



20/11/60  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL FORMALISMO HAMILTONIANO  
PARA UN FLUIDO NO VISCOSO

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**F I S I C O**

P R E S E N T A :

MANUEL VALADEZ RODRIGUEZ

MEXICO, D. F.,

OCTUBRE DE 1988



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# INDICE

	Pag.
<b>RESUMEN</b> .....	1
<b>Capítulo 1. ANTECEDENTES MATEMATICOS</b> .....	5
1.1 INTRODUCCION .....	6
1.2 ELEMENTOS DEL CALCULO DE VARIACIONES .....	7
1.3 LA TRANSFORMADA DE LEGENDRE .....	12
1.4 EL TEOREMA DE TRANSPORTE .....	14
<b>Capítulo 2. MECANICA NEWTONIANA</b> .....	22
2.1 LAS LEYES DE NEWTON .....	23
2.2 SISTEMAS DE MUCHAS PARTICULAS .....	29
<b>Capítulo 3. MECANICA ANALITICA</b> .....	39
3.1 LAS ECUACIONES DE LAGRANGE .....	40
3.2 LAS ECUACIONES DE HAMILTON .....	48
<b>Capítulo 4. TERMODINAMICA CLASICA</b> .....	51
4.1 LA RELACION FUNDAMENTAL .....	52
4.2 LAS RELACIONES DE MAXWELL .....	58
4.3 COMENTARIOS SOBRE TERMODINAMICA IRREVERSIBLE .....	61
<b>Capítulo 5. MEDIOS CONTINUOS</b> .....	64
5.1 ELEMENTOS DE LA TEORIA CLASICA DE CAMPOS .....	65

	Pag.
5.2 EL CAMPO DE VELOCIDADES .....	67
5.3 ECUACIONES DE LA DINAMICA DE FLUIDOS .....	70
<b>Capítulo 6. EL FORMALISMO LAGRANGIANO PARA UN FLUIDO NO</b>	
<b>VISCOSO .....</b>	<b>75</b>
6.1 LAS VARIACIONES GEOMETRICAS .....	76
6.2 EL PRINCIPIO TIPO-HAMILTON .....	78
6.3 LAS ECUACIONES DE MOMENTO GENERALIZADO PARA UN FLUIDO	
NO VISCOSO .....	82
6.4 LA ECUACION DE EULER PARA EL FLUIDO PERFECTO .....	89
<b>Capítulo 7. LA ECUACION DE BALANCE DE ENERGIA PARA UN FLUIDO</b>	
<b>NO VISCOSO .....</b>	<b>93</b>
7.1 LAS VARIACIONES TEMPORALES .....	94
7.2 LA ECUACION DE BALANCE DE ENERGIA GENERALIZADA PARA UN	
FLUIDO NO VISCOSO .....	101
<b>Capítulo 8. EL FORMALISMO HAMILTONIANO PARA UN FLUIDO NO</b>	
<b>VISCOSO .....</b>	<b>106</b>
8.1 LAS ECUACIONES DE HAMILTON PARA UN FLUIDO NO VISCOSO ..	107
8.2 LA ECUACION DE BERNOULLI PARA UN FLUIDO NO VISCOSO ....	112
8.3 DEDUCCION DE LAS ECUACIONES DE HAMILTON A PARTIR DE UN	
PRINCIPIO VARIACIONAL .....	115
8.4 CONCLUSIONES .....	123
<b>REFERENCIAS .....</b>	<b>126</b>

## SIMBOLOGIA

- $\mathcal{D}f$ : Derivada hidrodinámica de la función  $f$ .
- $\delta f$ : Variación geométrica de la función  $f$ .
- $\delta^t f$ : Variación temporal de la función  $f$ .
- $\psi^v$ : Función  $\psi$ , variada.
- $\dot{u}$ : Derivada total de la función  $u$  respecto al tiempo.
- $\psi \circ \psi'$ : Composición de las funciones  $\psi$  y  $\psi'$ .
- $W$ : Funcional de acción.
- $L$ : Función lagrangiana.
- $Z$ : Función de densidad lagrangiana.
- $A$ : Lagrangiana por unidad de masa.
- $\mathcal{H}$ : Función de densidad hamiltoniana.
- $H$ : Hamiltoniana por unidad de masa.
- $x$ : Desplazamiento.
- $x^i$ :  $i$ -ésima componente del desplazamiento.
- $v$ : Campo de velocidades.
- $v^i$ :  $i$ -ésima componente del campo de velocidades.
- $\rho$ : Función de densidad de masa del fluido.
- $s$ : Campo de densidad de entropía del fluido.
- $p$ : Presión.
- $\mathbf{p}$ : Momento.
- $p_i$ :  $i$ -ésima componente del momento.

## RESUMEN

El primer trabajo sobre mecánica de fluidos fue presentado por Mariotte en el año de 1686, un año antes de que Newton publicara su tratado *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, pero no fue sino hasta la mitad del siglo pasado cuando la teoría quedó formulada de una manera completa y cerrada. En 1851 George G. Stokes establece las ecuaciones de balance de masa, momento y energía y las ecuaciones constitutivas de un fluido homogéneo e isotrópico, de acuerdo con la fórmula de viscosidad de Newton. Más tarde empiezan a aparecer intentos de desarrollar la teoría con base en principios variacionales.

La enorme cantidad de problemas (tanto teóricos como prácticos) de la Mecánica Clásica que han podido ser comprendidos y resueltos a través de la Mecánica Analítica, ha estimulado muchos esfuerzos por formular las leyes de la Mecánica del Medio Continuo de manera similar. Esta última rama de la Mecánica, propuesta por Hellinger en 1914, consiste en una teoría unificada para fluidos y sólidos elásticos y está basada en los postulados de la mecánica analítica de Lagrange. Mediante la formulación de un principio variacional único con una funcional de acción del tipo T-V y con la adición de funciones nulas multiplicadas por parámetros indeterminados de Lagrange, Hellinger obtiene las ecuaciones de movimiento para

tales medios.

Más tarde, en el año de 1954 Herivel llega a la conclusión de que los fluidos reales no pueden ser tratados mediante el formalismo propuesto por Hellinger. Determina que la teoría relacionada con estos sistemas no puede provenir de un principio variacional de Hamilton con una función lagrangiana del tipo  $T-V$ , debido a su carácter disipativo. Propone en cambio la existencia de una función de disipación y un principio de tipo D'Alembert para desplazamientos virtuales. En un trabajo muy importante de J. Serrin, aparecido en 1959, se insiste en llegar a las ecuaciones de la mecánica de fluidos a partir de las ideas de Herivel, empleando el principio de D'Alembert y haciendo uso del método de los multiplicadores indeterminados de Lagrange.

Estas son de hecho las ideas que han prevalecido hasta nuestro tiempo y solo en trabajos muy recientes han comenzado a aparecer nuevos intentos de establecer la mecánica de fluidos desde un punto de vista de la teoría clásica de campos a partir de una formulación lagrangiana y un principio variacional tipo Hamilton. Se pueden citar por ejemplo los trabajos de Carl Eckart (1960) y de Paul Penfield (1966). Eckart muestra como pueden ser obtenidas las ecuaciones de Lagrange para fluidos, a partir de principios variacionales y enfatiza la importancia que tienen las condiciones de frontera en tales principios. Penfield emplea el principio de Hamilton para derivar las ecuaciones de las fuerzas de fluidos no viscosos, tanto relativistas como no relativistas.

Otros trabajos como el de J. Demaree y V. Moncrief (1980) y el de M. Bailyn (1980), han surgido dentro del marco de la relatividad y tratan de establecer las ecuaciones de momento-energía de fluidos ideales o reales, relativistas. La gran mayoría de ellos parten de los trabajos de Taub para fluidos perfectos (1954). Otros, como Wilhelm (1979), proponen densidades lagrangianas clásicas, en términos de ciertas funciones tipo campo de velocidades y un principio de Hamilton sobre la acción, con lo cual obtiene un conjunto de ecuaciones de campo satisfactorias. La desventaja principal del trabajo de Wilhelm, es que la densidad lagrangiana depende de una manera complicada de esas funciones tipo campo de velocidades, aun en el simple caso del fluido ideal, así como de ciertas "constantes" sin un significado físico definido.

En el presente trabajo se persiguen como objetivos, el establecer las ecuaciones de balance de masa, momento y energía, para un fluido no viscoso, y el desarrollo de su formalismo hamiltoniano.

Se propone inicialmente una función de densidad lagrangiana, a partir de la cual se define una lagrangiana específica que depende de la posición, del tiempo y de cinco variables de campo que describen el estado dinámico del fluido: la densidad de masa, la densidad de entropía y las tres componentes del campo de velocidades. Las ecuaciones de balance mencionadas se obtienen como resultado de aplicar a la lagrangiana específica los tratamientos de una formulación lagrangiana como la de la teoría clásica de campos y un principio variacional tipo-Hamilton sobre la acción.



Se define luego una hamiltoniana específica como la transformada de Legendre de la lagrangiana específica citada, y aplicando el tratamiento usual del formalismo hamiltoniano, calculando los elementos diferenciales de la transformada propuesta, y de la hamiltoniana específica como función de las variables canónicas conjugadas del campo de velocidades, se llega a un conjunto de ecuaciones de movimiento, "*las ecuaciones de Hamilton para un fluido no viscoso*".

Como una aplicación de la teoría desarrollada, se construye una función de densidad lagrangiana muy sencilla en términos de la posición, la velocidad y la energía interna, y sustituyendola en las ecuaciones de balance obtenidas aquí, se obtienen la ecuación de Euler y la ecuación de Bernoulli para el fluido perfecto.

**CAPITULO 1**

**ANTECEDENTES MATEMATICOS**

## **1.1 INTRODUCCION**

La inclusión de este capítulo tiene por objeto el dar cierto apoyo a conceptos y desarrollos de tipo matemático que son empleados en capítulos posteriores.

A pesar de que no se persigue hacer un análisis exhaustivo de los temas que se presentan, lo referente al cálculo de variaciones se trata con cierto detalle. Esto es debido sobre todo a que algunos de los conceptos que maneja esta rama de la matemática representan una de las partes centrales del trabajo.

## 1.2 ELEMENTOS DEL CALCULO DE VARIACIONES.

Considérese la función

$$f = f(x, y, \dot{y}) , \quad 1.1$$

donde  $y = y(x)$  y  $\dot{y}$  es la derivada de  $y$ , y definamos

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, \dot{y}) dx . \quad 1.2$$

Es claro que los valores de la integral  $I$ , dependerán en general de las características de la función  $y = y(x)$  ya que el integrando depende de dicha función.

Uno de los problemas fundamentales del cálculo de variaciones, es el de determinar la función  $y$  que haga que la integral (1.2), sea una extremal; es decir, que alcance un máximo o un mínimo.

Sea  $C$  un arco particular en el plano  $x, y$ , que une a los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , definido por la función

$$y = y(x) \quad x_1 \leq x \leq x_2 . \quad 1.$$

Si  $\alpha$  es una constante arbitraria y si  $\eta = \eta(x)$  es una función que se anula en  $x = x_1$  y  $x = x_2$  y que tiene propiedades de continuidad similares a las de  $y(x)$ , entonces, todo arco de la familia

$$y(x) + \alpha\eta(x) \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad 1.4$$

pasa por los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  de  $C$ ; además, el arco  $C$  pertenece a dicha familia (se obtiene tomando  $\alpha = 0$ ).

Sustituyendo (1.4) y su derivada  $\dot{y} + \alpha\dot{\eta}$  en la expresión (1.2), resulta

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y + \alpha\eta, \dot{y} + \alpha\dot{\eta}) dx. \quad 1.5$$

Supongamos ahora que el arco  $C$  proporciona un valor mínimo para la integral  $I$ , entonces, de los criterios del cálculo diferencial tenemos que  $I(\alpha)$  alcanza un mínimo en  $\alpha = 0$ , y por lo tanto se satisfacen las condiciones  $I'(0) = 0$  e  $I''(0) > 0$ . Naturalmente, si en vez de un mínimo el arco  $C$  proporciona un máximo, las condiciones anteriores cambian por  $I'(0) = 0$   $I''(0) < 0$ . A las cantidades  $\alpha I'(0)$  y  $\alpha^2 I''(0)$  se les llama *primera* y *segunda variaciones de la integral  $I$*  a lo largo del arco  $C$  y se acostumbra a denotarlas por  $\delta I$  y  $\delta^2 I$ , respectivamente.

La *variación de orden  $n$ -ésimo* de  $I$ , denotada por  $\delta^n I$ , se define de manera enteramente análoga.

Al producto  $\alpha\eta(x)$  se le denomina *variación de la función*  $y(x)$  y se le representa por  $\delta y$ ; es decir,  $\delta y = \alpha\eta(x)$ .

Como puede verse, existen analogías entre la variación  $\delta y$  de una función  $y(x)$  y la diferencial  $dx$  de la variable independiente  $x$  del cálculo diferencial, y lo mismo ocurre entre las variaciones  $\delta I, \delta^2 I, \dots$  y las diferenciales  $df(x), d^2f(x), \dots$  de una función  $f(x)$ ; sin embargo, todos los intentos por unificar los métodos del cálculo diferencial y del cálculo de variaciones, han sido hasta la fecha infructuosos.

En el pasado, los trabajos más serios encaminados a lograr tal unificación se realizaron en el periodo comprendido entre los años 1800 y 1850, pero no se llegó a resultados realmente importantes. En la actualidad se ha retomado la tarea sin que hasta el momento se tengan noticias de algún logro de trascendencia.

Derivando la ecuación (1.5), resulta

$$I'(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \dot{\eta} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] dx. \quad 1.6$$

Ahora, el segundo término de la suma que aparece en el integrando, se puede poner en la forma

$$\dot{\eta} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{d}{dx} \left[ \eta \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] - \eta \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right].$$

Sustituyendo esta expresión en (1.6), recordando que  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$  e integrando, se obtiene

$$I'(a) = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] \right] \eta(x) dx, \quad 1.7$$

de donde, al multiplicar por  $a$ , resulta

$$aI'(a) = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] \right] \delta y dx.$$

Aplicando la condición de extremo  $\delta I = 0$  a esta igualdad y tomando en cuenta que  $\eta(x)$  y por lo tanto  $\delta y(x)$  son cantidades arbitrarias, se deduce que

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] = 0. \quad 1.8$$

Esta igualdad es conocida como *ecuación de Euler*.

Una generalización inmediata del procedimiento seguido anteriormente, es considerar una función  $f$  de la forma

$$f = f(x, y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n), \quad 1.9$$

donde  $y_k = y_k(x)$ , para  $k=1, 2, \dots, n$ , y  $\dot{y}_k$  es la derivada de  $y_k$ . Para esto se eligen  $n$  funciones independientes  $\eta_1(x), \eta_2(x), \dots, \eta_n(x)$ , y se forma, como se hizo en (1.4), la familia de arcos

$$y_i(x, \alpha) = y_i(x, 0) + \alpha \eta_i(x) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad 1.9^*$$

Naturalmente, las funciones  $\eta_k(x)$  deben tener las mismas propiedades de continuidad que las respectivas  $y_k(x)$ , además se debe cumplir que  $\eta_k(x_1) = \eta_k(x_2) = 0$ , para todo  $k = 1, 2, \dots, n$ .

El equivalente a la igualdad (1.5) nos queda en este caso como

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1 + \alpha \eta_1, \dots, y_n + \alpha \eta_n, \dot{y}_1 + \alpha \dot{\eta}_1, \dots, \dot{y}_n + \alpha \dot{\eta}_n) dx.$$

Tomando en cuenta que los conjuntos de variables  $y$ 's,  $\dot{y}$ 's,  $\eta$ 's y  $\dot{\eta}$ 's, son independientes, al efectuar la variación de la integral anterior, se llega a

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \right) \delta y_i dx = 0. \quad 1.10$$

lo cual ha de cumplirse para todo  $\delta y_i$ . Esto conduce al sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad 1.10^*$$

Aunque aquí ya no se tratarán estos casos, existen procedimientos para funciones  $f$  todavía más generales. Por ejemplo, si



$$f = f\left(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right), \quad 1.11$$

Las igualdades que deben satisfacerse, equivalentes a las obtenidas en (1.10), son

$$\frac{\partial f}{\partial u_k} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial u_{k,x_1}} - \dots - \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial u_{k,x_n}} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad 1.12$$

donde,

$$u_{k,x_r} = \frac{\partial u_k}{\partial x_r}. \quad 1.12'$$

### 1.3 LA TRANSFORMADA DE LEGENDRE.

Un procedimiento matemático que es empleado en diversas ramas de la física; como por ejemplo, en la termodinámica y en la mecánica analítica, es el conocido como *transformación de Legendre*.

La transformación de Legendre de una función  $f = f(x_1, \dots, x_n)$  respecto a las variables  $x_{\alpha+1}, \dots, x_n$ , es una nueva función  $g$  de la forma

$$g = g(x_1, \dots, x_\alpha, u_{\alpha+1}, \dots, u_n), \quad 1.13$$

donde

$$u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (i = s+1, \dots, n). \quad 1.13'$$

El camino para llegar a la función  $g$  a partir de  $f$ , es el siguiente: Diferenciando la función

$$f = f(x_1, \dots, x_n), \quad 1.14$$

se tiene

$$df = \sum_{k=s+1}^n u_k dx_k, \quad 1.15$$

donde  $u_k$  está dado por la igualdad (1.13'). Definimos ahora a la función  $g$  mediante la expresión

$$g = f - \sum_{k=s+1}^n x_k u_k. \quad 1.16$$

Para verificar que la función  $g$  aquí propuesta, tiene las propiedades especificadas antes, se calcula su diferencial. De la última igualdad tenemos

$$dg = df - \sum_{k=s+1}^n x_k du_k - \sum_{k=s+1}^n u_k dx_k.$$

Ahora, empleando (1.15), resulta

$$\begin{aligned}
 dg &= \sum_{k=1}^n u_k dx_k - \sum_{l=s+1}^n x_l du_l - \sum_{l=s+1}^n u_l dx_l \\
 &= \sum_{k=1}^s u_k dx_k - \sum_{l=s+1}^n x_l du_l .
 \end{aligned}
 \tag{1.17}$$

Se deduce de aquí que  $g$  es función de las variables  $x_1, \dots, x_s, u_{s+1}, \dots, u_n$ ; además, también de esta igualdad nos queda que

$$x_l = - \frac{\partial g}{\partial u_l}, \quad l = s+1, \dots, n .
 \tag{1.17'}$$

#### 1.4 EL TEOREMA DE TRANSPORTE.

Las ecuaciones de movimiento de los fluidos se pueden establecer en términos de dos tipos diferentes de variables; unas llamadas *eulerianas* o *espaciales* y otras *lagrangianas* o *materiales*. A las primeras se les denotará por  $(x, t)$  y a las segundas por  $(\xi, t)$ , donde

$$\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) ; \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3) .
 \tag{1.18}$$

La relación entre estos conjuntos de variables es la siguiente.

