



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE CIENCIAS

Determinación de Soluciones  
de Período Minimal  
en Sistemas Hamiltonianos

T e s i s

Que para obtener el título de  
Licenciado en Matemáticas

Presenta

Pablo Padilla Longoria

México, D. F. 1988



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

	<b>Introducción</b> .....	<b>1</b>
<b>0</b>	<b>Preliminares</b> .....	<b>6</b>
	0.1 Conjuntos Convexos .....	7
	0.2 Funciones Convexas .....	7
	0.3 Continuidad de Funciones Convexas .....	8
	0.4 La Transformada de Legendre .....	8
	0.5 Funciones Polares .....	11
	0.6 Los Espacios $L^p$ .....	13
<b>1</b>	<b>Subgradientes y puntos críticos</b> .....	<b>16</b>
	1.1 Definiciones Previas .....	17
	1.2 El Subgradiente de $I^*$ .....	20
	1.3 Caracterización de $\partial I^*$ .....	21
<b>2</b>	<b>Soluciones con Período Minimal Prescrito</b> .....	<b>25</b>
	2.1 Enunciación del Resultado General .....	26
<b>3</b>	<b>El funcional dual <math>I^*</math></b> .....	<b>28</b>
	3.1 La Transformada de Legendre de $H$ .....	29
	3.2 El Operador $K$ .....	30
	3.3 El Funcional $I^*$ .....	33
	3.4 Comentarios Adicionales sobre $I^*$ .....	34
<b>4</b>	<b>Un Índice Geométrico para el Grupo <math>S^1</math></b> .....	<b>36</b>
	4.1 Definición y Propiedades del Índice .....	37
	4.2 Lema de Deformación .....	43

5	Funciones de Período Minimal .....	45
	5.1 El Funcional $I^*$ , Algunas Estimaciones.....	46
	5.2 Funciones de Período Minimal.....	49
6	El Caso de $H$ Estrictamente Convexo .....	52
	6.1 Condiciones de Palais-Smale.....	53
	6.2 Puntos Críticos de $I^*$ .....	57
	6.3 Prueba para el Caso $H$ Estrictamente Convexo.....	59
7	El Caso General .....	61
	7.1 El Análogo de las Condiciones P-S.....	62
	7.2 Puntos Críticos de $I^*$ .....	63
	7.3 Comentarios Finales.....	69
	Apéndice 1 Subdiferenciabilidad y otros Desarrollos Complementarios.....	73
	Apéndice 2 Una Generalización del Teorema de Borsuk-Ulam.....	82
	Apéndice 3 Lema de Deformación.....	90
	Apéndice 4 Un Teorema de Krasnosel'skii.....	97
	Apéndice 5 Una Desigualdad entre Subgradientes .....	101
	Referencias.....	104

## Introducción.

Uno de los problemas de mayor interés cuando se modela un proceso (físico, biológico, económico, etc.) mediante un sistema de ecuaciones diferenciales, es la determinación de soluciones periódicas de dicho sistema. Esta cuestión fue estudiada por matemáticos como Poincaré, Pontriagyn y Andronov entre otros, quienes obtuvieron resultados fundamentales en el plano mediante el uso de métodos geométricos.

El problema de determinar soluciones periódicas es de particular importancia en los sistemas hamiltonianos, pues en ellos los puntos de equilibrio y las trayectorias periódicas representan los casos físicos notables. Recuérdese que para los sistemas hamiltonianos no existen ciclos límite ni puntos asintóticamente estables, como consecuencia del teorema de Liouville (ver [Ar] pp.68).

En los últimos años, el problema ha sido estudiado combinando el uso de métodos topológicos con métodos de carácter analítico. El resultado que se expone en este trabajo pertenece a esta clase y se debe a Gabriella Tarantello [Ta], quien empleó técnicas similares a las ya utilizadas por Ekeland, Hofer, Clarke, Giradi y Matzeu [Ta],[EH],[GM].

Hablando en términos vagos, el resultado establece que para cierto tipo de sistemas hamiltonianos con  $N$  grados de libertad, es posible encontrar al menos  $N$  soluciones que tengan período minimal  $T > 0$  fijado de antemano.

Es decir, dado cualquier  $T > 0$ , se puede mostrar que existen al menos  $N$  soluciones cuyo período es  $T$  y que éste es el menor posible.

Para ejemplificar y motivar lo anterior con un caso sencillo, considérese la ecuación que describe el movimiento de un péndulo simple:

$$\ddot{x} + \text{sen } x = 0.$$

Recuérdese que en términos de las variables

$$q = x$$

y

$$p = \dot{x},$$

el sistema tiene el hamiltoniano

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 - \cos q, \tag{1.1}$$

y la ecuación en términos de las nuevas variables es

$$\begin{aligned}\dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\operatorname{sen} q.\end{aligned}$$

El plano fase del péndulo se muestra en la fig. I.1.

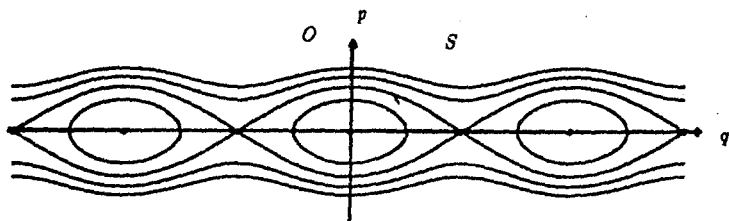


Figura I.1 Plano fase del péndulo.

El punto  $O$  es un punto de equilibrio y puede considerarse como una solución de período 0. Por otra parte, se sabe que como consecuencia de que el flujo de una ecuación diferencial sea abierto, el tiempo empleado en recorrer la separatriz  $S$  es infinito; i.e. dicha separatriz es una solución de período infinito.

Puesto que el resto de las soluciones son periódicas, es razonable suponer que el período es una función creciente con la energía. En este caso, para cualquier  $T > 0$  fija, existe una solución con período  $T$ . De hecho, integrando la ecuación (I.1), se tiene la siguiente expresión para el período:

$$T = 2 \int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E + \cos x}},$$

con  $E = \cos x_0$ .

Utilizando lo anterior, es posible demostrar las afirmaciones hechas con respecto al período de las soluciones.

Este ejemplo sugiere que para ciertos hamiltonianos es posible encontrar una solución periódica con período arbitrario.\* Planteando el problema en forma más concreta, en este trabajo se consideran sistemas hamiltonianos autónomos con  $N$  grados de libertad, es decir:

$$J\dot{z} = H'(z),$$

en donde  $z \in O^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N})$ ,  $H \in O^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$  y  $J$  es la matriz simpléctica

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ -I_N & 0 \end{pmatrix},$$

con  $I_N$  la matriz identidad  $N \times N$ .

\* Sin embargo, existen comportamientos totalmente distintos para otro tipo de hamiltonianos que podrían parecer semejantes al del péndulo. Por ejemplo, si  $H = \frac{1}{2}p^2 + F(q)$ , en donde  $F(x)$  es cierto polinomio de cuarto orden, se encuentra que las soluciones periódicas tienen periodos acotados inferiormente; i.e. existe un período mínimo.

Se buscan entonces soluciones periódicas al problema anterior, es decir

$$\begin{aligned} J\dot{z} &= H'(z) \\ z(0) &= z(T). \end{aligned} \quad (I.2)$$

La idea central para atacar el problema consiste en reformularlo en términos variacionales; i.e. se encuentra un funcional adecuado, cuyos puntos críticos sean soluciones del sistema de ecuaciones estudiado. Es un hecho conocido que el principio de mínima acción proporciona la forma más directa de llevar a cabo la reformulación anterior en el caso de sistemas hamiltonianos. Sin embargo, en este trabajo no se considera este enfoque, sino que se asocia un problema dual al problema original, tal como se explica más adelante. Posteriormente, se usa el hecho de que el funcional asociado es invariante bajo la acción de cierto grupo, lo cual permite establecer si las soluciones halladas tienen período minimal.

El enfoque variacional ha sido ampliamente aplicado, y en la literatura pueden encontrarse dos variantes:

a) El enfoque directo (Rabinowitz et al. [Ra1]): se buscan puntos críticos del funcional

$$\begin{aligned} I(z) &= \int_0^T \left[ \frac{J\dot{z}(t) \cdot z}{2} - H(z(t)) \right] dt \\ &= \int_0^T F(p, \dot{p}, q, \dot{q}) dt, \end{aligned}$$

en donde en la última integral se ha introducido la notación convencionalmente usada en Mecánica.

Las ecuaciones de Euler de este último funcional son

$$\frac{dF_p}{dt} - F_p = 0$$

$$\frac{dF_q}{dt} - F_q = 0,$$

(ver [Ar] pp.53ss.).

Si se escribe ahora explícitamente a las ecuaciones de Euler en términos de  $p$  y  $q$  se tiene

$$J\dot{z} = J \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ -\dot{p} \end{pmatrix},$$

de donde

$$J\dot{z} \cdot z = p\dot{q} - q\dot{p},$$

y

$$F(p, \dot{p}, q, \dot{q}) = \frac{p\dot{q} - q\dot{p}}{2} - H(p, q).$$

Con base en la igualdad anterior, las ecuaciones de Euler pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{q} &= H_p \\ \dot{p} &= -H_q, \end{aligned}$$

o volviendo a la variable original  $z$ ,

$$J\dot{z} = H',$$

por lo que se ve que efectivamente las soluciones a la ecuación (I.2) son puntos críticos del funcional de acción.

Este enfoque surge de manera inmediata en muchos problemas físicos como consecuencia de la aplicación de principios variacionales: el de mínima acción en Mecánica, arriba mencionado, el de Fermat en Óptica, etc.

b) El enfoque dual (Clarke-Ekeland et al. [Cl]):

se hace la suposición adicional de que el hamiltoniano  $H$  es convexo y se buscan puntos críticos del funcional

$$I^*(u) = \int_0^T \left( \frac{Ku \cdot u}{2} - H^*(u) \right) dt,$$

en donde  $H^*$  es la transformada de Legendre de  $H$  y  $K$  es el operador que se obtiene de invertir la relación  $Az = J\dot{z}$ .

Este enfoque tiene una interpretación clara en áreas como la Termodinámica, en donde el principio de máxima entropía y el principio de energía mínima pueden considerarse dual uno del otro. Asimismo, en Economía las formulaciones duales son comunes y tienen también una interpretación sencilla en términos económicos.

En ambos enfoques la invariancia de  $I$  e  $I^*$  bajo la acción de  $S^1$  (que son esencialmente las translaciones en el tiempo) debido a que el hamiltoniano es independiente de  $t$ , constituye una característica fundamental del sistema.

Sin embargo, el enfoque dual tiene ciertas ventajas sobre el directo. Por ejemplo, puesto que el espectro del operador  $A$  está formado por todos los enteros, el funcional  $I$  es indefinido. Correspondientemente, para el funcional  $I^*$  (y dependiendo del crecimiento de  $H$ ) se obtienen puntos críticos como máximos, mínimos o puntos silla (en este último caso mediante el lema del paso de la montaña [ChH]).

Una segunda ventaja de trabajar con el funcional dual, consiste en que una vez hallados los puntos críticos, es posible probar si estos tienen o no período minimal. Clarke y Ekeland [Cl] demostraron la minimalidad del período en el caso en que  $H$  tiene crecimiento subcuadrático y Ekeland y Hofer [EH] en el caso supercuadrático (ver también el trabajo de Giradi y Matzeu [GM]).

Por otra parte, es razonable esperar que dada la invariancia de  $I$  e  $I^*$  bajo la acción de  $S^1$ , se tengan soluciones múltiples al problema de la minimalidad del período. La suposición natural es que existen tantas soluciones como grados de libertad tenga el sistema. Esto último resulta más convincente si se piensa en el caso estrictamente cuadrático, en el que se tienen  $N$  modos normales asociados con sus frecuencias características (ver [Ar] pp.98ss.). Modificando a cada modo normal de forma tal que su comportamiento sea similar al ejemplo del péndulo, se tendrían efectivamente  $N$  soluciones de período minimal para  $T > 0$  fija.

El resultado que aquí se expone es en esta dirección, pues se prueba la existencia de al menos  $N$  soluciones al problema (I.2) con período minimal  $T$ , en el que  $H$  tiene crecimiento subcuadrático (y cumple con ciertas suposiciones de carácter técnico) [Ta].

G. Tarantello y R. Michalek extendieron el resultado anterior para el caso no autónomo. En éste, se considera  $H = H(z, t)$  una función  $T$  periódica en  $t$  y se buscan soluciones subarmónicas; i.e. soluciones cuyo período sea un múltiplo entero de  $T$ . Se caracterizan aquéllas que tienen período minimal usando ahora la invariancia del problema con respecto a la acción de  $\mathbb{Z}_p$ .

Para el caso tratado aquí, con  $H$  autónomo, convexo y con crecimiento subcuadrático, el esquema de prueba es el siguiente: para cualquier  $T > 0$ , se muestra primero que existe una constante apropiada  $c_T$ , tal que si el valor del funcional en cierta función es mayor que  $c_T$ , entonces la función necesariamente tiene período minimal  $T$ . Posteriormente se demuestra que el funcional considerado admite valores críticos mayores que  $c_T$ .



Observaciones sobre la organización del trabajo.

La organización del trabajo en líneas generales es como sigue:

En el capítulo 0 se exponen algunos preliminares importantes, fundamentalmente relacionados con los espacios  $L^p$  que se usan frecuentemente después. Se presentan también los conceptos necesarios acerca de funciones convexas y se introduce la transformada de Legendre. Algunas de las pruebas, resultados más técnicos o ciertas proposiciones que sólo tienen una relación indirecta con el desarrollo principal del trabajo se presentan en el apéndice 1.

En el capítulo 1 se adecúa la noción de subgradiente al caso de interés y se da una caracterización del mismo para el funcional estudiado.

En el capítulo 2 se enuncia el resultado principal y se dan las definiciones requeridas para poder hacerlo.

En el capítulo 3 se construye el funcional dual asociado al problema y se establecen sus propiedades.

En el capítulo 4 se expone una teoría de índice de  $S^1$ , se presenta por otra parte una generalización del teorema de Borsuk-Ulam. Se definen las condiciones de Palais-Smale y usando dichas condiciones, se enuncia el llamado lema de deformación, que permite encontrar los puntos críticos del funcional  $I^*$  (la prueba de este último lema se da en el apéndice 3).

En el capítulo 5 se caracteriza a las funciones de período minimal y se establecen algunas desigualdades importantes.

Finalmente en el capítulo 6, se prueba el resultado central en el caso en que el hamiltoniano es estrictamente convexo, pues entonces el funcional  $I^*$  resulta ser Fréchet-diferenciable, lo cual simplifica considerablemente la prueba. En el último capítulo, se extiende el resultado para el caso estrictamente convexo al caso general.

En el apéndice 1 se presentan los hechos fundamentales sobre subdiferenciabilidad y se da una versión un poco más general del teorema de Hahn-Banach para funciones convexas usada en el capítulo 1.

En el resto de los apéndices se proporcionan las pruebas de algunos teoremas utilizados, y que resultan demasiado largas para incluirlas en el desarrollo principal.

## Introducción.

A continuación se exponen algunos resultados importantes acerca de funciones convexas que se utilizarán más adelante. Para un tratamiento más completo de estos temas consúltese por ejemplo *Convex Analysis* de Ekeland y Temam [ET] pp.3-33.

Se define la transformada de Legendre de una función y se presentan en detalle ciertos teoremas útiles.

La transformada de Legendre de una función es importante, pues permite plantear el problema dual en forma correcta (ver [Ar],[ET]).

