

30  
25



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

## “DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS POR MEDIO DE INTEGRACION NUMERICA”

### T E S I S

Que para obtener el Título de:

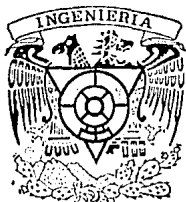
**INGENIERO EN COMPUTACION**

Presenta:

**Enrique Sánchez Fuentes**

Director de Tesis:

Ing. Francisco Rodríguez Ramírez



MEXICO, D.F. 1988.

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## PROLOGO

El presente trabajo esta enfocado a la discretización de sistemas continuos, lineales e invariantes con el tiempo, partiendo de la función de transferencia del sistema a discretizar.

Para ello se diseñó y desarrolló un sistema computarizado que permite discretizar sistemas continuos, que cumplen las restricciones señaladas, utilizando las aproximaciones de integración numérica: Rectangular hacia adelante, Rectangular hacia atrás y Trapezoidal, con la finalidad de analizar el comportamiento del sistema en tiempo discreto obtenido. Es decir, ver como se comportan los sistemas discretizados partiendo de sistemas en tiempo continuo bien conocidos, y establecer con base en una comparación, cual de las aproximaciones es la que mejor representa al sistema en tiempo continuo.

El trabajo se organizó de la siguiente forma: En el Capitulo I, se plantea el problema de discretización a partir de sistemas en tiempo continuo; en el Capitulo II se proponen soluciones a dicho problema. El Capitulo III trata específicamente de métodos de integración numérica y se proponen procedimientos generales. Finalmente, en el Capitulo IV se hace una descripción detallada del sistema de cómputo desarrollado, basado en los procedimientos generales deducidos en el Capitulo anterior.

## I N D I C E

### DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS POR MEDIO DE INTEGRACION NUMERICA

#### C A P I T U L O I

##### EL PROBLEMA DE DISCRETIZACION A PARTIR DE SISTEMAS EN TIEMPO CONTINUO

Sección	Página
1. Introducción.	1
2. Notación y formulación del problema de discretización a partir de sistemas continuos.	2
3. Formalización del problema de discretización de sistemas continuos.	4
4. Comentarios y conclusiones.	5

#### C A P I T U L O II

##### SOLUCIONES AL PROBLEMA DE DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

1. Introducción.	6
2. Métodos de integración numérica.	6
2.1 Métodos complementarios.	22
3. Comentarios y conclusiones.	28

## CAPITULO III

### GENERALIZACION DE METODOS DE INTEGRACION NUMERICA

Sección	Página
1. Introducción.	30
2. Aproximación Rectangular hacia adelante.	31
3. Aproximación Rectangular hacia atrás.	37
4. Aproximación Trapezoidal.	43
5. Conclusiones.	56

## CAPITULO IV

### SISTEMA COMPUTARIZADO PARA LA DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS MEDIANTE TECNICAS DE INTEGRACION NUMERICA

1. Introducción.	57
2. Requerimientos del sistema.	58
2.1 Objetivo.	58
2.2 Facilidades.	58
2.3 Funcionamiento.	59
2.4 Recursos de Hardware y Software.	60
3. DISEÑO.	61
3.1 Definición de salidas.	62

Sección	Página
3.2 Estructura de procesos.	66
3.2.1 Diagrama general del sistema.	66
3.2.2 Diagrama conceptual del sistema.	68
3.2.3 Diagrama descendente del sistema.	71
3.3 Definición de entradas.	75
3.3.1 Diagrama relacional de pantallas.	76
3.3.2 Definición de pantallas.	78
3.3.3 Criterios de validación.	98
4. Diseño detallado.	103
4.1. Descripción de módulos.	104
4.2. Descripción de variables.	133
5. Implementación.	137
5.1. Estrategia de pruebas del sistema computarizado.	137
5.2 Manual de operación.	139
5.3 Resultados obtenidos mediante el sistema.	159
6. Conclusiones.	168
CONCLUSIONES FINALES	170
ANEXO A. Estructuras de control empleadas para la descripción de módulos.	172
ANEXO B. Ejemplos resueltos manualmente mediante - método tradicional.	175
ANEXO C. Listado del programa fuente.	189
BIBLIOGRAFIA.	215

## CAPITULO I

### EL PROBLEMA DE DISCRETIZACION A PARTIR DE SISTEMAS EN TIEMPO CONTINUO.

#### 1.1 INTRODUCCION.

Existen numerosas aplicaciones prácticas en Ingeniería Eléctrica en las cuales la caracterización de un fenómeno físico se representa por medio de ecuaciones diferenciales. Es decir, muchos sistemas dinámicos ya sean mecánicos, eléctricos, térmicos, hidráulicos, etc., pueden ser caracterizados por ecuaciones diferenciales que se obtienen utilizando las leyes físicas que los gobiernan, pudiéndose de esta manera obtener su respuesta en el tiempo a una entrada o excitación externa, si se resuelven dichas ecuaciones.

La representación matemática del comportamiento dinámico de un sistema, se denomina modelo matemático. Su elaboración es el primer paso, y de los más importantes, en el análisis de dichos sistemas.

Típicamente, el modelo es constituido de manera tal que se incluyen dos tipos de variables; la de entrada y la de salida. La variable de entrada tiene influencia directa en el comportamiento de la variable de salida, con lo que esta relación de causa-efecto constituye el comportamiento dinámico del sistema.

Una vez obtenido el modelo matemático de un sistema, se pueden emplear técnicas analíticas y computacionales con propósitos de análisis y síntesis.

## 1.2 NOTACION Y FORMULACION DEL PROBLEMA DE DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS.

En general el análisis y diseño de sistemas lineales, puede llevarse a cabo por diferentes técnicas:

- a) En el dominio del tiempo
- b) En el dominio de la frecuencia

Las técnicas en el dominio del tiempo involucran la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales (para sistemas en tiempo continuo) y ecuaciones en diferencias lineales (para sistemas en tiempo discreto).

Por otra parte, las técnicas en el dominio de la frecuencia están basadas principalmente en la resolución de ecuaciones algebraicas lineales, estas ecuaciones se obtienen a partir de modelos matemáticos; en el caso de sistemas en tiempo continuo se emplea la Transformada de Laplace y en sistemas en tiempo discreto se emplea la Transformada Z.

Existe además otra técnica que resulta ser un poco más general, ésta es, mediante variables de estado (enfoque moderno de la



Teoría del Control), estas ecuaciones pueden ser resueltas ya sea en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia. Sin embargo, para los fines que se persiguen en este trabajo, se analizará el comportamiento de sistemas en tiempo discreto a partir de representaciones de sistemas en tiempo continuo. Esto último se llevará a cabo partiendo de la representación más general que existe para sistemas lineales e invariantes con el tiempo: La Función de Transferencia.

Un sistema en tiempo continuo, lineal e invariante con el tiempo, puede ser representado mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$b_0 y^n - b_1 y^{n-1} + \dots + b_{n-1} \dot{y} + b_n y = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} \dot{x} + a_m x \quad (1.2.1)$$

$n > m$  para que el sistema sea físicamente realizable.

Donde  $y$  es la salida producida por el sistema y  $x$  es la entrada aplicada a éste.

La función transferencia de este sistema, se obtiene aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación (1.2.1), bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero (no existe energía almacenada en el sistema).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \dots + b_{n-1} \dot{y} + b_n y\} &= \\ \mathcal{L}\{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} \dot{x} + a_m x\} & \\ Y(S) (b_0 S^n + b_1 S^{n-1} + \dots + b_{n-1} S + b_n) &= \\ U(S) (a_0 S^m + a_1 S^{m-1} + \dots + a_{m-1} S + a_m) & \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$H(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{(a_0 S^m + a_1 S^{m-1} + \dots + a_{m-1} S + a_m)}{(b_0 S^n + b_1 S^{n-1} + \dots + b_{n-1} S + b_n)} \quad (1.2.2)$$

y la relación entre la salida  $Y(S)$  y la entrada  $U(S)$  recibe el nombre de Función Transferencia que se representa como:

$$H(S) = \frac{Y(S)}{U(S)}$$

La función transferencia en este caso es una expresión que relaciona la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada, en términos de los parámetros del sistema, y es la representación del sistema independientemente de la función de entrada que se le este aplicando. Usando este concepto se puede representar la dinámica de un sistema por ecuaciones algebraicas en función de la variable  $S$ .

### 1.3 FORMALIZACIÓN DEL PROBLEMA DE DISCRETIZACIÓN DE SISTEMAS CONTINUOS

En el presente trabajo se diseñará y desarrollará un sistema computarizado para discretizar funciones de transferencia en tiempo continuo, con la finalidad de analizar el comportamiento del sistema en tiempo discreto obtenido. Es decir, ver como se comportan los sistemas discretizados partiendo de sistemas en tiempo continuo bien conocidos, y establecer con base en una comparación, cual de las aproximaciones, que se verán más adelante, es la que mejor representa al sistema en tiempo continuo.

Existen muchas formas posibles de representar un sistema en tiempo continuo por un modelo discreto, a partir de su función transferencia.

En general se usan las siguientes tres técnicas:

- A. Respuesta pulso invariante (muestreador-retén)
- B. Integración numérica
- C. Mapeo de polos y ceros

#### 1.4 COMENTARIOS Y CONCLUSIONES.

En las secciones anteriores se establecieron restricciones a los sistemas en tiempo continuo a discretizar, las cuales son que el sistema sea lineal e invariante con el tiempo, y que la técnica a emplear se base en la función transferencia del sistema. Los métodos que se emplean generalmente en esta situación son: Respuesta pulso invariante (muestreador-retén); Integración numérica y Mapeo de polos y ceros.

Este trabajo se dedicará a las técnicas de integración numérica las cuales están basadas en las siguientes aproximaciones:

- Rectangular hacia adelante
- Rectangular hacia atrás
- Trapezoidal

Para ello se diseñará y desarrollará un sistema computarizado, en el que se discreticen los sistemas en tiempo continuo que cumplan las restricciones señaladas, con la finalidad de poder establecer comparaciones entre el comportamiento de sistemas en tiempo continuo y sistemas en tiempo discreto.

## CAPITULO II

### SOLUCIONES AL PROBLEMA DE DISCRETIZACION DE SISTEMAS EN TIEMPO CONTINUO.

#### II.1 INTRODUCCION.

Existen diversos métodos de discretización de sistemas en tiempo continuo, de los cuales los mas comunes son:

- Integración numérica
- Mapeo de polos y ceros
- Muestreador-retén

En este capítulo se presentan éstos, siendo de mayor interés para el presente trabajo las técnicas de integración numérica.

#### II.2 METODOS DE INTEGRACION NUMERICA.

##### INTEGRAL DEFINIDA

Considere la función continua  $f(x)$ , y sea  $y = f(x)$  la ecuación de la curva AB. Sea CD, figura (2.2.1), una ordenada fija,



si designamos  $\int f(x) dx$  por  $f(x) + C$  resulta:

$$u = f(x) + C \quad (2.2.2)$$

para determinar  $C$ , observamos que  $u = 0$  cuando  $x = a$ .

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.2.2) obtenemos

$$0 = f(a) + C$$

de donde  $C = -f(a)$

luego (2.2.2) se convierte en:

$$u = f(x) - f(a) \quad (2.2.3)$$

El área CEFD es el valor de  $u$  en la ecuación (2.2.3), cuando  $x = b$ , luego tenemos:

área CEFD =  $f(b) - f(a)$

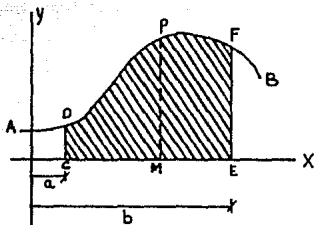


FIGURA (2.2.2)

Teorema, la diferencia de los valores de  $\int y dx$  para  $x = a$  y  $x = b$  da el área limitada, por la curva cuya ordenada es  $y$ , el eje de las  $X$  y las ordenadas que corresponden a  $x = a$  y  $x = b$  que se representa como:

$$\int_a^b y dx \text{ o bien } \int_a^b f(x) d(x) \quad (2.2.4)$$

Puesto que la ecuación (2.2.4) tiene siempre un valor definido, o puesto que los límites  $a$  y  $b$  definen un valor determinado, se llama integral definida.

$$\text{Si } \int f'(x) dx = f(x) + C$$

entonces

$$\int_a^b f'(x) = [f(x) + C]_a^b = [f(b) + C] - [f(a) + C]$$

o sea

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

desapareciendo la constante de integración.

Por consiguiente podemos definir:

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{o bien} \quad \int_a^b y dx$$

como la medida numérica del área limitada por la curva  $y = f(x)$ , el eje de las  $X$  y las ordenadas de la curva en  $x = a$  y  $x = b$ . Esta definición presupone que esas líneas limitan un área; es decir que la curva no tome valores infinitos y no atraviese el eje de las  $X$ , y que  $a$  y  $b$  sean ambos finitos.

\*.-  $f(x)$  es continua y uniforme en todo el intervalo  $[a, b]$ .

## INTEGRACION APROXIMADA

Cuando la integración de  $\int_b^a f(x) dx$  es difícil o no se puede efectuar en términos de funciones elementales, su valor se puede determinar de manera aproximada.

Como ya se vió, el valor numérico exacto de  $\int_b^a f(x) dx$  es la medida del área de la superficie limitada por la curva  $y = f(x)$ , el eje de las  $X$  y las ordenadas  $x = a$  y  $x = b$ . El valor de esa área puede determinarse en forma aproximada, ver figura (2.2.1), sumando las áreas formadas por:

- a) Rectángulos  $MNP$
- b) Rectángulos  $MNS$
- c) Trapecios formados  $MNP$  y una línea recta dirigida hacia  $P$ .

Puede notarse que en las aproximaciones rectangulares existe una pequeña área que falta (a), o sobra (b) por evaluarse, o bien en el caso de la aproximación por el trapecio (c), se evalúa el promedio de los rectángulos (a) y (b).

Sin perder generalidad, se obtendrán las reglas de transformación para estas aproximaciones a partir de una función Transferencia en especial.

Considérese una función Transferencia continua de la forma:

$$H(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{a}{s + a} \quad (2.2.5)$$

que es equivalente a la ecuación diferencial

$$\dot{y} + ay = au$$



lo cual se demuestra aplicando Transformada de la Place en ambos miembros:

$$Y(S) \frac{1}{S} + \frac{a}{S^2} Y(S) = \frac{a}{S^2} U(S)$$

agrupando  $Y(S) \left[ \frac{1}{S} + \frac{a}{S^2} \right] = \frac{a}{S^2} U(S)$

$$Y(S) \left[ \frac{1}{S} \left( 1 + \frac{a}{S} \right) \right] = \frac{a}{S^2} U(S)$$

multiplicando ambos miembros por S:

$$Y(S) \left[ 1 + \frac{a}{S} \right] = \frac{a}{S} U(S)$$

$$Y(S) \left[ \frac{S+a}{S} \right] = \frac{a}{S} U(S)$$

despejando  $\frac{Y(S)}{U(S)}$

$$\frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{a}{S+a}$$

obtenemos

$$\frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{a}{S+a}$$

que es idéntica a la ecuación (2.2.5) l.q.q.d.

A fin de obtener la función del tiempo  $u(t)$ , en este caso, integraremos la ecuación (2.2.5) en el intervalo de tiempo  $[0, t]$ ,

esto es:

$$y(t) = \int_0^t [-a y(\tau) + a u(\tau)] d\tau \quad (2.2.6)$$

Si  $t = kT$  la ecuación (2.2.6) se puede escribir como:

$$y(kT) = \int_0^{kT} [-a y(\tau) + a u(\tau)] d\tau \quad (2.2.7)$$

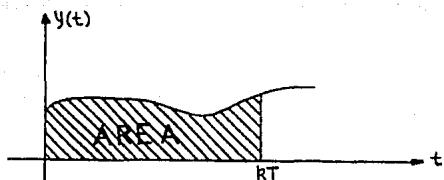


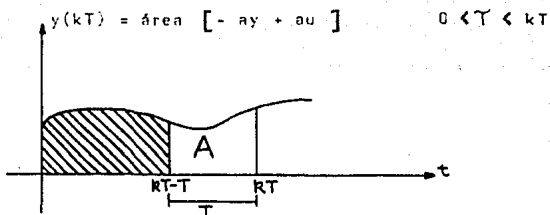
FIGURA (2.2.3)

De la figura se puede observar que  $y(kT)$ , representa el área bajo la curva  $y(t)$  en el intervalo desde 0 hasta  $kT$ .

Con base en las propiedades de las integrales se obtiene:

$$y(kT) = \int_0^{kT-T} [-a y(\tau) + a u(\tau)] d\tau + \int_{kT-T}^{kT} [-a y(\tau) + a u(\tau)] d\tau \quad (2.2.8)$$

Considérese además, que  $y(kT)$  es en forma gráfica de la siguiente manera



donde se observa que si  $y(kT)$  es el área de 0 hasta  $kT$ ,  $y(kT-T)$  es el área desde 0 hasta  $kT-T$ .

La región sombreada es representada por la primera integral de la ecuación (2.2.8) y esta es:

$$\int_0^{kT-T} [- ay(\tau) + au(\tau)] d\tau = y(kT-T) \quad (2.2.9)$$

y el área  $A$  esta representada por la segunda integral de la ecuación (2.2.8). Por lo tanto la expresión para  $y(kT)$  se escribe de la siguiente forma:

$$y(kT) = y(kT-T) + A \quad (2.2.10)$$

donde  $A$  es el área de  $[- ay + au]$  en el intervalo  $[kT-T, kT]$ . Para evaluar el área  $A$ , ver figura (2.2.4), se pueden emplear distintas aproximaciones:

- a) Rectangular hacia adelante.
- b) Rectangular hacia atrás.
- c) Trapezoidal.

a) APROXIMACION RECTANGULAR HACIA ADELANTE.

En este caso aproximamos el área por medio del rectángulo que se ve adelante de  $kT-T$ , y tomamos la amplitud del rectángulo como el valor del integrando en  $kT-T$ . El ancho del rectángulo es  $T$ .

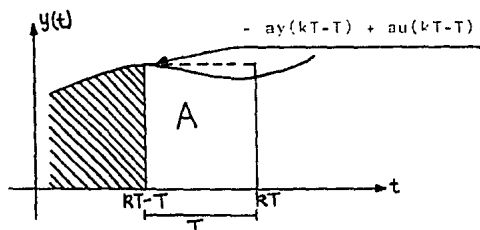


FIGURA (2.2.5)

En la figura (2.2.5) se observa, como se apuntó al inicio de la sección, que sobra una pequeña área en esta aproximación, ya que se está evaluando el área del rectángulo.

Tenemos entonces (de  $kT-T$  a  $kT$ )

$$A = T [- ay(kT-T) + au(kT-T)]$$

Por lo tanto la expresión para evaluar  $y(kT)$  será:

$$y(kT) = y(kT-T) + T [- ay(kT-T) + au(kT-T)] \quad (2.2.11)$$

o bien:

$$y(kT) = [1 - aT] y(kT-T) + aT u(kT-T) \quad (2.2.12)$$

aplicando Transformada Z en ambos miembros de la ecuación (2.2.12), se obtiene:

$$Y(Z) = [1 - aT] Z^{-1} Y(Z) + aTZ^{-1} U(Z) \quad (2.2.13)$$

o bien:

$$Y(Z) [1 - Z^{-1} + Z^{-1} aT] = aTZ^{-1} U(Z) \quad (2.2.14)$$

por lo que la función Transferencia en tiempo discreto es entonces

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{U(Z)} = \frac{aTZ^{-1}}{1 - (1 - aT)Z^{-1}} = \frac{aT}{Z + aT - 1} \quad (2.2.15)$$

$H(Z) = \frac{a}{Z - 1 + aT}$	Aproximación rectangular hacia adelante.	(2.2.16)
-------------------------------	---	----------

Comparando la ecuación (2.2.16) con la (2.2.5), de la cual se partió, se puede deducir que:

$$S \approx \frac{Z - 1}{T} \quad (2.2.17)$$

la cual se conoce como la regla de transformación.

b) APROXIMACION RECTANGULAR HACIA ATRAS.

Si ahora aproximamos el área por medio del rectángulo que se ve atrás de  $kT$ , es decir de  $kT$  hacia  $kT - T$ , tenemos:

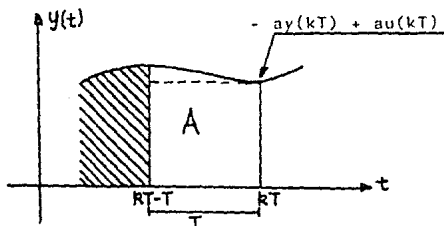


FIGURA (2.2.6)

En la figura se muestra, que en esta ocasión falta área por considerar, es decir no se está calculando una pequeña área en esta aproximación, ya que como en el caso anterior, el área que se calcula es la del rectángulo.

En este caso (de  $kT$  a  $kT-T$ )

$$A = T [- ay(kT) + au(kT)] \quad (2.2.18)$$

por lo tanto, la expresión para evaluar  $v(kT)$  será:

$$y(kT) = y(kT-T) + T [- ay(kT) + au(kT)] \quad (2.2.19)$$

o bien

$$y(kT) (1 + aT) = y(kT-T) + aTu(kT) \quad (2.2.20)$$

Aplicando Transformada Z en ambos miembros de la ecuación (2.2.20) se obtiene:

$$Y(Z) (1 + aT) = Z^{-1} Y(Z) + aTU(Z) \quad (2.2.21)$$

o bien

$$Y(Z) (1 + aT - Z^{-1}) = aTU(Z) \quad (2.2.22)$$

por lo que la función transferencia en tiempo discreto es:

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{U(Z)} = \frac{aT}{1 - Z^{-1} + aT} = \frac{aTZ}{Z - 1 + aTZ} \quad (2.2.23)$$

$H(Z) = \frac{a}{Z-1 + aTZ}$	Aproximación rectangular hacia atrás	(2.2.24)
------------------------------	---	----------

Nuevamente, si comparamos la ecuación (2.2.24) con la (2.2.5), de la cuál se partió, se puede deducir que en este caso:

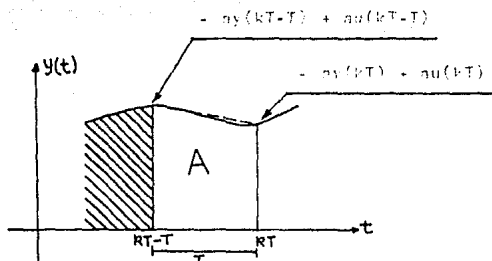
$$S \approx \frac{Z - 1}{TZ} \quad (2.2.25)$$

la cuál se conoce como la regla de Transformación.

### c) APROXIMACION TRAPEZOIDAL.

En este caso, se aproxima el área por medio del Trapezoide formado por el promedio de los rectángulos vistos anteriormente.

valor del integrando en  $kT-T$ . El ancho del rectángulo es  $T$ .



Tenemos (de  $kT-T$  a  $kT$ )

$$A = \frac{T}{2} [- ay(kT-T) + au(kT-T) - ay(kT) + au(kT)] \quad (2.2.26)$$

por lo tanto la expresión para evaluar  $y(kT)$  será:

$$y(kT) = y(kT-T) - \frac{T}{2} \left[ -ay(kT-T) + au(kT-T) - ay(kT) + au(kT) \right] \quad (2.2.27)$$

o bien

$$y(kT) = y(kT-T) \left[ 1 - \frac{T}{2} a \right] - \frac{T}{2} ay(kT) + \frac{T}{2} au(kT-T) + \frac{T}{2} au(kT) \quad (2.2.28)$$

Aplicando Transformada Z en ambos miembros de la ecuación (2.2.27) se obtiene:

$$Y(Z) = \left[ 1 - \frac{T}{2} a \right] Z^{-1} Y(Z) - \frac{T}{2} a Y(Z) + \frac{T}{2} a Z^{-1} U(Z) + \frac{T}{2} a U(Z) \quad (2.2.29)$$

o bien

$$Y(Z) \left[ 1 + \left( \frac{Ta}{2} - 1 \right) Z^{-1} + \frac{Ta}{2} \right] = \frac{T}{2} a (Z^{-1} + 1) U(Z) \quad (2.2.30)$$



por lo que la función transferencia en tiempo discreto es:

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{U(Z)} = \frac{\frac{T_a}{2} (Z-1)}{1 + \frac{T_a}{2} + \left( \frac{T_a}{2} - 1 \right) Z^{-1}}$$

$$H(Z) = \frac{\frac{T_a}{2} (Z+1)}{Z \left( 1 + \frac{T_a}{2} \right) + \frac{T_a}{2} - 1}$$

$$H(Z) = \frac{T_a (Z+1)}{Z(2 + T_a) + T_a - 2} = \frac{T_a (Z+1)}{2(Z-1) + T_a (Z+1)} \quad (2.2.31)$$

$$H(Z) = \frac{\frac{T_a}{2} (Z-1)}{\frac{T_a}{2} (Z+1) + a} \quad \text{Aproximación Trapezoidal} \quad (2.2.32)$$

Si comparamos la ecuación (2.2.32) con la (2.2.5) se puede deducir que:

$$s \approx \frac{2}{T} \frac{(Z-1)}{(Z+1)} \quad (2.2.33)$$

La cual se conoce como la regla de transformación.

A continuación se presenta una tabla conteniendo un resumen de los resultados encontrados:

Función Transferencia en tiempo continuo	Método de aproximación	Función Transferencia en tiempo discreto
$\frac{a}{s + a}$	Rectangular hacia adelante	$H_D = \frac{a}{(Z-1)T} + a$
$\frac{a}{s + a}$	Rectangular hacia atrás	$H_A = \frac{a}{(Z-1)TZ} + a$
$\frac{a}{s + a}$	Trapezoidal	$H_T = \frac{a}{2T} \left( \frac{Z-1}{Z+1} \right) + a$

TABLA (2.2.1) Métodos de aproximación y su función Transferencia.

De la tabla anterior y, como se había mencionado en las ecuaciones (2.2.17), (2.2.25) y (2.2.33), el valor que adquiere la variable  $S$  para cada uno de las técnicas de aproximación aparece en la siguiente tabla.

Método de aproximación	Regla de transformación
Rectangular hacia adelante	$S \sim \frac{Z-1}{T}$
Rectangular hacia atrás	$S \sim \frac{Z-1}{TZ}$
Trapezoidal	$S \sim \frac{2(Z-1)}{T(Z+1)}$

TABLA (2.2.2) Valor de la variable  $S$  para cada aproximación.

El mapeo de plano  $S$  a plano  $Z$  para las tres aproximaciones de integración numérica vistas, se muestra en las siguientes figuras:

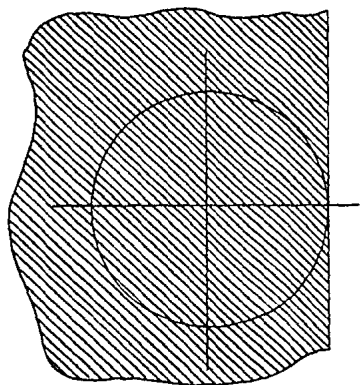


FIGURA (2.2.8) Aproximación rectangular hacia adelante.

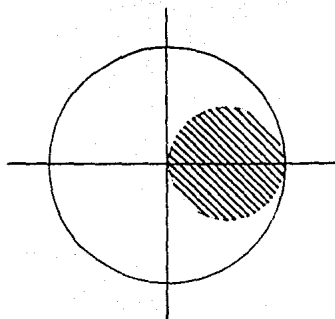


FIGURA (2.2.9) Aproximación rectangular hacia atrás.

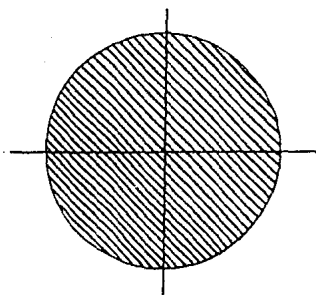


FIGURA (2.2.10) Aproximación trapezoidal o transformación binomial

## 11.2.1 METODOS COMPLEMENTARIOS

Otros métodos de discretización de sistemas continuos son:

- a) Mapeo de polos y ceros.
- b) Muestreador-retén.

los cuales se presentan a continuación.

### 11.2.1.a Mapeo de polos y ceros.

Este es un método, muy simple pero efectivo para obtener funciones Transferencia en tiempo discreto a partir de funciones Transferencia continuas. El método consiste básicamente, en emplear la transformación  $Z = e^{ST}$ . En este caso se emplea la misma transformación, tanto para polos y ceros que la función Transferencia continua contenga. Para lograr la discretización de  $H(S)$  se siguen los pasos o etapas subsecuentes:

1. Todos los polos de  $H(S)$  se mapean con la transformación  $Z = e^{ST}$ . Si  $H(S)$  tiene un polo en  $S = -a$ , entonces  $H_p(z)$  tiene un polo en  $e^{-aT}$ .
2. Todos los ceros finitos son también mapeados con  $Z = e^{ST}$ . Si  $H(S)$  tiene un cero en  $S = -b$ , entonces  $H_p(z)$  tiene un cero en  $e^{-bT}$ .
3. Todos los ceros de  $H(S)$  en  $S = -\infty$  se mapean en  $H_p(z)$  en  $z = -1$  entonces  $e^{-St_0} \Rightarrow z^{-t_0}$ .

