\in\{1,\dots,9\}
\end{aligned}$$

Sea $I_1=\{7,8,9\}$ obteniendo la siguiente tabla simplex:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
x_7	6	−2	1	−1	0	2	1	0	0	4
x_8	2	−1/3	−1	1	1/2	0	0	1	0	3
x_9	3	−1	2	4	1/2	1^*	0	0	1	2
$-z$	−1	−2	0	−1	−1	$\underline{5}$	0	0	0	0

la variable que sale es x_9, y entra x_6.

$$\therefore\ I_2=\{7,8,6\}$$

obtenemos la siguiente tabla simplex:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
x_7	0	0	-3	-9	4	0	1	0	-2	0
x_8	2	-1/3	-1	1	1/2	0	0	1	0	3
x_5	3	-1	2	4	1/2	1	0	0	1	2
$-z$	-16	$\underline{3}$	-10	-21	-7/2	0	0	0	-5	0

$\therefore$ se tiene una clase de soluciones factibles tales que $z \to \infty$ cuando $x_2 \to \infty$.

Método Simplex Revisado.

El problema a resolver es del tipo

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = CX \\ &\text{S.C.} \\ &\qquad AX = b \\ &\qquad X \geq 0 \end{aligned}$$

($b_{m \times 1}$, $X_{n \times 1}$, $A_{m \times n}$, rango(A)=m, m<n y A^I base factible).

Este problema es equivalente a

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = CX \\ &\text{S.C.} \\ &\qquad -z + CX = 0 \\ &\qquad AX = b \\ &\qquad X \geq 0 \\ &\qquad -z \text{ S.R.S.}^{*} \end{aligned}$$

y le llamaremos *problema ampliado.*

*S.R.S.= sin restricción de signo.

Las variables son $-z, X$.

Sean:

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} 1 & \vdots & C \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & A \end{bmatrix} \qquad \bar{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ b \end{bmatrix}$$

Una base del problema ampliado es de la forma

$$\bar{A}^I=\begin{bmatrix} 1 & \vdots & C^I \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & A^I \end{bmatrix}$$

donde

$$\left(\bar{A}^I\right)^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & \vdots & -C^I\left(A^I\right)^{-1} \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & \left(A^I\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

La solución básica asociada a la base $\bar{A}^I$ es

$$\bar{\bar{X}}_I=\left(\bar{A}^I\right)^{-1}\bar{b}=\begin{bmatrix} 1 & \vdots & -C^I\left(A^I\right)^{-1} \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & \left(A^I\right)^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ --- \\ b \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}^j=\begin{bmatrix} c^j \\ \cdot \\ A^j \end{bmatrix} \qquad \bar{Y}^j=\left(\bar{A}^I\right)^{-1}\bar{A}^j=\begin{bmatrix} c^j-z^j \\ \cdots \\ Y^j \end{bmatrix}$$

Nótese que multiplicando el primer renglón de $\left[\overline{A}^{I}\right]^{-1}$ por todos los $\overline{A}^{j}$ encontramos $c^{j}-z^{j}$.

Dado lo anterior ahora podemos enunciar los pasos del Algoritmo Simplex Revisado.

0. Sea $\left[\overline{A}^{I}\right]^{-1}$ la inversa de una base inicial factible del problema ampliado. Calcular $\left[\overline{A}^{I}\right]^{-1}\overline{b} = \overline{\overline{X}}_{I}$. Ir a (1).

1. Calcular los coeficientes de costo reducido multiplicando el primer renglón de $\left[\overline{A}^{I}\right]^{-1}$ por los vectores $\overline{A}^{j}$ $j \in J$.

   Sea $c^{k}-z^{k} = \max\limits_{j \in J} \left\{c^{j}-z^{j}\right\}$.

   - Si $c^{k}-z^{k} \leq 0$, terminar. Se tiene una solución óptima
   - Si no, ir a (2)

2. Se obtiene Y^{k} multiplicando los renglones restantes de $\left[\overline{A}^{I}\right]^{-1}$ por $\overline{A}^{k}$. Ir a (3).

3. - Si $Y^{k} \leq 0$ hay una clase de soluciones factibles tales que $z \to \infty$ cuando $x_{k} \to \infty$
   - Si no, se determina $l \in I$ tal que

$$\overline{x}_{l}/y_{l}^{k} = \min_{i/y_{i}^{k}>0} \left\{\overline{x}_{i}/y_{i}^{k}\right\}$$

   Sea $\overline{A}^{I'}$ la nueva base con $I' = I \cup \{k\} \setminus \{l\}$. Calcular $\left[\overline{A}^{I'}\right]^{-1}$ y $\overline{\overline{X}}_{I'}$. Regresar a (1)

Sabemos por la proposición 6 que las bases factibles $\bar{A}^{I}$ y $\bar{A}^{I'}$ difieren en una columna, por lo que utilizaremos la inversa de $\bar{A}^{I}$ para calcular la de $\bar{A}^{I'}$. Para esto haremos uso del Método de la Premultiplicación para calcular la inversa de una matriz.

Método de la Premultiplicación.

$\left[A^{I'}\right]^{-1}$ se calculará de la siguiente manera:

La base A^{I} está compuesta por las columnas $(A^{I})^{1},(A^{I})^{2},\ldots,(A^{I})^{m}$. Supóngase ahora que la columna A^{k} $k\in J$ reemplaza a $(A^{I})^{l}$.

Entonces

$$A^{I'}= \left[(A^{I})^{1},\ldots,(A^{I})^{l-1},A^{k},(A^{I})^{l+1},\ldots,(A^{I})^{m}\right]$$

sabemos que $A^{k}=A^{I}Y^{k}$ y $(A^{I})^{i}=A^{I}e^{i}$, con e^{i} un vector columna de dimensión m, que consta de ceros excepto en la i-ésima posición donde su valor es igual a uno.

De aquí
$$A^{I'}=\left[(A^{I})e^{1},\ldots,(A^{I})Y^{k},\ldots,(A^{I})e^{m}\right]$$

$$= A^{I}(e^{1},\ldots,e^{l-1},Y^{k},e^{l+1},\ldots,e^{m}) = A^{I}T$$

con $\quad T =(e^{1},\ldots,e^{l-1},Y^{k},e^{l+1},\ldots,e^{m})$ y $y_{l}^{k}>0$

$\Rightarrow$

$$(A^{I'})^{-1}= (A^{I}T)^{-1}= T^{-1}(A^{I})^{-1} \qquad \text{sea } E = T^{-1}$$

donde
$$E=(e^{1},e^{2},\ldots,\underset{\substack{\uparrow \\ l\text{-ésima posición}}}{\eta},\ldots,e^{m})$$
y

$$\eta=\begin{bmatrix} -y_{i1}^{k}/\ y_{l}^{k} \\ -y_{i2}^{k}/\ y_{l}^{k} \\ \vdots \\ 1/\ y_{l}^{k} \\ \vdots \\ -y_{im}^{k}/\ y_{l}^{k} \end{bmatrix}$$

Se observa que

$$ET=\left[e^{1},e^{2},\dots,e^{l-1},\eta\ ,e^{l+1},\dots,e^{m}\right]\ \left[e^{1},e^{2}\dots,e^{l-1},Y^{k},e^{l+1},\dots,e^{m}\right]=$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0\dots0 & -y_{i1}^{k}/\ y_{l} & 0\dots0 \\ 0 & 1\dots0 & -y_{i2}^{k}/\ y_{l}^{k} & 0\dots0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0\dots0 & 1/\ y_{l}^{k} & 0\dots0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0\dots0 & -y_{im}^{k}/\ y_{l}^{k} & 0\dots1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0\dots0 & y_{i1}^{k} & 0\dots0 \\ 0 & 1\dots0 & y_{i2}^{k} & 0\dots0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0\dots0 & y_{l}^{k} & 0\dots0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0\dots0 & y_{im}^{k} & 0\dots1 \end{bmatrix}$$

$$=I_{m\times m}$$

Por lo que $\left(A^{I}\right)^{-1}=E\ \left(A^{I}\right)^{-1}$

Ejemplo:

$$\text{Max } z = -x_1 - 2x_2 - x_4 - x_5 + 5x_6$$

S.c.

$$\begin{aligned}
6x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + 2x_6 + x_7 &= 4\\
2x_1 - 1/3x_2 - x_3 + x_4 + 1/2x_5 + x_8 &= 3\\
3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 1/2x_5 + x_6 + x_9 &= 2\\
x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, 9\}
\end{aligned}$$

$$I_1 = \{7,8,9\}$$

$$\bar{A}^{I_1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left(\bar{A}^{I_1}\right)^{-1}$$

$$\bar{X}_{I_1} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 4 \\ 3 \\ 2 \end{array}\right] \leftarrow \text{valor de } -z.$$

$$J = \{1,2,\ldots,6\}$$

c.c.r. asociados a:

$$\left[\left(\bar{A}^{I_1}\right)\right]_1^{-1} (\bar{A}^J) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 5 \\ 6 & -2 & 1 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1/3 & -1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\max_{\forall j \in J} \{c^j - z^j\} = c^6 - z^6 = 5$$

$\therefore$ **la variable que entra es** x_6

$$Y^{\sigma}=\left(A^{I_1}\right)^{-1}(A^{\sigma})=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\min_{i/Y_i^{\sigma}>0}\left\{X_i/Y_i^{\sigma}\right\}=2$$

$\therefore$ **la variable que sale es x_9**

$$I_2=\{7,8,6\}$$

$$\bar{A}^{I_2}=\left[\begin{array}{c|ccc}1&0&0&5\\\hline 0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\left(\bar{A}^{I_2}\right)^{-1}=\left[\begin{array}{c|ccc}1&0&0&-5\\\hline 0&1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\bar{X}_{I_2}=\left[\begin{array}{c}-10\\\hline 0\\3\\2\end{array}\right]\leftarrow \text{valor de -z.}$$

$$\left[\left(\bar{A}^{I_2}\right)\right]_1^{-1}(\bar{A}^{J})=\begin{bmatrix}1&0&0&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2&0&-1&-1&0\\6&-2&1&-1&5&0\\2&-1/3&-1&1&1/2&0\\3&-1&2&4&1/2&1\end{bmatrix}=$$

c.c.r.
asociados a:

$$\begin{array}{cccccc}x_1&x_2&x_3&x_4&x_5&x_9\\\end{array}$$
$$\begin{bmatrix}-16&3&-10&-21&-7/2&-5\end{bmatrix}$$

$$\max_{\forall j \in J} \{c^j - z^j\} = c^2 - z^2 = 3$$

$\therefore$ la variable que entra es x_2

$$Y^2 = \left(A^{I_2}\right)^{-1} (A^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1/5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Como $Y^2 \leq 0$ y $c^2 - z^2 > 0$ se tiene una clase de soluciones factibles tales que $z \to \infty$ cuando $x_2 \to \infty$.

Ventajas del Algoritmo Simplex Revisado sobre el Algoritmo Simplex.

Analizando el ejemplo que se resolvió utilizando los dos métodos podemos mencionar las siguientes ventajas del Método Simplex Revisado sobre el Método Simplex:

1) El número de operaciones realizadas en el Simplex Revisado es menor, dado que no se tiene que calcular y_i^j $\forall i,j$, únicamente se tiene que calcular y_i^k con $i = \{1,2,\ldots,m\}$ tal que $0 < c^k - z^k = \max_{\forall j} \left\{c^j - z^j\right\}$.

2) Si n es significativamente mayor que m, el Simplex Revisado nos dá un ahorro substancial en memoria de computadora.

CAPITULO IV

En este capítulo se mencionarán las modificaciones hechas al Algoritmo Simplex Revisado para realizar un programa que resuelva problemas de Programación Lineal, el cual no incurra en errores causados por el redondeo de cifras.

4.1 Utilización de racionales en un proceso computacional.

Con el fin de no incurrir en errores debido al truncamiento o redondeo de cifras, ya que toda operación computacional puede dar lugar a un error, que una vez generado puede amplificarse o reducirse en iteraciones subsiguientes, utilizaremos únicamente números de la forma p/q con p y q enteros y q distinto de cero.