Se presentan por último, ciertos hechos fundamentales sobre los espacios  $L^p$ , aunque la mayor parte de las demostraciones se omiten (ver Brezis [Br2]).

## 0.1 Conjuntos convexas.

Sea  $E$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . Si  $x, y \in E$ , se dice que tales puntos forman los extremos del segmento  $[x, y]$ , en donde

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y\}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Un subconjunto  $A$  de  $E$  es convexo si para todo par de puntos  $(x, y)$  de  $A$ , el segmento  $[x, y]$  está contenido en  $A$  (Fig.0.1.1).

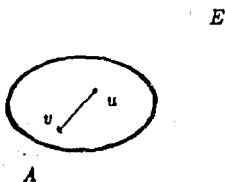


Figura 0.1.1 Un subconjunto convexo.

Claramente, la intersección de dos conjuntos convexas resulta ser un conjunto convexo. Dado  $A \subset E$  arbitrario, la intersección de todos los conjuntos convexas que contienen a  $A$  es un conjunto convexo, al que se denomina cápsula convexa de  $A$ , y se denota por  $co A$ .

La cápsula convexa se caracteriza en forma más precisa como el conjunto de combinaciones convexas de  $A$ ; i.e.

$$co A = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, x_i \in A \right\}.$$

## 0.2 Funciones convexas.

Sea  $A$  un subconjunto convexo de  $E$ . En lo que sigue, se analizan funciones de  $A$  en  $\mathbb{R}$  ( $\mathbb{R}$  denota a los reales extendidos, i.e.  $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ).

## 0.2.1 Definiciones

Se dice que una función  $F$  de un subespacio convexo  $A \subset E$  en  $\mathbb{R}$  es convexa, si para cualesquiera  $x, y \in A$  y para todo  $\lambda \in [0, 1]$  se tiene:

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y). \quad (0.2.1)$$

Se dice que una función es estrictamente convexa si es convexa y la desigualdad estricta en (0.2.1) se cumple para toda  $x, y \in A$ , tal que  $x \neq y$  y  $\lambda \in (0, 1)$ .

Por otra parte, se denomina a  $F: A \rightarrow \mathbb{R}$  (estrictamente) cóncava si  $-F$  es (estrictamente) convexa.

Se tienen las siguientes propiedades elementales de las funciones convexas.

## 0.2.1 Proposición.

## 8 Preliminares.

- i. Si  $F: E \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa y  $\lambda$  es un real positivo, entonces  $\lambda F$  es convexa.
  - ii. Si  $F$  y  $G$  son funciones convexas de  $E$  en  $\mathbb{R}$ ,  $F+G$  es convexa. Por convención se toma  $(F+G)(x) = \infty$  si  $F(x) = -G(x) = \pm\infty$ .
  - iii. Si  $\{F_i\}_{i \in I}$  es una familia de funciones convexas, entonces  $F = \sup_{i \in I} F_i$  es convexa.
- Prueba. Inmediata. ■

### 0.3 Continuidad de funciones convexas.

Una propiedad de las funciones convexas está relacionada con el hecho intuitivamente claro que si la función en cuestión es acotada en una vecindad de un punto, entonces puede garantizarse la continuidad en dicho punto (Fig.0.3.1).

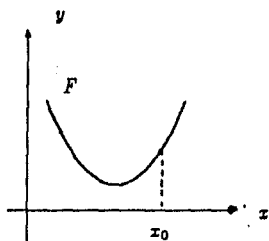


Figura 0.3.1 Continuidad de  $F$  en la vecindad de  $x_0$

En forma más precisa, se tiene la siguiente proposición:

#### 0.3.1 Proposición.

Si en la vecindad de un punto  $x \in E$  una función convexa  $F$  está acotada por arriba por una constante finita, entonces  $F$  es continua en  $x$ .

Prueba. Sin pérdida de generalidad, se reduce la prueba al caso en que  $x = 0$ ,  $F(x) = 0$ , pues el caso general se concluye de éste aplicando una translación.

Sea  $V$  una vecindad del origen tal que  $F(v) \leq a < +\infty$ , para toda  $v \in V$ . Defínase  $W = V \cap -V$  (que es una vecindad simétrica del origen) y sea  $\epsilon \in (0, 1)$ . Si  $v \in \epsilon W$ , se tiene, por la convexidad de  $F$ , que

$$\frac{v}{\epsilon} \in V \quad \Rightarrow \quad F(v) \leq (1 - \epsilon)F(0) + \epsilon F(v/\epsilon),$$

$$\frac{-v}{\epsilon} \in V \quad \Rightarrow \quad F(v) \geq (1 + \epsilon)F(0) - \epsilon F(-v/\epsilon),$$

por lo tanto

$$|F(v)| \leq \epsilon a,$$

para toda  $v \in \epsilon W$ , es decir, que  $F$  es continua en 0. ■

### 0.4 La transformada de Legendre.

Como se mencionó en la introducción, el objeto de este trabajo es determinar la existencia de soluciones de período minimal en sistemas hamiltonianos usando un enfoque dual. Lo

anterior se logra planteando un problema asociado al problema variacional original y la conexión se establece precisamente mediante la transformada de Legendre.

Aunque la transformada de Legendre se presenta generalmente en Mecánica al establecer la equivalencia entre las ecuaciones de Hamilton y de Lagrange, se hace poco énfasis en su significado geométrico.

En lo que sigue, se expone la forma de obtener la transformada de una función  $f$  de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ . Se generaliza después en forma inmediata cuando  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , y finalmente se considera el caso de una funcional en  $L^p$ .

Para una exposición más detallada del tema, consúltese [Ar] pp.61ss. Considérese ahora a una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y tal que  $f'' \geq 0$ . Aplicando el teorema del valor medio a  $x_1, x_2$  y  $x_0 = tx_1 + (1-t)x_2$  y usando el hecho de que  $f'$  es creciente se obtiene:

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0},$$

de donde

$$f(x_0) = f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2),$$

es decir, que la función es convexa (Fig.0.4.1).

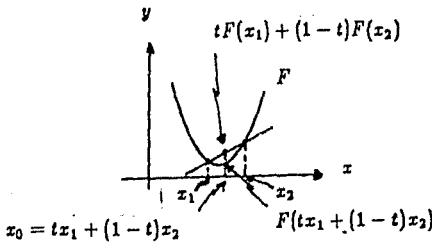


Figura 0.4.1 Una función convexa con  $f'' \geq 0$ .

Tómese ahora una  $p_0 \in \mathbb{R}$  arbitraria y constrúyase la recta  $y = p_0 x$  (Fig.0.4.2).

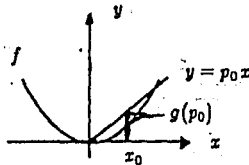


Figura 0.4.2 Construcción de la transformada de Legendre.

Considérese la abscisa  $x_0$  tal que  $f(x_0)$  dista más de la recta construida, es decir, aquella  $x_0$  para la cual

$$F(x, p_0) = p_0 x - f(x)$$

## 10 Preliminares.

tenga un máximo en  $x_0$  con  $p_0$  fija. Se define la transformada de Legendre evaluada en  $p_0$  como

$$g(p_0) = F(x_0, p_0).$$

En otras palabras, la transformada de Legendre de  $f(x)$  es una nueva función  $g(p)$ . Además, de la construcción anterior se tiene que la abscisa  $x_0(p_0)$  está dada en forma implícita por la relación

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

es decir,  $f'(x_0) = p$  y puesto que  $f'$  es una función creciente, si  $x_0(p_0)$  existe, es única; i.e. la convexidad de  $f$  asegura que  $g(p)$  está bien definida. Por esta observación se muestra que la clase natural sobre la cual está definida la transformada de Legendre es la de las funciones convexas.

Nótese sin embargo, que  $g(p)$  puede no estar definida, dependiendo de  $f$ , para ciertos valores de  $p$ .

Una propiedad fundamental de la transformada de Legendre consiste en que es involutiva, lo que significa que si  $g$  es la transformada de  $f$ , entonces  $f$  es la transformada de  $g$ ; en otras palabras, el cuadrado de la transformada de Legendre considerada como operador, es la identidad. La prueba de la afirmación anterior se sigue de un cálculo directo (ver [Ar] pp.63).

Como una consecuencia inmediata de la construcción anterior, se tiene que

$$F(x, p) = px - f(x) \leq g(p),$$

para cualesquiera  $x$  y  $p$ . Es decir, se tiene la siguiente proposición

### 0.4.1 Desigualdad de Young.

Sean  $f$  y  $g$  transformada de Legendre una de la otra. Entonces

$$px \leq f(x) + g(p),$$

para toda  $x, p \in \mathbb{R}$ .

Se aplica ahora la desigualdad de Young en un caso sencillo que después resultará importante. Sea  $f(x) = ax^\beta/\beta$ , con  $\beta > 1$ . Se tiene entonces

$$F(x, p) = xp - a \frac{x^\beta}{\beta},$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial x} = p - ax^{\beta-1},$$

por lo que  $F$  tiene un máximo en

$$x = \left(\frac{p}{a}\right)^{\frac{1}{\beta-1}},$$

y la transformada de  $f$  es entonces

$$g(p) = p \left(\frac{p}{a}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} - \frac{a}{\beta} \left(\frac{p}{a}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}}.$$

Tomando entonces  $\alpha$  tal que

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1,$$

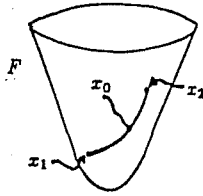


Figura 0.4.3 El caso de varias variables.

se obtiene

$$g(p) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1} \frac{p^\alpha}{\alpha}.$$

La generalización de las ideas expuestas anteriormente al caso de funciones de más de una variable se lleva a cabo en forma casi inmediata.

Sea  $f(x)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , una función de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ , tal que la forma cuadrática determinada por la matriz

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right),$$

es positiva definida. Un argumento casi idéntico al usado en el ejemplo anterior muestra que  $f$  es convexa (Fig.0.4.3).

Entonces la transformada de Legendre es ahora una función

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{p} \rightarrow g(\bar{p}), \quad \bar{p} = (p_1, \dots, p_n),$$

definida por las ecuaciones

$$g(\bar{p}_0) = F(x(\bar{p}_0), \bar{p}_0) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} F(x, \bar{p}_0),$$

siendo  $F(x, \bar{p}) = \bar{p} \cdot x - f(x)$ . Igualmente se caracteriza  $x_0$  en forma implícita como  $\bar{p}_0 = \nabla f(x_0)$  y la desigualdad de Young toma la forma

$$\bar{p} \cdot x \leq f(x) + g(\bar{p}),$$

para toda  $x, \bar{p} \in \mathbb{R}^n$ .

### 0.5 Funciones polares.

Se analiza ahora el caso general de la transformada de Legendre de un funcional  $F: E \rightarrow \mathbb{R}$  en un subespacio de  $L^p$  (ver sección 0.6). En este contexto la denominación de función polar es más frecuente que el de transformada de Legendre y se usarán indistintamente en lo sucesivo. Se denota como  $E^*$  al espacio dual de  $E$ . Como se sabe, la relación de dualidad

## 12 Preliminares.

entre  $L^p$  y  $L^q$  ( $p$  y  $q$  exponentes conjugados; i.e.  $1/p + 1/q = 1$ ) se establece mediante la forma bilineal

$$\langle x, x^* \rangle = \int x(s)x^*(s) ds,$$

para  $x \in L^p$  y  $x^* \in L^q$ .

Considérese a la función afín continua

$$x \rightarrow \int x^*x - \alpha,$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Entonces, dicha función es en todo punto menor que  $F$  si, para toda  $x \in E$

$$\alpha \geq \int x^*x - F(x),$$

o

$$\alpha \geq F^*(x^*),$$

con

$$G(x^*) = F^*(x^*) = \sup_{x \in E} \left\{ \int x^*x - F(x) \right\}. \quad (0.5.1)$$

La definición anterior determina a  $G$  como una función de  $E^*$  en  $\mathbb{R}$  y como antes, se denomina a esta función transformada de Legendre o función polar de  $F$ . La notación  $F^*$  enfatiza los papeles duales de  $F$  y  $G$ .

Nota: en esta última definición, no se menciona la diferenciabilidad de  $F$ , como en los casos anteriores. Sin embargo, es claro que de ser  $F$  suficientemente suave, las definiciones coinciden en el caso  $E = \mathbb{R}^n$ . Más aún, si  $F$  es Fréchet-diferenciable, es posible caracterizar a  $x(x^*)$  como antes, pues en ese caso sería un punto crítico de la función

$$\int x^*x - F(x).$$

La definición dada en (0.5.1), no se altera si se consideran sólo aquellas funciones  $x$  en el dominio de  $F$ ; i.e.

$$G(x^*) = F^*(x^*) = \sup_{x \in \text{dom } F} \left\{ \int x^*x - F(x) \right\}.$$

De esto último se concluye que  $F^*$  es el supremo de una familia de funciones continuas afines. Se tiene entonces que  $F^*$  es convexa e inferiormente semicontinua (ver apéndice 1).

Otra observación importante que se desprende de la definición es que si  $F_1 \leq F_2$ , entonces  $F_1^* \leq F_2^*$ .

Repitiendo el proceso de construcción de  $F^*$ , aplicado ahora a esta misma función, se obtiene  $(F^*)^*$ , que es una función de  $E$  en  $\mathbb{R}$ , definida como

$$F^{**}(x) = \sup_{x^* \in E^*} \left\{ \int x^*x - F^*(x^*) \right\}.$$

$F^{**}$  es el supremo de funciones afines continuas y como tal, puede compararse con  $F$ . La propiedad de involución de la transformada de Legendre en el contexto de espacios de Banach cambia un poco y requiere de algunas definiciones y planteamientos previos, por lo que se da en el apéndice 1.



Se dice que dos funciones  $F$  y  $G$  están en dualidad si

$$F = G^* \quad \text{y} \quad G = F^*.$$

Se presenta ahora un ejemplo concreto de funciones en dualidad usado en un desarrollo posterior.

Sea  $E$  un subespacio de  $L^p$  y  $E^*$  su dual. Considérense las normas usuales  $|\cdot|_{L^p}$  y  $|\cdot|_{L^q}$ , respectivamente, con  $p$  y  $q$  exponentes conjugados. Si  $\varphi$  es una función par, convexa y continua de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ , entonces  $\varphi^*$  es una función convexa y continua de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ . Se definen  $F: E \rightarrow \mathbb{R}$  y  $G: E^* \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$F(x) = \varphi(|x|_{L^p}),$$

$$G(x^*) = \varphi(|x^*|_{L^q}),$$

respectivamente. Entonces  $F$  y  $G$  están en dualidad.

Para mostrar lo anterior, basta notar que

$$\begin{aligned} F^*(x^*) &= \sup_{x \in E} \left\{ \int x^* x - \varphi(|x|_{L^p}) \right\} \\ &= \sup_{t \geq 0} \sup_{\substack{x \in E \\ |x| = t}} \left\{ \int x^* x - \varphi(|x|_{L^p}) \right\} \\ &= \sup_{t \geq 0} \left\{ \sup_{x \in E} \frac{t}{|x|_{L^p}} \int x^* x - \varphi(t) \right\} \\ &= \sup_{t \geq 0} \{ t |x^*|_{L^q} - \varphi(t) \} \\ &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \{ t |x^*|_{L^q} - \varphi(t) \}, \end{aligned}$$

puesto que  $\varphi$  es par, de donde finalmente

$$F^*(x^*) = \varphi^*(|x^*|_{L^q}) = G(x^*).$$

Usando este hecho y el ejemplo de la sección 0.4, se sigue que, para  $\alpha, \beta \geq 1$  y tales que  $1/\alpha + 1/\beta = 1$ , si se define a

$$\varphi(t) = \frac{1}{\beta} |t|^\beta,$$

entonces

$$\varphi^*(t) = \frac{1}{\alpha} |t|^\alpha$$

y

$$F(x) = \frac{1}{\beta} |x|_{L^p}^\beta \quad \text{y} \quad G(x^*) = \frac{1}{\alpha} |x^*|_{L^q}^\alpha,$$

son funciones convexas en dualidad.