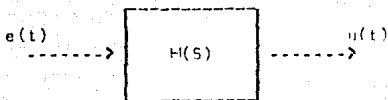
4. La ganancia de  $H(S)$  cuando  $S = 0$

$$H(S) \Big|_{S=0} = H_{pc}(Z) \Big|_{Z=1}$$

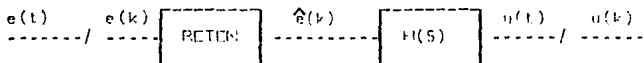
$$\text{Vqr. } H(S) = \frac{n}{S+a} \quad \begin{array}{l} \text{polo en } S = -a \\ \text{cero en } S = -\infty \end{array}$$

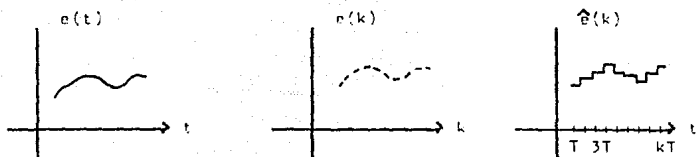
$$H_{pc}(Z) = \frac{(Z+1)(1 - e^{-aT})}{2(Z - e^{-aT})}$$

#### 11.2.1.b. MUESTREADOR-RETEN.



Para obtener la forma discreta de  $H(S)$ , se emplea el siguiente diagrama:





$$e(t) = e(0) \eta(t) - e(0) \eta(t-T) + e(T) \eta(t-T) - e(T) \eta(t-2T) + \\ e(2T) \eta(t-2T) - e(2T) \eta(t-3T) + e(3T) \eta(t-3T) - \\ e(3T) \eta(t-4T) + \dots$$

$$U(s) = H(s) \mathcal{L}\{e(t)\}$$

$$U(s) = \frac{H(s) e(0)}{s} - \frac{H(s) e(0)}{s} e^{-Ts} + \frac{H(s) e(T)}{s} e^{-Ts} \\ - \frac{H(s) e(T)}{s} e^{-2Ts} + \frac{H(s) e(2T)}{s} e^{-2Ts} - \frac{H(s) e(2T)}{s} e^{-3Ts} \\ + \frac{H(s) e(3T)}{s} e^{-3Ts} - \frac{H(s) e(3T)}{s} e^{-4Ts} + \dots$$

$$U(s) = \frac{H(s)}{s} (1 - e^{-Ts}) e(0) + \frac{H(s)}{s} e^{-Ts} (1 - e^{-Ts}) e(T) + \\ + \frac{H(s)}{s} e^{-2Ts} (1 - e^{-Ts}) e(2T) + \frac{H(s)}{s} e^{-3Ts} (1 - e^{-Ts}) e(3T) \\ + \dots$$

Aplicando Transformada Z

$$\begin{aligned}
 U(Z) &= \mathcal{Z}\left\{\frac{H(S)}{S}\right\} (1-Z^{-1}) e^{(0)} + \mathcal{Z}\left\{\frac{H(S)}{S}\right\} Z^{-1} (1-Z^{-1}) e^{(T)} \\
 &+ \mathcal{Z}\left\{\frac{H(S)}{S}\right\} Z^{-2} (1-Z^{-1}) e^{(2T)} + \mathcal{Z}\left\{\frac{H(S)}{S}\right\} Z^{-3} (1-Z^{-1}) e^{(3T)} \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

o bien:

$$\begin{aligned}
 U(Z) &= \mathcal{Z}\left\{\frac{H(S)}{S}\right\} (1-Z^{-1}) [e^{(0)} + e^{(T)}Z^{-1} + e^{(2T)}Z^{-2} + \\
 &e^{(3T)}Z^{-3} + \dots]
 \end{aligned}$$

$$U(Z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{H(S)}{S}\right\} (1-Z^{-1}) \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{(kT)} Z^{-k}\right]}_{E(Z)}$$

entonces:

$$\frac{U(Z)}{E(Z)} = H(Z) = (1-Z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{\frac{H(S)}{S}\right\} = \frac{Z-1}{Z} \mathcal{Z}\left\{\frac{H(S)}{S}\right\}$$

Ejemplo.

Para la función de Transferencia  $H(S) = \frac{a}{S+n}$  obtener  $H(Z)$ .

**Procedimiento:**

1. Obtener las fracciones parciales.

$$\frac{a}{S(S+a)} = \frac{A}{S} + \frac{B}{S+a}$$

$$A = 1 ; B = -1$$

$$\frac{a}{S(S+a)} = \frac{1}{S} - \frac{1}{S+a}$$

2. Obtener los modos naturales.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{a}{S(S+a)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{S} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{S+a} \right\} = U_{-1}(t) - e^{-at}$$

3. Hacer  $t = kT$ .

$$f(kT) = U_{-1}(kT) - e^{-akT}$$

4. Obtener la Transformada Z de los modos naturales --  
cuando  $t = kT$ .

$$\begin{aligned} F(Z) &= \mathcal{Z} \left\{ \frac{H(S)}{S} \right\} = \frac{1}{1 - Z^{-1}} - \frac{1}{1 - aZ^{-1}} e^{-aT} \\ &= \frac{Z}{Z - 1} - \frac{Z}{Z - e^{-aT}} \end{aligned}$$



5. Aplicar la ecuación  $H(Z) = \frac{Z-1}{Z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{H(S)}{S} \right\}$

$$H(Z) = \frac{Z-1}{Z} \left[ \frac{Z}{Z-1} - \frac{Z}{Z-e^{-aT}} \right]$$

$$= 1 - \frac{Z-1}{Z-e^{-aT}}$$

$$= \frac{Z - e^{-aT} - Z + 1}{Z - e^{-aT}}$$

$$H(Z) = \frac{1 - e^{-aT}}{Z - e^{-aT}}$$

### 11.3 COMENTARIOS Y CONCLUSIONES.

Cada una de las aproximaciones dadas en la tabla (2.2.2), como se mostró, puede ser vista como un mapeo desde el plano S al plano Z. Por ejemplo, si el eje  $S = j\omega$  es la frontera entre los polos de sistemas estables y polos de sistemas inestables, es de interés saber como el eje  $j\omega$  es mapeado por las tres aproximaciones, y dónde la mitad izquierda (estable) del plano S aparece en el plano Z. Para este propósito debemos resolver las relaciones de la tabla (2.2.2) para Z en términos de S. Encontramos:

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad Z &= 1 + TS && \text{Rectangular hacia adelante.} \\
 \text{ii)} \quad Z &= \frac{1}{1 - TS} && \text{Rectangular hacia atrás.} \\
 \text{iii)} \quad Z &= \frac{1 + \frac{TS}{2}}{1 - \frac{TS}{2}} && \text{Trapezoidal.}
 \end{aligned}$$

Si  $S = j\omega$  en estas ecuaciones, obtenemos las fronteras de las regiones matizadas en el plano Z en las figuras (2.2.8), (2.2.9) y (2.2.10) para cada caso. Para mostrar que la aproximación rectangular hacia atrás, resulta un círculo,  $\frac{1}{2}$  es sumado y restado para producir:

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{1}{2} + \left[ \frac{1}{1 - TS} - \frac{1}{2} \right] \\
 Z &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1 + TS}{1 - TS}
 \end{aligned}$$

ahora se ve que con  $S = j\omega$ , la magnitud de  $Z = \frac{1}{2}$  es constante:

$\left[ Z = \frac{1}{2} \right]$  y la curva es un círculo como el dibujado en la figura (2.2.9).

Como el círculo unitario es la frontera de estabilidad en el plano  $Z$ , es obvio de la figura (2.2.8), que la aproximación Rectangular hacia adelante podría causar que un sistema continuo estable, sea mapeado dentro de un sistema discreto inestable.

Es especialmente interesante notar que la aproximación trapezoidal, mapea la región estable del plano  $S$  exactamente dentro de la región estable del plano  $Z$ , ya que el eje  $j\omega$  del plano  $S$  es llenado dentro de la longitud  $2\pi$  del círculo unitario, aunque, obviamente se presenta distorsión en el mapeo a pesar de la congruencia de las regiones de estabilidad, ver figura (2.2.10).

## CAPITULO III

### GENERALIZACION DE METODOS DE INTEGRACION NUMERICA.

#### III.1 INTRODUCCION.

En este capítulo se propone la generalización de las siguientes técnicas de aproximación numérica:

- Rectangular hacia adelante.
- Rectangular hacia atrás.
- Trapezoidal.

Para este propósito, se evalúa la ecuación (1.2.2) con los valores de la variable  $S$  de cada aproximación, según la tabla (2.2.2.), encontrándose la ecuación en diferencias generalizada correspondiente.

### 11.2 APROXIMACION RECTANGULAR HACIA ADELANTE.

Considérese la ecuación (1.2.2)

$$H(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{(a_0 S^m + a_1 S^{m-1} + \dots + a_{m-1} S + a_m)}{(b_0 S^n + b_1 S^{n-1} + \dots + b_{n-1} S + b_n)} \quad (1.2.2)$$

Sustituyendo  $S = \frac{Z-1}{T}$  que corresponde a esta aproximación,

según tabla (2.2.2), tenemos:

$$H(Z) = \frac{a_0 \left(\frac{Z-1}{T}\right)^m + a_1 \left(\frac{Z-1}{T}\right)^{m-1} + a_2 \left(\frac{Z-1}{T}\right)^{m-2} + \dots + a_{m-1} \left(\frac{Z-1}{T}\right) + a_m}{b_0 \left(\frac{Z-1}{T}\right)^n + b_1 \left(\frac{Z-1}{T}\right)^{n-1} + b_2 \left(\frac{Z-1}{T}\right)^{n-2} + \dots + b_{n-1} \left(\frac{Z-1}{T}\right) + b_n}$$

$$H(Z) = \frac{a_0 (Z-1)^m + a_1 (Z-1)^{m-1} T + a_2 (Z-1)^{m-2} T^2 + \dots + a_{m-1} (Z-1) T^{m-1} + a_m T^m}{b_0 (Z-1)^n + b_1 (Z-1)^{n-1} T + b_2 (Z-1)^{n-2} T^2 + \dots + b_{n-1} (Z-1) T^{n-1} + b_n T^n}$$

Suponiendo  $n > m$

$$H(Z) = \frac{T^{n-m} [a_0 (Z-1)^m + a_1 (Z-1)^{m-1} T + a_2 (Z-1)^{m-2} T^2 + \dots + a_{m-1} (Z-1) T^{m-1} + a_m T^m]}{[b_0 (Z-1)^n + b_1 (Z-1)^{n-1} T + b_2 (Z-1)^{n-2} T^2 + \dots + b_{n-1} (Z-1) T^{n-1} + b_n T^n]}$$

que se puede escribir como:

$$H(Z) = \frac{T^{n-m} \sum_{r=0}^m a_r T^r (Z-1)^{m-r}}{\sum_{k=0}^n b_k T^k (Z-1)^{n-k}} \quad (3.2.1)$$

pero:

$$(Z-1)^{m-r} = \sum_{i=0}^{m-r} \left( \frac{(m-r)!}{i! [(m-r)-i]!} \right) Z^{(m-r)-i} (-1)^i \quad (3.2.2)$$

similamente:

$$(Z-1)^{n-k} = \sum_{j=0}^{n-k} \left( \frac{(n-k)!}{j! [(n-k)-j]!} \right) Z^{(n-k)-j} (-1)^j \quad (3.2.3)$$

sustituyendo las ecuaciones (3.2.2) y (3.2.3.) en (3.2.1) tenemos:

$$H(Z) = \frac{T^{n-m} \sum_{r=0}^m a_r T^r \sum_{i=0}^{m-r} \left( \frac{(m-r)!}{i! [(m-r)-i]!} \right) Z^{(m-r)-i} (-1)^i}{\sum_{k=0}^n b_k T^k \sum_{j=0}^{n-k} \left( \frac{(n-k)!}{j! [(n-k)-j]!} \right) Z^{(n-k)-j} (-1)^j}$$

pero como  $H(Z) = \frac{Y(Z)}{U(Z)}$

sustituyendo y despejando, encontramos:

$$Y(Z) \left[ \sum_{k=0}^n b_k T^k \sum_{j=0}^{n-k} \left( \frac{(n-k)!}{j! [(n-k)-j]!} \right) Z^{(n-k)-j} (-1)^j \right] =$$

$$U(Z) \left[ T^{n-m} \sum_{r=0}^m a_r T^r \sum_{i=0}^{m-r} \left( \frac{(m-r)!}{i! [(m-r)-i]!} \right) Z^{(m-r)-i} (-1)^i \right] \quad (3.2.4)$$

Si sustituimos en la ecuación (3.2.4) por ejemplo:  $n=5$  ;  $m=4$  tenemos:

$$\begin{aligned}
 Y(Z) & [b_0 T^0 \left[ \binom{5!}{0!(5-0)!} Z^5 - \binom{5!}{1!(5-1)!} Z^4 + \binom{5!}{2!(5-2)!} Z^3 - \binom{5!}{3!(5-3)!} Z^2 + \binom{5!}{4!(5-4)!} Z - \binom{5!}{5!(5-5)!} \right] + \\
 & b_1 T^1 \left[ \binom{4!}{0!(4-0)!} Z^4 - \binom{4!}{1!(4-1)!} Z^3 + \binom{4!}{2!(4-2)!} Z^2 - \binom{4!}{3!(4-3)!} Z + \binom{4!}{4!(4-4)!} \right] + \\
 & b_2 T^2 \left[ \binom{3!}{0!(3-0)!} Z^3 - \binom{3!}{1!(3-1)!} Z^2 + \binom{3!}{2!(3-2)!} Z - \binom{3!}{3!(3-3)!} \right] + \\
 & b_3 T^3 \left[ \binom{2!}{0!(2-0)!} Z^2 - \binom{2!}{1!(2-1)!} Z + \binom{2!}{2!(2-2)!} \right] + \\
 & b_4 T^4 \left[ \binom{1!}{0!(1-0)!} Z - \binom{1!}{1!(1-1)!} \right] + \\
 & b_5 T^5 \left[ \binom{0!}{0!(0-0)!} \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (LZ) T [a_0 T^0 \left[ \binom{4!}{0!(4-0)!} Z^4 - \binom{4!}{1!(4-1)!} Z^3 + \binom{4!}{2!(4-2)!} Z^2 - \binom{4!}{3!(4-3)!} Z + \binom{4!}{4!(4-4)!} \right] + \\
 a_1 T^1 \left[ \binom{3!}{0!(3-0)!} Z^3 - \binom{3!}{1!(3-1)!} Z^2 + \binom{3!}{2!(3-2)!} Z - \binom{3!}{3!(3-3)!} \right] + \\
 a_2 T^2 \left[ \binom{2!}{0!(2-0)!} Z^2 - \binom{2!}{1!(2-1)!} Z + \binom{2!}{2!(2-2)!} \right] + \\
 a_3 T^3 \left[ \binom{1!}{0!(1-0)!} Z - \binom{1!}{1!(1-1)!} \right] + \\
 a_4 T^4 \left[ \binom{0!}{0!(0-0)!} \right]
 \end{aligned}$$

Resolviendo los factoriales queda:

$$\begin{aligned}
 Y(Z) & [ (b_0 T^0) Z^5 - (5b_0 T^0) Z^4 + (10b_0 T^0) Z^3 - (10b_0 T^0) Z^2 - (5b_0 T^0) Z + (b_0 T^0) + \\
 & (b_1 T^1) Z^4 - (4b_1 T^1) Z^3 + (6b_1 T^1) Z^2 - (4b_1 T^1) Z + (b_1 T^1) + \\
 & (b_2 T^2) Z^3 - (3b_2 T^2) Z^2 + (3b_2 T^2) Z - (b_2 T^2) + \\
 & (b_3 T^3) Z^2 - (2b_3 T^3) Z + (b_3 T^3) + \\
 & (b_4 T^4) Z - (b_4 T^4) + \\
 & (b_5 T^5) ] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U(Z) T & [ (a_0 T^0) Z^4 - (4a_0 T^0) Z^3 + (6a_0 T^0) Z^2 - (4a_0 T^0) Z - (a_0 T^0) + \\
 & (a_1 T^1) Z^3 - (3a_1 T^1) Z^2 + (3a_1 T^1) Z - (a_1 T^1) + \\
 & (a_2 T^2) Z^2 - (2a_2 T^2) Z + (a_2 T^2) + \\
 & (a_3 T^3) Z - (a_3 T^3) + \\
 & (a_4 T^4) ]
 \end{aligned}$$

Sumando términos semejantes:

$$\begin{aligned}
 Y(Z) & [ (b_0 T^0) Z^5 + (-5b_0 T^0 + b_1 T^1) Z^4 + (10b_0 T^0 - 4b_1 T^1 + 3b_2 T^2 + b_3 T^3) Z^3 + \\
 & (10b_0 T^0 + 6b_1 T^1 - 3b_2 T^2 + b_3 T^3) Z^2 + (-5b_0 T^0 + b_1 T^1 - b_2 T^2 + b_3 T^3 - b_4 T^4 + b_5 T^5) ] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U(Z) T & [ (a_0 T^0) Z^4 + (-4a_0 T^0 + a_1 T^1) Z^3 + (-6a_0 T^0 - 3a_1 T^1 + a_2 T^2) Z^2 + (-4a_0 T^0 + 3a_1 T^1 - 2a_2 T^2 + a_3 T^3) Z + \\
 & (a_0 T^0 - a_1 T^1 + a_2 T^2 - a_3 T^3 + a_4 T^4) ] \quad (3.2.5)
 \end{aligned}$$



Como se observa, se puede formar un arreglo matricial para los coeficientes de ambos miembros de la ecuación (3.2.5), donde la posición de las columnas nos da el orden del exponente, desde  $n$  hasta cero en el primer miembro, y desde  $m$  hasta cero en el segundo miembro. Lo anterior queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} b_0 T^0 & b_1 T^1 & b_2 T^2 & b_3 T^3 & b_4 T^4 & b_5 T^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^5 \\ Z^4 \\ Z^3 \\ Z^2 \\ Z^1 \\ Z^0 \end{bmatrix} =$$

$$T \begin{bmatrix} a_0 T^0 & a_1 T^1 & a_2 T^2 & a_3 T^3 & a_4 T^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^4 \\ Z^3 \\ Z^2 \\ Z^1 \\ Z^0 \end{bmatrix} =$$

Como los valores de  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ ;  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$  y  $T$  son constantes, los productos y sumas de los mismos pueden expresarse finalmente así:

$$Y(Z) [C_1 Z^5 + C_2 Z^4 + C_3 Z^3 + C_4 Z^2 + C_5 Z^1 + C_6] = U(Z) [D_1 Z^4 + D_2 Z^3 + D_3 Z^2 + D_4 Z^1 + D_5]$$

dividiendo ambos miembros entre  $Z^5$  tenemos:

$$Y(Z) [C_1 + C_2 Z^{-1} + C_3 Z^{-2} + C_4 Z^{-3} + C_5 Z^{-4} + C_6 Z^{-5}] =$$

$$U(Z) [D_1 Z^{-1} + D_2 Z^{-2} + D_3 Z^{-3} + D_4 Z^{-4} + D_5 Z^{-5}]$$

despejando Y(Z)

$$Y(Z) = U(Z) \left[ \frac{D_1}{C_1} Z^{-1} + \frac{D_2}{C_1} Z^{-2} + \frac{D_3}{C_1} Z^{-3} + \frac{D_4}{C_1} Z^{-4} + \frac{D_5}{C_1} Z^{-5} \right] -$$

$$Y(Z) \left[ \frac{C_2}{C_1} Z^{-1} + \frac{C_3}{C_1} Z^{-2} + \frac{C_4}{C_1} Z^{-3} + \frac{C_5}{C_1} Z^{-4} + \frac{C_6}{C_1} Z^{-5} \right]$$

antitransformando:

$$y(k) = \frac{D_1}{C_1} u(k-1) + \frac{D_2}{C_1} u(k-2) + \frac{D_3}{C_1} u(k-3) + \frac{D_4}{C_1} u(k-4) + \frac{D_5}{C_1} u(k-5) -$$

$$\left[ \frac{C_2}{C_1} y(k-1) + \frac{C_3}{C_1} y(k-2) + \frac{C_4}{C_1} y(k-3) + \frac{C_5}{C_1} y(k-4) + \frac{C_6}{C_1} y(k-5) \right]$$

El desplazamiento en el tiempo del primer sumando en el segundo miembro, queda determinado por:

$$P = n-m$$

entonces, la expresión general de la ecuación en diferencias con

una aproximación rectangular hacia adelante  $S \sim \frac{Z-1}{T}$  sería:

$$y(k) = \frac{D_1}{C_1} u(k-p) + \frac{D_2}{C_1} u(k-(p+1)) + \frac{D_3}{C_1} u(k-(p+2)) + \dots + \frac{D_n}{C_1} u(k-n)$$

$$\left[ \frac{C_2}{C_1} y(k-1) + \frac{C_3}{C_1} y(k-2) + \frac{C_4}{C_1} y(k-3) + \dots + \frac{C_{n+1}}{C_1} y(k-n) \right] \quad (3.2.6)$$

### III.2 APROXIMACION RECTANGULAR HACIA ATRAS.

Considérese la ecuación (1.2.2)

$$H(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{(a_0 S^m + a_1 S^{m-1} + \dots + a_{m-1} S + a_m)}{(b_0 S^n + b_1 S^{n-1} + \dots + b_{n-1} S + b_n)} \quad (1.2.2)$$

Sustituyendo  $S = \frac{Z-1}{TZ}$  que corresponde a esta aproximación,

según tabla (2.2.2), tenemos:

$$H(Z) = \frac{a_0 \left(\frac{Z-1}{TZ}\right)^m + a_1 \left(\frac{Z-1}{TZ}\right)^{m-1} + a_2 \left(\frac{Z-1}{TZ}\right)^{m-2} + \dots + a_{m-1} \left(\frac{Z-1}{TZ}\right) + a_m}{b_0 \left(\frac{Z-1}{TZ}\right)^n + b_1 \left(\frac{Z-1}{TZ}\right)^{n-1} + b_2 \left(\frac{Z-1}{TZ}\right)^{n-2} + \dots + b_{n-1} \left(\frac{Z-1}{TZ}\right) + b_n}$$

$$H(Z) = \frac{a_0 (Z-1)^m + a_1 (Z-1)^{m-1} (TZ) + a_2 (Z-1)^{m-2} (TZ)^2 + \dots + a_{m-1} (Z-1) (TZ)^{m-1} + a_m (TZ)^m}{(TZ)^m} \\ \frac{b_0 (Z-1)^n + b_1 (Z-1)^{n-1} (TZ) + b_2 (Z-1)^{n-2} (TZ)^2 + \dots + b_{n-1} (Z-1) (TZ)^{n-1} + b_n (TZ)^n}{(TZ)^n}$$

Suponiendo  $n > m$

$$H(Z) = \frac{(TZ)^{n-m} [a_0 (Z-1)^m + a_1 (Z-1)^{m-1} (TZ) + a_2 (Z-1)^{m-2} (TZ)^2 + \dots + a_{m-1} (Z-1) (TZ)^{m-1} + a_m (TZ)^m]}{b_0 (Z-1)^n + b_1 (Z-1)^{n-1} (TZ) + b_2 (Z-1)^{n-2} (TZ)^2 + \dots + b_{n-1} (Z-1) (TZ)^{n-1} + b_n (TZ)^n}$$

que puede escribirse como:

$$H(Z) = \frac{(TZ)^{n-m} \sum_{r=0}^m a_r (Z-1)^{m-r} (TZ)^r}{\sum_{k=0}^n b_k (Z-1)^{n-k} (TZ)^k} \quad (3.3.1)$$

sustituyendo las ecuaciones (3.2.2) y (3.2.3) en (3.3.1) tenemos:

$$H(Z) = \frac{(TZ)^{n-m} \sum_{r=0}^m a_r (TZ)^r \sum_{i=0}^{m-r} \left( \frac{(m-r)!}{i! [(m-r)-i]!} \right) Z^{(m-r)-i} (-1)^i}{\sum_{k=0}^n b_k (TZ)^k \sum_{j=0}^{n-k} \left( \frac{(n-k)!}{j! [(n-k)-j]!} \right) Z^{(n-k)-j} (-1)^j}$$

pero como  $H(Z) = \frac{Y(Z)}{U(Z)}$

sustituyendo y despejando, encontramos:

$$Y(Z) \left[ \sum_{k=0}^n b_k (TZ)^k \sum_{j=0}^{n-k} \left( \frac{(n-k)!}{j! [(n-k)-j]!} \right) Z^{(n-k)-j} (-1)^j \right] =$$

$$U(Z) \left[ (TZ)^{n-m} \sum_{r=0}^m a_r (TZ)^r \sum_{i=0}^{m-r} \left( \frac{(m-r)!}{i! [(m-r)-i]!} \right) Z^{(m-r)-i} (-1)^i \right] \quad (3.3.2)$$

Si sustituimos en la ecuación (3.3.2) por ejemplo:  $n=5$ ;  $m=4$  tenemos:

$$\begin{aligned}
 Y(Z) & \left[ b_0(TZ)^0 \left[ \left( \frac{5!}{0!(5-0)!} \right) Z^5 - \left( \frac{5!}{1!(5-1)!} \right) Z^4 + \left( \frac{5!}{2!(5-2)!} \right) Z^3 - \left( \frac{5!}{3!(5-3)!} \right) Z^2 + \left( \frac{5!}{4!(5-4)!} \right) Z - \left( \frac{5!}{5!(5-5)!} \right) \right] + \right. \\
 & b_1(TZ)^1 \left[ \left( \frac{4!}{0!(4-0)!} \right) Z^4 - \left( \frac{4!}{1!(4-1)!} \right) Z^3 + \left( \frac{4!}{2!(4-2)!} \right) Z^2 - \left( \frac{4!}{3!(4-3)!} \right) Z + \left( \frac{4!}{4!(4-4)!} \right) \right] + \\
 & b_2(TZ)^2 \left[ \left( \frac{3!}{0!(3-0)!} \right) Z^3 - \left( \frac{3!}{1!(3-1)!} \right) Z^2 + \left( \frac{3!}{2!(3-2)!} \right) Z - \left( \frac{3!}{3!(3-3)!} \right) \right] + \\
 & b_3(TZ)^3 \left[ \left( \frac{2!}{0!(2-0)!} \right) Z^2 - \left( \frac{2!}{1!(2-1)!} \right) Z + \left( \frac{2!}{2!(2-2)!} \right) \right] + \\
 & b_4(TZ)^4 \left[ \left( \frac{1!}{0!(1-0)!} \right) Z - \left( \frac{1!}{1!(1-1)!} \right) \right] + \\
 & b_5(TZ)^5 \left[ \left( \frac{0!}{0!(0-0)!} \right) \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (LZ) & \left[ (TZ)^1 \left[ a_0(TZ)^0 \left[ \left( \frac{4!}{0!(4-0)!} \right) Z^4 - \left( \frac{4!}{1!(4-1)!} \right) Z^3 + \left( \frac{4!}{2!(4-2)!} \right) Z^2 - \left( \frac{4!}{3!(4-3)!} \right) Z + \left( \frac{4!}{4!(4-4)!} \right) \right] + \right. \\
 & a_1(TZ)^1 \left[ \left( \frac{3!}{0!(3-0)!} \right) Z^3 - \left( \frac{3!}{1!(3-1)!} \right) Z^2 + \left( \frac{3!}{2!(3-2)!} \right) Z - \left( \frac{3!}{3!(3-3)!} \right) \right] + \\
 & a_2(TZ)^2 \left[ \left( \frac{2!}{0!(2-0)!} \right) Z^2 - \left( \frac{2!}{1!(2-1)!} \right) Z + \left( \frac{2!}{2!(2-2)!} \right) \right] + \\
 & a_3(TZ)^3 \left[ \left( \frac{1!}{0!(1-0)!} \right) Z - \left( \frac{1!}{1!(1-1)!} \right) \right] + \\
 & a_4(TZ)^4 \left[ \left( \frac{0!}{0!(0-0)!} \right) \right] \left. \right]
 \end{aligned}$$

Resolviendo los factoriales queda:

$$\begin{aligned}
 Y(Z) & \left[ (b_0 T^0) Z^5 - (5b_0 T^0) Z^4 + (10b_0 T^0) Z^3 - (10b_0 T^0) Z^2 + (5b_0 T^0) Z - (b_0 T^0) + \right. \\
 & (b_1 T^1) Z^5 - (4b_1 T^1) Z^4 + (6b_1 T^1) Z^3 - (4b_1 T^1) Z^2 + (b_1 T^1) Z + \\
 & (b_2 T^2) Z^5 - (3b_2 T^2) Z^4 + (3b_2 T^2) Z^3 - (b_2 T^2) Z^2 + \\
 & (b_3 T^3) Z^5 - (2b_3 T^3) Z^4 + (b_3 T^3) Z^3 + \\
 & (b_4 T^4) Z^5 - (b_4 T^4) Z^4 + \\
 & \left. (b_5 T^5) Z^5 \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U(Z) & \left[ (a_0 T^1) Z^5 - (4a_0 T^1) Z^4 + (6a_0 T^1) Z^3 - (4a_0 T^1) Z^2 + (a_0 T^1) Z + \right. \\
 & (a_1 T^2) Z^5 - (3a_1 T^2) Z^4 + (3a_1 T^2) Z^3 - (a_1 T^2) Z^2 + \\
 & (a_2 T^3) Z^5 - (2a_2 T^3) Z^4 + (a_2 T^3) Z^3 + \\
 & (a_3 T^4) Z^5 - (a_3 T^4) Z^4 + \\
 & \left. (a_4 T^5) Z^5 \right] \tag{3.3.3}
 \end{aligned}$$

Sumando términos semejantes:

$$\begin{aligned}
 Y(Z) & \left[ (b_0 T^0 + b_1 T^1 + b_2 T^2 + b_3 T^3 + b_4 T^4 + b_5 T^5) Z^5 - (5b_0 T^0 + 4b_1 T^1 + 3b_2 T^2 + 2b_3 T^3 + b_4 T^4) Z^4 + \right. \\
 & \left. (10b_0 T^0 + 6b_1 T^1 + 3b_2 T^2 + b_3 T^3) Z^3 - (10b_0 T^0 + 4b_1 T^1 + b_2 T^2) Z^2 + (5b_0 T^0 + b_1 T^1) Z - b_0 T^0 \right] = \\
 U(Z) & \left[ (a_0 T^1 + a_1 T^2 + a_2 T^3 + a_3 T^4 + a_4 T^5) Z^5 - (4a_0 T^1 + 3a_1 T^2 + 2a_2 T^3 + a_3 T^4) Z^4 + \right. \\
 & \left. (6a_0 T^1 + 3a_1 T^2 + a_2 T^3) Z^3 - (4a_0 T^1 + a_1 T^2) Z^2 + (a_0 T^1) Z \right] \tag{3.3.4}
 \end{aligned}$$

como se observa, se puede formar un arreglo matricial para los coeficientes de ambos miembros de la ecuación (3.3.3) donde la posición de las columnas nos da el orden del exponente, desde n hasta cero en el primer miembro y desde m hasta cero en el segundo miembro. Lo que queda de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} b_0 T^0 & b_1 T^1 & b_2 T^2 & b_3 T^3 & b_4 T^4 & b_5 T^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^5 \\ Z^4 \\ Z^3 \\ Z^2 \\ Z^1 \\ Z^0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_0 T^1 & a_1 T^2 & a_2 T^3 & a_3 T^4 & a_4 T^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^5 \\ Z^4 \\ Z^3 \\ Z^2 \\ Z^1 \end{bmatrix}$$