Por ejemplo, si queremos invertir una matriz (lo cual es necesario para resolver un P.P.L. por el Algoritmo Simplex Revisado) incurrimos en errores del siguiente tipo:
consideremos las matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 1/7 & 2/7 & 3/7 & 4/7 \\ 1/7 & 3/7 & 6/7 & 10/7 \\ 1/7 & 4/7 & 10/7 & 20/7 \end{bmatrix}$$

las cuales se invierten utilizando las subrutinas DECOMP y SOLVE, obteniendo como resultado

$$
A_1^{-1}=\begin{bmatrix}
24.99234 & -299.8557 & 1049.368 & -1399.039 & 629.5225 \\
-299.85430 & 4797.2400 & -18887.93 & 26861.6.00 & -12590.9000 \\
1049.36200 & -18887.8900 & 79327.05 & -117519.2000 & 56660.1300 \\
-1399.02500 & 26861.4800 & -117519.00 & 179076.4000 & -88139.0500 \\
629.51860 & -12590.8500 & 56660.00 & -88138.9600 & 44069.9000
\end{bmatrix}
$$

$$
A_2^{-1}=\begin{bmatrix}
27.99989 & -41.99971 & 27.99975 & -6.999923 \\
-41.99970 & 97.99932 & -76.99932 & 20.999800 \\
27.99973 & -76.9993 & 69.99939 & -20.999820 \\
-6.99992 & 20.99979 & -20.99982 & 6.999946
\end{bmatrix}
$$

Para poder trabajar con racionales en necesario transformar una matriz M_{mxm} en dos matrices, NM_{mxm} y DM_{mxm} tal que la primera contiene los numeradores de los elementos de M y la segunda los denominadores.

Entonces las matrices A_1 y A_2 dan como resultado a las matrices:

$$
NA_1=\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\quad \text{y} \quad
DA_1=\begin{bmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
5 & 6 & 7 & 8 & 9
\end{bmatrix}
$$

$$NA_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad DA_2 = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

y para poder trabajar con las nuevas matrices es necesario realizar ciertas modificaciones a las subrutinas DECOMP y SOLVE tales como utilizar operaciones básicas de racionales y que den como resultado fracciones irreducibles, logrando ésto mediante el "Algoritmo de Euclides".

Con lo anterior se obtienen las matrices inversas:

$$(A_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & -300 & 1050 & -1400 & 630 \\ -300 & 4800 & -18900 & 26800 & -12600 \\ 1050 & -18900 & 79380 & -117600 & 56700 \\ -1400 & 26880 & -117600 & 179200 & -88200 \\ 630 & -12600 & 56700 & -88200 & 44100 \end{bmatrix}$$

$$(A_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 28 & -42 & 28 & -7 \\ -42 & 98 & -77 & 21 \\ 28 & -77 & 70 & -21 \\ -7 & 21 & -21 & 7 \end{bmatrix}$$

las cuales son las inversas exactas ya que:

$$(A_1)(A_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (A_2)(A_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lo que no sucede si se utiliza lo anterior.

Consideremos las matrices de Hilbert:

$$H_n = \left[a_{ij}^{(n)}\right] \text{ de } n \times n,\ n \geq 2$$

$$\text{en donde } a_{ij}^{(n)} = 1/(i+j-1) \qquad i,j=1,2,\ldots,n$$

Si utilizamos las subrutinas DECOMP y SOLVE con H_n, $n \geq 12$, estas subrutinas detectan singularidad, sin embargo utilizando las subrutinas con aritmética racional se tiene que $\det\left[H_n\right] \neq 0$

Por lo que cada arreglo mencionado en el Algoritmo Simplex Revisado será dividido en dos arreglos, como se explicó anteriormente, y las operaciones correspondientes en cada paso del algoritmo se realizarán con estos arreglos.

4.2 Obtención de una base inicial factible.

Para la obtención de una base inicial factible se consideran dos posibilidades.

i) Que se den m variables, si es posible, candidatas a formar la base inicial factible, para lo cual se verifica que las m variables formen una base y ésta sea factible, en caso de que éstas no formen una base inicial factible, se tiene la opción a introducir otro conjunto de variables si existen más de m, o bien,

ii) La base inicial factible se obtiene mediante una subrutina que es la siguiente:

0) Se tiene un problema de Programación Lineal en cualquiera de sus formas.

(Seguiremos con un ejemplo cada uno de los pasos)

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\ &\text{S.c.} \\ &\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 2 \\ &\quad -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \leq -3 \\ &\quad -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

1) Todas las restricciones del tipo $\geq$ se multiplican por -1

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\ &\text{S.c.} \\ &\quad -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 \leq -2 \\ &\quad -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \leq -3 \\ &\quad -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

2) Las restricciones de igualdad con término independiente negativo se multiplican por -1.

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\ &\text{S.c.} \\ &\quad -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 \leq -2 \\ &\quad -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \leq -3 \\ &\quad 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

3) A cada restricción del tipo $\leq$ se le agrega una variable de holgura.

$$\text{Min } z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4$$

S.c.

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 + h_1 &= -2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + h_2 &= -3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, h_1, h_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

4) Si se tienen términos independientes negativos se toma el mínimo de éstos, se multiplica la restricción por -1 y se le suma a las restricciones con término independiente negativo.

La segunda restricción tiene el mínimo término independiente negativo, por lo que se multiplica por -1 y obtenemos

$$2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 - h_2 = 3$$

sumándola a la primera restricción el problema queda de la siguiente forma:

$$\text{Min } z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4$$

S.c.

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 + h_1 - h_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 - h_2 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, h_1, h_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

5) A las restricciones sin variable de holgura y a la restricción que se multiplicó por -1, en el paso anterior, se les agrega a cada una de ellas una variable, llamada variable artificial, la cual es no negativa.

$$\text{Min } z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4$$

S.c.

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 + h_1 - h_? &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 \quad - h_2 + a_1 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \quad + a_2 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, h_1, h_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

6) La base inicial factible está formada por las variables de holgura, sin tomar la del coeficiente negativo, y las variables artificiales.

En este ejemplo $I = \left\{ h_1, a_1, a_2 \right\}$ es decir

$$A^I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{es la base canónica}$$

Al agregar variables artificiales el problema original es reemplazado por un problema equivalente, al que le llamaremos problema aumentado.

4.3 Solución al problema aumentado. (Método de las dos fases)

Se tiene el problema en la siguiente forma

$$\text{Max } z=CX$$
$$\text{S.c.}$$
$$AX+Rh+Qa=b$$
$$h\geq 0, X\geq 0, a\geq 0$$

con R_{mxh}: coeficientes de las variables de holgura

Q_{mxa}: coeficientes de las variables artificiales.

Un método para eliminar variables artificiales consiste en minimizar su suma, es decir

$$\text{Min } w=1_{1xa}\,a$$
$$\text{S.c.}$$
$$\begin{bmatrix} A & : & R & : & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \cdots \\ h \\ \cdots \\ a \end{bmatrix} = b$$
$$h\geq 0,\ X\geq 0,\ a\geq 0$$

y para resolver éste problema mediante el Algoritmo Simplex Revisado tenemos que minimizar w sujeto a las condiciones

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0_{1xn} & 0_{1xh} & 1_{1xa} \\ \hline 0 & \multicolumn{3}{c}{A^*} \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ x \\ \cdots \\ h \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ b \end{bmatrix}$$

donde $A^*=\begin{bmatrix} A & : & R & : & Q \end{bmatrix}$

Al mismo tiempo se calcula el valor de z de la siguiente manera

Sea

$$\bar{A}^{*}=\left[\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 0 & C_{1\times n} & \multirow{2}{*}{$0_{2\times h}$} & 0_{1\times a} \\ 0 & 1 & 0_{1\times n} & & 1_{1\times a} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0_{m\times 2}} & \multicolumn{3}{c}{A^{+}} \end{array}\right] \qquad \bar{b}^{*}=\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hline b \end{array}\right]$$

e I el conjunto de variables básicas

$$\Rightarrow \left[\bar{A}^{*I}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\begin{bmatrix} C_I \\ U_I^I \end{bmatrix} (A^{*I})^{-1} \\ 0 & 1 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & (A^{*I})^{-1} \end{array}\right]$$

Con C_I y U_I coeficientes de las variables básicas en z, y w respectivamente

$$\left[\bar{A}^{*I}\right]^{-1}\bar{b}=\left[\begin{array}{c} -z \\ -w \\ \hline X_I^{*} \end{array}\right]$$

Los coeficientes de costo reducido correspondientes a W, (u^j-w^j), se calculan multiplicando el segundo renglón de $\left[\bar{A}^{*I}\right]^{-1}$ por $(\bar{A}^{*})^j$.

Al problema de minimizar la suma de las variables artificiales se le denomina *Primera Fase*.

En nuestro ejemplo:

$$\bar{A}^{*}=\left[\begin{array}{cc|cccc|cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -4 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & -3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\bar{b}^{*}=\left[\begin{array}{c}0\\0\\\hline 1\\3\\6\end{array}\right]$$

La primera fase se realizará con el Algoritmo Simplex Revisado.

Al finalizar la primera fase se tiene que el valor de todas las variables artificiales es cero, o bien al menos una de ellas tiene valor diferente de cero.

Si $a\neq 0$, existe al menos una variable artificial distinta de cero, entonces el problema original no tiene soluciones factibles, porque si existe un $x\geq 0$ tal que $Ax=b$, entonces $\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}$ es una solución factible del problema en la fase I y por lo tanto, $0(x)+1(0)=0<1a$, lo cual viola la optimalidad de a.

Si todas las variables artificiales son cero puede suceder que:

1) Todas las variables artificiales están fuera de la base.

Puesto que al final de la fase I se tiene una solución básica factible y como las variables artificiales están fuera de la base, entonces la base consiste únicamente de variables de holgura y/o del problema original.

2) Al menos una variable artificial a_j forma parte de la base, donde a_j está asociada a la l-ésima restricción, en este caso puede ocurrir:

   i) Que existe $k\in I$ tal que $y_l^k\neq 0$, entonces podemos sacar de la base a a_j e introducir a x_k.

ii)Que para toda $k \notin I$, $y_l^k=0$, lo que indica que la l-ésima restricción es redundante, por lo que no se modifica la base y a_j siempre formará parte de ésta.

La *Segunda Fase*, consiste en resolver el problema original en forma estándar.
Esta empezará tomando como base inicial a la base asociada al valor óptimo de la primera fase (si es cero).

4.4 Posibles soluciones de un P.P.L.

Al resolver un P.P.L. podemos llegar a que:

i) Existe una solución óptima.
Se garantiza la existencia de ésta solución cuando todos los coeficientes de costo reducido son menores o iguales a cero.

ii) Hay una clase de soluciones factibles tales que $z \to \infty$ cuando $x_k \to \infty$. Esto ocurre cuando el alguno de los coeficientes de costo reducido es positivo, sea éste el k-ésimo, y $y_i^k \leq 0$ $\forall i \in \{1,2,..m\}$ es decir

$$\left[(\bar{A}^I)^{-1}\right]_1 (\bar{A}^j) = c^j - z^j \qquad \text{con } j \in \{1,2,..,n+h\} \text{ donde}$$

h es el no. de variables de holgura

c^k-z^k es un coeficiente de costo reducido el cual es positivo

$$(\bar{A}^I)^{-1}(\bar{A}^k) = \begin{bmatrix} c^k - z^k \\ \hline Y^k \end{bmatrix} \qquad \text{donde } Y^k \leq 0$$

entonces dado un valor de x_k el valor de la función objetivo z está dado por

$$-z = z_o - x_k(c^k - z^k)$$

$$\therefore\ \bar{X}^* = \bar{X}_I - x_k\left[\frac{c^k - z^k}{y_I^k}\right]$$

$$\bar{X}_J^* = 0 \quad \forall j \in J - \{k\}$$

$$x_k \text{ dado}$$

de tal forma que $z \to \infty$ cuando $x_k \to \infty$

4.5 Convergencia finita del Algoritmo Simplex Revisado.

El Algoritmo Simplex Revisado se detiene en un número finito de iteraciones, ya sea con una solución básica factible óptima, una clase de soluciones factibles tales que $z \to \infty$ cuando $x_k \to \infty$, o bien sin solución, esto en ausencia de solución degenerada.