## 0.6 Los espacios $L^p$ .

Se denota por  $L^1(\Omega)$  al conjunto de las funciones integrables en  $\Omega$  que toman valores reales. Se escribe

$$|f|_{L^1} = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

## 14 Preliminares.

Frecuentemente se escribe  $L^1$  en lugar de  $L^1(\Omega)$  y  $\iint f$  en lugar de  $\int_{\Omega} f(x) dx$ , cuando no se da origen a confusiones. Se usa la abreviatura usual a.e. para indicar que una propiedad es válida excepto en un conjunto de medida cero.

Se enuncian ahora una serie de teoremas que se usarán posteriormente; para una prueba de todos ellos véase por ejemplo [KF], [Br2], etc.

### 0.6.1 Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones en  $L^1$ . Supóngase que

a)  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  a.e. en  $\Omega$ ,

b) existe una función  $g \in L^1$  tal que para cada  $n$ ,  $|f_n(x)| \leq g(x)$ , a.e. en  $\Omega$ .

Entonces  $f \in L^1(\Omega)$  y  $|f_n - f|_{L^1} \rightarrow 0$ .

### 0.6.2 Teorema de Fubini.

Supóngase que  $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ . Entonces para casi todo  $x \in \Omega_1$ ,

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \quad \text{y} \quad \int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

En forma análoga, para casi toda  $y \in \Omega_2$

$$F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1) \quad \text{y} \quad \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

Además se verifica

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx = \int \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy.$$

### 0.6.3 Definición.

Sea  $p$  con  $1 \leq p < \infty$ ; se define

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es medible y } |f|^p \in L^1(\Omega)\},$$

y se denota

$$|f|_{L^p} = \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p},$$

que efectivamente define una norma en  $L^p$ .

### 0.6.4 Definición.

Se define

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es medible y existe una constante } C \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ a.e. en } \Omega\},$$

y se denota

$$|f|_{L^\infty} = \inf \{C \mid |f(x)| \leq C \text{ a.e. en } \Omega\}.$$

Se prueba también que  $|\cdot|_{L^\infty}$  define una norma.

### 0.6.5 Teorema (Desigualdad de Hölder).

Sean  $f \in L^p$  y  $g \in L^q$ , con  $1 \leq p \leq \infty$ , con  $p$  y  $q$  exponentes conjugados. Entonces  $fg \in L^1$  y

$$\int |fg| \leq |f|_{L^p} |g|_{L^q}.$$

*Prueba.* En el caso  $p = 1$  y  $q = \infty$  la conclusión es inmediata. Si  $1 < p < \infty$ , por la desigualdad de Young (0.4.1):

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q,$$

para toda  $a, b \geq 0$ .

Tomando  $a = |f(x)|$  y  $b = |g(x)|$ , se tiene

$$|f(x)||g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q \text{ a.e.}$$

De donde resulta que  $fg \in L^1$  y que

$$\int |fg| \leq \frac{1}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{q} \|g\|_{L^q}^q. \quad (0.6.1)$$

Sustituyendo  $f$  por  $\lambda f$  en (0.6.1) resulta

$$\int |f g| \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda q} \|g\|_{L^q}^q.$$

Eligiendo  $\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1} \|g\|_{L^q}^{\frac{1}{q}}$ , para minimizar el término de la derecha, se obtiene la desigualdad de Hölder.

Una consecuencia importante de la proposición anterior es que si  $f \in L^{p_1} \cap L^{p_2}$  con  $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ , entonces  $f \in L^r$  para todo  $r$  tal que  $p_1 \leq r \leq p_2$ .

Se concluye también que si la medida de  $\Omega$   $m(\Omega) < \infty$ , entonces  $L^{p_2} \subset L^{p_1}$  si  $p_1 < p_2$ .

Se recuerda que los espacios  $L^p$ , ( $1 \leq p \leq \infty$ ) son espacios vectoriales normados y completos con respecto a la norma  $\|\cdot\|_{L^p}$ ; i.e. son todos ellos espacios de Banach. Además, para  $1 < p < \infty$ , dichos espacios son separables, es decir, existe en ellos un subconjunto denso numerable y, por otra parte, son reflexivos; i.e. isométricamente isomorfos a su doble dual.

---

# Capítulo 1.

## Subgradientes y puntos críticos .

---

### Introducción.

En este capítulo se generalizan las ideas presentadas por Ekeland-Lasry en [EL] para definir la noción de subgradiente de una clase de funcionales que es adecuada para este trabajo. En el apéndice 1 se exponen los conceptos fundamentales acerca de subdiferenciabilidad y se prueban algunos teoremas que se usan en este capítulo.

Para un tratamiento completo de estos temas y de sus aplicaciones, véase *Convex Analysis*, de Ekeland-Teman [ET].

## 1.1 Definiciones previas.

En lo que sigue,  $\Omega$  denota al intervalo  $(0, 2\pi)$ . Considérese un subespacio cerrado  $E$  de

$$L^\alpha(\Omega, \mathbb{R}^m) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \int_\Omega |u|^\alpha < +\infty, \alpha \geq 2\}.$$

Se tiene entonces para algún subespacio cerrado  $F \subset L^\alpha(\Omega, \mathbb{R}^m)$  que

$$L^\alpha(\Omega, \mathbb{R}^m) = E \oplus F.$$

Una manera de mostrar esta afirmación es la siguiente. Por ser  $\alpha \geq 2$ , su exponente conjugado  $\beta$  cumple

$$\beta \leq 2,$$

y usando la desigualdad de Hölder 0.6.5, se tiene

$$|u|_{L^2} = |u \cdot 1|_{L^2} \leq |u|_{L^\alpha} |1|_{L^\beta}.$$

Tomando  $p = \alpha/2$  y  $q = \alpha/\alpha - 2$  resulta

$$|u|_{L^2} \leq m(\Omega)^{\frac{\alpha-2}{\alpha}} |u|_{L^\alpha}^2,$$

en donde  $m(\Omega)$  es la medida de  $\Omega$ .

De lo anterior se desprende que

$$L^\alpha(\Omega) \subset L^2(\Omega),$$

y que la inclusión de  $L^\alpha$  en  $L^2$  es continua.

Como  $L^2(\Omega)$  es un espacio de Hilbert, para cualquier subespacio cerrado  $E$  de  $L^2(\Omega)$ , se tiene la descomposición

$$L^2(\Omega) = E \oplus E^\perp,$$

que a su vez induce una descomposición en  $L^\alpha(\Omega)$ , con

$$E = E \cap L^\alpha(\Omega)$$

y

$$F = E^\perp \cap L^\alpha(\Omega).$$

En efecto, claramente  $E \cap F = \{0\}$ . Por otra parte  $E$  es cerrado por hipótesis y resta verificar que  $F$  es también cerrado.

Pero si  $\{u_n\}$  es una sucesión contenida en  $F$ , que converge a  $u \in L^\alpha(\Omega)$ , entonces

$$|u_n - u|_{L^2} \leq c|u_n - u|_{L^\alpha},$$

es decir, que  $u_n \rightarrow u$  también en  $L^2$  y por lo tanto está en  $E^\perp \cap L^\alpha(\Omega) = F$ , de donde  $F$  es cerrado.

La descomposición anterior induce también una descomposición correspondiente en el dual de  $L^\alpha(\Omega)$ ; i.e. en  $L^\beta(\Omega)$ :

$$L^\beta(\Omega) = E^* \oplus F^*.$$

En efecto, puesto que  $E \subset L^\alpha(\Omega)$ , se tiene que  $(L^\alpha(\Omega))^* \subset E^*$ , ya que si

$$\ell : L^\alpha(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

18 Subgradientes y puntos críticos .

es un funcional lineal continuo, entonces  $\ell|_E : \mathbb{R}$  es un elemento de  $E^*$  (en donde  $E$  tiene la norma de  $L^a(\Omega)$ ).

Se expone entonces la descomposición que se induce en  $L^p(\Omega)$ . Si  $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$  es un funcional lineal acotado sobre  $E$ , se puede extender a un funcional  $\tilde{\ell}$  en  $L^a(\Omega)$  definiéndolo como  $\tilde{\ell}|_F = 0$ , es decir

$$\tilde{\ell}(u) = \tilde{\ell}(u_E + u_F) \equiv \ell(u_E).$$

$\tilde{\ell}$  es claramente lineal (por la unicidad de la descomposición  $E \oplus F$ ) y

$$|\tilde{\ell}(u)| = |\tilde{\ell}(u_E)| \leq |\ell||u_E| \leq c|\ell||P||u|,$$

en donde  $P : L^a(\Omega) \rightarrow E$  es el operador de proyección, que aunque no necesariamente tiene norma 1, es acotado.

La anterior implica que la extensión así definida está en el dual de  $L^a(\Omega)$ ; i.e.

$$\tilde{\ell} \in (L^a(\Omega))^* \cong L^p(\Omega).$$

Es decir, que existe un único  $v \in L^p(\Omega)$  tal que

$$\tilde{\ell}(u) = \int_{\Omega} uv,$$

y que cumple  $\tilde{\ell}(u_F) = 0$ ,  $\tilde{\ell}(u_E) = \ell(u_E)$ . Se identifica entonces

$$E^* \rightarrow \{v \in L^p(\Omega) \mid \int_{\Omega} vu_F = 0, \forall u_F \in F\},$$

$$F^* \rightarrow \{v \in L^p(\Omega) \mid \int_{\Omega} vu_E = 0, \forall u_E \in E\}.$$

Queda claro que  $E^* \cap F^* = 0$  ( $\int_{\Omega} uv = 0$ ,  $\forall u \in L^a(\Omega)$ ).

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \ell(u) &= \int_{\Omega} vu = \int_{\Omega} v(u_E + u_F) \\ &= \int_{\Omega} vu_E + \int_{\Omega} vu_F \\ &= \ell_E(u_E) + \ell_F(u_F). \end{aligned}$$

Entonces

$$\ell_E : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\ell_F : F \rightarrow \mathbb{R},$$

pertenecen a  $E^*$  y a  $F^*$  respectivamente. Por la identificación que se hizo previamente, se tiene

$$\ell_E(u_E) = \int_{\Omega} v_E u_E$$

y

$$\ell_F(u_F) = \int_{\Omega} v_F u_F,$$

con  $\int_{\Omega} v_E u_F = 0 = \int_{\Omega} v_F u_E$ .

Esto implica que

$$\begin{aligned} \ell(u) &= \int_{\Omega} v_E u_E + \int_{\Omega} v_F u_F \\ &= \int_{\Omega} (u_E + u_F)(v_E + v_F). \\ &= \int_{\Omega} (v_E + v_F)u \end{aligned}$$

Esto quiere decir que  $v$  se puede escribir como  $v_E \oplus v_F$ , que proporciona la descomposición de  $L^p(\Omega)$  buscada.

En el caso considerado aquí,

$$E = \{u \in L^p \mid \int_{\Omega} u = 0\} \quad F = \{\text{constantes}\},$$

y

$$E^* = \{v \in L^q(\Omega) \mid \int_{\Omega} v c = 0, c = \text{cte}\},$$

$$F^* = \{v \in L^q(\Omega) \mid \int_{\Omega} v u = 0, \forall u \text{ tal que } \int_{\Omega} u = 0\}.$$

En particular,  $F^*$  contiene a las constantes.

Además, si  $v \in F^*$ , entonces  $\ell_F(u) = \ell_F(u_E + u_F) = u_F \int_{\Omega} v$  ( $u_F$  es constante).

Sea entonces

$$w = \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} v = \text{cte},$$

y

$$\int_{\Omega} w u = \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} v \int_{\Omega} u = u_F \int_{\Omega} v.$$

Es decir, que

$$\ell_F(u) - \int_{\Omega} w u \equiv 0, \quad \forall u \in F,$$

por lo que  $v = w$  y  $F^* = \{\text{constantes}\}$ .

Sea

$$G: \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, u) \rightarrow G(x, u)$$

una función continua que satisface las siguientes condiciones:

- i.  $G(x, \cdot)$  es convexa para toda  $x \in \Omega$ .
- ii.  $|G(x, \cdot)| \leq c_1 |u|^\alpha + c_2$ , para toda  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $x \in \Omega$ , con  $c_1 > 0$  y  $c_2 \geq 0$  constantes.

Considérese por otra parte un operador  $K: E \rightarrow E$ , lineal, compacto y autoadjunto. Se tiene entonces que en el espacio de Banach  $E$ , con la norma usual  $|\cdot|_{L^\alpha}$ , el funcional

$$I^\alpha(u) = \int_{\Omega} \left| \frac{Ku \cdot u}{2} \pm G(x, u) \right| dx, \quad u \in E,$$

está bien definido, pues para un operador compacto y autoadjunto

$$\left| \int_{\Omega} Ku \cdot u dx \right| \leq c_0 |u|_{L^2}^2 \leq c_0 |u|_{L^\alpha}^2, \quad \alpha \geq 2,$$

## 20 Subgradientes y puntos críticos .

de donde

$$\begin{aligned} |I^*(u)| &\leq \frac{c_0}{2} |u|_{L^\infty}^2 + \int_{\Omega} c_1 |u|^\alpha dx + c_2 \int_{\Omega} dx \\ &= \frac{c_0}{2} |u|_{L^\infty}^2 + c_1 |u|_{L^\infty}^\alpha + c_2 2\pi \leq +\infty. \end{aligned}$$

Considérese ahora la continuidad de  $I^*$ .

Por una parte,  $\int_{\Omega} Ku \cdot u$  es claramente continuo.

Por otra parte,  $G$  es continua y satisface  $\dot{u}$ , por lo que usando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se tiene que

$$\int_{\Omega} G(x, u) dx$$

también lo es. En efecto, si  $u_n \rightarrow u$  en  $L^\infty$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} G(x, u_n) dx = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} G(x, u_n) dx = \int_{\Omega} G(x, \lim u_n) dx = \int_{\Omega} G(x, u) dx.$$

### 1.2 El subgradiente de $I^*$ .

Dada la estructura de  $I^*$  como un término cuadrático,  $\int_{\Omega} (Ku \cdot u) dx$ , más o menos un término convexo,  $\int_{\Omega} G(x, u) dx$ , es posible definir una noción de subgradiente de  $I^*$  en  $E$ . De acuerdo con lo expuesto en el apéndice 1, para el mapeo  $G : \Omega \times \mathbb{R}^m$ , el subgradiente con respecto a la variable  $u$  en el punto  $(x, u)$  se puede caracterizar como

$$\partial_u G(x, u) = \{ \zeta \in \mathbb{R}^m \mid \forall w \in \mathbb{R}^m, G(x, w) - G(x, u) \geq (w - u) \cdot \zeta \}.$$

En el apéndice 1 se prueba que una función convexa que sea finita y continua en un punto, posee un subgradiente bien definido en dicho punto.

Se desprende de esto último que  $\partial_u G(x, v) \neq \emptyset$ , para todo  $(x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^m$ .

