



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE INGENIERIA

Programa de Computadora para la
utilización del Método del Elemento Finito

Tesis Profesional

Que para obtener el título de

INGENIERO CIVIL

presenta

VICTOR HUGO JUANICO MIRELES





UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Programa de Computadora para la Utilización del
Método del Elemento Finito

Tesis Profesional
Víctor Hugo Juanico Mireles

Índice

	Introducción.	1
1	Método del Elemento Finito.	1
1.1	Problemas de campo	1
1.1.2	Problemas de equilibrio	2
1.2	Métodos de las funciones de prueba	4
1.2.1	Métodos residuales	6
1.2.1.1	Método de Galerkin	8
1.2.2	Métodos variacionales	13
1.2.2.1	Diferencias finitas	14
1.2.2.2	Método de Ritz	15
1.3	Método del elemento finito	16
1.3.1	Definición del problema	17
1.3.2	Tensor de desplazamientos	17
1.3.3	Tensor de deformaciones	19
1.3.4	Tensor de esfuerzos	20
1.3.5	Relaciones desplazamiento-deformación	20
1.3.6	Relaciones esfuerzo-deformación	23
1.3.7	Principio del trabajo virtual	26
1.3.8	Funciones de interpolación	29
1.3.8.1	Elementos Unidimensionales	29
1.3.8.2	Elementos Bidimensionales	44
1.3.8.3	Mapeo de coordenadas	46
1.3.9	Obtención de las ecuaciones del Elemento Finito	50
1.3.9.1	Desplazamientos	50
1.3.9.2	Coordenadas	50
1.3.9.3	Deformaciones	51
1.3.9.4	Equilibrio estático	55
1.3.9.5	Integración gaussiana	61
2	Descripción del programa.	
2.1	Descripción general	64
2.2	Programa principal	67
2.3	Subrutinas utilizadas	69
2.3.1	Lectura de coordenadas	69
2.3.2	Lectura de condiciones de frontera	70
2.3.3	Lectura de cargas concentradas	72
2.3.4	Cálculo de las matrices de rigidez	73
2.3.5	Ensamble de las matrices de rigidez	78
2.3.6	Solución del sistema de ecuaciones	80
2.3.7	Cálculo de desplazamientos	81
2.3.8	Cálculo de esfuerzos	82

2.3.9	Subrutinas auxiliares	83
2.3.9.1	Multiplicación de matrices	83
2.3.9.2	Impresión de matrices	84
3	Solución de un problema práctico usando el programa.	
3.1	Datos generales	86
3.2	Listado del programa	87
4	Comparación de los resultados obtenidos con el programa, con los obtenidos por un método tradicional.	
4.1	Datos generales	114
4.2	Cálculo de distancias	115
4.2.1	Distancias para el elemento 1	116
4.2.2	Distancias para el elemento 2	116
4.2.3	Distancias para el elemento 3	116
4.2.4	Distancias para el elemento 4	117
4.2.5	Resumen de distancias	117
4.3	Expresiones para momento flexionante y cortante	117
4.4	Cálculo de esfuerzos del elemento 1	118
4.4.1	Puntos 1 y 2 de Gauss	118
4.4.2	Puntos 3 y 4 de Gauss	119
4.5	Cálculo de esfuerzos del elemento 2	119
4.5.1	Puntos 1 y 2 de Gauss	119
4.5.2	Puntos 3 y 4 de Gauss	120
4.6	Cálculo de esfuerzos del elemento 3	121
4.6.1	Puntos 1 y 2 de Gauss	121
4.6.2	Puntos 3 y 4 de Gauss	122
4.7	Cálculo de esfuerzos del elemento 4	122
4.7.1	Puntos 1 y 2 de Gauss	122
4.7.2	Puntos 3 y 4 de Gauss	123
	Conclusiones.	135

Introducción

A lo largo de la historia de la Ingeniería se han presentado problemas que por su complejidad no han podido ser resueltos en el momento, sino que se ha debido esperar a que el ingenio del hombre desarrollase nuevas técnicas para la solución de los mismos, estos problemas han sido de diversa índole, pero principalmente de factibilidad técnica, es decir, no se ha podido llevar a cabo la ejecución de ciertas obras, por una parte debido a la falta de herramientas o materiales que permitiesen su construcción, y por otra a la imposibilidad de realizar un análisis que permitiese tener la seguridad suficiente en el estado de esfuerzos a que está sometida la estructura, para con ello conocer el comportamiento de la estructura en condiciones de trabajo y realizar su diseño estructural.

El primer caso ha sido resuelto con el desarrollo de tecnologías que han permitido la creación de maquinaria más potente y eficiente, materiales más resistentes y trabajables así como nuevas técnicas constructivas.

Un ejemplo de esto es el caso de la construcción de los grandes puentes, presas, edificios esbeltos o de formas caprichosas, problemas que han sido resueltos en la parte concerniente a su realización física, gracias al desarrollo de la tecnología en maquinarias, como por ejemplo las grúas torre, pavimentadoras, excavadoras etc. que han permitido la ejecución de obras que no era posible construir anteriormente. Por otra parte, con el desarrollo de mejores materiales como son: concretos más resistentes, aditivos y aceros de mejor calidad, se ha podido realizar un diseño más confiable. Así mismo, se han podido utilizar otras técnicas constructivas.

En cuanto a su análisis, el problema ha sido resuelto gracias al desarrollo de las matemáticas, comenzando por la invención del álgebra, una poderosa herramienta que permitió modelar y generalizar la solución de los problemas; posteriormente con el desarrollo del Cálculo Diferencial, se pudieron desarrollar diversas teorías, que permitieron proponer fórmulas de solución sencillas, obtenidas a partir del análisis infinitesimal de los problemas.

Un ejemplo de esto, es la obtención de la fórmula de la escuadría, en la cual, partiendo del análisis infinitesimal del estado de esfuerzos en un punto, se obtiene una expresión para conocer el estado de esfuerzos en cualquier punto de la sección transversal de una pieza sometida a momento flexionante, así como el caso de obtención de la expresión para el caso de piezas sometidas a esfuerzos cortantes, con la que conociendo la fuerza

cortante en una sección, es posible el cálculo de los esfuerzos debidos a esta fuerza en cualquier punto de la sección.

Sin embargo, las expresiones anteriores sólo sirven para cierto tipo de problemas, ya que parten de ciertas suposiciones con el fin de facilitar la obtención de las expresiones; estas son, que la sección cumple con ciertas características de homogeneidad, elasticidad y forma, además de que la teoría parte de la existencia de materiales que cumplen con la ley de Hooke. Por otra parte, las expresiones anteriores se obtienen realizando el análisis partiendo de la suposición del comportamiento de las barras, la indeformabilidad de la sección y que la altura de la sección es pequeña en comparación con su largo, condiciones que no se cumplen en algunos casos.

Las suposiciones anteriores no es posible aplicarlas a problemas como son aquellos en los que el comportamiento de los materiales no se asemeja a un comportamiento elástico, en los que la topología del problema no permite la suposición de una estructura parecida a una barra o bien aquéllos en que la aplicación de la carga provoca deformaciones tales que cualquier suposición de una sección no deformada resulta falsa; si en casos como éstos, se plantea una ecuación diferencial, o un sistema de ecuaciones diferenciales para tratar de solucionar el problema, nos encontramos con que no es posible su solución utilizando los métodos convencionales, dado el grado de complejidad que presentan las ecuaciones que se obtienen.

Para resolver estos tipos de problemas se han desarrollado métodos numéricos, los cuales han permitido el abordar su solución. En éstos, para llegar a la solución de un problema, a diferencia de los métodos convencionales, ésta no se obtiene de una manera exacta sino que se obtiene una aproximación de la misma, partiendo de una solución que se asemeja a la correcta utilizando similitudes, para pulirla después mediante transformaciones en las que se resuelve el problema utilizando métodos iterativos, hasta lograr que el error entre la solución exacta y la aproximación sea el mínimo posible; como un ejemplo de éstos tenemos los métodos de diferencias finitas.

Estos consisten en la resolución de una ecuación diferencial, a partir de la utilización de la definición del diferencial de una función, obteniéndose la solución de la ecuación como la solución de la suma de diferencias.

El Método del Elemento Finito es utilizado para la resolución de problemas que involucren sistemas de ecuaciones

diferenciales, para lo cual aproxima la solución utilizando métodos numéricos; además aplica ecuaciones que relacionan características del problema, tales como módulos de deformabilidad de un material con los estados de esfuerzos que se presentan en el mismo, o entre la corriente inducida en un circuito y el voltaje en el mismo.

Esta aproximación se obtiene dividiendo el objeto que queremos analizar en elementos más pequeños, los que se relacionan entre sí con ecuaciones de continuidad obteniéndose la solución general como la "suma" de las soluciones de los elementos. La exactitud de esta solución es directamente proporcional al número de elementos en que se haya dividido el objeto a analizar y sería bastante cercana a la solución exacta con un número infinito de elementos, pero dado que esto es imposible se aproxima la solución utilizando un número finito de elementos, de ahí el nombre del método.

En resumen y de acuerdo a lo expresado en la referencia 2 "El concepto fundamental del método del elemento finito es que cualquier cantidad continua se puede aproximar mediante un modelo discreto compuesto de funciones continuas, definidas en un número finito de regiones."

El MEF se utiliza en ingeniería en la solución de problemas de hidráulica, estructuras, geotecnia y en general para cualquier problema ingenieril, en el que al momento de plantear el modelo que representa al problema que se desea solucionar, nos topamos con un sistema de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, este método tiene un problema, requiere de un número excesivo de operaciones para poder llegar a una solución que resulte aceptable.

Dado el desarrollo de la computación que ha habido en los últimos tiempos, se ha presentado una reducción de los costos que implica utilizar la computadora como herramienta, con lo que se ha hecho posible el acceso a las mismas a un número cada vez mayor de personas, lo cual ha permitido, entre otras cosas la resolución de problemas de un grado de complejidad grande, como es el caso de problemas de ingeniería en los que la obtención de resultados depende de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales.

En el caso de problemas relacionados con la hidráulica podemos hacer el diseño de redes de alcantarillado, usando la teoría del elemento finito, tomando en cuenta las características del problema. Siendo los elementos finitos tramos de tubería, en los cuales sus áreas se relacionan entre sí mediante ecuaciones de continuidad, para que de un ensamble de ecuaciones y la resolución del sistema se obtengan las dimensiones óptimas de la

tubería de alcantarillado.

Para el caso que nos vamos a ocupar nos interesará obtener resultados que nos indiquen el estado de esfuerzos en un medio como podría ser un elemento estructural de un edificio o bien el suelo, por lo tanto utilizaremos ecuaciones de continuidad de esfuerzos, de relación esfuerzo-deformación (Ley de Hooke-Cauchy), y de relación entre los esfuerzos y la geometría del objeto a analizar, al cual denominaremos estructura.

El presente trabajo tiene, por objeto el desarrollo de un programa de computadora, para, aplicando el método del elemento finito, resolver de problemas de Ingeniería Civil en el área de mecánica de sólidos, dado que para el desarrollo de un programa se requiere primeramente conocer el problema, en el primer capítulo se describe el Método del Elemento Finito de una manera general, explicando las teorías en que está basado, asimismo se desarrollan expresiones orientadas al caso particular de la mecánica de sólidos usando de elementos isoparamétricos rectangulares, con funciones de interpolación lineales.

En el segundo capítulo se describen el programa desarrollado, así como las subrutinas empleadas; cabe aclarar que no se ocuparán los conceptos de "Ancho de banda", ni de "Contorno de Silueta" a fin de no complicar el desarrollo del tema con consideraciones que si bien son de vital importancia para el trabajo normal con el MEF, no se consideran necesarios para la comprensión teórica del método en sí.

Posteriormente, en el capítulo 3 el programa fue probado con un ejemplo sencillo en el cual se tomaron pocos elementos y se fue revisando que las matrices estuvieran bien calculadas. En el capítulo 4 se solucionó el mismo problema con la Teoría de Barras a fin de observar las desviaciones del MEF al utilizar distintos tipos de mallas, para finalmente obtener una serie de conclusiones, basadas en los resultados obtenidos.

Capítulo 1

Método del Elemento Finito

1.1 Problemas de campo.

Dentro de los diversos tipos de problemas que un ingeniero debe resolver se encuentran aquellos en que el problema queda definido por ecuaciones de campo, estos se pueden subdividir a su vez en; problemas de equilibrio, de propagación y de valores característicos.

En los problemas de equilibrio se busca conocer la configuración de un sistema físico dadas ciertas condiciones establecidas.

Como ejemplos de los problemas de equilibrio tenemos :

- Estado de esfuerzos en un medio.
- Distribución de temperaturas en un medio.
- El flujo de energía eléctrica en forma continua.
- Flujo de fluidos.

En los problemas de valores característicos (Eigen-valores) se busca encontrar los valores de ciertas variables tales que nos proporcionen un estado propuesto en el comportamiento del sistema, como por ejemplo :

- Cálculo de frecuencias naturales en vibraciones.
- Problemas de pandeo e inestabilidad.
- Resonancia en un medio continuo.

Los problemas de propagación son aquellos en los que a

partir de condiciones iniciales de frontera se requiere determinar el estado del sistema en un cierto instante t , como ejemplo de estos tenemos :

- Propagación de ondas de presión.
- Transmisión de calor.
- Propagación de ondas sísmicas.

De los tres casos anteriores se pueden obtener soluciones después de establecer ecuaciones que describan al sistema en análisis, una vez establecidas estas ecuaciones se puede plantear ya sea un sistema de ecuaciones algebraicas o un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, el cual una vez solucionado nos proporciona los valores de las incógnitas de nuestro problema.

El objetivo del Método del Elemento Finito es transformar el sistema continuo de un número infinito de grados de libertad en un sistema discreto con un número finito de grados de libertad.

1.1.2 Problemas de equilibrio.

En la ingeniería en ocasiones se encuentran problemas en los cuales dado un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas conocido se requiere saber el estado de esfuerzos que se presenta en el mismo, o también problemas en los que dadas ciertas condiciones de movimiento se necesita encontrar los desplazamientos en el cuerpo; en estos problemas se tienen ecuaciones que definen la geometría del mismo, así como ecuaciones que definen las relaciones existentes entre esfuerzos y deformaciones; con la combinación de éstas se pueden llegar a establecer ecuaciones que definan el dominio del problema; utilizando estas últimas con las que definen las condiciones de frontera del problema se puede obtener el estado de esfuerzos en el cuerpo.

La solución de este problema se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones que se logra de la formulación del mismo; en el caso de que se haga el análisis discretizando la estructura en estudio no tenemos ningún problema, ya que el sistema de ecuaciones obtenido es un sistema de ecuaciones algebraicas, que se puede solucionar con alguno de los métodos existentes como son

Gauss, Gauss-Seidel, Cholesky, etcetera; sin embargo en el caso de que se analice el cuerpo de una manera continua el sistema de ecuaciones resultante es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que ya no tiene una solución directa.

Este caso se puede resolver utilizando métodos numéricos tales que permitan la transformación, del sistema de ecuaciones diferenciales en uno de ecuaciones algebraicas, entre estos métodos se encuentra el Método del Elemento Finito (MEF).

Este sirve para resolver no solamente problemas de equilibrio, sino en forma genérica todos aquellos en los que dadas ciertas ecuaciones de campo, que gobiernan el dominio del problema y que cumplen con ciertas condiciones de frontera, se desee encontrar una solución que cumpla con las ecuaciones, tanto del dominio como de frontera.

Estas condiciones se pueden expresar en forma matricial de la siguiente manera :

$$[A]\{u\} = \{f\}$$

Donde

- A.- Es una matriz cuyos componentes son operadores diferenciales.
- u.- Es un vector de funciones incógnitas.
- f.- Es un vector con funciones conocidas.

Así mismo las condiciones de frontera se pueden expresar en forma matricial tal y como lo indica la siguiente ecuación :

$$[B]u = \{g\}$$

Donde :

B.- Es una matriz cuyos componentes son operadores diferenciales.

u.- Es un vector de funciones incógnitas.

g.- Es un vector con funciones conocidas.

En las ecuaciones anteriores los elementos : [A] y [B] son matrices de operadores diferenciales, u es un vector de funciones dependientes de una o varias variables independientes.

Siendo [A] una matriz que contiene ciertas ecuaciones diferenciales que definen el dominio del problema y la matriz B las ecuaciones diferenciales que gobiernan las condiciones de frontera del problema.

Estos problemas se pueden solucionar de diversas maneras, entre ellos los métodos de las funciones de prueba son los que más se ocupan debido a la facilidad de su aplicación.

1.2 Métodos de las funciones de prueba

En los problemas de campo de una variable dependiente u cada

una de las ecuaciones que gobiernan el problema pueden ser escritas de la siguiente manera :

$$F(u) = G(u)$$

En donde F y G son ambas funciones de u y se busca una solución $u(x_i)$ tal que satisfaga la ecuación anterior. Los métodos de las funciones de prueba proponen para la solución del problema que en lugar de buscar la solución exacta de la ecuación se utilice una aproximación de la solución de la forma :

$$u = \sum_{r=1}^M C_r \phi$$

En la que :

C_r .- Son coeficientes que se requieren conocer y se determinan utilizando algún criterio que minimice el error generado al utilizar esta función en lugar de la solución exacta.

ϕ .- Es un vector con funciones conocidas (Propuestas).

u .- Es una función tal que satisface la ecuación (1) con un mínimo de error.

Los métodos de las funciones de prueba consisten en la minimización del error producido al utilizar la solución aproximada u en lugar de la solución exacta, y pueden clasificarse de acuerdo al criterio que utilicen para la solución del problema, en métodos residuales y métodos variacionales.

En los métodos residuales se busca minimizar el residuo que

se obtiene al usar la función de prueba 0, mientras que en los métodos variacionales se utilizan criterios del cálculo variacional para determinar el valor mínimo del error al utilizar la función aproximada.

1.2.1 Métodos residuales.

Los métodos de los residuos pesados consisten en que la función de prueba U se obtenga siguiendo el criterio de que al sustituirla en la ecuación (1) se obtenga un residuo que sea mínimo.

Expresando la ecuación (1) como una diferencia donde el residuo es igual a cero :

$$AU - f = 0 \quad (3)$$

Si en lugar de utilizar la función u utilizamos la función de prueba U , el residuo no será cero, existiendo entonces un error e que será igual a :

$$AU - f = e \quad (4)$$

Por lo tanto al seleccionar las funciones ϕ que forman las funciones de prueba debemos procurar satisfagan las condiciones de frontera y al seleccionar los coeficientes C que el error sea mínimo.

Dado que estamos hablando de un sistema de de ecuaciones, el error e será igual a la suma de los errores de cada ecuación, entonces se deberá procurar que esta suma sea minima y, tomando en cuenta que estamos hablando de ecuaciones que dan diversos valores para cada funcion, esta operacion deberá ser una suma pesada de los errores, esto se logra utilizando lo que se conoce como una funcion pesada de los residuos que es :

$$W f(e) \quad (5)$$

Donde

W : Es la función de peso.

$f(e)$: Es la función residual tal que $f(e)=0$.

Siendo esta función la que debe satisfacer el criterio de pequeñez, esto es, que la suma de los valores de esta función sea igual a cero o cuando menos de un valor lo suficientemente pequeño, esta condición se resume en una sumatoria para los casos discretos y en el caso de un medio continuo se transforma en la siguiente integral :

$$\int W f(e) d\Omega = 0 \quad (6)$$

Al sustituir la función de prueba U en la ecuación (1), se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas, el cual es fácilmente resuelto con algún método de solución de ecuaciones,

utilizándose con mayor frecuencia aquellos que usan aproximaciones numéricas para la obtención de la solución, entre estos métodos se encuentran los métodos de Gauss, Crout Gauss-Crout, Cholesky, etc.

1.2.1.1 Método de Galerkin.

Dentro de los métodos de residuos pesados el más usado actualmente es el conocido como método de Bubnov-Galerkin o simplemente de Galerkin, este método plantea hacer que el error sea ortogonal a las funciones de prueba; de cursos de algebra lineal recordamos que la condición para que dos funciones sean ortogonales es que su producto punto o escalar sea igual a cero :

$$\int \xi e \, d\Omega = 0 \quad (7)$$

Ejemplo :

Resolver la siguiente ecuación :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = C \quad (1)$$

Con condiciones de frontera :

$$u = 0 \text{ si } x = \pm a ; y = \pm b \quad (2)$$

Observando las ecuaciones anteriores podemos ver que tienen la forma de las ecuaciones vistas anteriormente.

Esto es la primera ecuación tiene la forma :

$$A u = f$$

Y la segunda ecuación la forma :

$$B u = g$$

Por lo tanto podemos usar el método de Galerkin para obtener su solución; proponiendo la siguiente función de prueba como solución :

$$U = \alpha (x^2 - a^2) (y^2 - b^2)$$

Esta ecuación debe satisfacer las condiciones de frontera requeridas; para comprobarlo, sustituimos los valores de $x = a$; $y = b$.

Haciendo $x = a$:

$$U(a) = \alpha (a^2 - a^2) (y^2 - b^2) = 0$$

Haciendo $y = b$:

$$U(b) = \alpha (x^2 - a^2) (b^2 - b^2) = 0$$

Por lo tanto esta función cumple con las condiciones de frontera de la función original.

Calculando ahora las derivadas parciales de esta función con respecto a la variable x .

La primera derivada es :

$$\frac{d U}{d x} = 2x \alpha (y^2 - b^2)$$

Derivando por segunda ocasión con respecto a x

$$\frac{d^2 U}{d x^2} = 2 \alpha (y^2 - b^2)$$

Derivando ahora con respecto a y :

$$\frac{d U}{d y} = 2y \alpha (x^2 - a^2)$$

Siendo su segunda derivada :

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 2 \alpha (x^2 - a^2)$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la primera ecuación e igualando a cero obtenemos el error :

$$e = 2\alpha \frac{1}{2} (y^2 - b^2) + 2 \alpha (x^2 - a^2) - C$$

Podemos observar que en este caso se presenta una semejanza de esta ecuación con la ecuación :

$$\alpha = \sum_{r=1}^M C_r \varnothing \quad (2)$$

Donde :

$$C_r = \alpha$$

$$\varnothing = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$$

Para aplicar el método de Galerkin debemos minimizar el error ocurrido, al utilizar esta función lo logramos integrando :

$$\int (-c + 2\alpha (y^2 - b^2) + 2\alpha (x^2 - a^2)) ((x^2 - a^2)(y^2 - b^2)) dx dy$$

Resolviendo :

$$\alpha = 5/8 \frac{c}{a^2 + b^2}$$

Sustituyendo queda :

$$u = \left(5/8 \frac{c}{a^2 + b^2} \right) (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$$

Si bien ésta no es la solución exacta si nos sirve para obtener el resultado de la ecuación diferencial del problema, que será el mismo que si utilizáramos la solución exacta, ya que estamos cumpliendo con las condiciones de frontera.