Considérese una partícula de fluido en movimiento. Supóngase que en  $t = 0$ , ocupa la posición  $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  y que al transcurrir un tiempo  $t$ , se mueve hasta el punto  $x = (x^1, x^2, x^3)$ . Entonces,  $x$  podrá ser determinada como una función de  $\xi$  y  $t$  mediante una transformación de la forma

$$x = \phi(\xi, t) \quad \delta \quad x^i = \phi^i(\xi, t) . \quad 1.19$$

Supongamos por otra parte, que partículas distintas de fluido, ocupan posiciones diferentes durante todo el movimiento y que cada una de ellas puede ser ubicada en cualquier instante posterior a  $t = 0$ . Entonces, la transformación  $\phi$  es necesariamente biyectiva y existe una transformación inversa  $\psi$  de tal forma que

$$\xi = \psi(x, t) \quad \delta \quad \xi^i = \psi^i(x, t) . \quad 1.20$$

Así, cualquier cantidad  $F$  relativa al fluido, que sea función de las variables espaciales  $(x, t)$ , lo será también de las variables materiales  $(\xi, t)$ , e inversamente. Si se desea indicar la dependencia de  $F$  respecto a alguno de los conjuntos de variables mencionados, se escribe

$$F = F(x, t) \quad \delta \quad F = F(\xi, t) . \quad 1.21$$

Estas formas de la función  $F$ , estarán relacionadas mediante las transformaciones (1.19) y (1.20) y su significado geométrico es el siguiente:  $F(\xi, t)$  es el valor de  $F$  que tiene asociado una partícula de fluido al tiempo  $t$  que se encontraba inicialmente en la

posición  $\mathbf{x}$ , y  $F(\mathbf{x}, t)$  representa el valor de  $F$  experimentado por la partícula que se encuentra instantáneamente en la posición  $\mathbf{x}$ .

Una vez elegido el conjunto de variables en el que irán expresadas las ecuaciones de movimiento de un fluido, la descripción matemática completa quedará dada mediante la distribución de velocidades  $\mathbf{v}$  y cualesquiera dos variables termodinámicas; por ejemplo, la presión y la temperatura. Esta afirmación es con base en el hecho de que cualquier propiedad termodinámica de un sistema puede ser determinada si se conocen su ecuación de estado y dos variables termodinámicas.

Por otra parte, el jacobiano de la transformación (1.19)

$$J = \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} = \det \left[ \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \right], \quad (1.22)$$

representa la variación de un volumen infinitesimal de fluido cuando éste sigue el movimiento. En la consideración de que la transformación (1.19) posee una inversa diferenciable, se sigue que  $J \neq 0$ .

Se probará ahora una igualdad que es de importancia fundamental y que se deriva originalmente de Euler. Se propone

$$\frac{dJ}{dt} = -J \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (1.23)$$

Según la igualdad (1.23), el determinante jacobiano  $J$  es una

posición  $\xi$ , y  $F(x, t)$  representa el valor de  $F$  experimentado por la partícula que se encuentra instantáneamente en la posición  $x$ .

Una vez elegido el conjunto de variables en el que irán expresadas las ecuaciones de movimiento de un fluido, la descripción matemática completa quedará dada mediante la distribución de velocidades  $v$  y cualesquiera dos variables termodinámicas; por ejemplo, la presión y la temperatura. Esta afirmación es con base en el hecho de que cualquier propiedad termodinámica de un sistema puede ser determinada si se conocen su ecuación de estado y dos variables termodinámicas.

Por otra parte, el jacobiano de la transformación (1.19)

$$J = \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\xi^1, \xi^2, \xi^3)} = \det \left( \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right), \quad 1.22$$

representa la dilatación de un volumen infinitesimal de fluido cuando éste sigue el movimiento. De la consideración de que la transformación (1.19) posee una inversa diferenciable, se sigue que  $0 < J < \infty$ .

Se probará ahora una igualdad que es de importancia en hidrodinámica y que es debida originalmente a Euler. Se propone

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div} v. \quad 1.23$$

Según la igualdad (1.22), el determinante jacobiano  $J$  es una

suma de seis términos que, salvo un signo, tienen la forma

$$u_{ijk} = \frac{\partial x^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^j}{\partial x^m} \frac{\partial x^k}{\partial x^n},$$

donde los índices  $l$ ,  $m$  y  $n$  son distintos entre sí, y sus valores van de 1 a 3. Si se calcula  $du_{ijk}/dt$ , y se toma en cuenta que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x^r}{\partial x^s} \right) = \frac{\partial v^r}{\partial x^s} = \frac{\partial v^r}{\partial x^t} \frac{\partial x^t}{\partial x^s}$$

de la expresión dada para  $u_{ijk}$ , resulta

$$\begin{aligned} \frac{du_{ijk}}{dt} &= \frac{\partial v^l}{\partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^j}{\partial x^l} \frac{\partial x^k}{\partial x^l} + \frac{\partial x^i}{\partial x^l} \frac{\partial v^m}{\partial x^m} \frac{\partial x^j}{\partial x^m} \frac{\partial x^k}{\partial x^m} + \frac{\partial x^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^j}{\partial x^m} \frac{\partial v^n}{\partial x^n} \frac{\partial x^k}{\partial x^n} \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^j}{\partial x^m} \frac{\partial x^k}{\partial x^n} \left( \frac{\partial v^l}{\partial x^l} + \frac{\partial v^m}{\partial x^m} + \frac{\partial v^n}{\partial x^n} \right) \\ &= u_{ijk} \frac{\partial v^l}{\partial x^l} \end{aligned}$$

Es evidente que este resultado no depende del signo de la cantidad  $u_{ijk}$ , por lo tanto, al derivar respecto al tiempo, cada término de la suma  $J$  conserva su signo y queda multiplicado por  $\text{div } v$ , con lo que se prueba la expresión (1.23).

En las igualdades anteriores se ha empleado la convención de índices repetidos para la suma.

Con estos elementos es posible establecer un postulado que es de gran utilidad en la dinámica de fluidos; el llamado **teorema de transporte**.

Considérese un volumen arbitrario  $V = V(t)$ , del fluido en movimiento. Supóngase que dicho volumen está compuesto siempre de las mismas partículas. Sea  $F = F(x, t)$ , una función de posición, escalar o vectorial. Entonces, la integral de volumen

$$\int_{V(t)} F(x, t) dV,$$

es una función perfectamente definida del tiempo, cuya derivada está dada por

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F(x, t) dV = \int_{V(t)} \left( \frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV. \quad 1.24$$

Para probar esta igualdad, se observa lo siguiente: En virtud de que el volumen elegido contiene siempre las mismas partículas, podemos reemplazar en el integrando la región en movimiento  $V(t)$ , por la región fija  $V(0) = V_0$ , cambiando la dependencia de  $F$ , a variables lagrangianas, quedando con esto

$$\int_{V(t)} F(x, t) dV = \int_{V_0} F(\xi, t) J dV_0, \quad 1.24'$$

donde  $dV = J dV_0$ , relaciona el elemento de volumen en las varia-



bles  $x$ , con el elemento de volumen  $dV_0$  en las variables  $\xi$ . Es evidente que si se deriva respecto al tiempo la última igualdad, el operador  $d/dt$  conmuta con el símbolo de integral en el lado derecho, de manera que resulta

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F(x, t) dV = \int_V \left( J \frac{dF}{dt} + F \frac{dJ}{dt} \right) dV_0 .$$

Sustituyendo aquí el valor de  $J$  dado por (1.23) y reagrupando términos, nos queda

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F(x, t) dV = \int_V \left( \frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} v \right) J dV_0 .$$

Cambiando nuevamente a variables eulerianas, se llega a la igualdad (1.24), y con ello queda probado el teorema.

Un primer resultado inmediato del teorema de transporte, es la llamada ecuación de continuidad de la dinámica de fluidos. Supóngase que la función  $F$  a la que se hace referencia en dicho teorema es la densidad de masa del fluido  $\rho = \rho(x, t)$ ; y considérese un cierto volumen  $V$  de éste. La masa contenida en dicho será entonces

$$M = \int_V \rho(x, t) dV$$

Esta cantidad no sufre cambios cuando  $V$  se mueve con el fluido; esto es,  $dM/dt = 0$ . Entonces, derivando respecto al tiempo la

tima igualdad y aplicando la ecuación (1.24), encontramos

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad 1.25$$

igualdad que representa la ecuación de continuidad.

Otras dos expresiones útiles que se pueden deducir del teorema de transporte, son en combinación con los resultados obtenidos en la sección (1.2), relativos al cálculo de variaciones. Una de ellas se refiere a la variación de la densidad del fluido y la otra a la variación de la integral del producto de la densidad por una función de posición  $F$ , escalar o vectorial. Se establece que

$$\delta\rho = -\rho \operatorname{div} \delta\mathbf{x} \quad 1.26$$

$$\delta \int_{V(t)} \rho F(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V(t)} \rho \delta F(\mathbf{x}, t) dV \quad 1.27$$

Para probar la primera de estas igualdades, basta observar lo siguiente: Relacionamos a  $\delta\mathbf{x}$  con la velocidad inicial de un movimiento en el que el parámetro  $\alpha$  que aparece en (1.4), toma el papel del tiempo y se reemplazan en la ecuación de continuidad (1.25), las cantidades  $d/dt$  y  $\mathbf{v}$ , por  $\delta$  y  $\delta\mathbf{x}$  respectivamente. El resultado es inmediato.

Para la igualdad (1.27), se hacen las mismas consideraciones en cuanto a  $\delta$  y  $\delta\mathbf{x}$  y se escribe (1.23) en la forma

$$\delta J = J \operatorname{div} \delta x .$$

1.26

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \delta \int_V \rho F dV &= \int_{V_0} \delta(\rho F J) dV_0 \\ &= \int_{V_0} [(\delta \rho) F J + \rho (\delta F) J + \rho F (\delta J)] dV_0 . \end{aligned}$$

De las expresiones (1.26) y (1.28) queda claro que la suma de los términos primero y tercero del integrando se anulan, quedand así la igualdad (1.27)

**CAPITULO 2**  
**MECANICA NEWTONIANA**

## 2.1 LAS LEYES DE NEWTON.

El objetivo de esta sección, es enunciar las leyes de movimiento de Newton y hacer una breve discusión de algunas de sus consecuencias más inmediatas.

Como punto de partida utilizamos el concepto de *partícula*; un ente que puede considerarse puntual y cuyo estado dinámico queda totalmente determinado por su masa  $m$ , su posición  $r$  y su velocidad

$$v = \frac{dr}{dt}, \quad 2.1$$

donde  $t$  es el tiempo.

Supóngase que existen sistemas de referencia en los cuales son válidas las leyes de Newton. A estos los llamaremos *sistemas inerciales*. Cualquier otro sistema de referencia que se mueva con velocidad constante con respecto a un sistema inercial, será a su vez inercial. Así, podemos establecer las leyes mencionadas como sigue:

*Primera ley:* Si una partícula se mueva sin que actúen fuerzas sobre ella, su movimiento será con velocidad constante.

Si  $F$  es la fuerza que obra sobre la partícula y  $v$  es su velocidad, la primera ley queda expresada matemáticamente en la forma

Si  $F = 0$ , entonces  $v = \text{const.}$  . 2.2

**Segunda ley:** Si hay fuerzas actuando sobre una partícula, la rapidez de cambio del momento lineal  $p$  de ésta será igual a la fuerza resultante que actúa sobre ella; es decir,

$$F = \frac{dp}{dt}; \quad \text{donde } p = mv. \quad 2.3$$

**Tercera ley:** Si dos partículas A y B interactúan, la fuerza  $F_{AB}$  que la partícula A ejerce sobre la B es de igual magnitud y de sentido opuesto a la fuerza  $F_{BA}$  que la partícula B ejerce sobre la A.

El equivalente matemático de este enunciado es

$$F_{AB} = -F_{BA} \quad \text{ó} \quad F_{AB} + F_{BA} = 0. \quad 2.4$$

Si la masa de una partícula se mantiene constante durante su movimiento, la segunda ley dada en la igualdad (2.3) se puede escribir como

$$F = ma; \quad \text{donde } a = \frac{dv}{dt}. \quad 2.5$$

Al vector  $a$  se le llama **aceleración de la partícula.**

Como una primera consecuencia de las tres leyes dadas, tenemos el principio de conservación del momento lineal. Si se integra la

segunda de las igualdades (2.4) sobre un intervalo de tiempo  $(t_1, t_2)$ , resulta:

$$\int_{t_1}^{t_2} (F_{AB} + F_{BA}) dt = 0.$$

Ahora, según la expresión (2.3),

$$F_{ij} = \frac{d}{dt} (m_j v_i); \quad (i, j = A, B),$$

de manera que al resolver la integral, nos queda

$$(m_A v_A + m_B v_B) \Big|_{t_1}^{t_2} = (p_A + p_B) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Este resultado se puede escribir en la forma

$$p_A^{(2)} + p_B^{(2)} = p_A^{(1)} + p_B^{(1)},$$

2.6

donde  $p_i^{(l)} = p_i(t_l)$  para  $i = A, B$  e  $l = 1, 2$ .

La igualdad (2.6) representa el principio de conservación del momento lineal.

Otra cantidad importante en la dinámica de partículas, es la denominada momento angular, para la cual, bajo determinadas circunstancias, es posible enunciar también un principio de conservación. El momento angular de una partícula respecto a un punto  $O$ ,

se define como el producto vectorial

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad 2.7$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector de posición de la partícula, respecto a dicho punto.

Se puede probar directamente que la derivada temporal del momento angular, es igual al producto vectorial del vector de posición  $\mathbf{r}$  por la fuerza que obra sobre la partícula; es decir,  $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ . Para ésto se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times (m\mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \end{aligned} \quad 2.8$$

Al producto

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad 2.9$$

se le denomina momento de la fuerza  $\mathbf{F}$  respecto al punto  $O$  y tiene la siguiente propiedad: Si la resultante de los momentos  $\mathbf{N}$ , es nula, el momento angular  $\mathbf{L}$  de la partícula, se conserva.

La prueba de este enunciado está dada en (2.8), donde vemos que si  $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}$ , entonces  $\mathbf{L} = \text{const.}$

Supongamos ahora que la partícula se mueve bajo la influencia



de una fuerza  $F$ . El trabajo realizado sobre la partícula cuando la fuerza actúa durante un intervalo de tiempo  $(t_1, t_2)$ , se define mediante la expresión

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} F \cdot dr . \quad 2.10$$

Si la masa de la partícula permanece constante durante el movimiento, cosa que ocurre con frecuencia, la fuerza se puede expresar como en (2.5) y dado que  $dr = v dt$ , de la expresión anterior, encontramos

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \left( m \frac{dv}{dt} \right) \cdot (v dt) = \int_{t_1}^{t_2} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = T_2 - T_1 , \quad 2.10'$$

donde se define la cantidad

$$T_k = \frac{1}{2} m [v(t_k)]^2 , \quad 2.11$$

como la energía cinética de la partícula

En virtud de la definición (2.10), tenemos que el producto  $F \cdot v$  representa el trabajo que por unidad de tiempo, hace la fuerza  $F$  sobre la partícula. Entonces, la ecuación (2.10') expresa el hecho de que el trabajo total realizado por  $F$  durante el intervalo de tiempo  $(t_1, t_2)$ , es igual al cambio en la energía cinética de dicha partícula.

Por otra parte, se dice que un campo de fuerzas es conservativo, si existe una función escalar  $\phi$ , de tal forma que

$$F = -\text{grad } \phi . \quad 2.12$$

Volviendo a la ecuación (2.10), se tiene que si la partícula se encuentra en un campo conservativo,

$$\int_{t_1}^{t_2} F \cdot dr = - \int_{t_1}^{t_2} (\text{grad } \phi) \cdot dr = -\phi_2 + \phi_1 . \quad 2.13$$

Comparando éste resultado con el obtenido en (2.10'), se llega a que

$$T_1 + \phi_1 = T_2 + \phi_2 . \quad 2.14$$

A la función  $\phi$  que aparece en éstas igualdades, se le denomina *función de energía potencial*.

La expresión (2.14) representa el principio de conservación de la energía total para una partícula, que también podemos expresar diciendo que si dicha partícula se mueve en un campo de fuerzas conservativo, su energía total

$$E = T + \phi , \quad 2.15$$

permanece constante durante el movimiento.

Queda claro de (2.13) que el valor de la integral del miembro

izquierdo no depende de la trayectoria seguida por la partícula, ya que de otro modo no sería posible introducir la función  $\phi$ . Con base en esto, podemos afirmar también que un campo de fuerzas es conservativo si el valor de la integral (2.13) depende solo de las posiciones en que se encuentra la partícula en los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ .

## 1.2 SISTEMAS DE MUCHAS PARTICULAS.

Todas las ideas de la sección anterior, pueden ser extendidas de una manera natural al caso de sistemas compuestos por dos o más partículas.

Considérese uno de tales sistemas y sean  $F_i$  y  $F_{jk}$  las fuerzas que obran sobre la  $i$ -ésima partícula del sistema, siendo la primera de ellas la fuerza externa y la segunda, la fuerza debida a la presencia de la  $j$ -ésima partícula.

Si  $m_i$  y  $v_i$  son la masa y la velocidad respectivamente de la partícula número  $i$ , de la segunda ley de Newton establecida por la expresión (2.3), tenemos que su ecuación de movimiento es

$$\frac{d}{dt}(m_i v_i) = F_i + \sum_j F_{ji}; \quad F_{ii} = 0. \quad 2.16$$

Sumando sobre todas las partículas que componen el sistema, de la expresión anterior resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \mathbf{v}_i \right) &= \sum_i \left( \mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{F}_{ji} \right) \\ &= \sum_i \mathbf{F}_i + \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ji}. \end{aligned} \quad 2.16'$$

En la última suma de esta igualdad, para cada  $\mathbf{F}_{ji}$  existe un  $\mathbf{F}_{ij}$  que, según la tercera ley de Newton expresada en (2.4), es igual al negativo de  $\mathbf{F}_{ji}$ , de manera que dicha suma es nula, quedando entonces

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}, \quad 2.17$$

donde se ha representado por  $\mathbf{F}$  a la resultante de las fuerzas externas, ejercidas sobre las partículas.

Si se denota por  $M$  a la masa total del sistema y se define el centro de masa de éste como el vector

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i, \quad 2.18$$

la ecuación (2.17) queda como

$$M \frac{d^2 R}{dt^2} = F. \quad 2.19$$

Dos características importantes de la dinámica de sistemas de partículas que se pueden observar en los desarrollos anteriores, son las siguientes: Primero, las fuerzas internas no alteran el estado de movimiento del sistema en conjunto, y segundo, el sistema completo se mueve como si la masa de todas las partículas estuviera concentrada en su centro de masa.

Se prueba ahora que el principio de conservación del momento lineal, se sigue cumpliendo en sistemas de muchas partículas. De la igualdad (2.18) se sigue que el momento lineal del sistema es

$$P = M \frac{dR}{dt} = \sum_i m_i \frac{dr_i}{dt}.$$

Combinando esta expresión con (2.19), resulta

$$\frac{dP}{dt} = F,$$

de donde es inmediato que si la fuerza externa resultante es nula, entonces  $P = \text{const.}$ , y el momento lineal total del sistema se conserva.

Para el momento angular se tiene un resultado análogo.

Sea  $O$  un punto fijo y sea  $r_i$  el vector de posición de la  $i$ -ésima partícula del sistema, respecto a este punto. De la ecua-

ción (2.7) se tiene que el momento angular de dicha partícula está dado por

$$L_i = r_i \times p_i, \quad 2.20$$

y naturalmente, el momento angular total del sistema será igual a la suma de los momentos angulares individuales; esto es,

$$L = \sum_i L_i = \sum_i r_i \times p_i. \quad 2.21$$

Se calcula ahora la derivada temporal de  $L$ . De las igualdades (2.8) y (2.16) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_i r_i \times \dot{p}_i \\ &= \sum_i r_i \times F_i + \sum_{(i,j)} r_i \times F_{ij}. \end{aligned}$$

Para cada pareja de índices  $i$  y  $j$ , en la última suma aparecen sumados los productos  $r_i \times F_{ij}$  y  $r_j \times F_{ji}$ . Si se toma en cuenta que  $F_{ij} = -F_{ji}$  [tercera ley de Newton; igualdad (2.4)], podemos escribir

$$r_i \times F_{ij} + r_j \times F_{ji} = (r_i - r_j) \times F_{ij}.$$

Claramente los vectores  $r_i - r_j$  y  $F_{ij}$  se encuentran sobre la línea que une a las partículas  $i$  y  $j$  (son paralelos), por lo

tanto tenemos

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_k = 0,$$

para cada pareja de partículas. Resulta entonces,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = N. \quad 2.22$$

Expresada en palabras, la igualdad anterior dice que la derivada temporal del momento angular total del sistema, es igual al momento de la fuerza externa con relación al punto dado; además, es inmediato que si éste último es nulo,  $L$  se conserva.

Se demuestra ahora que el momento angular total del sistema respecto a un punto  $O$ , está formado por dos contribuciones; una de ellas es debida al momento angular del sistema concentrado en su centro de masa, y la otra, al momento angular causado por el movimiento de los componentes del sistema alrededor de dicho centro.

Sea  $\mathbf{R}$  el vector de posición del centro de masa, referido al punto  $O$  y sea  $\mathbf{r}'_i$  el vector de posición de la  $i$ -ésima partícula con respecto al centro de masa. Entonces, la posición de la partícula citada con respecto a  $O$ , está caracterizada por el vector

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i. \quad 2.23$$

Derivando respecto al tiempo ambos miembros de esta igualdad, encontramos

$$v_i = V + v_i' . \quad 2.23'$$

Sustituyendo estas expresiones para  $r_i$  y  $v_i$  en (2.21) y desarrollando, se obtiene

$$\begin{aligned} L &= \sum_i (R + r_i') \times m_i (V + v_i') \\ &= \sum_i R \times m_i V + \sum_i R \times m_i v_i' + \sum_i r_i' \times m_i V + \sum_i r_i' \times m_i v_i' \\ &= R \times MV + R \times \frac{d}{dt} \sum_i m_i r_i' + \left[ \sum_i m_i r_i' \right] \times V + \sum_i r_i' \times p_i' . \end{aligned}$$

Ahora, para la suma de los términos  $m_i r_i'$  que aparece en esta expresión, resulta

$$\sum_i m_i r_i' = \sum_i m_i (r_i - R) = \sum_i m_i r_i - R \sum_i m_i = 0 , \quad 2.24$$

de manera que nos queda para el momento angular

$$L = R \times MV + \sum_i r_i' \times p_i' , \quad 2.25$$

Igualdad que prueba la afirmación hecha antes.

Se verá en seguida el principio de conservación de la energía para sistemas de muchas partículas.

La fuerza que actúa sobre la  $i$ -ésima partícula del sistema,



está dada por la expresión (2.16), de manera que según (2.10), el trabajo que realiza dicha fuerza es

$$W_{as}^{(i)} = \int_{t_0}^{t_2} \frac{d}{dt} (m_i v_i) \cdot dr_i = \int_{t_0}^{t_2} F_i \cdot dr_i + \sum_j \int_{t_0}^{t_2} E_{jk} \cdot dr_i. \quad 2.26$$

Obviamente, el trabajo total sobre el sistema, será igual a la suma de los trabajos individuales, quedando de la última igualdad,

$$\begin{aligned} W_{as} &= \sum_i W_{as}^{(i)} \\ &= \sum_i \int_{t_0}^{t_2} \left( \frac{d}{dt} (m_i v_i) \right) \cdot v_i dt \\ &= \sum_i \int_{t_0}^{t_2} d \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \\ &= T_2 - T_1, \end{aligned} \quad 2.27$$

donde se ha denotado por  $T_k$  a la energía cinética total del sistema al tiempo  $t_k$ ; es decir,

$$T_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_i(t_k))^2. \quad 2.28$$

Como sucede con el momento angular, también la energía cinética de un sistema de partículas se puede expresar referida a su centro de masa. Para ello tomamos en cuenta la ecuación (2.23') y escri-

binos la energía cinética de la  $i$ -ésima partícula del sistema como

$$\begin{aligned} T^{(i)} &= \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\ &= \frac{1}{2} m_i (\mathbf{V} + \mathbf{v}_i') \cdot (\mathbf{V} + \mathbf{v}_i') \\ &= \frac{1}{2} m_i V^2 + m_i \mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{r}_i'}{dt} + \frac{1}{2} m_i v_i'^2 . \end{aligned}$$

Sumando sobre todas las partículas que forman el sistema, de la expresión (2.24) resulta

$$\sum_i m_i \mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{r}_i'}{dt} = \mathbf{V} \cdot \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}_i' = 0 ,$$

quedando entonces para la energía cinética total

$$T = \sum_i T^{(i)} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 . \quad 2.29$$

Volviendo a la definición de trabajo dada en la ecuación (2.10) y calculando el trabajo hecho por las fuerzas dadas en (2.16'), encontramos

$$\begin{aligned} W_{ab} &= \int_{t_a}^{t_b} \left( \sum_i \mathbf{F}_i + \sum_{(i,j)} \mathbf{F}_{ji} \right) \cdot d\mathbf{r}_i \\ &= \sum_i \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_{(i,j)} \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_i \end{aligned} \quad 2.30$$

Supongamos ahora que tanto las fuerzas externas como las internas, son conservativas. Entonces, para cada pareja de enteros  $i$  y  $j$ , existen funciones escalares  $\phi'_i$  y  $\phi'_{ij}$  con las siguientes propiedades

$$F_i = -\text{grad}_i \phi'_i$$

$$F_{ij} = -\text{grad}_i \phi'_{ij} = \text{grad}_j \phi'_{ij} = -F_{ji} .$$

Entonces, (2.30) se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} W_{12} &= -\sum_i \int_{t_1}^{t_2} \text{grad}_i \phi'_i \cdot dr_i \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_{t_1}^{t_2} (\text{grad}_i \phi'_{ij} \cdot dr_i + \text{grad}_j \phi'_{ij} \cdot dr_j) . \end{aligned} \quad 2.31$$

El factor  $\frac{1}{2}$  se incluye en la segunda suma, debido a que cada par de términos dentro de ésta aparecerá dos veces; una vez al sumar sobre  $i$  y la otra al sumar sobre  $j$ . Ahora, de las propiedades de las funciones escalares  $\phi'_{ij}$ , tenemos

$$\begin{aligned} \text{grad}_i \phi'_{ij} \cdot dr_i + \text{grad}_j \phi'_{ij} \cdot dr_j &= \text{grad}_i \phi'_{ij} \cdot (dr_i - dr_j) \\ &= \text{grad}_i \phi'_{ij} \cdot dr_{ij} , \end{aligned}$$

donde  $dr_{ij} = dr_i - dr_j$ . Así, la igualdad (2.31) queda como

$$\begin{aligned}
 W_{AB} &= -\sum_i \int_{t_1}^{t_2} \text{grad}_i \phi_i' \cdot dr_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_{t_1}^{t_2} \text{grad}_{(i,j)} \phi_{(i,j)}' \cdot dr_{(i,j)} \\
 &= -\sum_i \phi_i' \Big|_{t_1}^{t_2} - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \phi_{(i,j)}' \Big|_{t_1}^{t_2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

Finalmente, haciendo

$$\phi_k = \sum_i \phi_i'(t_k) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \phi_{(i,j)}'(t_k),$$

de (2.32), obtenemos

$$W_{AB} = -\phi_B + \phi_A.$$

De esta igualdad y de (2.27) llegamos a que

$$T_A + \phi_A = T_B + \phi_B.
 \tag{2.33}$$

Esta expresión representa el principio de conservación de la energía mecánica para sistemas de muchas partículas, cuando sobre éstas actúan solamente fuerzas conservativas.

**CAPITULO 3**  
**MECANICA ANALITICA**

### 3.1 LAS ECUACIONES DE LAGRANGE.

El formalismo newtoniano de la dinámica de partículas expuesto en el capítulo anterior, representa solo una parte de la rama de la física conocida como *Mecánica Clásica*. Dentro de ésta se encuentra también la mecánica analítica, que consiste básicamente de las ecuaciones de Lagrange, las ecuaciones de Hamilton y la ecuación de Hamilton-Jacobi. Obviamente, las dos formulaciones mencionadas son equivalentes y por lo tanto, dado un problema dinámico, ambas conducen a los mismos resultados.

Una diferencia fundamental entre el formalismo newtoniano y el lagrangiano y hamiltoniano, es que el primero es de carácter puramente vectorial, mientras que en el otro, los problemas de movimiento se plantean en términos de cantidades escalares; además, en la mecánica analítica los conceptos tales como coordenada, velocidad, aceleración, momento y fuerza, adquieren un sentido más amplio; no tienen el mismo significado rígido que se les asigna en la formulación newtoniana.

Considérese un sistema formado por  $N$  partículas. Según los desarrollos del capítulo anterior, se requerirá de  $N$  vectores  $r_1, r_2, \dots, r_N$ , para caracterizar sus posiciones. Si se ubica el conjunto de partículas en un sistema de coordenadas rectangulares,

cada uno de los vectores mencionados quedará especificado en términos de tres coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Entonces, para el sistema completo, serán necesarias  $3N$  cantidades escalares para determinar sus características de posición.

Es claro que, dado un sistema dinámico, podrían existir en él conjuntos de coordenadas que no fueran independientes; es decir, conjuntos en los cuales un cambio en alguno o algunos de sus elementos, generará cambios en uno o más de los elementos restantes. Cuando esto ocurre, se dice que hay ligaduras que constriñen el movimiento del sistema.

Se puede pensar en diversos tipos de ligaduras, estableciendo su clasificación atendiendo a determinadas características. Así por ejemplo, si para un sistema dado, las ecuaciones de ligadura contienen explícitamente al tiempo, se dice que las ligaduras son *reónomas*. En caso de que esto no ocurra, se dice que son *ligaduras esclerónomas*.

Una clase muy importante de ligaduras de los sistemas dinámicos, son las llamadas *ligaduras holónomas*. Diremos que toda ligadura susceptible de expresarse mediante una ecuación de la forma

$$f(r_1, r_2, \dots, r_N, t) = 0, \quad 3.1$$

es holónoma.

Supongamos que en el sistema propuesto existen  $k$  ligaduras. Si todas éstas son holónomas, habrá  $k$  ecuaciones de la forma (3.1) y

por lo tanto podremos eliminar  $k$  de las  $3N$  coordenadas que había inicialmente, quedando así un total de  $3N - k$  coordenadas independientes. Se dirá entonces que el sistema tiene  $3N - k$  *grados de libertad*.

Se pueden ahora elegir de una manera adecuada  $3N - k = n$  variables independientes, de tal forma que cada uno de los  $N$  vectores  $r_1, r_2, \dots, r_N$ , quede expresado como función de ellas y el tiempo. Si se representan por  $q_1, q_2, \dots, q_n$  las nuevas variables, tendremos,

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad 3.2$$

para  $i = 1, 2, \dots, N$ .

A las  $q$ 's de las igualdades anteriores se les denomina *coordenadas generalizadas* y al espacio  $n$ -dimensional generado por ellas, se le llama *espacio de configuración*. En estos términos, por un movimiento del sistema se entenderá un cambio en la posición del punto  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  en dicho espacio, al variar el tiempo.

De la igualdad (3.2) queda claro que la velocidad  $v_i$  de la  $i$ -ésima partícula quedará relacionada con las *velocidades generalizadas*  $\dot{q}_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) mediante la expresión



$$\dot{r}_i = \frac{dr_i}{dt} = \frac{\partial r_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j . \quad 3.3$$

Regresamos ahora al principio del capítulo anterior. Si extendemos lo que se dijo allí a sistemas como el que se está proponiendo, tenemos que si en algún instante se especifican las coordenadas y las velocidades de las partículas que lo forman, podrá ser determinada cualquier característica de su evolución dinámica futura. Como en el caso newtoniano, en la mecánica de Lagrange, las ecuaciones de movimiento son relaciones entre las coordenadas, las velocidades y las aceleraciones, y respecto a las primeras, son ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Con base en los conceptos que se acaban de introducir y empleando un principio extremal, es posible llegar a las ecuaciones de movimiento de Lagrange. De hecho, el principio que se menciona, representa la forma más general para la ley que rige el movimiento de los sistemas mecánicos.

Existe otro camino para llegar a las ecuaciones de movimiento citadas. Este consiste en partir también de las cantidades que se definieron al inicio e introducir los conceptos de *fuerza generalizada*, *desplazamiento virtual* y *trabajo virtual*. Después se emplea el principio de *D'Alembert* y se hacen los desarrollos pertinentes. En este trabajo seguiremos el camino señalado en primer lugar.

Se establece el *principio de mínima acción* o *principio de Ha-*

milton en los siguientes términos:

Para cada sistema con  $n$  grados de libertad existe una función

$$L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) , \quad 3.4$$

mediante la cual queda caracterizado su estado dinámico; además, si en los instantes  $t = t_1$  y  $t = t_2$  el sistema ocupa las posiciones  $(q_1^{(1)}, \dots, q_n^{(1)})$  y  $(q_1^{(2)}, \dots, q_n^{(2)})$ , donde  $q_k^{(j)} = q_k(t_j)$ , para  $j = 1, 2$  y  $k = 1, \dots, n$ ; entonces, el movimiento que realiza entre estos puntos es de tal manera que la integral

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt , \quad 3.5$$

toma un valor extremo.

A la cantidad  $W$  definida aquí, se le da el nombre de acción y a la función  $L$  se le conoce como *lagrangiana del sistema*.

Comparando la lagrangiana  $L$  dada en (3.4) con la función  $f$  de la igualdad (1.9) del capítulo 1, y de la teoría asociada con esta última, vemos que el principio de Hamilton es equivalente a postular que la variación de la acción  $W$ , es nula; es decir,  $\delta W = 0$ , o bien, de (3.5)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt = 0, \quad 3.6$$

donde evidentemente,  $k = 1, \dots, n$ .

Volviendo nuevamente al primer capítulo; particularmente a las ecuaciones (1.9') a (1.10'), tenemos que la expresión (3.6) nos conduce a la igualdad

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt = 0, \quad 3.7$$

y que ésta se verifica, toda vez que se satisface el conjunto de ecuaciones

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0; \quad k = 1, \dots, n, \quad 3.8$$

a las cuales se les conoce como *ecuaciones de movimiento de Lagrange*.