Se considera ahora el funcional no lineal

$$\underline{G} : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \rightarrow \int_{\Omega} G(x, u(x)) dx.$$

El subgradiente de  $G$  en  $E$  en el punto  $u$ , se define como el subconjunto de  $E^*$  dado por

$$\partial_E \underline{G}(u) = \{ \xi(x) \in E^* \mid \forall v(x) \in E,$$

$$\int_{\Omega} [G(x, v(x)) - G(x, u(x))] \geq \int_{\Omega} [v(x) - u(x)] \cdot \xi(x) dx \},$$

es decir, un "subgradiente parcial" en  $E$ , en otras palabras, si se interpreta en el lenguaje usual del cálculo de variaciones, se están limitando las variaciones a  $E$ .

Los subgradientes de  $G$  y  $\underline{G}$  están estrechamente relacionados, como se muestra en seguida.



1.3. Caracterización de  $I^*$ .

## 1.3.1 Proposición.

$\xi \in \partial_E \underline{G}(u)$  si y sólo si existe una  $\chi \in F^*$ , tal que

$$\xi(x) + \chi(x) \in \partial G(x, u(x)) \quad \text{a.e.}$$

*Prueba.* La prueba consta de dos partes:

1) Sea  $u \in L^a(\Omega, \mathbb{R}^m)$ . Se define

$$\partial_{L^a} \underline{G}(u) = \{ \xi \in L^b(\Omega, \mathbb{R}^m) \mid \forall v(x) \in L^a, \int_{\Omega} [G(x, v(x)) - G(x, u(x))] dx \geq \int_{\Omega} (v(x) - u(x)) \cdot \xi dx, \}$$

es decir, un "subgradiente total" con respecto a  $L^a$ .

Se demostrará que

$$\xi \in \partial_{L^a} \underline{G}(u) \iff \xi(x) \in \partial G(x, u(x)) \quad \text{a.e.}$$

Para ello considérese el conjunto

$$S_y = \{ x \in \Omega \mid G(x, u(x) + y) - G(x, u(x)) < y \cdot \xi(x) \},$$

definido para cada  $y \in \mathbb{R}^m$ . Puesto que  $G$  es continua y ya que  $u \in L^a$ , entonces  $G(\cdot, u(\cdot))$  es medible; además, claramente  $y \cdot \xi$  es medible, por lo que  $S_y$  es medible.

Sea

$$S = \bigcup_{y \in \mathbb{R}^m} S_y,$$

que también es medible dada la continuidad de  $G$ . Es necesario probar que la medida de Lebesgue de  $S$ ,  $m(S)$ , es cero.

Procediendo por contradicción, supóngase que  $m(S) > 0$ . Por otra parte, puesto que  $G(x, \cdot)$  es convexa,

$$S = \bigcup_{|y| \leq 1} S_y,$$

pues si  $x \in S_y$ ,  $|y| > 1$ , entonces

$$\begin{aligned} & G(x, u(x) + \frac{y}{|y|}) - G(x, u(x)) \\ &= G(x, \frac{1}{|y|}(u(x) + y) + (1 - \frac{1}{|y|})u(x)) - G(x, u(x)) \\ &\leq \frac{1}{|y|} G(x, u(x) + y) + (1 - \frac{1}{|y|}) G(x, u(x)) - G(x, u(x)) \\ &\leq \frac{1}{|y|} (G(x, u(x) + y) - G(x, u(x))) \\ &\leq \frac{1}{|y|} y \cdot \xi(x), \end{aligned}$$

es decir, que  $x \in S_{y/|y|}$ .

## 22 Subgradientes y puntos críticos .

Para cualquier  $x \in S$ , defínase  $y(x) \in \mathbb{R}^m$ , tal que

$$|y(x)| \leq 1, \quad y \in S_{y(x)}.$$

Se tiene entonces que la función

$$v(x) = y(x)\chi_S + u(x),$$

siendo  $\chi_S$  la función característica de  $S$ , pertenece a  $L^\alpha(\Omega, \mathbb{R}^m)$  y

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [G(x, v(x)) - G(x, u(x))] dx &= \int_{\Omega} [G(x, \chi_S y(x) + u(x)) - G(x, u(x))] dx \\ &= \int_S [G(x, y(x) + u(x)) - G(x, u(x))] dx \\ &\leq \int_{\Omega} y(x) \cdot \xi(x) dx, \quad \text{por la definición de } S \\ &\leq \int_{\Omega} y(x)\chi_S \cdot \xi(x) dx \\ &\leq \int_{\Omega} (v(x) - u(x)) \cdot \xi(x) dx. \end{aligned}$$

Es decir

$$\int_{\Omega} [G(x, v(x)) - G(x, u(x))] dx < \int_{\Omega} (v(x) - u(x)) \cdot \xi(x) dx,$$

lo cual contradice el hecho de que  $\xi \in \partial_{L^\alpha} G(u)$ .

2) En la segunda parte de la demostración, se muestra que

$$\xi \in \partial_E G(u) \iff \text{existe } \chi \in F^* \text{ tal que } \xi + \chi \in \partial_{L^\alpha} G(u),$$

lo cual concluye la prueba.

Por definición,  $\xi \in \partial_E G(u) \iff \forall v \in E$

$$\int_{\Omega} v(x) \cdot \xi dx \leq \int_{\Omega} [G(x, u(x) + v(x)) - G(x, u(x))] dx. \quad (1.2.1)$$

Sea

$$p(v) = \int_{\Omega} [G(x, u(x) + v(x)) - G(x, u(x))] dx,$$

para todo  $v \in L^\alpha(\Omega, \mathbb{R}^m)$ .

Puesto que  $G$  es continua y convexa,  $p$  define un mapeo continuo y convexo de  $L^\alpha(\Omega, \mathbb{R}^m)$  a  $\mathbb{R}$ . Además, si se define el funcional

$$\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \rightarrow \int_{\Omega} v(x) \cdot \xi dx,$$

se tiene por (1.2.1) que  $\lambda(v) \leq p(v)$ , para toda  $v \in E$ .

Por lo anterior, es posible aplicar el teorema de Hahn-Banach (ver apéndice 1) y encontrar una extensión  $\Lambda$  de  $\lambda$  a todo  $L^\alpha(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ; i.e. existe  $\tilde{\xi} \in L^\beta(\Omega, \mathbb{R}^m)$  tal que

$$\text{i. } \Lambda(v) = \int_{\Omega} v(x) \cdot \tilde{\xi}(x) dx \leq p(v) = \int_{\Omega} [G(x, u(x) + v(x)) - G(x, u(x))] dx \text{ y}$$

ii.  $\Lambda(v) = \lambda(v)$ , para toda  $v \in E$ .

Por (i) se tiene que  $\tilde{\xi} \in \partial_{L^*} \underline{G}(u)$  y puesto que  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m) = E^* \oplus F^*$ , de (ii) se concluye que

$$\tilde{\xi} = \xi + \chi,$$

para algún  $\chi \in F^*$

**Comentario.**

Como se demuestra en el apéndice 1, si  $G \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^m)$ , entonces

$$\partial_u G(x, u) = \left\{ \frac{\partial G}{\partial u}(x, u) \right\};$$

i.e. en este caso el subgradiente se reduce a la diferenciación parcial usual, y por el lema que se acaba de probar

$$\tilde{\xi}(x) = \frac{\partial G}{\partial u}, \text{ a.e.}$$

De aquí que  $\underline{G}$  resulte ser Fréchet-diferenciable y

$$\underline{G}'(u) = \frac{\partial G}{\partial u}(x, u).$$

Finalmente se presenta una definición de subgradiente y de punto crítico para el funcional  $I^*$ .

### 1.3.2 Definición.

Para cualquier  $v \in E$ , el subgradiente de  $I^*$  en  $v$  se define como el conjunto de  $E^*$  dado por

$$\partial_E I^*(v) = \{ \xi^* \in E^* \mid \pm (\xi^* - Kv) \in \partial_E \underline{G}(v) \},$$

el signo + o - se toma de acuerdo a la definición de  $I^*$ .

Por la caracterización del subgradiente de  $\underline{G}$ , se tiene que

$$\xi \in \partial_E I^*(v) \iff \text{existe } \chi \in F^* \text{ y } \tilde{\xi} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m) \text{ tales que } \xi = Kv \pm \tilde{\xi} + \chi, \tilde{\xi} \in \partial G(x, v(x)), \text{ a.e.}$$

En forma natural se definen los puntos críticos de  $I^*$ :  $u \in E$  es un punto crítico de  $I^*$  si  $0 \in \partial_E I^*(u)$ .

En otras palabras,  $u$  es un punto crítico de  $I^*$  si existe una  $\chi \in F^*$  tal que

$$\pm (\chi(x) - Ku(x)) \in \partial G(x, u(x)) \text{ a.e.}$$

De lo anterior se concluye que si  $G \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^m)$ , entonces  $I^*$  es Fréchet-diferenciable y la definición de punto crítico coincide con la noción usual de punto crítico de un funcional regular en el espacio  $E$ .

### 1.3.4 Observación.

Como se verá más adelante, para este trabajo  $E = \{ u \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^{2N}) \mid \int_0^{2\pi} u = 0 \}$ , es decir, como subespacio de  $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^{2N})$ ,  $E$  es ortogonal al subespacio de las constantes.

En el caso en que  $G$  es  $C^1$  y por lo tanto  $\underline{G}$  Fréchet-diferenciable, las partes (1) y (2) del teorema tiene una interpretación clara en términos del cálculo de variaciones clásico:

#### 24 Subgradientes y puntos críticos .

(i) establece que

$$G'(u)h = \int_0^{2\pi} G'(u(x))h(x) dx$$

para toda  $h \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^m)$ , lo cual implica que  $G'(u(x)) = 0$  a.e., es decir, se trata del lema fundamental del cálculo de variaciones.

(ii) establece que si  $h \in E^*$ , entonces existe una  $\zeta \in F^* = \{\text{constantes}\}$  y tal que

$$G'(u(x)) + \zeta = 0 \text{ a.e.},$$

y esto no es más que buscar los puntos críticos de  $G$  condicionado por el funcional  $\int_0^{2\pi} v = 0$ , para toda  $v \in E$ , por lo que  $\zeta$  es un multiplicador de Lagrange.

---

## Capítulo 2.

---

Soluciones con período minimal prescrito.

### Introducción.

En este capítulo se enuncia el resultado principal de este trabajo y se presentan para ello algunas definiciones previas. Se establece en forma precisa que es lo que se entiende por dos soluciones distintas.

Por otra parte, por un argumento de reescalamiento, se muestra que basta probar el resultado cuando el período prescrito  $T$  es  $2\pi$ .

## 26 Soluciones con período minimal prescrito.

### 2.1 Enunciado del resultado general.

El problema estudiado consiste en encontrar soluciones periódicas de un sistema hamiltoniano autónomo con  $N$  grados de libertad. Es decir, se buscan soluciones al siguiente problema:

$$\begin{aligned} J\dot{z}(t) &= H'(z) \\ z(0) &= z(T), \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

con  $T > 0$  y en donde  $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ ,  $z \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{2N})$  y  $J$  es la matriz de  $2N \times 2N$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ -I_N & 0 \end{pmatrix},$$

en donde  $I_N$  es la matriz identidad de  $N \times N$ .

Obsérvese que por ser la ecuación autónoma, si  $z(t)$  es una solución el problema, también lo es

$$T_\theta z(t) = z(t + \theta),$$

para toda  $\theta \in [0, T]$ .

Sin embargo, en el espacio fase, todas las soluciones corresponden a una misma curva, sólo que parametrizada de manera distinta (la condición inicial cambia) y por lo tanto, en un sentido geométrico,  $z$  y  $T_\theta z$  representan la misma solución. Entonces, si se quiere contar el número de soluciones de (2.1.1) que sean efectivamente distintas, es necesario especificar que es lo que se entiende por esto último.

En consecuencia, se dice que dos soluciones  $z_1$  y  $z_2$  son distintas si  $T_\theta z_1 \neq z_2$  para toda  $\theta \in [0, T]$ .

En forma más precisa, para  $T > 0$ , se busca el número de soluciones distintas con período minimal  $T$ , es decir, aquellas soluciones para las cuales

$$T' \leq T, \quad z(0) = z(T') \Rightarrow T' = kT,$$

para algún entero positivo  $k$ .

El resultado fundamental concerniente al problema anterior y cuya prueba se efectúa en los capítulos subsiguientes es el siguiente:

#### 2.1.1 TEOREMA.

SEA  $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$  Y TAL QUE SATISFACE

A)  $H$  ES CONVEXA Y B) PARA TODA  $z \in \mathbb{R}^{2N}$

$$\frac{a_1}{\beta} |z|^\beta \leq H(z) \leq \frac{a_2}{\beta} |z|^\beta,$$

CON  $1 < \beta < 2$  y  $a_1, a_2 > 0$  CONSTANTES.

SI  $a_2/a_1 < 2^{\beta/2}$ , ENTONCES, PARA CUALQUIER  $T > 0$ , EXISTEN AL MENOS  $N$  SOLUCIONES DISTINTAS CON PERIODO MINIMAL  $T$ .

La prueba del teorema anterior se basa fundamentalmente en dos hechos: la formulación variacional del problema y la invariancia del mismo respecto de las translaciones en  $t$ .

Es importante hacer notar que basta probar el resultado para  $T = 2\pi$ .

En efecto, la función  $\frac{T}{2\pi}H$  sigue satisfaciendo las condiciones del teorema (pues  $T > 0$ ) y por lo tanto, si  $z(t)$  es una solución a la ecuación

$$\dot{z} = \frac{T}{2\pi}H',$$

con período minimal  $2\pi$ , entonces el reescalamiento

$$t \rightarrow \frac{T}{2\pi} t'$$

proporciona la solución para  $T > 0$  arbitraria, pues

$$z_1(t) = z(t')$$

satisface la condición

$$z_1(T) = z\left(\frac{2\pi}{T}T\right) = z(2\pi) = z(0),$$

y el sistema original se transforma en

$$\frac{T}{2\pi} J \dot{z}_1 = \frac{T}{2\pi} H'(z_1),$$

o

$$J \dot{z}_1 = H'(z_1).$$

Por lo anterior, se considera en lo sucesivo únicamente el caso en que  $T = 2\pi$ .

---

## Capítulo 3.

El funcional dual  $I^*$ .

### Introducción.

En lo que sigue, se construye el funcional dual asociado al problema original, con base en la transformada de Legendre. Se derivan algunas desigualdades relativas a dicho funcional, y se prueba que sus puntos críticos son soluciones a la ecuación original  $z = H'(z)$ . Por otra parte, se encuentran los eigenvalores del operador  $K$ , y los eigespacios correspondientes, en donde  $K$  es el operador compacto y autoadjunto ya mencionado anteriormente en el capítulo 1. Dichos eigespacios resultan ser de utilidad en la prueba del teorema 2.1.1.



3.1 La transformada de Legendre de  $H$ .

Considérese la transformada de Legendre de  $H$ , tal como se definió en el capítulo 0:

$$G(u) = \sup_{z \in \mathbb{R}^{2N}} \{u \cdot z - H(z)\}.$$

La transformada de Legendre  $G$ , conserva algunas de las propiedades de  $H$ , que se presentan a continuación en el siguiente lema.

## 3.1.1 Lema.

Sea  $H$  tal que satisface las condiciones A y B del teorema 2.1.1. Entonces

A)\*  $G$  es convexa y continua.

B)\*  $G$  satisface las siguientes desigualdades:

$$\frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha_2}\right)^{\alpha-1} |u|^\alpha \leq G(u) \leq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^{\alpha-1} |u|^\alpha,$$

para toda  $u \in \mathbb{R}^{2N}$ , con  $1/\alpha + 1/\beta = 1$ .