Como los valores de  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ ;  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$  y  $T$  son constantes, los productos y sumas de los mismos pueden expresarse finalmente así:

$$Y(Z) [C_1 Z^5 + C_2 Z^4 + C_3 Z^3 + C_4 Z^2 + C_5 Z^1 + C_6] = U(Z) [D_1 Z^5 + D_2 Z^4 + D_3 Z^3 + D_4 Z^2 + D_5 Z]$$

dividiendo ambos miembros entre  $Z^5$  tenemos:

$$Y(Z) [C_1 + C_2 Z^{-1} + C_3 Z^{-2} + C_4 Z^{-3} + C_5 Z^{-4} + C_6 Z^{-5}] =$$

$$U(Z) [D_1 + D_2 Z^{-1} + D_3 Z^{-2} + D_4 Z^{-3} + D_5 Z^{-4}]$$

despejando  $Y(Z)$

$$Y(Z) = U(Z) \left[ \frac{D_1}{C_1} + \frac{D_2}{C_1} Z^{-1} + \frac{D_3}{C_1} Z^{-2} + \frac{D_4}{C_1} Z^{-3} + \frac{D_5}{C_1} Z^{-4} \right] -$$

$$Y(Z) \left[ \frac{C_2}{C_1} Z^{-1} + \frac{C_3}{C_1} Z^{-2} + \frac{C_4}{C_1} Z^{-3} + \frac{C_5}{C_1} Z^{-4} + \frac{C_6}{C_1} Z^{-5} \right]$$

antitransformando:

$$y(k) = \frac{D_1}{C_1} u(k) + \frac{D_2}{C_1} u(k-1) + \frac{D_3}{C_1} u(k-2) + \frac{D_4}{C_1} u(k-3) + \frac{D_5}{C_1} u(k-4) -$$

$$\left[ \frac{C_2}{C_1} y(k-1) + \frac{C_3}{C_1} y(k-2) + \frac{C_4}{C_1} y(k-3) + \frac{C_5}{C_1} y(k-4) + \frac{C_6}{C_1} y(k-5) \right]$$

El desplazamiento en el tiempo del primer sumando en el segundo miembro, queda determinado por:

$$P = n-m$$

entonces, la expresión general de la ecuación en diferencias con

una aproximación rectangular hacia atrás (  $S \sim \frac{Z-1}{Tz}$  ) sería:

$$y(k) = \frac{D_1}{C_1} u(k) + \frac{D_2}{C_1} u(k-p) + \frac{D_3}{C_1} u(k-(p+1)) + \dots + \frac{D_n}{C_1} u(k-n) -$$

$$\left[ \frac{C_2}{C_1} y(k-1) + \frac{C_3}{C_1} y(k-2) + \frac{C_4}{C_1} y(k-3) + \dots + \frac{C_{n+1}}{C_1} y(k-n) \right] \quad (3.3.5)$$



### III.4 APROXIMACION TRAPEZOIDAL.

Considérese la ecuación (1.2.2)

$$H(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{(a_0 S^m + a_1 S^{m-1} + \dots + a_{m-1} S + a_m)}{(b_0 S^n + b_1 S^{n-1} + \dots + b_{n-1} S + b_n)} \quad (1.2.2)$$

Sustituyendo  $S = \frac{2}{T} \frac{Z-1}{Z+1}$  que corresponde a esta aproximación,

según tabla (2.2.2), tenemos:

$$H(Z) = \frac{a_0 \left(\frac{2}{T} \frac{Z-1}{Z+1}\right)^m + a_1 \left(\frac{2}{T} \frac{Z-1}{Z+1}\right)^{m-1} + a_2 \left(\frac{2}{T} \frac{Z-1}{Z+1}\right)^{m-2} + \dots + a_{m-1} \left(\frac{2}{T} \frac{Z-1}{Z+1}\right) + a_m}{b_0 \left(\frac{2}{T} \frac{Z-1}{Z+1}\right)^n + b_1 \left(\frac{2}{T} \frac{Z-1}{Z+1}\right)^{n-1} + b_2 \left(\frac{2}{T} \frac{Z-1}{Z+1}\right)^{n-2} + \dots + b_{n-1} \left(\frac{2}{T} \frac{Z-1}{Z+1}\right) + b_n}$$

$$H(Z) = \frac{a_0 [2(Z-1)]^m + a_1 [2(Z-1)]^{m-1} [T(Z+1)] + a_2 [2(Z-1)]^{m-2} [T(Z+1)]^2 + \dots + a_{m-1} [2(Z-1)] [T(Z+1)]^{m-1} + a_m [T(Z+1)]^m}{[T(Z+1)]^m} \\ \frac{b_0 [2(Z-1)]^n + b_1 [2(Z-1)]^{n-1} [T(Z+1)] + b_2 [2(Z-1)]^{n-2} [T(Z+1)]^2 + \dots + b_{n-1} [2(Z-1)] [T(Z+1)]^{n-1} + b_n [T(Z+1)]^n}{[T(Z+1)]^n}$$

Suponiendo  $n > m$  y compactando:

$$H(Z) = \frac{[T(Z+1)]^{n-m} \sum_{r=0}^m a_r [2(Z-1)]^{m-r} [T(Z+1)]^r}{\sum_{k=0}^n b_k [2(Z-1)]^{n-k} [T(Z+1)]^k} \quad (3.4.1)$$

$$H(Z) = \frac{[T(Z+1)]^{n-m} \sum_{r=0}^m a_r T^r z^{n-r} (Z-1)^{n-r} (Z+1)^r}{\sum_{k=0}^n b_k T^k z^{n-k} (Z-1)^{n-k} (Z+1)^k} \quad (3.4.1)$$

Sustituyendo (3.2.2) y (3.2.7) en (3.4.1) tenemos:

$$H(Z) = \frac{[T(Z+1)]^{n-m} \sum_{r=0}^m a_r T^r z^{n-r} \sum_{k=0}^{m-r} \frac{(m-r)!}{k! [(m-r)-k]!} z^{(m-r)-k} (-1)^k \sum_{i=0}^r \frac{r!}{i! (r-i)!} z^{r-i}}{\sum_{k=0}^n b_k T^k z^{n-k} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{i! [(n-k)-i]!} z^{(n-k)-i} (-1)^i \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j! (k-j)!} z^{j-i}}$$

Pero como  $H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)}$

Sustituyendo y despejando encontramos:

$$Y(Z) \left[ \sum_{k=0}^n b_k T^k z^{n-k} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{i! [(n-k)-i]!} z^{(n-k)-i} (-1)^i \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j! (k-j)!} z^{j-i} \right] =$$

$$X(Z) \left[ [T(Z+1)]^{n-m} \sum_{r=0}^m a_r T^r z^{n-r} \sum_{k=0}^{m-r} \frac{(m-r)!}{k! [(m-r)-k]!} z^{(m-r)-k} (-1)^k \sum_{i=0}^r \frac{r!}{i! (r-i)!} z^{r-i} \right]$$

Si sustituimos en la ecuacion (3.4.2) por ejemplo:  $n=5$  ;  $m=4$  tenemos:

$$\begin{aligned}
 Y(Z) [ & b_0 T^0 2^5 [ \left( \frac{5!}{0!(5-0)!} \right) Z^5 \left[ \left( \frac{0!}{0!(0-0)!} \right) Z^0 \right] + \\
 & \left( \frac{5!}{1!(5-1)!} \right) Z^4 \left[ \left( \frac{0!}{0!(0-0)!} \right) Z^0 \right] + \\
 & \left( \frac{5!}{2!(5-2)!} \right) Z^3 \left[ \left( \frac{0!}{0!(0-0)!} \right) Z^0 \right] + \\
 & \left( \frac{5!}{3!(5-3)!} \right) Z^2 \left[ \left( \frac{0!}{0!(0-0)!} \right) Z^0 \right] + \\
 & \left( \frac{5!}{4!(5-4)!} \right) Z^1 \left[ \left( \frac{0!}{0!(0-0)!} \right) Z^0 \right] + \\
 & \left. \left( \frac{5!}{5!(5-5)!} \right) Z^0 \left[ \left( \frac{0!}{0!(0-0)!} \right) Z^0 \right] \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 T^1 2^4 [ & \left( \frac{4!}{0!(4-0)!} \right) Z^4 \left[ \left( \frac{1!}{0!(1-0)!} \right) Z^1 + \left( \frac{1!}{1!(1-1)!} \right) Z^0 \right] + \\
 & \left( \frac{4!}{1!(4-1)!} \right) Z^3 \left[ \left( \frac{1!}{0!(1-0)!} \right) Z^1 + \left( \frac{1!}{1!(1-1)!} \right) Z^0 \right] + \\
 & \left( \frac{4!}{2!(4-2)!} \right) Z^2 \left[ \left( \frac{1!}{0!(1-0)!} \right) Z^1 + \left( \frac{1!}{1!(1-1)!} \right) Z^0 \right] + \\
 & \left( \frac{4!}{3!(4-3)!} \right) Z^1 \left[ \left( \frac{1!}{0!(1-0)!} \right) Z^1 + \left( \frac{1!}{1!(1-1)!} \right) Z^0 \right] + \\
 & \left. \left( \frac{4!}{4!(4-4)!} \right) Z^0 \left[ \left( \frac{1!}{0!(1-0)!} \right) Z^1 + \left( \frac{1!}{1!(1-1)!} \right) Z^0 \right] \right] ,
 \end{aligned}$$

$$b_2 T^2 z^3 \left[ \left( \frac{3!}{0!(3-0)!} \right) z^3 \left[ \left( \frac{2!}{0!(2-0)!} \right) z^2 + \left( \frac{2!}{1!(2-1)!} \right) z^1 + \left( \frac{2!}{2!(2-2)!} \right) z^0 \right] + \right.$$

$$\left. \left( \frac{3!}{1!(3-1)!} \right) z^2 \left[ \left( \frac{2!}{0!(2-0)!} \right) z^2 + \left( \frac{2!}{1!(2-1)!} \right) z^1 + \left( \frac{2!}{2!(2-2)!} \right) z^0 \right] + \right.$$

$$\left. \left( \frac{3!}{2!(3-2)!} \right) z^1 \left[ \left( \frac{2!}{0!(2-0)!} \right) z^2 + \left( \frac{2!}{1!(2-1)!} \right) z^1 + \left( \frac{2!}{2!(2-2)!} \right) z^0 \right] + \right.$$

$$\left. \left( \frac{3!}{3!(3-3)!} \right) z^0 \left[ \left( \frac{2!}{0!(2-0)!} \right) z^2 + \left( \frac{2!}{1!(2-1)!} \right) z^1 + \left( \frac{2!}{2!(2-2)!} \right) z^0 \right] \right]$$

$$b_3 T^3 z^2 \left[ \left( \frac{2!}{0!(2-0)!} \right) z^2 \left[ \left( \frac{3!}{0!(3-0)!} \right) z^3 + \left( \frac{3!}{1!(3-1)!} \right) z^2 + \left( \frac{3!}{2!(3-2)!} \right) z^1 + \left( \frac{3!}{3!(3-3)!} \right) z^0 \right] + \right.$$

$$\left. \left( \frac{2!}{1!(2-1)!} \right) z^1 \left[ \left( \frac{3!}{0!(3-0)!} \right) z^3 + \left( \frac{3!}{1!(3-1)!} \right) z^2 + \left( \frac{3!}{2!(3-2)!} \right) z^1 + \left( \frac{3!}{3!(3-3)!} \right) z^0 \right] + \right.$$

$$\left. \left( \frac{2!}{2!(2-2)!} \right) z^0 \left[ \left( \frac{3!}{0!(3-0)!} \right) z^3 + \left( \frac{3!}{1!(3-1)!} \right) z^2 + \left( \frac{3!}{2!(3-2)!} \right) z^1 + \left( \frac{3!}{3!(3-3)!} \right) z^0 \right] \right]$$

$$b_4 T^4 z^1 \left[ \left( \frac{1!}{0!(1-0)!} \right) z^1 \left[ \left( \frac{4!}{0!(4-0)!} \right) z^4 + \left( \frac{4!}{1!(4-1)!} \right) z^3 + \left( \frac{4!}{2!(4-2)!} \right) z^2 + \left( \frac{4!}{3!(4-3)!} \right) z^1 + \left( \frac{4!}{4!(4-4)!} \right) z^0 \right] + \right.$$

$$\left. \left( \frac{1!}{1!(1-1)!} \right) z^0 \left[ \left( \frac{4!}{0!(4-0)!} \right) z^4 + \left( \frac{4!}{1!(4-1)!} \right) z^3 + \left( \frac{4!}{2!(4-2)!} \right) z^2 + \left( \frac{4!}{3!(4-3)!} \right) z^1 + \left( \frac{4!}{4!(4-4)!} \right) z^0 \right] \right]$$

$$b_5 T^5 z^0 \left[ \left( \frac{0!}{0!(0-0)!} \right) z^0 \left[ \left( \frac{5!}{0!(5-0)!} \right) z^5 + \left( \frac{5!}{1!(5-1)!} \right) z^4 + \left( \frac{5!}{2!(5-2)!} \right) z^3 + \left( \frac{5!}{3!(5-3)!} \right) z^2 + \left( \frac{5!}{4!(5-4)!} \right) z^1 + \right.$$

$$\left. \left( \frac{5!}{5!(5-5)!} \right) z^0 \right] =$$

$$\begin{aligned}
 U(z) [ T^1 [ \left( \frac{1!}{0!(1-0)!} \right) z^1 [ a_0 T^0 z^4 [ \left( \frac{4!}{0!(4-0)!} \right) z^4 [ \left( \frac{0!}{0!(0-0)!} \right) z^0 ] + \\
 \left( \frac{4!}{1!(4-1)!} \right) z^3 [ \left( \frac{0!}{0!(0-0)!} \right) z^0 ] + \\
 \left( \frac{4!}{2!(4-2)!} \right) z^2 [ \left( \frac{0!}{0!(0-0)!} \right) z^0 ] + \\
 \left( \frac{4!}{3!(4-3)!} \right) z^1 [ \left( \frac{0!}{0!(0-0)!} \right) z^0 ] + \\
 \left( \frac{4!}{4!(4-4)!} \right) z^0 [ \left( \frac{0!}{0!(0-0)!} \right) z^0 ] ] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_1 T^1 z^3 [ \left( \frac{3!}{0!(3-0)!} \right) z^3 [ \left( \frac{1!}{0!(1-0)!} \right) z^1 + \left( \frac{1!}{1!(1-1)!} \right) z^0 ] + \\
 \left( \frac{3!}{1!(3-1)!} \right) z^2 [ \left( \frac{1!}{0!(1-0)!} \right) z^1 + \left( \frac{1!}{1!(1-1)!} \right) z^0 ] + \\
 \left( \frac{3!}{2!(3-2)!} \right) z^1 [ \left( \frac{1!}{0!(1-0)!} \right) z^1 + \left( \frac{1!}{1!(1-1)!} \right) z^0 ] + \\
 \left( \frac{3!}{3!(3-3)!} \right) z^0 [ \left( \frac{1!}{0!(1-0)!} \right) z^1 + \left( \frac{1!}{1!(1-1)!} \right) z^0 ] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_2 T^2 z^2 [ \left( \frac{2!}{0!(2-0)!} \right) z^2 [ \left( \frac{2!}{0!(2-0)!} \right) z^2 + \left( \frac{2!}{1!(2-1)!} \right) z^1 + \left( \frac{2!}{2!(2-2)!} \right) z^0 ] + \\
 \left( \frac{2!}{1!(2-1)!} \right) z^1 [ \left( \frac{2!}{0!(2-0)!} \right) z^2 + \left( \frac{2!}{1!(2-1)!} \right) z^1 + \left( \frac{2!}{2!(2-2)!} \right) z^0 ] + \\
 \left( \frac{2!}{2!(2-2)!} \right) z^0 [ \left( \frac{2!}{0!(2-0)!} \right) z^2 + \left( \frac{2!}{1!(2-1)!} \right) z^1 + \left( \frac{2!}{2!(2-2)!} \right) z^0 ] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_3 \Gamma^3 z^1 \left[ \left( \frac{1!}{0!(1-0)!} z^1 \left[ \left( \frac{3!}{0!(3-0)!} z^3 + \left( \frac{3!}{1!(3-1)!} z^2 + \left( \frac{3!}{2!(3-2)!} z^1 + \left( \frac{3!}{3!(3-3)!} z^0 \right) \right] \right) + \right. \right. \\
& \left. \left( \frac{1!}{1!(1-1)!} z^0 \left[ \left( \frac{3!}{0!(3-0)!} z^3 + \left( \frac{3!}{1!(3-1)!} z^2 + \left( \frac{3!}{2!(3-2)!} z^1 + \left( \frac{3!}{3!(3-3)!} z^0 \right) \right) \right] \right) \right] \right) + \\
& a_4 \Gamma^4 z^0 \left[ \left( \frac{0!}{0!(0-0)!} z^0 \left[ \left( \frac{4!}{0!(4-0)!} z^4 + \left( \frac{4!}{1!(4-1)!} z^3 + \left( \frac{4!}{2!(4-2)!} z^2 + \left( \frac{4!}{3!(4-3)!} z^1 + \left( \frac{4!}{4!(4-4)!} z^0 \right) \right) \right] \right) \right] \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1!}{1!(1-1)!} z^0 \left[ a_{(1)0} z^4 \left[ \left( \frac{4!}{0!(4-0)!} z^4 \left[ \left( \frac{0!}{0!(0-0)!} z^0 \right) \right] \right) + \right. \right. \\
& \left. \left( \frac{4!}{1!(4-1)!} z^3 \left[ \left( \frac{0!}{0!(0-0)!} z^0 \right) \right] \right) + \right. \\
& \left. \left( \frac{4!}{2!(4-2)!} z^2 \left[ \left( \frac{0!}{0!(0-0)!} z^0 \right) \right] \right) + \right. \\
& \left. \left( \frac{4!}{3!(4-3)!} z^1 \left[ \left( \frac{0!}{0!(0-0)!} z^0 \right) \right] \right) + \right. \\
& \left. \left. \left( \frac{4!}{4!(4-4)!} z^0 \left[ \left( \frac{0!}{0!(0-0)!} z^0 \right) \right] \right) \right] \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_1 \Gamma^1 z^3 \left[ \left( \frac{3!}{0!(3-0)!} z^3 \left[ \left( \frac{1!}{0!(1-0)!} z^1 + \left( \frac{1!}{1!(1-1)!} z^0 \right) \right] \right) + \right. \\
& \left( \frac{3!}{1!(3-1)!} z^2 \left[ \left( \frac{1!}{0!(1-0)!} z^1 + \left( \frac{1!}{1!(1-1)!} z^0 \right) \right] \right) + \right. \\
& \left( \frac{3!}{2!(3-2)!} z^1 \left[ \left( \frac{1!}{0!(1-0)!} z^1 + \left( \frac{1!}{1!(1-1)!} z^0 \right) \right] \right) + \right. \\
& \left. \left. \left( \frac{3!}{3!(3-3)!} z^0 \left[ \left( \frac{1!}{0!(1-0)!} z^1 + \left( \frac{1!}{1!(1-1)!} z^0 \right) \right] \right) \right] \right) +
\end{aligned}$$

$$a_2 T^2 z^2 \left[ \left( \frac{2!}{0!(2-0)!} \right) z^2 \left[ \left( \frac{2!}{0!(2-0)!} \right) z^2 + \left( \frac{2!}{1!(2-1)!} \right) z^1 + \left( \frac{2!}{2!(2-2)!} \right) z^0 \right] + \right.$$

$$\left. \left( - \frac{2!}{1!(2-1)!} \right) z^1 \left[ \left( \frac{2!}{0!(2-0)!} \right) z^2 + \left( \frac{2!}{1!(2-1)!} \right) z^1 + \left( \frac{2!}{2!(2-2)!} \right) z^0 \right] + \right.$$

$$\left. \left( \frac{2!}{2!(2-2)!} \right) z^0 \left[ \left( \frac{2!}{0!(2-0)!} \right) z^2 + \left( \frac{2!}{1!(2-1)!} \right) z^1 + \left( \frac{2!}{2!(2-2)!} \right) z^0 \right] \right] +$$

$$a_3 T^3 z^1 \left[ \left( \frac{3!}{0!(3-0)!} \right) z^1 \left[ \left( \frac{3!}{0!(3-0)!} \right) z^3 + \left( \frac{3!}{1!(3-1)!} \right) z^2 + \left( \frac{3!}{2!(3-2)!} \right) z^1 + \left( \frac{3!}{3!(3-3)!} \right) z^0 \right] + \right.$$

$$\left. \left( - \frac{3!}{1!(3-1)!} \right) z^0 \left[ \left( \frac{3!}{0!(3-0)!} \right) z^3 + \left( \frac{3!}{1!(3-1)!} \right) z^2 + \left( \frac{3!}{2!(3-2)!} \right) z^1 + \left( \frac{3!}{3!(3-3)!} \right) z^0 \right] \right] +$$

$$a_4 T^4 z^0 \left[ \left( \frac{4!}{0!(4-0)!} \right) z^0 \left[ \left( \frac{4!}{0!(4-0)!} \right) z^4 + \left( \frac{4!}{1!(4-1)!} \right) z^3 + \left( \frac{4!}{2!(4-2)!} \right) z^2 + \left( \frac{4!}{3!(4-3)!} \right) z^1 + \left( \frac{4!}{4!(4-4)!} \right) z^0 \right] \right] \right]$$

Resolviendo factoriales y agrupando términos:

$$Y(z) [b_0 T^0 z^5 [ z^5 - 5z^4 + 10z^3 - 10z^2 + 5z^1 + z^0 ] +$$

$$b_1 T^1 z^4 [ -z^5 + z^4$$

$$- 4z^4 - 4z^3$$

$$6z^3 + 6z^2$$

$$- 4z^2 - 4z^1$$

$$z^1 + z^0 ] +$$

$$b_2 T^2 z^3 [ - z^5 - 2z^4 - z^3 \\ 3z^4 + 6z^3 + 3z^2 \\ - 3z^3 - 6z^2 - 3z^1 \\ z^2 + 2z^1 + z^0 ] +$$

$$b_3 T^3 z^2 [ z^5 + 3z^4 + 3z^3 + z^2 \\ - 2z^4 - 6z^3 - 6z^2 - 2z^1 \\ z^3 + 3z^2 + 3z^1 + z^0 ] +$$

$$b_4 T^4 z^1 [ z^5 + 4z^4 + 6z^3 + 4z^2 + z^1 \\ - z^4 - 4z^3 - 6z^2 - 4z^1 - z^0 ] +$$

$$b_5 T^5 z^0 [ z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z^1 + z^0 ] =$$

$$U(z) [ T^1 z^1 [ a_0 T^0 z^4 [ z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z^1 + z^0 ] +$$

$$a_1 T^1 z^3 [ z^4 - z^3 \\ - 3z^3 - 3z^2 \\ + 3z^2 + 3z^1 \\ - z^1 - z^0 ] +$$



$$\begin{aligned}
& a_2 T^2 z^2 [z^4 + 2z^3 + z^2 \\
& \quad - 2z^3 - 4z^2 - 2z^1 \\
& \quad \quad \quad z^2 + 2z^1 + z^0] + \\
& a_3 T^3 z^1 [z^4 + 3z^3 + 3z^2 + z^1 \\
& \quad - z^3 - 3z^2 - 3z^1 - z^0] - \\
& a_4 T^4 z^0 [z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z^1 + z^0] + \\
T^1 z^0 [ & a_0 T^0 z^4 [z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z^1 + z^0] + \\
& a_1 T^1 z^3 [z^4 + z^3 \\
& \quad - 3z^3 - 3z^2 \\
& \quad \quad \quad + 3z^2 + 3z^1 \\
& \quad \quad \quad - z^1 - z^0] + \\
& a_2 T^2 z^2 [z^4 + 2z^3 + z^2 \\
& \quad - 2z^3 - 4z^2 - 2z^1 \\
& \quad \quad \quad z^2 + 2z^1 + z^0] + \\
& a_3 T^3 z^1 [z^4 + 3z^3 + 3z^2 + z^1 \\
& \quad - z^3 - 3z^2 - 3z^1 - z^0] + \\
& a_4 T^4 z^0 [z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z^1 + z^0]]]
\end{aligned}$$

Multiplicando tenemos:

$$\begin{aligned}
 Y(Z) & [b_0 T^0 2^5 [Z^5 - 5Z^4 + 10Z^3 - 10Z^2 + 5Z^1 + Z^0] + \\
 & b_1 T^1 2^4 [-Z^5 + Z^4 \\
 & \quad - 4Z^4 - 4Z^3 \\
 & \quad \quad 6Z^3 + 6Z^2 \\
 & \quad \quad \quad - 4Z^2 - 4Z^1 \\
 & \quad \quad \quad \quad Z^1 + Z^0] + \\
 & b_2 T^2 2^3 [-Z^5 - 2Z^4 - Z^3 \\
 & \quad \quad 3Z^4 + 6Z^3 + 3Z^2 \\
 & \quad \quad \quad - 3Z^3 - 6Z^2 - 3Z^1 \\
 & \quad \quad \quad \quad Z^2 + 2Z^1 + Z^0] + \\
 & b_3 T^3 2^2 [Z^5 + 3Z^4 + 3Z^3 + Z^2 \\
 & \quad \quad - 2Z^4 - 6Z^3 - 6Z^2 - 2Z^1 \\
 & \quad \quad \quad Z^3 + 3Z^2 + 3Z^1 + Z^0] + \\
 & b_4 T^4 2^1 [Z^5 + 4Z^4 + 6Z^3 + 4Z^2 + Z^1 \\
 & \quad \quad - Z^4 - 4Z^3 - 6Z^2 - 4Z^1 - Z^0] + \\
 & b_5 T^5 2^0 [Z^5 + 5Z^4 + 10Z^3 + 10Z^2 + 5Z^1 + Z^0] ] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U(Z) & [a_0 T^1 2^4 [Z^5 - 4Z^4 + 6Z^3 - 4Z^2 + Z^1] + \\
 & a_1 T^2 2^3 [Z^5 + Z^4 \\
 & \quad - 3Z^4 - 3Z^3 \\
 & \quad \quad 3Z^3 + 3Z^2 \\
 & \quad \quad \quad - Z^2 - Z^1] +
 \end{aligned}$$

$$a_2 T^3 2^2 [ z^5 + 2z^4 - z^3 - 2z^4 - 4z^3 - 2z^2 z^3 + 2z^2 + z^1 ] +$$

$$a_3 T^4 2^1 [ z^5 + 3z^4 + 3z^3 + z^2 - z^4 - 3z^3 - 3z^2 - z^1 ] +$$

$$a_4 T^5 2^0 [ z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 4z^2 + z^1 ] +$$

$$a_0 T^1 2^4 [ z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z^1 + z^0 ] +$$

$$a_1 T^2 2^3 [ z^4 - z^3 - 3z^3 - 3z^2 3z^2 + 3z^1 - z^1 - z^0 ] +$$

$$a_2 T^3 2^2 [ z^4 + 2z^3 + z^2 - 2z^3 - 4z^2 - 2z^1 z^2 + 2z^1 + z^0 ] +$$

$$a_3 T^4 2^1 [ z^4 + 3z^3 + 3z^2 + z^1 - z^3 - 3z^2 - 3z^1 - z^0 ] +$$

$$a_4 T^5 2^0 [ z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z^1 + z^0 ] +$$

Como siguiente paso, se tiene el agrupamiento anterior en arreglos matriciales.

$$b_0 T^0 2^5 \begin{bmatrix} z^5 & z^4 & z^3 & z^2 & z^1 & z^0 \\ +1 & & & & & \\ & -5 & & & & \\ & & +10 & & & \\ & & & -10 & & \\ & & & & +5 & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix} \quad a_0 T^1 2^4 \begin{bmatrix} z^5 & z^4 & z^3 & z^2 & z^1 & z^0 \\ 1 & & & & & \\ & -4 & & & & \\ & 1 & 6 & & & \\ & & -4 & -4 & & \\ & & & 6 & 1 & \\ & & & & -4 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_1 T^1 2^4 \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ & -4 & +4 & & & \\ & & 6 & -6 & & \\ & & & -4 & +4 & \\ & & & & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad a_1 T^2 2^3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & -3 & -3 & & & \\ & & 3 & 3 & & \\ & & & -1 & -1 & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & -3 & -3 & & \\ & & & 3 & & \\ & & & & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b_2 T^2 2^3 \begin{bmatrix} +1 & -2 & +1 & & & \\ & -3 & 6 & -3 & & \\ & & +3 & -6 & +3 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad a_2 T^3 2^2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & & & \\ & -2 & -4 & -2 & & \\ & & 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & -2 & -4 & -2 & \\ & & & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_3 T^3 2^2 \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 & & \\ & -2 & +6 & -6 & +2 & \\ & & 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad a_3 T^4 2^1 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ & -1 & -3 & -3 & -1 & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & & -1 & -3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b_4 T^4 2^1 \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & -1 & +4 & -6 & +4 & -1 \end{bmatrix} \quad a_4 T^5 2^0 \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_5 T^5 2^0 \begin{bmatrix} 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

-----  
 $D_1 \quad D_2 \quad D_3 \quad D_4 \quad D_5 \quad D_6$

-----  
 $C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \quad C_5 \quad C_6$

Finalmente se tiene:

$$Y(Z) [C_1 Z^5 + C_2 Z^4 + C_3 Z^3 + C_4 Z^2 + C_5 Z^1 + C_6 Z^0] =$$

$$U(Z) [D_1 Z^5 + D_2 Z^4 + D_3 Z^3 + D_4 Z^2 + D_5 Z^1 + D_6 Z^0]$$

Dividiendo ambos miembros entre  $Z^5$  tenemos:

$$Y(Z) [C_1 + C_2 Z^{-1} + C_3 Z^{-2} + C_4 Z^{-3} + C_5 Z^{-4} + C_6 Z^{-5}] =$$

$$U(Z) [D_1 + D_2 Z^{-1} + D_3 Z^{-2} + D_4 Z^{-3} + D_5 Z^{-4} + D_6 Z^{-5}]$$

Despejando  $Y(Z)$

$$Y(Z) = U(Z) \left[ \frac{D_1}{C_1} + \frac{D_2}{C_1} Z^{-1} + \frac{D_3}{C_1} Z^{-2} + \frac{D_4}{C_1} Z^{-3} + \frac{D_5}{C_1} Z^{-4} + \frac{D_6}{C_1} Z^{-5} \right]$$

$$Y(Z) \left[ \frac{C_2}{C_1} Z^{-1} + \frac{C_3}{C_1} Z^{-2} + \frac{C_4}{C_1} Z^{-3} + \frac{C_5}{C_1} Z^{-4} + \frac{C_6}{C_1} Z^{-5} \right]$$

Antitransformando, obtenemos la ecuación en diferencias con la aproximación:

$$\text{trapezoidal} \left( S \frac{Z-1}{T(Z+1)} \right)$$

$$y(k) = \left[ \frac{D_1}{C_1} u(k) + \frac{D_2}{C_1} u(k-1) + \frac{D_3}{C_1} u(k-2) + \frac{D_4}{C_1} u(k-3) + \frac{D_5}{C_1} u(k-4) + \frac{D_6}{C_1} u(k-5) \right]$$

$$\left[ \frac{C_2}{C_1} y(k-1) + \frac{C_3}{C_1} y(k-2) + \frac{C_4}{C_1} y(k-3) + \frac{C_5}{C_1} y(k-4) + \frac{C_6}{C_1} y(k-5) \right] \quad (3.4.3)$$

### III.5 CONCLUSIONES.

Como puede observarse en los desarrollos anteriores, fué posible encontrar procedimientos generales para las tres aproximaciones, que nos llevan a la generación de las ecuaciones en diferencias correspondientes.