En términos de la lagrangiana  $L$ , se define una cantidad equivalente al momento lineal de la mecánica newtoniana. Como ocurre con otros conceptos, en mecánica analítica la cantidad mencionada adquiere un sentido más amplio y por lo tanto representa una generalización del concepto establecido por la igualdad (2.3). Se le llama *momento canónico* o *momento conjugado* y se define mediante

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}; \quad k = 1, \dots, n. \quad 3.9$$

Naturalmente, para un sistema dado, es posible obtener los componentes del momento lineal newtoniano, a partir de los momentos canónicos  $p_k$ .

En virtud de la equivalencia entre las formulaciones newtoniana y lagrangiana de la mecánica, bajo la metodología de esta última también pueden ser establecidos los principios de conservación señalados en el capítulo anterior. En esta parte detallaremos solamente el referente a la conservación de la energía; sobre todo porque de alguna manera, este principio está relacionado con conceptos que aparecerán en desarrollos posteriores.

Proponemos una lagrangiana que no depende explícitamente del tiempo. Calculando su derivada total respecto a este parámetro, según (3.4), resulta

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \ddot{q}_k.$$

Ahora, de la expresión (3.8) tenemos que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_k},$$

de manera que es posible escribir la igualdad anterior en la forma

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_k \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \ddot{q}_k \\ &= \sum_k \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right). \end{aligned}$$

Restando a ambos miembros de esta expresión la derivada  $dL/dt$  y tomando en cuenta la igualdad (3.9), se llega a que

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_k \dot{p}_k q_k - L \right) = 0. \quad 3.10$$

Se concluye de aquí que, cuando la lagrangiana  $L$  de un sistema dinámico no depende explícitamente del tiempo, la cantidad

$$H = \sum_k \dot{p}_k q_k - L, \quad 3.11$$

permanece constante durante el movimiento.

A la cantidad  $H$  definida en la última igualdad, se le da el nombre de *hamiltoniana del sistema*, y se puede probar que, cuando éste es conservativo,  $H$  coincide con su energía mecánica total.

## 3.2 LAS ECUACIONES DE HAMILTON.

Como se vio en la sección anterior, dado un sistema mecánico con  $n$  grados de libertad, la formulación lagrangiana conduce a un conjunto de  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden que determinan las características de su movimiento (vease (3.8)). En principio, cada una de estas ecuaciones puede ser resuelta hasta dos constantes arbitrarias, que resultan debido al orden de la ecuación. Habrá entonces un total de  $2n$  constantes cuyo valor será establecido toda vez que se fijen los valores de las coordenadas y de las velocidades generalizadas, en un instante dado.

Se muestra ahora un procedimiento mediante el cual, para un sistema como el mencionado, es posible obtener un conjunto de  $2n$  ecuaciones de movimiento de primer orden, en términos de las coordenadas generalizadas y los momentos canónicos definidos en la igualdad (3.9). Dado que en este caso las ecuaciones son de primer orden, cada una de ellas arrojará una constante de integración, y por lo tanto, al igual que en la formulación lagrangiana, el problema del movimiento quedará totalmente determinado hasta  $2n$  constantes arbitrarias.

De la igualdad (1.16) del capítulo 1, vemos que el negativo de

la hamiltoniana  $H$  definida por la expresión (3.11), es la transformada de Legendre de la lagrangiana  $L$  respecto a las variables  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ . Entonces, según las ecuaciones (1.13) y (1.13') del capítulo mencionado, la hamiltoniana será función de las coordenadas generalizadas  $q_k$ , de los momentos canónicos  $p_k$  y del tiempo; esto es,

$$H = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) . \quad 3.12$$

Calcularemos ahora la diferencial  $dH$ ; primero a partir de la expresión (3.11) y después de (3.12).

Tomando en cuenta que  $L = L(q_k, \dot{q}_k, t)$ , de (3.11) resulta

$$dH = \sum_k \dot{q}_k dp_k + \sum_k p_k d\dot{q}_k - \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt .$$

De la definición de momento canónico dada en (3.9), resulta evidente que la segunda suma de la igualdad anterior, se anula con la cuarta; además, de las ecuaciones de Lagrange dadas en (3.8), vemos que la tercera suma puede escribirse en la forma

$$\sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k = \sum_k \dot{p}_k dq_k ,$$

quedando de esta manera que

$$dH = \sum_k \dot{q}_k dp_k - \sum_k \dot{p}_k dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt . \quad 3.13$$

Por otra parte, al diferenciar (3.12), encontramos

$$dH = \sum_k \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt . \quad 3.13'$$

Comparando las igualdades (3.13) y (3.13'), se obtiene el siguiente sistema de  $2n + 1$  ecuaciones:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad 3.14$$

$$\dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$\frac{dL}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial t} . \quad 3.15$$

Las ecuaciones (3.14) forman un conjunto de  $2n$  ecuaciones diferenciales de primer orden en las variables  $q_k$  y  $p_k$ . Son conocidas como *ecuaciones de Hamilton*, y por su sencillez y simetría de forma, se les llama también *ecuaciones canónicas de movimiento*.



**CAPITULO 6**  
**TERMODINAMICA CLASICA**

#### 4.1 LA RELACION FUNDAMENTAL

La experiencia demuestra que los sistemas aislados tienden en general, a evolucionar espontaneamente hacia estados finales simples. Así por ejemplo, la turbulencia en los fluidos se amortigua con el tiempo; la falta de homogeneidad en una concentración desaparece finalmente, debido a las corrientes de difusión; y las deformaciones plásticas, ceden ante tensiones internas no homogéneas del mismo material. El objetivo de la termodinámica es la determinación del estado final que se alcanza después de eliminar las ligaduras internas de un sistema compuesto aislado.

Los estados de equilibrio, se definen como aquellos estados particulares de los sistemas simples que, desde el punto de vista macroscópico, están caracterizados completamente por la energía interna  $U$ , el volumen  $V$  y los números de moles  $N_1, \dots, N_r$  de los diferentes componentes químicos.

Ahora, para un sistema dado, todo problema termodinámico relativo a él, se puede resolver completamente si se conoce la relación fundamental. Una representación de ésta es la que determina a la energía interna  $U$  como función de los parámetros extensivos; entropía, volumen y números de moles de los componentes químicos. Si se representa por  $S$  a la entropía y se supone que hay  $r$  compo-

entes químicos diferentes en el sistema, la relación fundamental es una función de la forma

$$U = U(S, V, N_1, \dots, N_r) \quad 4.1$$

Calculando la primera diferencial de U, encontramos

$$dU = TdS - PdV + \sum_{k=1}^r \mu_k dN_k \quad 4.2$$

donde se definen

$$T = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, N_1, \dots, N_r} \quad 4.3$$

$$P = - \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S, N_1, \dots, N_r} \quad 4.4$$

$$\mu_j = \left( \frac{\partial U}{\partial N_j} \right)_{S, V, N_1, \dots} \quad 4.5$$

como la temperatura, la presión y el potencial electroquímico del componente de orden  $j$ , respectivamente.

En lo que sigue, nos referiremos a un sistema forzado por una sustancia pura (por ejemplo, un fluido perfecto). En este caso la igualdad (4.2) toma la forma

$$dU = TdS - PdV \quad 4.6$$

relación que es válida si el sistema se encuentra en equilibrio termodinámico y sin reacción química. Por otra parte se tiene la relación de Gibbs-Duhem, entre las diferenciales de los parámetros intensivos

$$0 = SdT - VdP . \quad 4.7$$

A partir de las expresiones (4.6) y (4.7) se puede llegar a una expresión para la energía. Sumando miembro a miembro e integrando, se obtiene directamente

$$U = TS - PV . \quad 4.8$$

En muchas ocasiones resulta conveniente trabajar con cantidades que se encuentran referidas a otras de la misma especie. Por ejemplo, dos conceptos útiles en la dinámica de fluidos que tienen estas características, son la *densidad de energía interna* y la *densidad de entropía del sistema*. Para una porción B cualquiera de dicho sistema, la primera de ellas se denota por  $u$  y se define mediante la igualdad

$$U = \int_B u dV , \quad 4.9$$

y para la densidad de entropía  $s$ , se establece

$$TS = \int_B T s dV . \quad 4.10$$

Obviamente, en términos de estas dos nuevas representaciones de la energía y la entropía, la igualdad (4.8) adquiere la forma

$$u = Ts - P, \quad 4.11$$

quedando todo referido al volumen.

Empleando ahora la densidad de masa  $\rho$  del fluido, es posible definir las variables específicas relativas a las dos cantidades ya mencionadas. Así, la energía interna específica, que será denotada por  $e$ , se define por la expresión

$$u = \rho e, \quad 4.12$$

y la entropía específica  $\eta$ , mediante

$$s = \rho \eta. \quad 4.13$$

Vemos de aquí que en términos de  $e$  y  $\eta$ , la expresión (4.11) queda en la forma

$$e = T\eta - \frac{P}{\rho}, \quad 4.14$$

y para la relación de Gibbs-Duhem dada en (4.7), resulta

$$\eta dT - \frac{1}{\rho} dP = 0. \quad 4.15$$

Diferenciando la energía específica  $e$  de la ecuación (4.14), y

tomando en cuenta esta última igualdad, se llega directamente a la expresión

$$d\phi = Td\eta + \frac{P}{\rho^2}d\rho. \quad 4.16$$

Con base en esto se establecen las definiciones de temperatura y presión como

$$T = \frac{\partial\phi}{\partial\eta}, \quad 4.17$$

$$P = \rho^2 \frac{\partial\phi}{\partial\rho},$$

respectivamente.

En una gran cantidad de problemas de termodinámica, resulta útil conocer el comportamiento del volumen de un sistema, ante cambios en la presión o en la temperatura, cuando, la otra variable permanece constante. En virtud de ello se define el *coeficiente de compresibilidad isotérmico* mediante la expresión

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T; \quad 4.18$$

que representa la disminución relativa de volumen por unidad de incremento de presión, a temperatura constante.

De manera análoga, al incremento relativo de volumen por unidad

de incremento de temperatura de un sistema mantenido a presión constante, se le llama *coeficiente de expansión volumétrica* y se define como

$$\beta = \frac{1}{V} \left[ \frac{\partial V}{\partial T} \right]_p. \quad 4.19$$

Si en lugar de  $V$  se emplea en las dos igualdades anteriores la variable  $\rho$ , éstas quedan en la forma

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial p} \right]_T, \quad \beta = -\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_p. \quad 4.20$$

Finalmente definimos el calor específico a volumen constante  $c_v$  como el calor cuasiestático requerido para producir un incremento de una unidad de temperatura en un sistema mantenido a volumen constante; es decir,

$$c_v = \left[ \frac{dQ}{dT} \right]_v = T \left[ \frac{\partial S}{\partial T} \right]_v. \quad 4.21$$

Empleando la entropía específica  $\eta$  en esta expresión se obtiene

$$c_v = M \left[ \frac{\partial \eta}{\partial T} \right]_v = T \left[ \frac{\partial \eta}{\partial T} \right]_p,$$

de manera que el calor específico a volumen constante, por unidad de masa del sistema, queda como

$$c_p = \left( \frac{\partial \eta}{\partial T} \right)_p .$$

4.22

#### 4.2 LAS RELACIONES DE MAXWELL.

En termodinámica es posible establecer cierta clase de relaciones que resultan de gran utilidad, tanto para la parte formal, como para las aplicaciones de esta disciplina. Dichas relaciones consisten en transformadas de Legendre de la relación fundamental (4.1) o (4.14) (vease la sección (1.3) del primer capítulo) y son conocidas como *potenciales termodinámicos*.

Como se verá más adelante, una utilidad práctica de los potenciales citados, es que relacionan a variables susceptibles de medición con otras que no se pueden medir directamente.

Citaremos solamente tres de las relaciones más usuales. La primera de ellas llamada *potencial de Helmholtz* o *energía libre de Helmholtz* es la transformada de Legendre de la relación fundamental  $U$  dada en (4.1), respecto a la entropía; esto es, se reemplaza la variable  $S$  por la variable  $T$  definida en (4.3). De esta manera, si llamamos  $F$  al potencial mencionado, tenemos



$$F = U - TS . \quad 4.23$$

Logicamente, esta igualdad puede ponerse en términos de las variables específicas  $e$  y  $\eta$ , quedando entonces

$$f = e - T\eta , \quad 4.23'$$

igualdad que representa la *energía libre de Helmholtz específica*.

Otro potencial termodinámico importante, es la llamada *entalpía*. Este consiste en la transformada de Legendre de la energía  $U$  respecto al volumen; es decir, reemplaza el volumen  $V$  por la presión  $P$  definida por la expresión (4.4). Si se denota a la entalpía por  $H$ , resulta

$$H = U + PV . \quad 4.24$$

Nuevamente, empleando las variables específicas  $e$  y  $p$ , se obtiene la *entalpía específica*

$$h = e + \frac{P}{\rho} . \quad 4.24'$$

Por último se tiene la *función de Gibbs* o *energía libre de Gibbs*. Esta relación se denota por  $G$  y es la transformada de Legendre de la energía  $U$  respecto a las variables  $S$  y  $V$ ; se tiene entonces,

$$G = U - TS + PV . \quad 4.25$$

Si se usan las variables específicas  $e$ ,  $\eta$  y  $p$ , se obtiene la

energía libre de Gibbs específica,

$$g = e - T\eta + \frac{P}{\rho}. \quad 4.25'$$

Dado que las funciones  $e$ ,  $f$ ,  $h$  y  $g$ , definidas por las igualdades (4.14), (4.23'), (4.24') y (4.25') respectivamente, tienen significado físico real, sus diferenciales deben ser diferenciales exactas y por lo tanto, se deben de satisfacer las relaciones

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{P}{\rho^2} \right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{\rho} \right),$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \rho} = - \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{P}{\rho^2} \right),$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial P} = - \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{\rho} \right).$$

4.26

A este conjunto de igualdades, se les conoce como *relaciones de Maxwell*.

#### 4.3 COMENTARIOS SOBRE TERMODINAMICA IRREVERSIBLE.

En la obra de Clifford Truesdell "The tragicomedy of classical thermodynamics" (International Centre for Mechanical Sciences; UDINE 1971), el autor hace un análisis de los principales conceptos de la termodinámica clásica, introducidos a través de los trabajos de Fourier, Carnot Clapeyron, Helmholtz, Clausius y Gibbs, y llega, entre otras cosas a la conclusión de que un nombre más apropiado para esta rama de la física, es el de *termostática*. Esto debido a que la validez de sus postulados está restringida a estados de equilibrio, procesos cuasi-estáticos y en general, a situaciones que insinúan que no hay movimiento presente.

Según Truesdell, quien tuvo inicialmente los recursos necesarios para elaborar una teoría más aplicable a sistemas con movimiento interno, fue Fourier; sin embargo, éste no abordó el problema en toda su magnitud.

Debido a lo anterior; a pesar del enorme campo de aplicación de la termodinámica clásica y de la gran cantidad de problemas que se pueden resolver a través de ella, se ha visto la necesidad de hacerle ampliaciones. Una generalización de algunos de los conceptos que maneja la termodinámica clásica, se da en la llamada *termodinámica irreversible* y una rama de creación más reciente que pretende dar un paso más allá de esta última, la constituye la *termodinámica extendida*.

La termodinámica irreversible, al igual que la parte clásica

correspondiente, es una ciencia fenomenológica y trata de manera semejante los conceptos como entropía, energía interna, presión, etc. La diferencia entre una formulación y la otra, está en la forma de concebir los sistemas que se van a estudiar y la inclusión del parámetro tiempo en la termodinámica irreversible, como variable de descripción de los estados de dichos sistemas.

La termodinámica irreversible parte de dos postulados básicos; el primero de ellos hace referencia al empleo de variables de campo en lugar de parámetros globales de un sistema y el segundo establece el principio de equilibrio local.

El primer postulado, es un resultado que se infiere a partir de considerar a los sistemas macroscópicos, como formados por un gran número de pequeños subsistemas, en cada uno de los cuales está definida una entropía, una energía interna, una presión, etc., para todo tiempo. Naturalmente, los valores de estas cantidades tendrán ahora un carácter local. El principio de equilibrio local establece que todas las propiedades que se verifican para un sistema en conjunto que se encuentra en equilibrio, son válidas también para cualquier parte de dicho sistema, si ésta se encuentra en equilibrio.

Como un comentario final sobre el tema, mencionaremos que para llegar a una descripción apropiada de los procesos irreversibles, se hace uso básicamente de dos tipos de parámetros; uno para describir la "fuerza" que impulsa al proceso y el otro para describir la respuesta a dicha fuerza. A tales fuerzas generalizadas

se les denomina *afinidades* y a las respuestas a ellas se les llama *flujos*. Empleando la representación entrópica, en el caso de sistemas discretos, las afinidades son diferencias entre parámetros intensivos; y para sistemas continuos, son los gradientes de estos parámetros. Los flujos se definen como la velocidad de cambio de los parámetros extensivos.

La relación entre flujos y afinidades, es lo que caracteriza la velocidad de los procesos irreversibles.

**CAPITULO 5**  
**MEDIOS CONTINUOS**

## 5.1 ELEMENTOS DE LA TEORÍA CLÁSICA DE CAMPOS.

Considérese un sistema dinámico, formado por  $N$  partículas que se encuentran distribuidas en una región  $E'$  del espacio euclideo tridimensional  $E$ . Supóngase que el movimiento del sistema está constreñido por  $l$  ligaduras holónomas. Entonces, el sistema cuenta con  $3N - l$  grados de libertad, quedando el vector de posición  $r_k$  de la  $k$ -ésima partícula, en términos de las coordenadas generalizadas  $q_i$  como

$$r_k = r_k(q_1, q_2, \dots, q_{3N-l}, t) . \quad 5.1$$

El capítulo 3 y la parte referente a sistemas de muchas partículas del capítulo 2, están expuestos precisamente bajo este concepto; es decir, se supone allí un sistema con un número finito de componentes.