*Prueba.* Por lo visto en el capítulo 0 (sección 4) y en el apéndice 1, se desprende que  $G$  es convexa e inferiormente semicontinua.

Por otra parte,  $B^*$  se sigue del hecho ya mencionado en el capítulo 1 (sección 4), que si  $F_1 \leq F_2$ , entonces  $G_1 \geq G_2$ , siendo  $G_1$  y  $G_2$  las transformadas de Legendre respectivas de  $F_1$  y  $F_2$ . Aplicando este resultado a la parte B de las condiciones del teorema 2.1.1, y usando el ejemplo de la sección 5 del capítulo 0 se obtiene directamente  $B^*$ .

Obsérvese que de las desigualdades anteriores se concluye en particular que  $G$  está acotada por arriba. Por lo expuesto en el capítulo 0, se tiene que  $G$  al ser convexa y acotada, es continua en el interior de todo su dominio, lo que prueba  $A^*$ . ■

Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra que puede haber ciertos casos "patológicos" en los que el dominio de la transformada de Legendre de una función se reduzca a un punto, y, por otra parte, que no importando la regularidad de  $H$ , nada se puede decir con respecto a la regularidad de  $G$ .

Sea  $H(x) = px$ , i.e. una recta que pasa por el origen. Entonces es inmediato de la definición de la transformada de Legendre que  $G(u) = +\infty$  para toda  $u \neq p$  y que  $G(p) = 0$  en otro caso (ver fig. 3.1.1).

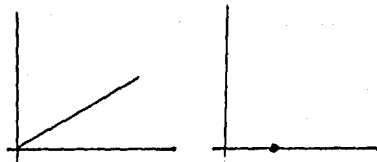


Figura 3.1.1 La función  $H = px$  y su transformada.

Se tiene una función tal que el interior del dominio de su transformada es vacío y además, puesto que esta función es  $C^\infty$ , mientras que  $G$  no es diferenciable, se verifica que la regularidad de la transformada  $G$  es independiente de la de la función  $H$ .

### 30 El funcional dual $I^*$ .

Se tiene no obstante la siguiente proposición:

#### 3.1.2 Proposición.

Si  $H$  es estrictamente convexa, entonces su transformada de Legendre  $G \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$  y de hecho

$$G' = (H')^{-1}.$$

*Prueba.* Por definición, la transformada de Legendre de  $H$  evaluada en  $u$  es

$$G(u) = F(z(u), u) = z(u) \cdot u - H(z(u)),$$

en donde  $z(u)$  se caracteriza implícitamente como

$$u = H'(z(u)).$$

Ahora bien, puesto que  $H$  es estrictamente convexa, es fácil ver que su derivada determina un mapeo uno a uno, es decir, que es posible aplicar el teorema de la función implícita a  $G$  para obtener

$$G'(u) = z'(u) \cdot u + z(u) - H'(z(u)) \cdot z'(u),$$

y de la caracterización de  $z$ , se tiene

$$z(u) = H'^{-1}(u).$$

Sustituyendo esta última relación en la expresión para  $G'$  resulta:

$$G'(u) = z' \cdot u + H'^{-1}(u) - u \cdot z'(u),$$

de donde finalmente

$$G'(u) = H'^{-1}(u).$$

#### 3.2 El operador $K$ .

Considérese a continuación el siguiente espacio de funciones:

$$E = \{u \in L^\alpha([0, 2\pi], \mathbb{R}^{2N}) \mid \int_0^{2\pi} u(s) ds = 0\},$$

en donde  $\alpha$  es la misma que en el lema 3.1.1, dotado de la norma usual en  $L^\alpha$ :

$$\|u\|_{L^\alpha} = \left( \int_0^{2\pi} |u|^\alpha ds \right)^{1/\alpha}.$$

El espacio anterior es efectivamente de Banach, pues constituye un subespacio cerrado de  $L^\alpha([0, 2\pi], \mathbb{R}^{2N})$ . Para mostrar esto, basta observar que si  $u$  es un punto de acumulación de  $E$ , existe una sucesión  $\{u_n\} \subset E$  tal que  $u_n \rightarrow u$  en  $L^\alpha$ . Pero entonces se tiene que

$$0 \leq \left| \int_0^{2\pi} u ds \right| = \left| \int_0^{2\pi} (u - u_n) ds \right| \leq \int_0^{2\pi} |u - u_n| ds = \|u - u_n\|_{L^1},$$

y usando la desigualdad de Hölder:

$$\|u - u_n\|_{L^1} \leq (2\pi)^{1/\beta} \|u - u_n\|_{L^\alpha}$$

para  $\alpha \geq 1$ , se tiene que  $\int_0^{2\pi} u \, ds = 0$ ; i.e.  $u \in E$ .

Se define el operador  $K$  como sigue

$$K: E \rightarrow E$$

$$Ku(t) = - \int_0^t Ju(s) \, ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} Ju(s) \, ds \right] dt$$

Verificar que  $Ku \in L^\alpha([0, 2\pi], \mathbb{R}^{2N})$  es inmediato.

Por otra parte

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} Ku \, dv &= - \int_0^{2\pi} \int_0^v Ju(s) \, ds \, dv + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t Ju(s) \, ds \, dt \, dv \\ &= - \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^v Ju(s) \, ds \right] dv + \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} dv \right] \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^t Ju(s) \, ds \right] dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo que efectivamente  $Ku \in E$ . En la siguiente proposición se presentan algunas de las propiedades de  $K$ .

### 3.2.1 Proposición.

- i.  $Ku(0) = Ku(2\pi)$ ,  $J \frac{d}{dt} Ku(t) = u(t)$ , para toda  $u \in E$ .
- ii.  $K$  es compacto y autoadjunto.
- iii. El espectro  $\sigma(K)$  del operador  $K$  está dado por:

$$\sigma(K) = \left\{ \frac{1}{j}, \forall j \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\},$$

y los correspondientes eigespacios son

$$E_j = \langle \sin jte_k + \cos jte_{N+k}; \cos jte_k + \sin jte_{N+k}, k = 1, \dots, N \rangle,$$

en donde

$$e_n = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0),$$

con el 1 en la  $n$ -ésima componente.

*Prueba.*

- i. Por la definición de  $K$

$$Ku(2\pi) = - \int_0^{2\pi} Ju \, ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Ju(s) \, ds \, dt,$$

y usando el teorema de Fubini (0.6.2), se tiene

$$\begin{aligned} Ku(2\pi) &= - \int_0^{2\pi} Ju \, ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Ju \, ds \int_0^{2\pi} dt \\ &= - \int_0^{2\pi} Ju \, ds + \int_0^{2\pi} Ju \, ds \\ &= 0 \\ &= Ku(0). \end{aligned}$$

Por otro lado, para probar la segunda parte de i, se tiene

$$J \frac{d}{dt} Ku(t) = J \frac{d}{dt} \left[ - \int_0^t Ju ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t Ju ds dt \right],$$

pero es inmediato verificar que  $J^2 = -I_{2N}$ , de donde

$$\begin{aligned} J \frac{d}{dt} Ku(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t u ds - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t u ds dt \\ &= u(t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u dt \\ &= u(t), \end{aligned}$$

pues  $u \in E$ .

ii. Se probará que  $K$  es autoadjunto (nótese que la afirmación tiene sentido, pues  $L^\infty \subset L^2$  y la inclusión es continua).

Sean  $u, v \in E$ , entonces

$$\begin{aligned} (Ku, v) &= \int_0^{2\pi} \left( - \int_0^s Ju(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^r Ju(s) ds dr \right) v(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} - \int_s^{2\pi} Ju(s) v(t) dt ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \int_s^{2\pi} Ju(s) dr v(t) \right] ds dt \\ &= - \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} Ju(s) v(t) dt - \int_0^s Ju(s) v(t) dt \right] ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \int_s^{2\pi} Ju(s) dr v(t) \right] ds dt, \end{aligned}$$

en donde se aplicó el teorema de Fubini.

De lo anterior resulta, usando el hecho de que  $Ju \cdot v = -u \cdot Jv$ , que

$$\begin{aligned} (Ku, v) &= - \int_0^{2\pi} \int_0^s Jv(t) dt u(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^s Jv(t) dt u(s) ds dt \\ &= (u, Kv), \end{aligned}$$

es decir, que  $K$  es autoadjunto.

Antes de probar que  $K$  es compacto, se verificará iii. Primero nótese que

$$Jae_k = -ae_{N+k}$$

y

$$Jae_{N+k} = ae_k,$$

para  $k = 1, \dots, N$ .

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} &K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\text{sen } jte_k + \text{cos } jte_{N+k}) \\ &= - \int_0^t J \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-\text{sin } jsc_k + \text{cos } jsc_{N+k}) ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J \left[ \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\text{sen } jse_k + \text{cos } jse_{N+k}) ds \right] dt \\ &= - \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-\text{sen } jse_{N+k} + \text{cos } jse_k) ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-\text{sen } jse_{N+k} + \text{cos } jse_k) ds \right] dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \left( -\frac{1}{j} \text{cos } jt + \frac{1}{j} \right) e_{N+k} - \frac{1}{j} \text{sen } jte_k \right] + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \left( \frac{1}{j} \text{cos } jt - \frac{1}{j} \right) e_{N+k} + \text{sen } jte_k \right] dt \\ &= - \frac{1}{j\sqrt{2\pi}} (\text{cos } jte_{N+k} + \text{sen } jte_k). \end{aligned}$$

Es decir, que efectivamente la función  $\operatorname{sen} jte_k + \operatorname{cos} jte_{N+k}$  es un eigenvector, con eigenvalor  $-1/j$ . Se comprueba en forma parecida que  $\operatorname{cos} jte_k - \operatorname{sen} jte_{N+k}$  es también un eigevector con el mismo eigenvalor.

Nótese que por ser  $K$  autoadjunto, todos sus valores propios son reales. Más aún, las funciones propias de  $K$  antes mencionadas, constituyen una base de  $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^{2N})$ , y por lo tanto, son todos los valores propios posibles de  $K$ . Es importante mencionar que todas las funciones propias están también en  $L^\infty([0, 2\pi], \mathbb{R}^{2N})$ .

Finalmente, como la suma de los cuadrados de los eigenvalores converge; i.e.

$$\sum_{j \in \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{j^2} < +\infty,$$

entonces  $K$  es compacto (ver [Br1] pp.99).

### 3.3 El funcional $I^*$ .

Con base en lo anterior, se construye el funcional definido en  $E$  como

$$I^*(u) = \int_0^{2\pi} \left( \frac{Ku(t) \cdot u(t)}{2} - G(u(t)) \right) dt.$$

Como ya se probó en la sección 1.1,  $I^*$  está bien definido y es continuo. Por otra parte, por ser continuo, su subgradiente existe en todo punto (ver apéndice 1).

Utilizando los resultados del capítulo 1, se tiene que

$$\partial_E I^*(u) = \{ \xi \in E^* \mid Ku(t) \cdot \xi(t) + \rho \in \partial G(u(t)) \text{ a.e. para alguna } \rho \in \mathbb{R}^{2N} \},$$

pues en este caso  $\chi(t) = \rho \in F^*$ , ya que  $F^* = \{\text{constantes}\}$ .

En la expresión anterior, se ha denotado por  $\partial G(u(t))$  al subgradiente de  $G$  en el punto  $u(t)$ , considerado como función de  $\mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Puesto que  $G$  es la transformada de Legendre de  $H$ , se tiene por las fórmulas duales de Fenchel (ver apéndice 1) y el hecho de que si  $H$  es diferenciable su subgradiente coincide con su derivada (ver también apéndice 1):

$$u = H'(z) \iff H(z) + G(u) = z \cdot u \iff z \in \partial G(u), \quad (3.1.1)$$

es decir, que si  $u$  es un punto crítico de  $I^*$ , i.e. si  $0 \in \partial_E I^*(u)$ , entonces, para alguna  $\rho \in \mathbb{R}^{2N}$  se tiene

$$Ku(t) + \rho \in \partial G(u(t)) \text{ a.e.} \quad (3.1.2)$$

Por lo tanto

$$z(t) = Ku(t) + \rho$$

es una solución a la ecuación 2.1.1 con período  $2\pi$ , pues

$$z(0) = z(2\pi),$$

por el resultado 3.2.1 (i), y por otra parte

$$Jz(t) = \frac{d}{dt} J(Ku + \rho) = u = H'(z(t)),$$

### 34 El funcional dual $I^*$ .

por el mismo resultado y utilizando el hecho de que  $z(t) \in \partial G(u(t))$ , por lo que es posible aplicar las identidades de Fenchel.

Además, es claro que si  $u(t)$  es un punto crítico con período minimal  $2\pi$ , también  $z(t)$  tiene período minimal  $2\pi$ . Finalmente, se concluye que si  $u_1$  y  $u_2$  son dos puntos críticos distintos en el sentido de la definición de la sección 2.1, también las correspondientes  $z_1(t)$  y  $z_2(t)$  son soluciones distintas de 2.1.1 con  $T = 2\pi$ .

En otras palabras, estas observaciones permitan concluir que el problema dual está bien planteado. Se ha reducido el problema 2.1.1 al de encontrar puntos críticos de  $I^*$  con período minimal  $2\pi$ .

#### 3.4 Comentarios adicionales sobre $I^*$ .

Una vez que se ha presentado la estructura detallada de  $I^*$ , se puede justificar en forma más adecuada el uso del planteamiento dual del problema. Como ya se mencionó, en el enfoque directo se buscan los puntos críticos del funcional

$$I(z) = \int_0^T \left[ \frac{J\dot{z} \cdot z}{2} - H(z) \right] dt,$$

sobre el espacio de funciones  $z \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{2N})$  tales que  $z(0) = z(2\pi)$ .

Se tiene entonces que

$$I(z+h) - I(z) = \int_0^T \left[ \frac{1}{2}(J\dot{h} \cdot z + J\dot{z} \cdot h + Jh \cdot h) - \nabla H(z) \cdot h + \dots \right] dt,$$

y como  $JA \cdot B = A^T J^T B = -A^T J B = -A \cdot J B$ , la expresión anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned} I(z+h) - I(z) &= \int_0^T \left[ -\frac{1}{2}(\dot{h} \cdot Jz + J\dot{z} \cdot h) - \nabla H(z) \cdot h + \dots \right] dt \\ &= \int_0^T ((J\dot{z} - \nabla H(z)) \cdot h + \dots) dt \end{aligned}$$

en donde se ha integrado por partes y usado el hecho de que  $h(0) = h(T)$  y  $z(0) = z(T)$ .

Por lo tanto, la derivada de Fréchet de  $I$  es

$$I'(z)h = \int_0^T (J\dot{z} - \nabla H(z)) \cdot h dt.$$

Como  $C_0^\infty([0, T])$  está contenido en el espacio de funciones de clase  $C^1$  que satisfacen la condición  $h(0) = h(T)$ , se tiene, de los resultados clásicos del cálculo de variaciones, que la ecuación de Euler es

$$J\dot{z} - \nabla H(z) = 0.$$

Sin embargo para probar la existencia de puntos críticos de  $I$ , es necesaria una cota superior para el mismo, pero  $I$  no es cóncavo debido a la presencia del primer término, por lo cual el uso de la transformada de Legendre surge en forma natural.