Una condición suficiente y necesaria para que una variable básica sea cero es que entre a reemplazar a una variable que tiene valor cero o que $\min_{i/y_i^k} \left\{ x_i / y_i^k \right\}$ no sea único. (Estas dos condiciones no son mutuamente excluyentes). Cuando hay una solución degenerada, la forma lineal (función objetivo) puede tomar el mismo valor durante dos iteraciones sucesivas. Si ésto sucede durante varias iteraciones sucesivas, es posible regresar a una de las bases obtenidas previamente, entrando así en un ciclo indefinido sobre las mismas bases, en cuyo caso diremos que el problema contiene un ciclo.

La forma más simple de evitar ciclos es escoger la variable a entrar a la base aleatoriamente entre todas las posibles, con lo cual se garantiza la convergencia finita del Algoritmo Simplex Revisado.

Para implementarlo en el sistema, fué necesario realizar una rutina la cual genera un número aleatorio (rand) entre cero y uno. Si se tienen r posibles variables a entrar a la base, se divide el intervalo [0,1] en r intervalos de la misma longitud. A la primera variable candidata a entrar se le asigna el primer intervalo, a la segunda el segundo y así sucesivamente.

Sea rand $\in \left[q/r,(q+1)/r\right]$ con $q=\{0,1,...,r-1\}$ entonces la q-ésima candidata entrará a la base.

CAPITULO V.

En éste capítulo se resolverán problemas de Programación Lineal usando el Algoritmo Simplex Revisado con y sin ayuda de una computadora con el fin de comparar los resultados obtenidos y así mostrar que éstos no difieren.

En el programa se tienen diferentes alternativas en una de las cuales el usuario puede interactuar con éste, en el sentido de poder elegir cual variable entrará a la siguiente base, es decir, no necesariamente introducir la de máximo coeficiente de costo reducido.

Otras alternativas muestran los valores de los coeficientes de costo reducido, valor de la función objetivo, variable que sale y variable que entra en cada una de las iteraciones (solo en la segunda fase).

Estas alternativas son:

1.- OBTENER LA SOLUCION.

2.- SELECCION DE LA VARIABLE A ENTRAR EN LA ITERACION CORRESPONDIENTE, ENTRE LAS POSIBLES (SI EXISTE MAS DE UNA)

3.- EXHIBICION DE VARIABLES Y SUS CORRESPONDIENTES VALORES, COEFICIENTES DE COSTO REDUCIDO, VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO, VARIABLE QUE SALE Y VARIABLE QUE ENTRA.

4.- INTRODUCIR BASE INICIAL.

5.- ALTERNATIVAS 2 Y 3.

6.- ALTERNATIVAS 2 Y 4.

7.- ALTERNATIVAS 3 Y 4.

8.- ALTERNATIVAS 2, 3, Y 4.

Los ejemplos se resolverán utilizando la alternativa 3.

Primero, se resolverán sin el programa y posteriormente con él.

SIN UTILIZAR EL PROGRAMA.

Ejemplo 1.

(Problema con solución óptima)

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } z = 5x_1 - 6x_2 - 7x_3\\
&\text{S.c.}\\
&\quad x_1 + 5x_2 - 3x_3 \ge 15\\
&\quad 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 \le 20\\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 = 5\\
&\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } z = -5x_1 + 6x_2 + 7x_3\\
&\text{S.c.}\\
&\quad -x_1 - 5x_2 + 3x_3 \le -15\\
&\quad 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 \le 20\\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 = 5\\
&\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } z = -5x_1 + 6x_2 + 7x_3\\
&\text{S.c.}\\
&\quad -x_1 - 5x_2 + 3x_3 + h_1 = -15\\
&\quad 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + h_2 = 20\\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 = 5\\
&\quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{Max } z = -5x_1 + 6x_2 + 7x_3$$

S.c.

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - h_1 \qquad &= 15 \\ 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 \quad + h_2 &= 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 5 \\ x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{Max } z = -5x_1 + 6x_2 + 7x_3$$

S.c.

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - h_1 \quad + a_2 \quad &= 15 \\ 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 \quad + h_2 \qquad &= 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad + a_1 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Se tiene que resolver:

$$\text{Min } w = a_1 + a_2$$

S.c.

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - h_1 \quad + a_2 \quad &= 15 \\ 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 \quad + h_2 \qquad &= 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad + a_1 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Se tienen $\bar{A}$ y $\bar{b}$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc|ccccccc} 1 & 0 & -5 & 6 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & 10 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\bar{b}=\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hline 15 \\ 20 \\ 5 \end{array}\right]$$

Tomamos $I_1=\left\{ a_2, h_2, a_1 \right\}$, de lo que se obtiene:

$$\bar{A}^{I_1}=\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left(\bar{A}^{I_1}\right)^{-1}=\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\bar{X}_{I_1}=\left(\bar{A}^{I_1}\right)^{-1}\bar{b}=\left[\begin{array}{c} 0 \\ -20 \\ \hline 15 \\ 20 \\ 5 \end{array}\right] \leftarrow \text{valor de } -W$$

Queremos que W=0

$$\left[\left(\bar{A}^{I_1}\right)^{-1}\right]_2 (\bar{A}^J)=\left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cccc} -5 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & -1 \\ 5 & -6 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]=\begin{array}{c} \text{c.c.r. asociados a:} \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & h_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} -2 & -6 & 2 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\min_{\forall\, j \in J} \left\{ u^j - w^j \right\} = u^2 - w^2 = -6$$

$\therefore$ la variable que entra es x_2

$$Y^2 = \left(A^{I_1}\right)^{-1} (A)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\min_{i / y_i^2 > 0} \left\{ X_i / y_i^2 \right\} = 3 \qquad i \in \left\{1,2,3\right\}$$

$\therefore$ la variable que sale es a_2

$$I_2 = \left\{ x_2, h_2, a_1 \right\}$$

$$\bar{A}^{I_2} = \left[\begin{array}{cc||ccc} 1 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left(\bar{A}^{I_2}\right)^{-1} = \left[\begin{array}{cc||ccc} 1 & 0 & -6/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\bar{X}_{I_2} = \left(\bar{A}^{I_2}\right)^{-1} \bar{b} = \begin{bmatrix} -18 \\ -2 \\ \hline 3 \\ 38 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{valor de } -z \\ \leftarrow \text{valor de } -W \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{c.c.r.} \\ \text{asociados a:} \\ x_1 \quad x_3 \quad h_1 \end{array}$$

$$\left[\left(\bar{A}^{I_2}\right)^{-1}\right]_2 (\bar{A}^J) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 5 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/5 & -8/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

$$\min_{\forall\, j \in J} \left\{u^j - w^j\right\} = u^3 - w^3 = -8/5$$

$\therefore$ **la variable que entra es x_3**

$$Y^3 = \left(A^{I_2}\right)^{-1} (A)^3 = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 6/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 32/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}$$

$$\min_{i / y_i^3 > 0} \left\{X_i / y_i^3\right\} = 5/4 \qquad i \in \left\{1,2,3\right\}$$

$\therefore$ **la variable que sale es a_1**

$$I_3 = \left\{x_2, h_2, x_3\right\}$$

$$\bar{A}^{I_2} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 6 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left(\bar{A}^{I_2}\right)^{-1} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1/8 & 0 & -53/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1/8 & 0 & 3/8 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1/8 & 0 & 53/8 \end{array}\right]$$

$$\bar{X}_{I_2} = \left(\bar{A}^{I_2}\right)^{-1} \bar{b} = \left[\begin{array}{c} -125/4 \\ 0 \\ \hline 15/4 \\ 30 \\ 5/4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{valor de } -z \\ \leftarrow \text{valor de } -w \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\therefore W_{min} = 0$$

Se inicia la segunda fase:

$$\left[\left(\bar{A}^{I_2}\right)^{-1}\right]_1 (\bar{A}^J) = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1/8 & 0 & -53/8 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} -5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right] = \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\text{c. c. r. asociados a}} \\ x_1 & h_1 \\ \left[-23/2 \right. & \left. -1/8 \right] \end{array}$$

$$\max_{\forall\, j \in J} \left\{ c^j - z^j \right\} \leq 0$$

$\therefore$ se tiene la solución óptima:

$$\begin{aligned} z_{min} &= -125/4 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 15/4 \\ x_3 &= 5/4 \\ h_1 &= 0 \\ h_2 &= 30 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

(Ejemplo donde se tiene como solución a una clase de soluciones factibles tales que $z\to\infty$ cuando $x_k\to\infty$).

$$\text{Max } z = x_1+3x_2$$

S.c.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\le 3 \\ -x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{Max } z = x_1+3x_2$$

S.c.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + h_1 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + h_2 &= 3 \\ x_1, x_2, h_1, h_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \bar{b}=\left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \\ 4 \end{array}\right]$$

$$I_1=\left\{h_1, h_2\right\}$$

$$\bar{A}^{I_1}=\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \left(\bar{A}^{I_1}\right)^{-1}=\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\bar{X}_{I_1}=\left(\bar{A}^{I_1}\right)^{-1}\bar{b}=\left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 3 \\ 3 \end{array}\right] \leftarrow \text{valor de } -z$$

$$\left[\left(\bar{A}^{I_1}\right)^{-1} \right]_1 (\bar{A})^J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\text{c.c.r. asociados a}} \\ x_1 & x_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}} \end{array}$$

$$\max_{\forall\, j \in J} \left\{ c^j - z^j \right\} = c^2 - z^2 = 3$$

$\therefore$ la variable que entra es x_2.

$$Y^2 = \left[\left(A^{I_1}\right)^{-1} \right] (A)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\min_{i / y_i^2 > 0} \left\{ X_i / y_i^2 \right\} = 3 \qquad i \in \left\{ 1,2 \right\}$$

$\therefore$ la variable que sale es h_2

$$I_2 = \left\{ h_1, x_2 \right\}$$

$$\bar{A}^{I_2}=\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \left(\bar{A}^{I_1}\right)^{-1}=\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & -3 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\bar{X}_{I_2}=\left(\bar{A}^{I_2}\right)^{-1}\bar{b}=\begin{bmatrix} -9 \\ \hline 9 \\ 3 \end{bmatrix} \leftarrow \text{valor de } -z$$

$$\left[\left(\bar{A}^{I_2}\right)^{-1}\right]_1 (\bar{A})^1= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}= \begin{array}{c} \text{c.c.r. asociado a:} \\ \begin{array}{cc} x_1 & h_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\max_{\forall\, j\in J}\left\{c^j-z^j\right\}= c^1-z^1=4$$

$\therefore$ la variable que entra es x_1.

$$Y^1= \left[\left(A^{I_2}\right)^{-1}\right](A)^1=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

como $y_i^1<0 \quad \forall i\in\left\{1,2\right\}$ y $c^1-z^1>0$ entonces se tiene una clase de soluciones factibles tales que $z\to\infty$ cuando $x_1\to\infty$.

La clase de soluciones factibles está dada por:

$$z = z_0+x_1(c^1- z^1)= 9+4x_1$$

$$X^*=X_{I_2}+ x_1\begin{bmatrix} -y_1^1 \\ -y_2^1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x_2 = 3+x_1$
$h_1 = 9+x_1$
$h_2 = 0$
x_1 con el valor deseado.

Asi por ejemplo si :

$x_1 = 10 \Rightarrow$

$$z_{max} = 49$$
$$x_2 = 13$$
$$h_1 = 19$$
$$h_2 = 0$$

$x_1 = 25 \Rightarrow$

$$z_{max} = 109$$
$$x_2 = 28$$
$$h_1 = 34$$
$$h_2 = 0$$

Ejemplo 3.