1.2.2 Métodos variacionales.

Estos métodos están basados en el cálculo variacional, en el cual se demuestra que si se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma :

$$[A]u = f$$

Si existe una solución, ésta debe ser tal que haga que el valor de la funcional* $I(u)$, tenga un valor estacionario, (un valor estacionario es aquel que hace que la funcional $I(u)$ sea un valor máximo ó mínimo) siempre y cuando A sea un operador lineal, en el cálculo variacional se demuestra lo anterior y además se concluye que dicho valor estacionario es un mínimo.

$$I(u) = \min_{u \in D}$$

Del cálculo diferencial de una sola variable se recuerda que para determinar el valor de la variable tal que haga que una función tenga un valor estacionario se debe cumplir que el valor de su primera derivada valuada el punto que tiene un valor estacionario sea igual a cero, esto es :

Si se tiene una función $F(u)$ se debe cumplir :

$$\frac{d F(u)}{d u} = 0 \quad \text{Para } u = u^*$$

* Función de función

Esta condición se puede extender a cualquier número de variables realizando la derivación de la función con respecto a cada una de las variables y en el caso de desconocer los valores de las variables que hacen que la función sea cero se pueden obtener un sistema de ecuaciones el cual al resolverse nos da los valores desconocidos de las variables.

Los métodos variacionales proponen que para la solución de la ecuación se sustituya la función de prueba en una funcional I y que después se encuentre una función Q tal que proporcione a la funcional un valor extremal.

Esto es :

$$I(u) = \min_{u \in D}$$

Teniendo como condiciones de frontera a :

$$B_i u = g_i \quad i = P_1, P_2, \dots, P_m$$

Siendo la funcional una integral de u y sus derivadas en el dominio D para la que se tendrá que si existe un valor estacionario este será forzosamente un mínimo si el sistema es positivo y un mínimo absoluto si el sistema es positivo definido. Dentro de los métodos variacionales tenemos entre otros los de Diferencias Finitas y el de Ritz.

1.2.2.1 Diferencias Finitas.

Si tenemos un conjunto de M puntos nodales escogidos dentro del dominio del problema, a los cuales denominaremos P_q y denominamos u_q al valor de la función u valuada en el punto P_q

$$u(P_q) = u_q$$

$$q = 1, 2 \dots M$$

Y si sustituimos en la funcional $I(u)$ las derivadas por diferenciaciones sucesivas de $u_1, u_2 \dots, u_m$ siguiendo el criterio del cálculo de diferencias finitas, y las integrales por sumas finitas la funcional $I(u)$ se transforma en una función $I_m = I_m(u_1, u_2, \dots, u_m)$ a la cual se le aplica la condición de minimización :

$$\frac{\delta I_m(u_1, u_2, \dots, u_m)}{\delta u_q} = 0$$

1.2.2.2 Método de Ritz.

En este método se sustituye la ecuación que nos aproxima el valor de u_m en la funcional $I(u)$, transformando esta en una función que tendrá como incógnitas los valores de C_r , si se aplica a ésta la condición para que tenga un valor estacionario, se llega a un sistema de ecuaciones que para el caso de problemas de campo son algebraicas y para el caso de problemas de valores característicos o de propagación son generalmente diferenciales ordinarias.

Esto es si se aproxima el valor de u con :

$$u = \sum_{r=1}^M C_r \phi_r$$

Si se sustituye este valor en la funcional, se deriva con respecto a los coeficientes C_r y se iguala a cero se tendrá un sistema de M ecuaciones con M incógnitas el cual al resolverse nos proporciona los valores de los coeficientes C_r .

Si se aplica la condición de minimización queda :

$$\frac{\delta I(u)}{\delta C_r} = 0 \quad r = 1, 2, \dots, M$$

Después de aplicar esta condición se obtiene un sistema de ecuaciones de M incógnitas que al ser solucionado nos proporciona los valores de los coeficientes C_r .

El método del elemento finito puede ser desarrollado tomando en cuenta cualquiera de los dos criterios antes explicados (Residuales o Variacionales).

1.3 Método del elemento finito

El método del elemento finito es a semejanza de los otros métodos vistos anteriormente uno que se basa en la proposición de una función que aproxime la solución exacta, y en el que la subdivisión de la región en subdominios, celdas o elementos finitos es una parte esencial del proceso; en este método se utilizan funciones de prueba las que se adaptan al elemento de tal manera que los parámetros de las funciones sean las incógnitas del problema, teniéndose entonces que el MEF es un caso especial de discretización, en el cual un problema con ecuaciones de un número infinito de grados de libertad se transforma en una serie de ecuaciones aproximadas con un número finito de grados de libertad.

Los parámetros de las funciones se pueden elegir de acuerdo a distintos criterios y en el caso de problemas de esfuerzos se procura que los parámetros sean los desplazamientos de los nudos.

El MEF se puede clasificar de acuerdo a la manera de definir los parámetros de las funciones de interpolación en las siguientes categorías :

Métodos nodales : En estos métodos los parámetros se definen como los valores de la función u y de sus derivadas en los nodos.

Métodos de coeficientes : En este caso los parámetros son los coeficientes de la representación de la función sobre el elemento.

Métodos de celdas : Los parámetros son representativos del valor de la función u en el dominio del elemento, pudiendo ser el promedio o el valor medio por ejemplo.

Estas funciones son conocidas también como funciones de interpolación (Shape Functions), esto es debido a que su aproximación es en lo concerniente a la continuidad de la estructura; es decir, conocidos los desplazamientos en nodos predefinidos, se aproximan los desplazamientos en los puntos intermedios, interpolando su valor, usando para las funciones propuestas.

1.3.1 Definición del problema.

Los problemas a que se enfrenta el Ingeniero Civil cuando realiza un análisis de esfuerzos, son generalmente aquellos en que dado un cuerpo sujeto a un sistema de fuerzas, tanto externas como internas, se debe determinar cual es el desplazamiento en cada uno de sus puntos así como los esfuerzos y deformaciones en los mismos. Para lograr resolver el problema anterior debe considerarse cuales son los elementos que intervienen en el comportamiento del mismo.

Los elementos que se deben considerar para analizar el comportamiento estructural de un cuerpo son los desplazamientos, las deformaciones, los esfuerzos y las propiedades de los materiales, estos elementos los podemos encontrar en los tensores de desplazamientos, de deformaciones y de esfuerzos, que para el caso de esfuerzo y deformación planos sus expresiones se dan a continuación.

1.3.2 Tensor de desplazamientos.

El tensor de desplazamientos es el arreglo en el que se

encuentran agrupadas las funciones que describen el cambio en la posición de un cuerpo, esto es sus desplazamientos :

$$\{d\} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

En el tensor anterior:

u Es la componente del desplazamiento en la dirección del eje x.

v Es la componente del desplazamiento en la dirección del eje y.

1.3.3 Tensor de deformaciones.

El tensor de deformaciones es :

$$(\epsilon) = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

Donde :

ϵ_x : Es la deformación unitaria en el sentido del eje x producida por las cargas actuantes en el mismo sentido.

ϵ_y : Es la deformación unitaria en el sentido del eje y producida por las cargas actuantes en el mismo sentido.

ϵ_{xy} : Es la deformación unitaria en el sentido del eje y producida por las cargas actuantes en el sentido del eje x.

ϵ_{yx} : Es la deformación unitaria en el sentido del eje x producida por las cargas actuantes en el sentido del eje y.

Dadas las condiciones en que está planteado el problema, se puede demostrar que para el caso de estado plano de deformaciones existe la siguiente relación :

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$$

1.3.4 Tensor Esfuerzos.

La expresión del tensor esfuerzos es :

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Donde :

σ_x : Es el esfuerzo normal actuante en la dirección del eje x.

σ_y : Es el esfuerzo normal actuante en la dirección del eje y.

τ_{xy} : Es el esfuerzo cortante perpendicular a los ejes utilizados.

Con los tensores anteriores tenemos ya definidos los elementos del problema a resolver, de manera que ahora necesitamos encontrar la manera de relacionarlos entre si de manera que podamos llegar a la solución del problema, para ello contamos con distintas relaciones que se explicarán a continuación.

1.3.5 Relaciones desplazamiento-deformación.

Por principio de cuentas analizaremos la manera de relacionar los desplazamientos producidos por un estado de fuerzas en un objeto con las deformaciones en el mismo.

Si se tiene en cuenta que para el análisis de esfuerzos en un cuerpo necesitamos tener la deformación unitaria esto es la deformación por unidad de longitud, la relación entre los desplazamientos y las deformaciones se obtiene al definir la variación del desplazamiento con respecto a cada uno de los ejes.

Para el eje x será :

$$e_{xx} = \frac{\delta u}{\delta x}$$

Para el eje y será :

$$e_{yy} = \frac{\delta v}{\delta y}$$

Por último tendremos el giro, que es la deformación producida por los componentes del desplazamiento en la dirección perpendicular a la que se produce, siendo el giro total la suma de las dos direcciones analizadas.

$$2e_{xy} = \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x}$$

Las relaciones anteriores se pueden expresar en forma matricial si consideramos una matriz de operadores diferenciales L tal que :

$$(e) = [L] (d)$$

Donde :

$[L]$: Es una matriz de operadores diferenciales con la forma :

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

1.3.6 Relaciones esfuerzo-deformación.

Para relacionar los tensores de esfuerzo con los de deformación utilizamos las relaciones esfuerzo-deformación obtenidas en la mecánica del medio continuo, con las cuales se pueden relacionar los desplazamientos producidos por un cierto estado de fuerzas actuantes sobre una estructura con los esfuerzos producidos, estas relaciones son conocidas como relaciones Hooke-Cauchy.

Estas relaciones están basadas en la conocida ley de Hooke en la cual se establece que la relación entre la deformación producida en un objeto es proporcional a la fuerza aplicada al mismo, siendo la constante de proporcionalidad la rigidez del material, esta relación para el caso de una fuerza aplicada en una dirección normal al cuerpo es la siguiente :

$$F = K \sigma$$

Donde :

F = Fuerza que provoca la deformación.

K = Constante de rigidez del objeto.

σ = Deformación del objeto en la dirección en que se aplica la fuerza.

Sin embargo esta forma de expresarla depende de las dimensiones del objeto al que se le aplica la fuerza, así como de la distribución de la fuerza sobre la superficie del cuerpo, para eliminar estos inconvenientes es preferible expresarla en función de esfuerzos y de deformaciones unitarias, quedando la siguiente expresión :

$$\sigma = K e$$

En la relación anterior :

σ : Es el esfuerzo en una dirección normal a la superficie del cuerpo.

K : Es la rigidez en esa dirección.

e : Es la deformación unitaria en la dirección del esfuerzo.

En la relación anterior no se incluyen los efectos en direcciones perpendiculares al esfuerzo, además, dado que estamos trabajando con esfuerzos en dos direcciones, nos interesará una relación mucho más amplia a fin de poder abarcar el estado de esfuerzos que requerimos estudiar; esta relación la encontramos agregando el módulo de Poisson para con esto considerar el efecto producido en direcciones perpendiculares, haciendo la misma consideración para las otras direcciones, que en el caso bidimensional solo será para la dirección del eje y, esta relación nos la dan las ecuaciones de Hooke - Cauchy cuya expresión matricial es la siguiente :

$$\{\sigma\} = [D]\{e\}$$

Donde :

[D] : Es la matriz de propiedades de los materiales que en forma explicita se presenta a continuación :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix}$$

En la expresión anterior :

ν : Es el módulo de Poisson.

E : Es el módulo de elasticidad o de Young.

Los tensores $\{\sigma\}$ y $\{\epsilon\}$ ya fueron definidos anteriormente.

1.3.7 Principio del trabajo virtual.

Para encontrar la relación entre las fuerzas aplicadas al cuerpo y los desplazamientos podemos usar el principio del trabajo virtual, en el cual intervienen tanto las fuerzas externas como las internas requeridas para lograr el equilibrio del cuerpo, su expresión para el caso de considerar el equilibrio de todo el cuerpo es la siguiente :

$$\int_{\Omega} \sigma_{kl} \delta \epsilon_{kl} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \frac{\delta^2 u_k}{\delta t^2} \delta u_k d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma(n)_k \delta u_k d\Gamma + \int_{\Omega} \rho f_k \delta u_k d\Omega$$

En la que :

ρ : Es la densidad de masa por unidad de volumen del cuerpo.

$\sigma(n)_k$: Son las fuerzas por unidad de superficie que actúan sobre el cuerpo.

$\frac{\delta^2 u_k}{\delta t^2}$: Es la aceleración del cuerpo expresada en función de la posición del cuerpo.

f_k : Son las fuerzas de cuerpo por unidad de masa.

El resto de los elementos ya se habían definido anteriormente.

De lo anterior se puede concluir lo que representa cada integrando de la expresión del trabajo virtual :

$$\int_{\Omega} \sigma_{kl} \varepsilon_{kl} e \, d\Omega$$

Es el trabajo interno producido por los esfuerzos σ_{kl} al producir un desplazamiento e_{kl} .

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\delta^2 u_k}{\delta t^2} \delta u_k \, d\Omega$$

el trabajo interno producido por las fuerzas debidas al movimiento del cuerpo.

$$\int_{\Gamma} \sigma(n)_k \, du_k \, d\Gamma$$

Es el trabajo producido por las cargas que actúan sobre el cuerpo por unidad de superficie.

$$\int_{\Omega} P f_{i,j} \delta u_{i,j} d\Omega$$

Ω

Es el trabajo interno producido por las que se conocen como fuerzas de cuerpo (peso, etc).

Mediante la combinación de las relaciones anteriormente descritas se puede llegar a obtener una relación más sencilla de solucionar y en la que se relacionen directamente los desplazamientos con las fuerzas actuantes en el cuerpo; ésta se procura que sea una expresión del siguiente tipo :

$$[K] \{u\} = \{f\}$$

En la que :

[K] : Es la matriz de rigidez del cuerpo.

Observando la expresión anterior se concluye que es un sistema de ecuaciones en el que el número de incógnitas es igual al número de grados de libertad del cuerpo, solucionando el anterior se puede obtener el valor de los desplazamientos producidos por las fuerzas f sobre el cuerpo.

1.3.8 Funciones de Interpolación

Cuando se trabaja con un medio continuo se enfrenta uno con el problema de que se presentan un número infinito de grados de libertad ya que cada punto dentro de la región analizada presenta un desplazamiento distinto al punto que se encuentra inmediatamente a su lado, dado que la intención del método para obtener los desplazamientos es la solución de un sistema de ecuaciones cuyo número de incógnitas es el del número de grados de libertad totales en el cuerpo, al llegar a la expresión anterior sería imposible obtener la solución del sistema, dado el número de incógnitas resultantes al considerar todos los grados de libertad del cuerpo.

Para solucionar este problema el método del elemento finito propone la subdivisión de la región en una serie finita de elementos en los cuales vamos a distinguir una serie de puntos nodales, en los cuales se definen desplazamientos, deformaciones unitarias y esfuerzos, referidos a cada nodo, los cuales serán las incógnitas del problema.

Dado que contamos con la manera de establecer una relación entre desplazamientos y deformaciones (Relaciones esfuerzo-deformación), entre las deformaciones y los esfuerzos, así como entre estos últimos y las fuerzas que actúan en el cuerpo, podemos llegar a una expresión en la que tan solo nos queden como incógnita los desplazamientos de los nodos, eliminando de las ecuaciones los esfuerzos y las deformaciones unitarias.

Dado que estamos hablando de un medio continuo debemos hallar la manera de modelar la continuidad entre los nodos en los que se determinan las incógnitas de nuestro problema, esto se hace proponiendo una serie de funciones que nos establezcan la relación entre los puntos intermedios en los que no se definieron puntos nodales, estas funciones pueden ser cualesquiera pero, dadas las características de los fenómenos analizados se procura que cumplan ciertas condiciones mínimas, que pueden ser las condiciones de frontera del problema, o bien, dado el comportamiento del fenómeno analizado se procura ajustar la función de manera de que sea representativa del mismo.

1.3.8.1 Elementos Unidimensionales.

Si se tienen dos puntos sobre una recta y en cada punto se define un desplazamiento u , teniéndose entonces para el punto 1 un desplazamiento u_1 y para el punto 2 un desplazamiento u_2 , existiendo en los puntos intermedios desplazamientos desconocidos, por lo tanto se propone para aproximarlos una función $u(x, u_1, u_2)$ tal que nos proporcione el valor de u , cuando

se vale en el punto 1 y el valor de u_2 cuando se vale en el punto 2, mientras que para valores intermedios nos dará una combinación de estos valores, esta función tendrá la forma :

$$u = a_1x + a_2$$

Donde :

a_1 , a_2 : Son coeficientes que dependen de las condiciones de frontera y de la forma del elemento.

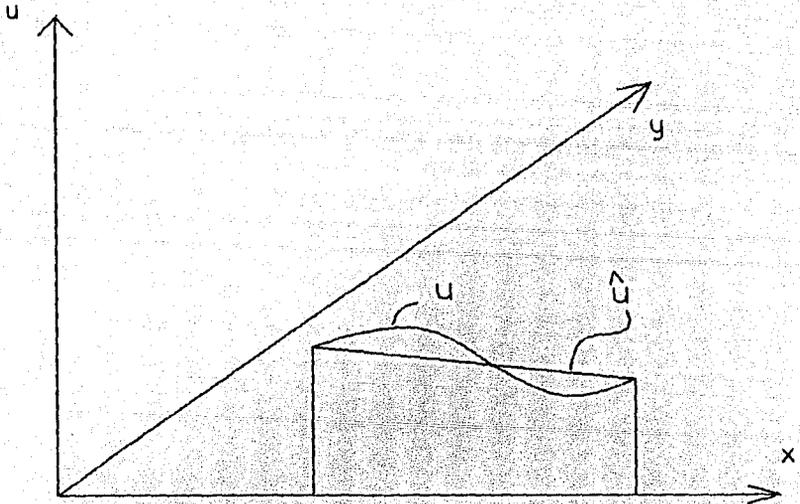


Figura 1 Recta sobre eie X

Esta función debe cumplir con las siguientes condiciones de frontera :

$$u = u_1 \quad \text{para} \quad x = x_1$$

$$u = u_2 \quad \text{para} \quad x = x_2$$

Sustituyendo en la ecuación las condiciones anteriores queda :

$$a_1 x_1 + a_2 = u_1$$

$$a_1 x_2 + a_2 = u_2$$

Despejando a_2 de la primera ecuación :

$$a_2 = u_1 - a_1 x_1$$

Sustituyendo en la segunda ecuación :

$$a_1 x_2 + u_1 - a_1 x_1 = u_2$$

Despejando el valor de a_1 :

$$a_1 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación :

$$\frac{u_2 - u_1}{K_2 - K_1} X_1 + a_2 = u_1$$

Despejando el valor de a_2 :

$$a_2 = u_1 - \frac{u_2 - u_1}{K_2 - K_1} X_1$$

Por lo tanto la función que nos aproximará el valor del desplazamiento será :

$$u = \frac{u_2 - u_1}{K_2 - K_1} X + u_1 - \frac{u_2 - u_1}{K_2 - K_1} X_1$$

Si esta función la reordenamos factorizando a las variables u_1 y u_2 nos queda la siguiente expresión :

$$u = u_2 - u_1 \frac{X}{K_2 - K_1} + u_1 - u_2 - u_1 \frac{X_1}{K_2 - K_1}$$

Reordenando :

$$u = u_1 \left[1 - \frac{x - K_1}{K_2 - K_1} \right] + u_2 \frac{x - K_1}{K_2 - K_1}$$

Se puede observar que la expresion anterior tiene la forma :

$$u = u_1 N_1 + u_2 N_2$$

Donde :

N_1 , N_2 : Son funciones de forma que dependen del valor de x .

u_1 , u_2 : Son los valores de los desplazamientos en los nodos

Siendo las expresiones de las funciones de forma :

$$N_1 = 1 - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Observando se puede apreciar que lo que se desea es una función de interpolación tal que cuando se valúe en un cierto nodo su valor sea uno de manera que al multiplicarse por el desplazamiento en ese nodo nos quede el valor del desplazamiento, y si se valua en otro nodo su valor sea de cero obteniéndose para valores intermedios un valor que será proporcional a la distancia que los separa del nodo.

Dado que generalmente no se tendrá un solo nodo sino que habrá varios de ellos definiendo la estructura en análisis el valor total del desplazamiento estará dado por la suma de los valores proporcionados por cada función, teniendo entonces la expresión total del desplazamiento la siguiente forma :

$$u = \sum_{r=1}^M u_r N_i$$

En esta ecuación

u_r : Son los desplazamientos en los nodos.

N_i : Son funciones de interpolación ó de forma.

Las condiciones de frontera que deben de cumplir estas funciones son :

$$N_j = 1 \quad \text{para} \quad x_j = x_1$$

$$N_j = 0 \quad \text{para} \quad x_j \neq x_1$$

Estas funciones son conocidas también como funciones de peso ya que cada función proporciona un peso el cual al multiplicarse por el valor del desplazamiento a que corresponde nos da la aportación del mismo al valor total del desplazamiento. Asimismo se les conoce como funciones de forma ya que si bien hasta el momento solo se ha hablado de aproximar el desplazamiento para valores intermedios también es factible y necesario aproximar la forma del elemento a partir de las coordenadas de los nodos, utilizándose entonces de preferencia las mismas funciones para aproximar la forma del elemento que las que se usan para aproximar el comportamiento del cuerpo.