En efecto, tal como se ha definido el funcional dual

$$I^*(u) = \int_0^T \left( \frac{Ku \cdot u - G(u)}{2} \right) dt,$$

para  $K$  autoadjunto, la caracterización de los puntos críticos resulta más directa, pues se tiene ahora un funcional que es la suma de un término cuadrático y un término cóncavo. La condición  $z(0) = z(T)$  se transforma en la condición dual  $\int_0^T u dt = 0$ , tal como se verá más adelante. Sin embargo,  $C_0^\infty([0, T])$  no es denso en el espacio, de funciones que satisfacen este hecho, por lo que se trata al problema en  $L^2([0, T])$  (en donde sí se tiene la condición de densidad de  $C_0^\infty$ ), con la restricción

$$\int_0^T u dt = 0.$$

La derivada de Fréchet en este caso es

$$I'(u)h = \int_0^T (Ku - \nabla G(u)) \cdot h,$$

lo que se verifica inmediatamente usando la condición de que  $K$  es autoadjunto.

Considerando ahora el problema con la restricción; i.e.

$$I^*(u) - \lambda \cdot \int_0^T u dt,$$

con  $\lambda \in \mathbb{R}^{2N}$ . La derivada de Fréchet correspondiente es

$$\int_0^T (Ku - \nabla G(u) - \lambda) \cdot h dt,$$

en donde  $h \in L^2[0, T]$ .

La ecuación de Euler en este caso es

$$Ku - \nabla G(u) - \lambda = 0,$$

y utilizando la condición  $\int_0^T Ku dt = 0$ , se tiene

$$\lambda = -\frac{1}{T} \int_0^T \nabla G(u) dt,$$

lo cual proporciona ya el planteamiento dual completo.

Finalmente se da la justificación de la forma en como se definió  $K$ . Obsérvese que si se quiere invertir la relación

$$Ax = J\dot{z} = u,$$

se tiene

$$\dot{z} = -Ju,$$

e integrando

$$z(t) = z(0) - \int_0^t Ju(s) ds.$$

Para que se cumpla la condición  $z(0) = z(T)$ , debe tenerse

$$\int_0^T Ju(s) ds = 0 = J \int_0^T u(s) ds,$$

es decir, que

$$\int_0^T u(s) ds = 0.$$

En otras palabras, debe quitarse el coeficiente de Fourier de orden 0 de  $z$ :

$$z(t) = -\int_0^T Ju(s) ds + \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t Ju(s) ds dt,$$

que es la expresión del operador  $A^{-1}$  en el dominio de interés.

---

## Capítulo 4.

Un índice geométrico para el grupo  $S^1$ .

### Introducción.

En este capítulo se define una noción de índice para  $S^1$ . Dicho índice permite establecer la existencia de puntos críticos del funcional  $I^*$ , con base en el hecho de que dicho funcional es invariante bajo la acción de las translaciones en el tiempo, que constituyen una representación de  $S^1$  en  $E$ .

Se enuncia también una versión generalizada del teorema de Borsuk-Ulam que se usa posteriormente.

Para efectuar lo anterior, es necesario utilizar el llamado lema de deformación para funcionales que satisfacen las condiciones conocidas como de Palais-Smale (que de alguna manera compensan la falta de compacidad en espacios de dimensión infinita), por lo cual se introducen estas últimas. La prueba del lema se presenta en el apéndice 3.

Se refiere al lector al artículo de Benci [Be], en donde además se dan algunas aplicaciones de este índice a ecuaciones diferenciales ordinarias.



## 4.1 Definición y propiedades del índice.

En el espacio de Banach  $E$ , se da una representación del grupo  $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  por la familia de operadores

$$T_\theta : E \rightarrow E, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$T_\theta u(t) = u(t + \theta);$$

i.e. la translación en  $t$  por  $\theta$ .

Claramente, dichos operadores preservan la norma si se extiende a  $u \in E$  periódicamente a todo  $\mathbb{R}$  (basta hacer un cambio de variable para verificarlo).

Es posible construir en  $E$  una teoría de índice para  $S^1$ , que es lo que se hace a continuación. Recuérdese que de alguna manera el índice ayuda a contar los ceros de una función, y en este caso se usa esta propiedad para encontrar los puntos críticos de un funcional.

Se define a un subconjunto  $\Gamma$  de  $E$  como invariante bajo la acción de  $S^1$  si

$$T_\theta(\Gamma) = \Gamma, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

En forma natural, se dice que una función  $\phi : E \rightarrow E$  es equivariante, si

$$\phi(T_\theta u) = T_\theta \phi(u), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

Sea

$$\Sigma = \{\Gamma \subset E \mid \Gamma \text{ es cerrado e invariante}\}.$$

Se asocia con cada elemento de  $\Sigma$  un entero no negativo o  $\infty$  como sigue:

## 4.1.1 Definición.

Dado  $\Gamma \in \Sigma$ , se dice que  $\Gamma$  tiene índice  $k$ , denotado por

$$i(\Gamma) = k,$$

si  $k$  es el menor entero positivo tal que existe un mapeo continuo y equivariante

$$f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^k - \{0\},$$

en donde la acción de  $S^1$  sobre  $\mathbb{C}^k$  está dada por

$$(z_1, \dots, z_k) \rightarrow (e^{in_1\theta} z_1, \dots, e^{in_k\theta} z_k)$$

y los enteros  $n_i$  dependen de  $f$ , es decir, que cada componente  $f_p$  de dicha función satisface una relación del tipo

$$f_p(T_\theta u) = e^{in_p\theta} f_p(u), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi], \quad p = 1, \dots, k, \quad (4.1.1)$$

siendo  $n_p$  un entero diferente de 0.

El índice así definido, posee varias propiedades importantes, que se presentan en el siguiente lema.

## 4.1.2 Lema.

El mapeo  $i : \Sigma \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  satisface las siguientes propiedades:

i. Sean  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \Sigma$  y supóngase que existe un mapeo continuo y equivariante

$$\phi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2,$$

### 38 Un índice geométrico para el grupo $S^1$ .

entonces  $i(\Gamma_1) \leq i(\Gamma_2)$ .

ii. Sean  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \Sigma$ , tales que  $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ , entonces  $i(\Gamma_1) \leq i(\Gamma_2)$ .

iii.  $i(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \leq i(\Gamma_1) + i(\Gamma_2)$ ,  $\forall \Gamma_1, \Gamma_2 \in \Sigma$ .

iv. Si  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \Sigma$ , entonces  $\overline{\Gamma_1 - \Gamma_2} \in \Sigma$  y  $i(\overline{\Gamma_1 - \Gamma_2}) \geq i(\Gamma_1) - i(\Gamma_2)$ .

v. Si  $\Gamma \in \Sigma$  es compacto, y para  $\delta > 0$  se define

$$N_\delta(\Gamma) = \{u \in E \mid \inf_{v \in \Gamma} |u - v|_{L^\infty} \leq \delta\},$$

entonces, si  $\delta$  es suficientemente pequeña,  $N_\delta(\Gamma) \in \Sigma$  y

$$i(N_\delta(\Gamma)) = i(\Gamma).$$

Antes de probar las propiedades anteriores, es necesario otro resultado:

#### 4.1.3 Lema.

Sea  $\Gamma \in \Sigma$  y  $\phi: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^k$ , tal que

$$\phi_p(T_\theta(u)) = e^{in_p\theta} \phi_p(u),$$

en donde como antes,  $\phi_p$  es la  $p$ -ésima componente de  $\phi$ . Entonces puede extenderse a  $\phi$  en forma continua a un mapeo  $\tilde{\phi} \in C(E, \mathbb{C}^k)$  de tal modo que siga cumpliendo la misma condición.

*Prueba.* Por el teorema de extensión de Tietze [KF], existe una extensión continua  $\tilde{\phi}_p$  de  $\phi_p$  a todo  $E$ .

Se define entonces el mapeo

$$\tilde{\phi}_p(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in_p\theta} \tilde{\phi}_p(T_\theta u) d\theta.$$

Claramente, si  $u \in \Gamma$ ,  $\tilde{\phi}_p$  satisface la condición del lema, pues

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_p(T_\theta u(t)) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in_p\theta'} (e^{in_p\theta} \tilde{\phi}_p(T_{\theta'}(u))) d\theta' \\ &= e^{in_p\theta} \tilde{\phi}_p(u(t)). \end{aligned}$$

Si  $u \notin \Gamma$ , entonces

$$\tilde{\phi}_p(T_\theta u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta'} \tilde{\phi}_p(T_{\theta'} T_\theta u) d\theta',$$

haciendo el cambio de variable

$$\theta'' = \theta + \theta',$$

se tiene

$$\tilde{\phi}_p(T_\theta u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in_p(\theta'' - \theta)} \tilde{\phi}_p(u(t + \theta'')) d\theta'',$$

de donde finalmente

$$\tilde{\phi}_p(T_\theta u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in_p\theta''} \tilde{\phi}_p(T_{\theta''} u) d\theta'' = e^{in_p\theta} \tilde{\phi}_p(u),$$

y efectivamente la afirmación del lema se cumple.

Se prueban entonces las propiedades del índice:

*Prueba (lema 4.1.2).*

i. Supóngase que  $i(\Gamma_2) = k < \infty$ , pues en otro caso el resultado es trivial. Existe entonces un mapeo

$$f : \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{C}^k - \{0\},$$

que satisface (4.1.1). Pero puesto que  $\phi$  también cumple (4.1.1), la composición

$$f \circ \phi : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{C}^k - \{0\}$$

tiene la misma propiedad.

Como el índice se definió como el menor entero  $k$  tal que la propiedad (4.1.1) se cumple, entonces  $i(\Gamma_1) \leq k = i(\Gamma_2)$ .

ii. En este caso, basta aplicar el punto i. tomando a la inclusión de  $\Gamma_1$  en  $\Gamma_2$  como el mapeo  $\phi$ .

iii. Claramente  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  es cerrado e invariante, por lo que está en  $\Sigma$ . De nuevo supóngase que  $k_j < \infty$ , con  $j = 1, 2$  y que  $i(\Gamma_j) = k_j$ , pues en caso contrario iii. es trivial. Por definición, existen mapeos

$$f_j : \Gamma_j \rightarrow \mathbb{C}^{k_j} - \{0\},$$

que satisfacen (4.1.1), para ciertos  $n_p$  y  $n_q$ ,  $p = 1, \dots, k_1$ ,  $q = 1, \dots, k_2$ .

Utilizando el lema 4.1.3, es posible extender  $f_j$  a

$$\tilde{f}_j : E \rightarrow \mathbb{C}^{k_j},$$

con la misma propiedad.

Si se considera entonces el mapeo

$$f : E \rightarrow \mathbb{C}^{k_1+k_2},$$

definido como

$$f(u) = (\tilde{f}_1(u), \tilde{f}_2(u)),$$

se sigue que  $f|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$  satisface la condición (4.1.1) y

$$i(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \leq k_1 + k_2 = i(\Gamma_1) + i(\Gamma_2).$$

iv. Suponiendo que  $i(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) < \infty$  y que  $i(\overline{\Gamma_1 - \Gamma_2}) < \infty$ , puesto que si no iv. no tiene sentido, y ya que

$$\Gamma_1 = \overline{\Gamma_1 - \Gamma_2} \cup (\Gamma_1 \cap \Gamma_2),$$

se sigue, aplicando iii., que

$$i(\Gamma_1) \leq i(\overline{\Gamma_1 - \Gamma_2}) + i(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) \leq i(\overline{\Gamma_1 - \Gamma_2}) + i(\Gamma_2).$$

v. Supóngase que  $i(\Gamma) = k < \infty$ , pues en otro caso la afirmación es trivial. Por definición, existe

$$f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^k - \{0\},$$

que cumple con la condición (4.1.1).

Sea  $\tilde{f}$  la extensión dada en el lema 4.1.3. Ahora bien,  $0 \notin \tilde{f}(\Gamma)$ . Por ser  $\Gamma$  compacto y la extensión continua,  $f(\Gamma)$  es compacto y no contiene al cero. Esto implica que la distancia entre  $f(\Gamma)$  y  $\{0\}$  es estrictamente positiva (por ser ambos conjuntos compactos); i.e.  $d(f(\Gamma), \{0\}) \geq \epsilon > 0$ . Por la continuidad de  $\tilde{f}$ , para cada  $u \in \Gamma$ , existe una  $\delta(u)$  tal que

$$|f(u) - \tilde{f}(v)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

40 Un índice geométrico para el grupo  $S^1$ .

para  $|u - v|_{L^\infty} \leq 2\delta(u)$ . De esto se tiene que, como  $\Gamma$  es compacto, se puede escoger un refinamiento con un número finito de bolas de radio  $\delta_1, \dots, \delta_N$ , que cubren a  $\Gamma$ . Tómese ahora  $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_N)$  y sea  $N_\delta(\Gamma) = \{v \mid |u - v|_{L^\infty} \leq \delta, \forall u \in \Gamma\}$ .

Si  $v \in N_\delta$ , resulta que existe  $u_0 \in \Gamma$  tal que  $|u_0 - v|_{L^\infty} \leq \delta$  y para cierta  $u_j$  tal que  $|u_0 - u_j| \leq \delta_j$ , se tiene entonces que

$$|v - u_j|_{L^\infty} \leq \delta + \delta_j \leq 2\delta_j,$$

y

$$|\tilde{f}(v) - \tilde{f}(u_j)| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

es decir, que  $\tilde{f}(v) \neq 0$ .

Finalmente, como

$$|T_\theta u|_{L^\infty} = |u|_{L^\infty},$$

y  $N_\delta$  es claramente cerrado y acotado, entonces es invariante. Es decir, que  $N_\delta \in \Sigma$ .

Pero entonces  $\tilde{f}|_{N_\delta(\Gamma)}$  constituye un mapeo de

$$N_\delta(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}^k - \{0\},$$

que además satisface (4.1.1), y por lo tanto

$$i(N_\delta(\Gamma)) \leq k.$$

Pero  $\Gamma \subset N_\delta(\Gamma)$ , por lo que  $i(N_\delta(\Gamma)) \geq i(\Gamma) = k$ ; i.e.  $i(N_\delta(\Gamma)) = i(\Gamma)$ .

**Observación.**

Si  $0 \in \Gamma$ , entonces  $i(\Gamma) = \infty$ . En efecto, si se supone lo contrario, existe

$$\phi: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^k,$$

tal que (4.1.1) se satisface. Entonces en particular

$$f_p(T_\theta 0) = e^{in_p \theta} f_p(0), \forall \theta \in [0, 2\pi], n_p \neq 0.$$

Pero  $f_p(u) \neq 0$ , por lo cual

$$1 = e^{in_p \theta}, \forall \theta \in [0, 2\pi],$$

que no es posible.

Como se verá más adelante, dado un natural  $k$ , existe un conjunto cerrado e invariante  $\Gamma_k$ , tal que  $i(\Gamma_k) = k$ , en este sentido, puede decirse que el índice  $i$  es no trivial.

A continuación se calcula el índice de ciertos conjuntos que intervienen en la prueba del teorema 2.1.1. Para poder efectuar dicho cálculo, se usa la siguiente versión del teorema generalizado de Borsuk-Ulam.

**4.1.4 Teorema (generalización de Borsuk-Ulam).** Sea  $\Omega$  una vecindad abierta y acotada del origen en  $\mathbb{C}^k$ , invariante bajo la acción de  $S^1$ ; i.e. para cualquier  $u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{C}^k$  se considera la acción

$$T_\theta u = (e^{in_1 \theta} u_1, \dots, e^{in_k \theta} u_k).$$

en donde  $\theta \in [0, 2\pi]$  y  $n_p \neq 0, p = 1, \dots, k$ , enteros.