Existe sin embargo la posibilidad matemática de hacer que el número de partículas que forman un sistema dinámico, crezca indefinidamente, hasta llegar de un sistema discreto a uno continuo. En éste, las coordenadas generalizadas son funciones continuas de la forma  $\psi = \psi(x, y, z, t)$ , donde  $x$ ,  $y$  y  $z$  son las coordenadas cartesianas y  $t$  es el tiempo.

A cada función  $\psi$  se le llama *componente de campo* o *campo en una dimensión*, y para un sistema dado, habrá en general un número  $M$  de tales componentes. Así, las características dinámicas de dicho sistema podrán ser descritas con base en las igualdades

$$\psi_{\Delta} = \psi_{\Delta}(r, t) . \quad 5.2$$

Para estas expresiones se define la cantidad  $\psi_{\Delta, \mu}$ , mediante

$$\psi_{\Delta, \mu} = \frac{\partial \psi_{\Delta}}{\partial x^{\mu}} , \quad 5.3$$

donde  $(x^{\mu}) = (x^0=t, x^1=x, x^2=y, x^3=z)$ .

Procediendo de manera análoga a cuando se definieron las funciones lagrangianas para sistemas de partículas, en términos de las coordenadas y las velocidades generalizadas, podemos pensar ahora en *densidades lagrangianas*, que serán funciones de las componentes de campo  $\psi_{\Delta}$ , de las derivadas de éstas con respecto a las variables  $x^{\mu}$  y de las mismas variables  $x^{\mu}$ . Si se denota por  $\mathcal{L}$  a una de tales densidades, tendremos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi_{\Delta}, \psi_{\Delta, \mu}, x^{\mu}) . \quad 5.4$$

Una propiedad que debe observar la función  $\mathcal{L}$  es que al ser integrada sobre el volumen que contiene a todas las partes del sistema, el resultado debe ser la lagrangiana  $L$  de éste; es decir,

$$\int_V \mathcal{L} dV = L . \quad 5.5$$



Si siguiendo con el mismo esquema del capítulo 3, podemos integrar ahora ambos miembros de esta igualdad en un intervalo de tiempo  $(t_1, t_2)$  y definir la acción  $W$  como se hizo en la ecuación (3.5)

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \mathcal{L} dV dt . \quad 5.6$$

Aplicando el principio de Hamilton a esta expresión, (veanse las ecuaciones (1.11), (1.12) y (1.12') del capítulo 1), se llega al conjunto de ecuaciones

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_A} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\mu}} \right] = 0 , \quad 5.7$$

conocidas como *Ecuaciones de Euler-Lagrange*.

## 5.2 EL CAMPO DE VELOCIDADES.

Por un medio continuo, entendemos un cuerpo material que puede modelarse mediante una variedad diferenciable (con frontera)  $B$ , de elementos  $\xi, \eta, \dots$ , llamados *puntos materiales*. La estructura de  $B$  está definida por un conjunto  $\mathcal{V}$  de mapeos isométricos de  $B$ , en regiones compactas del espacio euclideo tridimensional  $E$ , con espacio de traslación  $V$  y una medida real no negativa  $M$ , definida para todos los subconjuntos de Borel de  $B$ . Los mapeos  $\psi \in \mathcal{V}$ , son las

configuraciones de  $B$  y el punto  $x = \varphi(\xi)$ , es la posición del punto material  $\xi$  en la configuración  $\varphi$ .

La medida  $M$  es la distribución de masa de  $B$  y tiene la siguiente propiedad:

Para cada  $\varphi \in \mathcal{P}$ , existe una densidad de masa  $\rho_\varphi$  tal que la masa  $M(C)$ , de cualquiera de las partes  $C \subset B$ , está dada por

$$M(C) = \int_{\varphi(C)} \rho_\varphi(x, t) dV, \quad 5.8$$

donde  $dV$ , es el elemento de volumen en  $\mathcal{P}(B)$ .

Por un movimiento de  $B$ , se entenderá una familia 1-paramétrica  $(\varphi(\cdot, t))$  de configuraciones de  $B$ . El parámetro  $t$  llamado *parámetro de evolución o tiempo*, se supone estrictamente monótonico y definido sobre algún intervalo real  $(a, b)$  y  $\varphi(\cdot, t)$ , se supone al menos de clase  $C^1$  en todos sus argumentos. Así pues, un movimiento de  $B$  queda representado en  $E$  mediante una congruencia de curvas diferenciables

$$\varphi(\cdot, t) : (a, b) \times B \rightarrow u, \quad 5.9$$

siendo  $u$  una región de  $E$  conocida como *veriforma de  $B$*  y definida mediante

$$u = \bigcup_t \varphi(B, t). \quad 5.10$$

La curva

$$x(t) = \psi(\xi, t); \quad \xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad 5.1$$

es la trayectoria del punto material  $\xi$  y el campo de velocidades del movimiento de  $\mathbb{B}$ , es un campo vectorial

$$\langle \text{vru} \rightarrow V / v = v(x(t), t) \rangle, \quad 5.11$$

cuyas curvas integrales, son las trayectorias de los puntos materiales de  $\mathbb{B}$ . A las velocidades así definidas, se les llama velocidades eulerianas.

Por otra parte, de la definición de velocidad para un punto material  $\xi$ , tenemos que

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad 5.13$$

donde  $x = x(t)$  está dado en (5.11). Esta cantidad llamada velocidad lagrangiana, es evidentemente una función de  $\xi$  y de  $t$  y está referida a las partículas que forman el cuerpo. La igualdad

$$\frac{dx}{dt} = v(x(t), t), \quad 5.14$$

establece la equivalencia entre las velocidades lagrangiana y euleriana.

Supóngase ahora que  $\psi(\cdot; t)$  y  $\psi(\cdot; t')$ , con  $t' = t + \Delta t$ , son dos configuraciones de  $\mathbb{B}$  en uno de sus movimientos, Entonces, el di-

homeomorfismo  $\chi(t'|t)$  definido por

$$\chi(t'|t) = \psi(\cdot; t') \circ \psi^{-1}(\cdot; t) , \quad 5.15$$

que mapea  $\psi(B, t)$  en  $\psi(B, t')$ , tiene la siguiente estructura

$$\chi(t'|t) = I + \Delta t v(\cdot; t) + \theta(\Delta t) , \quad 5.16$$

donde  $\theta(\Delta t)$  es tal que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta(\Delta t)}{\Delta t} = 0 , \quad 5.17$$

y  $I$ , es la identidad sobre  $\psi(B, t)$ . De esta forma, es claro que el campo de velocidades de  $B$ , es el generador de los desplazamientos de los puntos materiales de  $B$ .

### 5.3 ECUACIONES DE LA DINAMICA DE FLUIDOS.

Tomando en cuenta la afirmación hecha en la sección 1.4 del capítulo 1, en el sentido de que el estado de movimiento de un fluido queda determinado por cinco cantidades; las tres componentes de la velocidad  $v$  y, por ejemplo, la presión  $p$  y la densidad  $\rho$ , un sistema completo de ecuaciones que describa dicho estado, debe constar necesariamente de cinco. Para el caso de un fluido no vis-

coso, el sistema mencionado podría formarse con la ecuación de Euler, que proporciona las expresiones correspondientes a las tres componentes de la velocidad, la ecuación de continuidad y la llamada ecuación adiabática.

La ecuación de continuidad (igualdad (1.25))

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad 5.18$$

que fue ya obtenida en el capítulo I, mediante la aplicación del teorema de transporte, expresa el principio de conservación de la materia. Esta ecuación se puede deducir, evidentemente, empleando argumentos que contengan a dicho principio. Se empieza considerando un volumen arbitrario de fluido y se recurre al hecho de que los cambios que se dan, al transcurrir el tiempo, en la cantidad de masa contenida en él, coinciden con los flujos hacia el interior o desde el interior del mismo. Bajo estos razonamientos, vemos que la validez de la ecuación de continuidad es de carácter general; no depende del tipo de fluido que se esté tratando de describir, ni de su estado de movimiento.

Por otra parte, la ecuación de Euler,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \operatorname{grad} \phi, \quad 5.19$$

es el resultado de aplicar la segunda ley de Newton a las partículas del fluido. Se parte de considerar un cierto volumen de éste y se analiza la fuerza total que actúa sobre él, expresada como el

producto de la presión por el elemento diferencial de área, y extendida a toda la superficie que lo acota. De hecho, la ecuación que se obtiene bajo estos razonamientos, no contiene el término  $-\text{grad } \phi$ . Este se debe agregar en los casos en que el fluido se encuentre en un campo gravitacional.

La última de las tres ecuaciones mencionadas al principio, queda en la forma

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad 5.20$$

donde  $s$  denota la entropía por unidad de masa de una partícula de fluido en movimiento.

Esta ecuación, que es conocida también como *condición para el movimiento adiabático*, indica la ausencia de procesos de disipación de energía, durante el movimiento del fluido. Dichos procesos podrían presentarse debido a fricciones internas (viscosidad), y al intercambio de calor entre las diferentes partes del fluido.

En todo lo que sigue, un fluido no viscoso será considerado como aquel en el cual no existen procesos de disipación de energía por viscosidades o por conducción térmica, esto es, suponderemos que el movimiento que realizan tales sistemas, es adiabático.

Otras dos ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos son la *ecuación de Bernoulli*

$$\frac{1}{2}v^2 + w + \phi = \text{const.}, \quad 5.21$$

y la ecuación de balance de energía

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon + \rho \phi \right] = - \operatorname{div} \left[ \rho v \left[ \frac{1}{2} v^2 + \psi + \phi \right] \right]. \quad 5.22$$

Ambas ecuaciones se consideran referidas a un fluido no viscoso que se encuentra en un campo gravitacional. La cantidad  $\psi$  representa la entalpía (o función de calor), por unidad de masa, siendo  $\epsilon$  la energía interna y  $\phi$  el potencial por unidad de masa, debido al campo gravitacional.

Dos conceptos que se manejan en la dinámica de fluidos y que están relacionados con la ecuación (5.21), son los conocidos como *flujo estacionario* y *línea de flujo*. Considérese un fluido en movimiento: por un flujo estacionario se entiende a aquel en el que la velocidad es constante en el tiempo, en cualquier punto ocupado por el fluido; y una línea de flujo es una línea tal que, la tangente en cualquier punto de ella, da la dirección de la velocidad del fluido en ese punto. En el caso de un flujo estacionario, las trayectorias de las partículas coinciden con las líneas de flujo.

La ecuación de Bernoulli como está expresada en (5.21), resulta de considerar un flujo estacionario, y establece que en tal caso, la energía de cada partícula del fluido, es constante a lo largo de una línea de flujo.

Finalmente, en cuanto a la ecuación (5.22), se puede ver su significado físico, si se integra sobre algún volumen. Haciendo esto, resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left[ \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e + \rho \phi \right] dV = - \int \operatorname{div} \left[ \rho v \left( \frac{1}{2} v^2 + w + \phi \right) \right] dV ,$$

o bien, aplicando el teorema de la divergencia a la integral del lado derecho, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left[ \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e + \rho \phi \right] dV = - \oint \rho v \left( \frac{1}{2} v^2 + w + \phi \right) \cdot d\mathbf{f} .$$

El lado izquierdo de esta igualdad representa la razón de cambio de la energía del fluido, en el volumen elegido, y el lado derecho corresponde a la cantidad de energía que fluye hacia afuera, o hacia adentro, de dicho volumen en la unidad de tiempo. A la expresión

$$\rho v \left( \frac{1}{2} v^2 + w + \phi \right) ,$$

se le llama *vector de densidad de flujo de energía*. Su magnitud es la cantidad de energía que pasa en la unidad de tiempo, a través de la unidad de área, perpendicular a la dirección de la velocidad.



CAPITULO 6  
EL FORMALISMO LAGRANGIANO  
PARA UN FLUIDO NO VISCOSO

## 6.1 LAS VARIACIONES GEOMETRICAS.

En la sección 2 del capítulo anterior, se definió el movimiento de un cuerpo  $B$  como una familia 1-paramétrica de configuraciones  $\psi \in \mathcal{C}$  de  $B$ ; resulta evidente desde el punto de vista formal que, usando las configuraciones  $\mathcal{C}$ , es posible la construcción de varios movimientos diferentes para el cuerpo; no obstante que la historia de un cuerpo es única y su determinación corresponde a las leyes dinámicas de la teoría (en este trabajo, un principio variacional tipo-Hamilton).

Así pues, para un cuerpo dado  $B$ , existe toda una familia de movimientos que, al menos en principio, le es posible realizar; estos, que son dinámicamente permitidos a priori. Por ejemplo, si se conocen dos regiones del espacio que ciertamente ocupa el cuerpo bajo estudio, durante su movimiento, existe toda una familia de caminos (*vermiformes*), por las cuales el cuerpo pudo haber evolucionado desde la primera región hasta la segunda. Esta situación permite definir el concepto de variación geométrica, de la manera siguiente:

Sea  $\{\psi(\cdot; t)\}$ , el movimiento de un cuerpo  $B$  y sea  $\{\theta(\cdot; \alpha)\}$  un grupo  $r$ -paramétrico de Lie, de difeomorfismos (de clase  $C^n$ ), del espacio euclideo  $E$  en él mismo, tales que cuando  $\alpha = \alpha_0$ ,  $\theta$  se reduce a la identidad

$$\theta(\cdot; \alpha_0) \equiv 1 . \quad 6.1$$

Cada uno de los difeomorfismos  $\theta(\cdot; \alpha)$ , permite definir otro movimiento de  $\mathbb{B}$  como

$$\{\psi^{\vee}(\cdot; t) | \psi^{\vee}(\cdot; t) \equiv \theta(\cdot; \alpha) \circ \psi(\cdot; t)\} . \quad 6.2$$

Decimos que el movimiento  $\{\psi^{\vee}(\cdot; t)\}$ , constituye una *variación* del movimiento  $\{\psi(\cdot; t)\}$ , cuando  $\theta(\cdot; \alpha)$  es tal que  $\alpha = \alpha_0 + \delta\alpha$  con  $\delta\alpha$  un infinitésimo de primer orden.

En virtud de esta definición, tenemos que las trayectorias de los puntos materiales de  $\mathbb{B}$ , el movimiento  $\{\psi^{\vee}(\cdot; t)\}$ , están relacionadas con las correspondientes  $\{\psi(\cdot; t)\}$  mediante la expresión

$$x^{\vee}(t) = \theta(x(t), t) , \quad 6.3$$

o bien, mediante

$$x^{\vee}(t) = x(t) + \delta\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \theta(x(t), \alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_0} + \theta(\delta\alpha) , \quad 6.4$$

donde  $\theta(\delta\alpha)$  cumple con

$$\lim_{\delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\theta(\delta\alpha)}{\delta\alpha} = 0 . \quad 6.5$$

Entonces, la variación de los puntos materiales de  $\mathbb{B}$  está descrita por la ecuación

$$\mathbf{x}^{\vee}(t) = \mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t) , \quad 6.6$$

donde

$$\delta\mathbf{x}(t) \equiv \delta\alpha \frac{\partial}{\partial\alpha} \theta(\mathbf{x}(t), \alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_0} . \quad 6.7$$

En general, si

$$f = f(x^1, \dots, x^n) , \quad 6.8$$

es una función cuyas primeras derivadas con respecto a las variables  $x^1, \dots, x^n$ , existen, se define la variación  $\delta f$  de la función  $f$  mediante la expresión

$$\delta f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \delta x^i . \quad 6.9$$

## 6.2 EL PRINCIPIO TIPO-HAMILTON

Nos proponemos establecer en esta parte, el principio variacional a través del cual se obtienen las ecuaciones diferenciales de campo, correspondientes a las ecuaciones de balance de momento generalizado para un fluido no viscoso. Se hace el tratamiento típico de la teoría clásica de campos. Se postulan los campos físicos relevantes y se propone la existencia de una función de

densidad lagrangiana y la funcional de acción.

Suponemos que un fluido no viscoso, es un sistema continuo, cuya evolución dinámica se puede caracterizar completamente por medio de un juego de funciones de campo independientes; cinco para este caso: el campo de velocidades  $v$ , la función de densidad de masa  $\rho$  y el campo de densidad de entropía  $s$  (entropía por unidad de volumen), del fluido.

Se define la función de densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, v, \rho, s, t) , \quad 6.10$$

como una función continua y con derivadas continuas hasta de tercer orden en todos sus argumentos y de tal forma que la integral de  $\mathcal{L}$  sobre una parte  $\rho_{\psi}$  de la región imagen del cuerpo  $\mathbb{B}$ , se interprete como la función de Lagrange clásica de la parte correspondiente de  $\mathbb{B}$ ; es decir,

$$L = \int_{\rho_{\psi}} \mathcal{L} dV . \quad 6.11$$

Definimos ahora la funcional de acción como la integral definida de la lagrangiana  $L$ , dentro de un intervalo temporal dados

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\rho} \mathcal{L} dV dt , \quad 6.12$$

siendo  $R$  la región imagen de  $B$ , ante  $\Psi$ .

Debe observarse que la acción  $W$  definida en la última igualdad, es en general una función de los parámetros geométricos (véase la última sección del capítulo anterior). Esto es en virtud de que la región  $R$  sobre la que se efectúa la integración de la densidad  $\mathcal{L}$ , es la región imagen del cuerpo  $B$ , y ésta es función de dichos parámetros.

Se establece ahora el principio tipo-Hamilton.

*La funcional de acción  $W$ , definida por la expresión (6.12), permanece invariante frente a una variación geométrica continua.*

$$\delta W = 0 .$$

6.13

Como ya se dijo, a partir de este principio se obtienen las ecuaciones de balance de momento del sistema.