Dichos procedimientos son posibles de programar en una computadora, lo cual es materia del capítulo IV.

## CAPITULO IV

### SISTEMA COMPUTARIZADO PARA LA DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS MEDIANTE TECNICAS DE INTEGRACION NUMERICA.

#### IV.1 INTRODUCCION.

En el capítulo III se dedujo un procedimiento general para cada una de las aproximaciones de integración numérica consideradas en este trabajo: Aproximación rectangular hacia adelante, Aproximación rectangular hacia atrás y Aproximación trapezoidal. La mecanización de los procedimientos generales de dichas aproximaciones elimina el trabajo, excesivo y rutinario, que trae consigo discretizar sistemas continuos en forma manual.

En este capítulo se detalla la forma en que se desarrollo un sistema de cómputo para la discretización de sistemas continuos, utilizando las fórmulas generales encontradas para cada aproximación mencionada.

El contar con un sistema computarizado de tal naturaleza brindará una gran ayuda a los usuarios y de una manera especial a los estu-

diantes de las asignaturas CONTROL DIGITAL Y ANALISIS DE SISTEMAS DISCRETOS, que se imparten en la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M., quienes podrán enfocar más su atención en los resultados de la aplicación de cada una de las aproximaciones de integración numérica, que en los procedimientos tradicionales de solución, propiciando con esto una mayor rapidez en la comprensión de los conceptos y características de dichas técnicas de aproximación. En la siguientes secciones se incluyen los resultados del análisis y diseño del sistema, así como la forma de operarlo.

#### IV.2 REQUERIMIENTOS DEL SISTEMA.

En esta sección se describe el objetivo del sistema, las facilidades que brinda, su funcionamiento y los recursos de hardware y software necesarios para su operación.

##### IV.2.1 OBJETIVO.

El objetivo de este sistema es la discretización de sistemas continuos, partiendo de la función Transferencia del sistema a discretizar y ciertos datos complementarios, utilizando las técnicas de integración numérica: Aproximación rectangular hacia adelante, Aproximación rectangular hacia atrás y Aproximación trapezoidal.

##### IV.2.2. FACILIDADES.

El sistema se orientó a proporcionar al usuario facilidades, tanto para la introducción de datos como para su operación, utilizándose una serie de menús donde se indican las posibles opciones y, en su



caso, los mensajes pertinentes de error cuando se proporcione erróneamente el dato solicitado. De esta forma el usuario es conducido en forma sencilla durante la sesión.

#### IV.2.3. FUNCIONAMIENTO.

El sistema opera en forma interactiva, solicitando al usuario la información por medio de menús, haciéndose una validación exhaustiva de los datos proporcionados para evitar en lo posible los errores.

##### IV.2.3.1 Pasos seguidos por el sistema en una sesión.

- a) Se proporciona información general del paquete si el usuario lo requiere.
- b) Se solicitan los datos de los polinomios que componen la función Transferencia del sistema a discretizar.
- c) Se solicita la selección de la técnica de aproximación numérica deseada.
- d) Se pide la selección de la configuración del sistema a discretizar.
- e) Se solicitan los datos de la señal de entrada al sistema a discretizar.
- f) Finalmente, se solicitan los datos del período de muestreo, el número de muestras a obtener y los datos generales del usuario.

g) El sistema verifica con el usuario que los datos proporcionados son los correctos.

h) Si los datos son correctos, procese la información y emite resultados; en caso contrario los solicita nuevamente.

#### IV.2.3.2 Proceso interno del sistema.

Una vez que el usuario ha validado los datos proporcionados, se ejecutan los siguientes procesos:

a) Se genera la ecuación en diferencias de acuerdo a la técnica de aproximación y configuración del sistema seleccionados.

b) Se evalúa la ecuación en diferencias en función del tipo de la señal de entrada y del período de muestreo para el número de muestras deseado.

c) Se almacenan los resultados en vectores y en un archivo temporal (listos para su impresión).

#### IV.2.4 REQUISOS DE HARDWARE Y SOFTWARE.

Para el funcionamiento adecuado del sistema "Discretización de Sistemas Continuos", se debe contar con los siguientes recursos de hardware.

--- Equipo VAX-11/780 (Digital equipment corporation).

--- Terminal de video VT 100.

--- Terminal de impresión LA 120.

- Memoria mínima de proceso de 64 Kb.
- Area en disco de 64 Kb. que será utilizada solamente para almacenar el programa objeto, ya que este paquete no utiliza procesos externos y solo genera un archivo temporal en donde se almacenan los resultados para su impresión.

Los recursos de software necesarios son:

- Sistema operativo VMS (Virtual Memory System).
- Lenguaje de comandos de VAX, DCL (Digital Command Language).
- Software de la terminal VT 100.
- El sistema se programó en lenguaje FORTRAN 77, pero para su operación se utiliza el código ejecutable generado por la compilación y línea del programa.

### IV.3 DISEÑO.

La fase de diseño se desarrolló estableciendo los elementos y la estructura general del reporte que el sistema proporciona (IV.3.1).

La estructura general del sistema esta contenida en el inciso (IV.3.2.1.); el diagrama conceptual del sistema se desarrolló con la técnica de la burbuja (IV.3.2.2) y la descripción de procesos se detalla mediante diagramas descendentes (IV.3.2.3).

Por último se hace una definición de las entradas al sistema, la validación de la información registrada por el usuario y los mensajes de error (IV.3.3).

#### IV.3.1 DEFINICIÓN DE SALIDAS.

A continuación se presenta el diseño de impresión de la salida del sistema computarizado, FIGURA 4.3.1 (a) - (c).



**TRABAJO DE TESIS**  
**DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS**  
**DISEÑO DE REPORTES**

SISTEMA	CLAVE DEL REPORTE	FRECUENCIA	DISEÑADO POR
---------	-------------------	------------	--------------

1	0			1			2			3			4			5			6			7								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	U.N.A.M.												DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS												FAC. DE ING.			FECHA: 98-99-89		
2	D.S.C.																								HORA: 98					
3																														
4																														
5																														
6																														
7	PROFESOR...												XX																	
8																														
9	ASIGNATURA...												XX																	
10																														
11	ALUMNO...												XX																	
12																														
13	GRUPO...												98																	
14																														
15																														
16	PARA EL PROCESO SELECCIONO:																													
17																														
18																														
19	TECNICA DE APROXIMACION...												XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX																	
20																														
21	CONFIGURACION DEL SISTEMA...												XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX																	
22																														
23	VALOR DE LA RETENCION. (MUESTRAS)												9999.9999																	
24																														
25	TIPO DE ENTRADA...												XXXXXXXXXX																	
26																														
27	VALOR DEL TIPO DE ENTRADA...												XXXXX= 9999.9999 , XXXXX= 9999.9999																	
28																														
29	VALOR DEL PERIODO...												9999.9999																	
30																														
31	NUMERO DE MUESTRAS A OBTENER...												1999																	
32																														

DESCRIPCION:

- 63 -

---



---



---





**TRABAJO DE TESIS**  
**DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS**  
**DISEÑO DE REPORTES**

SISTEMA	CLAVE DEL REPORTE	FRECUENCIA	DISEÑADO POR
---------	-------------------	------------	--------------

O	1				2				3				4				5				6				7																								
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	U. N. A. M.																DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS																FAC. DE ING.																
2	D. S. C.																																FECHA: 99.99.99																
3																	RESULTADOS:																HOJA: 99																
4																	APROXIMACION..																XXXXXX																
5																	CONFIGURACION..																XXXXXX																
6																	LA ECUACION DE DIFERENCIAS ES:																																
7																	Y(K) =																XXXXXX																
8																	SU EVALUACION:																																
9																	K				U(K)				Y(K)				X				U(K)				Y(K)												
10																	9999				9999.9999				9999.9999				9999				9999.9999				9999.9999												
11																	9999				9999.9999				9999.9999				9999				9999.9999				9999.9999												
12																	9999				9999.9999				9999.9999				9999				9999.9999				9999.9999												
13																																																	
14																																																	
15																																																	
16																																																	
17																																																	
18																																																	
19																																																	
20																																																	
21																																																	
22																																																	
23																																																	
24																																																	
25																																																	
26																																																	
27																																																	
28																																																	
29																																																	
30																																																	
31																																																	
32																																																	

DESCRIPCION:

- 65 -

#### IV.3.2 ESTRUCTURA DE PROCESOS.

A continuación se muestran los diagramas general conceptual y descendente del sistema.

##### IV.3.2.1 Diagrama general del sistema.

En la FIGURA 4.3.2 se muestra el diagrama general del sistema, en el cual se basó el diseño. Como se puede apreciar, consta de un solo módulo principal el cual contiene la definición y manejo de pantallas, así como los módulos de cálculo necesarios para la obtención de resultados. Los resultados se muestran en pantalla con la opción de ser impresos (función que se realiza mediante un lanzador).

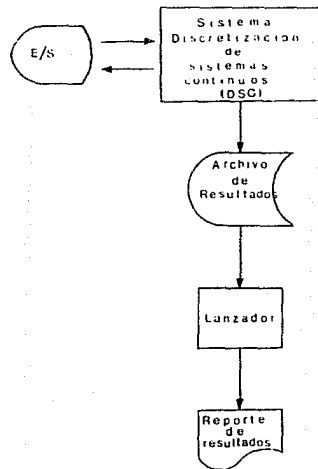




Universidad Agraria del Perú  
Agricultura

# TRABAJO DE TESIS DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS DISEÑO DE DIAGRAMAS

SISTEMA	TIPO DE DIAGRAMA	DISEÑADO POR
OBSERVACIONES		



#### IV.3.2.2. Diagrama conceptual del sistema.

El diagrama conceptual del sistema se hizo a través del método de la burbuja, el cual nos muestra las diversas entradas y salidas de todas las fases del sistema (FIGURA 4.3.3).



Universidad Nacional  
A.T. Formosa

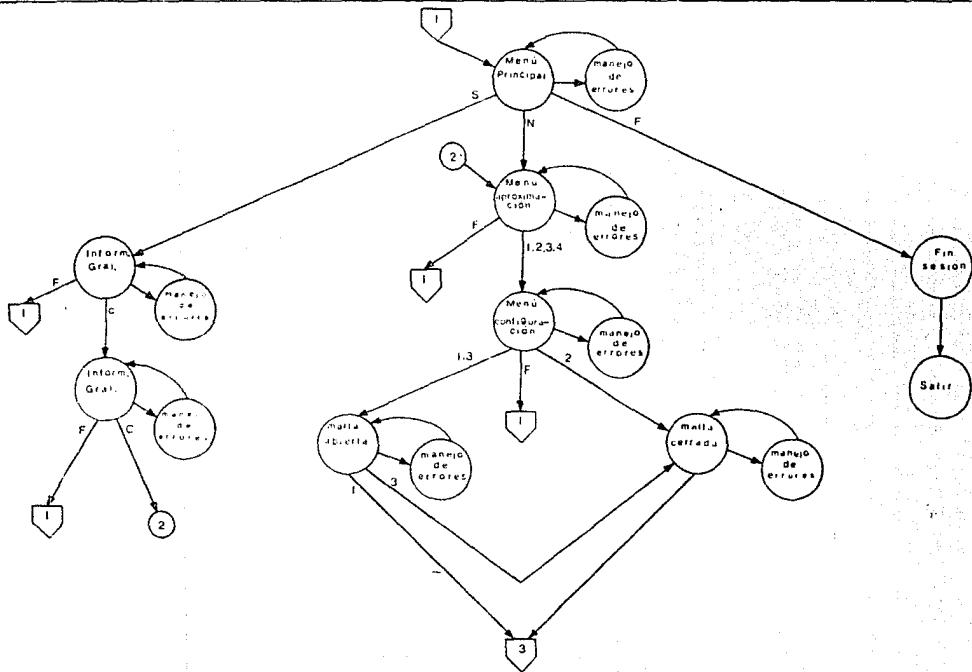
# TRABAJO DE TESIS DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS DISEÑO DE DIAGRAMAS

SISTEMA

TIPO DE DIAGRAMA

DISEÑADO POR

OBSERVACIONES





#### IV.3.2.3 Diagrama descendente del sistema.

El diagrama descendente (FIGURA 4.3.4) representa la estructura jerárquica bajo la cual se diseñó el sistema.

Los módulos generales del sistema realizan las siguientes funciones principales:

**SELINF.** Presenta la pantalla inicial del sistema y da opción de que se proporcione información general del paquete, se inicie la petición de datos o se termine la sesión.

**IGRAL.** Proporciona información general del paquete.

**GRAPOL.** Pide grado y coeficientes de los polinomios que forman la función Transferencia del sistema a discretizar.

**MEMALI.** Solicita la selección de la aproximación de integración numérica a utilizar, así como la configuración del sistema.

**INVACE.** Proporciona la representación gráfica de la configuración del sistema seleccionada: Malla abierta o Malla cerrada, solicitando el valor de la retroalimentación en el caso de Malla cerrada.

**ETNPCS.** Pide los datos de la señal de entrada al sistema

a discretizar, así como el valor del período y el número de muestras a obtener.

SELPRO. Muestra los datos proporcionados por el usuario y verifica que sean los correctos a fin de procesarlos o solicitarlos nuevamente.

IDENTI. Pide datos generales del usuario.

PROCESO. Procesa los datos de acuerdo a las opciones seleccionadas por el usuario.

FINSES. Da por terminada la sesión.

GENENT. Genera el vector de datos de la señal de entrada al sistema discretizado.

RECADEL. Genera la ecuación en diferencias mediante la aproximación rectangular hacia adelante, la evalúa, edita los resultados en pantalla y los almacena a su vez en un archivo temporal para su posible impresión.

RECATRA. Genera la ecuación en diferencias mediante la aproximación rectangular hacia atrás, la evalúa, edita los resultados en pantalla y los almacena a su vez en un archivo temporal para su posible impresión.

**TRAP** . Genera la ecuación en diferencias mediante la aproximación trapezoidal, la evalúa, edita los resultados en pantalla y los almacena para su posible impresión.

**MACER** . Adecúa la función Transferencia del sistema introduciendo el valor de la retroalimentación, en el caso de Malla cerrada.

**ARCHTEM** . Inicializa un archivo temporal con los datos generales del usuario y las opciones seleccionadas. (Este archivo se complementa con los datos de los resultados obtenidos para su posible impresión).

**TITULO** . Edita los títulos estándar utilizados en todas las pantallas.



Universidad Nacional  
de México

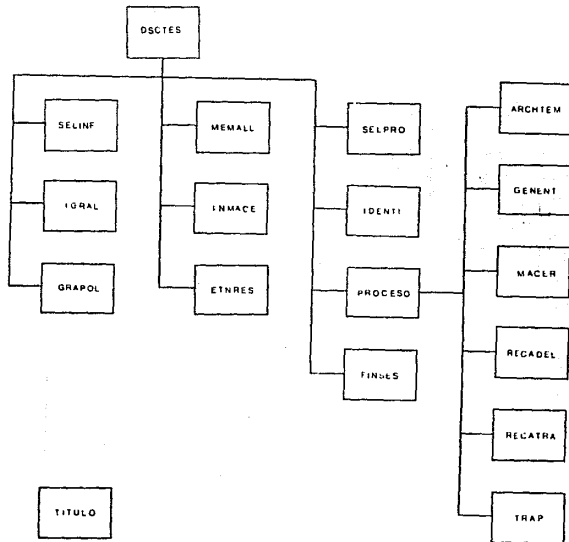
# TRABAJO DE TESIS DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS DISEÑO DE DIAGRAMAS

SISTEMA

TIPO DE DIAGRAMA

DISEÑADO POR

OBSERVACIONES





#### IV.3.3 DEFINICION DE ENTRADAS.

La comunicaci3n entre el usuario y el sistema se realiza interactivamente a trav3s de pantallas.

El sistema despliega men3s donde el usuario elige las opciones de procesamiento y proporciona la informaci3n necesaria para el c3lculo correspondiente y emisi3n de su reporte.

Es necesario tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

- a) Que el usuario conozca la informaci3n que desea procesar.
- b) El usuario debe registrar toda la informaci3n necesaria y en forma v3lida para el sistema (la validaci3n en el proceso interactivo es inmediata).
- c) Las pantallas tienen las siguientes caracter3sticas:
  - Campos protegidos. Datos que proporciona autom3ticamente el sistema, los cuales no pueden ser modificados por el usuario.
  - Campos no protegidos. Datos proporcionados por el usuario y desplegados con v3den inverso.
  - Se3al auditiva. Forma en que el sistema solicita los datos y pide correcci3n de errores.
  - Textos. Informaci3n que describe la pantalla (t3tulos, funci3n de la pantalla, fecha, Etc.). Los datos generales, as3 como los mensajes de error aparecen siempre en la misma posici3n dentro de la pantalla.

d) Ya que la validación es en forma inmediata, cuando se comete un error en algún campo, el sistema lo marca y emite el mensaje de error correspondiente.

#### IV.3.3.1 Diagrama relacional de pantallas.

A continuación se muestra la relación existente entre las pantallas por medio de un diagrama jerárquico (FIGURA 4.3.5).



Universidad Nacional  
de Ingeniería

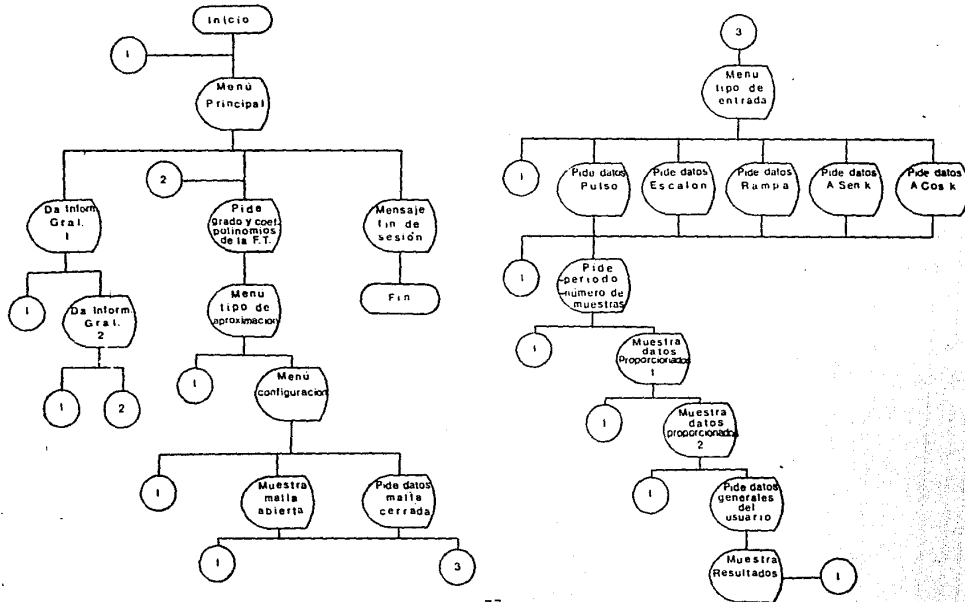
# TRABAJO DE TESIS

## DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

### DISENO DE DIAGRAMAS

SISTEMA.

TIPO DE DIAGRAMA



#### **IV.3.3.2 DEFINICION DE PANTALLAS.**

**En la FIGURA 4.3.6 (a) - (r) se hace una descripción de las pantallas que despliega el sistema.**



Universidad Nacional Autónoma de México

# TRABAJO DE TESIS DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

SISTEMA

DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

PANTALLA

CLAVE

U.N.A.M. DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS FAC. DE ING.  
DSC MAJALDO

B I E N V E N I D O

DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

POR MEDIO DE LAS APROXIMACIONES:

- RECTANGULAR HACIA ADELANTE
- RECTANGULAR HACIA ATRAS
- TRAPEZOIDAL

DESEA INFORMACION BASICA DEL PAQUETE (S/I) ?

SU OPCION: 2, \_

F = FIN DE SESION

OBSERVACIONES: \_\_\_\_\_ FIGURA 4.3.6 (a)

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA



TRABAJO DE TESIS  
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

SISTEMA	PANTALLA	CLAVE
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS		

U.N.A.M. DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS FAC. DE ING.  
DSC MEXICO

EL PAQUETE "DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS" (DSC), FUE IDEADO COMO UN APOYO PARA EL ANALISIS Y SINTESIS DE SISTEMAS DISCRETOS EN LAS MATERIAS CONTROL DIGITAL Y ANALISIS DE SISTEMAS DISCRETOS QUE SE IMPARTEN EN LA FACULTAD DE INGENIERIA DE LA U.N.A.M..

EL OBJETIVO DE ESTE PAQUETE (DSC), ES LA DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS POR MEDIO DE INTEGRACION NUMERICA, PARTIENDO DE LA FUNCION TRANSFERENCIA DEL SISTEMA A DISCRETIZAR.

CON BASE EN LA FUNCION TRANSFERENCIA PROPORCIONADA Y - CIERTOS DATOS COMPLEMENTARIOS, EL PAQUETE DISCRETIZA LA SENAL POR MEDIO DE LOS SIGUIENTES METODOS:

- RECTANGULAR HACIA ADELANTE
- RECTANGULAR HACIA ATRAS
- TRAPEZOIDAL

SU OPCION ? : \_

C=CONTINUAR  
F= REINICIAR SESION

OBSERVACIONES: FIGURA 4.3.6 (b)



TRABAJO DE TESIS  
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

SISTEMA	PANTALLA	CLAVE
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS		

U.N.A.M. DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS FAC. DE ING.  
DSC AA.M.M.I.D

SE OBTIENE LA ECUACION EN DIFERENCIAS Y POSTERIORMENTE SE RESUELVE EN FUNCION DEL TIPO DE ENTRADA (PULSO, ESCALON, RAMPA, ETC).

EL DISEÑO DEL PAQUETE SE ORIENTO A PROPORCIONAR AL USUARIO FACILIDADES TANTO PARA LA INTRODUCCION DE DATOS COMO PARA SU OPERACION, UTILIZANDOSE UNA SERIE DE MENUS DONDE SE INDICAN LAS POSIBLES OPCIONES Y EN SU CASO, LOS MENSAJES PERTINENTES DEL ERROR EN QUE SE INCURRIO CUANDO SE PROPORCIONO EL DATO ERRONEAMENTE. DE ESTA FORMA EL USUARIO ES CONDUcido EN FORMA SENCILLA EN TODA LA SESION.

LOS DATOS QUE SE VAN SOLICITANDO A LO LARGO DE LA SESION PUEDES CONOCERLOS CONSULTANDO EL MANUAL DE OPERACION DEL SISTEMA. EL REINICIO DE LA SESION PUEDE HACERSE DESDE CUALQUIER MENU SECUNDARIO Y TERMINARLA DESDE EL MENU PRINCIPAL.

SU OPCION ? : \_

C=CONTINUAR  
E=REINICIA SESION

OBSERVACIONES: \_\_\_\_\_ FICHA 4.3.6 (c)



TRABAJO DE TESIS  
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

SISTEMA	PANTALLA	CLAVE
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS		

U.N.A.M. DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS FAC. DE ING.  
DSC AA.MM.EE

PROPORCIONE :

GRADO DE  $Q(S)$  (NUMERADOR DE LA F.T.) ? :

VALOR DE SU COEFICIENTE  $A(i)$  ? :

GRADO DE  $P(S)$  (DENOMINADOR DE LA F.T.) ? :

VALOR DE SU COEFICIENTE  $B(i)$  ? :

F = REINICIAR SESION

OBSERVACIONES: \_\_\_\_\_ FIGURA 4.3.6 (4)





UNIVERSIDAD DE AMÉRICAS  
C. 1968

## TRABAJO DE TESIS DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

SISTEMA  
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

PANTALLA

CLAVE

U.N.A.M. DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS  
DSC

FAC. DE ING.  
A.A.M.M.P.D

SELECCIONE LA APROXIMACION :

1. RECTANGULAR HACIA ADELANTE
2. RECTANGULAR HACIA ATRAS
3. TRAPEZOIDAL
4. LAS TRES APROXIMACIONES

SU Opcion ? : \_

R = REINICIAR SESION

OBSERVACIONES: \_\_\_\_\_ FIGURA 4.3.6 (c)



TRABAJO DE TESIS  
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

SISTEMA DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS	PANTALLA	CLAVE
---	----------	-------

U.N.A.M. DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS FAC. DE ING.  
DSC AA.MM.DD

SELECCIONE LA CONFIGURACION DEL SISTEMA :

1. MALLA ABIERTA
2. MALLA CERRADA
3. AMBAS CONFIGURACIONES

SU OPCION ? : \_

F = REINICIAR SESION

OBSERVACIONES: \_\_\_\_\_ FIGURA 4.3.6 (f)



TRABAJO DE TESIS  
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

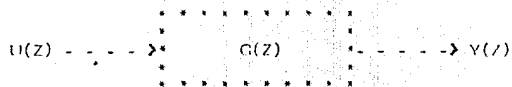
SISTEMA  
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

PANTALLA

CLAVE

U.N.A.M. DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS FAC. DE ING.  
DSC A.M.M.I.D

M A L L A   A B I E R T A



FUNCION TRANSFERENCIA:  $G(Z) = Y(Z) / U(Z)$

$G(Z) = Q(Z) / P(Z)$

$Q(Z)$  Y  $P(Z)$  = POLINOMIOS

SU OPCION ? : \_

C = CONTINUAR  
F = REINICIAR SESION

OBSERVACIONES: \_\_\_\_\_ FIGURA 3.6 (a)



Universidad del Estado  
de México

# TRABAJO DE TESIS DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

SISTEMA

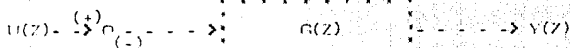
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

PANTALLA

CLAVE

U.N.A.M. DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS FAC. DE ING.  
DSC AA.M.M.I.D

MALLA YERRADA



FUNCION TRANSFERENCIA:  $G(Z) = Y(Z) / U(Z)$   
 $G(Z) = G(Z) / 1 + KG(Z)$   
 $G(Z) = Q(Z) / P(Z) + KQ(Z)$   
 $Q(Z)$  Y  $P(Z)$  = POLINOMIOS

DE EL VALOR DE K :

F = REINICIAR SESION

OBSERVACIONES: \_\_\_\_\_ FIGURA 4.3.6 (b)



TRABAJO DE TESIS  
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

SISTEMA  
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

PANTALLA

CLAVE

U.N.A.M. DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS  
DSC

FAC. DE ING.  
AA.MM.DD

SELECCIONE EL TIPO DE ENTRADA :

1. PULSO
2. ESCALON
3. RAMPA
4. A SEN K
5. A COS K

SELECCION ? : \_

F = REINICIAR SESION

OBSERVACIONES: FIGURA 4.3.6 (1)



TRABAJO DE TESIS  
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

SISTEMA

DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

PANTALLA

CLAVE

U.N.A.M. DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS  
DSC

FAC. DE ING.  
AA.MM.DD

TIPO DE ENTRADA : PULSO

DESPLAZAMIENTO EN TIEMPO ? :

PESO ? :

F = REINICIAR SESION

OBSERVACIONES: FIGURA 4.3.6 (j)



Universidad Nacional  
Autónoma de México

## TRABAJO DE TESIS DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

SISTEMA DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS	PANTALLA	CLAVE
---	----------	-------

U.N.A.M. DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS  
DSC

FAC. DE ING.  
AA.M.M.DD

TIPO DE ENTRADA : ESCALON

DESPLAZAMIENTO EN TIEMPO ? :

AMPLITUD ? :

F = REINICIAR SESION

OBSERVACIONES: \_\_\_\_\_  
FIGURA 4.3.6 (k)



TRABAJO DE TESIS  
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

SISTEMA  
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

PANTALLA

CLAVE

U.N.A.M. DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS  
DSC

FAC. DE ING.  
A.A.M.M.I.D

TIPO DE ENTRADA : RAMPA

AMPLITUD ? :

PENDIENTE ? :

F = REINICIAR SI SION

OBSERVACIONES: FIGURA 4.3.6 (1)





TRABAJO DE TESIS  
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

SISTEMA	PANTALLA	CLAVE
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS		

U.N.A.M. DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS FAC. DE ING.  
DSC MA.M.M.FD

TIPO DE ENTRADA : SENO

AMPLITUD ? :

FRECUENCIA ? :

F = REINICIAR SESION

OBSERVACIONES: \_\_\_\_\_  
FIGURA 4.3.6 (m)



UNAM  
Autonomía en el  
servicio

TRABAJO DE TESIS  
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

PANTALLA

CLAVE

U.N.A.M. DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS  
DSC

FAC. DE ING.  
AA.M.M.DD

TIPO DE ENTRADA : COSEN0

AMPLITUD ? :

FRECUENCIA ? :

F = REINICIAR SESION

OBSERVACIONES: FIGURA 4.3.6 (n)



Universidad del Nariño  
Nariño

TRABAJO DE TESIS  
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

SISTEMA  
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

PANTALLA

CLAVE

U.N.A.M. DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS  
DSC

FAC. DE ING.  
VALMEDO

PROPORCIONE :

PERIODO DE MUESTREO (T) ? :

NUMERO DE MUESTRAS ? :

F = REINICIAR SESION

OBSERVACIONES: FIGURA 4.3.6 (n)



TRABAJO DE TESIS  
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

SISTEMA

DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

PANTALLA

CLAVE

U.N.A.M. DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS FAC. DE ING.  
DSC A.A.M.M.DD

PARA EL PROCESO SELECCIONO :

METODO DE APROXIMACION. . . . .

TIPO DE MALLA . . . . .

VALOR DE LA RETROALIMENTACION (K) . . . . .

TIPO DE ENTRADA . . . . .

VALOR DE LA FUNCION DE ENTRADA. . . . .

VALOR DEL PERIODO (T) . . . . .

NUMERO DE MUESTRAS. . . . .

SELECCIONO ? :

C = CONTINUAR  
F = REINICIAR SESION

OBSERVACIONES: FIGURA 4.3.6 (a)



TRABAJO DE TESIS  
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

SISTEMA  
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

PANTALLA

CLAVE

U.N.A.M. DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS FAC. DE ING.  
DSC A.M.M.L.P.D

PARA EL PROCESO SELECCIONA :

GRADO DEL POLINOMIO DEL NUMERADOR DE LA F.T. . . .  
SUS COEFICIENTES. . .