(Problema sin solución factible)

$$\text{Max } z = 2x_1 + 2x_2$$

S.c.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{Max } z = 2x_1 + 2x_2$$

S.c.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 2 \\ -x_1 - x_2 &\leq -4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{Max } z = 2x_1 + 2x_2$$

S.c.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + h_1 \quad &= 2 \\ -x_1 - x_2 \quad + h_2 &= -4 \\ x_1, x_2, h_1, h_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{Max } z = 2x_1 + 2x_2$$

S.c.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + h_1 \quad &= 2 \\ x_1 + x_2 \quad - h_2 &= 4 \\ x_1, x_2, h_1, h_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = 2x_1 + 2x_2 \\ &\text{S.c.} \\ &\quad x_1 + x_2 + h_1 \qquad\quad = 2 \\ &\quad x_1 + x_2 \quad - h_2 + a_1 = 4 \\ &\quad x_1, x_2, h_1, h_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Entonces tenemos que resolver a través del método de las dos fases.

$$\begin{aligned} &\text{Min } w = a_1 \\ &\text{S.c.} \\ &\quad x_1 + x_2 + h_1 \qquad\quad = 2 \\ &\quad x_1 + x_2 \quad - h_2 + a_1 = 4 \\ &\quad x_1, x_2, h_1, h_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \qquad \bar{b} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hline 2 \\ 4 \end{array}\right]$$

$$I_1 = \left\{h_1, a_1\right\}$$

$$\bar{A}^{I_1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \left(\bar{A}^{I_1}\right)^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\bar{X}_{I_1} = \left(\bar{A}^{I_1}\right)^{-1} \bar{b} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -4 \\ \hline 2 \\ 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{valor de } -z \\ \leftarrow \text{valor de } -w \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\left(\bar{A}^{I_1}\right)^{-1}\right]_2 (\bar{A})^J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \text{c.c.r.} \\ \text{asociados a:} \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & h_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

tomemos a $j=1$ tal que

$$\min_{\forall\, j\in J} \left\{ u^j - w^j \right\} = -1$$

$\therefore$ **la variable que entra es x_1**

$$Y^1 = \left(A^{I_1}\right)^{-1} (A)^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\min_{i / Y_i^1 > 0} \left\{ X_i / Y_i^1 \right\} = 2$$

$\therefore$ **la variable que sale es h_1**

$$I_2 = \left\{ x_1, a_1 \right\}$$

$$\bar{A}^{I_2} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \left(\bar{A}^{I_2}\right)^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\bar{X}_{I_2} = \left(\bar{A}^{I_2}\right)^{-1} \bar{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ \hline 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{valor de } -z \\ \leftarrow \text{valor de } -v \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\left(\bar{A}^{I_2}\right)^{-1}\right]_2 (\bar{A})^J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \text{c.c.r.} \\ \text{asociados a:} \\ \begin{array}{ccc} x_2 & h_1 & h_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\min_{\forall\, j \in J} \left\{ u^j - w^j \right\} \leq 0$$

se ha terminado la primera fase, con el resultado:

$$W_{min} = 2$$
$$a_1 = 2$$

Como existe una variable artificial con valor diferente de cero entonces el problema original no tiene solución.

Ejemplo 4.
(Ejemplo en el cual se obtiene una solución degenerada)

$$\text{Max } z = 2x_1+x_2+x_3$$
$$\text{S.c.}$$
$$\begin{aligned} 4x_1+6x_2+3x_3 &\le 8 \\ x_1-9x_2+x_3 &\le -3 \\ -2x_1-3x_2+5x_3 &\le -4 \\ x_1,x_2,x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{Max } z = 2x_1+x_2+x_3$$
$$\text{S.c.}$$
$$\begin{aligned} 4x_1+6x_2+3x_3+h_1 &= 8 \\ x_1-9x_2+x_3+h_2 &= -3 \\ -2x_1-3x_2+5x_3+h_3 &= -4 \\ x_1,x_2,x_3,h_1,h_2,h_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{Max } z = 2x_1+x_2+x_3$$
$$\text{S.c.}$$
$$\begin{aligned} 4x_1+6x_2+3x_3+h_1 &= 8 \\ 3x_1-6x_2-4x_3+h_2-h_3 &= 1 \\ 2x_1+3x_2-5x_3-h_3+a_1 &= 4 \\ x_1,x_2,x_3,h_1,h_2,h_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Como se tiene una variable artificial debemos usar el método de las dos fases.

Primero se desea Min $W = a_1$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc||ccccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -4 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \qquad \bar{b} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hline 8 \\ 1 \\ 4 \end{array}\right]$$

$$I_1 = \left\{h_1, h_2, a_1\right\}$$

$$\bar{A}^{I_1} = \left[\begin{array}{cc||ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \left(\bar{A}^{I_1}\right)^{-1} = \left[\begin{array}{cc||ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\bar{X}_{I_1} = \left(\bar{A}^{I_1}\right)^{-1} \bar{b} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -4 \\ \hline 8 \\ 1 \\ 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{valor de } -z \\ \leftarrow \text{valor de } -v \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\left(\bar{A}^{I_1}\right)^{-1}\right]_2 (\bar{A}^J) = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -1 \end{array}\right] = \begin{array}{c} \text{c. c. r} \\ \text{asociados a:} \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & h_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} -2 & -3 & 5 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\min_{\forall\, j \in J} \left\{u^j - w^j\right\} = u^2 - w^2 = -3$$

$\therefore$ **la variable que entra es x_2**

$$Y^2 = \left[\left(A^{I_1}\right)^{-1}\right] (A^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\min_{i/y_i^2>0} \left\{X_i / Y_i^2\right\} = X_1/Y_1^2 = X_2/Y_2^2 = 4/3$$

Con el fin de mostrar como se eliminan las variables artificiales de la base cuando éstas son iguales a cero, saldrá de la base h_1

$$I_2 = \left\{x_2, h_2, a_1\right\}$$

$$\bar{A}^{I_2} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \left(\bar{A}^{I_2}\right)^{-1} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\bar{X}_{I_2} = \left(\bar{A}^{I_2}\right)^{-1} \bar{b} = \left[\begin{array}{c} 4/3 \\ 0 \\ \hline 4/3 \\ 9 \\ 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{valor de } -z \\ \leftarrow \text{valor de } -v \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

c.c.r
asociados a:

$$\left[\left(\bar{A}^{I_2}\right)^{-1}\right]_2 (\bar{A}^J) = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1/2 & 0 & -1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 4 & 3 & 1 & 0\\ 3 & -4 & 0 & -1\\ 2 & -5 & 0 & -1\end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & h_1 & h_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix}0 & 13/2 & -1/2 & 1\end{bmatrix} \end{array}$$

Como todos los c.c.r. son mayores o iguales a cero, ya se obtuvo el mínimo de W, pero a_1 forma parte de la base.
Para eliminar a_1 de la base se calcula Y_3^j $\forall j \in J$ y se toma la primera de las $j \in J$ talque $Y_3^j \neq 0$

$$Y_3^J = \left[\left(A^{I_2}\right)^{-1}\right]_3 (A^J) = \begin{bmatrix}-1/2 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}4 & 3 & 1 & 0\\ 3 & -4 & 0 & -1\\ 2 & -5 & 0 & -1\end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & h_1 & h_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix}0 & -13/2 & -1/2 & -1\end{bmatrix} \end{array}$$

$\therefore$ sale a_1 y entra x_3

$$I_3 = \left\{x_2, h_2, x_3\right\}$$

$$\bar{A}^{I_3} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 6 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -6 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 3 & 0 & -5 \end{array}\right] \qquad \left(\bar{A}^{I_2}\right)^{-1} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -6/13 & 0 & 1/13\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 5/39 & 0 & 1/13\\ 0 & 0 & 14/13 & 1 & -2/13\\ 0 & 0 & 1/13 & 0 & -2/13 \end{array}\right]$$

$$\bar{X}_{I_3} = \left(\bar{A}^{I_3}\right)^{-1} \bar{b} = \left[\begin{array}{c} 4/3 \\ 0 \\ \hline 4/3 \\ 9 \\ 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{valor de } -z \\ \leftarrow \text{valor de } -v \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Ahora empezamos la segunda fase.

$$\left[\left(\bar{A}^{I_3}\right)^{-1}\right]_1 (\bar{A}^J) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6/13 & 0 & 1/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \text{c. c. r asociados a:} \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & h_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4/13 & -6/13 & -1/13 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\max_{\forall\ j \in J} \left\{ c^j - z^j \right\} = c^1 - z^1 = 4/13$$

$\therefore$ la variable que entra es x_1

$$Y^1 = \left[\left(A^{I_3}\right)^{-1}\right] (A^1) = \begin{bmatrix} 5/39 & 0 & 1/3 \\ 14/39 & 1 & -2/13 \\ 1/13 & 0 & -2/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\min_{i / y_i^1 > 0} \left\{ X_i / y_i^1 \right\} = X_2 / y_2^1 = 7/9$$

$\therefore$ la variable que sale es h_2

$$I_4 = \left\{ x_2, x_1, x_3 \right\}$$

$$\bar{A}^{I_4} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -5 \end{array}\right] \qquad \left(\bar{A}^{I_4}\right)^{-1} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -16/39 & -4/21 & 29/273 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1/39 & -2/21 & 25/273 \\ 0 & 0 & 2/13 & 1/7 & -2/91 \\ 0 & 0 & 1/13 & 0 & -2/13 \end{array}\right]$$

$$\bar{X}_{I_4} = \left(\bar{A}^{I_4}\right)^{-1} \bar{b} = \left[\begin{array}{c} 69/21 \\ 0 \\ \hline 10/21 \\ 9/7 \\ 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{valor de } -z \\ \leftarrow \text{valor de } -v \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\left(\bar{A}^{I_4}\right)^{-1}\right]_1 (\bar{A}^J) = \left[1 \;\; 0 \;\; -16/39 \;\; -4/21 \;\; 29/273\right] \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{array}\right] = \begin{array}{c} \text{c.c.r asociados a:} \\ \begin{array}{cc} h_1 & h_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} -16/39 & -27/91 \end{array}\right] \end{array}$$

Como $\max\limits_{\forall j \in J} \left\{c^j - z^j\right\} \leq 0$, **tenemos la solución óptima:**

$$\begin{aligned} z_{max} &= 64/21 \\ x_1 &= 9/7 \\ x_2 &= 10/21 \\ x_3 &= 0 \\ h_1 &= 0 \\ h_2 &= 0 \\ h_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.

(Ejemplo de un problema que contiene un ciclo).

$$\text{Min } z = -3/4x_1 + 20x_2 - 1/2x_3 + 6x_4$$

S.c.

$$\begin{aligned} 1/4x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 &\le 0 \\ 1/2x_1 - 12x_2 - 1/2x_3 + 3x_4 &\le 0 \\ x_3 &\le 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{Max } z = 3/4x_1 - 20x_2 + 1/2x_3 - 6x_4$$

S.c.

$$\begin{aligned} 1/4x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 + h_1 &= 0 \\ 1/2x_1 - 12x_2 - 1/2x_3 + 3x_4 + h_2 &= 0 \\ x_3 + h_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, h_1, h_2, h_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c|cccccccc} 1 & 3/4 & -20 & 1/2 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/4 & -8 & -1 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -12 & -1/2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \bar{b} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right]$$

$$I_1 = \left\{h_1, h_2, h_3\right\}$$

$$(\bar{A}^{I_1}) = \left(\bar{A}^{I_1}\right)^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\bar{X}_{I_1} = \left(\bar{A}^{I_1}\right)^{-1} \bar{b} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{valor de } -z$$

$$\left[\left(\bar{A}^{I_1}\right)^{-1}\right]_1 (\bar{A}^J) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 & -20 & 1/2 & -6 \\ 1/4 & -8 & -1 & 9 \\ 1/2 & -12 & -1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \text{c.c.r. asociados a:} \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3/4 & -20 & 1/2 & -6 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\max_{\forall\, j \in J} \left\{ c^j - z^j \right\} = c^1 - z^1 = 3/4$$

$\therefore$ **la variable que entra es** x_1

$$Y^1 = \left(A^{I_1}\right)^{-1} (A^1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\min_{j / y_j^1 > 0} \left\{ X_j / y_j^1 \right\} = X_1 / y_1^1 = X_2 / y_2^1 = 0$$

Si se tiene más de un mínimo se tomará el primero de ellos.