La expresión que se encontró anteriormente para el elemento unidimensional se obtuvo a partir de la suposición de que la variación que existe entre los nodos es lineal, sin embargo dependiendo de las características del problema se pueden realizar interpolaciones con polinomios de grados superiores o bien utilizar combinaciones de funciones senoideas o exponenciales, asimismo siguiendo otros procedimientos para la obtención de las funciones de peso se pueden encontrar otras expresiones algo distintas a la encontrada anteriormente, por ejemplo :

Dado que :

$$0 \geq N_i \leq 1$$

$$x_1 \geq x \leq x_2$$

Proponiendo una línea recta para la interpolación donde la pendiente sea :

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$$

$$N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Por lo tanto la función que nos proporciona el valor de u para cualquier punto sobre la recta es :

$$u = u_1 \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + u_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

En el ejemplo anterior se suprimió la variable y , dado que el análisis se hizo sobre una recta, que se considera horizontal, si deseamos incluir el efecto de la variable y debemos afectar los elementos que componen la función por un factor que valga 1 ó 0 según sea el valor de la coordenada y estos factores serán :

$$f_1 = \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}$$

$$f_2 = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Siendo f_1 una función que toma el valor de uno cuando se

valúa en el nodo 1 esto es cuando $y = y_1$ y cero cuando se valúa en el nodo 2 variando linealmente para valores intermedios y f_2 una función que toma el valor de uno en el nodo 2 y cero en el nodo 1 con variación lineal para valores intermedios .

Por lo tanto nos queda la siguiente expresión :

$$u = u_1 \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + u_2 \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

En la expresión anterior se considera que :

$$x_1 < x_2$$

$$y_1 < y_2$$

Asimismo :

$$y = y_1 + x \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

Las expresiones anteriores fueron obtenidas por simple observación del comportamiento de la función.

Esta manera de obtener las funciones de interpolación es semejante a la usada por Zienkiewicz para obtener la familia de funciones de interpolación conocida como Familia Serendipity, debiendo su nombre a la Princesa de Serindip de la novela de Horace Walpole la cual obtenia sus respuestas por intuición. Estas familias se utilizan para los elementos Rectangulares.

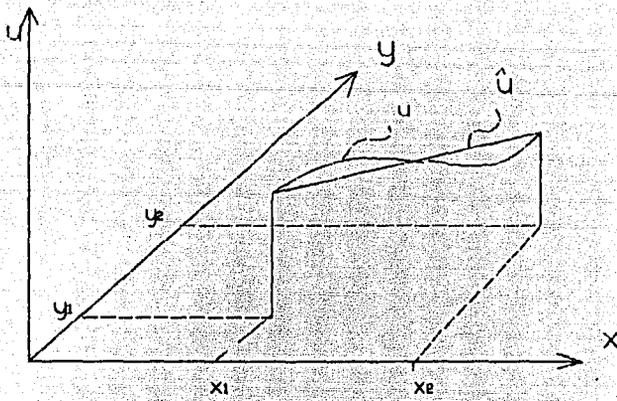


Figura 2 Recta en 2 dimensiones

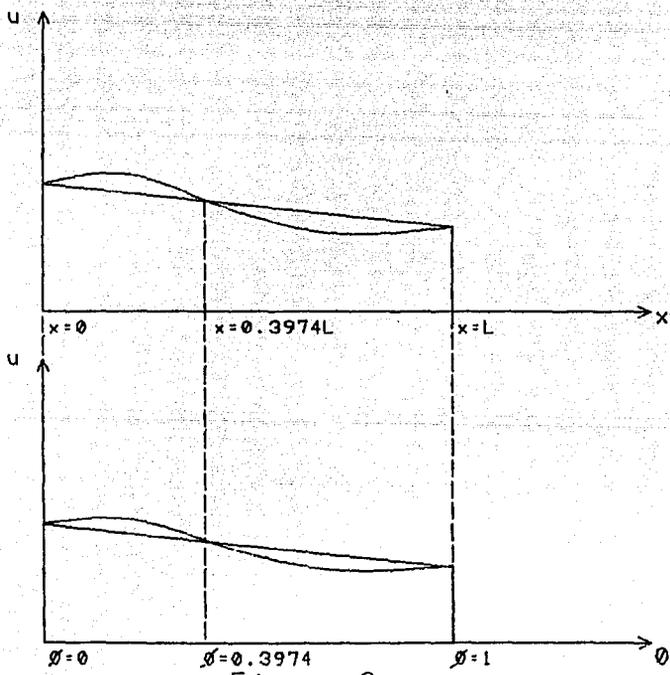


Figura 3 Recta con transformacion de coordenadas

Si en la formulación del problema anterior no utilizamos el sistema coordenado cartesiano general y utilizamos en su lugar uno local, en el cual el origen se localiza al principio de la recta, tendremos que :

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = l$$

Donde l es la longitud de la recta.

Teniendose las mismas condiciones de frontera para la función

$$u(y_1) = u_1$$

$$u(y_2) = u_2$$

Sustituyendo los valores de y :

$$a_1(0) + a_2 = u_1$$

$$a_1(l) + a_2 = u_2$$

Despejando a_2 de la primera ecuación :

$$a_2 = u_1$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación :

$$a_1 I + u_1 = u_2$$

Despejando :

$$a_1 = \frac{1}{I} (u_2 - u_1)$$

Sustituyendo queda :

$$u(y) = \frac{1}{I} (u_2 - u_1) y + u_1$$

Reordenando u_1 y u_2 :

$$u(y) = u_1 - \frac{y}{I} u_1 + \frac{y}{I} u_2$$

Factorizando u_1 y u_2 :

$$u(y) = u_1 \left[1 - \frac{y}{I} \right] + u_2 \frac{y}{I}$$

Siendo las expresiones de las funciones de forma las siguientes:

Para N_1

$$N_1 = 1 - \frac{y}{I}$$

Para N_2

$$N_2 = \frac{y}{l}$$

Se puede observar que esta expresión es más simple que las anteriores gracias a que se utilizaron las coordenadas locales, debido a lo cual, estas coordenadas son las que más se utilizan en la práctica, utilizándose una matriz de transformación para cambiar el sistema local no solo el de coordenadas sino también los de esfuerzos y desplazamientos en uno global, esta matriz de transformación es conocida como Jacobiano de transformación, del cual se hablará más adelante.

Si ahora en lugar de utilizar la variable y , utilizamos una variable adimensional tal que el origen del sistema esté localizado al centro de la recta :



Siendo ξ una variable adimensional cuya expresión será la siguiente :

$$\xi = \frac{y}{h} \quad -1 < \xi < 1$$

Donde :

$$h = \frac{l}{2}$$

Para este sistema se puede proponer también una función que nos aproxime al valor de la variable u , esta función puede ser :

$$u = a_1 \xi + a_2$$

Siendo los valores de la variable ξ en los puntos nodales los siguientes :

$$\xi_1 = -1$$

$$\xi_2 = 1$$

Teniéndose como condiciones de frontera para la función :

$$u(\xi_1) = u_1$$

$$u(\xi_2) = u_2$$

Sustituyendo los valores de y :

$$a_1 (-1) + a_2 = u_1$$

$$a_1 (1) + a_2 = u_2$$

Despejando a_2 de la primera ecuación :

$$a_2 = u_1 + a_1$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación :

$$a_1 + u_1 + a_1 = u_2$$

Despejando a_1 :

$$a_1 = \frac{1}{2} (u_2 - u_1)$$

Por lo tanto a_2 será :

$$a_2 = u_1 + \frac{1}{2} (u_2 - u_1) = \frac{1}{2} (u_2 + u_1)$$

Sustituyendo queda :

$$u(y) = \frac{1}{2} (u_2 - u_1) \xi + \frac{1}{2} (u_2 + u_1)$$

Factorizando u_1 y u_2 :

$$u(y) = \frac{1}{2} (1 - \xi) u_1 + \frac{1}{2} (1 + \xi) u_2$$

Siendo las expresiones de las funciones de forma las siguientes:

$$N_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi)$$

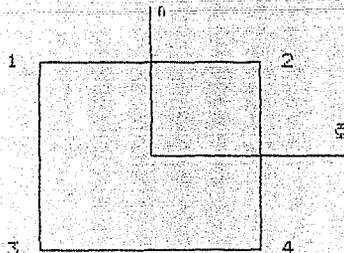
$$N_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi)$$

Como se dijo antes las funciones de forma no son únicas y varían de acuerdo a la forma del elemento, anteriormente se utilizó un elemento unidimensional pero en la práctica se utilizan elementos de diversas formas como pueden ser triangulares o rectangulares, además como se mencionó anteriormente se pueden realizar interpolaciones de grados superiores a uno así como utilizar funciones trascendentales.

1.3.8.2 Elementos Bidimensionales

Si en lugar de utilizar elementos unidimensionales utilizamos elementos bidimensionales, más precisamente un elemento cuadrilátero, podemos obtener las funciones de interpolación para este elemento realizando un análisis parecido al que se realizó anteriormente, pero en lugar de utilizar desde el principio el sistema de coordenadas global utilizaremos un sistema de coordenadas locales con el origen en el centro, además de utilizar variables que mapeen a las variables x , y , a las que denominaremos ξ , η , respectivamente, las cuales tomarán valores comprendidos entre -1 y 1 .

La forma de este elemento se muestra a continuación :



Para este elemento también se pueden definir funciones de interpolación tales que nos aproximen los desplazamientos en cualquier parte del elemento en función de los desplazamientos de los puntos nodales.

Una vez definido el problema el procedimiento para la obtención de dichas funciones puede ser el mismo que para el caso de los elementos unidimensionales, esto es una vez establecidas las condiciones de frontera que deben cumplir las funciones, se establece un sistema de ecuaciones del que se despejan los coeficientes requeridos, sin embargo, dado el número de incógnitas que se presentan este procedimiento es bastante tedioso, por lo tanto se utilizan otros criterios como pueden ser polinomios de Lagrange, o de Hermite.

Si se aplica el criterio de la interpolación Lagrangeana se usan las funciones de interpolación de Lagrange cuyas expresiones son las siguientes :

$$l_i = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Por lo tanto la expresión del criterio anterior utilizando esta función de interpolación es :

$$u = \sum_i l_i u_i = N u_i$$

Obteniéndose la función deseada al realizar la expansión de la función de interpolación de Lagrange.

Utilizando la interpolación Hermiteana en lugar de utilizar como función de interpolación las funciones de Lagrange se utilizan polinomios de Hermite, la utilización de uno o de otro criterio depende de la necesidad que se tiene en ocasiones de utilizar una función en la que sean continuas también sus

derivadas, caso en el que es recomendable la utilización de las funciones de Hermite:

Además de los criterios anteriores se utiliza una familia de funciones llamadas Seredippity, este nombre viene del hecho de que fueron obtenidas por simple observación sin plantear ecuaciones con condiciones de frontera las expresiones de estas ecuaciones son :

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \quad i = 1,2,3,4$$

Las expresiones anteriores son para el caso de realizar una interpolación lineal, sin embargo pueden obtenerse expresiones para utilizarse en interpolaciones cuadráticas cúbicas etcetera. Para el desarrollo del programa utilizaremos solo la expresión anterior.

1.3.8.3 Mapeo de coordenadas.

Dado que no se utilizan las coordenadas normales se debe hacer una transformación de las mismas, a fin de obtener resultados basados en las coordenadas globales, para esto utilizamos una matriz con la cual transformaremos las expresiones obtenidas para las coordenadas locales en expresiones para coordenadas globales, a la cual llamaremos Jacobiano de transformación, cuya expresión es la siguiente :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\xi x}{\xi \xi} & \frac{\xi y}{\xi \xi} \\ \frac{\xi x}{\xi \eta} & \frac{\xi y}{\xi \eta} \end{bmatrix}$$

Siendo esta matriz la que establece la relación entre las parciales del desplazamiento con respecto a las coordenadas locales y las parciales con respecto a las variables globales, esto es :

Para la componente del desplazamiento u :

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta u}{\delta x} \\ \frac{\delta u}{\delta y} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\delta u}{\delta \xi} \\ \frac{\delta u}{\delta \eta} \end{bmatrix}$$

Para la componente del desplazamiento v :

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta v}{\delta x} \\ \frac{\delta v}{\delta y} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\delta v}{\delta \xi} \\ \frac{\delta v}{\delta \eta} \end{bmatrix}$$

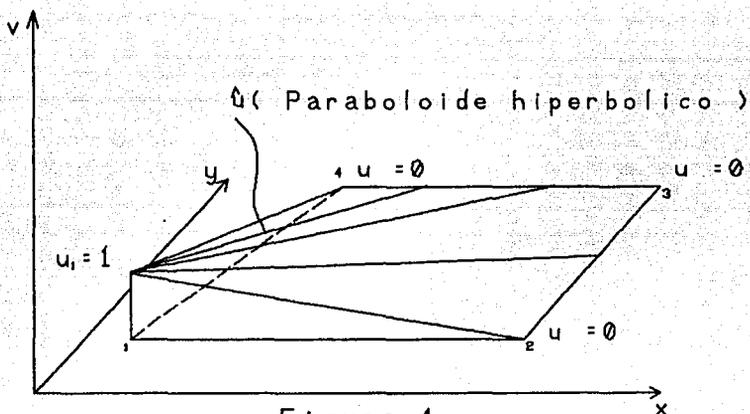


Figura 4

Funcion de forma para 1 punto nodal
(Elemento bidimensional de 4 puntos)

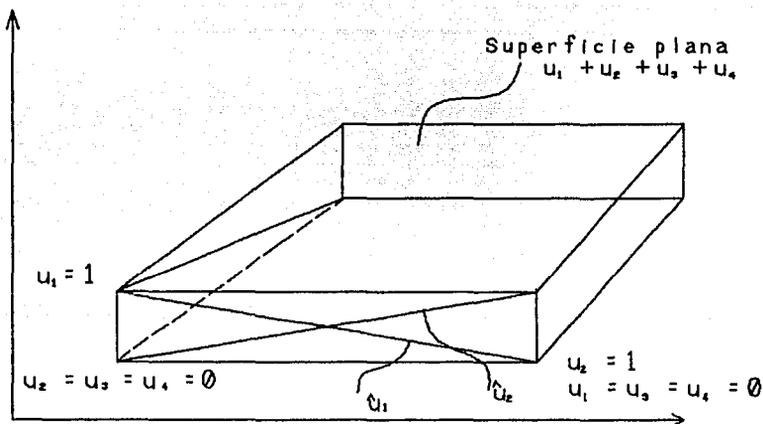


Figura 5

Suma de las funciones de forma

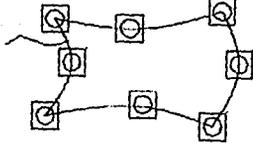
Figura 6
Tipos de elementos

$$x = N_i x_i \quad i = 1 \dots m$$

$$u = N_i u_i \quad i = 1 \dots n$$

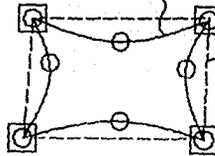
La función de forma es igual a la función de interpolación

$$\xi = \hat{u}$$



Isoparamétrico
 $n=m$

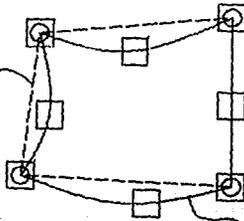
Función de forma para definir las coordenadas



Superparamétrico
 $n < m$

Función de interpolación para definir desplazamiento

Función de forma para aproximar el valor de la coordenada



Subparamétrico
 $n > m$

- Punto donde se define el desplazamiento.
- Punto donde se define la coordenada.

Función de interpolación para aproximar el desplazamiento

1.3.9 Obtención de las ecuaciones del Elemento Finito.

Una vez definidos los elementos anteriores procedemos a desarrollar las expresiones de los elementos con los que vamos a trabajar.

1.3.9.1 Desplazamientos.

El desplazamiento queda definido con la matriz $\{d\}$ tal que :

$$\{d\} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

Esto es el desplazamiento para cualquier punto dentro del cuerpo lo definimos en función de los desplazamientos en los nudos, multiplicado por una matriz que contiene las funciones de interpolación para cada punto, expresado de otra manera queda :

$$\{d\} = [N]\{d\}_{\text{nudos}}$$

1.3.9.2 Coordenadas.

Dado que para definir la geometría de el elemento que estamos analizando requeríamos de una expresión continua se realiza una aproximación de utilizando funciones de forma a fin de obtener una expresión en función de las coordenadas de los puntos.

El vector de coordenadas se obtiene utilizando las mismas funciones de interpolación que para el caso de los desplazamientos, por lo que se dice que el elemento es del tipo isoparamétrico, ya que se utilizan las mismas funciones para el caso de los desplazamientos que para las deformaciones.

Siendo su expresión la siguiente :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

1.3.9.3. Deformaciones.

El vector deformaciones se obtiene mediante la aplicación de las relaciones desplazamiento deformación, vistas anteriormente, las cuales quedaron resumidas en la matriz de operadores diferenciales [L], por lo tanto obtenemos el vector de deformaciones mediante la siguiente expresión :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

En forma matricial queda :

$$\{e\} = [L]\{d\}$$

Pero :

$$\{d\} = [N]\{d\}_{\text{nudos}}$$

Por lo tanto la expresión de las deformaciones queda :

$$\{e\} = [L][N]\{d\}_{\text{nudos}}$$

Haciendo :

$$[B] = [L][N]$$

Queda :

$$\{e\} = [B]\{d\}_{\text{nudos}}$$

Siendo la expresión de la matriz B, la siguiente :

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \end{bmatrix}$$

En la expresión anterior se tienen expresadas las parciales de las funciones de prueba en función de las variables globales x , y , dado que las expresiones que se manejan para las funciones de interpolación están en función de las variables locales conviene realizar la derivación con respecto a las expresiones locales y después utilizar el Jacobiano de transformación para referir las expresiones obtenidas a las variables globales.

Aunque cuando se definió el Jacobiano se hizo la transformación entre parciales del desplazamiento, este se puede utilizar para transformar las parciales de las funciones de prueba :

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta N_1}{\delta \xi} \\ \frac{\delta N_1}{\delta \eta} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\delta N_1}{\delta x} \\ \frac{\delta N_1}{\delta y} \end{bmatrix}$$

Dado que en este caso queremos obtener la relación inversa, despejamos de la ecuación anterior el vector de parciales con respecto a las variables locales.

Para la primera función de prueba queda :

$$\begin{bmatrix} \delta N_1 \\ \delta \kappa \\ \delta N_1 \\ \delta y \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \delta N_1 \\ \delta \Phi \\ \delta N_1 \\ \delta \Pi \end{bmatrix}$$

Para las otras funciones de prueba la expresión es la misma sólo se sustituye por el vector de la función de prueba correspondiente.

Si se denomina a la matriz inversa del Jacobiano como Γ :

$$[\Gamma] = [J]^{-1}$$

Se tendrá que :

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}$$

Dado que el Jacobiano es en este caso de 2×2 elementos, se puede obtener fácilmente la expresión de los elementos de su matriz inversa en base a los elementos del Jacobiano.

$$\Gamma_{11} = J_{22} / \det[J]$$

$$\Gamma_{12} = -J_{21} / \det[J]$$

$$\Gamma_{22} = J_{11} / \det[J]$$

$$\Gamma_{21} = -J_{12} / \det[J]$$

Donde :

$$\det[J] = J_{11} * J_{22} - J_{21} * J_{12}$$

1.3.9.4 Equilibrio estático.

Para establecer el equilibrio del cuerpo se utiliza la expresión del trabajo virtual, vista anteriormente, pero en lugar de plantearla para todo el cuerpo la planteamos para un solo elemento quedando :

$$\int_{\Omega_e} \xi_e \sigma \, d\Omega + \int_{\Omega_e} \xi_u p \, d\Omega = \int_{\Gamma_e} \xi_u^T \sigma(n) \, d\Gamma + \int_{\Omega_e} p f_u \xi \, d\Omega$$

De los desarrollos anteriores tenemos que el vector de deformaciones se puede expresar de la siguiente forma :

$$\{e\} = [B]\{u\}$$

Entonces su parcial será :

$$\delta\{e\} = \delta\{u\}^T [B]$$

Asimismo se tiene que el vector desplazamientos es :

$$u = [N]\{u\}$$

Quedando :

$$\delta u = \delta\{u\}^T [N]$$

Y por último expresando el vector aceleraciones en función de las aceleraciones en los nudos y de las funciones de prueba, nos queda la siguiente expresión :

$$a = [N]\{a\}$$

Si sustituimos en esta expresión las obtenidas para los esfuerzos, las deformaciones y los desplazamientos, nos queda para cada uno de los miembros de la expresión anterior :

$$\int_{\Omega} \delta\{e\}^T \{\sigma\} d\Omega = \delta\{u\}e \int_{\Omega} [B]^T \sigma d\Omega$$

Dado que :

$$\sigma = [D]\{e\}$$

Quedando :

$$\int_{\Omega} \delta\{e\}^T \{\sigma\} d\Omega = \delta\{u\}e \int_{\Omega} [B]^T [D] \{e\} d\Omega$$

Sustituyendo el valor de $\{e\}$:

$$\int_{\Omega} \delta\{e\}^T \{\sigma\} d\Omega = \delta\{u\}e \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] \{u\}e d\Omega$$

Sacando de la integral al vector $\{u\}e$

$$\int_{\Omega} \delta\{e\}^T \{\sigma\} d\Omega = \delta\{u\}e \left[\int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \right] \{u\}e$$

Substituyendo las expresiones del vector aceleración y de la parcial del desplazamiento obtenidas antes, en el segundo sumando del primer miembro, las cuales son :

$$\delta\{u\} = \delta\{u\}^T e [N]^T$$

y

$$\{u\} = [N] \{Q\} e$$

Quedando la siguiente expresión :

$$\int_{\Omega} \delta\{u\}^T p \{u\} d\Omega = \delta\{u\} e \left[\int_{\Omega} p [N]^T [N] d\Omega \right] \{u\} e$$

Por otra parte en el segundo miembro de la expresión del trabajo virtual tenemos las fuerzas tanto de cuerpo como de superficie cuyas expresiones, una vez realizadas las substituciones correspondientes quedan :

$$f_s = \int_{\Gamma_e} \delta\{u\}^T \{\sigma(n)\} d\Gamma = \delta\{u\}^T \int_{\Gamma_e} \{N\}^T \{\sigma(n)\} d\Gamma$$

Y para la fuerza de cuerpo :

$$f_c = \int_{\Omega_e} p \{f\} \delta\{u\} \delta d\Omega = \delta\{u\}^T \int_{\Omega_e} \{N\}^T \{f\} d\Omega$$

Simplificando las expresiones anteriores nos queda la siguiente expresión para expresar el equilibrio del elemento :

$$[M]_e \{\dot{u}\}_e + [K]_e \{u\}_e = \{f\}_e$$

Donde :

$$[M]_e = \int_{\Omega} p [N] [N]^T d\Omega$$

Es la expresión de la matriz de masas del cuerpo.