Sea

$$f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{C}^k,$$

con  $f = (f_1, \dots, f_h)$  un mapeo continuo tal que para ciertos enteros  $m_q$ ,  $m_q \neq 0$ ,  $q = 1, \dots, h$ , se tiene

$$f(T_\theta u) = (e^{im_1\theta} f_1(u), \dots, e^{im_h\theta} f_h(u)),$$

entonces, si  $h < k$ , existe  $u \in \partial\Omega$  para la cual  $f(u) = 0$ .

*Prueba.* La prueba de este teorema se presenta en el apéndice 2. ■

Considérese ahora el subespacio  $2N_s$  dimensional de  $E$  dado por

$$E_s = \{u \in E \mid u(t) = (\sum_{\ell=1}^s (\eta_\ell \sin \ell t + \xi_\ell \cos \ell t), \sum_{\ell=1}^s (-\xi_\ell \sin \ell t + \eta_\ell \cos \ell t)), \xi_\ell, \eta_\ell \in \mathbb{R}^N\},$$

o utilizando notación compleja, si se identifica a

$$u(t) = (u_1(t), \dots, u_{2N}(t)) \in \mathbb{R}^{2N}$$

con

$$(u_1(t) + i u_{N+1}(t), \dots, u_N(t) + i u_{2N}(t)) \in \mathbb{C}^N,$$

se tiene

$$E_s = \{u \in E \mid u(t) = \sum_{\ell=1}^s \zeta_\ell e^{-i\ell t}, \zeta_\ell \in \mathbb{C}^N, \ell = 1, \dots, s\},$$

en donde  $\zeta_\ell = \xi_\ell + i\eta_\ell$ .

Si se identifica  $E_s$  con los coeficientes de las series de Fourier hasta orden  $\ell$ , se denota por  $\Gamma_{s,\rho}$  a la esfera de radio  $\rho^{1/2}$  en ese espacio, es decir

$$\Gamma_{s,\rho} = \{u \in E_s \mid u(t) = \sum_{\ell=1}^s \zeta_\ell e^{-i\ell t}, \zeta_\ell \in \mathbb{C}^N, \sum_{\ell=1}^s |\zeta_\ell|^2 = \rho\},$$

para  $\rho > 0$ .

Es inmediato que  $\Gamma_{s,\rho}$  es invariante, pues

$$T_\theta u = \sum_{\ell=1}^s \zeta_\ell e^{-i\ell(t+\theta)} = \sum_{\ell=1}^s \zeta_\ell e^{-i\ell\theta} e^{-i\ell t}, \forall u \in \Gamma_{s,\rho}.$$

Además  $\Gamma_{s,\rho}$  es cerrado, pues es la imagen inversa bajo una función continua de  $\rho$ . Por lo tanto,  $i(\Gamma_{s,\rho})$  está bien definido y de hecho, puede calcularse explícitamente.

#### 4.1.5 Proposición.

El conjunto  $\Gamma_{s,\rho}$  antes definido tiene índice

$$i(\Gamma_{s,\rho}) = s \cdot N.$$

*Prueba.* Defínase el mapeo

$$f: \Gamma_{s,\rho} \rightarrow \mathbb{C}^{s \cdot N} - \{0\},$$

como sigue:

$$f\left(\sum_{\ell=1}^s \zeta_\ell e^{i\ell t}\right) = (\zeta_1, \dots, \zeta_s).$$

## 4.2 Un índice geométrico para el grupo $S^1$ .

Entonces, si  $u(t) = \sum_{\ell=1}^s \zeta_\ell e^{i\ell t}$ ,

$$\begin{aligned} f(T_\theta u(t)) &= f\left(\sum_{\ell=1}^s e^{i\ell\theta} e^{i\ell t}\right) \\ &= (\zeta_1 e^{i\theta}, \dots, \zeta_s e^{i\theta}), \end{aligned}$$

y por lo tanto satisface la propiedad (4.1.1), de donde

$$i(\Gamma_{s,\rho}) \leq s \cdot N.$$

Por otra parte, supóngase que existe un número  $h$  tal que  $1 \leq h < s \cdot N$  y un mapeo

$$g: \Gamma_{s,\rho} \rightarrow \mathbb{C}^h - \{0\},$$

$g = (g_1, \dots, g_h)$ , que es continuo y que satisface

$$g(T_\theta u) = (e^{im_1\theta} g_1(u), \dots, e^{im_h\theta} g_h(u)),$$

para toda  $\theta \in [0, 2\pi]$ , y para toda  $u \in \Gamma_{s,\rho}$ , en donde los enteros  $m_j$ ,  $j = 1, \dots, h$  son distintos de cero.

Defínase ahora

$$\Omega = \left\{ \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_s) \mid \zeta_\ell \in \mathbb{C}^N, \ell = 1, \dots, s; \sum_{\ell=1}^s |\zeta_\ell|^2 < \rho \right\}.$$

Claramente  $\Omega$  es abierto, acotado y constituye una vecindad del cero, que es invariante bajo la siguiente acción de  $S^1$ :

$$T_\theta(\zeta) = T(\zeta_1, \dots, \zeta_s) = (e^{i\theta} \zeta_1, \dots, e^{i\theta} \zeta_s), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

Además, el mapeo

$$\tilde{g}: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{C}^h - \{0\},$$

definido por

$$\tilde{g}(\zeta) = g\left(\sum_{\ell=1}^s \zeta_\ell e^{i\ell t}\right),$$

es continuo y satisface la siguiente propiedad

$$\begin{aligned} \tilde{g}(T_\theta \zeta) &= g(e^{i\theta} \zeta_1, \dots, e^{i\theta} \zeta_s) \\ &= g\left(\sum_{\ell=1}^s \zeta_\ell e^{i\ell\theta} e^{i\ell t}\right) \\ &= g\left(T_\theta \sum_{\ell=1}^s \zeta_\ell e^{i\ell t}\right) \\ &= (e^{im_1\theta} g_1\left(\sum_{\ell=1}^s \zeta_\ell e^{i\ell t}\right), \dots, e^{im_h\theta} g_h\left(\sum_{\ell=1}^s \zeta_\ell e^{i\ell t}\right)) \\ &= (e^{im_1\theta} \tilde{g}_1(\zeta), \dots, e^{im_h\theta} \tilde{g}_h(\zeta)), \end{aligned}$$

siendo  $\tilde{g}_j$  la  $j$ -ésima componente de  $\tilde{g}$ . Pero como  $h < s \cdot N$  y  $\tilde{g}$  no se anula, esto contradice el teorema de Borsuk-Ulam. Es decir, que  $s \cdot N$  es efectivamente el menor entero que satisface la propiedad (4.1.1), por lo que

$$i(\Gamma_{s,\rho}) = s \cdot N.$$

Como se mencionó en la introducción, la razón principal para presentar la teoría de índice en  $S^1$ , es que el funcional  $I^*$  es invariante bajo la acción de ese grupo. Es decir,

$$I^*(T_\theta u) = I^*(u), \quad \forall u \in E, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

Lo anterior es inmediato de la definición de  $I^*$  y del hecho de que se consideran las extensiones periódicas de las funciones  $u \in E$ . En general, se define a un funcional  $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$  como invariante bajo la acción de  $S^1$ , si

$$\Phi(T_\theta u) = \Phi(u), \quad \forall u \in E.$$

Para poder utilizar la teoría de índice para encontrar los puntos críticos de  $I^*$ , es necesario presentar todavía el llamado lema de deformación, o mejor dicho, la versión del lema de deformación para funcionales que son invariantes bajo la acción de  $S^1$ .

#### 4.2 Lema de deformación.

Se exponen ahora algunas definiciones previas, entre ellas las llamadas condiciones de Palais-Smale.

##### 4.2.1 Condiciones de Palais-Smale (P.S).

Sea  $\Phi$  un funcional continuamente Fréchet diferenciable en  $E$ ; i.e.  $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ . Se dice que  $\Phi$  satisface las condiciones de Palais-Smale, si para cualquier sucesión  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ , tal que

- i.  $|\Phi(u_n)| \leq M$  para alguna  $M > 0$ ,
  - ii.  $|\Phi'(u_n)|_{E^*} \rightarrow 0 \in E^*$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ ,
- se tiene que  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  admite una subsucesión convergente.

Defínase además

$$K_c = \{u \in E \mid \Phi(u) = c, \Phi'(u) = 0\};$$

i.e. el conjunto de puntos críticos con valor crítico  $c \in \mathbb{R}$ , y

$$A_b = \{u \in E \mid \Phi(u) \geq b\},$$

con  $b \in \mathbb{R}$ .

Se tiene entonces el resultado siguiente:

##### 4.2.2 Lema de deformación.

Sea  $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$  un funcional invariante que satisface las condiciones de Palais-Smale. Para una  $c \in \mathbb{R}$  dada, sea  $U$  una vecindad de  $K_c$ . Entonces existe una constante  $\varepsilon > 0$ , tal que para toda  $0 < \varepsilon < \varepsilon$ , puede escogerse una función  $\eta_t \in C^0([0, 1] \times E, E)$ , que satisface las siguientes condiciones:

- i.  $\eta_0(u) = u, \forall u \in E$ ; i.e.  $\eta_0$  es la identidad.
- ii.  $\eta_t(u) = u, \forall u \notin \Phi^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon], \forall t \in [0, 1]$ ,
- iii.  $\eta_t$  es un homeomorfismo de  $E$  en  $E, \forall t \in [0, 1]$ .
- iv.  $\Phi(\eta_t(u)) \geq \Phi(u), \forall t \in [0, 1]$ .
- v.  $\eta_t(A_{c-\varepsilon} - U) \subset A_{c+\varepsilon}$ .
- vi. Si  $K_c = \emptyset$ , entonces  $\eta_1(A_{c-\varepsilon}) \subset A_{c+\varepsilon}$ .
- vii.  $\eta_t : E \rightarrow E$  es equivariante,  $\forall t \in [0, 1]$ .

*Prueba.* La prueba de este resultado, o más precisamente, la prueba de un resultado un poco más general que se utiliza más adelante, se presenta en el apéndice 3.

44 Un índice geométrico para el grupo  $S^1$ .

La fig.4.2.1 trata de ilustrar el contenido del lema en el caso en el que  $E = \mathbb{R}$ .

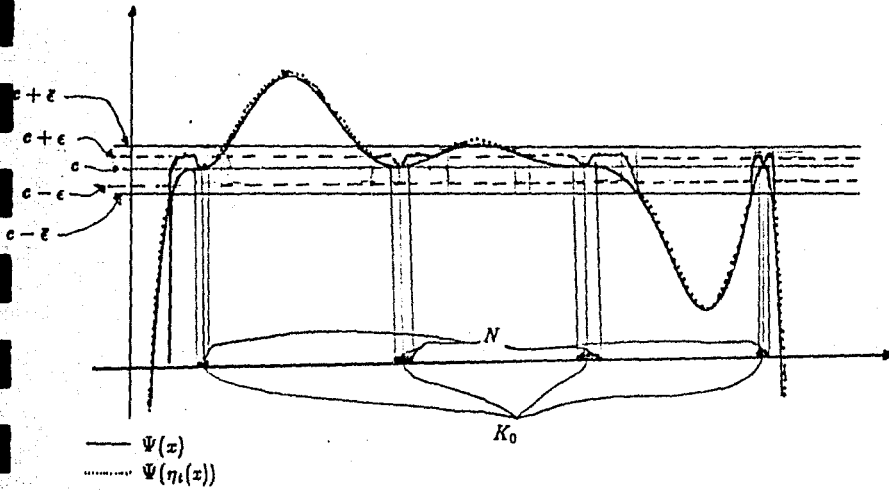


Figura 4.2.1 Lema de deformación.



---

## Capítulo 5.

### Funciones de período minimal.

---

#### Introducción.

En este capítulo se obtienen algunas estimaciones para el funcional  $I^*$  que permiten establecer cuándo una función tiene período minimal  $2\pi$ . Por otra parte, se muestra que el conjunto de funciones que satisfacen esta condición es lo suficientemente amplio para que pueda contener puntos críticos de  $I^*$ , que corresponden entonces a soluciones de período minimal  $2\pi$  al problema 2.1.1.

46 Funciones de período minimal.

5.1 El funcional  $I^*$ , algunas estimaciones.

Sean

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\operatorname{sen} jtc_k + \operatorname{cos} jtc_{N+k}),$$

y

$$\phi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\operatorname{cos} jtc_k + \operatorname{sen} jtc_{N+k}),$$

con  $j \in \mathbb{Z}, j \neq 0, k = 1, \dots, N$ .

Entonces las funciones  $\psi_{j,k}, \phi_{j,k}$  son eigenfunciones del operador  $K$ , tal como se mostró en el capítulo 3, con eigenvalor correspondiente  $1/j$ , y además, por las relaciones bien conocidas de ortogonalidad de las funciones  $\operatorname{sen} \gamma, \operatorname{cos} \gamma$ , se tiene

$$\int_0^{2\pi} \phi_{j,k} \psi_{j,k} dt = 0$$

y

$$|\phi_{j,k}|_{L^2} = 1, |\psi_{j,k}|_{L^2} = 1.$$

Por otra parte, como

$$\{\operatorname{cos} nt, \operatorname{sen} nt, n = 1, 2, \dots\}$$

constituyen una base de  $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ , las funciones  $\phi_{j,k}$  y  $\psi_{j,k}$  constituyen una base de

$$\{u \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^{2N}) \mid \int_0^{2\pi} u dt = 0\}$$

que contiene a  $E$  (recuérdese que  $E$  es un subespacio de  $L^\alpha$  con  $\alpha > 2$ ). En efecto, supóngase que se trata de escribir a  $u \in E$  como

$$u(t) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} - \{0\} \\ k = 1, \dots, N}} A_{j,k} \psi_{j,k} + B_{j,k} \phi_{j,k}.$$

Separando la expresión anterior en sus componentes, se tiene, si  $u = (u_1, \dots, u_{2N})$ , que

$$u_k \operatorname{c} c_k + u_{N+k} \operatorname{c} c_{N+k} = \sum_{j \in \mathbb{Z} - \{0\}} A_{j,k} (\operatorname{sen} jtc_k + \operatorname{cos} jtc_{N+k}) + B_{j,k} (\operatorname{cos} jtc_k + \operatorname{sen} jtc_{N+k}),$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{N} - \{0\}} [(A_{j,k} - A_{-j,k}) \operatorname{sen} jt + (B_{j,k} + B_{-j,k}) \operatorname{cos} jt] c_k + [(A_{j,k} + A_{-j,k}) \operatorname{cos} jt + (B_{j,k} - B_{-j,k}) \operatorname{sen} jt] c_{N+k},$$

por lo cual se concluye que

$$B_{j,k} + B_{-j,k} = a_j^k$$

$$A_{j,k} - A_{-j,k} = b_j^k$$

$$A_{j,k} + A_{-j,k} = a_j^{N+k}$$

$$B_{j,k} - B_{-j,k} = b_j^{N+k},$$

en donde  $a_j$  y  $b_j$  son los coeficientes de Fourier usuales.

Como estas ecuaciones pueden resolver para  $A_{j,k}$ ,  $B_{j,k}$  en términos de los coeficientes de Fourier, se tiene que las expresión dada anteriormente para  $u$  es válida.