SU OPCION ? :

C = CONTINUAR  
F = REINICIAR SESION

OBSERVACIONES: \_\_\_\_\_ FICHA 4.3.6 (p<sup>1</sup>)



Universidad Nacional de México

# TRABAJO DE TESIS DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

PANTALLA

CLAVE

U.N.A.M. DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS  
DSC

FAC. DE ING.  
AA.MM.DD

PARA EL PROCESO SELECCIONA :

GRADO DEL POLINOMIO DEL DENOMINADOR DE LA F.T. . . .  
SUS COEFICIENTES. . .

SU OPCION ? :

C = CONTINUAR  
F = REINICIAR SESION

OBSERVACIONES: FIGURA 4.3.6 (η)



Autonomía en acción  
1910-1985

# TRABAJO DE TESIS DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

SISTEMA  
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

PANTALLA

CLAVE

U.N.A.M. DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS FAC. DE ING.  
DSC AA.MM.DD

PROPORCIONE :

ASIGNATURA. . .

PROFESOR. . . .

ALUMNO. . . . .

GRUPO . . . . .

LOS DATOS SON CORRECTOS (S/N) ? :

OBSERVACIONES: FIGURA 4.3.6 (r)

#### IV.3.3.3 Criterios de validación.

La validación de la información registrada por el usuario, se llevó a cabo haciendo uso de las facilidades que tiene Fortran 77 para manejo de pantallas. Las validaciones fueron de longitud y tipo. En la FIGURA 4.3.7 (a) - (d) se muestran los criterios de validación.



CRITERIOS DE VALIDACION

VARIABLE		TITULO INTERNO (EN PANTALLA)	VALIDACION			MENSAJES DE MENSAJE	TECNE RACION	UTILIZACION DEL CAMPO	
NOMBRE INTERNO	SUBROUTINA		LONG.	TIPO	VALOR			VALOR	SUBROUTINA DIRECCIONADA
CRIN	SELINF	DESEA INFORMACION BASICA DEL PAQUETE (S,N) ? SELECCION ? :	1	A	S,N,F	REQUERIDA INVALIDA	(*)	S N F	ICRAL MEMPL FINEL5
CRIN	ICRNL	CONTINUAR ? SELECCION ? :	1	A	C,F	REQUERIDA INVALIDA	(*)	C F	MMPL SELIN
MTOD	MMPL	SELECCIONE LA ALTERNATIVA. OPCION ? :	1	I	1,2,3 4	LA ENTREVISTA NO TIENE SUFFICIENTE A NINGUNA OPCION	(*)	1,2,3 4	MMPL SELIN
MPLA	MMPL	SELECCIONE LA CONFIGURACION DEL SISTEMA. SELECCION ? :	1	I	1,2,3 F	LA ENTREVISTA NO TIENE SUFFICIENTE A NINGUNA OPCION	(*)	1,2,3 F	MMPL SELIN
CRIN	INMPL	CONTINUAR ? SELECCION ? :	1	A	C, F	REQUERIDA INVALIDA	(*)	C F	INMPL SELIN

CONSERVACION 3: La validación de variables se efectúa en las subrutinas que leen datos, obteniéndose uno que es válido para continuar la subrutina o para bifurcar a la que corresponda.

NOTA: (\*) - Posicionar el cursor para que se teclee nuevamente el dato.

FIGURA 4.3.7 (a)

CRITERIOS DE VALIDACION

VARIABLE		TITULO EXTERNO (EN PANTALLA)	VALIDACION			MENSAJES DE ERROR	REQUERACION	UTILIZACION DEL CAMPO	
NOMBRE INTERNO	SUBROUTINA		LONG.	TIPO	VALOR			VALOR	SUBROUTINA DIRECCIONADA
WK	INACE	DE EL VALOR DE K:	9 1	F9.4 A	NUM. F	SOLO ACEPTA "F", O UN VALOR REAL MAYOR QUE CERO PARA LA PETROALIMENTACION.	(*)	NUM. F	CRAPOL SEL INF
IGNUM	CRAPOL	GRADO DE Q (Z) (NUMERADOR DE LA F.T.) ?:	9 1	F9.4 A	NUM. F	NO ES OPCION "F" NI ESTA EN RANGO (0 GRADO 99)	(*)	NUM. F	CRAPOL SEL INF
ICDEN	CRAPOL	GRADO DE P (Z) (DENOMINADOR DE LA F.T.) ?:	9 1	F9.4 A	NUM. F	NO ES OPCION "F" NI ESTA EN RANGO (0 GRADO 99)	(*)	NUM. F	CRAPOL SEL INF
A(1) I=0, IONUM	CRAPOL	VALOR DE SU COEFICIENTE A(1) ?:	9 1	F9.4 A	NUM. F	1) SI IONUM=0, GRADO DE EL TERM. INDEP. NO DEBE SER CERO. 2) SOLO ACEPTA "F", O VAL. REAL PARA EL COEF.	(*)	NUM. F	CRAPOL SEL INF
B(1) I=0, ICODN	CRAPOL	VALOR DE SU COEFICIENTE B(1) ?:	9 1	F9.4 A	NUM. F	SOLO ACEPTA "F", O VAL. REAL PARA EL COEF.	(*)	NUM. F	ETRES SEL INF

OBSERVACIONES: La validación de variables se efectúa en las subrutinas que leen datos, obteniéndose uno que es válido para continuar la subrutina o para bifurcar a la que corresponda.

NOTA: (\*). - Posicionar el cursor para que se teclee nuevamente el dato.

FICRA 4.3.7 (b)

CRITERIOS DE VALIDACION

VARIABLE		TITULO EXTERNO (EN PANTALLA)	VALIDACION			MENSAJES DE ERROR	REQUERACION	UTILIZACION DEL CAMPO	
NOMBRE INTERNO	SUBROUTINA		LONG.	TIPO	VALOR			VALOR	SUBROUTINA DIRECCIONADA
CIN	ETNRES	SELECCIONE EL TIPO DE ENTRADA: SU CIRCULO ?:	1	I	1,2,3,4,5	LA ENTRADA NO CORRESPONDE A NINGUNA Opcion	(*)	1,2,3,4,5	ETNRES
			1	A	F			F	SELINF
ILESI	ETNRES	DESPLAZAMIENTO EN TIEMPO ?:	3	I	NUM.	SOLO ACEPTA "F", O UN VALOR ENTERO	(*)	NUM.	ETNRES
			1	A	F			F	SELINF
PESO	ETNRES	PESO ?:	9	F9.4	NUM.	SOLO ACEPTA "F", O UN VALOR REAL	(*)	NUM.	ETNRES
			1	A	F			F	SELINF
AMPLI	ETNRES	AMPLITUD ?:	9	F9.4	NUM.	SOLO ACEPTA "F", O UN VALOR REAL	(*)	NUM.	ETNRES
			1	A	F			F	SELINF
PENDI	ETNRES	PENDIENTE ?:	9	F9.4	NUM.	SOLO ACEPTA "F", O UN VALOR REAL	(*)	NUM.	ETNRES
			1	A	F			F	SELINF

OBSERVACIONES: La validación de variables se efectúa en las subrutinas que leen datos, obteniéndose uno que es válido para continuar la subrutina o para bifurcar a la que corresponda.

NOTA: (\*). - Posicionar el cursor para que se teclee nuevamente el dato.

FIGURA 4.3.7 (c)

CRITERIOS DE VALIDACION

VARIABLE		TITULO EXTERNO (EN PANTALLA)	VALIDACION			MENSAJES DE ERROR	RECUPERACION	UTILIZACION DEL CASO	
NOMBRE INTERNO	SUBROUTINA		LONG.	TIPO	VALOR			VALOR	SUBROUTINA DIRECCIONADA
FREC	ETNRES	FRECUENCIA ?:	9 1	F9.4 A	NUM. F	SOLO ACEPTA "F", O UN VALOR REAL	(*)	NUM. F	ETNRES SELINF
PERIOD	ETNRES	PERIODO DE MUESTREO (T) ?:	9 1	F9.4 A	NUM. F	SOLO ACEPTA "F", O UN VALOR REAL MAYOR QUE 0.0	(*)	NUM. F	ETNRES SELINF
NUMRES	ETNRES	NUMERO DE MUESTRAS ?:	4 1	14 A	NUM. F	SOLO ACEPTA "F", O ENTERO MAYOR QUE (111) Y MENOR QUE 2000	(*)	NUM. F	ETNRES SELINF
GRIN	SELPRO	CONTINUA ? SU OPCION ?:	1	A	C,F	RESUESTA INVALIDA	(*)	C F	SELPRO, IDENTIF SELINF
GRIN	IDENTI	DATOS CORRECTOS: ?	1	A	S,N	RESUESTA INVALIDA	(*)	S N	PROCESO SELPRO

OBSERVACIONES: La validación de variables se efectúa en las subrutinas que leen datos, obteniéndose uno que es válido para continuar la subrutina o para bifurcar a la que corresponda.

NOTA: (\*). - Posicionar el cursor para que se teclee nuevamente el dato.

FIGURA 4.3.7 (d)

#### IV.4 DISEÑO DETALLADO.

Se tomaron en cuenta las siguientes consideraciones para llevar a cabo una programación óptima y funcional. Dadas las características del sistema, su desarrollo fué orientado a un solo programa.

- a) Una subrutina deberá efectuar una función específica dentro del programa. Esto es, la estructura del programa deberá ser modular, considerando cada subrutina como un módulo.
- b) Se debe codificar una sola instrucción por línea. Si una instrucción abarca más de una línea, las líneas restantes deberán ser indentadas de manera que el código sea claro.
- c) La validación complementaria deberá marcar los campos erróneos.
- d) Las pantallas deberán tener definidos los siguientes atributos para los campos que utiliza el usuario con el fin de proporcionar datos al sistema:

--- Video inverso.

--- Señal auditiva.

--- No protegidos.

y los mensajes de error con los siguientes atributos

--- Video inverso.

--- Señal auditiva

--- Protegidos.

#### IV.4.1. DESCRIPCION DE MODULOS.

La descripción de módulos (Subrutinas), hecha en pseudocódigo se detalla a continuación. Las estructuras de control empleadas pueden consultarse en el ANEXO A; y el programa fuente en el ANEXO B.

## DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: DSCTES

TIPO: PROGRAMA PRINCIPAL

OBJETIVO: Discretizacion de sistemas continuos por medio de las aproximaciones: Rectangular hacia adelante, Rectangular hacia atrás y Trapezoidal.

### DESCRIPCION

INICIALIZA VARIABLES

\*INICIO

LLAMA A SUBROUTINA SELINF

SI OPCION = TERMINA SESION

VE A \*FINAL

CSI REQUIERE INFORMACION GENERAL

LLAMA A SUBROUTINA ICPAL

OBTIEN

LLAMA A SUBROUTINA CPAPOL

LLAMA A SUBROUTINA MEMALL

LLAMA A SUBROUTINA IMFACE

LLAMA A SUBROUTINA ETNPRES

LLAMA A SUBROUTINA SELPROP

LLAMA A SUBROUTINA IDENTI

LLAMA A SUBROUTINA PROCESO

VE A \*INICIO

FIN

\*FINAL

LLAMA A SUBROUTINA FINSEL

TERMINA PROGRAMA PRINCIPAL

## DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: SELINE

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Presentar el sistema al usuario dándole opción de obtener información general, iniciar la petición de datos o terminar la sesión.

### DESCRIPCION

DESPLIEGA MENU

ACEPTA DATOS DE OPCION

LLAMA A SUBROUTINA VALIDACION

TERMINA SUBROUTINA



DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: ICRAL

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Proporcionar información general del paquete.

DESCRIPCION

DESPLIEGA INFORMACION GENERAL

SOLICITA OPCION DE ESCAPE

SI QUIERE TERMINAR SESION

REGRESA A SUBROUTINA SELINF

FIN

TERMINA SUBROUTINA

DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: GRAPOL

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Solicitar grados y coeficientes de los polinomios que forman la función de transferencia del sistema a discretizar.

DESCRIPCION

SOLICITA GRADOS Y COEFICIENTES DE LOS POLINOMIOS

LLAMA A SUBROUTINA VALIDACION

REGISTRA DATOS

SOLICITA OPCION DE ESCAPE

LLAMA A SUBROUTINA VALIDACION

SI QUIERE TERMINAR SESION .OR. DAR DATOS NUEVAMENTE

REGRESA A SUBROUTINA SELINF

FIN

TERMINA SUBROUTINA

## DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: MEVALL

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Solicitar la selección de la aproximación numérica a utilizar, así como la configuración del sistema a discretizar.

### DESCRIPCION

DESPLIEGA MENU DE APROXIMACIONES NUMERICAS

SOLICITA OPCION DE APROXIMACION

LLAMA A SUBROUTINA VALIDACION

REGISTRA DATO

DESPLIEGA MENU DE CONFIGURACIONES

SOLICITA OPCION DE CONFIGURACION

LLAMA A SUBROUTINA VALIDACION

REGISTRA DATO

SOLICITA OPCION DE ESCAPE

LLAMA A SUBROUTINA VALIDACION

SI QUIERE TERMINAR SESION .OR. DAR DATOS NUEVAMENTE

REPRESA A SUBROUTINA SELINF

FIN

TERMINA SUBROUTINA

## DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: INMACE

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Mostrar la configuración seleccionada y pedir el valor de la retroalimentación en el caso de malla cerrada.

### DESCRIPCION

SI CONFIGURACION = MALLA ABIERTA

DESPLIEGA REPRESENTACION GRAFICA DE MALLA ABIERTA

OTRO

DESPLIEGA REPRESENTACION GRAFICA DE MALLA CERRADA

SOLICITA VALOR DE LA RETROALIMENTACION

LLAMA A SUBROUTINA VALIDACION

REGISTRA DATO

FIN

SOLICITA OPCION DE ESCAPE

LLAMA A SUBROUTINA VALIDACION

SI QUIERE TERMINAR SESION .OR. DAR DATOS NUEVAMENTE

REGRESA A SUBROUTINA SFLINE

FIN

TERMINA SUBROUTINA

## DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: ETNRES

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Solicitar tipo y datos de la señal de entrada, valor del período y el número de muestras a obtener.

### DESCRIPCION

DESPLIEGA MENU DE TIPOS DE ENTRADA

SOLICITA OPCION DE TIPO DE ENTRADA

LLAMA A SUBROUTINA VALIDACION

REGISTRA DATO

VE A (10,20,30,40,50) DEACUERDOA OPCION

10 DESPLIEGA "PULSO"

SOLICITA DESPLAZAMIENTO EN TIEMPO Y PESO

LLAMA A SUBROUTINA VALIDACION

REGISTRA DATO

VE A 60

20 DESPLIEGA "ESCALON"

SOLICITA DESPLAZAMIENTO EN TIEMPO Y AMPLITUD

LLAMA A SUBROUTINA VALIDACION

REGISTRA DATO

VE A 60

30 DESPLIEGA "RAMPA"

SOLICITA DESPLAZAMIENTO EN TIEMPO Y PENDIENTE

LLAMA A SUBROUTINA VALIDACION

REGISTRA DATO

VE A 60

## DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: ETNRES

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Solicitar tipo y datos de la señal de entrada, valor del período y el número de muestras a obtener.

### DESCRIPCION

40 DESPLIEGA "SENO"  
SOLICITA AMPLITUD Y FRECUENCIA  
LLAMA A SUBROUTINA VALIDACION  
REGISTRA DATO  
VE A 60

50 DESPLIEGA "COSENO"  
SOLICITA AMPLITUD Y FRECUENCIA  
LLAMA A SUBROUTINA VALIDACION  
REGISTRA DATO

60 SOLICITA VALOR DEL PERIODO  
LLAMA A SUBROUTINA VALIDACION  
REGISTRA DATO  
SOLICITA EL NUMERO DE MUESTRAS A OBTENER  
LLAMA A SUBROUTINA VALIDACION  
REGISTRA DATO  
SOLICITA OPCION DE ESCAPE  
SI QUIERE TERMINAR SESION .OR. DAR DATOS NUEVAMENTE  
REGRESA A SUBROUTINA SELINF  
FIN

TERMINA SUBROUTINA

## DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: SELPRO

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Mostrar al usuario los datos que proporcionó para su verificación.

### D E S C R I P C I O N

DESPLIEGA TABLA DE DATOS PROPORCIONADOS POR EL USUARIO

SOLICITA OPCION DE VERIFICACION DE DATOS

LLAMA A SUBROUTINA VALIDACION

SI DATOS INCORRECTOS

REGRESA A SUBROUTINA SELINF

FIN

TERMINA SUBROUTINA

## DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: IDENTI

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Registrar datos generales del usuario.

### DESCRIPCION

SOLICITA DATOS GENERALES DEL USUARIO

SOLICITA OPCION DE VERIFICACION DE DATOS

LLAMA A SUBROUTINA VALIDACION

SI DATOS INCORRECTOS

SOLICITA NUEVAMENTE LOS DATOS

FIN

TERMINA SUBROUTINA



## DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: VALIDACION

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Efectuar la validación y recuperación de errores.

### DESCRIPCION

VALIDA DATO DE OPCION

SI DATO INCORRECTO

DESPLEGAR MENSAJE DE ERROR CORRESPONDIENTE

SOLICITAR NUEVAMENTE EL DATO

FIN

TERMINA SUBROUTINA

## DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: PROCESO

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Procesar los datos de acuerdo a las opciones seleccionadas por el usuario.

### DESCRIPCION

- LLAMA A SUBROUTINA GENENT  
LLAMA A SUBROUTINA ARCHTEMP  
VE A (10,20,30) DEACUERDO A CONFIGURACION
- 10 VE A (12,14,16,18) DEACUERDO A APROXIMACION
- 12 DESPLIEGA "RECTANGULAR HACIA ADELANTE, MALLA ABIERTA"  
LLAMA A SUBROUTINA RECADEL  
TERMINA SUBROUTINA
- 14 DESPLIEGA "RECTANGULAR HACIA ATRAS, MALLA ABIERTA "  
LLAMA A SUBROUTINA RECATIVA  
TERMINA SUBROUTINA
- 16 DESPLIEGA "TRAPEZOIDAL, MALLA ABIERTA"  
LLAMA A SUBROUTINA TRAP  
TERMINA SUBROUTINA
- 18 DESPLIEGA "LAS TRES APROXIMACIONES, MALLA ABIERTA"  
LLAMA A SUBROUTINA RECADEL  
LLAMA A SUBROUTINA RECATRA  
LLAMA A SUBROUTINA TRAP  
TERMINA SUBROUTINA
- 20 LLAMA A SUBROUTINA MACER

## DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: PROCESO

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Procesar los datos de acuerdo a las opciones seleccionadas por el usuario.

### DESCRIPCION

- VE A (22,24,26,28) DEACUERDO A APROXIMACION
- 22 DESPLIEGA "RECTANGULAR HACIA ADELANTE, MALLA CERRADA"  
LLAMA A SUBROUTINA RECADEL  
TERMINA SUBROUTINA
- 24 DESPLIEGA "RECTANGULAR HACIA ATRAS, MALLA CERRADA "  
LLAMA A SUBROUTINA RECATPA  
TERMINA SUBROUTINA
- 26 DESPLIEGA "TRAPEZOIDAL, MALLA CERRADA"  
LLAMA A SUBROUTINA TRAP  
TERMINA SUBROUTINA
- 28 DESPLIEGA "LAS TRES APROXIMACIONES, MALLA CERRADA"  
LLAMA A SUBROUTINA RECADEL  
LLAMA A SUBROUTINA RECATPA  
LLAMA A SUBROUTINA TRAP  
TERMINA SUBROUTINA
- 30 VE A (32,34,36,38) DEACUERDO A APROXIMACION
- 32 DESPLIEGA "RECTANGULAR HACIA ADELANTE, MALLA ABIERTA"  
LLAMA A SUBROUTINA RECADEL  
DESPLIEGA "RECTANGULAR HACIA ADELANTE, MALLA CERRADA"  
LLAMA A SUBROUTINA MACER

## DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: PROCESO

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Procesar los datos de acuerdo a las opciones seleccionadas por el usuario.

### DESCRIPCION

LLAMA A SUBROUTINA RECADEL

TERMINA SUBROUTINA

34 DESPLIEGA "RECTANGULAR HACIA ATRAS, MALLA ABIERTA "

LLAMA A SUBROUTINA RECATRA -

DESPLIEGA "RECTANGULAR HACIA ATRAS, MALLA CERRADA"

LLAMA A SUBROUTINA MACER

LLAMA A SUBROUTINA RECATRA

TERMINA SUBROUTINA

36 DESPLIEGA "TRAPEZOIDAL, MALLA ABIERTA"

LLAMA A SUBROUTINA TRAP

DESPLIEGA "TRAPEZOIDAL "MALLA CERRADA"

LLAMA A SUBROUTINA MACER

LLAMA A SUBROUTINA TRAP

TERMINA SUBROUTINA

38 DESPLIEGA "LAS TRES APROXIMACIONES, MALLA ABIERTA"

LLAMA A SUBROUTINA RECADEL

LLAMA A SUBROUTINA RECATRA

LLAMA A SUBROUTINA TRAP

DESPLIEGA "LAS TRES APROXIMACIONES, MALLA CERRADA"

DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: PROCESO

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Procesar los datos de acuerdo a las opciones seleccionadas por el usuario.

DESCRIPCION

LLAMA A SUBROUTINA MACER

LLAMA A SUBROUTINA RECADEL

LLAMA A SUBROUTINA RECATPA

LLAMA A SUBROUTINA TPAP

TERMINA SUBROUTINA

TERMINA SUBROUTINA

## DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: GENENT

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Generar el vector de datos de la señal de entrada de acuerdo al tipo de esta.

### DESCRIPCION

VE A (10,20,30,40,50) DEACUERDO A TIPO DE ENTRADA

10 GENERA VECTOR U DE ENTRADA PARA PULSO

TERMINA SUBROUTINA

20 GENERA VECTOR U DE ENTRADA PARA ESCALON

TERMINA SUBROUTINA

30 GENERA VECTOR U DE ENTRADA PARA RAMPA

TERMINA SUBROUTINA

40 GENERA VECTOR U DE ENTRADA PARA SEND

TERMINA SUBROUTINA

50 GENERA VECTOR U DE ENTRADA PARA COSEND

TERMINA SUBROUTINA

TERMINA SUBROUTINA

## DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: ARCHTEMP

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Inicializar un archivo temporal con los datos generales del usuario (este archivo se complementa con los datos de los resultados obtenidos).

### DESCRIPCION

ESCRIBE DATOS GENERALES DEL USUARIO

ESCRIBE TABLA DE DATOS Y OPCIONES DEL USUARIO

TERMINA SUBROUTINA

## DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: MACER

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Aplicar el valor de la retroalimentación a los polinomios que forman la función de transferencia en el caso de malla cerrada.

### DESCRIPCION

A VECTOR QUE CONTIENE LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO DEL NUMERADOR DE LA F.T.

B VECTOR QUE CONTIENE LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO DEL DENOMINADOR DE LA F.T.

M VECTOR AUXILIAR DE CALCULO

DESDE I=0 HASTA GRADO POL. DEL NUMERADOR PASO 1

M(I) <--- A(I) \* RETROALIMENTACION

FIN

K1 <--- GRADO DEL POL. DEL DENOMINADOR

DESDE I=GRADO DEL POL. DEL NUMERADOR HASTA 0 PASO -1

B(K1) <--- B(K1) + M(I)

K1 <--- K1-1

FIN

TERMINA SUBROUTINA



## DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: RECADEL

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Generar la ecuación en diferencias mediante la aproximación rectangular hacia adelante, evaluarla desplegando la tabla de resultados y almacenándolos a su vez, en un archivo temporal

### DESCRIPCION

- A VECTOR QUE CONTIENE LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO DEL NUMERADOR DE LA F.T.
- B VECTOR QUE CONTIENE LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO DEL DENOMINADOR DE LA F.T.
- U VECTOR DE LA SEÑAL DE ENTRADA AL SISTEMA DISCRETIZADO
- Y VECTOR RESULTADO QUE CONTIENE LOS COEFICIENTES DE LA ECUACION EN DIFERENCIAS.
- C,D VECTORES AUXILIARES DE CALCULO

"ALGORITMO DE LA EXPRESION CRAL. OBTENIDA EN EL CAP. III"

DESDE I=0 HASTA GRADO DEL POL. DEL DENOMINADOR PASO 1

R(I) ←-- B(I) \* (PERIODO \*\* I)  
FIN

DESDE I=0 HASTA GRADO DEL POL. DEL NUMERADOR PASO 1

A(I) ←-- A(I) \* (PERIODO \*\* (GRADO DEL POL. DEL NUM.  
- GRADO DEL POL. DEL DENOMINADOR + 1))  
FIN

L = 0

DESDE J = GRADO POL. DEL DENOMINADOR HASTA 0 PASO -1

K = GRADO DEL POL. DEL DENOMINADOR

DESDE I = J HASTA 0 PASO -1

CALCULO DE FACTORIALES EN BASE AL GRADO  
DEL POL. DEL DENOMINADOR

## DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: RECADEL

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Generar la ecuación en diferencias mediante la aproximación rectangular hacia adelante, evaluarla desplegando la tabla de resultados y almacenándolos a su vez, en un archivo temporal

### DESCRIPCION

C(K) <--- C(K) + B(L) \* (FACTORIAL CALCULADO \* ((-1) \*\* J))

K <--- K-1

FIN

L <--- L + 1

FIN

DESDE J = GRADO POL. DEL NUMERADOR HASTA 0 PASO -1

K = GRADO DEL POL. DEL DENOMINADOR

DESDE I = J HASTA 0 PASO -1

CALCULO DE FACTORIALES EN BASE AL GRADO DEL POL. DEL NUMERADOR

D(K) <--- D(K) + A(L) \* (FACTORIAL CALCULADO \*\* J)

K <--- K-1

FIN

L <--- L + 1

FIN

DESPLIEGA "LA ECUACION EN DIFERENCIA ES: Y(K) = "

DESDE I = 0 HASTA GRADO DEL POL. DEL DENOMINADOR PASO 1

DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: RECADEL

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Generar la ecuación en diferencias mediante la aproximación rectangular hacia adelante, evaluarla desplegando la tabla de resultados y almacenándolos a su vez, en un archivo temporal

DESCRIPCION

X <--- D(I) / C(0)

DESPLIEGA, X, "U(K - ", I, ")"

ESCRIBE X, "U(K - " , I, ")" EN ARCHIVO

FIN

DESDE I = 1 HASTA GRADO DEL POL. DEL DENOMINADOR PASO 1

X <--- - C(I) / C(0)

IMPRIME, X, "Y(K - ", I, ")" EN PANTALLA Y ARCH.

FIN

"EVALUACION DE LA ECUACION EN DIFERENCIAS"

DESDE J = 0 HASTA NUMERO DE MUESTRAS

DESDE I = 0 HASTA (GRADO POL. DEL DENOM. -1 PASO 1

Y(J) <--- (D(I+1) / C(0)) \* U (J-I-1) -

(C(I+1) / C(0)) \* Y(J-I-1) + Y (J)

FIN

FIN

"DESPLIEGA Y ALMACENA LOS RESULTADOS"

IMPRIME TITULOS "I", "U(I)", "Y(I)" EN PANTALLA Y ARCH.

DESDE I = 0 HASTA NUMERO DE MUESTRAS

IMPRIME I, U(I), Y(I) EN PANTALLA Y ARCHIVO

FIN

TERMINA SUBROUTINA

## DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: RECATRA

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Generar la ecuación en diferencias mediante la aproximación rectangular hacia atrás, evaluarla desplegando la tabla de resultados y almacenándolos a su vez, en un archivo temporal

### DESCRIPCION

- A VECTOR QUE CONTIENE LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO DEL NUMERADOR DE LA F.T.
- B VECTOR QUE CONTIENE LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO DEL DENOMINADOR DE LA F.T.
- U VECTOR DE LA SEÑAL DE ENTRADA AL SISTEMA DISCRETIZADO
- Y VECTOR RESULTADO QUE CONTIENE LOS COEFICIENTES DE LA ECUACION EN DIFERENCIAS
- C,D VECTORES AUXILIARES DE CALCULO

"ALGORITMO DE LA EXPRESION GRAL. OBTENIDA EN EL CAP. III"

DESDE I=0 HASTA GRADO DEL POL. DEL DENOMINADOR PASO 1

B(I) <--- B(I) \* (PERIODO \*\* I)

FIN

DESDE I=0 HASTA GRADO DEL POL. DEL NUMERADOR PASO 1

A(I) <--- A(I) \* (PERIODO \*\* (GRADO DEL POL. DEL DENOMINADOR - GRADO DEL POL. DEL NUMERADOR + I))

FIN

DESDE J=0 HASTA GRADO DEL POL. DEL DENOMINADOR PASO 1

DESDE I=0 HASTA (GRADO DEL POL. DEL NUM. - J) PASO 1

CALCULO DE FACTORIALES EN BASE AL GRADO

DEL POL. DEL DENOMINADOR

## DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: RECATRA

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Generar la ecuación en diferencias mediante la aproximación rectangular hacia atrás, evaluarla desplegando la tabla de resultados y almacenándolos a su vez, en un archivo temporal

### DESCRIPCION

$C(J) \leftarrow C(J) + B(I) * (\text{FACTORIAL CALCULADO} * (-1) ** J)$

FIN

FIN

DESDE J=0 HASTA GRADO DEL POL. DEL NUMERADOR PASO 1

DESDE I=0 HASTA (GRADO DEL POL. DEL NUM.-J) PASO 1

CALCULO DE FACTORIALES EN BASE AL GRADO DEL POL. DEL NUMERADOR

$D(J) \leftarrow D(J) + A(I) * (\text{FACTORIAL CALCULADO} * (-1) ** J)$

FIN

FIN

DESPLIEGA "LA ECUACION DE DIFERENCIA ES: Y(K) = "

DESDE I=1 HASTA GRADO DEL POL. DEL NUMERADOR PASO 1

$X \leftarrow D(I) / C(0)$

IMPRIME X, "U(K - ", I, ")" EN PANTALLA Y ARCH.

FIN

DESDE I=1 HASTA GRADO DEL POL. DEL DENOMINADOR PASO 1

$X \leftarrow - C(I) / C(0)$

IMPRIME, X, "Y(K - ", I, ")" EN PANTALLA Y ARCH.

FIN

## DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: RECATRA

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Generar la ecuación en diferencias mediante la aproximación rectangular hacia atrás, evaluarla desplegando la tabla de resultados y almacenándolos a su vez, en un archivo temporal

### DESCRIPCION

"EVALUACION DE LA ECUACION EN DIFERENCIAS"

DESDE J=0 HASTA NUMERO DE MUESTRAS

DESDE I=0 HASTA (GRADO POL. DEL DENOM. -1) PASO 1

$Y(J) \leftarrow (D(I) / C(0)) * U(J-1) -$

$(C(I+1) / C(0)) * Y(J-1) + Y(J)$

FIN

FIN

"DESPLIEGA Y ALMACENA LOS RESULTADOS"

IMPRIE TITULOS "I", "U(I)", "Y(I)" EN PANTALLA Y ARCH.