Asimismo la matriz de rigidez del elemento es :

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega$$

En la expresion anterior tenemos el vector de fuerzas en el cual se distinguen no solamente las componentes debidas a las fuerzas de cuerpo y superficie, sino también las debidas a deformaciones y esfuerzos iniciales, y es :

$$\{f\} = \{f\}_s + \{f\}_c + \{f\}_{e_0} + \{f\}_{\sigma_0}$$

Donde :

$\{f\}_{e_0}$: Es la fuerza inicial debida a las deformaciones iniciales, en caso de existir estas y cuya expresion es la siguiente :

$$\{f\}_{e_0} = \int [B]^T [D] [e]_0 d\Omega$$

$\{f\}_{\sigma_0}$: Es la fuerza inicial debida a los esfuerzos iniciales en caso de existir estos y cuya expresion es la siguiente :

$$\{f\}_{\sigma_0} = \int [B]^T [\sigma]_0 d\Omega$$

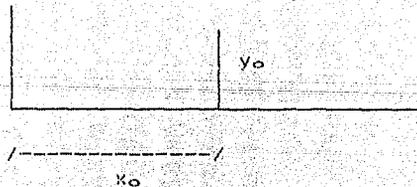
1.3.9.5. Integración Gaussiana.

Cuando se trabaja con integrales de cierto grado de complejidad, como por ejemplo las integrales sobre matrices que se presentaron en el caso del planteamiento de la matriz de rigidez no es conveniente realizar una integración directa dado el grado de dificultad que se presenta al resolverlas con los métodos tradicionales, para llegar a la solución de este problema es conveniente utilizar un método que es conocido como integración Gaussiana.

El método de la integración Gaussiana está basado en el teorema del valor medio del Cálculo diferencial en el cual se dice que la integral de una función se puede obtener multiplicando el valor de la función valuada en un punto medio por el valor en que esta valuada, esto es :

$$I = f(x_0) \cdot x_0$$

Graficamente esto se puede expresar de la siguiente manera :



Realizando un ejemplo se puede entender mejor el método.

Si se tiene la integral de la figura anterior se puede comprobar que el valor de la integral será :

$$I = 2 y_0$$

Esto es porque :

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ademas recordando que el área de un trapecio es igual a la semisuma de los lados, (la cual queda expresada en el valor de y_0), multiplicada por la longitud del mismo, y dado que el elemento tiene una longitud de dos unidades, (ya que estamos trabajando con coordenadas naturales) la expresion del área del elemento es :

$$A = 1 \frac{y_1 + y_2}{2} = 2 y_0 = I$$

En el ejemplo anterior se realizó la integración de una funcion lineal, sin embargo se puede utilizar el mismo criterio para obtener la integral de funciones de grados superiores, asimismo se puede utilizar el mismo criterio para obtener integrales sobre volúmenes.

En forma general se puede decir que :

$$x=1$$

$$I = \int_{x=-1}^1 y \, dx = \sum_{i=1}^{N_g} A_i y_i \quad -1 \leq x \leq 1$$

Esto es cualquier integral de una función $y = f(x)$ se puede descomponer en una suma de productos de ciertas constantes por los valores de la función en ese punto.

Este método será el que se utilizará para obtener las expresiones de las matrices de rigidez y de masas dada la simplicidad con que se obtienen resultados utilizando computadoras.

A los puntos usados para valuar las funciones se les conoce como puntos de Gauss y dependiendo del grado de la función a integrar se requerirán uno o más puntos de Gauss, para el caso de el elemento cuadrangular para el que se realizará el programa se requieren cuatro puntos localizados en el área a una distancia del origen del elemento igual a la raíz cuadrada de 3.

En resumidas cuentas si queremos obtener el valor de las matrices de rigidez según las expresiones obtenidas anteriormente debemos valuar las expresiones en cada uno de los puntos de Gauss para posteriormente sumarlos y con esto obtener el valor de la integral.

Capítulo 2

Descripción del programa desarrollado

2.1 Descripción General

El lenguaje usado en el programa fué el Pascal, el cual tiene este nombre en homenaje al físico Blas Pascal, se seleccionó este lenguaje debido al interés que se tiene en que el programa desarrollado sea didáctico y este lenguaje permite la escritura de un código claro lo que ayuda a la comprensión del desarrollo del mismo, al ser similar un pseudocódigo .

Asimismo se procuró seguir las reglas de la programación estructurada a fin de hacer el código más legible y con ello permitir la comprensión tanto del método (MEF), como de los criterios empleados para su aplicación, auxiliados por las computadoras.

El programa se organizó de manera que haya un programa principal en el cual se pueden apreciar las distintas fases del cálculo a través del llamado a subrutinas específicas, además se hace aquí la lectura de los datos generales del problema; dentro de las subrutinas empleadas hay que hacer notar la rutina de impresión de matrices la cual es llamada a lo largo del programa y las otras subrutinas, esta rutina fue de gran utilidad para ayudar a visualizar los cálculos realizados.

Por principio de cuentas describiremos el programa principal; es a través de este que se hace el llamado a cada una de las subrutinas que componen el programa en general.

El programa principal principia definiendo los archivos con los que se trabajar , los cuales son :

MEF.Lst : Archivo de impresión.

MatRig.Dat : Archivo de datos.

En este se guardará la información de las matrices de

rigidez de cada elemento, para su posterior ensamble.

MatDB : Archivo donde se guarda la matriz producto de la multiplicación de las matrices [D] y [B]

VecEl.Dat : Archivo donde se guarda el vector de números de ecuación de cada elemento.

El primer paso realizado con el programa es la apertura de los archivos anteriores a fin de que el sistema los reconozca.

Posteriormente se hace la lectura de los datos básicos del problema que son número de nodos y número de elementos, para después leer las propiedades del material empleado (Módulo de Poisson, Módulo de elasticidad, peso específico).

Una vez leídos los datos anteriores, el programa pasó a la lectura de datos de los nodos, que son coordenadas y restricciones al movimiento, para finalmente pasar a la lectura de las fuerzas concentradas en los nodos. La configuración de la estructura es leída al momento de realizar el cálculo de la matriz de rigidez de cada elemento.

Con los datos completos el programa hace un llamado a la subrutina de cálculo de la matriz de rigidez de los elementos, basándose para esto en los números de los nodos con que está definido cada elemento, estas matrices se guardan en el archivo MatRig.Dat para su utilización posterior y contendrán los valores de la rigidez del elemento en cada uno de los nodos que lo forman.

Al terminar de calcular las matrices de rigidez de cada elemento el sistema procede a su ensamble para con esto obtener la matriz de rigidez global. El ensamble de las matrices de rigidez consiste en la suma de la aportación de cada elemento a la rigidez del nodo que lo compone, esto es la rigidez de cada nodo está formada por la suma algebraica de la parte proporcional de la rigidez de cada elemento, dado que cada matriz de rigidez de los elementos tiene entre sus componentes elementos que corresponden a la rigidez del elemento en cada nodo de la estructura global.

Por ejemplo si tenemos dos elementos y el elemento 1 tiene entre sus nodos al nodo 1 y el elemento 2 tiene entre sus nodos

tambien al nodo 1 la rigidez del nodo quedara definida por la suma de las rigideces de cada uno de los elementos en el nodo 1.

Una vez obtenida la matriz de rigidez global se procede a la solucion del sistema de ecuaciones resultante :

$$[K] \{u\} = \{f\}$$

La solución de este sistema se realizó utilizando el método de Cholesky tambien conocido como Gauss - Crout, este método se eligió debido a que si bien en teoria se podía utilizar cualquier método, al tratar de obtener la solución con otros se encontró que este es el de más rápida convergencia.

Por otra parte con el presente trabajo se pretende explicar en forma sencilla la teoría del Método del Elemento Finito, sin profundizar en el estudio de los algoritmos eficientes.

De la solución del sistema anterior se obtienen los valores del los desplazamientos en los nodos. Finalmente se obtienen los valores de los esfuerzos en los nodos mediante la multiplicación de la matriz DE de cada elemento por el vector de desplazamientos del mismo, esta matriz se encuentra almacenada en el archivo matDE.

2.2 Programa principal.

El programa principal es el siguiente :

```
BEGIN
assign(imp, 'MEF.Lst');
rewrite(imp);
assign(aRig, 'MatRig.Dat');
assign(aDB, 'MatDB.Dat');
assign(aElem, 'VecEl.Dat');
rewrite(aDB);
rewrite(aRig);
rewrite(aElem);
{ ***** Lectura de características del problema ***** }
write('Cual es el n#mero de puntos nodales ? ');
readln(nPn);
write('Cual es el número de elementos ? ');
readln(nElem);
{ ***** Lectura de propiedades de los materiales ***** }
write('Cuanto vale el módulo de elasticidad ? ');
readln(e);
write('Cuanto vale el módulo de Poisson ? ');
readln(nu);
write('Cuanto vale el peso específico ? ');
readln(gamma);
write('Cual es su espesor ? ');
readln(esp);
writeln(imp, 'Solución mediante computadora digital de un problema de');
writeln(imp, ' equilibrio utilizando el Metodo del Elemento Finito. ');
writeln(imp);
writeln(imp, ' Tesis profesional');
writeln(imp, ' Víctor Hugo Juanico Mireles');
writeln(imp);
writeln(imp);
writeln(imp, 'Propiedades del material : ');
writeln(imp);
writeln(imp, 'Módulo de elasticidad : ', e:5:2);
writeln(imp, 'Módulo de Poisson : ', nu:5:2);
writeln(imp, 'Peso Especifico : ', gamma:5:2);
writeln(imp);
writeln(imp, 'Características del problema : ');
writeln(imp);
writeln(imp, 'Espesor : ', esp:1:2);
writeln(imp, 'Numero de puntos nodales : ', nPn:1);
writeln(imp, 'Numero de elementos : ', nElem:1);
{ Lectura de coordenadas de los puntos }
coord;
{ Lectura de condiciones de frontera para cada nudo }
cFront;
{ Lectura de las cargas en los nudos }
cargas;
{ Cálculo de la matriz de rigidez para cada elemento }
mRig;
{ Ensamble de la matriz de rigidez global }
```

```
ensam;  
writeln(imp,'Matriz de rigidez Global');  
impMat(kGlob,numEc,numEc);  
{ Solución del sistema de ecuaciones }  
gaussSeidel;  
{ Impresión de los desplazamientos de los nodos }  
desp;  
{ Obtención de los esfuerzos en los nodos }  
esfu;  
END.
```

2.3 Subrutinas utilizadas.

A continuación pasamos a la descripción de cada una de las subrutinas que componen el programa.

2.3.1 Subrutina de lectura de coordenadas.

Por principio de cuentas tenemos la subrutina de lectura de coordenadas, en esta subrutina se realiza la lectura de las coordenadas X, Y de la malla formada por los elementos, esta lectura se hace de manera secuencial principiando por el primer nodo, hasta terminar con el total de nodos en la malla. La subrutina va imprimiendo los datos medida que los lee.

```
PROCEDURE coord;
BEGIN
writeLn(imp,'Coordenadas de los nodos');
writeLn(imp);
writeLn(imp,'Nodo          Coordenadas');
writeLn(imp,'          X          Y');
writeLn(imp);
FOR i:=1 TO nPn DO
  BEGIN
    write('Cuales son las coordenadas X , Y del punto ',i:2);
    readLn(x[i],y[i]);
    writeLn(imp,i:4,x[i]:10:2,y[i]:10:2);
  END
{END FOR};
END;
```

2.3.2 Lectura de condiciones de frontera.

La siguiente rutina empleada es la que se encarga de la lectura de las condiciones de frontera de los nodos (Restricciones), esta lectura se hace al igual que en el caso de las coordenadas, secuencialmente, leyendo primero la condición en X y después la condición en Y, la nomenclatura para definir las restricciones es, como se indica en el programa el valor cero para cuando no hay restricción y el valor uno cuando existe restricción.

A la vez que son leídas las condiciones de frontera, son calculados los números de las ecuaciones que tienen asignadas, estos números de ecuación son guardados en el mismo arreglo que las condiciones, pero cambiando la nomenclatura, pues ahora se tendrá que el número será un número mayor de uno para el caso de que haya libertad de movimiento en el nodo en la dirección correspondiente y cero en el caso de que el nodo sea restringido.

Asimismo se va guardando en la variable numEc, el número total de ecuaciones del problema.

A continuación se presenta la subrutina en cuestión :

```
PROCEDURE cFront;
BEGIN
  writeln(imp,'Condiciones de frontera');
  writeln(imp);
  writeln('Restricciones en los nodos ');
  writeln(' 0 = libre; 1 = restringido');
  writeln;
  FOR i:=1 TO nFn DO
    BEGIN
      write('Para el nodo',i:3,' ? ');
      readln(ie[i,1],ie[i,2]);
    END
  (END FOR);
  FOR i:=1 TO nFn DO
    BEGIN
      FOR j:=1 TO 2 DO
        BEGIN
          IF (ie[i,j]<>0) THEN
            ie[i,j]:=0
          ELSE
            BEGIN
              numEc:=numEc+1;
              ie[i,j]:=numEc;
            END
          (END IF);
        END
      (END FOR);
    END
  (END FOR);
```

```
END  
(END FOR);  
writeln(imp,'Nodo Num. de Ecuación');  
writeln(imp,'          X          Y');  
FOR i:=1 TO nFn DO  
  writeln(imp,i:4,ie[i,1]:10,ie[i,2]:10)  
(END FOR);  
END;
```

2.3.3 Lectura de cargas en los nudos.

En esta rutina se hara la lectura de las cargas concentradas en los nudos, esta lectura se hace, leyendo por principio de cuentas el número de nudos cargados y despues preguntando el número de identificación de cada nudo, asi como la fuerza en el eje X y despues la fuerza en la dirección del eje Y.

Los valores de las fuerzas son almacenados en un arreglo llamado f para su posterior uso en la rutina de solución del sistema de ecuaciones (Cholesky).

A continuación se presenta la rutina :

```
PROCEDURE cargas;
BEGIN
write('Cual es el número de nudos cargados ? ');
readln(nNcar);
writeln(imp, '***** Cargas en los Nudos *****');
writeln(imp, 'Numero de Nudos cargados : ', nNcar:1);
writeln(imp, 'Nudo   Fuerza en   X           Fuerza en   Y');
FOR i:= 1 TO numEc DO
  f[i]:=0
{END FOR};
FOR i:= 1 TO nNcar DO
  BEGIN
write('Cual es el número del nudo ? ');
readln(j);
write('Dame las fuerzas del nudo ', j:1);
readln(fX, fY);
writeln(imp, j:4, fX:12:1, fY:16:1);
ii:=iE[j, 1];
IF ii<>0 THEN
  f[ii]:=fX
{END IF};
ii:=iE[j, 2];
IF ii<>0 THEN
  f[ii]:=fY
{END IF};
END
{END FOR};
END;
```

2.3.4 Cálculo de la matriz de rigidez.

La siguiente rutina es la que realiza el cálculo de la matriz de rigidez, para esto lee por principio de cuentas la geometría del elemento y en base a los datos que ya tiene almacenados, esto es de las coordenadas de los nodos y las propiedades de los materiales.

Posteriormente se realiza el cálculo de los valores de las coordenadas de los puntos de Gauss los cuales se almacenan en los arreglos psi y eta, y a continuación se procede a realizar el cálculo de la matriz de propiedades de los materiales, (Matriz D) la cual se evalúa para el estado plano de esfuerzos.

Una vez obtenidas las matrices anteriores se hace la lectura de la geometría de cada elemento, mediante la lectura de los nodos que lo componen, posteriormente, mediante integración numérica, calculamos la integral de la matriz de rigidez del elemento. Para esto se hace la evaluación de la matriz de rigidez en cada uno de los puntos de Gauss, con lo que se obtiene una matriz de rigidez auxiliar; la suma de las matrices de rigidez evaluadas en los cuatro puntos que definimos anteriormente nos da el valor de la integral de la matriz de rigidez.

Dado que las expresiones utilizadas para la integración numérica son para coordenadas locales, se deben de transformar las ecuaciones de las derivadas de las funciones de prueba para que sirvan con coordenadas globales, por esto se hace la multiplicación de las expresiones por el jacobiano de transformación, asimismo la integral de la matriz de rigidez se multiplica por del determinante por las razones anteriores.

Al tener las derivadas mapeadas en coordenadas globales se calcula la matriz [B], la cual es función enteramente de estas, a continuación se hace la pre-multiplicación de esta matriz por la matriz [D] y posteriormente por la matriz [E] Traspuesta, por último se obtiene la matriz de rigidez valuada en el punto en análisis mediante la multiplicación por los valores del determinante del Jacobiano de Transformación y del espesor del elemento.

Por último se almacenan en el archivo MatRig.Dat cada una de las matrices calculadas y en el archivo vecEl.Dat los vectores de indicadores de ecuación.

```
PROCEDURE mRig;  
BEGIN
```

```

eta[1]:=1/sqrt(3);
eta[2]:=-1.0/sqrt(3);
psi[1]:=-1/sqrt(3);
psi[2]:=1/sqrt(3);
writeln(imp,' Eta Psi');
writeln(imp,eta[1]:5:2,psi[1]:5:2);
writeln(imp,eta[2]:5:2,psi[2]:5:2);
{ Inicializacion de la matriz de propiedades de los materiales }
FOR j:=1 TO 3 DO
  BEGIN
    FOR j1:=1 TO 3 DO D[j,j1]:=0;
    END
  (END FOR);
cte:=e/(1-nu*nu);
d[1,1]:=cte;
d[1,2]:=cte*nu;
d[2,1]:=d[1,2];
d[2,2]:=d[1,1];
d[3,3]:=cte*(1-nu)/2;
writeln(imp);
writeln(imp);
writeln(imp,'Matriz de propiedades de los materiales');
impMat(d,3,3);
FOR i:=1 TO nElem DO
  BEGIN
    write('Cuales son los números de nodos del elemento ',i:1,' ? ');
    readln(nod[1],nod[2],nod[3],nod[4]);
    writeln(imp,'El elemento ',i:1,' esta determinado por los nodos :');
    writeln(imp,nod[1]:3,nod[2]:3,nod[3]:3,nod[4]:3);
    FOR j:=1 TO 4 DO
      BEGIN
        xyc[j,1]:=x[nod[j]];
        xyc[j,2]:=y[nod[j]];
        END
      (END FOR);
    writeln(imp);
    writeln(imp,'Por lo tanto la matriz de coordenadas es :');
    writeln(imp);
    impMat(xyc,4,2);
    FOR j:=1 TO 3 DO
      BEGIN
        FOR j1:=1 TO 3 DO b[j,j1]:=0; { Inicialización de la matriz B }
        END
      (END FOR);
    FOR j:=1 TO 8 DO
      BEGIN
        { Inicialización de la matriz de rigidez }
        FOR j1:=1 TO 8 DO k[j,j1]:=0
        END
      (END FOR);
    { Calculo de la matriz de rigidez utilizando la integración numerica }
    FOR j:=1 TO 2 DO
      BEGIN
        FOR j1:=1 TO 2 DO

```

```

BEGIN
{ Calculo de las derivadas en los puntos de Gauss }
Nx[1]:=0.25*(eta[j]-1);
Nx[2]:=0.25*(1-eta[j]);
Nx[3]:=0.25*(eta[j]+1);
Nx[4]:=0.25*(-eta[j]-1);
Ny[1]:=0.25*(psi[j]-1);
Ny[2]:=0.25*(-psi[j]-1);
Ny[3]:=0.25*(psi[j]+1);
Ny[4]:=0.25*(1-psi[j]);
FOR jj:=1 TO 4 DO
  BEGIN
    dn[1,jj]:=Nx[jj];
    dn[2,jj]:=Ny[jj];
  END
{END FOR};
writeln(imp);
writeln(imp,'Matriz de derivadas en coordenadas locales');
writeln(imp);
impMat(dn,2,4);
mult(dn,xyz,jacob,2,4,2); { Calculo del jacobiano }
detJac:=jacob[1,1]*jacob[2,2]-jacob[1,2]*jacob[2,1];
writeln(imp);
writeln(imp,'Jacobiano de transformaci#n');
impMat(jacob,2,2);
writeln(imp);
writeln(imp,'Determinante del jacobiano = ',detJac:5:2);
IF detJac=0 THEN
  writeln(imp,'Hay un error en el determinante del elemento ',i:1)
ELSE
  BEGIN
    { Obtenci#n de la inversa del jacobiano }
    writeln('obtenci#n de la inversa');
    aux:=jacob[1,1];
    jacob[1,1]:=jacob[2,2]/detJac;
    jacob[2,2]:=aux/detJac;
    jacob[1,2]:=-jacob[1,2]/detJac;
    jacob[2,1]:=-jacob[2,1]/detJac;
    p[1,1]:=Nx[1];
    p[2,1]:=Ny[1];
    mult(jacob,p,q,2,2,1);
    Nx[1]:=q[1,1];
    Ny[1]:=q[2,1];
    p[1,1]:=Nx[2];
    p[2,1]:=Ny[2];
    mult(jacob,p,q,2,2,1);
    Nx[2]:=q[1,1];
    Ny[2]:=q[2,1];
    p[1,1]:=Nx[3];
    p[2,1]:=Ny[3];
    mult(jacob,p,q,2,2,1);
    Nx[3]:=q[1,1];
    Ny[3]:=q[2,1];
    p[1,1]:=Nx[4];
  END

```

```

p[2,1]:=Ny[4];
mult(Jacob,P,q,2,2,1);
Nx[4]:=q[1,1];
Ny[4]:=q[2,1];
{ Calculo de la matriz B }
writeln('Calculo de la matriz B');
FOR jj:=0 TO 3 DO
  BEGIN
    b[1,jj*2+1]:=Nx[jj+1];
    b[2,jj*2+2]:=Ny[jj+1];
    b[3,jj*2+1]:=Ny[jj+1];
    b[3,jj*2+2]:=Nx[jj+1];
  END
{END FOR};
writeln(imp);
writeln(imp,'Matriz B');
writeln(imp);
impMat(b,3,8);
mult(d,b,dB,3,3,8);
writeln(imp);
writeln(imp,'Matriz DB');
writeln(imp);
impMat(dB,3,8);
{ Calculo de B transpuesta }
FOR jj:=1 TO 3 DO
  BEGIN
    FOR ii:=1 TO 8 DO
      bT[ii,jj]:=b[jj,ii]
    {END FOR};
  END
{END FOR};
mult(bT,dB,kAux,8,3,8);
FOR jj:=1 TO 8 DO
  BEGIN
    FOR ii:=1 TO 8 DO
      kAux[jj,ii]:=esp*detJac*kAux[jj,ii]
    {END FOR};
  END
{END FOR};
writeln(imp);
writeln(imp,'Matriz kAux');
writeln(imp);
impMat(kAux,8,8);
FOR jj:=1 TO 8 DO
  BEGIN
    FOR ii:=1 TO 8 DO
      kC[jj,ii]:=k[jj,ii]+kAux[jj,ii]
    {END FOR};
  END
{END FOR};
END
{END IF};
END
{END FOR};

```

```
END
{END FOR};
write(aDB,db);
elem[1]:=iE[nod[1],1];
elem[2]:=iE[nod[1],2];
elem[3]:=iE[nod[2],1];
elem[4]:=iE[nod[2],2];
elem[5]:=iE[nod[3],1];
elem[6]:=iE[nod[3],2];
elem[7]:=iE[nod[4],1];
elem[8]:=iE[nod[4],2];
writeln(imp);
writeln(imp,chr(12),'Matriz de rigidez');
impMat(k,8,8);
aRig^:=k;
aElem^:=elem;
put(aRig);
put(aElem);
END
{END FOR};
END;
```

2.3.5 Ensamble de las matrices de rigidez.

Una vez que se tienen las integrales de las matrices de rigidez, para cada elemento se procede a realizar el ensamble de las mismas a fin de obtener una matriz global que nos represente toda la estructura.