Resulta claro que el principio establecido no corresponde al principio de Hamilton típico de la teoría clásica de campos, en el cual se demanda que la acción sea una extremal o permanezca estacionaria frente a variaciones; cambios en las funciones de campo que no involucren ni cambios de escala de las coordenadas o las funciones de campo mismas, ni transformaciones temporales. Si ha de atribuirse a alguna transformación de un juego de parámetros la variación del principio de Hamilton, ellos deben ser parámetros no-geométricos; no asociados al escenario de los acontecimientos

físicos; al contrario de lo que aquí se ha propuesto.

Quedan entonces las variaciones de la acción  $W$  comprendidas como una consecuencia de los cambios sufridos en los parámetros geométricos, y su conservación, como una propiedad de simetría del sistema y no como una cualidad dinámica de éste. Es por ello que al principio variacional establecido aquí, se le denominó tipo-Hamilton.

El teorema de Nöther de la teoría clásica de campos, tiene alguna semejanza con el principio variacional propuesto, solo que dicho teorema, al exigir la invariancia de la acción ante transformaciones geométricas, afirma que se obtienen leyes de conservación, en tanto que en este contexto solamente se obtienen, como se verá más adelante, ecuaciones de balance. La razón de esta última cuestión, radica en el hecho de que para demostrar el teorema de Nöther es necesario, previamente, haber encontrado las ecuaciones de campo como resultado del principio de Hamilton.

Se acepta entonces que para el caso de un fluido no viscoso, el único principio válido será el que se ha propuesto aquí, el de tipo-Hamilton y en consecuencia, no se podrán obtener leyes de conservación a partir de él.

### 6.3 LAS ECUACIONES DE BALANCE DE MOMENTO GENERALIZADO, PARA UN FLUIDO NO VISCOOSO.

Se establecen primero las condiciones de frontera a las que estarán sujetas algunas de las variables que intervienen en la variación de la acción  $W$ .

Como una primera condición, se exige que las variaciones sean de carácter exclusivamente geométrico; después, que las variaciones locales de  $x^i$ , en los tiempos límites de integración  $t_1$  y  $t_2$ , sean nulas y por último, que las variaciones locales  $\delta x^i$  sean normales al elemento diferencial de área en toda la superficie  $\Sigma$  que limita a la región de integración  $R$ . Estas tres condiciones se pueden resumir de la manera siguiente:

$$\delta t = 0, \text{ para todo } t;$$

$$\delta x^i(t) \Big|_{t=t_1, t_2} = 0; \quad 6.14$$

$$\delta x^i \perp da, \text{ en toda la superficie } \Sigma.$$

En todo lo que sigue se hace uso de la convención de índices repetidos para la suma. Se establece que si en alguna expresión aparece un índice dos veces, se entenderá que esta expresión está sumada respecto a dicho índice para todos los valores admisibles



del mismo. Este convenio proporciona un ahorro sustancial en la notación. También, con el fin de simplificar los desarrollos posteriores, se define la *lagrangiana por unidad de masa*  $\lambda$  del sistema mediante la expresión

$$\mathcal{L} = \rho \lambda . \quad 6.15$$

De la igualdad (6.10) resulta claro que la cantidad definida aquí, es una función de la forma

$$\lambda = \lambda(x, v, \rho, \eta, t) , \quad 6.16$$

donde  $\eta$  es la *entropía específica* o *entropía por unidad de masa* del sistema, definida por

$$s = \rho \eta . \quad 6.17$$

En términos de la lagrangiana por unidad de masa, la ecuación (6.12) queda en la forma

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \rho \lambda \, dV dt . \quad 6.18$$

A partir de esta expresión, se calcula ahora  $\delta W$ . Para ello se observa que la primera condición (6.14) permite conmutar el operador  $\delta$  con la integral temporal, además, aplicando la propiedad establecida en la ecuación (1.27) del primer capítulo, de la igualdad (6.18), obtenemos,

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \rho \delta \Lambda \, dV dt . \quad 6.19$$

De la primera condición de frontera (6.14) y de la definición de variación dada en la expresión (6.9), es claro que el factor  $\delta \Lambda$  puede ser escrito en la forma

$$\delta \Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \delta v^i + \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial \Lambda}{\partial \eta} \delta \eta , \quad 6.20$$

de manera que tomando  $\delta W = 0$  y sustituyendo este resultado en (6.19), encontramos

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \left[ \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \delta v^i + \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial \Lambda}{\partial \eta} \delta \eta \right] dV dt = 0 . \quad 6.21$$

Nuestro objetivo ahora, es operar sobre cada término del integrando de esta igualdad, con el fin de llegar a una relación manejable bajo los métodos del cálculo de variaciones. Para el segundo término del paréntesis se hará uso de la identidad

$$\delta v \equiv \frac{d}{dt} \delta x . \quad 6.22$$

Esta se demuestra de una manera sencilla si se toma en cuenta la relación entre las velocidades lagrangiana y euleriana, dada en la igualdad (5.14) y la definición de variación, establecida en (6.7). Se tiene para la  $i$ -ésima componente,

$$\delta \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{dx^i}{dt} \right) \delta \alpha .$$

Debido a que los parámetros involucrados aquí, indican solamente cambios de carácter geométrico, podemos intercambiar el orden de la derivada con el tiempo y escribir

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{dx^i}{dt} \right) \delta \alpha = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x^i}{\partial \alpha} \delta \alpha \right) = \frac{d}{dt} (\delta x^i) ,$$

de donde se concluye que la igualdad (6.22), se verifica.

Ahora, el volumen de la región R sobre la que se integra en (4.21) (y por lo tanto el elemento diferencial  $dV$ ), es una cantidad que en general depende tanto de las coordenadas espaciales como del tiempo. No obstante, si se introduce una transformación lagrangiana de coordenadas  $x \rightarrow \xi$ , es posible expresar la diferencial  $dV$  como un producto de dos factores; uno que dependa solamente del tiempo y otro que sea función exclusivamente de las coordenadas espaciales (véase la igualdad (1.24') del primer capítulo). Así, tomando en cuenta la igualdad (6.22), podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_R \rho \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \delta v^i dV dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_R \rho \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \frac{d}{dt} (\delta x^i) J dV_0 dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_R \frac{d}{dt} \left[ \rho J \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \delta x^i \right] dV_0 dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_R \frac{d}{dt} \left[ \rho J \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \right] \delta x^i dV_0 dt , \end{aligned}$$

6.23

donde  $J$  es el determinante jacobiano definido en (1.22) y  $dV_0$  es la diferencial de un volumen fijo (el volumen ocupado por el fluido en el instante inicial).

Tomando en cuenta que  $dV_0$  y  $dt$  son independientes, el orden de integración en la primera integral del segundo miembro es indiferente; entonces, de esto y de la segunda condición de frontera (6.14), encontramos para dicha integral

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \frac{d}{dt} \left( \rho J \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \delta x^i \right) dV_0 dt = \int_{\mathcal{R}} \left[ \int_{t_1}^{t_2} d \left( \rho J \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \delta x^i \right) \right] dV_0 = 0.$$

De aquí que (6.23) queda como

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \rho \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \delta v^i dV dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \frac{d}{dt} \left( \rho J \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \right) \delta x^i dV_0 dt.$$

Efectuando la derivada temporal indicada en el segundo miembro de esta igualdad, y recurriendo a las ecuaciones (1.23) y (1.25) del primer capítulo, encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \rho J \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \right) &= \rho J \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \right) + \rho \frac{dJ}{dt} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \right) + \frac{d\rho}{dt} J \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \right) \\ &= \rho J \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \right) + \left[ \dot{\rho} + \rho \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \right] J \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \\ &= \rho J \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \right), \end{aligned}$$

de aquí se obtiene finalmente para (6.23), la expresión

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \rho \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \delta v^i dV dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_R \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \right) \delta x^i dV dt . \quad 6.24$$

Consideremos ahora el tercer término de la suma que aparece en (6.21). De la igualdad (1.26) del primer capítulo se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_R \rho \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \delta \rho dV dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_R \rho^2 \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \right) \frac{\partial (\delta x^i)}{\partial x^i} dV dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_R \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \delta x^i \right) dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_R \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \right) \delta x^i dV dt . \end{aligned} \quad 6.25$$

Aplicando el teorema de la divergencia a la primera integral del segundo miembro de esta expresión y tomando en cuenta la última condición de frontera (6.14), resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \delta x^i \right) dV dt = \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\Sigma=R} \rho^2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \delta x^i da^i dt = 0 ,$$

de manera que (6.25) queda como

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \rho \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \delta \rho dV dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_R \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \right) \delta x^i dV dt . \quad 6.26$$

Finalmente, a partir de la expresión

$$\delta s = -s \operatorname{div} \delta x, \quad 6.27$$

se demuestra que

$$\delta \eta = 0, \quad 6.27'$$

con lo que el último término del integrando de (6.21), desaparece.

La expresión (6.27) es el resultado de aplicar a la entropía  $s$ , los argumentos que fueron empleados en relación con la igualdad (1.26) del primer capítulo. Debe observarse sin embargo que dicha expresión no es de carácter general; esto es, no siempre es posible establecer una ecuación de continuidad como la (1.25) para la entropía. En el caso del fluido no viscoso, cuyo movimiento es necesariamente adiabático ( $d\eta/dt=0$ ), es claro que los argumentos señalados en aquella ocasión, son válidos.

Para probar que  $\delta \eta = 0$ , considérese la entropía por unidad de masa dada en (6.17) y la igualdad (1.26) del capítulo 1. Se tiene

$$\begin{aligned} \delta s &= \delta(\rho\eta) \\ &= \rho\delta\eta + \eta\delta\rho \\ &= \rho\delta\eta - \rho\eta \operatorname{div} \delta x \\ &= \rho\delta\eta - s \operatorname{div} \delta x. \end{aligned}$$

Sumando a ambos miembros la cantidad  $s \operatorname{div} \delta x$ , resulta inmediata la igualdad (6.27').

De esta manera, sustituyendo en (6.21) los resultados obtenidos en (6.24) y (6.26), se llega a la expresión

$$\int_{x^1}^{x^2} \int_{x^2}^{\infty} \left[ \rho \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} - \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \right) \right] \delta x^i dV dt = 0 .$$

Dado que las variaciones locales de  $x^i$  son arbitrarias e independientes, la igualdad anterior se verificará siempre que se satisfaga cada una de las ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \right) , \quad 6.28$$

que corresponden a las *ecuaciones de balance de momento generalizado* para un fluido no viscoso.

### 6.3 LA ECUACION DE EULER PARA EL FLUIDO PERFECTO.

En esta sección veremos como, a partir de las ecuaciones (6.28) y de proponer una función de densidad lagrangiana del tipo T-V, donde T es la densidad de energía cinética y V es la densidad de energía potencial, es posible llegar a la ecuación de Euler para el fluido perfecto.

Es de esperarse que el estado dinámico de un sistema como el

mencionado depende en general de la energía cinética de las partículas que lo forman, así como de la energía potencial de dichas partículas y de su energía interna; siendo esta última una función de la densidad y a lo más de la entropía. Al parecer estas cantidades son suficientes para obtener cualquier información referente al estado de movimiento del fluido perfecto; por lo tanto se propone para él la función de densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho \phi(x) - \rho e(\rho, \eta), \quad 6.29$$

donde  $v^2$  es el cuadrado del módulo del campo de velocidades,  $\phi$  es una función potencial y  $e$  es la energía interna específica.

Evidentemente, según (6.15), en términos de esta  $\mathcal{L}$ , la lagrangiana por unidad de masa  $A$  del fluido queda como

$$A = \frac{1}{2} v^2 - \phi(x) - e(\rho, \eta). \quad 6.30$$

Calculando las diferentes derivadas que se piden en la igualdad (6.28), a partir de esta expresión para  $A$  encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial A}{\partial v^i} \right) &= \frac{dv^i}{dt}, \\ \frac{\partial A}{\partial x^i} &= - \frac{\partial \phi}{\partial x^i}, \end{aligned} \quad 6.31$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \frac{\partial A}{\partial \rho} \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \frac{\partial e}{\partial \rho} \right),$$



Tomando en cuenta la definición de presión, establecida en la segunda de las expresiones (4.17) del capítulo 4,

$$p = \rho^2 \frac{\partial \rho}{\partial \rho}, \quad 4.17$$

tenemos que la última igualdad (6.31) se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \frac{\partial A}{\partial \rho} \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i}. \quad 6.32$$

Por otra parte, es interesante observar que esta expresión sugiere el hecho de definir el concepto de presión de una manera un tanto más general. Así, en el caso del formalismo lagrangiano se establece la relación

$$p = - \rho^2 \frac{\partial A}{\partial \rho}, \quad 6.33$$

como definición de *presión del fluido*.

En cuanto a estructura, es evidente que la definición dada es consistente con la propuesta en (4.17), para el caso de la termodinámica clásica. En analogía con el concepto de momento generalizado del formalismo lagrangiano de partículas, la igualdad (6.33) tendrá aquí el carácter de *presión generalizada*.

Volviendo a los planteamientos iniciales, sustituyendo en (6.

28) las dos primeras expresiones (6.31) y la igualdad (6.32), encontramos

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \text{grad } \phi = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p, \quad 6.34$$

igualdad que corresponde, según puede verse en la expresión (5.19) del capítulo 5, a la ecuación de Euler para el fluido perfecto. La diferencia fundamental entre la expresión mencionada y la encontrada en (6.34), es el modo en que se obtienen. Mientras que para llegar a la igualdad (5.19) es necesario hacer un análisis de carácter vectorial, basado en la segunda ley de Newton (véase Landau y Lifshitz, *Fluid Mechanics*, cap. 1, sec.2), para obtener (6.34) basta con proponer la cantidad escalar  $\phi$  dada en (6.29) y emplear las ecuaciones (6.28).

**CAPITULO 7**  
**LA ECUACION**  
**DE BALANCE DE ENERGIA**  
**PARA UN FLUIDO NO VISCOZO**

## 7.1 LAS VARIACIONES TEMPORALES.

En la sección 6.1 del capítulo 6, se introdujo el concepto de variación local (o variación geométrica), como un cambio infinitesimal de primer orden en los parámetros geométricos. Estas variaciones inducían a su vez cambios en las variables que dependen de dichos parámetros (véase la sección 6.3 del capítulo anterior). De manera semejante a como se hizo con las variaciones mencionadas, se introduce aquí el concepto de variación temporal como una transformación del parámetro de evolución  $t$ , de la forma

$$t \longrightarrow t^* = t + \delta^* t, \quad 7.1$$

donde  $\delta^* t$  es la parte infinitesimal.

Se han indicado las variaciones anteriores con el símbolo  $\delta^*$ , con el fin de que quede señalada una diferencia entre ellas y las variaciones geométricas, que fueron indicadas por  $\delta$ .

Como consecuencia de una variación temporal del tipo (7.1), todas las cantidades cinemáticas y las funciones de campo, experimentarán cambios. Se propone que dichos cambios sean asimismo infinitesimales. De esta manera, en el caso de la componente  $x^i$ , tendremos

$$x^i(t) \longrightarrow x^i(t^*) = x^i(t) + \delta^* x^i(t), \quad 7.2$$

donde

$$\delta^* x^i(t) \equiv v^i \delta^* t . \quad 7.2'$$

Por analogía con (7.2), tendremos para las componentes del campo de velocidades, las relaciones

$$v^i(t) \longrightarrow v^i(t') = v^i(t) + \delta^* v^i(t) , \quad 7.3$$

quedando dada la parte infinitesimal  $\delta^* v^i$  por

$$\delta^* v^i \equiv \frac{dv^i}{dt} \delta^* t \quad 7.3'$$

Como en el caso de las variaciones geométricas, también aquí se define la variación temporal de una función arbitraria  $f = f(o; t)$ . Se establece la transformación

$$f(o; t) \longrightarrow f(o; t') = f(o; t) + \delta^* f(o; t) , \quad 7.4$$

donde  $t'$  está dado por (7.1) y

$$\delta^* f \equiv \frac{df}{dt} \delta^* t . \quad 7.5$$

Si se toma  $f(o; t') = f'$ , de (7.4) resulta evidente la igualdad

$$\delta^* f = f' - f , \quad 7.5'$$

que es otra forma de expresar la parte infinitesimal  $\delta^* f$ , aparte de la dada en (7.5).

En seguida se enunciará un teorema referente al comportamiento de la acción  $W$  (definida en la igualdad (6.3) del capítulo anterior), ante variaciones temporales. La prueba que se expondrá de él, aparece en un artículo de Fermin Viniegra H., Alejandro Salcido G. y Angel Fierros P, publicado en la Revista del Instituto Mexicano del Petroleo (vol. XVI; No. 1; pp. 46; Enero 1984). Se establece que:

*Para cualquier fluido, la acción  $W$  es invariante ante transformaciones temporales continuas; esto es.*

$$\delta^* W = 0, \quad 7.6$$

Para empezar la demostración, se adoptan nuevamente las condiciones de frontera

$$\delta^* z \Big|_{t_1, t_2} = 0 \quad 7.7$$

Empleando sucesivamente las igualdades (7.5') y (7.4) en la expresión (6.12) del capítulo 6, resulta

$$\begin{aligned} \delta^* W &= \int_{t_1}^{t_2} \int_R z' dV' dt' - \int_{t_1}^{t_2} \int_R z dV dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_R (z + \delta^* z) d(V + \delta^* V) d(t + \delta^* t) - \int_{t_1}^{t_2} \int_R z dV dt. \quad 7.8 \end{aligned}$$

Ahora, para las diferenciales de la primera integral del segundo miembro, se tiene

$$d(t + \delta^* t) = \left[ 1 + \frac{d(\delta^* t)}{dt} \right] dt, \quad 7.9$$

$$d(V + \delta^* V) = (1 + \operatorname{div} \mathbf{v} \delta^* t) dV.$$

La primera de estas igualdades es evidente. Para probar la segunda, volvemos a las expresiones (7.4) y (7.5) y a los conceptos relativos a ellas. Para el volumen  $V'$ , tenemos

$$V' = V(t') = V(t + \delta^* t),$$

de manera que en términos del elemento diferencial de volumen  $dV$ , podemos expresar a  $dV'$  como

$$dV' = J dV(t), \quad 7.10$$

donde  $J$  es el determinante jacobiano definido por

$$J = \frac{1}{3!} \delta_{ijk} \frac{\partial y^i}{\partial x^a} \frac{\partial y^j}{\partial x^b} \frac{\partial y^k}{\partial x^c}, \quad 7.11$$

siendo  $y^r = x^r + v^r \delta^* t$ , la componente  $x^r$  al tiempo  $t' = t + \delta^* t$ .