DESDE I=0 HASTA NUMERO DE MUESTRAS

IMPRIE I, U(I), Y(I) EN PANTALLA Y ARCHIVO

FIN

TERMINA SUBROUTINA

## DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: TRAP

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Generar la ecuación en diferencias mediante la aproximación trapezoidal, evaluarla desplegando la tabla de resultados y almacenándolos a su vez, en un archivo temporal.

### DESCRIPCION

- A VECTOR QUE CONTIENE LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO DEL NUMERADOR DE LA F.T.
- B VECTOR QUE CONTIENE LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO DEL DENOMINADOR DE LA F.T.
- U VECTOR DE LA SEÑAL DE ENTRADA AL SISTEMA DISCRETIZADO
- Y VECTOR RESULTADO QUE CONTIENE LOS COEFICIENTES DE LA ECUACION EN DIFERENCIAS

C,D VECTORES AUXILIARES DE CALCULO

"ALGORITMO DE LA EXPRESION OPAL. OBTENIDA EN EL CAP.111"

DESDE I=0 HASTA GRADO DEL POL. DEL DENOMINADOR PASO 1

B(I) <-- B(I) \* (PERIODO \*\* I) \* (\*\* (GRADO POL. DEL DENOMINADOR - I))

FIN

DESDE I=0 HASTA GRADO DEL POL. DEL NUMERADOR PASO 1

A(I) <-- A(I) \* (PERIODO \*\* (GRADO DEL POL. DEL DENOM. - GRADO DEL POL. DEL NUM. + 1)) \* (2\*\*(GRADO POL. NUMERADOR - I))

FIN

DESDE I=0 HASTA GRADO POL. DEL DENOMINADOR PASO 1

DESDE J=0 HASTA I PASO 1

## DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: TRAP

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Generar la ecuación en diferencias mediante la aproximación trapezoidal, evaluarla desplegando la tabla de resultados y almacenándolos a su vez, en un archivo temporal.

### DESCRIPCION

```

DESDE K=0 HASTA (GRADO POL. DEL DENOM. -1) PASO 1
  CALCULO DE FACTORIALES EN BASE AL GRADO DEL
  POL. DEL DENOMINADOR
  C(I+K-J) <--- C(I+K-J) + B(I)* (FACTORIAL CAL-
  CULADO * ((-1)**K))
  FIN
FIN
FIN
LL <--- GRADO POL. DEL DENOM. - GRADO POL. DEL NUM.
REPETIR
  DESDE I=0 HASTA GRADO POL. NUM. PAOS 1
  DESDE J=0 HASTA I PASO 1
  DESDE K=0 HASTA (GRADO POL. NUM. -1) PASO 1
  CALCULO FACT. EN BASE AL GRADO POL. DEL NUM.
  C(I+K-J+LL) <--- C(I+K-J+LL) + A(I) *
  (FACTORIAL CALCULADO * ((-1)**K))
  FIN
  FIN
  FIN
  LL <--- LL-1
HASTA LL=0
    
```



## DESCRIPCIÓN DE MÓDULOS

MÓDULO: TRAP

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Generar la ecuación en diferencias mediante la aproximación trapezoidal, evaluarla desplegando la tabla de resultados y almacenándolos a su vez, en un archivo temporal.

### DESCRIPCIÓN

DESPLIEGA "LA ECUACION DE DIFERENCIA ES:  $Y(K) = "$   
 DESDE I=1 HASTA GRADO DEL POL. DEL NUMERADOR PASO 1  
 $X \leftarrow D(I) / C(0)$   
 IMPRIME X, "U(K - ", I, ")" EN PANTALLA Y ARCH.

FIN

DESDE I=1 HASTA GRADO DEL POL. DEL DENOMINADOR PASO 1  
 $X \leftarrow - C(I) / C(0)$   
 IMPRIME, X, "Y(K - ", I, ")" EN PANTALLA Y ARCH.

FIN

"EVALUACION DE LA ECUACION EN DIFERENCIAS"

DESDE J=0 HASTA NUMERO DE MUESTRAS

DESDE I=0 HASTA (GRADO POL. DEL DENOM. -1) PASO 1  
 $Y(J) \leftarrow (D(I) / C(0)) * U(J-I-1) -$   
 $(C(I+1) / C(0)) * Y(J-I-1) + Y(J)$

FIN

FIN

"DESPLIEGA Y ALMACENA LOS RESULTADOS"

IMPRIME TITULOS "I", "U(I)", "Y(I)" EN PANTALLA Y ARCH.

DESDE I=0 HASTA NUMERO DE MUESTRAS

IMPRIME I, U(I), Y(I) EN PANTALLA Y ARCHIVO

FIN

TERMINA SUBROUTINA

## DESCRIPCION DE MODULOS

MODULO: TITULO

TIPO: SUBROUTINA

OBJETIVO: Desplegar los títulos que aparecen en todas las pantallas, con información general de la sesión.

### DESCRIPCION

DESPLEGAR INSTITUCION, NOMBRE DEL SISTEMA Y FECHA ACTUAL

DESPLEGAR OPCIONES DE ESCAPE DE LAS PANTALLAS

TERMINA SUBROUTINA

#### IV.4.2 DESCRIPCION DE VARIABLES

A continuación se listan las variables más importantes utilizadas en el programa, con una breve explicación de su significado así, como las subrutinas con que se relaciona.



# TRABAJO DE TESIS

## DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

SISTEMA DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS HOJA 1 DE 3

### DESCRIPCION DE VARIABLES

VARIABLE	TIPO	DESCRIPCION	SUBROUTINAS CON LAS QUE SE RELACIONA
CRIN	ALFAB.	STRING DE DATOS DE ENTRADA.	SELINF IGRAL INMACE ETNRES SELPRO IDENTI
METODO	ENTERA	TIPO DE APROXIMACION.	MEMALL PROCESO
MALLA	ENTERA	TIPO DE CONFIGURACION.	MEMALL PROCESO
VK	REAL	VALOR DE RETROALIMENTACION.	INMACE PROCESO
IGNLM	ENTERA	GRADO DEL POLINOMIO DEL DENOMINADOR DE LA FUNCION TRANSFERENCIA.	GRAPOL SELPRO PROCESO MACER RECADEL PFCATRA TRAP ARCHTEM
IGDEN	ENTERA	GRADO DEL POLINOMIO DEL NUMERADOR DE LA FUNCION TRANSFERENCIA.	GRAPOL SELPRO PROCESO MACER RECADEL RECATRA TRAP ARCHTEM



# TRABAJO DE TESIS

## DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

SISTEMA DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

HOJA 2 DE 3

### DESCRIPCION DE VARIABLES

VARIABLE	TIPO	DESCRIPCION	SUBROUTINAS CON LAS QUE SE RELACIONA
A(I) I=0, IGNU	REAL	COEFICIENTES DEL POLINOMIO DEL NUMERADOR DE LA FUNCION TRANSFERENCIA.	GRAPOL SELPRO PROCESO MACER RECADEL RECATRA TRAP ARCHTEM
B(I) I=0, ICODE	REAL	COEFICIENTES DEL POLINOMIO DEL DENOMINADOR DE LA FUNCION TRANSFERENCIA.	GRAPOL SELPRO PROCESO MACER RECADEL RECATRA TRAP ARCHTEM
IDESP	ENTERA	DESPLAZAMIENTO EN TIEMPO.	ETNRES SELPRO GENENT
PESO	REAL	PESO (SEÑAL DE ENTRADA: PULSO).	ETNRES SELPRO GENENT
AMPLI	REAL	AMPLITUD.	ETNRES SELPRO GENENT
PENDI	REAL	PENDIENTE	ETNRES SELPRO GENENT



# TRABAJO DE TESIS

## DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

SISTEMA DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS HOJA 3 DE 3

### DESCRIPCION DE VARIABLES

VARIABLE	TIPO	DESCRIPCION	SUBROUTINAS CON LAS QUE SE RELACIONA
FREC	REAL	FRECUENCIA.	ETNRES SELPRO GENENT
PERIOD	REAL	PERIODO DE MUESTREO.	ETNRES SELPRO GENENT RECADEL RECATRA TRAP
NUMMUES	ENTERA	NUMERO DE MUESTRAS A OBTENER.	ETNRES SELPRO RECADEL RECATRA TRAP ARCHTEM

#### IV.5. IMPLEMENTACION.

En esta sección se describe la estrategia utilizada durante la prueba y depuración de cada uno de los módulos y su integración como sistema, para cumplir con los requerimientos establecidos (IV.5.1).

El manual de operación se encuentra en el inciso (IV.5.2) y en el (IV.5.3) se muestran los resultados obtenidos mediante el sistema computarizado.

##### IV.5.1 ESTRATEGIAS DE PRUEBA DEL SISTEMA COMPUTARIZADO.

Los pasos de elaboración del modelo de prueba se hicieron pensando en demostrar que el sistema funcionaba correctamente, con la finalidad de encontrar los errores que aún pudieran existir para corregirlos e ir afinando el sistema.

En la realización de las pruebas se siguieron los siguientes lineamientos:

- a) Las subrutinas se probarán exhaustivamente y de modo individual, para tratar de detectar los posibles errores.
- b) Una vez ligado los módulos se hará un prueba integral del sistema.
- c) Se usarán las técnicas de caja negra y caja blanca, tratando de complementar ambas.

d) Durante la prueba se tendrán los siguientes datos bien identificados:

- Nombre del módulo que se esta probando.
- Datos de entrada.
- respuesta esperada.
- Mensajes de error.

Con lo anterior se logró una consistencia en todo el sistema, para un mejor funcionamiento y menor probabilidad de falla.



#### IV.5.2 MANUAL DE OPERACION

A continuación se encuentra el Manual de Operación, que puede ser utilizado independientemente de este trabajo, el cual contiene las indicaciones necesarias para el uso del sistema computarizado.



# DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

HOJA 1 DE 19

MANUAL DE OPERACION.

FECHA

## INDICE

1. Introducción.
2. Objetivo.
3. Diagramas.
  - 3.1 Diagrama general del sistema.
  - 3.2 Diagrama relacional de pantallas.
4. Funcionamiento del sistema.
5. Limitaciones.



## 1. Introducción.

El paquete "DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS" (D S C ), fué ideado como un apoyo para análisis y síntesis de sistemas discretos, en las materias "Control digital" y "Análisis de Sistemas Discretos" que se imparten en la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M..

D S C opera a través del uso de pantallas, teniendo como características principales:

- a) Tiene un módulo para proporcionar información general del paquete.
- b) El paquete permite la discretización de un sistema continuo especificado por el usuario.
- c) Los resultados son proporcionados en forma de tabla, fáciles de graficar.

D S C Fué diseñado por un alumno de la Facultad de Ingeniería para la obtención del título de Ingeniero en Computación, con el tema "DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS POR MEDIO DE INTEGRACION NUMERICA".



# DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

HOJA 3 DE 19

MANUAL DE OPERACION

FECHA

## 2. Objetivo.

El objetivo del paquete D S C es la discretización de sistemas continuos en forma automatizada, por medio de interacción numérica con las técnicas de aproximación Rectangular hacia adelante, Rectangular hacia atrás y Trapezoidal.



### 3. DIAGRAMAS.

A continuación se muestra el diagrama general del sistema en el inciso (3.1) y el diagrama relacional de pantallas en el inciso (3.2) mediante las FIGURAS 3.1 y 3.2 respectivamente.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA

TRABAJO DE TESIS  
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS  
DISEÑO DE DIAGRAMAS

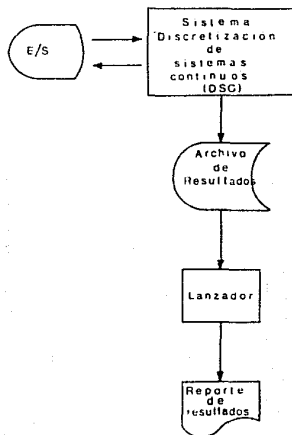
5 DE 19

SISTEMA

TIPO DE DIAGRAMA

DISEÑADO POR

OBSERVACIONES:





# TRABAJO DE TESIS

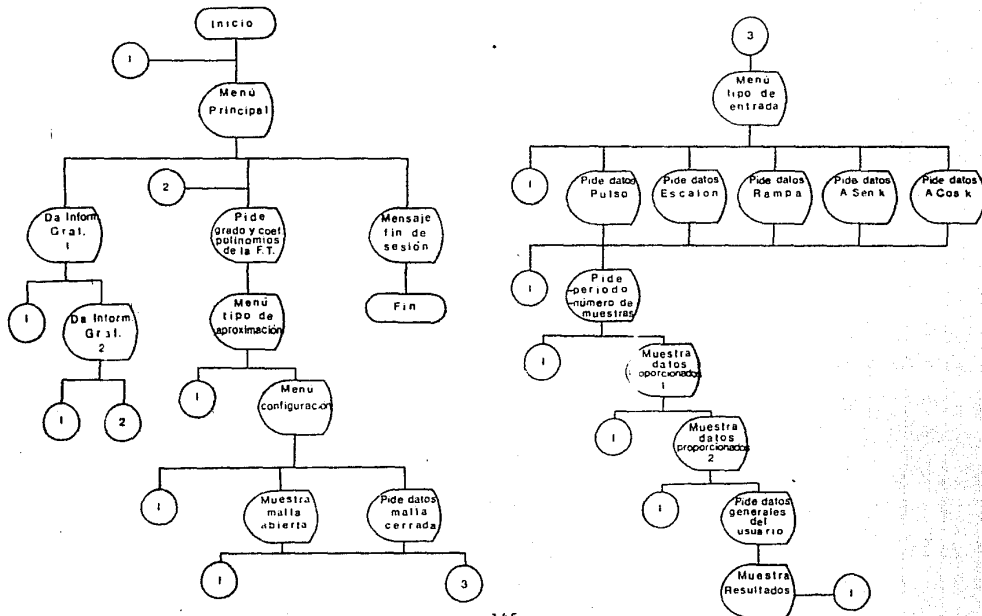
## DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

### DISEÑO DE DIAGRAMAS

6 DE 19

SISTEMA.

TIPO DE DIAGRAMA





## DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

HOJA 7 DE 19

MANUAL DE OPERACION.

FECHA

#### 4. FUNCIONAMIENTO.

D S C hace uso de pantallas en forma interactiva por lo que el acceso al sistema será de la siguiente manera:

- a) Entrar a la cuenta mediante la clave y password asignados.
- b) Teclar el nombre asignado al sistema:

DSC return

Desplegará inmediatamente la pantalla de presentación. El sistema interpreta correctamente la información proporcionada, debido a que posiciona automáticamente el cursor en la posición adecuada para que el usuario teclee la información, además despliega ésta en video inverso y con señal auditiva.

- c) Procesamiento de pantallas.

Para que el sistema registre la información proporcionada por el usuario y continúe con la sesión se oprime la tecla return, con lo cual el sistema solicita el siguiente dato de la pantalla o cambia a la siguiente.

Una vez proporcionados todos los datos de la pantalla en la que se esté, el usuario no podrá regresar a las





## DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

HOJA 8 DE 19

MANUAL DE OPERACION,

FECHA

pantallas anteriores, por lo que para realizar esta operación deberá teclear la letra F, con lo cual se reinicia la sesión, teniéndose en ese momento la opción de terminarla tecleando otra letra F, o bien la letra C para proporcionar nuevos datos a procesar.

d) Corrección de errores en las pantallas.

Cuando el usuario proporciona un dato incorrecto y lo registra oprimiendo la tecla return, el sistema despliega un mensaje de error, en el cual se explica en que consistió, permitiéndole proporcionar nuevamente el dato.

e) Estandarización de pantallas.

En la figura 3 se muestran los campos que a continuación se explican:

1. Siglas de la institución.

Longitud : 8 caracteres.

Atributos: Video inverso, protegido.

2. Nombre del sistema.

Longitud : 36 caracteres.

Atributos: Video inverso, protegido.



## 3. Nombre del área de aplicación.

Longitud : 12 caracteres.

Atributos: Video inverso, protegido.

## 4. Siglas del nombre del sistema (const., "D S C")

Longitud : 5 caracteres.

Atributos: Video inverso, protegido.

## 5. Fecha (variable: contiene la fecha del día de la sesión).

Longitud : 9 caracteres.

Atributos: Video inverso, protegido.

## 6. Cuerpo de la pantalla.

Area para variables y literales que dependen directamente de la transacción.

Variables: campos que proporciona el usuario.

Atributos: Video inverso, señal auditiva.

Constantes: Dan explicación del campo variable donde se solicita información.

Atributos: Brillo normal con letras mayúsculas alineadas.



Universidad Nacional  
de Tucumán

DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

HOJA 10 DE 19

MANUAL DE OPERACION.

FECHA

7. Area de mensajes.

Area que indica opciones de escape.

Longitud : 32 caracteres.

Atributos: Video inverso, protegido.

8. Area de mensajes de error.

Indica el error en el momento de proceso.

Longitud : 80 caracteres.

Atributos: Brillo normal, señal auditiva.



Acción Comunal  
Libertad

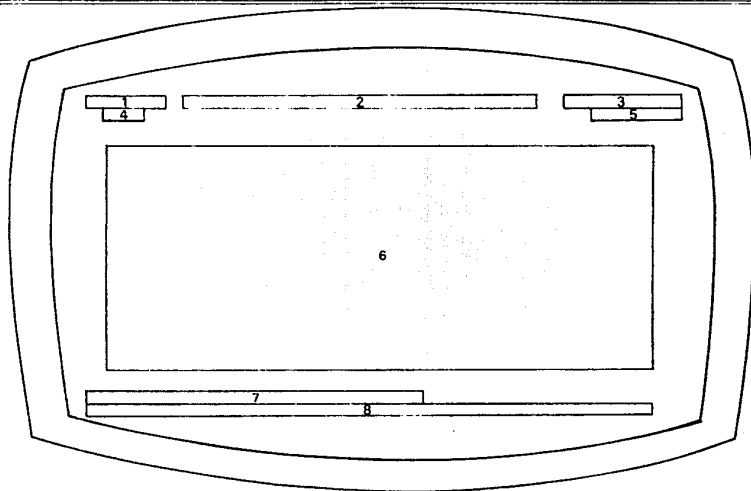
TRABAJO DE TESIS  
DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

11 DE 19

SISTEMA

PANTALLA

CLAVE



OBSERVACIONES:



# DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

HOJA 12 DE 19

MANUAL DE OPERACION.

FECHA

### 3. CODIFICACION DE DATOS DE ENTRADA.

Una manera de proporcionar fácilmente los datos que solicita el sistema, es llenando de antemano el formato precodificado que a continuación se muestra, en el cual se codifica la información, tal como aparece en las pantallas a lo largo de la sesión.



# DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

HOJA 13 DE 19

MANUAL DE OPERACIONES

FECHA

A continuación se explica el procedimiento para proporcionar los datos al sistema como son solicitados en la sesión.

I. DESEA INFORMACION GENERAL DEL PAQUETE? (S/N)

Deberá seleccionarse la letra S si requiere información general del paquete; la letra N para continuar, o bien la letra F para terminar la sesión.

II. PROPORCIONE:

GRADO DE Q(S) (POLINOMIO DEL NUMERADOR DE LA F.T.)

GRADO DE P(S) (POLINOMIO DEL DENOMINADOR DE LA F.T.)

El dato esperado por el sistema está en el rango  $[00,99]$ ; en el caso que sea de un dígito, deberá anteponerse un blanco o un cero. El grado de P(S) deberá ser mayor al de Q(S).

OPCION F. Regresa a la pantalla inicial (Inciso I).

VALOR DE LOS COEFICIENTES DE Q(S)

A(i) =

VALOR DE LOS COEFICIENTES DE P(S)

B(i) =



## DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

HOJA 14 DE 19

MANUAL DE OPERACION

FECHA

El sistema automáticamente solicita  $(n+1)$  coeficientes para los polinomios de numerador y denominador de la función transferencia, donde  $n$  es el grado del polinomio;  $i=0, 1, \dots, n$ .

Los datos deberán proporcionarse con punto decimal.

OPCION F. Regresa a la pantalla inicial (Inciso I).

### III. SELECCIONE LA APROXIMACION:

LI

1. RECTANGULAR HACIA ADELANTE.
2. RECTANGULAR HACIA ATRAS.
3. TRAPEZOIDAL.
4. LAS TRES APROXIMACIONES.

Deberá seleccionarse el número correspondiente a la opción deseada.

OPCION F. Regresa a la pantalla inicial (Inciso I).

### IV. SELECCIONE LA CONFIGURACION DEL SISTEMA:

LI

1. MALLA ABIERTA.
2. MALLA CERRADA.
3. AMBAS APROXIMACIONES.

Deberá seleccionarse el número correspondiente a la opción deseada.

OPCION F. Regresa a la pantalla inicial (Inciso I).



# DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

HOJA 15 DE 19

MANUAL DE OPERACION.

FECHA

V. PROPORCIONE EL VALOR DE LA RETROALIMENTACION.

$K =$  [ | | | | | | | | | | ]

Solo se pide este dato, cuando se seleccionó la configuración de malla cerrada (inciso III).

El dato deberá proporcionarse con punto decimal.

OPCION F. Regrese a la pantalla inicial (Inciso I).

VI. SELECCIONE EL TIPO DE ENTRADA

[ | ]

1. PULSO.
2. ESCALON.
3. RAMPA.
4. A SEN K.
5. A COS K.

Deberá seleccionarse el número correspondiente a la opción deseada.

OPCION F. Regresa a la pantalla inicial (Inciso I).

Según la opción seleccionada podrán pedirse los siguientes datos:

OPCION 1. PULSO

DESPLAZAMIENTO EN TIEMPO

[ | | | | ]

PESO

[ | | | | | | | | ]







# DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

HOJA 17 DE 19

MANUAL DE PRÁCTICAS

FECHA

## OPCION 4. A $\text{SEM } K.$

AMPLITUD [ | | | | | | | | | | ]

FRECUENCIA [ | | | | | | | | | | ]

### Datos esperados:

i). Número real, deberá proporcionarse con punto decimal.

ii). Número real; deberá proporcionarse con punto decimal.

## OPCION 5. A $\text{COS } K.$

AMPLITUD [ | | | | | | | | | | ]

FRECUENCIA [ | | | | | | | | | | ]

### Datos esperados:

i). Número real, deberá proporcionarse con punto decimal.

ii). Número real; deberá proporcionarse con punto decimal.



# DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

HOJA 19 DE 19

MANUAL DE OPERACIONES

FECHA

## VII. PERIODO DE MUESTREO

[ | | | | | | | | ]

Número real; deberá proporcionarse con punto decimal.

OPCION F. Regresa a la pantalla inicial (Inciso I).

## VIII. NUMERO DE MUESTRAS.

[ | | | | ]

Número entero comprendido en el rango [0,2000]; en el caso que sea menor a cuatro dígitos, deberán antepuntarse blancos o ceros.

OPCION F. Regresa a la pantalla inicial (Inciso I).

Una vez proporcionados los datos anteriores, el sistema los muestra y solicita al usuario la letra P para procesarlos; una letra N para introducir nuevos datos, para lo cual lo regresa a la pantalla inicial (Inciso I).

Si se seleccionó la letra P en el paso anterior, el sistema continúa con la siguiente solicitud de información:



# DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

HOJA 19 DE 19

MANUAL DE OPERACION,

FECHA

## IX. PROPORCIONE LOS SIGUIENTES DATOS:

ASIGNATURA

PROFESOR

ALUMNO

GRUPO

Con lo anterior se termina con la petición de datos al usuario.

## 5. LIMITACIONES.

El manejo de recuperación de errores solo puede hacerse dentro de una misma pantalla, es decir, al cambiar esta no puede accesarse ya su información, debiendo en su caso introducir nuevamente todos los datos.

Debido a que el sistema está orientado a un equipo en especial, su transportabilidad no es inmediata.

En el diseño inicial del sistema se contempló la graficación de resultados, posteriormente se limitó a proporcionar una tabla de resultados, con lo cual pueden ser graficados fácilmente en forma manual

#### IV.5.3 RESULTADOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SISTEMA .

A continuación se muestran los resultados obtenidos mediante el sistema computarizado, los cuales corresponden a los obtenidos manualmente con los métodos tradicionales (Anexo B).

U.S.A. S. C.

ESTADISTICA DE SISTEMAS COMPLEJOS

U.C. DE Y.C.

FECHA: 13-APR-88  
HORA: 1

PROFESOR..... ING. FERNANDO RODRIGUEZ B.  
ASIGNATURA... T.P.S. I A  
ALUMNO..... FORTALE SANJUAN F.  
GRUPO..... 0

PARA EL PROCESO SELECCIONO:

TECNICA DE APROXIMACION..... LAS TRES APROXIMACIONES  
CONDICIONACION DEL SISTEMA..... MALLA ABERTA  
TIPO DE ENTRADA..... PASIVA  
VALOR DEL TIPO DE ENTRADA..... DESP = 2 . PERDI = 0.5000  
VALOR DEL PERIODO..... 0.1000  
NUMERO DE MUESTRAS A OBTENER... 40

U. N. E. U.

DIGITALIZACION DE SISTEMAS CONTABLES

FAC. DE I. C.

D. S. C.

FORMA: 11-ADR-88

003A: 2

PARA EL PROCESO SELECCIONO:

GRADO DEL DENOMINADOR DEL NUMERADOR DE LA F.T. 2

SUS COEFICIENTES SON:

1,0000      - 1,0000      2,0000

GRADO DEL DENOMINADOR DEL DENOMINADOR DE LA F.T. 3

SUS COEFICIENTES SON:

1,0000      0,0000      0,0000      2,0000

U.S.A.

U.S.C.

UTILIZACIÓN DE SISTEMAS COMPUTADOS

FAC. DE I.C.

FICHA: 14-PR-69  
DATA: 1

ADDEYIM<sub>0</sub>CID<sub>0</sub> : RECTANGULO DE UNTA ADELANTO  
CORRECCIONES: CILIA BRIFETA  
LA ECUACION DE LOS PUNTOS ES:

Y(X)=  
-0.3134E+01Y(X= 1)  
-0.16667E+01Y(X= 2)  
0.4567E+01Y(X= 3)  
0.0600E+01Y(X= 4)  
-0.4000E+01Y(X= 5)  
0.90034E+00Y(X= 6)



U.S.A.P.  
U.S.C

DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

FAC. DE I.C.

FECHA: 13-APR-68  
HOJA: 4

RESULTADOS :

SU EVALUACION APARECE A CONTINUACION:

I	U(T)	V(T)
0	0.00	0.00
1	0.50	0.00
2	0.00	0.00
3	0.50	0.00
4	1.00	0.02
5	1.50	0.05
6	2.00	0.08
7	2.50	0.12
8	3.00	0.17
9	3.50	0.22
10	4.00	0.27
11	4.50	0.33
12	5.00	0.39
13	5.50	0.47
14	6.00	0.57
15	6.50	0.69
16	7.00	0.85
17	7.50	1.05
18	8.00	1.29
19	8.50	1.60
20	9.00	1.99
21	9.50	2.45
22	10.00	3.02
23	10.50	3.70
24	11.00	4.51
25	11.50	5.47
26	12.00	6.59
27	12.50	7.99
28	13.00	9.69
29	13.50	11.71
30	14.00	14.06
31	14.50	16.79
32	15.00	19.76
33	15.50	23.04
34	16.00	26.67
35	16.50	30.67
36	17.00	35.07
37	17.50	39.86
38	18.00	44.98
39	18.50	50.49
40	19.00	56.41

U.N.A.M.  
D & C

DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

FAC. DE ING.

FECHA: 11-APR-88  
HORA: 5

APPROXIMATION : RECTANGULAR HACIA ATRAS  
CONFIGURACION: MALLA ABERTA  
LA ECUACION DE DIFERENCIAS ES:

0.25650E+01U(K- 0)  
-0.56829E+01U(K- 1)  
0.33311E+01U(K- 2)  
0.29490E+01Y(K- 1)  
-0.29490E+01Y(K- 2)  
0.49433E+00Y(K- 1)

U. S. A. P.  
D. S. C.

EVALUATION OF METALS CONTROLS

PAGE OF 100

FORMS 1-40K-88  
MAY 68

R E S U L T A N D S :

EVALUATION APAREE A CONTINUIDADE

I	U(T)	Y(T)
0	0.00	0.00
1	0.00	0.00
2	0.00	0.00
3	0.50	0.01
4	1.00	0.04
5	1.50	0.07
6	2.00	0.11
7	2.50	0.16
8	3.00	0.22
9	3.50	0.29
10	4.00	0.36
11	4.50	0.43
12	5.00	0.51
13	5.50	0.60
14	6.00	0.70
15	6.50	0.81
16	7.00	0.92
17	7.50	1.06
18	8.00	1.20
19	8.50	1.37
20	9.00	1.50
21	9.50	1.66
22	10.00	1.85
23	10.50	2.00
24	11.00	2.21
25	11.50	2.42
26	12.00	2.63
27	12.50	2.85
28	13.00	3.08
29	13.50	3.32
30	14.00	3.57
31	14.50	3.83
32	15.00	4.10
33	15.50	4.38
34	16.00	4.67
35	16.50	4.98
36	17.00	5.29
37	17.50	5.65
38	18.00	6.00
39	18.50	6.37
40	19.00	6.75

U.N.A.M.  
D.S.C.

DESCRIPCIÓN DE SISTEMAS CONTINUOS

FAC. DE Ing.

ECUO: 11-APP-RR  
HOLTA: 7

APROXIMACION : TRAPEZOIDAL  
CONFIGURACION: SALIDA UNIFERTA  
LA ECUACION DE DIFERENCIAS ES:

$0.14457E+01U(K- 0)$   
 $-0.17200E+01U(K- 1)$   
 $-0.13701E+01U(K- 2)$   
 $0.10457E+01U(K- 3)$   
 $0.29494E+01Y(K- 1)$   
 $-1.10000E+01Y(K- 2)$   
 $0.49981E+00Y(K- 3)$

U.P.A.A.  
D.S.C.

DESCRIPCION DE SISTEMAS CONTIGUOS

PAG. DE 190.