El ensamble se hace utilizando el vector que tiene guardados los números de ecuación de los nodos para cada elemento, siendo la matriz global aquella en la que sus miembros se encuentra la suma de la aportación a la rigidez del nodo, de cada elemento. Así, tenemos que si el miembro $k[1,1]$ de la matriz de rigidez del elemento 1 corresponde a la rigidez al desplazamiento en la dirección del eje X del nodo 2, con número de ecuación 4 y, por otra parte el miembro $k[3,2]$ de la matriz de rigidez del elemento 2, corresponde a la rigidez del mismo nodo, el miembro de la matriz de rigidez global será igual a la suma de las rigideces de ambos elementos.

La rutina principia con la inicialización de la matriz de rigidez global, para posteriormente ir leyendo elemento por elemento tanto la matriz de rigidez como el vector con los números de ecuaciones, para posteriormente ir recorriendo el vector de indicadores de ecuación y, en el caso de ser distinto de cero el indicador actual, (Hay desplazamiento) se hace el ensamble sumando el valor correspondiente a la matriz de rigidez global.

```
PROCEDURE ensam;
BEGIN
  reset(aRig);
  reset(aElem);
  FOR i:=1 TO numEc DO
    BEGIN
      FOR j:=1 TO numEc DO Kglob[i,j]:=0;
    END
  {END FOR};
  FOR j:=1 TO nElem DO
    BEGIN
      k:=aRigó;
      get(aRig);
      elem:=aElemó;
      get(aElem);
      FOR l:= 1 TO 8 DO
        BEGIN
          ii:=elem[l];
          IF ii<> 0 THEN
            BEGIN
              FOR j1:=1 TO 8 DO
```

```
BEGIN
  jj:=elem[j1];
  IF jj <> 0 THEN
    kGlob[i1,jj]:=kGlob[i1,jj]+k[i1,j1]
  {END IF};
  END
{END FOR};
  END
{END IF};
  END
{END FOR};
  END
{END FOR};
  END;
```

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

2.3.6 Solución del sistema de ecuaciones.

Una vez que se tienen tanto la matriz de rigidez global como el vector de fuerzas se procede a solucionar el sistema de ecuaciones resultante, para esto se pueden utilizar distintos métodos, el método seleccionado es el método de Cholesky.

```
PROCEDURE tggcve(VAR a:matriz; VAR n:integer);
{ Triangulación por el método de Gauss - Crout, para arreglos
  cuadrados versión NO eficiente. }
VAR
  suma:real8;
  i,j,k:integer;

BEGIN
  FOR i:=1 TO n DO
    BEGIN
      FOR j:=1 TO i DO
        BEGIN
          suma:=0.0;
          FOR k:=1 TO j-1 DO
            suma:=suma+a[i,k]*a[j,k]
          (END FOR);
          a[i,j]:=a[i,j]-suma;
          IF j=i THEN
            a[i,j]:=sqrt(a[i,j])
          ELSE
            a[i,j]:=a[i,j]/a[j,j]
          (END IF);
          { 1T[j,i]:=1/[i,j]; }
        END
      (END FOR);
    END
  (END FOR);
END;
```

Una vez que ha sido triangularizada la matriz de rigidez, la solución se obtiene fácilmente mediante una sustitución (Se despeja), la rutina que realiza esto se presenta a continuación.

```
PROCEDURE sgccve(VAR a:matriz; VAR b,u:vector;VAR n:integer);
( Sustitucion en el metodo Cholesky )
VAR
  i,kS,k:integer;
  suma:realB;

BEGIN
FOR i:=1 TO n DO
  BEGIN
  suma:=0.0;
  FOR k:=1 TO i-1 DO
    suma:=suma+a[i,k]*u[k]
  {END FOR};
  u[i]:=(b[i]-suma)/a[i,i];
  END
{END FOR};

FOR i:=n DOWNTO 1 DO
  BEGIN
  suma:=0;
  FOR k:=n DOWNTO i+1 DO
    suma:=suma+a[k,i]*u[k]
  {END FOR};
  u[i]:=(u[i]-suma)/a[i,i]
  END
{END FOR};
END;
```

2.3.7 Impresión de desplazamientos.

Una vez solucionado el sistema de ecuaciones se tienen los valores de los desplazamientos de los nodos, para poderlos imprimir se utiliza la rutina desp, con la cual se mandan al archivo de impresión.

```
PROCEDURE desp;
BEGIN
writeln(imp,chr(10),'*****      Desplazamientos      *****');
writeln(imp,' Nudo      Despl.  X      Despl.  Y');
FOR i:=1 TO nPn DO
  BEGIN
    j:=iE[i,1];
    j1:=iE[i,2];
    despX:=0.0;
    despY:=0.0;
    IF j<>0 THEN
      despX:=u[j];
    {END IF};
    IF j1<>0 THEN
      despY:=u[j1];
    {END IF};
    writeln(imp,i:6,despX,despY);
  END
{END FOR};
END;
```

2.3.8 Cálculo de esfuerzos.

Al terminarse de imprimir los desplazamientos se calculan los esfuerzos, para esto se utilizan las matrices [DB] que fueron almacenadas durante el cálculo de la matriz de rigidez, siendo el vector de esfuerzos el obtenido de pre-multiplicar el vector de desplazamientos por la matriz [DB] correspondiente al elemento en analisis.

```
PROCEDURE esfu;
BEGIN
  reset(aRig);
  reset(aElem);
  reset(aDB);
  writeln(imp, ' *****
  writeln(imp, ' Elemento          Sx          Sy          Sxy');
  FOR i:=1 TO nElem DO
    BEGIN
      k:=aRig^;
      get(aRig);
      elem:=aElem^;
      get(aElem);
      dB:=aDB^;
      get(aDB);
      FOR j:=1 TO 8 DO
        BEGIN
          IF elem[j]>0 THEN
            uAux[1,j]:=u[elem[j]]
          (END IF);
        END
      (END FOR);
      mult(dB,uAux,ss,3,8,1);
      write(imp,i:3);
      FOR j:=1 TO 3 DO write(imp,ss[1,j]);
      writeln(imp);
    END
  (END FOR);
END;
```

2.3.9. Subrutinas auxiliares.

Ademas de las subrutinas anteriores tenemos otras que se utilizan en varias partes del programa, tanto en el programa principal como en las subrutinas para hacer la impresión y la multiplicación de matrices.

2.3.9.1 Multiplicación de matrices.

La rutina para la multiplicación de matrices es :

```
PROCEDURE mult (VAR a,b,c:matriz;m,n,np:integer);
VAR
i,j,jj:integer;

BEGIN
FOR i:=1 TO m DO
  BEGIN
  FOR j:=1 TO np DO
    BEGIN
    suma:=0;
    FOR jj:=1 TO n DO
      suma:=suma+a[i,jj]*b[jj,j]
    (END FOR);
    c[i,j]:=suma;
    END
  (END FOR);
  END
(END FOR);
END;
```

2.3.9.2 Impresión de matrices.

Y la rutina para la impresión es :

```
PROCEDURE impMat(VAR mat:matriz; m,n:integer);
VAR
  i, j:integer;

BEGIN
  FOR i:=1 TO m DO
    BEGIN
      FOR j:=1 TO n DO
        write(imp,mat[i,j]:12:2)
      (END FOR);
      writeln(imp);
    END
  (END FOR);
END;
```

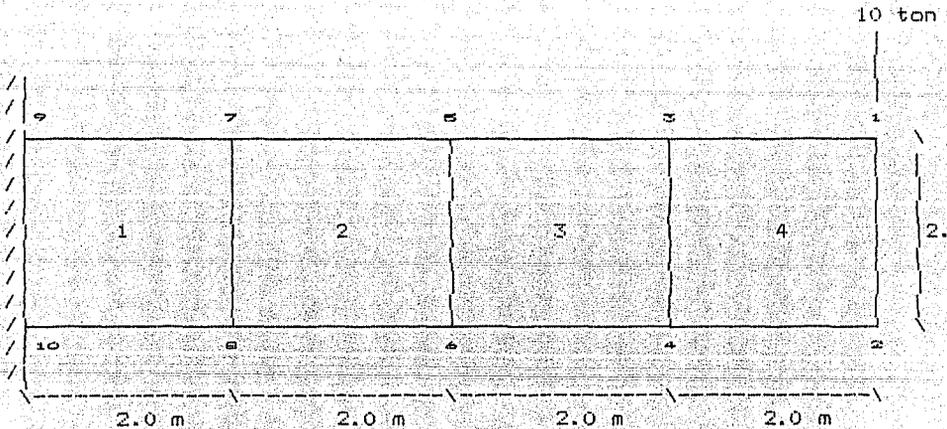
Capítulo 3

Solución de un problema Usando el Programa

3.1 Datos Generales.

A fin de calibrar los resultados del programa se propuso un problema en el cual se le pudiera aplicar y que fuera sencillo a fin de no complicar el trabajo de chequeo de resultados, por lo cual se escogió una viga en canteleiver con una fuerza de 10 ton aplicada en su extremo libre.

Esta viga se dividió en cuatro elementos de 2 m de longitud, mismos que fueron numerados principiando por el empotramiento principiando por el #1, asimismo se numeraron los nudos procurando que la diferencia de valor entre dos nudos contiguos fuera mínima, de ahí quedó :



Todos los datos básicos del problema (Características del material, número de puntos, coordenadas) se enuncian a continuación en el listado de datos proporcionado por el programa.

3.2 Listado del programa.

Solución mediante computadora digital de un problema de equilibrio utilizando el Método del Elemento Finito.

Tesis profesional
Víctor Hugo Juanico Mireles

Propiedades del material :

Módulo de elasticidad : 2000000.00
Módulo de Poisson : 0.20
Peso Especifico : 2.40

Características del problema :

Espesor : 0.30
Numero de puntos nodales : 10
Numero de elementos : 4

Coordenadas de los nodos

Nodo	Coordenadas	
	X	Y
1	8.00	1.00
2	8.00	0.00
3	6.00	1.00
4	6.00	0.00
5	4.00	1.00
6	4.00	0.00
7	2.00	1.00
8	2.00	0.00
9	0.00	1.00
10	0.00	0.00

Condiciones de frontera

Nodo	Num. de Ecuación	
	X	Y
1	1	2
2	3	4
3	5	6
4	7	8
5	9	10
6	11	12
7	13	14
8	15	16
9	0	0
10	0	0

Coordenadas de los puntos de Gauss

	Eta	Psi
	0.58	-0.58
	-0.58	0.58

Matriz de propiedades de los materiales

$$[D] = \begin{bmatrix} 2083333.00 & 416666.70 & 0.00 \\ 416666.70 & 2083333.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 833333.40 \end{bmatrix}$$

Cálculo de la matriz de rigidez del elemento # 1

El elemento 1 está determinado por los nodos : 4 2 1 3

Por lo tanto su matriz de coordenadas es :

$$\begin{bmatrix} 6.00 & 0.00 \\ 8.00 & 0.00 \\ 8.00 & 1.00 \\ 6.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Matriz de derivadas en coordenadas locales

$$\begin{bmatrix} -0.10566 & 0.10566 & 0.39434 & -0.39434 \\ -0.39434 & -0.10566 & 0.10566 & 0.39434 \end{bmatrix}$$

Jacobiano de transformación

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.50 \end{bmatrix}$$

Determinante del jacobiano = 0.50

Matriz B

$$\begin{bmatrix} -0.10566 & 0.00000 & 0.10566 & 0.00000 & 0.39434 & 0.00000 & -0.39434 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.78868 & 0.00000 & -0.21132 & 0.00000 & 0.21132 & 0.00000 & 0.78868 \\ -0.78868 & -0.10566 & -0.21132 & 0.10566 & 0.21132 & 0.39434 & 0.78868 & -0.39434 \end{bmatrix}$$

Matriz DB

$$\begin{bmatrix} -220130.00 & -328614.70 & 220130.00 & -88052.02 & 821536.70 & 88052.02 & -821536.70 & 328614.70 \\ -44026.01 & -1643073.00 & 44026.01 & -440260.10 & 164307.30 & 440260.10 & -164307.30 & 1643073.00 \\ -657229.40 & -88052.02 & -176104.00 & 88052.02 & 176104.00 & 328614.70 & 657229.40 & -328614.70 \end{bmatrix}$$

Matriz kAux

$$\begin{bmatrix} 81240.00 & 15625.00 & 17344.41 & -9021.10 & -33854.17 & -40271.11 & -64730.24 & 33667.21 \\ 15625.00 & 195773.30 & -2417.20 & 50687.77 & -22228.91 & -57291.67 & 9021.10 & -189169.40 \\ 17344.41 & -2417.20 & 9071.20 & -4186.71 & 7438.56 & -9021.10 & -33854.17 & 15625.00 \\ -9021.10 & 50687.77 & -4186.71 & 15351.25 & -2417.20 & -8747.35 & 15625.00 & -57291.67 \\ -33854.17 & -22228.91 & 7438.56 & -2417.20 & 54176.70 & 15625.00 & -27761.09 & 9021.10 \\ -40271.11 & -57291.67 & -9021.10 & -8747.35 & 15625.00 & 33393.45 & 33667.21 & 32645.56 \\ -64730.24 & 9021.10 & -33854.17 & 15625.00 & -27761.09 & 33667.21 & 126345.50 & -58313.31 \\ 33667.21 & -189169.40 & 15625.00 & -57291.67 & 9021.10 & 32645.56 & -58313.31 & 213815.50 \end{bmatrix}$$

Cálculo en el 2º punto de Gauss

Matriz de derivadas en coordenadas locales

$$\begin{bmatrix} -0.10566 & 0.10566 & 0.39434 & -0.39434 \\ -0.10566 & -0.39434 & 0.39434 & 0.10566 \end{bmatrix}$$

Jacobiano de transformación

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.50 \end{bmatrix}$$

Determinante del jacobiano = 0.50

Matriz B

$$\begin{bmatrix} -0.10566 & 0.00000 & 0.10566 & 0.09000 & 0.39434 & 0.00000 & -0.39434 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.21132 & 0.00000 & -0.78868 & 0.00000 & 0.78868 & 0.00000 & 0.21132 \\ -0.21132 & -0.10566 & -0.78868 & 0.10566 & 0.78868 & 0.39434 & 0.21132 & -0.39434 \end{bmatrix}$$

Matriz DR

$$\begin{bmatrix} -220130.00 & -88052.02 & 220130.00 & -328614.70 & 821536.70 & 328614.70 & -821536.70 & 88052.02 \\ -44026.01 & -440260.10 & 44026.01 & -1643073.00 & 164307.30 & 1643073.00 & -164307.30 & 440260.10 \\ -176104.00 & -88052.02 & -657229.40 & 88052.02 & 657229.40 & 328614.70 & 176104.00 & -328614.70 \end{bmatrix}$$

Matriz kAux

$$\begin{bmatrix} 9071.20 & 4186.71 & 17344.41 & 2417.20 & -33854.17 & -15625.00 & 7438.56 & 9021.10 \\ 4186.71 & 15351.25 & 9021.10 & 50687.77 & -15625.00 & -57291.67 & 2417.20 & -8747.35 \\ 17344.41 & 9021.10 & 81240.00 & -15625.00 & -64730.24 & -33667.21 & -33854.17 & 40271.11 \\ 2417.20 & 50687.77 & -15625.00 & 195773.30 & -9021.10 & -189169.40 & 22228.91 & -57291.67 \\ -33854.17 & -15625.00 & -64730.24 & -9021.10 & 126345.50 & 58313.31 & -27761.09 & -33667.21 \\ -15625.00 & -57291.67 & -33667.21 & -189169.40 & 58313.31 & 213815.50 & -9021.10 & 32645.56 \\ 7438.56 & 2417.20 & -33854.17 & 22228.91 & -27761.09 & -9021.10 & 54176.70 & -15625.00 \\ 9021.10 & -8747.35 & 40271.11 & -57291.67 & -33667.21 & 32645.56 & -15625.00 & 33393.45 \end{bmatrix}$$

Cálculo en el 39 punto de Gauss

Matriz de derivadas en coordenadas locales

$$\begin{bmatrix} -0.39434 & 0.39434 & 0.10566 & -0.10566 \\ -0.39434 & -0.10566 & 0.10566 & 0.39434 \end{bmatrix}$$

Jacobiano de transformación

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.50 \end{bmatrix}$$

Determinante del jacobiano = 0.50

Matriz B

$$\begin{bmatrix} -0.39434 & 0.00000 & 0.39434 & 0.00000 & 0.10566 & 0.00000 & -0.10566 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.78868 & 0.00000 & -0.21132 & 0.00000 & 0.21132 & 0.00000 & 0.78868 \\ -0.78868 & -0.39434 & -0.21132 & 0.39434 & 0.21132 & 0.10566 & 0.78868 & -0.10566 \end{bmatrix}$$

Matriz DB

$$\begin{bmatrix} -821536.60 & -328614.70 & 821536.60 & -88052.02 & 220130.00 & 88052.02 & -220130.00 & 328614.70 \\ -164307.30 & -1643073.00 & 164307.30 & -440260.10 & 440260.00 & 440260.10 & -440260.00 & 1643073.00 \\ -657229.40 & -328614.60 & -176104.00 & 328614.60 & 176104.00 & 88052.01 & 657229.40 & -88052.01 \end{bmatrix}$$

Matriz kAux

$$\begin{bmatrix} 126345.50 & 58313.31 & -27761.07 & -33667.20 & -33854.17 & -15625.00 & -64730.25 & -9021.10 \\ 58313.31 & 213815.50 & -9021.10 & 32645.58 & -15625.00 & -57291.68 & -33667.21 & -189169.40 \\ -27761.07 & -9021.10 & 54176.69 & -15625.00 & 7438.56 & 2417.20 & -33854.17 & 22228.91 \\ -33667.21 & 32645.58 & -15625.00 & 33393.45 & 9021.10 & -8747.35 & 40271.11 & -57291.68 \\ -33854.17 & -15625.00 & 7438.56 & 9021.10 & 9071.20 & 4186.71 & 17344.42 & 2417.20 \\ -15625.00 & -57291.68 & 2417.20 & -8747.35 & 4186.71 & 15351.25 & 9021.10 & 50687.78 \\ -64730.25 & -33667.20 & -33854.17 & 40271.11 & 17344.42 & 9021.10 & 81240.00 & -15625.00 \\ -9021.10 & -189169.40 & 22228.91 & -57291.68 & 2417.20 & 50687.78 & -15625.00 & 195773.30 \end{bmatrix}$$

Cálculo en el 4º punto de Gauss del elemento 1

Matriz de derivadas en coordenadas locales

$$\begin{bmatrix} -0.39434 & 0.39434 & 0.10566 & -0.10566 \\ -0.10566 & -0.39434 & 0.39434 & 0.10566 \end{bmatrix}$$

Jacobiano de transformación

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.50 \end{bmatrix}$$

Determinante del jacobiano = 0.50

Matriz B

$$\begin{bmatrix} -0.39434 & 0.00000 & 0.39434 & 0.00000 & 0.10566 & 0.00000 & -0.10566 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.21132 & 0.00000 & -0.78868 & 0.00000 & 0.78868 & 0.00000 & 0.21132 \\ -0.21132 & -0.39434 & -0.78868 & 0.39434 & 0.78868 & 0.10566 & 0.21132 & -0.10566 \end{bmatrix}$$

Matriz DB

$$\begin{bmatrix} -821536.60 & -88052.02 & 821536.60 & -328614.70 & 220130.00 & 328614.70 & -220130.00 & 88052.02 \\ -164307.30 & -440260.10 & 164307.30 & -1643073.00 & 44026.00 & 1643073.00 & -44026.00 & 440260.10 \\ -176104.00 & -328614.60 & -657229.40 & 328614.60 & 657229.40 & 88052.01 & 176104.00 & -88052.01 \end{bmatrix}$$