Ahora, para cada factor  $\partial y^r / \partial x^a$  del determinante tenemos

$$\frac{\partial y^r}{\partial x^a} = \delta_a^r + \frac{\partial v^r}{\partial x^a} \delta^* t,$$

de manera que al sustituir en (7.11), encontramos

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{\sigma} \delta_{ijk}^{abc} \left( \delta_a^i + \frac{\partial v^i}{\partial x^a} \delta^* t \right) \left( \delta_b^j + \frac{\partial v^j}{\partial x^b} \delta^* t \right) \left( \delta_c^k + \frac{\partial v^k}{\partial x^c} \delta^* t \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{\sigma} \delta_a^i \frac{\partial v^i}{\partial x^a} \delta^* t + \frac{1}{\sigma} \delta_b^j \frac{\partial v^j}{\partial x^b} \delta^* t + \frac{1}{\sigma} \delta_c^k \frac{\partial v^k}{\partial x^c} \delta^* t + \dots
 \end{aligned}$$

Si se desprecian las variaciones de orden superior al primero, de la igualdad anterior resulta

$$J = 1 + \operatorname{div} \mathbf{v} \delta^* t, \quad 7.12$$

con lo que queda probada la segunda expresión (7.9).

De esta manera, empleando las igualdades (7.9) en (7.8), encontramos

$$\begin{aligned}
 \delta^* W &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{z} + \delta^* \mathbf{z}) (1 + \operatorname{div} \mathbf{v} \delta^* t) \left( 1 + \frac{d(\delta^* t)}{dt} \right) dV dt \\
 &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{z} dV dt. \quad 7.13
 \end{aligned}$$

Efectuando los productos indicados en el integrando del primer término del miembro derecho, se obtiene



$$\begin{aligned}
& (\mathbf{x} + \delta^* \mathbf{x}) \left( 1 + \operatorname{div} \mathbf{v} \delta^* t \right) \left[ 1 + \frac{d(\delta^* t)}{dt} \right] = \\
& = \mathbf{x} + \mathbf{x} \operatorname{div} \mathbf{v} \delta^* t + \mathbf{x} \operatorname{div} \mathbf{v} \delta^* t \frac{d(\delta^* t)}{dt} + \mathbf{x} \frac{d(\delta^* t)}{dt} \\
& \quad + \delta^* \mathbf{x} + \delta^* \mathbf{x} \frac{d(\delta^* t)}{dt} + \delta^* \mathbf{x} \operatorname{div} \mathbf{v} \delta^* t \\
& \quad + \delta^* \mathbf{x} \operatorname{div} \mathbf{v} \delta^* t \frac{d(\delta^* t)}{dt}
\end{aligned}$$

de donde, al sustituir en (7.13), despreciando las variaciones de segundo orden y superiores, se llega a la expresión

$$\delta^* W = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbf{R}} \left[ \Delta \mathbf{x} \delta^* t + \mathbf{x} \frac{d(\delta^* t)}{dt} \right] dV dt, \quad 7.14$$

donde

$$\Delta \mathbf{x} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{x} \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad 7.15$$

es la llamada *derivada hidrodinámica*.

Para concluir la prueba del teorema, basta demostrar que se verifica la igualdad

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbf{R}} \mathbf{x} \frac{d(\delta^* t)}{dt} dV dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbf{R}} \Delta \mathbf{x} \delta^* t dV dt. \quad 7.16$$

Empeando una transformación lagrangiana de coordenadas en la

diferencial de volumen de la integral del primer miembro de esta igualdad (véase la expresión (1.24') del capítulo I), resulta

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{x} \frac{d(\delta^* t)}{dt} dV dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{x} J \frac{d(\delta^* t)}{dt} dV_0 dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d}{dt} (\mathbf{x} J \delta^* t) dV_0 dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d}{dt} (\mathbf{x} J) \delta^* t dV_0 dt \\
 &= J \left[ \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{x} dV_0 \right] \delta^* t \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d(\mathbf{x} J)}{dt} \delta^* t dV_0 dt .
 \end{aligned}$$

En virtud de las condiciones de frontera propuestas en (7.7), tenemos que el primer término de este resultado, es nulo, además, de la definición dada en (7.5) y de la igualdad (1.23) del primer capítulo, tenemos para el integrando del segundo término

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\mathbf{x} J)}{dt} \delta^* t &= \delta^* (\mathbf{x} J) \\
 &= \mathbf{x} \delta^* J + J \delta^* \mathbf{x} \\
 &= \mathbf{x} J \operatorname{div} \mathbf{v} \delta^* t + J \delta^* \mathbf{x} \\
 &= J \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{x} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \delta^* t \\
 &= \mathbf{x} \delta^* t J
 \end{aligned}$$

Sustituyendo esto en el desarrollo anterior se llega directamente a (7.16), quedando entonces probado el teorema.

Debe observarse que en ninguna parte de la demostración anterior se propusieron restricciones sobre la forma de la función de densidad lagrangiana, por lo tanto, como consecuencia lógica, tenemos el hecho de que lo establecido allí es de carácter general, válido para cualquier función de densidad lagrangiana, sea o no la de un fluido perfecto.

## 7.2 LA ECUACION DE BALANCE DE ENERGIA GENERALIZADA PARA UN FLUIDO NO VISCOZO.

Aplicaremos aquí el teorema de la sección anterior al caso particular de un fluido no viscoso y obtendremos la ecuación de balance de energía para éste.

Según la igualdad (6.10), la función de densidad lagrangiana para tal fluido es de la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, v, \rho, s, t) \quad 7.17$$

y su lagrangiana por unidad de masa, definida en (6.15), de la forma

$$\Lambda = \Lambda(x, v, \rho, \eta, t) \quad 7.17'$$

Empleando estas expresiones, la igualdad (7.14) se puede llevar

mediante un procedimiento sencillo, a la forma

$$\delta^* W = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} (\rho \delta^* A - \mathcal{D} \mathcal{E} \delta^* t) dV dt . \quad (7.18)$$

Para lograrlo tómate en cuenta primero la ecuación de continuidad (1.25). De la definición de variación temporal establecida en (7.5), tenemos

$$\delta^* \rho = \dot{\rho} \delta^* t = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v} \delta^* t .$$

Por otra parte, de (7.16) es claro que

$$\mathcal{E} \frac{d(\delta^* t)}{dt} = -\mathcal{D} \mathcal{E} \delta^* t$$

de manera que podemos desarrollar el integrando de (7.14) para obtener

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \mathcal{E} \delta^* t + \mathcal{E} \frac{d(\delta^* t)}{dt} &= \delta^* \mathcal{E} + \mathcal{E} \operatorname{div} \mathbf{v} \delta^* t + \mathcal{E} \frac{d(\delta^* t)}{dt} \\ &= \delta^* (\rho A) + \rho A \operatorname{div} \mathbf{v} \delta^* t - \mathcal{D} \mathcal{E} \delta^* t \\ &= \rho \delta^* A + A \delta^* \rho + \rho A \operatorname{div} \mathbf{v} \delta^* t - \mathcal{D} \mathcal{E} \delta^* t \\ &= \rho \delta^* A + A (\delta^* \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \delta^* t) - \mathcal{D} \mathcal{E} \delta^* t \\ &= \rho \delta^* A - \mathcal{D} \mathcal{E} \delta^* t \end{aligned}$$

De aquí resulta inmediata la igualdad (7.18).

Se efectúa ahora la variación temporal de la lagrangiana por

unidad de masa. Empleando (7.5) y (7.17') y del hecho de que  $\dot{\eta}=0$ , ya que se trata de un movimiento adiabático, tenemos que

$$\delta^* \Lambda = \frac{d\Lambda}{dt} \delta^* t = \left[ \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} \dot{x}^i + \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \dot{v}^i + \frac{\partial \Lambda}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right] \delta^* t .$$

Quedando entonces la expresión (7.18), en la forma

$$\delta^* W = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{B}} \left[ \rho \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} \dot{x}^i + \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \dot{v}^i + \frac{\partial \Lambda}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) - \mathcal{D}(\rho \Lambda) \right] \delta^* t dV dt . \quad 7.19$$

Con el fin de simplificar un poco la notación en los desarrollos que siguen, definimos una cantidad  $I$  como el integrando que aparece en esta igualdad; es decir,

$$I = \rho \left[ \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} \dot{x}^i + \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \dot{v}^i + \frac{\partial \Lambda}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right] - \mathcal{D}(\rho \Lambda) . \quad 7.20$$

Manejando por separado cada uno de los tres términos centrales que aparecen dentro del primer paréntesis, obtenemos lo siguiente. Para el término en  $v^i$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \dot{v}^i = \rho \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} v^i \right] - \rho \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \right] v^i$$

y tomando en cuenta la ecuación de continuidad (1.25), nos queda para el término siguiente

$$\rho \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \dot{\rho} = -\rho^2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \frac{\partial v^i}{\partial x^i} = -\frac{\partial}{\partial x^i} \left[ \rho^2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} v^i \right] + \frac{\partial}{\partial x^i} \left[ \rho^2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \right] v^i.$$

Sustituyendo los dos últimos resultados en la ecuación (7.20) y reagrupando términos, llegamos a que

$$\begin{aligned} I = & -\rho \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \right) \right] v^i \\ & + \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} v^i \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left[ \rho^2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} v^i \right] + \rho \frac{\partial \Lambda}{\partial t} - \mathcal{D}(\rho \Lambda). \end{aligned}$$

De la ecuación de balance de momento dada por la igualdad (6.28) del capítulo anterior, tenemos que la cantidad entre paréntesis rectangulares es nula, además, empleando nuevamente la ecuación de continuidad y las expresiones (6.15), (7.17) y (7.17'), nos queda para el término siguiente

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} v^i \right) &= \frac{d}{dt} \left[ \rho \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} v^i \right] - \dot{\rho} \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} v^i \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \rho \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} v^i \right] + \left[ \rho \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} v^i \right] \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \\ &= \mathcal{D} \left[ \rho \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} v^i \right] \\ &= \mathcal{D} \left[ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v^i} v^i \right] \end{aligned}$$

De manera que si definimos la función de densidad hamiltoniana  $\mathcal{E}$

del fluido mediante la igualdad

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial v^i} v^i - x, \quad 7.21$$

encontramos que

$$1 = \dot{x}x - \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho^2 \frac{\partial A}{\partial \rho} v^i \right) + \rho \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Sustituyendo este resultado en (7.19), llegamos finalmente a la expresión

$$\delta^* W = \int_{t_1}^{t_2} \int_R \left[ \dot{x}x - \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho^2 \frac{\partial A}{\partial \rho} v^i \right) + \rho \frac{\partial A}{\partial t} \right] \delta^* t \, dV dt. \quad 7.22$$

Aplicando ahora lo establecido por el teorema de la sección anterior [igualdad (7.6)] y tomando en cuenta que tanto el volumen como el intervalo de tiempo sobre los que se efectúa la integración, así como la variación  $\delta^* t$ , son arbitrarias, se concluye que la igualdad (7.22) se satisface, toda vez que se cumpla que

$$\dot{x}x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho^2 \frac{\partial A}{\partial \rho} v^i \right) - \rho \frac{\partial A}{\partial t}. \quad 7.23$$

Esta expresión, corresponde a la ecuación de balance de energía generalizada para un fluido no viscoso.

**CAPÍTULO 8**  
**EL FORMALISMO HAMILTONIANO**  
**PARA UN FLUIDO NO VISCOSO**



## 8.1 LAS ECUACIONES DE HAMILTON PARA UN FLUIDO NO VISCOSO.

Después de establecer el formalismo lagrangiano de la dinámica de fluidos, surge de manera natural, la posibilidad de integrar a la teoría, el formalismo hamiltoniano. Para tal fin se usan de hecho todos los conceptos que fueron planteados en la parte correspondiente a la dinámica de partículas, modificando aquellos que por su estructura, sufren cambios al pasar de un sistema discreto a uno continuo.

El primer concepto que introduciremos aquí y que será de importancia en los desarrollos subsecuentes, es el de *momento generalizado*, el cual se define en la forma

$$p_i = \frac{\partial A}{\partial v^i}, \quad 8.1$$

siendo  $A$  la lagrangiana por unidad de masa del sistema introducida en la igualdad (6.15).

Al igual que en la dinámica de partículas, se recurre ahora al procedimiento matemático conocido como *transformada de Legendre*, (véase la sección 1.3 del primer capítulo). Como sabemos, este procedimiento tiene la característica de generar ciertas funciones

a partir de una función dada. Las funciones generadas dependen, de nuevos conjuntos de variables que guardan una relación diferencial con las originales. A las nuevas variables se les llama *variables canónicas conjugadas* de las primeras.

Definimos la *hamiltoniana específica*  $H$  de un fluido no viscoso, como la transformada de Legendre de su lagrangiana específica  $A$ ; es decir,

$$H \equiv \frac{\partial A}{\partial v^i} v^i - A . \quad 8.2$$

Queda claro que la relación entre esta función  $H$  y la función de densidad hamiltoniana  $\mathcal{H}$  introducida en la ecuación (7.21) del capítulo anterior, es

$$\mathcal{H} \equiv \rho H . \quad 8.3$$

De (8.2) vemos entonces que la hamiltoniana específica  $H$ , es función de las variables canónicas conjugadas del campo de velocidades, que son los momentos generalizados definidos en (8.1). Estos son los responsables de que  $H$  no dependa ya de  $v$ .

En virtud de la forma de la función  $A$ , es evidente que  $H$  queda como

$$H \equiv H(x, p, \rho, \eta, t) , \quad 8.4$$

donde  $x$  es la posición,  $p = \{p_i\}$ , los momentos generalizados,  $\rho$  la densidad de masa  $\eta$ , la entropía específica y  $t$  el tiempo.

Tomando el elemento diferencial de H, se obtiene, al desarrollar según la regla de la cadena del cálculo diferencial

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial H}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad 8.5$$

Por otra parte, de la definición de H dada en (8.2), se obtiene para el elemento diferencial de H,

$$dH = p_i dv^i + v^i dp_i - \frac{\partial A}{\partial x^i} dx^i - \frac{\partial A}{\partial v^i} dv^i - \frac{\partial A}{\partial \rho} d\rho - \frac{\partial A}{\partial \eta} d\eta - \frac{\partial A}{\partial t} dt.$$

De la definición de momento generalizado  $p_i$  dada en (8.1), se ve que los términos primero y cuarto de esta igualdad se cancelan, quedando en lo que resta un conjunto de términos con diferenciales de  $x^i$ ,  $p_i$ ,  $\rho$ ,  $\eta$  y  $t$ . Comparando los coeficientes de éstos con los correspondientes de la igualdad (8.5), se llega a un conjunto de ecuaciones de movimiento

$$\frac{\partial H}{\partial x^i} = - \frac{\partial A}{\partial x^i}, \quad 8.6$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{x}^i,$$

y a tres ecuaciones auxiliares que relacionan el comportamiento de la hamiltoniana con el de la lagrangiana, respecto a las variables  $\rho$ ,  $\eta$  y  $t$ ,

$$\frac{\partial H}{\partial p} = - \frac{\partial \Lambda}{\partial p},$$

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = - \frac{\partial \Lambda}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}.$$

8.7

Por otra parte, de las ecuaciones de balance de momento generalizado obtenidas en el capítulo 6 [igualdades (6.28)], tenemos

$$- \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[ \rho^2 \frac{\partial \Lambda}{\partial p} \right],$$

de donde, al emplear las definiciones de presión y momento, propuestas en (6.33) y (8.1), respectivamente, resulta

$$- \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = - \dot{p}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i}.$$

Sustituyendo este resultado en la primera de las ecuaciones (8.6), llegamos a las expresiones equivalentes

$$\frac{\partial H}{\partial x^i} = - \dot{p}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i},$$

8.8

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = x^i.$$

Este conjunto de igualdades constituye las *ecuaciones de movi-*

mento de Hamilton para un fluido no viscoso.

Regresando a las ecuaciones auxiliares dadas en (8.7), vemos que la primera de ellas sugiere la forma de definir la presión en el formalismo hamiltoniano. Si se recuerda que dicho concepto en la formulación lagrangiana está dado por

$$p = - \rho^2 \frac{\partial A}{\partial \rho},$$

de la relación entre los comportamientos de  $H$  y  $A$  con respecto a  $\rho$ , especificada mediante la ecuación mencionada, se infiere que una definición adecuada del concepto de presión en términos de la hamiltoniana específica, es

$$p = \rho^2 \frac{\partial H}{\partial \rho}. \quad 8.9$$

Se adopta entonces esta expresión como la definición de presión en el formalismo hamiltoniano

## 8.2 LA ECUACION DE BERNOULLI PARA UN FLUIDO NO VISCOSO.

En esta sección se presenta una aplicación de la ecuación de balance de energía generalizada obtenida en (7.23) (véase el final del capítulo 7) y de algunos de los conceptos establecidos en la sección anterior.