FECHA: 13-APR-88  
HOLJA: 6

R E S U M E N :

SO EVALUACION APARECE A CONTINUACION:

I	U(T)	Y(T)
0	0.00	0.00
1	0.00	0.00
2	0.00	0.00
3	0.50	0.01
4	1.00	0.02
5	1.50	0.06
6	2.00	0.09
7	2.50	0.13
8	3.00	0.18
9	3.50	0.24
10	4.00	0.31
11	4.50	0.39
12	5.00	0.47
13	5.50	0.51
14	6.00	0.56
15	6.50	0.65
16	7.00	0.70
17	7.50	0.79
18	8.00	0.86
19	8.50	0.91
20	9.00	0.95
21	9.50	1.00
22	10.00	1.08
23	10.50	1.18
24	11.00	1.25
25	11.50	1.38
26	12.00	1.49
27	12.50	1.61
28	13.00	1.75
29	13.50	1.87
30	14.00	1.96
31	14.50	2.06
32	15.00	2.15
33	15.50	2.24
34	16.00	2.34
35	16.50	2.48
36	17.00	2.61
37	17.50	2.74
38	18.00	2.89
39	18.50	3.05
40	19.00	3.20

#### IV.6 CONCLUSIONES

El desarrollo del sistema computarizado, detallado en este capítulo, se basó en la deducción de los procedimientos generales para cada una de las aproximaciones de integración numérica encontradas en el capítulo III.

El sistema computarizado permite discretizar sistemas continuos, lineales e invariantes con el tiempo, partiendo de la función transferencia del sistema a discretizar, utilizando las aproximaciones de integración numérica: Rectangular hacia adelante, Rectangular hacia atrás y Trapezoidal. Con base en la función transferencia, se obtiene la ecuación en diferencias y posteriormente se resuelve en función del tipo de entrada (pulso, escalon, etc.) dando como resultado una tabla de valores, que permite analizar el comportamiento del sistema en tiempo discreto obtenido y establecer mediante una comparación, cual de las aproximaciones es la que mejor representa al sistema en tiempo continuo cuyos datos se proporcionaron.

El sistema fué probado exhaustivamente mediante la prueba de todos y cada uno de sus módulos en forma individual, así como en conjunto lográndose su buen funcionamiento. Se orientó a proporcionar al usuario facilidades, tanto para la introducción de datos como para su operación; Opera en forma interactiva a través de menús, haciendo una validación completa de los datos proporcionados para evitar en lo posible los errores.

Se elaboró la documentación técnica donde se incluye el Manual de Operación, que puede ser usado en forma independiente, el cual contiene las indicaciones necesarias para su explotación, así como el orden y la forma en que se manejan los datos.

Por otra parte, la aplicación fué desarrollada en el equipo de cómputo VAX-11/780 (Digital Equipment Corporation), con que cuenta el Centro de Cálculo de la Facultad de Ingeniería (CECAFI).

## CONCLUSIONES FINALES.

El presente trabajo se enfocó a la discretización de sistemas continuos (lineales e invariantes con el tiempo, partiendo de la función transferencia del sistema a discretizar.

Para ello se diseñó y desarrolló un sistema computarizado que permite discretizar sistemas continuos, que cumplen las restricciones señaladas, utilizando las aproximaciones de integración numérica:

Rectangular hacia adelante, Rectangular hacia atrás y Trapezoidal.

Con base en la función transferencia proporcionada, el sistema computarizado obtiene la ecuación en diferencias y posteriormente la resuelve en función del tipo de entrada seleccionada (pulso, escalón, etc.), dando como resultado una tabla de valores, que permite analizar el comportamiento del sistema en tiempo discreto obtenido y establecer mediante una comparación, cuál de las aproximaciones es la que mejor representa al sistema en tiempo continuo cuyos datos se proporcionaron.

El trabajo significó dos retos: deducir procedimientos generales para discretizar sistemas continuos lineales e invariantes con el tiempo, partiendo de su función transferencia y el desarrollo de un sistema computarizado basado en los procedimientos deducidos a fin de eliminar el trabajo excesivo y rutinario que trae consigo aplicar el procedimiento en forma manual, disminuyendo así notablemente el tiempo de obtención de resultados y la posibilidad de error en los mismos.



La aplicación fue desarrollada en el equipo de computo VAX-11/780 (Digital Equipment Corporation), con que cuenta el centro de Centro de Cálculo de la Facultad de Ingeniería (CECAFI), elaborándose la documentación técnica con la finalidad de proporcionar información del sistema y a su vez, propiciar la continuidad de este trabajo. Asimismo, dentro de dicha documentación está contenido el Manual de Operación, que puede ser utilizado en forma independiente, el cual contiene las indicaciones necesarias para la explotación, así como el orden y la forma en que son manejados los datos.

Pensamos que el contar con un sistema computarizado de esta naturaleza, brindará una gran ayuda a los estudiantes de las asignaturas que contemplen el tema tratado, quienes podrán enfocar más su atención en los resultados de la aplicación de cada una de las aproximaciones de integración numérica, que en el proceso de cálculo, propiciando con esto una mayor rapidez en la comprensión de los conceptos y características de dichas técnicas de integración numérica.

Consideramos por lo anterior, que el presente trabajo podrá contribuir en alguna medida, a apoyar la actividad de docencia en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

## A N E X O A

### ESTRUCTURAS DE CONTROL EMPLEADAS PARA LA DESCRIPCION DE MÓDULOS

## ESTRUCTURAS DE CONTROL EMPLEADAS PARA LA DESCRIPCION DE MODULOS

### 1. SECUENCIA.

CODIGO X

### 2. DECISION.

a) SI < PREDICADO 1 >

CODIGO A

OSI < PREDICADO 2 >

CODIGO B

OSI < PREDICADO 3 >

CODIGO C

.....

OBIEN

CODIGO Z

FIN

b) SI < PREDICADO >

CODIGO A

OBIEN

CODIGO B

FIN

c) SI < PREDICADO >

CODIGO A

FIN

### 3. ITERATIVAS.

a) DESDE I= < EXPRESION 1 > HASTA < EXPRESION 2 > PASO N

    CODIGO A  
FIN

b) ENTANTO < PREDICADO >

    CODIGO A  
FIN

c) REPETIR

    CODIGO A  
HASTA < PREDICADO >

### 4. TRANSFERENCIA CONDICIONAL.

VE A (ETIQUETA 1,..., ETIQUETA N) DEACUERDO A < EXPRESION >

## A N E X O B

EJEMPLOS RESUELTOS MANUJAMENTE MEDIANTE METODO TRADICIONAL.

Discretizar el sistema continuo cuya función transferencia está

dada por  $H(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{S^2 - 3S + 7}{3S^3 + 2}$  utilizando las aproxima-

ciones Rectangular hacia adelante, Rectangular hacia atrás y Trapezoidal.

Una vez obtenida la ecuación en diferencias, evaluarla para una entrada Rampa:  $u(k) = 0.5 (k-2)$

$$\text{Rampa } u(k) \begin{cases} 0 & \text{para } k < \text{desplazamiento} \\ (k) \text{ (pendiente)} & \text{para } k \geq \text{desplazamiento} \end{cases}$$

RECTANGULAR HACIA ADELANTE.

Configuración del sistema ..... MALLA ABIERTA

Tipo de entrada ..... RAMPA

Valor del tipo de entrada ..... DESP. = 2; PEND. = 0.5

Valor del período ..... 0.1

número de muestras a obtener ..... 15

FUNCION TRANSFERENCIA  $H(S) = \frac{S^2 - 3S + 7}{3S^3 + 2}$

Sustituyendo para la aproximación Rectangular hacia adelante

$$S = \frac{Z-1}{T} \text{ tenemos:}$$

$$H(Z) = \frac{\left(\frac{Z-1}{T}\right)^2 - 3\left(\frac{Z-1}{T}\right) + 7}{3\left(\frac{Z-1}{T}\right)^3 + 2} = \frac{\frac{(Z-1)^2}{T^2} - \frac{3(Z-1)}{T} + 7}{\frac{3(Z-1)^3}{T^3} + 2}$$

$$H(Z) = \frac{\frac{(Z-1)^2 - 3(Z-1)(T) + 7(T^2)}{T^2}}{\frac{3(Z-1)^3 + 2(T^3)}{T^3}} = \frac{T[(Z-1)^2 - 3T(Z-1) + 7T^2]}{3(Z-1)^3 + 2T^3}$$

$$H(Z) = \frac{T(Z^2 - 2Z + 1) - 3T^2(Z-1) + 7T^3}{3(Z^3 - 3Z^2 + 3Z - 1) + 2T^3}$$

$$H(Z) = \frac{TZ^2 - 2TZ + T - 3T^2Z + 3T^2 + 7T^3}{3Z^3 - 9Z^2 + 9Z - 3 + 2T^3}$$

$$\frac{Y(Z)}{U(Z)} = \frac{Z^2(T) - Z(2T + 3T^2) + (T + 3T^2 + 7T^3)}{Z^3(3) - Z^2(9) + Z(9) - (3 - 2T^3)}$$

$$Y(Z) [Z^3(3) - Z^2(9) + Z(9) - (3 - 2T^3)] = U(Z) [Z^2(T) - Z(2T + 3T^2) + (T + 3T^2 + 7T^3)]$$

Dividiendo entre  $Z^3$  :

$$Y(Z) [3 - Z^{-1}(9) + Z^{-2}(9) - Z^{-3}(3-2T^3)] = U(Z) [Z^{-1}(T) - Z^{-2}(2T + 3T^2) + Z^{-3}(T + 3T^2 + 7T^3)]$$

Antitransformando y despejando  $y(k)$

$$y(k) = \frac{T}{3} u(k-1) - \frac{(2T + 3T^2)}{3} u(k-2) + \frac{(T + 3T^2 - 7T^3)}{3} u(k-3) - \left[ -\frac{9}{3} y(k-1) + \frac{9}{3} y(k-2) - \frac{(3-2T^3)}{3} y(k-3) \right]$$

Si  $T = 0.1$

$$y(k) = 0.0333 u(k-1) - 0.0766 u(k-2) + 0.0456 u(k-3) + 3y(k-1) - 3y(k-2) + 0.999 y(k-3)$$

En el paso anterior se obtuvo la ecuación en diferencias:

$$y(k) = 0.0333 u(k-1) - 0.0766 u(k-2) + 0.0456 u(k-3) + 3y(k-1) - 3y(k-2) + 0.999 y(k-3)$$

Si se aplica una entrada tipo Pampa con desplazamiento = 2 y pendiente = 0.5, y suponiendo que el sistema no tiene energía almacenada (condiciones iniciales iguales a cero) se tiene:

$$u(k) = 0.5 (k-2)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u(k)	0	0	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5

TABLA 1. Vector de entrada

$$y(0) = 0.0333 u(-1) - 0.0766 u(-2) + 0.0456 u(-3) + 3y(-1) - 3y(-2) + 0.999 y(-3) = 0.00$$

$$y(1) = 0.0333 u(0) - 0.0766 u(-1) + 0.0456 u(-2) + 3y(0) - 3y(-1) + 0.999 y(-2) = 0.00$$

$$y(2) = 0.0333 u(1) - 0.0766 u(0) + 0.0456 u(-1) + 3y(1) - 3y(0) + 0.999 y(-1) = 0.00$$

$$y(3) = 0.0333 u(2) - 0.0766 u(1) + 0.0456 u(0) + 3y(2) - 3y(1) + 0.999 y(0) = 0.00$$

$$y(4) = 0.0333 u(3) - 0.0766 u(2) + 0.0456 u(1) + 3y(3) - 3y(2) + 0.999 y(1) = 0.02$$

$$y(5) = 0.0333 u(4) - 0.0766 u(3) + 0.0456 u(2) + 3y(4) - 3y(3) + 0.999 y(2) = 0.05$$

$$y(6) = 0.0333 u(5) - 0.0766 u(4) + 0.0456 u(3) + 3y(5) - 3y(4) + 0.999 y(3) = 0.09$$

$$y(7) = 0.0333 u(6) - 0.0766 u(5) + 0.0456 u(4) + 3y(6) - 3y(5) + 0.999 y(4) = 0.14$$

$$y(8) = 0.0333 u(7) - 0.0766 u(6) + 0.0456 u(5) + 3y(7) - 3y(6) + 0.999 y(5) = 0.19$$

$$y(9) = 0.0333 u(8) - 0.0766 u(7) + 0.0456 u(6) + 3y(8) - 3y(7) + 0.999 y(6) = 0.24$$

$$y(10) = 0.0333 u(9) - 0.0766 u(8) + 0.0456 u(7) + 3y(9) - 3y(8) + 0.999 y(7) = 0.29$$

$$y(11) = 0.0333 u(10) - 0.0766 u(9) + 0.0456 u(8) + 3y(10) - 3y(9) + 0.999 y(8) = 0.34$$

$$y(12) = 0.0333 u(11) - 0.0766 u(10) + 0.0456 u(9) + 3y(11) - 3y(10) + 0.999 y(9) = 0.39$$

$$y(13) = 0.0333 u(12) - 0.0766 u(11) + 0.0456 u(10) + 3y(12) - 3y(11) + 0.999 y(10) = 0.44$$

$$y(14) = 0.0333 u(13) - 0.0766 u(12) + 0.0456 u(11) + 3y(13) - 3y(12) + 0.999 y(11) = 0.50$$

$$y(15) = 0.0333 u(14) - 0.0766 u(13) + 0.0456 u(12) + 3y(14) - 3y(13) + 0.999 y(12) = 0.58$$



Los valores de la entrada así como los resultados de la evaluación en diferencias se muestra a continuación:

k	u(k)	y(k)
0	0.0	0.00
1	0.0	0.00
2	0.0	0.00
3	0.5	0.00
4	1.0	0.02
5	1.5	0.05
6	2.0	0.09
7	2.5	0.14
8	3.0	0.19
9	3.5	0.24
10	4.0	0.29
11	4.5	0.34
12	5.0	0.39
13	5.5	0.44
14	6.0	0.50
15	6.5	0.58

Los resultados se grafican junto con los obtenidos mediante las otras aproximaciones (Rectangular hacia atrás y Trapezoidal) en la figura A.1.

RECTANGULAR HACIA ATRAS.

Configuración del sistema ..... MALLA ABIERTA  
 Tipo de entrada ..... RAMPA  
 Valor del tipo de entrada ..... DESP. = 2; PEND. = 0.5  
 Valor del período ..... 0.1  
 número de muestras a obtener ..... 15

FUNCION TRANSFERENCIA  $H(S) = \frac{S^2 - 3S + 7}{3S^2 + 2}$

Sustituyendo para la aproximación Rectangular hacia atrás

$S = \frac{Z-1}{TZ}$  tenemos:

$$H(Z) = \frac{\left(\frac{Z-1}{TZ}\right)^2 - 3\left(\frac{Z-1}{TZ}\right) + 7}{3\left(\frac{Z-1}{TZ}\right)^2 + 2} = \frac{\frac{(Z-1)^2}{(TZ)^2} - \frac{3(Z-1)}{TZ} + 7}{\frac{3(Z-1)^2}{(TZ)^2} + 2}$$

$$H(Z) = \frac{\frac{(Z-1)^2 - 3(Z-1)(TZ) + 7(TZ)^2}{(TZ)^2}}{\frac{3(Z-1)^2 + 2(TZ)^3}{(TZ)^3}} = \frac{TZ [(Z-1)^2 - 3TZ(Z-1) + 7T^2Z^2]}{3(Z^3 - 3Z^2 + 3Z - 1) + 2T^3Z^3}$$

$$H(Z) = \frac{TZ(Z^2 - 2Z + 1 - 3TZ^2 + 3TZ + 7T^2Z^2)}{3(Z^3 - 3Z^2 + 3Z - 1) + 2T^3Z^3}$$

$$H(Z) = \frac{TZ^3 - 2TZ^2 + TZ - 3T^2Z^3 + 3T^2Z^2 + 7T^3Z^3}{3Z^3 - 9Z^2 + 9Z - 3 + 2T^3Z^3}$$

$$\frac{Y(Z)}{U(Z)} = \frac{Z^3(T - 3T^2 + 7T^3) - Z^2(2T - 3T^2) + Z(T)}{Z^3(3 + 2T^3) - Z^2(9) + Z(9) - 3}$$

$$Y(Z) [Z^3(3 + 2T^3) - Z^2(9) + Z(9) - (3)] =$$

$$U(Z) [Z^3(T - 3T^2 + 7T^3) - Z^2(2T - 3T^2) + Z(T)]$$

Dividiendo entre  $Z^3$  :

$$Y(Z) [(3 + 2T^3) - Z^{-1}(9) + Z^{-2}(9) - Z^{-3}(3)] =$$

$$U(Z) [(T - 3T^2 + 7T^3) - Z^{-1}(2T - 3T^2) + Z^{-2}(T)]$$

Antitransformando y despejando  $y(k)$

$$y(k) = \frac{(T - 3T^2 + 7T^3)}{(3 + 2T^3)} u(k) - \frac{(2T + 3T^2)}{(3 + 2T^3)} u(k - 1) + \frac{T}{(3 + 2T^3)} u(k - 2) \\ - \left[ -\frac{9}{(3 + 2T^3)} y(k - 1) + \frac{9}{(3 + 2T^3)} y(k - 2) - \frac{3}{(3 + 2T^3)} y(k - 3) \right]$$

Si  $T = 0.1$

$$y(k) = 0.0256 u(k) - 0.0566 u(k - 1) + 0.0333 u(k - 2) +$$

$$2.998 y(k - 1) - 2.998 y(k - 2) + 0.999 y(k - 3)$$

En el paso anterior, se obtuvo la ecuación en diferencias:

$$y(k) = 0.0256 u(k) - 0.0566 u(k-1) + 0.0333 u(k-2) + 2.998 y(k-1) - 2.998 y(k-2) + 0.999 y(k-3)$$

Si se aplica una entrada tipo Rampa con desplazamiento = 2 y pendiente = 0.5, y suponiendo que el sistema no tiene energía almacenada (condiciones iniciales iguales a cero) se tiene:

$$u(k) = 0.5 (k-2)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u(k)	0	0	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5

$$y(0) = 0.0256 u(0) - 0.0566 u(-1) + 0.0333 u(-2) + 2.998 y(-1) - 2.998 y(-2) + 0.999 y(-3) = 0.00$$

$$y(1) = 0.0256 u(1) - 0.0566 u(0) + 0.0333 u(-1) + 2.998 y(0) - 2.998 y(-1) + 0.999 y(-2) = 0.00$$

$$y(2) = 0.0256 u(2) - 0.0566 u(1) + 0.0333 u(0) + 2.998 y(1) - 2.998 y(0) + 0.999 y(-1) = 0.00$$

$$y(3) = 0.0256 u(3) - 0.0566 u(2) + 0.0333 u(1) + 2.998 y(2) - 2.998 y(1) + 0.999 y(0) = 0.01$$

$$y(4) = 0.0256 u(4) - 0.0566 u(3) + 0.0333 u(2) + 2.998 y(3) - 2.998 y(2) + 0.999 y(1) = 0.03$$

$$y(5) = 0.0256 u(5) - 0.0566 u(4) + 0.0333 u(3) + 2.998 y(4) - 2.998 y(3) + 0.999 y(2) = 0.06$$

$$y(6) = 0.0256 u(6) - 0.0566 u(5) + 0.0333 u(4) + 2.998 y(5) - 2.998 y(4) + 0.999 y(3) = 0.10$$

$$y(7) = 0.0256 u(7) - 0.0566 u(6) + 0.0333 u(5) + 2.998 y(6) - 2.998 y(5) + 0.999 y(4) = 0.15$$

$$y(8) = 0.0256 u(8) - 0.0566 u(7) + 0.0333 u(6) + 2.998 y(7) - 2.998 y(6) + 0.999 y(5) = 0.21$$

$$y(9) = 0.0256 u(9) - 0.0566 u(8) + 0.0333 u(7) + 2.998 y(8) - 2.998 y(7) + 0.999 y(6) = 0.28$$

$$y(10) = 0.0256 u(10) - 0.0566 u(9) + 0.0333 u(8) + 2.998 y(9) - 2.998 y(8) + 0.999 y(7) = 0.36$$

$$y(11) = 0.0256 u(11) - 0.0566 u(10) + 0.0333 u(9) + 2.998 y(10) - 2.998 y(9) + 0.999 y(8) = 0.45$$

$$y(12) = 0.0256 u(12) - 0.0566 u(11) + 0.0333 u(10) + 2.998 y(11) - 2.998 y(10) + 0.999 y(9) = 0.55$$

$$y(13) = 0.0256 u(13) - 0.0566 u(12) + 0.0333 u(11) + 2.998 y(12) - 2.998 y(11) + 0.999 y(10) = 0.67$$

$$y(14) = 0.0256 u(14) - 0.0566 u(13) + 0.0333 u(12) + 2.998 y(13) - 2.998 y(12) + 0.999 y(11) = 0.82$$

$$y(15) = 0.0256 u(15) - 0.0566 u(14) + 0.0333 u(13) + 2.998 y(14) - 2.998 y(13) + 0.999 y(12) = 1.01$$

Los valores de la entrada así como los resultados de la evaluación en diferencias se muestra a continuación:

k	u(k)	y(k)
0	0.0	0.00
1	0.0	0.00
2	0.0	0.00
3	0.5	0.01
4	1.0	0.03
5	1.5	0.06
6	2.0	0.10
7	2.5	0.15
8	3.0	0.21
9	3.5	0.28
10	4.0	0.36
11	4.5	0.45
12	5.0	0.55
13	5.5	0.67
14	6.0	0.82
15	6.5	1.01

Los resultados se grafican junto con los obtenidos mediante las otras aproximaciones (Rectangular hacia adelante y Trapezoidal) en la figura A.1.

TRAPEZOIDAL.

Configuración del sistema ..... MALLA ABIERTA  
Tipo de entrada ..... RANPA  
Valor del tipo de entrada ..... DESP. = 2; PEND. = 0.5  
Valor del período ..... 0.1  
número de muestras a obtener ..... 15

FUNCION TRANSFERENCIA  $H(S) = \frac{S^2 - 3S + 7}{3S^3 + 2}$

Sustituyendo para la aproximación Trapezoidal

$S = \frac{2}{T} \frac{(Z - 1)}{(Z + 1)}$  tenemos:

$$H(Z) = \frac{\left(\frac{2}{T} \frac{(Z - 1)}{(Z + 1)}\right)^2 - 3 \left(\frac{2}{T} \frac{(Z - 1)}{(Z + 1)}\right) + 7}{3 \left(\frac{2}{T} \frac{(Z - 1)}{(Z + 1)}\right)^3 + 2} = \frac{\frac{(2Z - 2)^2}{(TZ + T)^2} - \frac{3(2Z - 2)}{(TZ + T)} + 7}{\frac{3(2Z - 2)^3}{(TZ + T)^3} + 2}$$

$$H(Z) = \frac{\frac{(2Z - 2)^2 - (TZ + T)(3)(2Z - 2) + (TZ + T)^2(7)}{(TZ + T)^2}}{\frac{3(2Z - 2)^3 + (TZ + T)^3(2)}{(TZ + T)^3}}$$

$$H(Z) = \frac{(TZ + T) [(2Z - 2)^2 - 3(TZ + T)(2Z - 2) + 7(TZ + T)^2]}{3(2Z - 2)^3 + 2(TZ + T)^3}$$

$$H(Z) = \frac{(7Z + 7) [4Z^2 - 8Z + 4 - 61Z^2 + 61 + 71^2 Z^2 + 141^2 Z + 71^2]}{24Z^3 - 72Z^2 + 72Z - 24 + 21^3 Z^3 + 61^3 Z^2 + 61^3 Z + 21^3}$$

$$H(Z) = \frac{41Z^3 - 81Z^2 + 41Z - 61^2 Z^3 + 61^2 Z + 71^3 Z^3 + 141^3 Z^2 + 71^3 Z + 41Z^2 - 81Z + 41 - 61^2 Z^2 + 61^2 + 71^3 Z^2 + 141^3 Z + 71^3}{Z^3 (24 + 21^3) + Z^2 (-72 + 61^3) + (72 + 61^3) + (-24 + 21^3)}$$

$$\frac{Y(Z)}{U(Z)} = \frac{Z^3 (41 - 61^2 + 71^3) + Z^2 (-81 + 141^3 + 41 - 61^2 + 71^3) + Z(41 + 61^2 + 71^3 - 81 + 141^3) + (41 + 61^2 + 71^3)}{Z^3 (24 + 21^3) + Z^2 (-72 + 61^3) + Z(72 + 61^3) + (-24 + 21^3)}$$

Dividiendo entre  $Z^3$  tenemos:

$$\frac{Y(Z)}{U(Z)} = \frac{(41 - 61^2 + 71^3) + (211^3 - 61^2 - 41) Z^{-1} + (211^3 + 61^2 - 41) Z^{-2} + (71^3 + 61^2 + 41) Z^{-3}}{(24 + 21^3) + (61^3 - 72) Z^{-1} + (61^3 + 72) Z^{-2} + (21^3 - 24) Z^{-3}}$$

$$y(k) [(24 + 21^3) + (61^3 - 72) y(k-1) + (61^3 + 72) y(k-2) + (21^3 - 24) y(k-3)] =$$

$$u(k) [(41 - 61^2 + 71^3) + (211^3 - 61^2 - 41) u(k-1) + (211^3 + 61^2 - 41) u(k-2) + (71^3 + 61^2 + 41) u(k-3)]$$

$$y(k) = \frac{(41 - 61^2 + 71^3)}{24 + 21^3} u(k) + \frac{(211^3 - 61^2 - 41)}{24 + 21^3} u(k-1) + \frac{(211^3 + 61^2 - 41)}{24 + 21^3} u(k-2) + \frac{(71^3 + 61^2 + 41)}{24 + 21^3} u(k-3) \\ - \frac{(61^3 - 72)}{24 + 21^3} y(k-1) - \frac{(61^3 + 72)}{24 + 21^3} y(k-2) - \frac{(21^3 - 24)}{24 + 21^3} y(k-3)$$

Si  $T = 0.1$

$$y(k) = 0.0144 u(k) - 0.0182 u(k-1) - 0.0132 u(k-2) + 0.0194 u(k-3) + 2.999 y(k-1) - 3 y(k-2) + 0.999 y(k-3)$$

En el paso anterior se obtuvo la ecuación en diferencias:

$$y(k) = 0.0144 u(k) - 0.0182 u(k-1) - 0.0132 u(k-2) + 0.0194 u(k-3) \\ + 2.999 y(k-1) - 3 y(k-2) + 0.999 y(k-3)$$

Si se aplica una entrada tipo Pampa con desplazamiento = 2 y pendiente = 0.5, y suponiendo que el sistema no tiene energía almacenada (condiciones iniciales iguales a cero) se tiene:

$$u(k) = 0.5 (k-2)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u(k)	0	0	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5

$$y(0) = 0.0144 u(0) - 0.0182 u(-1) - 0.0132 u(-2) + 0.0194 u(-3) + 2.999 y(-1) - 3 y(-2) + 0.999 y(-3) = 0.0$$

$$y(1) = 0.0144 u(1) - 0.0182 u(0) - 0.0132 u(-1) + 0.0194 u(-2) + 2.999 y(0) - 3 y(-1) + 0.999 y(-2) = 0.0$$

$$y(2) = 0.0144 u(2) - 0.0182 u(1) - 0.0132 u(0) + 0.0194 u(-1) + 2.999 y(1) - 3 y(0) + 0.999 y(-1) = 0.0$$

$$y(3) = 0.0144 u(3) - 0.0182 u(2) - 0.0132 u(1) + 0.0194 u(0) + 2.999 y(2) - 3 y(1) + 0.999 y(0) = 0.01$$

$$y(4) = 0.0144 u(4) - 0.0182 u(3) - 0.0132 u(2) + 0.0194 u(1) + 2.999 y(3) - 3 y(2) + 0.999 y(1) = 0.03$$

$$y(5) = 0.0144 u(5) - 0.0182 u(4) - 0.0132 u(3) + 0.0194 u(2) + 2.999 y(4) - 3 y(3) + 0.999 y(2) = 0.06$$

$$y(6) = 0.0144 u(6) - 0.0182 u(5) - 0.0132 u(4) + 0.0194 u(3) + 2.999 y(5) - 3 y(4) + 0.999 y(3) = 0.10$$

$$y(7) = 0.0144 u(7) - 0.0182 u(6) - 0.0132 u(5) + 0.0194 u(4) + 2.999 y(6) - 3 y(5) + 0.999 y(4) = 0.15$$

$$y(8) = 0.0144 u(8) - 0.0182 u(7) - 0.0132 u(6) + 0.0194 u(5) + 2.999 y(7) - 3 y(6) + 0.999 y(5) = 0.21$$

$$y(9) = 0.0144 u(9) - 0.0182 u(8) - 0.0132 u(7) + 0.0194 u(6) + 2.999 y(8) - 3 y(7) + 0.999 y(6) = 0.28$$

$$y(10) = 0.0144 u(10) - 0.0182 u(9) - 0.0132 u(8) + 0.0194 u(7) + 2.999 y(9) - 3 y(8) + 0.999 y(7) = 0.36$$

$$y(11) = 0.0144 u(11) - 0.0182 u(10) - 0.0132 u(9) + 0.0194 u(8) + 2.999 y(10) - 3 y(9) + 0.999 y(8) = 0.45$$

$$y(12) = 0.0144 u(12) - 0.0182 u(11) - 0.0132 u(10) + 0.0194 u(9) + 2.999 y(11) - 3 y(10) + 0.999 y(9) = 0.55$$

$$y(13) = 0.0144 u(13) - 0.0182 u(12) - 0.0132 u(11) + 0.0194 u(10) + 2.999 y(12) - 3 y(11) + 0.999 y(10) = 0.66$$

$$y(14) = 0.0144 u(14) - 0.0182 u(13) - 0.0132 u(12) + 0.0194 u(11) + 2.999 y(13) - 3 y(12) + 0.999 y(11) = 0.78$$

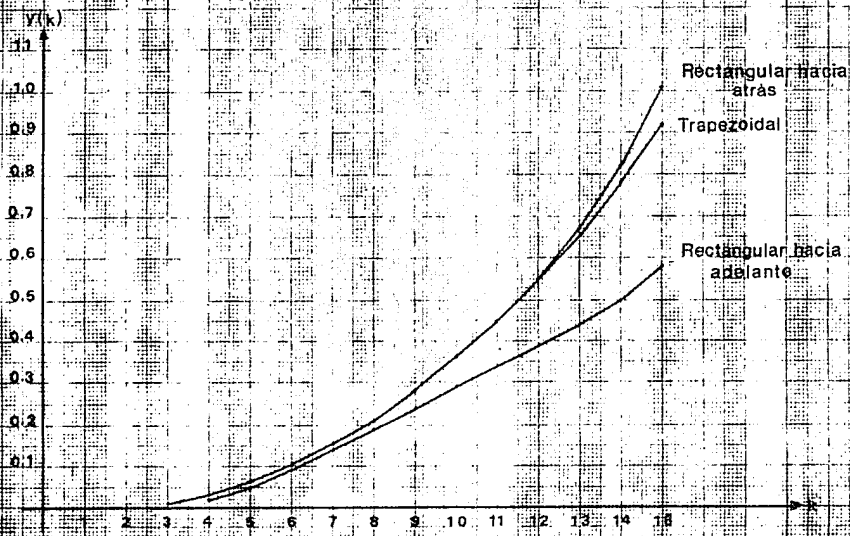
$$y(15) = 0.0144 u(15) - 0.0182 u(14) - 0.0132 u(13) + 0.0194 u(12) + 2.999 y(14) - 3 y(13) + 0.999 y(12) = 0.92$$



Los valores de la entrada así como los resultados de la evaluación en diferencias se muestra a continuación:

k	$u(k)$	$y(k)$
0	0.0	0.00
1	0.0	0.00
2	0.0	0.00
3	0.5	0.01
4	1.0	0.03
5	1.5	0.06
6	2.0	0.10
7	2.5	0.15
8	3.0	0.21
9	3.5	0.28
10	4.0	0.36
11	4.5	0.45
12	5.0	0.55
13	5.5	0.66
14	6.0	0.78
15	6.5	0.92

Los resultados se grafican junto con los obtenidos mediante las otras aproximaciones (Rectangular hacia adelante y Rectangular hacia atrás), en la figura A.1.