Matriz kAux

54176.69	15625.00	-27761.07	9021.10	-33854.17	-22228.91	7438.56	-2417.20
15625.00	33393.45	33667.21	32645.58	-40271.11	-57291.68	-9021.10	-8747.35
-27761.07	33667.20	126345.50	-58313.31	-64730.25	9021.10	-33854.17	15625.00
9021.10	32645.58	-58313.31	213815.50	33667.21	-189169.40	15625.00	-57291.68
-33854.17	-40271.11	-64730.25	33667.20	81240.00	15625.00	17344.42	-9021.10
-22228.91	-57291.68	9021.10	-189169.40	15625.00	195773.30	-2417.20	50687.78
7438.56	-9021.10	-33854.17	15625.00	17344.42	-2417.20	9071.20	-4186.71
-2417.20	-8747.35	15625.00	-57291.68	-9021.10	50687.78	-4186.71	15351.25

Matriz de rigidez del elemento # 1

270833.40	93750.02	-20833.32	-31250.00	-135416.70	-93750.02	-114583.40	31250.01
93750.02	458333.40	31250.01	166666.70	-93750.02	-229166.70	-31250.01	-395833.40
-20833.32	31250.00	270833.40	-93750.02	-114583.40	-31250.01	-135416.70	93750.02
-31250.01	166666.70	-93750.02	458333.40	31250.01	-395833.40	93750.02	-229166.70
-135416.70	-93750.02	-114583.40	31250.00	270833.40	93750.02	-20833.35	-31250.01
-93750.02	-229166.70	-31250.01	-395833.40	93750.02	458333.40	31250.01	166666.70
-114583.40	-31250.00	-135416.70	93750.02	-20833.35	31250.01	270833.40	-93750.02
31250.01	-395833.40	93750.02	-229166.70	-31250.01	166666.70	-93750.02	458333.40

Cálculo de la matriz de rigidez del elemento # 2

El elemento 2 esta determinado por los nodos : 6 4 3 5

Por lo tanto su matriz de coordenadas globales es :

$$\begin{bmatrix} 4.00 & 0.00 \\ 6.00 & 0.00 \\ 6.00 & 1.00 \\ 4.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Cálculo en el 1º punto de Gauss

Matriz de derivadas en coordenadas locales

$$\begin{bmatrix} -0.10566 & 0.10566 & 0.39434 & -0.39434 \\ -0.39434 & -0.10566 & 0.10566 & 0.39434 \end{bmatrix}$$

Jacobiano de transformación

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.50 \end{bmatrix}$$

Determinante del jacobiano = 0.50

Matriz B

$$\begin{bmatrix} -0.10566 & 0.00000 & 0.10566 & 0.00000 & 0.39434 & 0.00000 & -0.39434 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.78868 & 0.00000 & -0.21132 & 0.00000 & 0.21132 & 0.00000 & 0.78868 \\ -0.78868 & -0.10566 & -0.21132 & 0.10566 & 0.21132 & 0.39434 & 0.78868 & -0.39434 \end{bmatrix}$$

Matriz DB

-220130.00	-328614.70	220130.00	-88052.02	821536.70	88052.02	-821536.70	328614.70
-44026.01	-1643073.00	44026.01	-440260.10	164307.30	440260.10	-164307.30	1643073.00
-657229.40	-88052.02	-176104.00	88052.02	176104.00	328614.70	657229.40	-328614.70

Matriz kAux

81240.00	15625.00	17344.41	-9021.10	-33854.17	-40271.11	-64730.24	33667.21
15625.00	195773.30	-2417.20	50687.77	-22228.91	-57291.67	9021.10	-189169.40
17344.41	-2417.20	9071.20	-4186.71	7438.56	-9021.10	-33854.17	15625.00
-9021.10	50687.77	-4186.71	15351.25	-2417.20	-8747.35	15625.00	-57291.67
-33854.17	-22228.91	7438.56	-2417.20	54176.70	15625.00	-27761.09	9021.10
-40271.11	-57291.67	-9021.10	-8747.35	15625.00	33393.45	33667.21	32645.56
-64730.24	9021.10	-33854.17	15625.00	-27761.09	33667.21	126345.50	-58313.31
33667.21	-189169.40	15625.00	-57291.67	9021.10	32645.56	-58313.31	213815.50

Cálculo en el 2º punto de Gauss del elemento # 2

Matriz de derivadas en coordenadas locales

-0.10566	0.10566	0.39434	-0.39434
-0.10566	-0.39434	0.39434	0.10566

Jacobiano de transformación

1.00	0.00
0.00	0.50

Determinante del jacobiano = 0.50

Matriz B

$$\begin{bmatrix} -0.10566 & 0.00000 & 0.10566 & 0.00000 & 0.39434 & 0.00000 & -0.39434 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.21132 & 0.00000 & -0.78868 & 0.00000 & 0.78868 & 0.00000 & 0.21132 \\ -0.21132 & -0.10566 & -0.78868 & 0.10566 & 0.78868 & 0.39434 & 0.21132 & -0.39434 \end{bmatrix}$$

Matriz DB

$$\begin{bmatrix} -220130.00 & -88052.02 & 220130.00 & -328614.70 & 821536.70 & 328614.70 & -821536.70 & 88052.04 \\ -44026.01 & -440260.10 & 44026.01 & -1643073.00 & 164307.30 & 1643073.00 & -164307.30 & 440260.20 \\ -176104.00 & -88052.02 & -657229.40 & 88052.02 & 657229.30 & 328614.70 & 176104.10 & -328614.70 \end{bmatrix}$$

Matriz kAux

$$\begin{bmatrix} 9071.19 & 4186.71 & 17344.41 & 2417.20 & -33854.17 & -15625.00 & 7438.56 & 9021.10 \\ 4186.71 & 15351.25 & 9021.10 & 50687.76 & -15625.00 & -57291.66 & 2417.20 & -8747.35 \\ 17344.41 & 9021.10 & 81240.00 & -15625.00 & -64730.23 & -33667.21 & -33854.17 & 40271.11 \\ 2417.20 & 50687.76 & -15625.00 & 195773.30 & -9021.10 & -189169.30 & 22228.91 & -57291.68 \\ -33854.17 & -15625.00 & -64730.24 & -9021.10 & 126345.50 & 58313.30 & -27761.09 & -33667.20 \\ -15625.00 & -57291.66 & -33667.21 & -189169.30 & 58313.30 & 213815.40 & -9021.10 & 32645.57 \\ 7438.56 & 2417.20 & -33854.17 & 22228.91 & -27761.09 & -9021.10 & 54176.70 & -15625.00 \\ 9021.10 & -8747.35 & 40271.11 & -57291.68 & -33667.20 & 32645.57 & -15625.00 & 33393.46 \end{bmatrix}$$

Cálculo en el 3º punto de Gauss del elemento # 2

Matriz de derivadas en coordenadas locales

$$\begin{bmatrix} -0.39434 & 0.39434 & 0.10566 & -0.10566 \\ -0.39434 & -0.10566 & 0.10566 & 0.39434 \end{bmatrix}$$

Jacobiano de transformación

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.50 \end{bmatrix}$$

Determinante del jacobiano = 0.50

Matriz B

$$\begin{bmatrix} -0.39434 & 0.00000 & 0.39434 & 0.00000 & 0.10566 & 0.00000 & -0.10566 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.78868 & 0.00000 & -0.21132 & 0.00000 & 0.21132 & 0.00000 & 0.78868 \\ -0.78868 & -0.39434 & -0.21132 & 0.39434 & 0.21132 & 0.10566 & 0.78868 & -0.10566 \end{bmatrix}$$

Matriz DB

$$\begin{bmatrix} -821536.80 & -328614.70 & 821536.80 & -88052.02 & 220130.10 & 88052.02 & -220130.10 & 328614.70 \\ -164307.40 & -1643073.00 & 164307.40 & -440260.10 & 44026.02 & 440260.10 & -44026.02 & 1643073.00 \\ -657229.40 & -328614.70 & -176104.00 & 328614.70 & 176104.00 & 88052.03 & 657229.40 & -88052.03 \end{bmatrix}$$

Matriz kAux

$$\begin{bmatrix} 126345.50 & 58313.31 & -27761.10 & -33667.21 & -33854.17 & -15625.00 & -64730.24 & -9021.10 \\ 58313.31 & 213815.50 & -9021.10 & 32645.56 & -15625.00 & -57291.66 & -33667.21 & -189169.30 \\ -27761.10 & -9021.10 & 54176.71 & -15625.00 & 7438.56 & 2417.20 & -33854.17 & 22228.91 \\ -33667.21 & 32645.56 & -15625.00 & 33393.45 & 9021.10 & -8747.35 & 40271.11 & -57291.66 \\ -33854.17 & -15625.00 & 7438.56 & 9021.10 & 9071.20 & 4186.71 & 17344.41 & 2417.20 \\ -15625.00 & -57291.66 & 2417.20 & -8747.35 & 4186.71 & 15351.25 & 9021.10 & 50687.77 \\ -64730.24 & -33667.21 & -33854.17 & 40271.11 & 17344.41 & 9021.10 & 81239.99 & -15625.00 \\ -9021.10 & -189169.30 & 22228.91 & -57291.66 & 2417.20 & 50687.77 & -15625.00 & 195773.20 \end{bmatrix}$$

Cálculo en el 4º punto de Gauss del elemento # 2

Matriz de derivadas en coordenadas locales

$$\begin{bmatrix} -0.39434 & 0.39434 & 0.10566 & -0.10566 \\ -0.10566 & -0.39434 & 0.39434 & 0.10566 \end{bmatrix}$$

Jacobiano de transformación

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.50 \end{bmatrix}$$

Determinante del jacobiano = 0.50

Matriz B

$$\begin{bmatrix} -0.39434 & 0.00000 & 0.39434 & 0.00000 & 0.10566 & 0.00000 & -0.10566 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.21132 & 0.00000 & -0.78868 & 0.00000 & 0.78868 & 0.00000 & 0.21132 \\ -0.21132 & -0.39434 & -0.78868 & 0.39434 & 0.78868 & 0.10566 & 0.21132 & -0.10566 \end{bmatrix}$$

Matriz DB

$$\begin{bmatrix} -821536.80 & -88052.00 & 821536.80 & -328614.70 & 220130.10 & 328614.70 & -220130.10 & 88052.03 \\ -164307.40 & -440260.00 & 164307.40 & -1643074.00 & 44026.02 & 1643073.00 & -44026.02 & 440260.10 \\ -176104.00 & -328614.70 & -657229.40 & 328614.70 & 657229.40 & 88052.03 & 176104.10 & -88052.03 \end{bmatrix}$$

Matriz kAux

54176.71	15625.00	-27761.10	9021.11	-33854.16	-22228.91	7438.56	-2417.20
15625.00	33393.45	33667.21	32645.55	-40271.11	-57291.66	-9021.10	-8747.35
-27761.11	33667.21	126345.50	-58313.31	-64730.24	9021.10	-33854.17	15625.00
9021.11	32645.55	-58313.32	213815.50	33667.21	-189169.30	15625.00	-57291.67
-33854.16	-40271.11	-64730.25	33667.20	81239.99	15625.00	17344.41	-9021.10
-22228.91	-57291.65	9021.10	-189169.30	15625.00	195773.20	-2417.20	50687.77
7438.56	-9021.10	-33854.17	15625.00	17344.41	-2417.20	9071.20	-4186.71
-2417.20	-8747.35	15625.00	-57291.67	-9021.10	50687.77	-4186.71	15351.25

Matriz de rigidez del elemento # 2

270833.40	93750.02	-20833.38	-31250.00	-135416.70	-93750.02	-114583.40	31250.01
93750.02	458333.40	31250.01	166666.70	-93750.02	-229166.70	-31250.01	-395833.40
-20833.38	31250.01	270833.40	-93750.02	-114583.40	-31250.01	-135416.70	93750.02
-31250.00	166666.60	-93750.03	458333.40	31250.01	-395833.40	93750.02	-229166.70
-135416.70	-93750.02	-114583.40	31250.00	270833.40	93750.01	-20833.36	-31250.00
-93750.02	-229166.70	-31250.01	-395833.40	93750.01	458333.40	31250.01	166666.70
-114583.40	-31250.01	-135416.70	93750.02	-20833.36	31250.01	270833.40	-93750.02
31250.01	-395833.40	93750.02	-229166.70	-31250.00	166666.70	-93750.02	458333.40

Cálculo de la matriz de rigidez del elemento # 3

El elemento 3 esta determinado por los nodos : 8 6 5 7

Por lo tanto su matriz de coordenadas globales es :

2.00	0.00
4.00	0.00
4.00	1.00
2.00	1.00

Matriz de derivadas en coordenadas locales

$$\begin{bmatrix} -0.10566 & 0.10566 & 0.39434 & -0.39434 \\ -0.39434 & -0.10566 & 0.10566 & 0.39434 \end{bmatrix}$$

Jacobiano de transformación

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ -0.00 & 0.50 \end{bmatrix}$$

Determinante del jacobiano = 0.50

Matriz B

$$\begin{bmatrix} -0.10566 & 0.00000 & 0.10566 & 0.00000 & 0.39434 & 0.00000 & -0.39434 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.78868 & 0.00000 & -0.21132 & 0.00000 & 0.21132 & 0.00000 & 0.78868 \\ -0.78868 & -0.10566 & -0.21132 & 0.10566 & 0.21132 & 0.39434 & 0.78868 & -0.39434 \end{bmatrix}$$

Matriz DB

$$\begin{bmatrix} -220130.00 & -328614.70 & 220130.00 & -88052.02 & 821536.70 & 88052.04 & -821536.70 & 328614.70 \\ -44026.01 & -1643073.00 & 44026.01 & -440260.10 & 164307.30 & 440260.20 & -164307.30 & 1643073.00 \\ -657229.40 & -88052.02 & -176104.00 & 88052.02 & 176104.10 & 328614.70 & 657229.30 & -328614.70 \end{bmatrix}$$

Matriz kAux

$$\begin{bmatrix} 81240.00 & 15625.00 & 17344.41 & -9021.10 & -33854.17 & -40271.11 & -64730.23 & 33667.21 \\ 15625.00 & 195773.30 & -2417.20 & 50687.76 & -22228.91 & -57291.68 & 9021.10 & -189169.30 \\ 17344.41 & -2417.20 & 9071.19 & -4186.71 & 7438.56 & -9021.10 & -33854.17 & 15625.00 \\ -9021.10 & 50687.76 & -4186.71 & 15351.25 & -2417.20 & -8747.35 & 15625.00 & -57291.68 \\ -33854.17 & -22228.91 & 7438.56 & -2417.20 & 54176.70 & 15625.00 & -27761.09 & 9021.10 \\ -40271.11 & -57291.68 & -9021.10 & -8747.35 & 15625.00 & 33393.46 & 33667.20 & 32645.57 \\ -64730.24 & 9021.10 & -33854.17 & 15625.00 & -27761.09 & 33667.20 & 126345.50 & -58313.30 \\ 33667.21 & -189169.30 & 15625.00 & -57291.66 & 9021.10 & 32645.57 & -58313.30 & 213815.40 \end{bmatrix}$$

Cálculo en el 2º punto de Gauss del elemento # 3

Matriz de derivadas en coordenadas locales

$$\begin{bmatrix} -0.10566 & 0.10566 & 0.39434 & -0.39434 \\ -0.10566 & -0.39434 & 0.39434 & 0.10566 \end{bmatrix}$$

Jacobiano de transformación

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.50 \end{bmatrix}$$

Determinante del jacobiano = 0.50

Matriz B

$$\begin{bmatrix} -0.10566 & 0.00000 & 0.10566 & 0.00000 & 0.39434 & 0.00000 & -0.39434 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.21132 & 0.00000 & -0.78868 & 0.00000 & 0.78868 & 0.00000 & 0.21132 \\ -0.21132 & -0.10566 & -0.78868 & 0.10566 & 0.78868 & 0.39434 & 0.21132 & -0.39434 \end{bmatrix}$$

Matriz DB

$$\begin{bmatrix} -220130.00 & -88052.02 & 220130.00 & -328614.70 & 821536.70 & 328614.70 & -821536.70 & 88052.03 \\ -44026.01 & -440260.10 & 44026.01 & -1643073.00 & 164307.30 & 1643073.00 & -164307.30 & 440260.20 \\ -176104.00 & -88052.02 & -657229.40 & 88052.02 & 657229.40 & 328614.70 & 176104.10 & -328614.70 \end{bmatrix}$$

Matriz kAux

9071.20	4186.71	17344.41	2417.20	-33854.17	-15625.00	7438.56	9021.10
4186.71	15351.25	9021.10	50687.77	-15625.00	-57291.67	2417.20	-8747.35
17344.41	9021.10	61240.00	-15625.00	-64730.24	-33667.21	-33854.17	40271.11
2417.20	50687.77	-15625.00	195773.30	-9021.10	-189169.40	22228.91	-57291.67
-33854.17	-15625.00	-64730.24	-9021.10	126345.50	58313.31	-27761.09	-33667.21
-15625.00	-57291.67	-33667.21	-189169.40	58313.31	213815.50	-9021.10	32645.57
7438.56	2417.20	-33854.17	22228.91	-27761.09	-9021.10	54176.70	-15625.00
9021.10	-8747.35	40271.11	-57291.68	-33667.21	32645.57	-15625.00	33393.46

Cálculo en el 3º punto de Gauss del elemento # 3

Matriz de derivadas en coordenadas locales

-0.39434	0.39434	0.10566	-0.10566
-0.39434	-0.10566	0.10566	0.39434

Jacobiano de transformación

1.00	0.00
-0.00	0.50

Determinante del jacobiano = 0.50

Matriz B

-0.39434	0.00000	0.39434	0.00000	0.10566	0.00000	-0.10566	0.00000
0.00000	-0.78868	0.00000	-0.21132	0.00000	0.21132	0.00000	0.78868
-0.78868	-0.39434	-0.21132	0.39434	0.21132	0.10566	0.78868	-0.10566

Matriz DB

-821536.60	-328614.70	821536.60	-88052.00	220130.00	88052.03	-220130.00	328614.70
-164307.30	-1643074.00	164307.30	-440260.00	44026.00	440260.10	-44026.00	1643073.00
-657229.40	-328614.60	-176104.00	328614.60	176104.10	88052.01	657229.40	-88052.01

Matriz kAux

126345.50	58313.31	-27761.08	-33667.21	-33854.17	-15625.00	-64730.26	-9021.10
58313.31	213815.50	-9021.11	32645.57	-15625.00	-57291.68	-33667.21	-189169.40
-27761.08	-9021.11	54176.68	-15625.00	7438.56	2417.20	-33854.16	22228.91
-33667.21	32645.57	-15625.00	33393.45	9021.10	-8747.35	40271.11	-57291.67
-33854.17	-15625.00	7438.56	9021.10	9071.20	4186.71	17344.42	2417.20
-15625.00	-57291.68	2417.20	-8747.35	4186.71	15351.26	9021.10	50687.78
-64730.27	-33667.20	-33854.16	40271.11	17344.42	9021.10	81240.00	-15625.00
-9021.10	-189169.40	22228.90	-57291.66	2417.20	50687.78	-15625.00	195773.30

Cálculo en el 4º punto de Gauss del elemento # 3

Matriz de derivadas en coordenadas locales

$$\begin{bmatrix} -0.39434 & 0.39434 & 0.10566 & -0.10566 \\ -0.10566 & -0.39434 & 0.39434 & 0.10566 \end{bmatrix}$$

Jacobiano de transformación

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.50 \end{bmatrix}$$

Determinante del jacobiano = 0.50

Matriz B

-0.39434	0.00000	0.39434	0.00000	0.10566	0.00000	-0.10566	0.00000
0.00000	-0.21132	0.00000	-0.78868	0.00000	0.78868	0.00000	0.21132
-0.21132	-0.39434	-0.78868	0.39434	0.78868	0.10566	0.21132	-0.10566

Matriz DB

-821536.60	-88052.01	821536.60	-328614.70	220130.00	328614.70	-220130.00	88052.02
-164307.30	-440260.00	164307.30	-1643073.00	44026.00	1643073.00	-44026.00	440260.10
-176104.00	-328614.60	-657229.40	328614.60	657229.40	88052.01	176104.00	-88052.01

Matriz kAux

54176.69	15625.00	-27761.08	9021.10	-33854.17	-22228.91	7438.56	-2417.20
15625.00	33393.45	33667.21	32645.57	-40271.11	-57291.67	-9021.10	-8747.35
-27761.08	33667.21	126345.50	-58313.31	-64730.25	9021.10	-33854.17	15625.00
9021.10	32645.57	-58313.31	213815.50	33667.21	-189169.40	15625.00	-57291.68
-33854.17	-40271.11	-64730.25	33667.20	81240.00	15625.00	17344.42	-9021.10
-22228.90	-57291.67	9021.10	-189169.40	15625.00	195773.30	-2417.20	50687.78
7438.56	-9021.10	-33854.17	15625.00	17344.42	-2417.20	9071.20	-4186.71
-2417.20	-8747.35	15625.00	-57291.68	-9021.10	50687.78	-4186.71	15351.25

Matriz de rigidez del elemento # 3

270833.40	93750.02	-20833.33	-31250.00	-135416.70	-93750.02	-114583.40	31250.01
93750.02	458333.40	31250.00	166666.70	-93750.02	-229166.70	-31250.00	-395833.40
-20833.32	31250.00	270833.40	-93750.02	-114583.40	-31250.00	-135416.70	93750.02
-31250.01	166666.70	-93750.02	458333.40	31250.01	-395833.40	93750.02	-229166.70
-135416.70	-93750.02	-114583.40	31250.00	270833.40	93750.02	-20833.34	-31250.01
-93750.02	-229166.70	-31250.01	-395833.40	93750.02	458333.40	31250.00	166666.70
-114583.40	-31250.00	-135416.70	93750.02	-20833.34	31250.00	270833.40	-93750.01
31250.01	-395833.40	93750.01	-229166.70	-31250.01	166666.70	-93750.01	458333.40

Cálculo de la matriz de rigidez del elemento # 4

El elemento 4 esta determinado por los nodos : 10 8 7 9

Por lo tanto su matriz de coordenadas globales es :

$$\begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 \\ 2.00 & 0.00 \\ 2.00 & 1.00 \\ 0.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Matriz de derivadas en coordenadas locales

$$\begin{bmatrix} -0.10566 & 0.10566 & 0.39434 & -0.39434 \\ -0.39434 & -0.10566 & 0.10566 & 0.39434 \end{bmatrix}$$