Tomando en cuenta la relación (8.3) entre las cantidades  $\mathcal{E}$  y  $H$  y de la definición de derivada hidrodinámica  $D$  expresada en la igualdad (7.15), resulta

$$\begin{aligned} D\mathcal{E} &= \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \mathcal{E} \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \\ &= \frac{d(\rho H)}{dt} + \rho H \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \\ &= \rho \frac{dH}{dt} + H \left( \dot{\rho} + \rho \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \right) \\ &= \rho \frac{dH}{dt}, \end{aligned}$$

de manera que, empleando la tercera igualdad (8.7), tenemos que la ecuación (7.23) se puede escribir en la forma

$$\rho \frac{dH}{dt} = - \frac{\partial(pv^i)}{\partial x^i} + \rho \frac{\partial H}{\partial t} \quad 8.10$$

Ahora, del hecho de que

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{p}{\rho} \right] = \frac{1}{\rho} \left[ \dot{p} + \rho \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \right],$$

al desarrollar la divergencia que aparece en el segundo miembro de (8.10), se llega a que

$$\frac{\partial(pv^i)}{\partial x^i} = \rho \frac{d}{dt} \left[ \frac{p}{\rho} \right] - \frac{\partial p}{\partial t},$$

de manera que dicha expresión queda como

$$\rho \frac{dH}{dt} = - \rho \frac{d}{dt} \left[ \frac{p}{\rho} \right] + \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial H}{\partial t},$$

o bien, sumando a ambos miembros de esta igualdad el término  $\rho d(p/\rho)/dt$  y dividiendo todo por  $\rho$ , como

$$\frac{d}{dt} \left[ H + \frac{p}{\rho} \right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} \quad 8.11$$

Si se adopta la lagrangiana específica para el fluido perfecto dada en (6.30), de las ecuaciones (8.2) y (8.11) es inmediata la igualdad

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} v^2 + h(\rho, \eta) + \phi(x) \right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t}, \quad 8.12$$

donde hemos empleado la definición de entalpía específica  $h = e + p/\rho$ , establecida en la expresión (4.24') del capítulo 4.

Consideremos ahora el fluido perfecto en estado estacionario. En tal caso se espera que  $H$  represente una constante de movimiento; es decir, que no dependa explícitamente del tiempo. Lógicamente, la presión exhibirá el mismo comportamiento respecto a  $t$ . Entonces, el segundo miembro de (8.12) es nulo y nos queda

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} v^2 + h + \phi \right] = 0. \quad 8.13$$

Evidentemente, esto conduce a la expresión

$$\frac{1}{2} v^2 + h + \phi = \text{const.} \quad 8.14$$

que representa la ecuación de Bernoulli para el fluido perfecto (véase la igualdad (5.21) del capítulo 5 y la discusión que aparece al final del capítulo 6 en referencia a las ecuaciones (5.19) y (6.34)).



**8.3 DEDUCCION DE LAS ECUACIONES DE HAMILTON  
PARA UN FLUIDO NO VISCOZO,  
A PARTIR DE UN PRINCIPIO VARIACIONAL.**

Como se vio en la primera sección de este capítulo, las ecuaciones de Hamilton para fluidos no viscosos, pueden ser obtenidas a partir de la misma definición de hamiltoniana específica y de la comparación entre ciertos elementos diferenciales. El objetivo en esta sección es llegar nuevamente al conjunto de ecuaciones (8.8), pero a partir de un principio variacional. Para ello será empleado el principio tipo-Hamilton establecido en la sección 6.2 del sexto capítulo.

Considérese la igualdad (6.12) que define a la funcional de acción  $W$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \mathcal{L} \, dV dt, \quad 8.15$$

donde  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, v, \rho, s, t)$ , es la función de densidad lagrangiana propuesta en (6.10). Dado que  $\mathcal{L} = \rho A$ , podemos poner (8.15) en la forma

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{A}} \rho \Lambda \, dV dt . \quad 8.16$$

Por otra parte, de la definición de momento generalizado dada en la igualdad (8.1) y de la relación entre  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{X}$ , o entre  $H$  y  $\Lambda$ , vemos que el segundo miembro de (8.16) puede expresarse como

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{A}} \rho (p_i v^i - H) dV dt$$

de manera que si adoptamos el principio tipo-Hamilton propuesto en la sección 6.2,  $\delta W = 0$ , y recurrimos a la igualdad (1.27), de (8.16) resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{A}} \rho \delta (p_i v^i - H) dV dt = 0 , \quad 8.17$$

Esta expresión sería la correspondiente al *principio de Hamilton modificado*, del formalismo Hamiltoniano de la dinámica de partículas (véase por ejemplo el cap. 7 de la *Mecánica Clásica* de Goldstein, ed. Aguilar, Madrid 1977).

Tomando en cuenta las expresiones (6.27) y (8.4) y el hecho de que las variaciones son únicamente de carácter geométrico, y que por lo tanto  $\delta t = 0$ , al efectuar la variación indicada en el integrando de (8.17), se llega a que

$$\begin{aligned} \delta(p_i v^i - H) &= p_i \delta v^i + v^i \delta p_i - \delta H \\ &= p^i \delta v^i + v^i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial x^i} \delta x^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial \rho} \delta \rho . \end{aligned}$$

Otra consecuencia del hecho de que las variaciones sean de carácter geométrico, es que los operadores  $\delta$  y  $d/dt$ , conmutan, de manera que la igualdad anterior se puede poner como

$$\delta(p_i v^i - H) = p_i \frac{d}{dt}(\delta x^i) + v^i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial x^i} \delta x^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i + \rho \frac{\partial H}{\partial \rho} \frac{\partial(\delta x^i)}{\partial x^i} ,$$

donde hemos sustituido  $\delta \rho$  por  $-\rho \operatorname{div} \delta x$  (véase la igualdad (1.26) del primer capítulo). De esta manera, (8.17) toma la forma

$$\int_{t_0}^{t_2} \int_{\mathcal{M}} \rho \left( p_i \frac{d}{dt}(\delta x^i) + v^i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial x^i} \delta x^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i + \rho \frac{\partial H}{\partial \rho} \frac{\partial(\delta x^i)}{\partial x^i} \right) dV dt = 0 \quad 8.18$$

Cabe hacer aquí una serie de observaciones respecto a los desarrollos que serán involucrados en seguida, relativos a esta última igualdad, y los equivalentes realizados dentro del formalismo lagrangiano, que se inician a partir de la igualdad (6.21) del capítulo 6.

A diferencia de aquella ocasión en la cual se tomaron como variables independientes en el proceso de variación, solamente a las componentes  $x^i$  de los desplazamientos, aquí propondremos como tales variables, tanto a éstas como a las componentes  $p_i$  de los

momentos. La independencia entre las variaciones de las  $x^i$  y de las  $p_i$ , que será tan esencial en los desarrollos subsiguientes, constituye la diferencia fundamental entre las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana.

Como se observó en los procedimientos empleados con la igualdad (6.21), siempre se consideró a las componentes  $v^i$  del campo de velocidades, como variables dependientes, estrechamente ligadas con las  $x^i$  por las expresiones (5.13) y (5.14). En la deducción de las ecuaciones de balance de momento generalizado obtenidas en (6.28), se expresó a las variaciones  $\delta v^i$  en función de las variaciones independientes  $\delta x^i$ , mediante una integración por partes, lo que nos condujo a una segunda derivada de  $\Lambda$  y, consecuentemente, a un conjunto de ecuaciones de movimiento de segundo orden. Por tanto, para determinar por completo el estado de movimiento del fluido, mediante la aplicación de las ecuaciones mencionadas, será necesario especificar valores iniciales tanto de las  $x^i$  como de las  $v^i$ .

En seguida veremos como a partir de la igualdad (3.13) es posible llegar a las ecuaciones de movimiento obtenidas en (6.9) que son ecuaciones diferenciales de primer orden, y que surgen de considerar como variaciones independientes a las  $\delta x^i$  y a las  $\delta p_i$ . De esta forma, en lo subsiguiente las  $p_i$  serán consideradas como variables independientes, con la misma categoría que las componentes  $x^i$  de los desplazamientos, y relacionadas con éstas y con el tiempo sólo a través de las propias ecuaciones de movimiento. Ni las  $x^i$  ni las  $p_i$  pueden considerarse como un conjunto fundamental de

variables.

De la relación  $dV = JdV_0$ , donde  $V_0$  es el volumen ocupado por el fluido en el instante inicial y  $J$  es el determinante jacobiano que aparece en (1.22), tenemos para el primer término del integrando de la igualdad (8.18)

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \rho p_i \frac{d}{dt}(\delta x^i) dV dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \rho p_i \frac{d}{dt}(\delta x^i) J dV_0 dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \frac{d}{dt}(\rho J p_i \delta x^i) dV_0 dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \frac{d}{dt}(\rho J p_i) \delta x^i dV_0 dt. \end{aligned} \quad (8.19)$$

La primera de estas dos últimas integrales, es nula, como se puede ver al aplicar la segunda condición de frontera (8.14)

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \frac{d}{dt}(\rho J p_i \delta x^i) dV_0 dt = \int_{\mathcal{R}} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(\rho J p_i \delta x^i) dt \right] dV_0 = 0.$$

Para la última integral (8.19), se obtiene

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \frac{d}{dt}(\rho J p_i) \delta x^i dV_0 dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \dot{\rho} p_i \delta x^i dV_0 dt.$$

Este resultado es inmediato si se recurre a la expresión (1.23) para  $J$ , ya que

$$\frac{d}{dt}(\rho p_i) = \rho \dot{p}_i + p_i \frac{d}{dt}(\rho) = \rho \dot{p}_i.$$

Por lo tanto, de (8.19) se llega a que

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_R \rho \dot{p}_i \frac{d}{dt}(\delta x^i) dV dt = - \int_{t_0}^{t_1} \int_R \rho \dot{p}_i \delta x^i dV dt. \quad 8.20$$

Para el último término que aparece en el integrando de la igualdad (8.18), tenemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_R \rho^2 \frac{\partial H}{\partial \rho} \frac{\partial(\delta x^i)}{\partial x^i} dV dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_R \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \frac{\partial H}{\partial \rho} \delta x^i \right) dV dt \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \int_R \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \frac{\partial H}{\partial \rho} \right) \delta x^i dV dt. \quad 8.21 \end{aligned}$$

Nuevamente como consecuencia de las condiciones de frontera establecidas en (6.14); particularmente la tercera de ellas, tenemos que la primera de estas dos últimas igualdades se anula. Esto resulta inmediato si se aplica el teorema de la divergencia a dicha integral

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_R \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \frac{\partial H}{\partial \rho} \delta x^i \right) dV dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Sigma_{t_0}} \rho^2 \frac{\partial H}{\partial \rho} \delta x^i da^i dt = 0,$$

siendo  $da^i$ , la  $i$ -ésima componente del elemento diferencial de área de la superficie que limita a la región  $R$ . De esta manera, (8.21)

queda como

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \rho^2 \frac{\partial H}{\partial \rho} \frac{\partial (\delta x^i)}{\partial x^i} dV dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_R \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \frac{\partial H}{\partial \rho} \right) \delta x^i dV dt . \quad 8.22$$

Sustituyendo en la igualdad (8.18) los resultados obtenidos en (8.20) y (8.22), y reagrupando por separado los términos en  $\delta x^i$  y  $\delta p_i$ , resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \rho \left\{ \left[ -\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial x^i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \frac{\partial H}{\partial \rho} \right) \right] \delta x^i + \left[ x^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] \delta p_i \right\} dV dt = 0 \quad 8.23$$

Como se dijo con anterioridad, las variaciones en las componentes del desplazamiento y del momento, son independientes, por lo que si tomamos en cuenta que tanto el volumen de integración como el intervalo de tiempo involucrado, son arbitrarios, la igualdad (8.23) será válida toda vez que se satisfagan las relaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x^i} &= -\dot{p}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \frac{\partial H}{\partial \rho} \right) , \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= x^i \end{aligned} \quad 8.24$$

Si se recurre a la definición de presión establecida en (8.9), y se sustituye en la primera de las igualdades anteriores, estas quedan en la forma

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt}$$

8.25

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

expresiones que coinciden con las obtenidas en (8.8).

Se debe observar que el conjunto de ecuaciones (8.25) que representa a las ecuaciones de Hamilton para un fluido no viscoso, contiene el doble de ecuaciones que el conjunto de ecuaciones de Lagrange encontradas para el mismo sistema en (6.28). Sin embargo, las primeras son ecuaciones diferenciales de primer orden, mientras que las otras son de segundo orden. Solo duplicando el número de variables independientes es posible obtener ecuaciones de movimiento de primer orden.



#### 8.4 CONCLUSIONES.

Hasta la fecha, el estudio de los fluidos no-newtonianos, se hace en términos de las llamadas *ecuaciones constitutivas*, que son relaciones tensoriales, lineales o no lineales entre el tensor de razón de deformación y sus derivadas, y el tensor de esfuerzos. Dichas relaciones son en general complicadas y en gran parte empíricas; las bases teóricas que las sustentan, no son, del todo formales.

Refiriéndonos a la Mecánica Analítica en general, sabemos que a través de ella se comprende la Dinámica en forma fundamental. Dentro de esta rama de la física, los conceptos de fuerza, energía y del mismo movimiento, adquieren una descripción de carácter general. En particular, el formalismo hamiltoniano, permite la resolución de problemas que resultaría prácticamente imposible resolver aplicando los recursos de la Mecánica de Newton; la Teoría de Perturbaciones, los métodos iterativos y la Teoría de Hamilton-Jacobi son ejemplos de éstos. Además, solo a través de un formalismo como el mencionado es posible fundamentar teorías de la Física Moderna como la Mecánica Cuántica, las Teorías del Campo y la Relatividad.

Bajo estos antecedentes, sería entonces deseable disponer de un formalismo hamiltoniano para la hidrodinámica, en el mismo sentido

en que lo disponen las otras teorías. Este trabajo representa una muy pequeña aportación a los inicios del establecimiento de dicho formalismo. Sus proyecciones apuntan en tres direcciones fundamentalmente:

1. La resolución de las ecuaciones de movimiento de los fluidos.
2. El entendimiento cabal del fenómeno hidrodinámico.
3. La posibilidad de atacar problemas relacionados con fluidos cuánticos o relativistas. Cabe aclarar que nada de esto está hecho hasta el momento.

Llegando a ecuaciones de balance de masa, momento y energía, en este trabajo se ha mostrado como es posible establecer una teoría unificada de los fluidos, a partir de una formulación lagrangiana y de un principio variacional.

Respecto al tratamiento que usualmente se aplica a este tipo de sistemas, el enfoque propuesto aquí ofrece la ventaja de requerir únicamente la proposición de una función escalar: la densidad lagrangiana en la que está contenida toda la información dinámica sobre el sistema y que al ser sustituida en las ecuaciones diferenciales pertinentes, nos proporciona las ecuaciones de movimiento del fluido.

Finalmente, bajo el enfoque propuesto aquí, el formalismo hamiltoniano aparece como una extensión natural de la teoría. Esto es debido, principalmente, a que la función de densidad hamiltoniana definida en la expresión (7.18) y que da origen a la hamil-

toniana específica propuesta en (8.2), exhibe la misma estructura que la función de Hamilton para un sistema de partículas, y por lo tanto, sugiere un tratamiento semejante al que se aplica a dicha función.

## REFERENCIAS

1. Arfken G. **Mathematical Methods for Physicists**, Academic Press Cap 17, (1970).
2. Bliss G.A. **Lectures on the Calculus of Variations**, The University of Chicago Press, (1930).
3. Callen H. B. **Thermodynamics**, John Wiley, Caps. 1,2,3,15,16, (1980).
4. Chorlton F. **Tratado de Dinámica**, Logos C. Ed. Caps, 3,4,6,10, 11, (1976).
5. Courant R - Hilbert D. **Methods of Mathematical Physics**, Vol. I, Interscience Publishers, Cap. 4, (1953).
6. Elsgoltz L. **Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional**, ECP, Cap. 6, (1975).
7. Goldstein H. **Mecánica Clásica**, Aguilar, Caps. 2,7,11, (1977).
8. Halliday D. - Resnick R. **Física**, CECSA Caps. 17,18. (1974).
9. Herivel J. W. Proc. Cambridge Phil. Soc. 51 (1955) 344.
10. Ingard U - Kraushaar W. **Introducción al Estudio de la Mecánica Materia y ondas**, Reverté, Caps. 14,16,17,19,20 (1973).
11. Klingenberg W. L. **Geometría Diferencial**, Alhambra (1978).
12. Kolmogorov A. - Fomin S. **Elementos de la Teoría de Funciones y del análisis Funcional**, Mir., cap. 6, (1975).
13. Landau L. D. - Lifshitz E. M. **Mecánica**, Reverté, Caps. 1,2,7. (1978).
14. Landau L. D. - Lifshitz E. M. **Fluid Mechanics**, Pergamon Press Cap. 1, (1979).
15. Marion J. B. **Classical Dynamics**, Academic Press, Caps. 2,6,7. (1970).

16. Maslov V. P. **Métodos Operacionales**, Mir. Caps. 1,2,6. (1982).
17. Pendfield P. *Phys. Rev.* 9,6. (1966) 1468.
18. Rudin W. **Principles of Mathematical Analysis**, Mc. Graw Hill, Caps. 10,11. (1976).
19. Saletan E. J. - Crozer A. H. **Theoretical Mechanics**, John Wiley, Caps. 2,6,8. (1971).
20. Serrin J. **Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics**, *Handbook of Physics*, Vol. III, pp. 128-133; 144-149, Springer, New York, (1959).
21. Sokolnikoff I. S. **Análisis Tensorial**, LIMUSA (1976).
22. Sudarshan E. C. G. - Mukunda N. **Classical Dynamics: A Modern Perspective**, John Wiley, (1974).
23. Ter Haar D. **Elements of Hamiltonian Mechanics**, Pergamon Press (1971).
24. Viniegra H. F. - Salcido G. A - Fierros A. *Rev. IMP*, XVI, 1, (1984), 39.