$\therefore$ **la variable que sale es** h_1**.**

$$I_2=\left\{x_1,h_2,h_3\right\}$$

$$(\bar{A}^{I_2})=\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 3/4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \left(\bar{A}^{I_2}\right)^{-1}=\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & -3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\bar{X}_{I_2}=\left(\bar{A}^{I_2}\right)^{-1}\bar{b}=\left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right] \leftarrow \text{valor de } -z$$

c.c.r.
asociados a:

$$\left[\left(\bar{A}^{I_2}\right)^{-1}\right]_1(\bar{A}^J)=\left[1\ \ -3\ \ 0\ \ 0\right]\left[\begin{array}{cccc} -20 & 1/2 & -6 & 0 \\ -8 & -1 & 9 & 1 \\ -12 & -1/2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]=\begin{array}{cccc} x_2 & x_3 & x_4 & h_1 \\ \left[\ 4\right. & 7/2 & -33 & \left.-3\ \right] \end{array}$$

$$\max_{\forall\, j\in J}\left\{c^j-z^j\right\}=c^2-z^2=4$$

$\therefore$ **la variable que entra es x_2**

$$Y^2=\left(A^{I_2}\right)^{-1}(A^2)=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-8\\ -12\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-32\\ 4\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\min_{j/y_j^2>0}\left\{X_j/y_j^2\right\}=X_2/y_2^2=0$$

$\therefore$ la variable que sale es h_2

$$I_3=\left\{x_1,x_2,h_3\right\}$$

$$(\bar{A}^{I_3})=\left[\begin{array}{c|ccc}1 & 3/4 & -20 & 0\\ \hline 0 & 1/4 & -8 & 0\\ 0 & 1/2 & -12 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \qquad \left(\bar{A}^{I_3}\right)^{-1}=\left[\begin{array}{c|ccc}1 & -1 & -1 & 0\\ \hline 0 & -12 & 8 & 0\\ 0 & -1/2 & 1/4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\bar{X}_{I_3}=\left(\bar{A}^{I_3}\right)^{-1}\bar{b}=\left[\begin{array}{c}0\\ \hline 0\\ 0\\ 1\end{array}\right] \leftarrow \text{valor de } -z$$

$$\left[\left(\bar{A}^{I_3}\right)^{-1}\right]_1(\bar{A}^J)=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 & -6 & 0 & 0\\ -1 & 9 & 1 & 0\\ -1/2 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\text{c. c. r. asociados a:}\\ \begin{array}{cccc}x_3 & x_4 & h_1 & h_2\end{array}\\ \begin{bmatrix}2 & -18 & -1 & -1\end{bmatrix}\end{array}$$

$$\max_{\forall\, j\in J} \left\{c^j - z^j\right\} = c^3 - z^3 = 2$$

$\therefore$ la variable que entra es x_3

$$Y^3 = \left(A^{I_3}\right)^{-1}(A^3) = \begin{bmatrix} -12 & 8 & 0 \\ -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3/8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\min_{j/y^3_j > 0} \left\{X_j / y^3_j\right\} = X_1 / y^3_1 = 0 \quad \text{(tomando el primero)}$$

$\therefore$ la variable que sale es x_1

$$I_4 = \left\{x_3, x_2, h_3\right\}$$

$$(\bar{A}^{I_4}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 1/2 & -20 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -8 & 0 \\ 0 & -1/2 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \left(\bar{A}^{I_4}\right)^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & -3 & 0 \\ \hline 0 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/16 & -1/8 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\bar{X}_{I_4} = \left(\bar{A}^{I_4}\right)^{-1} \bar{b} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right] \leftarrow \text{valor de } -z$$

$$\left[\left(\bar{A}^{I_4}\right)^{-1}\right]_1 (\bar{A}^J) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 & -6 & 0 & 0 \\ 1/4 & 9 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \text{c. c. r.} \\ \text{asociados a:} \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_4 & h_1 & h_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1/4 & 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\max_{\forall\, j\in J} \left\{c^j - z^j\right\} = c^4 - z^4 = 3$$

$\therefore$ la variable que entra es x_4

$$Y^4 = \left(A^{I_4}\right)^{-1}(A^4) = \begin{bmatrix} -3/2 & 1 & 0 \\ 1/16 & -1/8 & 0 \\ 3/2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21/2 \\ 3/16 \\ 21/2 \end{bmatrix}$$

$$\min_{j/y_j^4 > 0} \left\{X_j / y_j^4\right\} = X_2 / y_2^4 = 0$$

$\therefore$ la variable que sale es x_2

$$I_5 = \left\{x_3, x_4, h_3\right\}$$

$$(\bar{A}^{I_5}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 1/2 & -6 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 9 & 0 \\ 0 & -1/2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \left(\bar{A}^{I_5}\right)^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 1 \end{array}\right]$$

$$\bar{X}_{I_5}=\left(\bar{A}^{I_5}\right)^{-1}\bar{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{valor de } -z$$

c. c. r.
asociados a:

$$\left[\left(\bar{A}^{I_5}\right)^{-1}\right]_1(\bar{A}^J)=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/4 & -20 & 0 & 0 \\ 1/4 & -8 & 1 & 0 \\ 1/2 & -12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & h_1 & h_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & -16 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\max_{\forall\, j\in J}\left\{c^j-z^j\right\}=c^5-z^5=1$$

$\therefore$ **la variable que entra es h_1**

$$Y^5=\left(A^{I_5}\right)^{-1}(A^5)=\begin{bmatrix} 2 & -6 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1/3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\min_{j/y^5_j>0}\left\{X_j/y^5_j\right\}=X_1/y^5_1=0 \quad \text{(tomando el primero)}$$

$\therefore$ **la variable que sale es x_3**

$$I_6=\left\{h_1,x_4,h_3\right\}$$

$$(\bar{A}^{I_\sigma}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & -6 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \left(\bar{A}^{I_\sigma}\right)^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\bar{X}_{I_\sigma} = \left(\bar{A}^{I_\sigma}\right)^{-1} \bar{b} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right] \leftarrow \text{valor de } -z$$

c. c. r.
asociados a:

$$\left[\left(\bar{A}^{I_\sigma}\right)^{-1}\right]_1 (\bar{A}^J) = \left[1 \ 0 \ 2 \ 0\right] \begin{bmatrix} 3/4 & -20 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & -6 & -1 & 0 \\ 1/2 & -12 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & h_2 \\ \left[\ 7/4\right. & -44 & -1/2 & \left.2\ \right] \end{array}$$

$$\max_{\forall\, j\in J} \left\{c^j - z^j\right\} = c^\sigma - z^\sigma = 2$$

$\therefore$ **la variable que entra es h_2**

$$Y^\sigma = \left(A^{I_\sigma}\right)^{-1} (A^\sigma) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\min_{j / y_j^\sigma > 0} \left\{X_j / y_j^\sigma\right\} = X_1 / y_1^\sigma = 0$$

$\therefore$ la variable que sale es x_4

$$I_7 = \left\{h_1, h_2, h_3\right\}$$

$\therefore$ $I_1 = I_7$ formándose de esta manera un ciclo

Este problema se resolverá usando el programa, en el cual si el $\min\limits_{i/y_i^j>0} \left\{X_i/y_i^j\right\}$ no es único, se escoge aleatoriamente uno de éstos para garantizar que el problema se resolverá en un número finito de iteraciones

Ahora resolveremos los problemas haciendo uso del programa realizado. Debe recordarse que los problemas resueltos previamente en su segunda fase (de existir) se maximizan.
Los resultados se darán en la forma en que aparecen en la pantalla. Marcando con una separación la aparición entre una y otra pantalla. (Se hace uso de la alternativa 3).

Ejemplo 1.

$$\text{Max } z = 5x_1 - 6x_2 - 7x_3$$

S.c.

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 3x_3 &\geq 15 \\ 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 &\leq 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Max } z = 5x_1 - 6x_2 - 7x_3$$

S.c.

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - h_1 \qquad + a_2 &= 15 \\ 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 \quad + h_2 \qquad &= 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad + a_1 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Primera fase

La variable que sale es ARTIF 2
La variable que entra es x2

Primera fase

La variable que sale es ARTIF 1
La variable que entra es x3

Iteración 1

Variables	Valor	Coef. de Costo Red.
Básicas		
x2	15/4	0
HOLGURA 2	30	0
x3	5/4	0
No básicas		
x1	0	23/2
HOLGURA 1	0	1/8

z=-125/4

	x1	x2	x3	
Min z=	5	-6	-7	
S.c.				
	1	5	-3	≥ 15
	5	-6	10	≤ 20
	1	1	1	= 5

****** El Problema tiene solución óptima ******

x1= 0 HOLGURA 1=0
x2=15/4 HOLGURA 2=30
x3=5/4

z=-125/4

Ejemplo 2.

$$\text{Max } z = x_1 + 3x_2$$
S.c.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\le 3 \\ -x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{Max } z = x_1 + 3x_2$$
S.c.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + h_1 \quad &= 3 \\ -x_1 + x_2 \quad + h_2 &= 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Iteración 1

Variables	Valor	Coef. de Costo Red.
Básicas		
HOLGURA 1	**3**	**0**
HOLGURA 2	**3**	**0**
No básicas		
x1	**0**	**1**
x2	**0**	**3**

z=0

La variable que sale es HOLGURA 2
La variable que entra es x2

Iteración 2

Variables	Valor	Coef. de Costo Red.
Básicas		
HOLGURA 1	9	0
x2	3	0

Variables	Valor	Coef. de Costo Red.
No básicas		
x1	0	4
HOLGURA 2	0	-3

z=9

	x1	x2	
Max z=	1	3	
S.c			
	1	-2	≤3
	-1	1	:3

*** Se tiene una clase de soluciones factibles tales que z→∞ ***
*** cuando x1→∞ ***

Introduzca el valor de x1 10

x1=10 HOLGURA 1 = 19
x2=13 HOLGURA 2 = 0
z=49

Introduzca el valor de x1 25

x1=25 HOLGURA 1 = 34
x2=28 HOLGURA 2 = 0
z=109

Ejemplo 3.

$$\text{Max } z= 2x_1+ 2x_2$$
S.c.
$$x_1+ x_2 \le 2$$
$$x_1+ x_2 \ge 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{Max } z= 2x_1+ 2x_2$$
S.c.
$$x_1+ x_2 + h_1 = 2$$
$$-x_1- x_2 - h_2+ a_1 = 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Primera fase

La variable que sale es HOLGURA 1

La variable que entra es x1

Primera fase

	x1	x2	
Max z=	2	2	
S.c.			
	1	1	≤2
	* 1	1	≥4

**** El problema no tiene solución ya que la(s) restriccion(es) ****
**** marcadas con (*) no se satisfacen ****

Ejemplo 4.

$$\text{Max } z= 2x_1+ x_2+ x_3$$

S.c.

$$\begin{aligned} 4x_1+ 6x_2+ 3x_3 &\le 8 \\ x_1- 9x_2+ x_3 &\le -2 \\ -2x_1- 3x_2+ 5x_3 &\le -4 \\ x_1,x_2,x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\text{Max } z= 2x_1+ x_2+ x_3$$

S.c.

$$\begin{aligned} 4x_1+ 6x_2+ 3x_3 + h_1 \qquad\qquad &= 8 \\ 3x_1- 6x_2- 4x_3 \qquad +h_2- h_3 \qquad &= 1 \\ 2x_1+ 3x_2- 5x_3 \qquad\qquad - h_3+ a_1 &= 4 \\ x_1,x_2,x_3 \ge 0 & \end{aligned}$$

PRIMERA FASE

La variable que sale es ARTIF 1

La variable que entra es x2

Iteración 1

Variables	Valor	Coef. de Costo Red.
Básicas		
HOLGURA 1	0	0
HOLGURA 2	9	0
x2	4/3	0
No básicas		
x1	0	4/3
x3	0	8/3
HOLGURA 3	0	1/3

z=4/3

La variable que sale es HOLGURA 1
La variable que entra es x3

Iteración 2

Variables	Valor	Coef. de Costo Red.
Básicas		
x3	0	0
HOLGURA 2	9	0
x2	4/3	0
No básicas		
x1	0	4/3
HOLGURA 1	0	-8/39
HOLGURA 3	0	-1/13

z=4/3

La variable que sale es HOLGURA 2
La variable que entra es x1

Iteración 3

Variables	Valor	Coef. de Costo Red.
Básicas		
x3	0	0
x1	9/7	0
x2	10/21	0

Variables	Valor	Coef. de Costo Red.
No básicas		
HOLGURA 1	0	-16/39
HOLGURA 2	0	-4/21
HOLGURA 3	0	23/273

z=64/21

La variable que sale es x3
La variable que entra es HOLGURA 3

Iteración 4

Variables	Valor	Coef. de Costo Red.
Básicas		
HOLGURA 3	0	0
x1	9/7	0
x2	10/21	0
No básicas		
x3	0	-23/42
HOLGURA 1	0	-19/42
HOLGURA 2	0	-4/21

z=64/21

	x1	x2	x3	
Max z=	2	1	1	
S.c.				
	4	6	3 ≤	8
	1	-9	1 ≤	-3
	-2	-3	5 ≤	-4

*** El problema tiene solución óptima ***

x1=9/7	HOLGURA 1=0
x2=10/21	HOLGURA 2=0
x3=0	HOLGURA 3=0

z=64/21

Ejemplo 5. (ciclo)

$$\text{Min } z = -3/4x_1 + 20x_2 - 1/2x_3 + 6x_4$$

S.c.