Jacobiano de transformación

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.50 \end{bmatrix}$$

Determinante del jacobiano = 0.50

Matriz B

$$\begin{bmatrix} -0.10566 & 0.00000 & 0.10566 & 0.00000 & 0.39434 & 0.00000 & -0.39434 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.78868 & 0.00000 & -0.21132 & 0.00000 & 0.21132 & 0.00000 & 0.78868 \\ -0.78868 & -0.10566 & -0.21132 & 0.10566 & 0.21132 & 0.39434 & 0.78868 & -0.39434 \end{bmatrix}$$

Matriz DB

$$\begin{bmatrix} -220130.00 & -328614.70 & 220130.00 & -88052.02 & 821536.70 & 88052.02 & -621536.70 & 328614.70 \\ -44026.01 & -1643073.00 & 44026.01 & -440260.10 & 164307.30 & 440260.10 & -164307.30 & 1643073.00 \\ -657229.40 & -88052.02 & -176104.00 & 88052.02 & 176104.00 & 328614.70 & 657229.40 & -328614.70 \end{bmatrix}$$

Matriz kAux

$$\begin{bmatrix} 81240.00 & 15625.00 & 17344.41 & -9021.10 & -33854.17 & -40271.11 & -64730.24 & 33667.21 \\ 15625.00 & 195773.30 & -2417.20 & 50687.77 & -22228.91 & -57291.67 & 9021.10 & -189169.40 \\ 17344.41 & -2417.20 & 9071.20 & -4186.71 & 7438.56 & -9021.10 & -33854.17 & 15625.00 \\ -9021.10 & 50687.77 & -4186.71 & 15351.25 & -2417.20 & -8747.35 & 15625.00 & -57291.67 \\ -33854.17 & -22228.91 & 7438.56 & -2417.20 & 54176.70 & 15625.00 & -27761.09 & 9021.10 \\ -40271.11 & -57291.67 & -9021.10 & -8747.35 & 15625.00 & 33393.45 & 33667.21 & 32645.56 \\ -64730.24 & 9021.10 & -33854.17 & 15625.00 & -27761.09 & 33667.21 & 126345.50 & -58313.31 \\ 33667.21 & -189169.40 & 15625.00 & -57291.67 & 9021.10 & 32645.56 & -58313.31 & 213815.50 \end{bmatrix}$$

Cálculo en el 2º punto de Gauss del elemento # 4

Matriz de derivadas en coordenadas locales

$$\begin{bmatrix} -0.10566 & 0.10566 & 0.39434 & -0.39434 \\ -0.10566 & -0.39434 & 0.39434 & 0.10566 \end{bmatrix}$$

Jacobiano de transformación

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.50 \end{bmatrix}$$

Determinante del jacobiano = 0.50

Matriz B

$$\begin{bmatrix} -0.10566 & 0.00000 & 0.10566 & 0.00000 & 0.39434 & 0.00000 & -0.39434 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.21132 & 0.00000 & -0.78868 & 0.00000 & 0.78868 & 0.00000 & 0.21132 \\ -0.21132 & -0.10566 & -0.78868 & 0.10566 & 0.78868 & 0.39434 & 0.21132 & -0.39434 \end{bmatrix}$$

Matriz DB

$$\begin{bmatrix} -220130.00 & -88052.02 & 220130.00 & -328614.70 & 821536.70 & 328614.70 & -821536.70 & 88052.02 \\ -44026.01 & -440260.10 & 44026.01 & -1643073.00 & 164307.30 & 1643073.00 & -164307.30 & 440260.10 \\ -176104.00 & -88052.02 & -657229.40 & 88052.02 & 657229.40 & 328614.70 & 176104.00 & -328614.70 \end{bmatrix}$$

Matriz kAux

$$\begin{bmatrix} 9071.20 & 4186.71 & 17344.41 & 2417.20 & -33854.17 & -15625.00 & 7438.56 & 9021.10 \\ 4186.71 & 15351.25 & 9021.10 & 50687.77 & -15625.00 & -57291.67 & 2417.20 & -8747.35 \\ 17344.41 & 9021.10 & 81240.00 & -15625.00 & -64730.24 & -33667.21 & -33854.17 & 40271.11 \\ 2417.20 & 50687.77 & -15625.00 & 195773.30 & -9021.10 & -189169.40 & 22228.91 & -57291.67 \\ -33854.17 & -15625.00 & -64730.24 & -9021.10 & 126345.50 & 58313.31 & -27761.09 & -33667.21 \\ -15625.00 & -57291.67 & -33667.21 & -189169.40 & 58313.31 & 213815.50 & -9021.10 & 32645.56 \\ 7438.56 & 2417.20 & -33854.17 & 22228.91 & -27761.09 & -9021.10 & 54176.70 & -15625.00 \\ 9021.10 & -8747.35 & 40271.11 & -57291.67 & -33667.21 & 32645.56 & -15625.00 & 33393.45 \end{bmatrix}$$

Cálculo en el 3º punto de Gauss del elemento # 4

Matriz de derivadas en coordenadas locales

$$\begin{bmatrix} -0.39434 & 0.39434 & 0.10566 & -0.10566 \\ -0.39434 & -0.10566 & 0.10566 & 0.39434 \end{bmatrix}$$

Jacobiano de transformación

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.50 \end{bmatrix}$$

Determinante del jacobiano = 0.50

Matriz B

$$\begin{bmatrix} -0.39434 & 0.00000 & 0.39434 & 0.00000 & 0.10566 & 0.00000 & -0.10566 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.78868 & 0.00000 & -0.21132 & 0.00000 & 0.21132 & 0.00000 & 0.78868 \\ -0.78868 & -0.39434 & -0.21132 & 0.39434 & 0.21132 & 0.10566 & 0.78868 & -0.10566 \end{bmatrix}$$

Matriz DB

$$\begin{bmatrix} -821536.70 & -328614.70 & 821536.70 & -88052.02 & 220130.00 & 88052.02 & -220130.00 & 328614.70 \\ -164307.30 & -1643073.00 & 164307.30 & -440260.10 & 44026.01 & 440260.10 & -44026.01 & 1643073.00 \\ -657229.40 & -328614.70 & -176104.00 & 328614.70 & 176104.00 & 88052.02 & 657229.40 & -88052.02 \end{bmatrix}$$

Matriz kAux

$$\begin{bmatrix} 126345.50 & 58313.31 & -27761.09 & -33667.21 & -33854.17 & -15625.00 & -64730.24 & -9021.10 \\ 58313.31 & 213815.50 & -9021.10 & 32645.56 & -15625.00 & -57291.67 & -33667.21 & -189169.40 \\ -27761.09 & -9021.10 & 54176.70 & -15625.00 & 7438.56 & 2417.20 & -33854.17 & 22228.91 \\ -33667.21 & 32645.56 & -15625.00 & 33393.45 & 9021.10 & -8747.35 & 40271.11 & -57291.67 \\ -33854.17 & -15625.00 & 7438.56 & 9021.10 & 9071.20 & 4186.71 & 17344.41 & 2417.20 \\ -15625.00 & -57291.67 & 2417.20 & -8747.35 & 4186.71 & 15351.25 & 9021.10 & 50687.77 \\ -64730.24 & -33667.21 & -33854.17 & 40271.11 & 17344.41 & 9021.10 & 81240.00 & -15625.00 \\ -9021.10 & -189169.40 & 22228.91 & -57291.67 & 2417.20 & 50687.77 & -15625.00 & 195773.30 \end{bmatrix}$$

Cálculo en el 4º punto de Gauss del elemento # 4

Matriz de derivadas en coordenadas locales

$$\begin{bmatrix} -0.39434 & 0.39434 & 0.10566 & -0.10566 \\ -0.10566 & -0.39434 & 0.39434 & 0.10566 \end{bmatrix}$$

Jacobiano de transformación

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.50 \end{bmatrix}$$

Determinante del jacobiano = 0.50

Matriz B

$$\begin{bmatrix} -0.39434 & 0.00000 & 0.39434 & 0.00000 & 0.10566 & 0.00000 & -0.10566 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.21132 & 0.00000 & -0.78868 & 0.00000 & 0.78868 & 0.00000 & 0.21132 \\ -0.21132 & -0.39434 & -0.78868 & 0.39434 & 0.78868 & 0.10566 & 0.21132 & -0.10566 \end{bmatrix}$$

Matriz DB

$$\begin{bmatrix} -821536.70 & -88052.02 & 821536.70 & -328614.70 & 220130.00 & 328614.70 & -220130.00 & 88052.02 \\ -164307.30 & -440260.10 & 164307.30 & -1643073.00 & 44026.01 & 1643073.00 & -44026.01 & 440260.10 \\ -176104.00 & -328614.70 & -657229.40 & 328614.70 & 657229.40 & 88052.02 & 176104.00 & -88052.02 \end{bmatrix}$$

Matriz kAux

54176.70	15625.00	-27761.09	9021.10	-33854.17	-22228.91	7438.56	-2417.20
15625.00	33393.45	33667.21	32645.56	-40271.11	-57291.67	-9021.10	-8747.35
-27761.09	33667.21	126345.50	-58313.31	-64730.24	9021.10	-33854.17	15625.00
9021.10	32645.56	-58313.31	213815.50	33667.21	-189169.40	15625.00	-57291.67
-33854.17	-40271.11	-64730.24	33667.21	81240.00	15625.00	17344.41	-9021.10
-22228.91	-57291.67	9021.10	-189169.40	15625.00	195773.30	-2417.20	50687.77
7438.56	-9021.10	-33854.17	15625.00	17344.41	-2417.20	9071.20	-4186.71
-2417.20	-8747.35	15625.00	-57291.67	-9021.10	50687.77	-4186.71	15351.25

Matriz de rigidez para el elemento # 4 :

270833.40	93750.02	-20833.35	-31250.01	-135416.70	-93750.02	-114583.40	31250.01
93750.02	458333.40	31250.01	166666.70	-93750.02	-229166.70	-31250.01	-395833.40
-20833.35	31250.01	270833.40	-93750.02	-114583.40	-31250.01	-135416.70	93750.02
-31250.01	166666.70	-93750.02	458333.40	31250.01	-395833.40	93750.02	-229166.70
-135416.70	-93750.02	-114583.40	31250.01	270833.40	93750.02	-20833.35	-31250.01
-93750.02	-229166.70	-31250.01	-395833.40	93750.02	458333.40	31250.01	166666.70
-114583.40	-31250.01	-135416.70	93750.02	-20833.35	31250.01	270833.40	-93750.02
31250.01	-395833.40	93750.02	-229166.70	-31250.01	166666.70	-93750.02	458333.40

***** Cargas en los Nudos *****

Numero de Nudos cargados : 8

Nudo	Fuerza en x	Fuerza en y
1	0.0	-10.4
2	0.0	-0.4
3	0.0	-0.7
4	0.0	-0.7
5	0.0	-0.7
6	0.0	-0.7
9	0.0	-0.7
8	0.0	-0.7

Matriz de rigidez Global

270833	93750	-114583	31250	-20833	-31250	-135417	-93750	0	0	0	0	0	0	0	0	0
93750	458333	-31250	-395833	31250	166667	-93750	-229167	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-114583	-31250	270833	-93750	-135417	93750	-20833	31250	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31250	-395833	-93750	458333	93750	-229167	-31250	166667	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-20833	31250	-135417	93750	541667	-0	-229167	0	-20833	-31250	-135417	-93750	0	0	0	0	0
-31250	166667	93750	-229167	-0	916667	0	-791667	31250	166667	-93750	-229167	0	0	0	0	0
-135417	-93750	-20833	-31250	-229167	-0	541667	-0	-135417	93750	-20833	31250	0	0	0	0	0
-93750	-229167	31250	166667	-0	-791667	-0	916667	93750	-229167	-31250	166667	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-20833	31250	-135417	93750	541667	0	-229167	-0	-20833	-31250	-135417	-93750	0
0	0	0	0	-31250	166667	93750	-229167	0	916667	-0	-791667	31250	166667	-93750	-229167	0
0	0	0	0	-135417	-93750	-20833	-31250	-229167	0	541667	0	-135417	93750	-20833	31250	0
0	0	0	0	-93750	-229167	31250	166667	0	-791667	0	916667	93750	-229167	-31250	166667	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-20833	31250	-135417	93750	541667	0	-229167	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-31250	166667	93750	-229167	0	916667	-0	-791667
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-135417	-93750	-20833	-31250	-229167	-0	541667	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-93750	-229167	31250	166667	0	-791667	0	916667

*****	Desplazamientos	*****
Nudo	Despl. X	Despl. Y
1	1.4171390E-03	-1.55473205E-02
2	-1.4138260E-03	-1.5533830E-02
3	1.3359160E-03	-9.9496190E-03
4	-1.3367240E-03	-9.9528010E-03
5	1.0882800E-03	-5.0052720E-03
6	-1.0881140E-03	-5.0045230E-03
7	6.4981250E-04	-1.4199280E-03
8	-6.4987950E-04	-1.4200960E-03
9	0.0000000E+00	0.0000000E+00
10	0.0000000E+00	0.0000000E+00

Esfuerzos en el elemento 1

*****	Esfuerzos	*****			
X	Y	Sx	Sy	Sxy	
3	6.42	0.79	49.614	9.244	-75.825
2	7.58	0.79	45.605	-10.802	0.349
4	6.42	0.21	-45.605	-9.800	-71.816
1	7.58	0.21	-49.614	-29.846	4.359

Esfuerzos en el elemento 2

*****	Esfuerzos	*****			
X	Y	Sx	Sy	Sxy	
3	4.42	0.79	148.750	29.913	-159.439
2	5.25	0.79	149.696	34.643	79.318
4	4.42	0.21	-149.696	29.776	-160.385
1	5.58	0.21	-148.750	-25.046	78.372

Esfuerzos en el elemento 3

*****	Esfuerzos	*****			
X	Y	Sx	Sy	Sxy	
3	2.42	0.79	263.737	52.695	-256.345
2	3.58	0.79	263.517	51.592	165.458
4	2.42	0.21	-263.517	52.756	-256.125
1	3.58	0.21	-263.737	-53.858	165.679

Esfuerzos en el elemento 4

*****	Esfuerzos	*****			
X	Y	Sx	Sy	Sxy	
3	0.42	0.79	390.802	78.231	-362.771
2	1.58	0.79	290.842	78.433	262.544
4	0.42	0.21	-390.842	-78.098	-362.811
1	1.58	0.21	-390.802	-77.896	262.504

Capítulo 4

Solución del Problema Usando un Método Convencional

4.1 Datos generales.

A fin de tener un marco de referencia para comparar los resultados proporcionados por el programa, se solucionó el problema utilizando otro criterio, el cual fué idealizar la viga como una barra y posteriormente cargarla con una fuerza distribuida para representar al peso propio y con una carga concentrada en el extremo.

Para calcular la fuerza distribuida multiplicamos el peso específico por el espesor y por el peralte de la viga, quedando :

$$w = 2.4 \times 0.3 \times 1 = 0.72 \text{ t/m}$$



$$E = 2 \times 10^4 \text{ t / m}^2$$

$$\nu = 0.2$$

Calculando el el momento de inercia de la sección anterior queda :

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(0.3)(1)^3}{12} = 0.025 \text{ m}^4$$

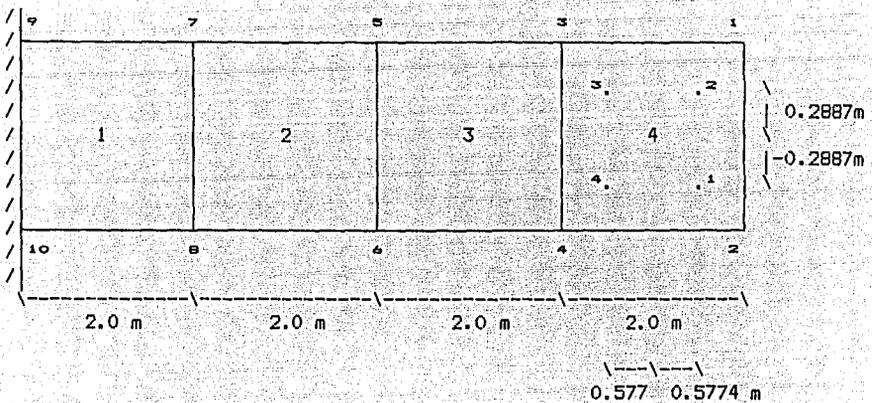
Con los datos anteriores se procedió a obtener tanto los esfuerzos como los desplazamientos, calculando las expresiones algebraicas de la fuerza cortante y del momento flexionante, para con este último obtener el esfuerzo normal aplicando la fórmula de la escuadría.

Con los esfuerzos calculados se procedió a formar una tabla comparativa entre los resultados obtenidos por el MEF y la teoría de barras.

4.2 Cálculo de distancias.

Dado que el programa proporciona los esfuerzos en los puntos de Gauss, las distancias a las que se localizarán los esfuerzos con la fórmula de la escuadría serán tales que coincidan con estos puntos.

A continuación procederemos a obtener los valores de las coordenadas globales utilizando para ello la siguiente figura :



4.2.1 Distancias para el elemento 1 :

No. de punto	X	Y	Y centroidal
1	7.5774	$0.5 - 0.5774 * 0.5 = 0.2113$	- 0.2887
2	7.5774	$0.5 + 0.2887 = 0.7887$	0.2887
3	6.4226	$0.5 + 0.2887 = 0.7887$	0.2887
4	6.4226	$0.5 - 0.2887 = 0.2113$	- 0.2887

4.2.2 Distancias para el elemento 2

No. de punto	X	Y	Y centroidal
1	5.5774	0.2113	- 0.2887
2	5.5774	0.7887	0.2887
3	4.4226	0.7887	0.2887
4	4.4226	0.2113	- 0.2887

4.2.3 Distancias para el elemento 3

No. de punto	X	Y	Y centroidal
1	3.5774	0.2113	- 0.2887
2	3.5774	0.7887	0.2887
3	2.4226	0.7887	0.2887
4	2.4226	0.2113	- 0.2887

4.2.4 Distancias para el elemento 4

No. de punto	X	Y	Y centroidal
1	1.5774	0.2113	- 0.2887
2	1.5774	0.7887	0.2887
3	0.4226	0.7887	0.2887
4	0.4226	0.2113	- 0.2887

4.2.5 Resumen de distancias.

De las tablas anteriores se pueden obtener las distancias a las que se calcularán los momentos, siendo estas :

1	0.4226
2	1.5774
3	2.4226
4	3.5774
5	4.4226
6	5.5774
7	6.4226
8	7.5774

4.3 Expresiones para momento flexionante y cortante.

Dado que las distancias a las que se requieren los esfuerzos no son constantes y como se desea obtener la mejor precisión posible se obtuvieron las ecuaciones de momento flexionante y de fuerza cortante, las cuales son :

$$V = 10 - 0.72(x-8) = 10 + 0.72(8-x)$$

$$M = -10(8-x) - 0.72(8-x)(8-x)/2$$

$$M = -10(8-x) - 0.72(8-x)^2/2$$

Donde :

$$0 \leq x \leq 8$$

Valuando para los valores de x antes calculados queda :

X	V	M
0.4226	15.4557	-96.4441
1.5774	14.6243	-79.0759
2.4226	14.0157	-66.9727
3.5774	13.1843	-51.2674
4.4226	12.5757	-40.3812
5.5774	11.7443	-26.3388
6.4226	11.1357	-16.6697
7.5774	10.3043	-4.2903

4.4 Cálculo de esfuerzos del elemento 1.

4.4.1 Puntos 1 y 2 de Gauss.

Para estos puntos la distancia a la que se tomará el momento es 7.5774 m por lo tanto :

$$M = -4.2903 \text{ t-m}$$

La distancia al eje centroidal tomada para el punto 1 es :

$$Y_1 = -0.2887$$

Por lo tanto :

$$\sigma = \frac{(-4.2903)(-0.2887)}{0.025} = 49.54$$

Para el punto 2 :

$$Y_2 = 0.2887$$

Por lo tanto :

$$\sigma = \frac{(-4.2903)(0.2887)}{0.025} = - 49.54$$

4.4.2 Puntos 3 y 4 de Gauss.

Para estos puntos el momento es :

$$M = -16.6697$$

Para el punto 3 :

$$Y_3 = 0.2887 \text{ m}$$

$$\sigma = \frac{(-16.6697)(0.2887)}{0.025} = - 192.48 \text{ t / m}^2$$

Para el punto 4 :

$$Y_4 = -0.2887$$

Por tanto :

$$\sigma = \frac{(-16.6697)(-0.2887)}{0.025} = 192.48 \text{ t / m}^2$$

4.5 Cálculo de esfuerzos en el elemento 2

4.5.1 Puntos 1 y 2 de Gauss.

Para estos puntos el momento es :

$$M = -26.3388 \text{ t-m}$$

La distancia al eje centroidal tomada para el punto 1 es :

$$Y_1 = -0.2887$$

Por lo tanto :

$$\sigma = \frac{(-26.3388)(-0.2887)}{0.025} = 304.13 \text{ t / m}^2$$

Para el punto 2 :

$$Y_2 = 0.2887$$

Por lo tanto :

$$\sigma = \frac{(-26.3388)(0.2887)}{0.025} = -304.13 \text{ t / m}^2$$

4.5.2 Puntos 3 y 4 de Gauss.

Para estos puntos el momento es :

$$M = -40.3812$$

Para el punto 3 :

$$Y_3 = 0.2887 \text{ m}$$

$$\sigma = \frac{(-40.3812)(0.2887)}{0.025} = -466.28 \text{ t / m}^2$$

Para el punto 4 :

$$Y_4 = -0.2887$$

Por tanto :

$$\sigma = \frac{(-40.3812)(-0.2887)}{0.025} = 466.28 \text{ t / m}^2$$

4.6 Cálculo de esfuerzos en el elemento 3

4.6.1 Puntos 1 y 2 de Gauss.

Para estos puntos el momento es :

$$M = -51.2674 \text{ t-m}$$

La distancia al eje centroidal tomada para el punto 1 es :

$$Y_1 = -0.2887$$

Por lo tanto :

$$\sigma = \frac{(-51.2674)(-0.2887)}{0.025} = 591.92 \text{ t / m}^2$$

Para el punto 2 :

$$Y_2 = 0.2887$$

Por lo tanto :

$$\sigma = \frac{(-51.2674)(0.2887)}{0.025} = - 591.98 \text{ t / m}^2$$

4.6.2 Puntos 3 y 4 de Gauss.

Para estos puntos el momento es :

$$M = -66.9727$$

Para el punto 3 :

$$Y_3 = 0.2887 \text{ m}$$

$$\sigma = \frac{(-66.9727)(0.2887)}{0.025} = - 773.33 \text{ t / m}^2$$

Para el punto 4 :

$$Y_4 = -0.2887$$

Por tanto :

$$\sigma = \frac{(-66.9727)(-0.2887)}{0.025} = 773.33 \text{ t / m}^2$$

4.7 Cálculo de esfuerzos en el elemento 4

4.7.1 Puntos 1 y 2 de Gauss.

Para estos puntos el momento es :

$$M = -79.0759 \text{ t-m}$$

La distancia al eje centroidal tomada para el punto 1 es :

$$Y_1 = -0.2887$$

Por lo tanto :

$$\sigma = \frac{(-79.0759)(-0.2887)}{0.025} = 913.08 \text{ t / m}^2$$

Para el punto 2 :

$$Y_2 = 0.2887$$

Por lo tanto :

$$\sigma = \frac{(-79.0759)(0.2887)}{0.025} = -913.08 \text{ t / m}^2$$

4.7.2 Puntos 3 y 4 de Gauss.

Para estos puntos momento es :

$$M = -96.4441$$

Para el punto 3 :

$$Y_3 = 0.2887 \text{ m}$$

$$\sigma = \frac{(-96.4441)(0.2887)}{0.025} = -1113.64 \text{ t / m}^2$$

Para el punto 4 :

$$Y_4 = -0.2887$$

Por tanto :

$$\sigma = \frac{(-96.4441)(-0.2887)}{0.025} = 1113.64 \text{ t / m}^2$$

Los valores antes obtenidos se procedió a tabularlos, para compararlos con los obtenidos con el programa y obtener una diferencia porcentual entre ambos resultados, siendo esta la diferencia expresada en porcentaje entre el valor proporcionado por la teoría de barras y el MEF