ANEXO C  
LISTADO DEL PROGRAMA FUENTE.





```

120 ESCRIBIR LA CON BASE EN LA ECUACION TRANSFERENCIA PROPORCIONAL Y C
11 PUNTOS DEBEN SER LA COMPLEMENTARIOS. EL PROCESO DISCRETO LA SERA
21 POR MEDIO DE LAS SERIES DE APROXIMACIONES: 1/17, --RECTA
31 HAY HACIA ATRASAR 1/17, --DECTAR HAY HACIA ATRASAR 1/17, --TRAP
4201011)
PRINT*,CEVI,CE2159,IC = CONTINUAR
PRINT*,CE2259,IE = REINICIAR SESION
10 PRINT*,CE1902,CA#
WRITE(6,130)
130 FORMAT(2Y,15H OPCION 2 : 1,5)
READ(5,131) CR#
131 FORMAT(1)
IF (CR# EQ '0') OR (CR# EQ '1') GOTO 20
PRINT*,CEAF
PRINT*,CE2302,CE(1)
PRINT*,CE2002,CE(2)
PRINT*,CEVI
GOTO 10
20 PRINT*,CE2402,CE(1),CEAF
IF (CR# EQ '1') RETURN 1
C
CONT LA PANT DE INF. BASICA DEL PAQ.
CALL FILLUP(FCHA)
PRINT*,CE302
WRITE(6,140)
140 FORMAT(1X,15H SE OBTIENE LA ECUACION DE DIFERENCIAS Y POSTERIORMENTE
1 SE RESUELVE EN LA ECUACION DEL TIPO DE ENTRADA (PRIN, FU, CA, EQ,
2 PC, Y) /ZAY. EL DISEÑO DEL MODELO SE OBTIENE A PROPOCIONAR AL US
3ARIO FACILIDAD /ZAY. EL DISEÑO PARA LA INTRODUCCION DE DATOS COMO
4 PARA SU OBTENCION DE LA /ZAY. LAZADRE DE UNA SERIE DE DATOS DONDE SE
5 INDICAN LOS DATOS DE LOS CASOS, LOS MENSAJES PER
6 TINETA DEL PROGRAMA QUE SE INICIA /ZAY. CUANDO SE PROPORCIONA E
7 L DATO PROPORCIONAR DE ESTA FORMA EL USUARIO /ZAY. LOS CONDUCTO EN
8 FORMA SPECIFICA EN TODA LA SESION.
9 WRITE(6,150)
150 FORMAT(1X,15H COMO SE VAN SOLICITANDO A LO LARGO DE LA SES
11ION, PUEDE CON /ZAY. LOS DATOS CONSULTAR EL MANUAL DEL DISEÑO DE
21 SISTEMA. EL RESULTADO /ZAY. DE LA SESION PUEDE HACERSE DESDE CUAL
31 QUIER MENU SECUNDARIO Y TERCER /ZAY. HAY EN EL MENU PRINCIPAL
4, Y ALGO IMPORTANTE: LA INTRODUCCION DE /ZAY. DATOS DEBE SER SIEMPRE
5 EN ORDEN ALFABETICO.
PRINT*,CEVI,CE2159,IC = CONTINUAR
PRINT*,CE2259,IE = REINICIAR SESION
30 PRINT*,CE1902,CA#
WRITE(6,160)
160 FORMAT(2Y,15H OPCION 2 : 1,5)
READ(5,131) CR#
IF (CR# EQ '0') OR (CR# EQ '1') GOTO 40
PRINT*,CEAF
PRINT*,CE2302,CE(1)
PRINT*,CE2002,CE(2)
PRINT*,CEVI
GOTO 30
40 PRINT*,CE2302,CE(1),CEAF
IF (CR# EQ '1') RETURN 1
RETURN
END
SUBROUTINE MENALL(FCHA,CE,4)
C
EN ESTA SUBROUTINA SE SOLICITA EL TIPO DE METODO Y TIPO DE MALLA
CHARACTER*4 CEVI,CE(2),CEAF,CA#*,CRIN*2,FCHA*9,CE(3)*70,
100414*4,CE602*8,CE1902*8,CE2259*8,CE2302*8,CE2002*8,CE2115*4
COMMON /METODO,MALLA,VR,IC(4),AF(49),IC(5),AF(49),IFTRA,PERIOD,
11 /HUBHS,TRFSL,INDSP,ABEL,END,PRNT,FRFC(49),LFC(49),
2 IPAG, H(0:2000),L(0:2000),MATER,PROP,ALIM,GRUPO,MENAPR,MENMAA

```

```

C=CUBA(21)
C=CUBA(21)
C=VI=C//17M
C=VI=C//17M
C=VI=C//17M
C=VI=C//17M
C=VI=C//17M
C=VI=C//17M
C=VI=C//17M
C=VI=C//17M
C=VI=C//17M
C=VI=C//17M
CALL TITULO(FECHA)
PRINT*,CF0410,'SELECCIONES LA APROXIMACION:'
PRINT*,CF04,CF0802      100 RENOS MOTES PARA EL WHITE
WRITE(6,100)
100 FORMAT(2X,'1',RECTANGULO DATA ABRIERTA'//24X,'2',RECTANGULO DA
ICIA ATRES'//24X,'3',TRAPAZOIDAL'//24X,'4',LAS TRAS APROXIMACIONES'
)
PRINT*,CFVI,CF2254,'E = PRINCIPAL SESION'
PRINT*,CF04,CF2115,'1'
10 PRINT*,CF1907,CUBA      100 RENOS MOTES DEL WHITE
WRITE(6,110)
110 FORMAT(2X,'1',Opcion? : ',S)
READ(5,111) CUBA
111 FORMAT(A2)
IF (CUBA.EQ.'1') .OR. (CUBA.EQ.'2') .OR. (CUBA.EQ.'3') GOTO 20
IF (CUBA.EQ.'4') .OR. (CUBA.EQ.'5') GOTO 20
PRINT*,CF04
PRINT*,CF2302,CF(2)
PRINT*,CF2002,CFRTI
PRINT*,CFVI
GOTO 10
20 PRINT*,CF2302,CFRTI,CF04
IF (CUBA.EQ.'5') GOTO 30
READ(CPINC1:11,115) MALLA
115 FORMAT(11)
CONTINUA SELECCIONAR TIPO DE MALLA
CALL TITULO(FECHA)
PRINT*,CF0410,'SELECCIONES LA CONFIGURACION DEL SISTEMA:'
PRINT*,CF04,CF0802
WRITE(6,120)
120 FORMAT(2X,'1', MALLA ABRIERTA'//20X,'2', MALLA CERRADA'//20X,'3', RMB
LAS CONFIGURACIONES')
PRINT*,CFVI,CF2254,'E = PRINCIPAL SESION'
10 PRINT*,CF1907,CUBA      100 RENOS MOTES POR SALTO DE LINEA
WRITE(6,130)
130 FORMAT(2X,'1',Opcion? : ',S)
READ(5,131) CUBA
IF (CUBA.EQ.'1') .OR. (CUBA.EQ.'2') .OR. (CUBA.EQ.'3') GOTO 10
IF (CUBA.EQ.'4') GOTO 30
PRINT*,CF04
PRINT*,CF2302,CF(2)
PRINT*,CF2002,CFRTI
PRINT*,CFVI
GOTO 10
40 PRINT*,CF2302,CFRTI,CF04
IF (CUBA.EQ.'5') RETURN 1
READ(CPINC1:11,115) MALLA
DEFINIR
FIN
SUBROUTINE INABR(FECHA,CF,4)
C EN ESTA SUBROUTINA SE DA INFORMACION DE MALLA ABRIERTA Y MALLA CERRADA

```

```

C      SECON LA OPCION FUNCIONA EN LA SUBROUTINA MEXANI
      CHARACTER*4 C_VI,CFAT,CFZF,CAM,CA1,CAK,FCM,CFM,CFM3024R,
      ICF19024R,CF20024R,CF21544R,CF22544R,CF24024R,CFM42,CF(8)470,
      ZCF04254R,CF17024R,CF18024R,CF19440
      COMMON METODO,VALIA,VA,ICRUM,AF(0:99),IGEN,AC(0:99),ENTRA,PERIOD,
      1  NUMRES,TRF300,INDES,AMPEL,ESD,PEROT,FRFC,C(0:99),U(0:99)
      2  IPAG, U(0:2000),Y(0:2000),MATER,PROP,ALIM,GRUPO,MENAPP,MENAAA
      CA=CHAR(77)
      CAM=CHAR(77)
      C_VI=CA//'/V/'
      CFAT=CA//'/A/'
      CFZF=CA//'/Z/'
      CFI02=CA//'/0:02/'
      CFI902=CA//'/10:02/'
      CF2002=CA//'/20:02/'
      CF2154=CA//'/21:54/'
      CF2154R=CA//'/22:54/'
      CF2402=CA//'/23:02/'
      CF0425=CA//'/04:25/'
      CF1702=CA//'/17:02/'
      CF1802=CA//'/18:02/'
      IFCMALLA,(0,2) GOTO 30
      CALL ITIUM(FCM)
      PRNTR,CF0425,'S I S T E M A  E N  M A L L A  A B I E R T A'
      PRNTR(6,100)
100  FURMAT(732Y,'*****'/12A,'+',RY,'+'//20Y,'U(Z)----->+ C(Z)
      1  *-----> Y(7)'/32Y,'+',RA,'+'//12A,'*****'/17X,'FUNCTION TR
      2ANFFFCM,CA1, C(Z) = Y(Z) / U(7)'/41X,'C(7) = U(Z) / U(7)'/44Y,
      3U(Z) Y P(7) = D(I,TRF300)')
      PRNTR,CF2154,'C = CONTINUA'
      PRNTR,CF2254,'F = DEFINICION SESION'
      10  PRNTR,CF1902,CAM  IDAPA  FL  ADITE
      WRTRF(6,110)
110  FURMAT(7Y,'SU OPCION? : ',S)
      PRNTR(5,111) CRTU
111  FURMAT(4Z)
      IFCRTU,(0,'C '),OR,(CRTU,(0,'F ') GOTO 20
      PRNTR,CFZF
      PRNTR,CF2302,CF(1)
      PRNTR,CF2002,CF(1)
      PRNTR,CFVI
      CRTU 10
      20  IFCRTU,(0,'F ') GOTO 50
      IFCMALLA,(0,1) GOTO 80
C      CONTINUA PARA MALLA CERRADA
      40  CALL ITIUM(FCM)
      PRNTR,CF0425,'S I S T E M A  E N  M A L L A  C E R R A D A'
      WRTRF(6,120)
120  FURMAT(732Y,'*****'/27X,'+',R,'+'//19X,'U(Z)----->U-->+
      1  C(7) *-----> Y(7)'/24Y,'+',R,'+'//28X,'*****'
      2*  '/28X,'+',R,'+'//28X,'+'
      3---'/34X,'+',R,'+'//28X,'+'
      4/41X,'C(7) = C(Z) / 1 + K(Z)'/41X,'C(7) = U(Z) / P(Z) + K(Z)'/44
      51X,'O(7) Y P(Z) = D(I,INDIUM)')
      PRNTR,CFVI,CF2254,'F = DEFINICION SESION'
      40  PRNTR,CF1902,CAM
      WRTRF(6,130)
130  FURMAT(2Y,'DE FL VALOR DE LA METDUAL,(K)? :',S)
      PRNTR(5,142) CRTU
      IFCRIN(1:1),0,'F') GOTO 80
      PRNTR(CRIN,144,FRP(64)) VA
142  FURMAT(A9)
144  FURMAT(69.4)

```



```

IF(VV.LF.0.0) GOTO 05
PRINT*,CF2302,CERT1,
GOTO 40
65 PRINT*,CFAP
PRINT*,CF2302,CF(4)
PRINT*,CF2002,CERT1,
PRINT*,CFVI
GOTO 40
80 PRINT*,CF2302,CERT1,
PRINT*,CFAP
IF(CRIN(1:1),FO,'F') RETURN 1
RETURN
END
SUBROUTINE GPAPU(FECHA,CF,*)
EN ESTA SUBROUTINA SE MUESTRAN LOS GRADOS Y COEFICIENTES DE LOS =
POLINOMIOS
CHARACTER*48 CF0302,CF0426,CF0602,CF0702,CF0802,CF0902,CF1202,
10-1302,CF1402,CF1502,CF2250,CF2302,CFVI*4,CERT1*4,CFAP*4,FECHA*9,
20CMON,CA*41,CF(R)*70,CA*1,CF0420,CF0526
COMMON /P/DOO,VALLA,VK,IGNUM,A(0:99),IGDEF,H(0:99),IENTRA,PERIOD,
1 NUMRES,TRFSUL,IDESP,AMPLI,PESO,PERNDI,FRFC,CF(0:99),D(0:99),
2 IPAC, H(0:2000),I(0:2000),MATEM,PROF,ALUM,GRUPU,MEDADR,MEPAA
CA=CHAR(2)
CFVI=CA//I7M*
CERT1=CA//I2N*
CFAP=CA//I0M*
CF0302=CA//I03:02F*
CF0426=CA//I04:26F*
CF0526=CA//I05:26F*
CF0702=CA//I07:02F*
CF0802=CA//I08:02F*
CF0902=CA//I09:02F*
CF1202=CA//I12:02F*
CF1302=CA//I13:02F*
CF1402=CA//I14:02F*
CF1502=CA//I15:02F*
CF2250=CA//I22:50F*
CF2302=CA//I23:02F*
CALL TITULO(FECHA)
PRINT*,CF2250,CFVI,'F = REINICIAR SESION'
PRINT*,CFAP,CF0420,'DE LA FORMA P(S) = Q(S) / P(S)'
PRINT*,CF0526,'P K O P O R C I O N K : '
10 PRINT*,CF0602,CA
WRITE(6,100)
100 FORMAT(1X,'GRADO DE Q(S) (NUMERADOR DE LA F. I.) ? = ',S)
READ(6,110) CRTN
110 FORMAT(A9)
IF(CRIN(1:1),FO,'F') GOTO 500
IF(CRIN(3:3),FO,' ') GOTO 20
110 FORMAT(I11)
IF(CRIN(2:2),FO,' ') THEN
READ(CRIN(1:1),110,FRP=20) IGNUM
ELSE
READ(CRIN(1:1),120,FRP=20) IGNUM
ENDIF
120 FORMAT(I2)
20 IF((IGNUM,CF,0).AND.(IGNUM,LT,100)) GOTO 30
PRINT*,CF2302,CF(4)
PRINT*,CF0702,CERT1,
GOTO 10

```





```

80 CALL ITIHO,C1E,C21
PRINT*,CFV1,C2254,'F = PRINCIPAL SENSIBLE'
PRINT*,CFAP
PRINT*,CF0527,'TIPO DE ENTREGA? : 1, FORTA
82 PRINT*,CF0702,C4"
IF (ITID0,F0,11) OR (ITID0,F0,21) OR (ITID0,F0,31) THEN
  GOTO 16,5101
540 PRINTF(12),ID=SP1474M1K4TUEN,TYPE=1? : 1,51
  P=50(C,515) C=15
  P=50(CP10,560,FR=120) FR=0
540 PRINTF(13)
ENDIF
  PRINTF(5,501
  PRINTF(15),AMPLIF=1? : 1,51
  P=50(C,515) C=15
  P=50(CP10,560,FR=120) FR=0
560 PRINTF(16,4)
ENDIF
  IF (IT0,0,1,0) GOTO 100
84 PRINT*,CF0002,C4"
IF (ITID0,F0,11) THEN
  GOTO 16,5101
570 PRINTF(17),ID=SP1? : 1,51
  P=50(C,515) C=15
  P=50(CP10,560,FR=120) FR=0
  GOTO 130
ENDIF
  PRINTF(18,502) THEN
  GOTO 16,5501
580 PRINTF(19),AMPLIF=1? : 1,51
  P=50(C,515) C=15
  P=50(CP10,560,FR=120) FR=0
  GOTO 130
ENDIF
  IF (IT0,0,3) THEN
  GOTO 16,5401
590 PRINTF(14),ID=SP1? : 1,51
  P=50(C,515) C=15
  P=50(CP10,560,FR=120) FR=0
  GOTO 130
ENDIF
  IF (ITID0,F0,11) OR (ITID0,F0,51) THEN
  GOTO 16,6001
600 PRINTF(13),ID=SP1? : 1,51
  P=50(C,515) C=15
  P=50(CP10,560,FR=120) FR=0
  GOTO 130
ENDIF
100 IF (CP10,1:21,F0,1) GOTO 210
PRINT*,CF2302,C010 SE ACEPTA "F", VALOR ENTERO POSITIVO O CER0"
PRINT*,CF0002,C010
GOTO 82
110 IF (CP10,1:21,F0,1) GOTO 210
PRINT*,CF2302,C010 SE ACEPTA "F", O UN VALOR REAL"
GOTO 82
120 IF (CP10,1:21,F0,1) GOTO 210
PRINT*,CF2302,C010 SE ACEPTA "F", O UN VALOR REAL"
PRINT*,CF1002,C010
GOTO 84
140 PRINT*,CF2302,C010
SIGNO DEBER DE SER0, CASO DE "F" SI SE TIENE DE RESULTADO

```













```

10 CONTIN(1,34,16,36), *FICHO          !MALLA ABIERTA 1 CERRADA SEG. APPLIC.
12 WRITE(1,200)
   CALL MFCADPE(FECHA)                  !MALLA ABIERTA
   CALL TIT4(FECHA)
   CALL MACEM
   WRITE(1,210)
   CALL MFCADPE(FECHA)                  !MALLA CERRADA
   CONT=100
14 WRITE(1,210)
   CALL MFCADPE(FECHA)                  !MALLA ABIERTA
   CALL TIT4(FECHA)
   CALL MACEM
   WRITE(1,240)
   CALL MFCADPE(FECHA)                  !MALLA CERRADA
   CONT=100
16 WRITE(1,220)
   CALL TRAP(FECHA)                     !MALLA ABIERTA
   CALL TIT4(FECHA)
   CALL MACEM
   WRITE(1,250)
   CALL TRAP(FECHA)                     !MALLA CERRADA
   CONT=100
18 WRITE(1,200)                          !MALLA ABIERTA 1 CERRADA PARA LAS 3 OPCIO.
   CALL MFCADPE(FECHA)                  !MALLA ABIERTA
   CALL TIT4(FECHA)
   WRITE(1,210)
   CALL MFCADPE(FECHA)                  !MALLA ABIERTA
   CALL TIT4(FECHA)
   WRITE(1,220)
   CALL TRAP(FECHA)                     !MALLA ABIERTA
   CALL MACEM                          !LLAMA A MALLA CERRADA
   CALL TIT4(FECHA)
   WRITE(1,230)
   CALL MFCADPE(FECHA)                  !MALLA CERRADA
   CALL TIT4(FECHA)
   WRITE(1,240)
   CALL MFCADPE(FECHA)                  !MALLA CERRADA
   CALL TIT4(FECHA)
   WRITE(1,250)
   CALL MFCADPE(FECHA)                  !MALLA CERRADA
100 RETURN
END
SUBROUTINE MACEM
  PARA CASO DE MALLA CERRADA
  DIMENSION N(0:99)
  COMMON /FICHO,MALLA,V6,ICGUA,A(0:99),ICGEM,N(0:99),IFCINA,PERIOD,
1  NUMER,TRNSU,IDESP,AMPLI,PEZO,PKNDI,FRFC,C(0:99),D(0:99)
  IPAC, H(0:2000),T(0:2000),WATER,KRUF,ALUM,GRUPH,HEMAMP,MENAAA
  DO 10 I=0,ICGEM
  WRITE(1,260)
10 CONTINUE
  K1=ICGEM
  DO 20 I=ICGEM,0,-1
  R(I)=N(I)+V(I)
  I=I-1
20 CONTINUE
  RETURN
END
SUBROUTINE GENERT
  GENERACION DE ENTRADA SEGUN OPCION SELECCIONADA
  CHARACTER*48 C2302,C41
  COMMON /FICHO,MALLA,V6,ICGUA,A(0:99),ICGEM,N(0:99),IFCINA,PERIOD,
1  NUMER,TRNSU,IDESP,AMPLI,PEZO,PKNDI,FRFC,C(0:99),D(0:99)

```







```

70 PRINT A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z
CONTINUE
DO 80 I=1, 10000
Y2=(C(I)/Z(I))
IF (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z)
PRINT A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z
80 CONTINUE
WRITE (1, 500)
500 FORMAT (11A, 'LA ECUACION DE DIFERENCIAS ES: (1)')
DO 100 I=0, 10000
Y=0.1/Z(I)
IF (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z)
WRITE (1, 520) I, Y
520 FORMAT (11X, F12.5, '(K= ', I2, ')')
100 CONTINUE
DO 110 I=1, 10000
Y=-C(I)/Z(I)
IF (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z)
WRITE (1, 540) I, Y
540 FORMAT (11X, F12.5, '(K= ', I2, ')')
110 CONTINUE
C EVALUACION DE LA COEFICIENTE
DO 130 I=0, 10000
IF (I(0-1), I(0), I(0+1), I(0-1), I(0), I(0+1)) GO TO 120
Y(I)=((C(I)/Z(I))*0.1*(I-1))-((C(I)+1/Z(I))*0.1*(I-1))+Y(I)
120 CONTINUE
130 CONTINUE
C WRITE (1, 540)
C 540 FORMAT (5Y, 'I, '10Y, '10F11.5, '10A, 'Y(I)')
PRINT *, I, Y(I), Y(I), Y(I), Y(I), Y(I)
DO 140 I=0, 10000
WRITE (1, 550) I, Y(I), Y(I)
C 550 FORMAT (5Y, 'I, '10Y, '10F11.5, 'Y(I), 'Y(I)')
PRINT *, I, Y(I), Y(I), Y(I), Y(I)
140 CONTINUE
CALL SALTER (P, CHA)
DO 200 I=0, 99
C(I)=0.0
U(I)=0.0
200 CONTINUE
DO 210 I=0, 2000
P(I)=0.0
SUBROUTINE FACTOR (I, J, IA, IB, IC, ID)
I=1
IF (I, B, C, D) GO TO 540
DO 10 I=1, I, -1
IA=IA+I
10 CONTINUE
540 I=1
IF (I, B, C, D) GO TO 540
DO 20 I=1, I, -1
IB=IB+I
20 CONTINUE
540 I=1
IF (I, B, C, D) GO TO 550
DO 40 I=1, I, -1
IC=IC+I

```

```

30 CONTINUE
450 RETURN
END
SUBROUTINE RECALC(FECHA)
  FECTANGUIAP HUECIA ADPLANTE
  C
  CHARACTER FECHA*9
  DIMENSION A(0:99), B(0:99)
  DIMENSION METODO, VALIA, VK, IGRUW, A(0:99), IGRF, H(0:99), IFRTR, PERIDU,
  1 HURUS, TRFSH, IDVSP, AMPLI, PFSO, PFSO1, FAF, C(0:99), D(0:99),
  2 IPAC, D(0:200), I(0:2000), MTRF, PPOF, A1, H, GPIDU, RFRAPP, P, HAAA
  DO 4 I=0, IGRF
    B(I)=A(I)
  3 CONTINUE
  DO 5 I=0, IGRUW
    A(I)=4(I)
  5 CONTINUE
  DO 10 I=0, IGRF
    B(I)=B(I)+(PFRTR*1)
  10 CONTINUE
  DO 20 I=0, I, HURU
    A(I)=A(I)+(PFRTR*1*(IGRUF-IGRUW+1))
  20 CONTINUE
  C
  CALCULO DEL VECTOR C
  I=0
  DO 40 J=IGRUF, 0, -1
    K=IGRUF
    TH=0
    DO 40 T=J, 0, -1
      CALL FACTOR(I, J, IA, IB, IC, ID)
      C(K)=C(K)+A(IA)*B(IB)*C(IC)+((-1)**(J-T))
      TH=TH+1
      K=K-1
  40 CONTINUE
  I=I+1
  C
  CALCULO DEL VECTOR D
  I=0
  DO 60 J=IGRUW, 0, -1
    K=IGRUF
    TH=0
    DO 60 T=J, 0, -1
      CALL FACTOR(I, J, IA, IB, IC, ID)
      D(K)=D(K)+A(IA)*B(IB)*C(IC)+((-1)**(J-T))
      TH=TH+1
      K=K-1
  60 CONTINUE
  I=I+1
  IZ=IGRUF-IGRUW
  PRINT*, 'LA ECUACION DE DIFERENCIAS ES:'
  PRINT*, 'Y(K)='
  DO 70 T=0, IGRUF
    Y=D(T)/C(T)
    IF(X.EQ.0.0) GOVO 70
    D(T)=A, 'D(Y=', T, ')
  70 CONTINUE
  DO 80 T=1, IGRUF
    Y=C(T)/C(0)
    IF(X.EQ.0.0) GOVO 80
    PRINT*, A, 'Y(Y=', T, ')
  80 CONTINUE
  WRITE(1,500)
500 FORMAT(1X, 'LA ECUACION DE DIFERENCIAS ES:')

```







```

520 FURMAT(11X,F12.5,'(I1-',I2,')')
150 CONTINUE
   DO 160 I=1,ICOFM
      Y=-C(1)/C(0)
      TFX,F0,0,0) GOTO 160
      RTT(1,540) A,1
530 FURMAT(11X,F12.5,'(Y1K-',I2,')')
160 CONTINUE
C   EVALUATION OF THE EQUATION
   DO 170 I=0,ICOFM-1
      DO 170 I=0,ICOFM-1
      TFX,F0,0) TFX
      Y(I)=(C(I)/C(0))+(I-1)+Y(I-1)
      F0=I
      TFX(F0,0) GOTO 170
      Y(I)=(C(I+1)/C(0))+(I-1)-(C(I+1)/C(0))*Y(I-1)+1(I)
170 CONTINUE
180 CONTINUE
C   WRITE(1,540)
540 FURMAT(5Y,1',10Y,'(I1)',10A,'(Y11)')
   DO 190 I=0,ICOFM-1
      WRITE(1,540) I,(C(I),Y(I))
C   FURMAT(5Y,1A,5Y,F0,2,5Y,F0,4)
550 FURMAT(5Y,1A,5Y,F0,2,5Y,F0,4)
   DO 190 I=0,ICOFM-1
      WRITE(1,550) I,(C(I),Y(I))
190 CONTINUE
C   CALL NAME THE EQUATION
   DO 200 I=0,99
      C(1)=0.0
      C(2)=0.0
      C(3)=0.0
200 CONTINUE
   DO 210 I=0,2000
      Y(I)=0.0
210 CONTINUE
   F0=0
   SUBROUTINE FACT(FS(I),J,K,LW,IA,IB,IC,ID,IE,IF)
      TA=1
      TFX,F0,0) GOTO 20
      DO 10 IP=1,1,-1
      IA=IA+IP
10 CONTINUE
20 I=1
      TFX,F0,0) GOTO 40
      DO 10 IP=1,1,-1
      IB=IB+IP
10 CONTINUE
40 IC=1
      TFX,F0,0) GOTO 60
      DO 10 IP=1,1,-1
      ID=ID+IP
10 CONTINUE
60 IE=1
      TFX,F0,0) GOTO 80
      DO 10 IP=1,1,-1
      IF=IF+IP
10 CONTINUE
80 IF=1
      TFX,F0,0) GOTO 100
      DO 10 IP=1,1,-1
      IF=IF+IP

```



## BIBLIOGRAFIA

## B I B L I O G R A F Í A

- Cadzow J. A., Martens H. R.    " Discrete-Time and Computer Control Systems "   
 Prentice-Hall, Inc.   
 Englewood Cliffs, N.J., 1970
- Cadzow J. A.    " Discrete-Time Systems " An Introduction   
 with Interdisciplinary Applications.   
 Prentice-Hall, Inc.   
 Englewood Cliffs, N.J., 1973
- Kuo B.C.    " Digital Control Systems " Holt Rinehart   
 and Winston, New York, 1980
- Gene F. Franklin,   
 J. David Powell    " Digital Control of Dynamic Systems.   
 Addison Wesley, N.Y. 1980
- Onata Katsuhico    " Ingeniería de Control Moderna "   
 Traducción y adaptación Fabian-Frankel   
 Bartolomé.   
 Prentice-Hall Internacional;   
 Englewood Cliffs, 1979.
- Granville, Smith, Longley    " Cálculo Diferencial e Integral "   
 Ed. Hispanoamericana de México, 1976
- Vladimir Zwass    " Programando en Fortran " Programación   
 Estructurada con Fortran IV y Fortran 77.   
 Traducido por Hector Javier Arrona Urra   
 y Alejandro Jiménez García.   
 C.F.C.S.A., 1985
- Lignelet Patrice    " Fortran 77 " Lenguaje Fortran V   
 Versión castellana de Pedro Laforet Llopis.   
 Masson, S.A., 1985
- Jallath, C. E. Jiménez,   
 Muñoz, Z. S. y Sanchez, H.    " Introducción al Sistema VAX-11/780 "   
 Apuntes del Centro de Cálculo de la   
 Facultad de Ingeniería, U.N.A.M., 1983
- DEC    " Manual User Guide VT-100. " Digital   
 Equipment Corporation.

# TESIS: DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS POR MEDIO DE INTEGRACION NUMERICA.

Fe de erratas

HOJA No. 19

Dice:

Por lo que la función transferencia en tiempo discreto es:

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{U(Z)} = \frac{\frac{T_a}{2} (Z-1)}{1 + \frac{T_a}{2} + \left( \frac{T_a}{2} - 1 \right) Z^{-1}}$$

Debe decir:

Por lo que la función transferencia en tiempo discreto es:

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{U(Z)} = \frac{\frac{T_a}{2} Z^{-1} + \frac{T_a}{2}}{1 + \frac{T_a}{2} + \left( \frac{T_a}{2} - 1 \right) Z^{-1}}$$