$$\begin{array}{l} 1/4x_1 - 8x_2 \quad x_3 + 9x_4 \le 0 \\ 1/2x_1 - 12x_2 - 1/2x_3 + 3x_4 \le 0 \\ \qquad\qquad\qquad x_3 \le 1 \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{array}$$

⇔

$$\text{Min } z = -3/4x_1 + 20x_2 - 1/2x_3 + 6x_4$$

S.c.

$$\begin{array}{l} 1/4x_1 - 8x_2 \quad x_3 + 9x_4 + h_1 = 0 \\ 1/2x_1 - 12x_2 - 1/2x_3 + 3x_4 + h_2 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad x_3 + h_3 = 1 \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{array}$$

Iteración 1

Variables	Valor	Coef. de Costo Red.
Básicas		
HOLGURA 1	0	0
HOLGURA 2	0	0
HOLGURA 3	1	0

Variables	Valor	Coef. de Costo Red.
No básicas		
x1	0	-3/4
x2	0	20
x3	0	-1/2
x4	0	6

z=0

La variable que sale es HOLGURA 2

La variable que entra es x1

Iteración 2

Variables	Valor	Coef. de Costo Red.
Básicas		
HOLGURA 1	0	0
x1	0	0
HOLGURA 3	1	0
No básicas		
x2	0	2
x3	0	-5/4
x4	0	21/2
HOLGURA 2	0	3/2

z=0

La variable que sale es HOLGURA 3
La variable que entra es x3

Iteración 3

Variables	Valor	Coef. de Costo Red.
Básicas		
HOLGURA 1	**3/4**	**0**
x1	**1**	**0**
x3	**1**	**0**
No básicas		
x2	**0**	**2**
x4	**0**	**21/2**
HOLGURA 2	**0**	**3/2**
HOLGURA 3	**0**	**5/4**

z=-5/4

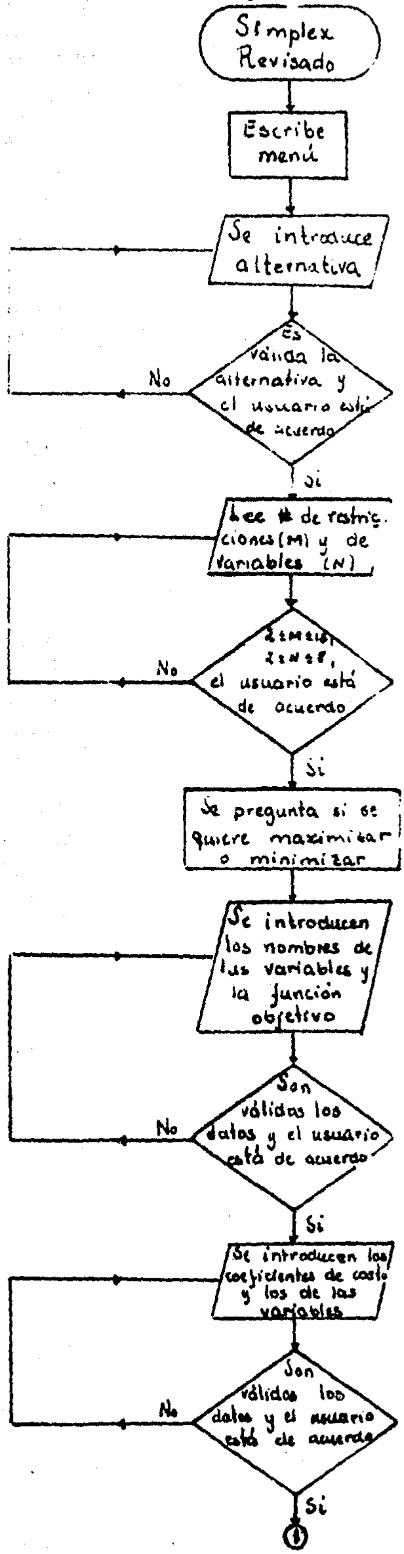
	x1	x2	x3	x4		
Min z=	**-3/4**	**20**	**-1/2**	**6**		
S.c.						
	1/4	**-8**	**-1**	**9**	≤	**0**
	1/2	**-12**	**-1/2**	**3**	≤	**0**
	0	**0**	**1**	**0**	≤	**1**

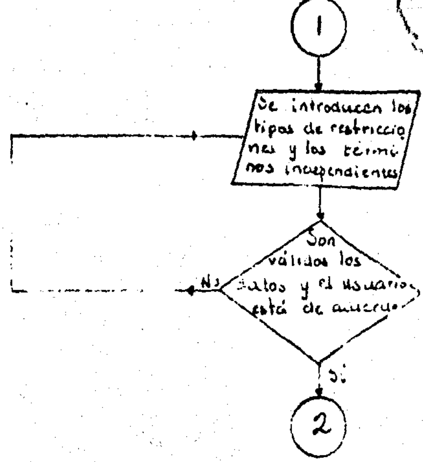
**** El problema tiene solución óptima ****

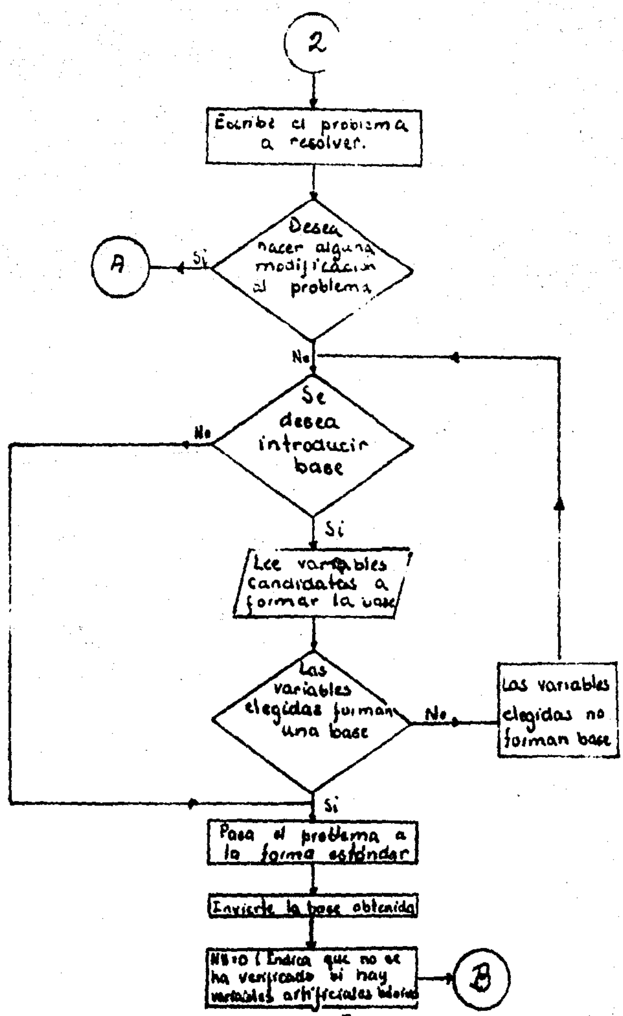
x1=1	**HOLGURA 1=3/4**
x2=0	**HOLGURA 2=0**
x3=1	**HOLGURA 3=0**
x4=0	

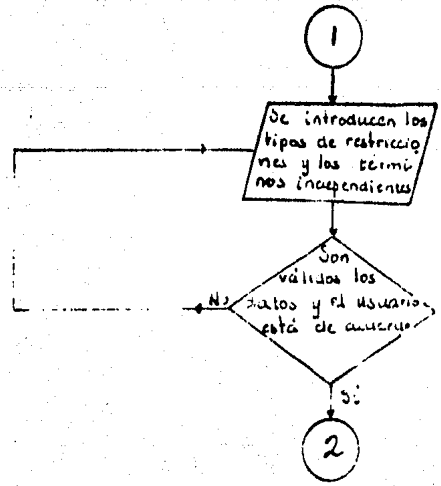
z=-5/4

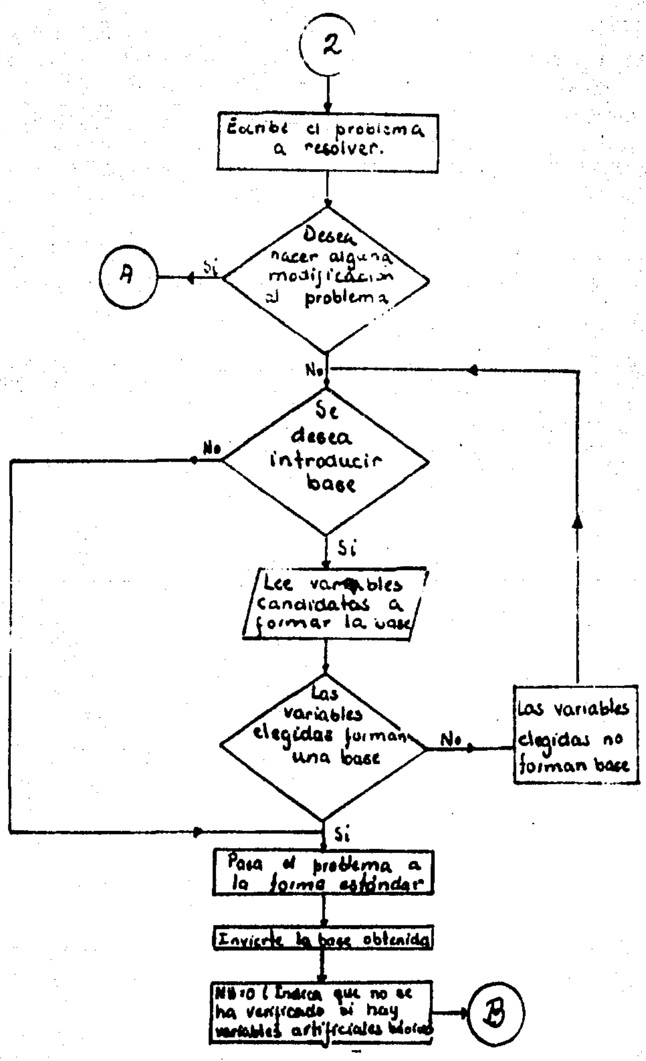
A P E N D I C E
(DIAGRAMAS DE FLUJO)