Esfuerzos con 10 puntos nodales (4 elementos)

X	Y	σ T. barras	σ MEF	Diferencia %
7.5774	0.7887	49.546	51.159	3.26
7.5774	0.2113	-49.546	-48.500	-2.11
6.4226	0.7887	192.479	55.167	-71.34
6.4226	0.2113	-192.479	-44.493	-76.88
5.5774	0.7887	304.142	155.247	-48.96
5.5774	0.2113	-304.141	-147.640	-51.46
4.4226	0.7887	466.275	154.307	-66.91
4.4226	0.2113	-466.275	-148.580	-68.13
3.5774	0.7887	591.992	269.082	-54.55
3.5774	0.2113	-591.992	-262.613	-55.64
2.4226	0.7887	773.326	269.279	-65.18
2.4226	0.2113	-773.326	-262.416	-66.07
1.5774	0.7887	913.099	396.346	-56.59
1.5774	0.2113	-913.099	-389.738	-57.32
0.4226	0.7887	1113.632	396.405	-64.40
0.4226	0.2113	-1113.632	-389.680	-65.01

En la tabla anterior se puede apreciar que existen diferencias significativas en cuanto a porcentaje y en cuanto a valor absoluto, por lo cual se analizaron otras tres opciones, la primera de ellas fué dividir horizontalmente la viga original, formando con ello el doble de elementos en la viga, la segunda fué agregar divisiones verticales a la viga original de manera que se redujo a la mitad la longitud de cada elemento y por ultimo se tomo una viga en la que se combinaron las dos anteriores, esto es se dividió horizontal y verticalmente la viga original.

De acuerdo a la tablas presentadas posteriormente se puede apreciar que la viga con 15 nodos casi no presentó mejoría en sus resultados con respecto a la de 10 nodos (Viga original), por otra parte en la viga con 18 nodos los resultados mejoran notablemente, llegando a ser de solo 20% de diferencia contra 70% en los casos anteriores, por ultimo examinando los resultados de la viga con 27 nodos se vuelve a presentar un decremento en la fidelidad de los resultados, por lo cual se concluye que lo mejor es incrementar el número de elementos de tal manera que se disminuyan sus dimensiones a lo largo de la viga.

En general se puede decir que la falta de aproximación presentada en estos ejemplos se debe al número de elementos tomados, pero principalmente a que la función tomada para la aproximación de los esfuerzos dista mucho de ser real, esto es se está tomando una variación lineal de los esfuerzos, al ser esto totalmente falso, no se logra la aproximación a el estado real de esfuerzos y por lo tanto los resultados no son confiables.

Viga con 8 elementos finitos
15 nodos

13		10		7		4		1
14	7	11	5	8	3	5	1	2
15	8	12	6	9	4	6	2	3

Viga con 8 elementos finitos
18 nodos

17	15	13	11	9	7	5	3	1
18	8	7	6	5	4	3	2	1
19	16	14	12	10	8	6	4	2

Esfuerzos con 27 puntos nodales (16 elementos)

25	22	19	16	13	10	7	4	1
26	15	13	11	9	7	5	3	1
27	24	23	20	17	14	11	8	5
28	16	14	12	10	8	6	4	2
29	27	24	21	18	15	12	9	6
30	28	25	22	19	16	13	10	7
31	30	27	24	21	18	15	12	9
32	31	28	25	22	19	16	13	10
33	32	29	26	23	20	17	14	11
34	33	30	27	24	21	18	15	12
35	34	31	28	25	22	19	16	13
36	35	32	29	26	23	20	17	14
37	36	33	30	27	24	21	18	15
38	37	34	31	28	25	22	19	16
39	38	35	32	29	26	23	20	17
40	39	36	33	30	27	24	21	18
41	40	37	34	31	28	25	22	19
42	41	38	35	32	29	26	23	20
43	42	39	36	33	30	27	24	21
44	43	40	37	34	31	28	25	22
45	44	41	38	35	32	29	26	23
46	45	42	39	36	33	30	27	24
47	46	43	40	37	34	31	28	25
48	47	44	41	38	35	32	29	26
49	48	45	42	39	36	33	30	27
50	49	46	43	40	37	34	31	28
51	50	47	44	41	38	35	32	29
52	51	48	45	42	39	36	33	30
53	52	49	46	43	40	37	34	31
54	53	50	47	44	41	38	35	32
55	54	51	48	45	42	39	36	33
56	55	52	49	46	43	40	37	34
57	56	53	50	47	44	41	38	35
58	57	54	51	48	45	42	39	36
59	58	55	52	49	46	43	40	37
60	59	56	53	50	47	44	41	38
61	60	57	54	51	48	45	42	39
62	61	58	55	52	49	46	43	40
63	62	59	56	53	50	47	44	41
64	63	60	57	54	51	48	45	42
65	64	61	58	55	52	49	46	43
66	65	62	59	56	53	50	47	44
67	66	63	60	57	54	51	48	45
68	67	64	61	58	55	52	49	46
69	68	65	62	59	56	53	50	47
70	69	66	63	60	57	54	51	48
71	70	67	64	61	58	55	52	49
72	71	68	65	62	59	56	53	50
73	72	69	66	63	60	57	54	51
74	73	70	67	64	61	58	55	52
75	74	71	68	65	62	59	56	53
76	75	72	69	66	63	60	57	54
77	76	73	70	67	64	61	58	55
78	77	74	71	68	65	62	59	56
79	78	75	72	69	66	63	60	57
80	79	76	73	70	67	64	61	58
81	80	77	74	71	68	65	62	59
82	81	78	75	72	69	66	63	60
83	82	79	76	73	70	67	64	61
84	83	80	77	74	71	68	65	62
85	84	81	78	75	72	69	66	63
86	85	82	79	76	73	70	67	64
87	86	83	80	77	74	71	68	65
88	87	84	81	78	75	72	69	66
89	88	85	82	79	76	73	70	67
90	89	86	83	80	77	74	71	68
91	90	87	84	81	78	75	72	69
92	91	88	85	82	79	76	73	70
93	92	89	86	83	80	77	74	71
94	93	90	87	84	81	78	75	72
95	94	91	88	85	82	79	76	73
96	95	92	89	86	83	80	77	74
97	96	93	90	87	84	81	78	75
98	97	94	91	88	85	82	79	76
99	98	95	92	89	86	83	80	77
100	99	96	93	90	87	84	81	78

Esfuerzos con 15 puntos nodales (8 elementos)

X	Y	σ T. barras	σ MEF	Diferencia %
7.5774	0.8943	67.681	61.268	-9.48
7.5774	0.6057	18.135	11.949	-34.11
7.5774	0.3943	-18.135	-16.743	-7.68
7.5774	0.1057	-67.681	-64.765	-4.31
6.4226	0.8943	262.932	65.980	-74.91
6.4226	0.6057	70.452	16.661	-76.35
6.4226	0.3943	-70.452	-13.165	-81.31
6.4226	0.1057	-262.932	-61.186	-76.73
5.5774	0.8943	415.465	203.105	-51.11
5.5774	0.6057	111.323	52.038	-53.26
5.5774	0.3943	-111.323	-51.377	-53.85
5.5774	0.1057	-415.465	-201.760	-51.44
4.4226	0.8943	636.943	200.005	-68.60
4.4226	0.6057	170.668	48.938	-71.33
4.4226	0.3943	-170.668	-50.282	-70.54
4.4226	0.1057	-636.943	-200.665	-68.50
3.5774	0.8943	808.677	356.611	-55.90
3.5774	0.6057	216.684	89.545	-58.68
3.5774	0.3943	-216.684	-89.572	-58.66
3.5774	0.1057	-808.676	-357.032	-55.85
2.4226	0.8943	1056.383	351.536	-66.72
2.4226	0.6057	283.057	84.469	-70.16
2.4226	0.3943	-283.057	-84.049	-70.31
2.4226	0.1057	-1056.382	-351.508	-66.73

Esfuerzos con 15 puntos nodales (8 elementos)
 Continuación

X	Y	σ T. barras	σ MEF	Diferencia %
1.5774	0.8943	1247.316	525.216	-57.89
1.5774	0.6057	334.217	131.759	-60.58
1.5774	0.3943	-334.217	-131.775	-60.57
1.5774	0.1057	-1247.316	-525.126	-57.90
0.4226	0.8943	1521.250	534.131	-64.89
0.4226	0.6057	407.618	140.674	-65.49
0.4226	0.3943	-407.618	-140.764	-65.47
0.4226	0.1057	-1521.249	-534.115	-64.89

Esfuerzos con 18 puntos nodales (8 elementos)

X	Y	σ T. barras	σ MEF	Diferencia %
7.7887	0.7887	24.587	39.336	59.98
7.7887	0.2113	-24.587	-46.112	87.54
7.2113	0.7887	93.654	46.112	-50.76
7.2113	0.2113	-93.654	-39.336	-58.00
6.7887	0.7887	145.971	131.745	-9.75
6.7887	0.2113	-145.971	-130.537	-10.57
6.2113	0.7887	219.838	130.537	-40.62
6.2113	0.2113	-219.838	-131.745	-40.07
5.7887	0.7887	275.669	225.389	-18.24
5.7887	0.2113	-275.669	-225.604	-18.16
5.2113	0.7887	354.336	225.604	-36.33
5.2113	0.2113	-354.336	-225.389	-36.39
4.7887	0.7887	413.681	325.810	-21.24
4.7887	0.2113	-413.681	-325.771	-21.25
4.2113	0.7887	497.147	325.771	-34.47
4.2113	0.2113	-497.147	-325.810	-34.46
3.7887	0.7887	560.006	432.020	-22.85
3.7887	0.2113	-560.006	-432.026	-22.85
3.2113	0.7887	648.273	432.026	-33.36
3.2113	0.2113	-648.273	-432.020	-33.36
2.7887	0.7887	714.645	544.194	-23.85
2.7887	0.2113	-714.645	-544.193	-23.85
2.2113	0.7887	807.712	544.193	-32.63
2.2113	0.2113	-807.712	-544.194	-32.63

Esfuerzos con 18 puntos nodales (8 elementos)
 Continuación

X	Y	σ T. barras	σ MEF	Diferencia %
1.7887	0.7887	877.599	662.303	-24.53
1.7887	0.2113	-877.598	-662.303	-24.53
1.2113	0.7887	975.465	662.303	-32.10
1.2113	0.2113	-975.465	-662.303	-32.10
0.7887	0.7887	1048.866	786.351	-25.03
0.7887	0.2113	-1048.865	-786.351	-25.03
0.2113	0.7887	1151.532	786.351	-31.71
0.2113	0.2113	-1151.532	-786.351	-31.71

Esfuerzos con 27 puntos nodales (16 elementos)

X	Y	σ T. barras	σ MEF	Diferencia %
7.7887	0.8943	33.587	54.456	62.13
7.7887	0.6057	9.000	5.418	-39.79
7.7887	0.3943	-9.000	-16.815	86.84
7.7887	0.1057	-33.587	-58.155	73.15
7.2113	0.8943	127.934	64.882	-49.28
7.2113	0.6057	34.280	15.844	-53.78
7.2113	0.3943	-34.280	-12.145	-64.57
7.2113	0.1057	-127.934	-53.485	-58.19
6.7887	0.8943	199.400	182.017	-8.72
6.7887	0.6057	53.429	45.798	-14.28
6.7887	0.3943	-53.429	-46.884	-12.25
6.7887	0.1057	-199.400	-177.982	-10.74
6.2113	0.8943	300.304	177.566	-40.87
6.2113	0.6057	80.466	41.347	-48.62
6.2113	0.3943	-80.466	-45.382	-43.60
6.2113	0.1057	-300.304	-176.480	-41.23
5.7887	0.8943	376.571	307.039	-18.46
5.7887	0.6057	100.902	77.510	-23.18
5.7887	0.3943	-100.902	-76.689	-24.00
5.7887	0.1057	-376.571	-308.241	-18.15
5.2113	0.8943	484.032	305.490	-36.89
5.2113	0.6057	129.696	75.962	-41.43
5.2113	0.3943	-129.696	-74.760	-42.36
5.2113	0.1057	-484.032	-306.311	-36.72

Esfuerzos con 27 puntos nodales (16 elementos)
Continuación

X	Y	σ T. barras	σ MEF	Diferencia %
4.7887	0.8943	565.098	444.430	-21.35
4.7887	0.6057	151.418	111.303	-26.49
4.7887	0.3943	-151.418	-111.534	-26.34
4.7887	0.1057	-565.098	-444.190	-21.40
4.2113	0.8943	679.116	442.323	-34.87
4.2113	0.6057	181.969	109.195	-39.99
4.2113	0.3943	-181.969	-109.436	-39.86
4.2113	0.1057	-679.116	-442.092	-34.90
3.7887	0.8943	764.982	588.997	-23.01
3.7887	0.6057	204.976	147.436	-28.07
3.7887	0.3943	-204.976	-147.392	-28.09
3.7887	0.1057	-764.982	-589.029	-23.00
3.2113	0.8943	885.557	586.474	-33.77
3.2113	0.6057	237.284	144.914	-38.93
3.2113	0.3943	-237.284	-144.881	-38.94
3.2113	0.1057	-885.557	-586.519	-33.77
2.7887	0.8943	976.224	741.052	-24.09
2.7887	0.6057	261.578	185.336	-29.15
2.7887	0.3943	-261.578	-185.342	-29.14
2.7887	0.1057	-976.224	-741.050	-24.09
2.2113	0.8943	1103.355	739.945	-32.94
2.2113	0.6057	295.643	184.230	-37.69
2.2113	0.3943	-295.643	-184.231	-37.68
2.2113	0.1057	-1103.355	-739.939	-32.94

Esfuerzos con 27 puntos nodales (16 elementos)
Continuación

X	Y	σ T. barras	σ MEF	Diferencia %
1.7887	0.8943	1198.822	904.491	-24.55
1.7887	0.6057	321.223	225.971	-29.65
1.7887	0.3943	-321.223	-225.971	-29.65
1.7887	0.1057	-1198.822	-904.490	-24.55
1.2113	0.8943	1332.510	896.829	-32.70
1.2113	0.6057	357.045	218.309	-38.86
1.2113	0.3943	-357.045	-218.310	-38.86
1.2113	0.1057	-1332.510	-896.829	-32.70
0.7887	0.8943	1432.777	1062.146	-25.87
0.7887	0.6057	383.911	265.635	-30.81
0.7887	0.3943	-383.911	-265.635	-30.81
0.7887	0.1057	-1432.777	-1062.147	-25.87
0.2113	0.8943	1573.022	1081.113	-31.27
0.2113	0.6057	421.490	284.601	-32.48
0.2113	0.3943	-421.490	-284.601	-32.48
0.2113	0.1057	-1573.022	-1081.113	-31.27

Conclusiones

Después del desarrollo del presente trabajo se puede llegar formular una serie de conclusiones con las cuales concretar una opinión sobre el método, las cuales se presentan a continuación.

Por principio de cuentas se debe tener presente el tipo de problema que se desea resolver, esto es si es un problema en el espacio, si tiene simetría con respecto a algún eje o si es un tipo de estado plano de esfuerzos, esto permitirá simplificar las expresiones obtenidas para las funciones de interpolación y para las matrices utilizadas en el proceso de cálculo (D, B, DB, Kaux, K), con lo cual además se reducen los requerimientos de memoria en general.

La selección de las funciones de prueba es también un aspecto a considerar debido a que la aproximación obtenida va en relación directa con el tipo de función utilizada; esto se comprende al considerar que la curva elástica en general va incrementándose en grado a medida que las curvas aumentan en complejidad, por lo cual la aproximación será mejor en la medida que las funciones de interpolación se aproximen a la curva real.

En cuanto al número de puntos nodales se observa que tal y como fueron escogidos para el ejemplo fueron insuficientes y es necesario su incremento a fin de obtener mejores resultados, sin embargo se notó que este incremento no puede ser arbitrario ya que resultó más conveniente cuando se realizó disminuyendo la dimensión a lo largo de la viga que transversalmente, de aquí se podría sugerir que el modo más conveniente de realizar este incremento es tal manera que la disminución sea en la dirección que los esfuerzos se incrementan con mayor velocidad, dado que en la mayoría de las ocasiones no es posible detectar cual es esta dirección para cierto problema lo que queda es utilizar el mayor número posible de elementos.

Es de notar cómo los resultados obtenidos para el primer elemento, en la sección 1 (Puntos 1 y 2) son muy semejantes a los obtenidos por la teoría de barras (TB), siendo en un caso del 91% del valor proporcionado por TB y en el otro se pueden considerar los valores idénticos. En el resto de los puntos se observa como toman un valor que fluctúa entre 23.7% y el 49%, teniéndose en todos los casos un valor absoluto menor de los esfuerzos para los resultados del MEF; estos valores mejoraron notablemente en cuanto se incrementó el número de elementos.

Por lo que respecta a la obtención de la solución del sistema de ecuaciones se encontró que de los métodos existentes el mejor es el conocido como de Gauss-Crout o de Cholesky, dado

que el otro método que se trató de utilizar y que fué el de Gauss-Seidel no converge dado el tipo de matriz de rigidez obtenida con el MEF, la cual no es diagonalmente dominante, esto significa que el valor absoluto de los elementos de la diagonal principal es menor que el valor absoluto de la suma de el resto de los elementos, debido a esto el error entre cada iteración no disminuye sino que al contrario se va incrementando ocasionando que nunca se llegue al valor correcto de la solución.

Como se había mencionado antes se ve la necesidad de optimizar el manejo de memoria, ya que el número de puntos nodales necesarios para obtener una buena aproximación es muy grande, teniéndose entonces la necesidad de utilizar los conceptos de "Ancho de Banda" y "Contorno de silueta" y aprovechar la simetría de las matrices utilizadas, tanto las parciales como en la matriz de rigidez global, y poner especial énfasis a la optimización de esta última, con esto no solamente se hará un ahorro de memoria, sino también en tiempo de cálculo, puesto que se evita el operar con los elementos que salgan del ancho de banda o de la silueta y que tienen un valor de cero.

Otro aspecto que no se debe descuidar y que va ligado a la optimización de memoria es el referente a la numeración de los nodos, ya que de esto depende el ancho de banda, por lo cual al momento de realizar la numeración se conviene procurar que la diferencia entre los nodos que componen un elemento sea la menor posible. Una manera de lograr esto es ir numerando en la dirección que contenga el menor número de nodos, siempre y cuando esto sea posible de determinar.

Finalmente podemos decir que, si bien el MEF es un criterio sumamente poderoso, y muy recomendable para ciertos tipos de cálculos, no debe ser visto como el más exacto o el óptimo para cualquier tipo de problema, puesto que para obtener un buen grado en la aproximación, se requiere utilizar una malla lo suficientemente compleja y pudiera ser el caso de que existiesen métodos más sencillos ya desarrollados, por lo cual no se le considera un sustituto de estos últimos, los cuales tienen además una eficacia probada.

Sin embargo existe un gran número de problemas en los que la aplicabilidad del método es indiscutible pese a los inconvenientes que pueda tener la falta de aproximación, por lo que resulta conveniente su estudio y comprensión, además teniendo en cuenta que cada vez es mayor el poderío de los equipos de cómputo se considera necesario un conocimiento mínimo de este método de tal manera que si en un momento dado es necesaria su utilización, los resultados obtenidos puedan ser confiables.

REFERENCIAS

tracto de la investigación realizada por el Dr. Jesus Larraide,
Revista IMCYC, Vol. 23 No. 173, Set. 1985.

ervantes Beltran Ramón, Porras Silva Victor, "Introducción al Método
del Elemento Finito", División de estudios de posgrado. Facultad de
Ingeniería UNAM, 1983

orrie Douglas H., "The Finite Element Method", Biblioteca de la Divi-
sión de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería.

puntos de la clase "Introducción al Método del Elemento Finito" impar-
tida por el Dr. Roberto Gómez Martínez", 1985

puntos de la clase "Tópicos estructurales" impartida por el Ing. Julio
Ramírez Ríos", 1985