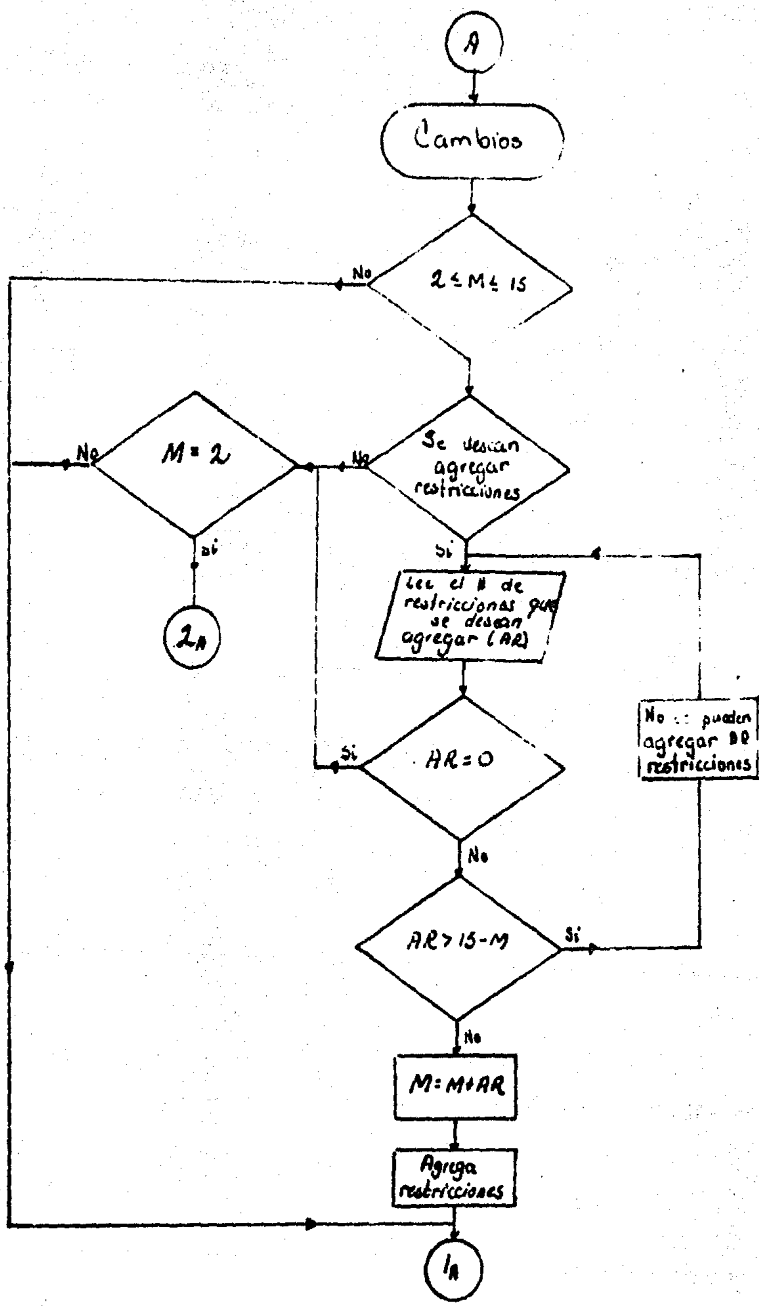

Simplex
Revisado
Escribe
menú
Se introduce
alternativa
es
válida la
alternativa y
el usuario está
de acuerdo
No
Si
Lee # de restric-
ciones (M) y de
variables (N)
el usuario está
de acuerdo
No
Si
Se pregunta si se
quiere maximizar
o minimizar
Se introducen
los nombres de
las variables y
la función
objetivo
Son
válidos los
datos y el usuario
está de acuerdo
No
Si
Se introducen los
coeficientes de costo
y los de las
variables
Son
válidos los
datos y el usuario
está de acuerdo
No
Si
1

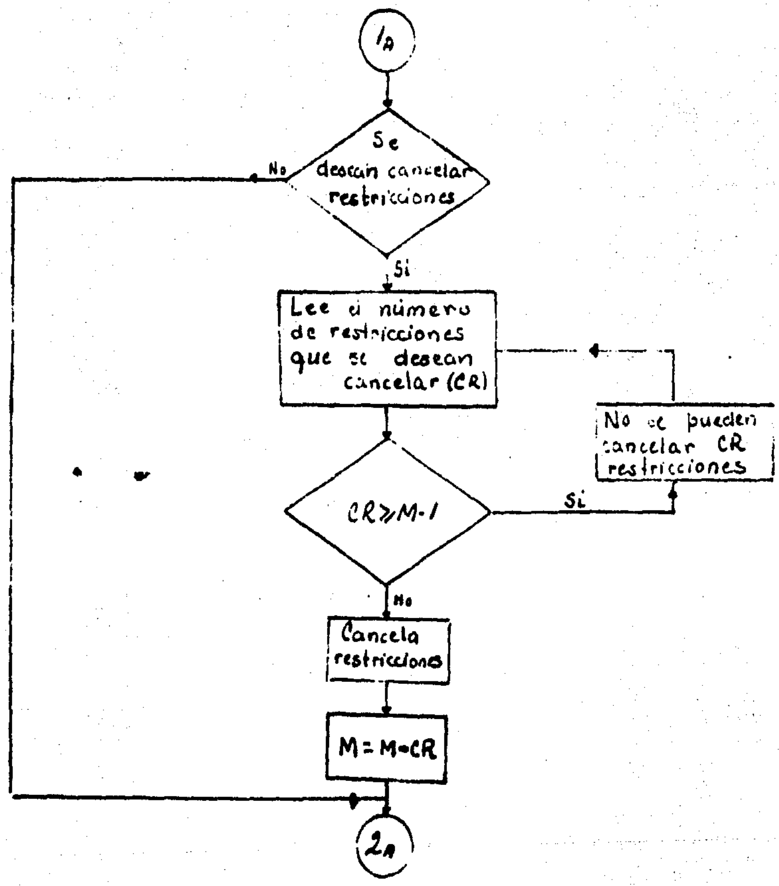

1
Se introducen los tipos de restricciones y los términos independientes
Son válidos los datos y el usuario está de acuerdo
No
Si
2

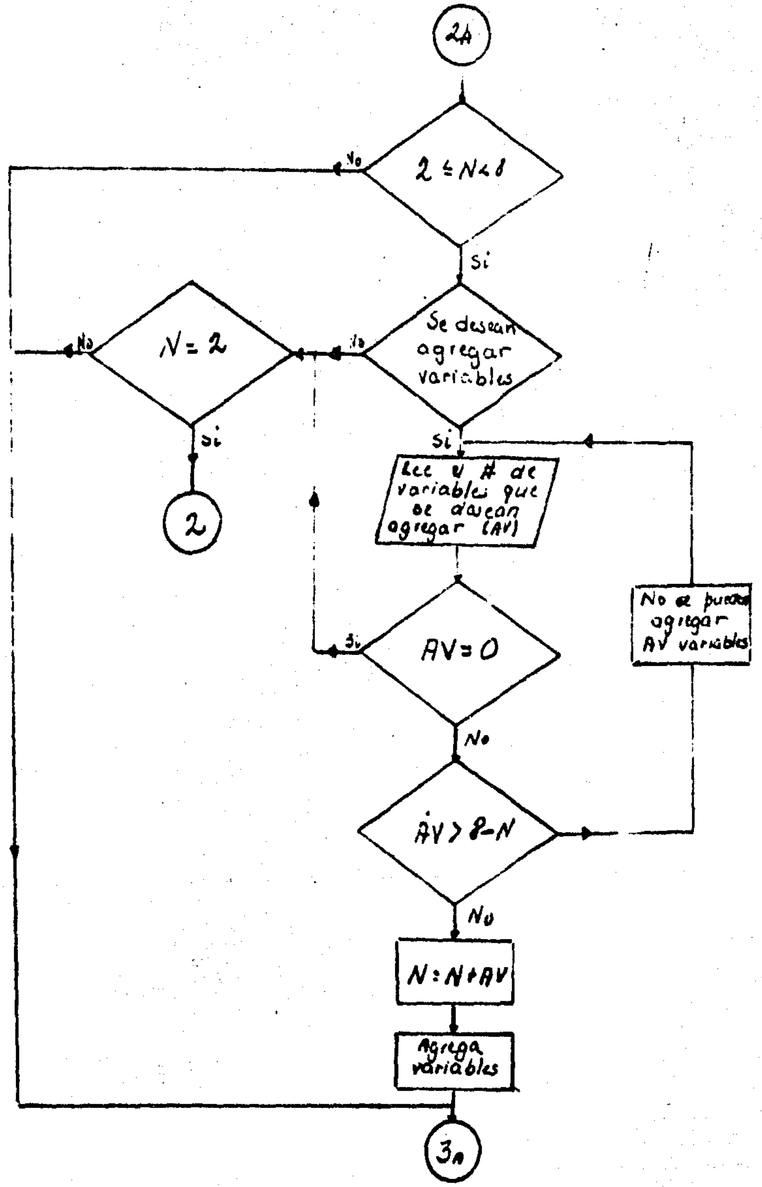

2
Escribe el problema a resolver.
Desea hacer alguna modificación al problema
Si
A
No
Se desea introducir base
No
Si
Lee variables candidatas a formar la base
Las variables elegidas forman una base
No
Las variables elegidas no forman base
Si
Pasa el problema a la forma estándar
Invierte la base obtenida
B


1
Se introducen los tipos de restriccio nes y los térmi nos independientes
Son válidos los datos y el usuario está de acuerdo
No
Si
2

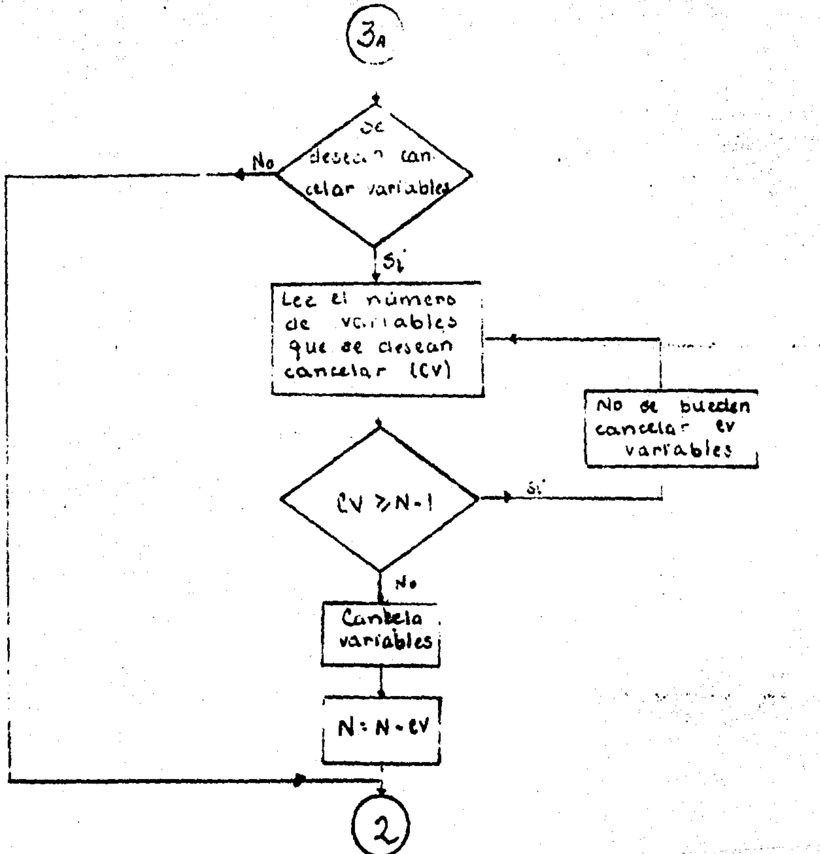

2
Escribe el problema a resolver.
Desea hacer alguna modificación al problema
Si
A
No
Se desea introducir base
No
Si
Lee variables candidatas a formar la base
Las variables elegidas forman una base
No
Las variables elegidas no forman base
Si
Pasa el problema a la forma estándar
Invierte la base obtenida
NB=0 (Indica que no se ha verificado si hay variables artificiales básicas
B


A
Cambios
2 ≤ M ≤ 15
No
Se desean agregar restricciones
No
M = 2
No
Si
2A
Si
Lee el # de restricciones que se desean agregar (AR)
AR = 0
Si
No
AR > 15-M
Si
No se pueden agregar AR restricciones
No
M = M + AR
Agrega restricciones
1A

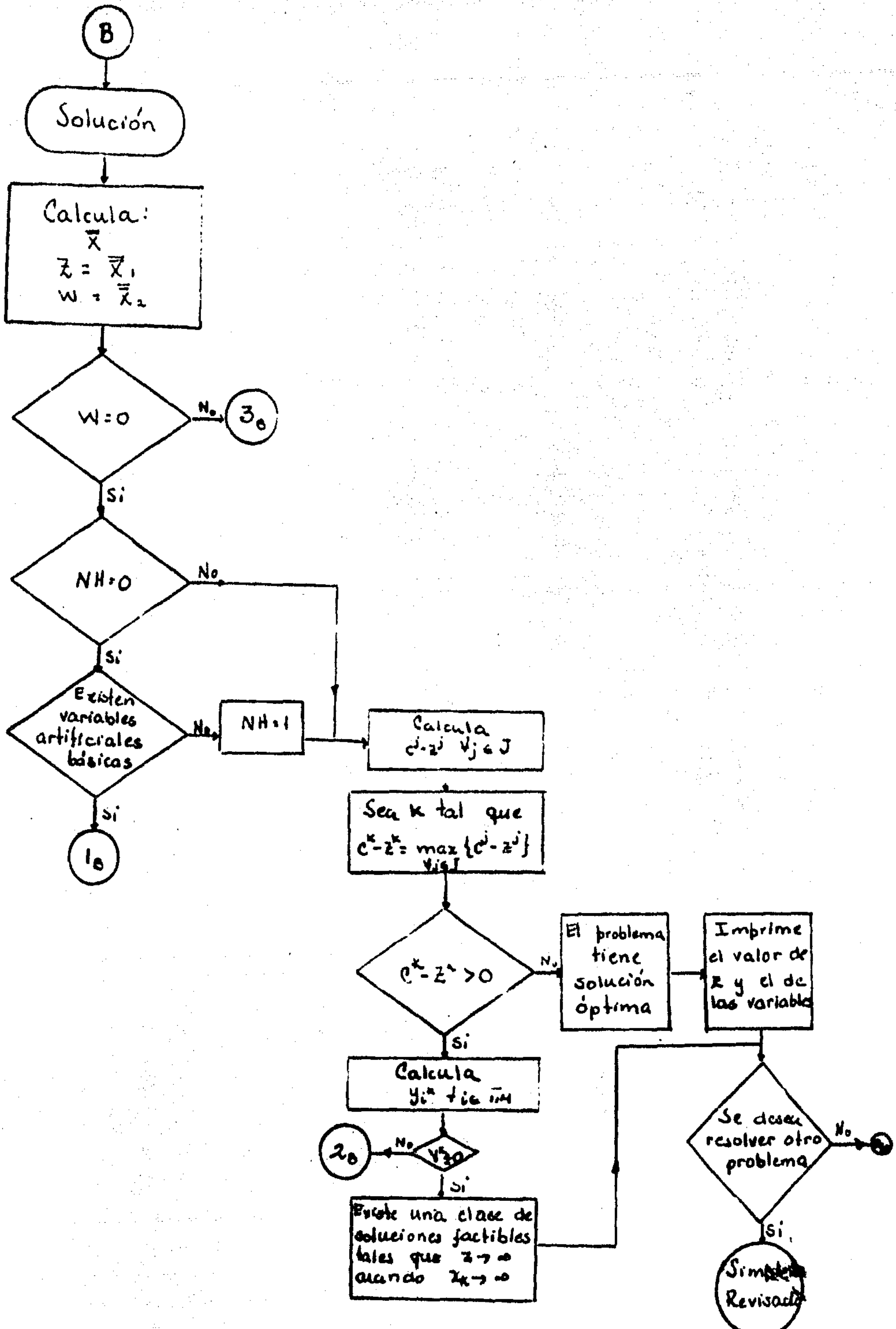

1A
Se desean cancelar restricciones
No
Si
Lee el número de restricciones que se desean cancelar (CR)
CR≥M-1
Si
No se pueden cancelar CR restricciones
No
Cancela restricciones
M = M-CR
2A

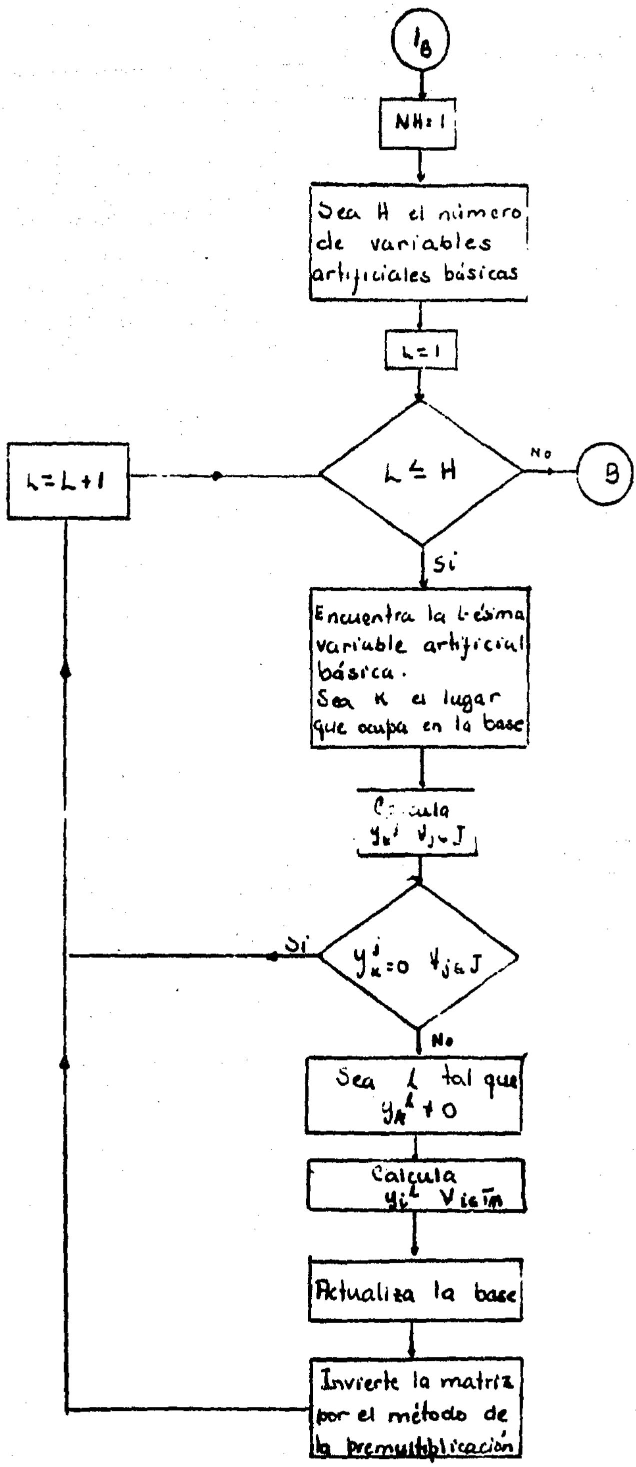


2A
2 ≤ N < 8
No
Si
Se desean agregar variables
No
N = 2
No
Si
2
Si
Lee # de variables que se desean agregar (AV)
AV = 0
Si
No
AV > 8-N
No
No se pueden agregar AV variables
N = N + AV
Agrega variables
3A

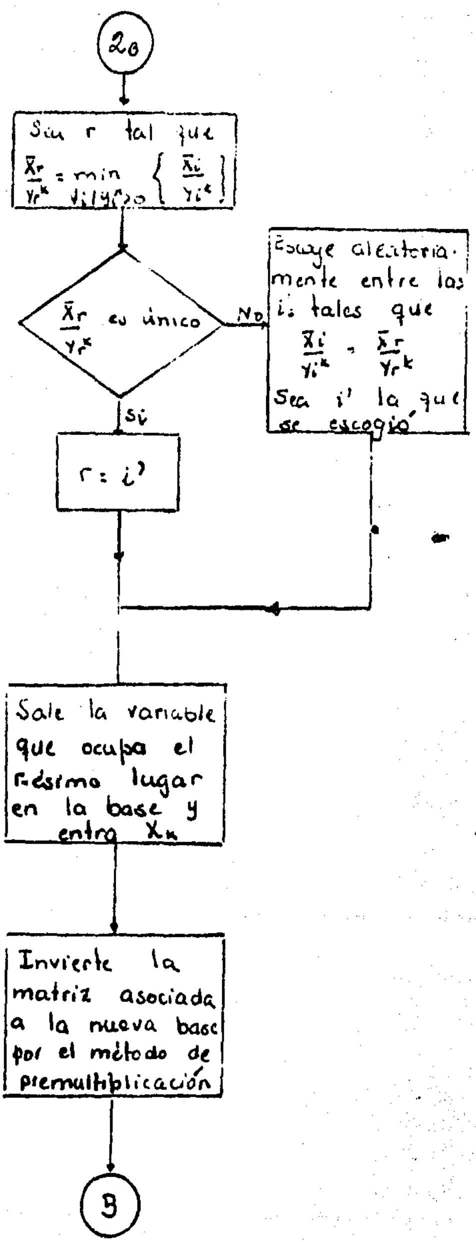


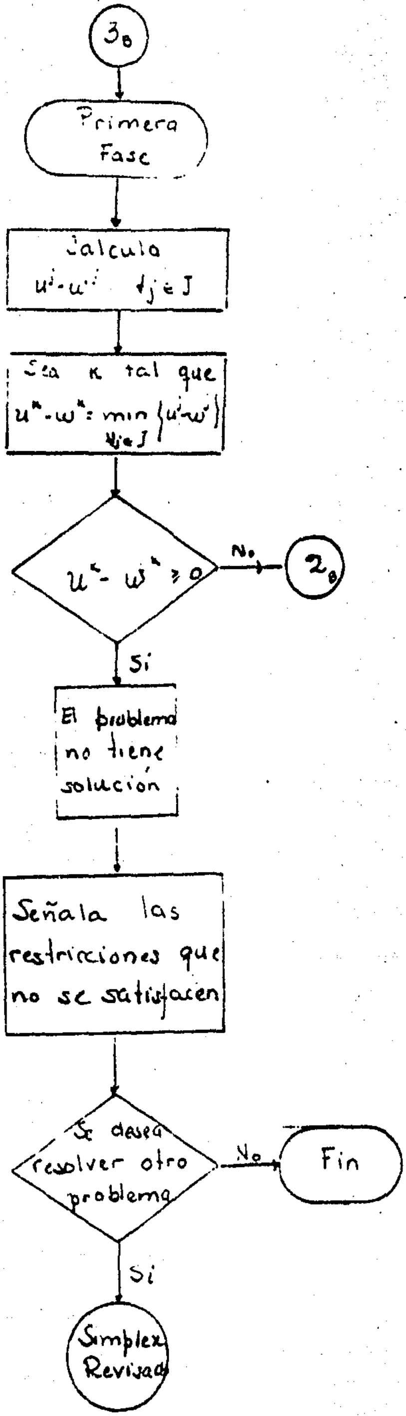
3A
Se desean cancelar variables
No
Si
Lee el número de variables que se desean cancelar (CV)
No se pueden cancelar CV variables
CV ≥ N-1
Si
No
Cancela variables
N = N - CV
2


B
Solución
Calcula:
X̄
Z = X̄1
W = X̄2
W=0
No
3B
Si
NH=0
No
Si
Existen variables artificiales básicas
No
NH=1
Si
1B
Calcula
$c^j - z^j \ \forall j \in J$
Sea k tal que
$c^k - z^k = \max_{\forall j \in J} \{c^j - z^j\}$
$c^k - z^k > 0$
No
El problema tiene solución óptima
Imprime el valor de z y el de las variables
Si
Calcula
$y_i^k \ \forall i \in \bar{m}$
No
2B
Si
Existe una clase de soluciones factibles tales que $z \to \infty$ cuando $x_k \to \infty$
Se desea resolver otro problema
No
Si
Simplex Revisado



I_B
NH=1
Sea H el número de variables artificiales básicas
L=1
L ≤ H
No
B
Si
L=L+1
Encuentra la L-ésima variable artificial básica.
Sea K el lugar que ocupa en la base
Calcula
y_K^j ∀ j ∈ J
y_K^j = 0 ∀ j ∈ J
Si
No
Sea l tal que y_K^l ≠ 0
Calcula
y_i^l ∀ i ∈ m
Actualiza la base
Invierte la matriz por el método de la premultiplicación


2B
Sea r tal que
$\frac{\bar{X}_r}{y_r^k} = \min_{\forall i / y_i^k > 0} \left\{ \frac{\bar{X}_i}{y_i^k} \right\}$
$\frac{\bar{X}_r}{y_r^k}$ es único
No
Si
Escoge aleatoriamente entre las i, tales que
$\frac{\bar{X}_i}{y_i^k} = \frac{\bar{X}_r}{y_r^k}$
Sea i' la que se escogió
r = i'
Sale la variable que ocupa el r-ésimo lugar en la base y entra X_k
Invierte la matriz asociada a la nueva base por el método de premultiplicación
B


3B
Primera Fase
Calcula $u^j - w^j \quad \forall j \in J$
Sea k tal que $u^k - w^k = \min_{\forall j \in J} \{u^j - w^j\}$
$u^k - w^k \geq 0$
No
2B
Si
El problema no tiene solución
Señala las restricciones que no se satisfacen
Se desea resolver otro problema
No
Fin
Si
Simplex Revisado

BIBLIOGRAFIA

-DANTZIG. George Bernard
Linear Programming and extensions
Princeton University

-HADLEY, George
Linear Programming
Addison Wesley

-SIMONNARD, Michel
Linear Programming
Prentice-Hall