Supóngase ahora que  $u \in E$  tiene período  $2\pi/m$ , con  $m \geq 1$  entero, entonces

$$\begin{aligned} u(t) &= u\left(t + \frac{2\pi}{m}\right) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} - \{0\} \\ k = 1, \dots, N}} [A_{j,k} \psi_{j,k}\left(t + \frac{2\pi}{m}\right) + B_{j,k} \phi_{j,k}\left(t + \frac{2\pi}{m}\right)] \\ &= \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} - \{0\} \\ k = 1, \dots, N}} \left[ \left( \frac{A_{j,k}}{\sqrt{2\pi}} \left( \operatorname{sen} j \frac{mt + 2\pi}{m} e_k + \operatorname{cos} j \frac{mt + 2\pi}{m} e_{N+k} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{B_{j,k}}{\sqrt{2\pi}} \left( \operatorname{cos} j \frac{mt + 2\pi}{m} e_k + \operatorname{sen} j \frac{mt + 2\pi}{m} e_{N+k} \right) \right) \right], \end{aligned}$$

utilizando identidades trigonométricas y agrupando términos, la igualdad anterior puede escribirse como

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} - \{0\} \\ k = 1, \dots, N}} \left[ \left( A_{j,k} \operatorname{cos} \frac{2\pi j}{m} - B_{j,k} \operatorname{sen} \frac{2\pi j}{m} \right) \operatorname{sen} jt + \left( A_{j,k} \operatorname{sen} \frac{2\pi j}{m} + B_{j,k} \operatorname{cos} \frac{2\pi j}{m} \right) \operatorname{cos} jt \right] e_k \\ &\quad + \left[ \left( B_{j,k} \operatorname{cos} \frac{2\pi j}{m} - A_{j,k} \operatorname{sen} \frac{2\pi j}{m} \right) \operatorname{sen} jt + \left( B_{j,k} \operatorname{sen} \frac{2\pi j}{m} + A_{j,k} \operatorname{cos} \frac{2\pi j}{m} \right) \operatorname{cos} jt \right] e_{N+k}. \end{aligned}$$

Usando la independencia lineal de los  $e_k$ , y expresando a  $u(t)$  también en su serie de Fourier, la expresión anterior da origen al siguiente conjunto de ecuaciones (una vez que se iguala cada coeficiente de  $e_k$  a 0)

$$\begin{pmatrix} \operatorname{cos} \frac{2\pi j}{m} - 1 & -\operatorname{sen} \frac{2\pi j}{m} \\ \operatorname{sen} \frac{2\pi j}{m} & \operatorname{cos} \frac{2\pi j}{m} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{j,k} \\ B_{j,k} \end{pmatrix} = 0.$$

Es inmediato comprobar que la matriz del sistema es invertible si  $\pm j$  no es múltiplo de  $m$ , es decir, que la única solución en ese caso es

$$A_{j,k} = 0 = B_{j,k}.$$

Por lo anterior se tiene que

$$u(t) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} - \{0\} \\ k = 1, \dots, N}} (A_{m,j,k} \psi_{m,j,k} + B_{m,j,k} \phi_{m,j,k}).$$

#### 48 Funciones de período minimal.

Evaluando entonces  $\int_0^{2\pi} Ku \cdot u dt$ , con base en lo anterior resulta

$$\int_0^{2\pi} Ku \cdot u dt = \int_0^{2\pi} \left( K \left( \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} - \{0\} \\ k=1, \dots, N}} (A_{mj,k} \psi_{mj,k} + B_{mj,k} \phi_{mj,k}) \right) \cdot \left( \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} - \{0\} \\ k=1, \dots, N}} (A_{mj,k} \psi_{mj,k} + B_{mj,k} \phi_{mj,k}) \right) \right) dt.$$

Finalmente se tiene

$$\int_0^{2\pi} Ku \cdot u dt = \frac{1}{jm} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} - \{0\} \\ k=1, \dots, N}} (|A_{j,k}|^2 + |B_{j,k}|^2)$$

Pero  $1/j \leq 1$ , pues  $j \leq -1$  o  $j \geq 1$ , por lo que

$$\int_0^{2\pi} Ku \cdot u dt \leq \frac{1}{m} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} - \{0\} \\ k=1, \dots, N}} (|A_{j,k}|^2 + |B_{j,k}|^2) = \frac{1}{m} |u|_{L^2}^2.$$

Usando entonces la desigualdad anterior y el hecho de que

$$G(u) \geq \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{a_2} \right)^{\alpha-1} |u|_{L^2}^\alpha,$$

se obtiene para  $u \in E$  con período  $2\pi/m$ :

$$\begin{aligned} I^\alpha(u) &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{Ku \cdot u}{2} - G(u) \right] dt \leq \frac{1}{2} \frac{1}{m} |u|_{L^2}^2 - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{a_2} \right)^{\alpha-1} \int_0^{2\pi} |u|^\alpha dt \\ &= \frac{1}{2m} |u|_{L^2}^2 - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{a_2} \right)^{\alpha-1} |u|_{L^2}^\alpha. \end{aligned}$$

Por otra parte, usando la desigualdad de Hölder para

$$(|u|^\alpha)^{\frac{2}{\alpha-1}} \in L^{\frac{\alpha-1}{2}}, \text{ y } 1 \in L^{1-\frac{1}{\alpha-1}},$$

se concluye que

$$\begin{aligned} |u|_{L^2}^2 &= \int_0^{2\pi} |u|^2 dt \leq \left( \int_0^{2\pi} |u|^\alpha dt \right)^{\frac{2}{\alpha-1}} \left( \int_0^{2\pi} dt \right)^{1-\frac{2}{\alpha-1}} \\ &= (2\pi)^{1-\frac{2}{\alpha-1}} |u|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

de donde

$$I^\alpha(u) \leq \frac{1}{2m} (2\pi)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}} |u|_{L^2}^2 - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{a_2} \right)^{\alpha-1} |u|_{L^2}^\alpha.$$

Se considera ahora el miembro derecho de la desigualdad anterior como función de  $\rho = |u|_{L^2}$ .

$$F(\rho) = a\rho^2 - b\rho^\alpha.$$

Dicha función tiene un extremo para  $\rho_{max}$  tal que

$$F'(\rho) = 2a\rho - \alpha b\rho^{\alpha-1} = 0,$$

es decir, que  $F$  tiene un máximo (puesto que  $\alpha > 2$  y  $F'' < 0$ ) en

$$\rho_{max} = \left(\frac{2a}{\alpha b}\right)^{\frac{1}{\alpha-2}},$$

(ver fig.5.1.1).

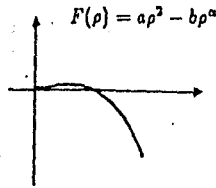


Figura 5.1.1 Gráfica de  $F$ .

Sustituyendo los valores de  $a$  y  $b$  correspondientes se encuentra

$$\rho_{max} = \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha-2}} (2\pi)^{\frac{1}{\alpha}} a_2^{\frac{\alpha-1}{\alpha-2}},$$

y usando este valor de  $\rho$ , se tiene la siguiente desigualdad válida para toda  $u$  con período  $2\pi/m$ .

**5.1.1 Lema.**

Si  $u \in E$  tiene período  $2\pi/m$ , entonces

$$I^*(u) \leq 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha-2}} (a_2^2)^{\frac{\alpha-1}{\alpha-2}}. \tag{5.1}$$

**5.2 Funciones de período minimal.**

El lema 5.1 tiene dos consecuencias importantes con respecto al funcional  $I^*$ , las cuales se presentan en los siguientes corolarios.

**5.2.1 Corolario.**

Sea  $G \in C^0(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$  tal que la condición  $B)^*$  se cumple. Entonces el funcional  $I^*$  está acotado por arriba. Más precisamente,

$$I^*(u) \leq 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) (a_2^2)^{\frac{\alpha-1}{\alpha-2}}.$$

*Prueba.* Basta tomar  $m = 1$  en la estimación del lema y observar que en este caso la desigualdad vale para toda  $u$  en  $E$ . ■

50 Funciones de período minimal.

5.2.2 Proposición.

Sea  $G$  como en el corolario anterior, y  $u \in E$ , tal que

$$I^*(u) > 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}(a_2^2)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}, \quad (5.2.1)$$

entonces  $u$  tiene período minimal  $2\pi$ .

*Prueba.* Si se toma  $m = 1/2$  en la estimación del lema, entonces, puesto que la desigualdad 5.1.1 es válida,  $u$  debe tener período  $T > 2\pi/2$ , pero en ese caso, necesariamente tiene período  $2\pi$ .

Defínase  $c_\alpha = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}(a_2^2)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$ .

La importancia de la proposición 5.2.2 radica en que para probar el resultado principal, basta ahora mostrar que el conjunto

$$A_\alpha = \{u \in E \mid I^*(u) > c_\alpha\}$$

contiene al menos  $N$  puntos críticos de  $I^*$  distintos en el sentido de la definición dada en el capítulo 2.

Para hacer lo anterior, considérese el subespacio  $E_1$ , de dimensión  $2N$  de  $E$ , dado por el eigenspacio correspondiente al eigenvalor 1 del operador  $K$ ; i.e.

$$E_1 = \langle \psi_1, \phi_1, k; \phi_{1,k}, k = 1, \dots, N \rangle,$$

o más precisamente

$$E_1 = \{u \in E \mid u(t) = (\eta \operatorname{sen} t + \xi \operatorname{cos} t, -\xi \operatorname{sen} t + \eta \operatorname{cos} t); \xi, \eta \in \mathbb{R}^N\}.$$

A continuación se evalúa a  $I^*$  en  $E_1$ . Tómnese entonces  $u \in E_1$ .

$$u(t) = (\eta \operatorname{sen} t + \xi \operatorname{cos} t, -\xi \operatorname{sen} t + \eta \operatorname{cos} t).$$

Puesto que

$$\begin{aligned} |u|_{L^2}^2 &= \int_0^{2\pi} |u|^2 dt = \int_0^{2\pi} (|\xi|^2 + |\eta|^2) dt \\ &= 2\pi(|\xi|^2 + |\eta|^2), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} |u|_{L^\alpha}^\alpha &= \int_0^{2\pi} (|u|^2)^{\frac{\alpha}{2}} dt \\ &= 2\pi(|\xi|^2 + |\eta|^2)^{\frac{\alpha}{2}} \\ &= (2\pi)^{1-\frac{\alpha}{2}} |u|_{L^2}^\alpha, \end{aligned}$$

usando  $B^*$  se obtiene

$$\begin{aligned} I^*(u) &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{K u \cdot u}{2} - G(u) \right] dt \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} u \cdot u dt - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{a_1}\right)^{\alpha-1} \int_0^{2\pi} |u|^\alpha dt \\ &= \frac{1}{2} |u|_{L^2}^2 - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{a_1}\right)^{\alpha-1} |u|_{L^\alpha}^\alpha. \end{aligned}$$

Es decir,

$$I^*(u) \geq 2\pi \left[ \frac{1}{2} (|\xi|^2 + |\eta|^2) - \frac{(2\pi)^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha} \left(\frac{1}{a_1}\right)^{\alpha-1} (|\xi|^2 + |\eta|^2)^{\frac{\alpha}{2}} \right].$$

El lado derecho de la desigualdad anterior alcanza su valor máximo como función de  $\rho = |\xi|^2 + |\eta|^2$  cuando

$$\rho = \rho_{max} = (a_1^2)^{\frac{n-1}{n-2}}.$$

Consecuentemente, si se define

$$\Gamma_0 = \{u(t) = (\eta \operatorname{sen} t + \xi \operatorname{cos} t, -\xi \operatorname{sen} t + \eta \operatorname{cos} t) \mid |\xi|^2 + |\eta|^2 = \rho_{max}\}, \quad (5.2.2)$$

para cualquier  $u \in \Gamma_0$  se tiene

$$I^*(u) \geq 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) (a_1)^{\frac{n-1}{n-2}}.$$

Comparando la desigualdad anterior con la desigualdad (5.2.1) y si se establece la condición  $I^*(u) > c_\alpha$ , para toda  $u \in E_1$ , se tiene que si

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{n-1}{n-2}} < 2\pi^{\frac{n-2}{n-1}},$$

es decir, si

$$\frac{a_2}{a_1} < 2^{\frac{2}{n-1}},$$

dicha condición se satisface. Se tiene entonces la siguiente proposición:

### 5.2.3 Proposición.

Sea  $G \in C^0(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$  tal que la condición (3.1.1) B)\* se cumple, y  $a_1, a_2$  de tal manera que  $a_2/a_1 < 2^{2/n-1}$ . Entonces cualquier  $u \in \Gamma_0$  es tal que

$$I^*(u) > c_\alpha$$

y consecuentemente tiene período minimal  $2\pi$ .

Una manera diferente de enunciar la proposición anterior es que la esfera  $\Gamma_0$  está contenida en el conjunto  $A_\alpha$  de funciones de período minimal. En términos generales, esto significa que la topología de  $A_\alpha$  no es trivial, lo cual sugiere que  $A_\alpha$  podría contener puntos críticos de  $I^*$ , lo que de hecho sucede.

---

## Capítulo 6.

El caso de  $H$  estrictamente convexo.

### Introducción.

Para hacer más claras las ideas de la demostración, se considera el caso en que  $H$  es estrictamente convexo. Como ya se observó antes,  $f^*$  resulta ser entonces Fréchet-diferenciable, y la caracterización de puntos críticos es más sencilla que en el caso general. Posteriormente, las ideas desarrolladas en este capítulo podrán extenderse de manera casi directa al problema general.



## 6.1 Condiciones de Palais-Smale.

Sea  $H$  una función estrictamente convexa. Entonces, por la proposición 3.1.2,  $G$  (la transformada de Legendre de  $H$ ) resulta ser continuamente diferenciable. Es decir, que el funcional

$$I^*(u) = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{Ku \cdot u}{2} - G(u(t)) \right] dt$$

tiene como derivada

$$I'^* = Ku - G'(u(t)) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G'(u) dt,$$

(ver sección 3.4), en donde  $I'^*$  representa el gradiente de  $I^*(u)$ .

Por otra parte, como  $H$  es convexa, se tiene la relación

$$H(z + \lambda v) - H(z) \leq \lambda(H(z + v) - H(z)), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^{2N}.$$

Haciendo entonces  $\lambda \rightarrow 0^+$  se tiene

$$H'(z) \cdot v \leq H(z + v) - H(z), \quad \forall v \in \mathbb{R}^{2N}. \quad (6.1.1)$$

Si se toma a  $v = -z$  y utilizando el hecho de que  $H(0) = 0$

$$-z \cdot H'(z) \leq -H(z),$$

de donde, recordando que  $\alpha_1 |z|^\beta / \beta \leq H(z)$

$$|z| |H'(z)| \geq z \cdot H'(z) \geq H(z) \geq \frac{\alpha_1}{\beta} |z|^\beta.$$

Finalmente se tiene la siguiente desigualdad

$$|H'(z)| \geq \frac{\alpha_1}{\beta} |z|^{\beta-1}.$$

En particular obsérvese que  $H' \neq 0$ .

Si se toma ahora en (6.1.1)  $v = |z|u$  con  $|u| = 1$  resulta

$$|z| |H'(z) \cdot u| \leq H(z + v),$$

(puesto que  $H(z) \geq 0$ ). Si se utiliza ahora que  $H(z) \leq \alpha_2 / \beta |z|^\beta$ , se obtiene la siguiente desigualdad

$$|z| |H'(z) \cdot u| \leq \frac{\alpha_2}{\beta} |z + v|^\beta = \frac{\alpha_2}{\beta} |z|^\beta \left| \frac{z}{|z|} + u \right|^\beta.$$

Pero  $z/|z|$  y  $u$  son dos vectores unitarios, y por lo tanto la distancia entre ellos es menor que 2, por lo que

$$H'(z) \cdot u \leq \frac{\alpha_2}{\beta} 2^\beta |z|^{\beta-1},$$

si se escoge

$$u = \frac{H'(z)}{|H'(z)|}$$

54 El caso de  $H$  estrictamente convexo.

se tiene

$$|H'(z)| \leq 2^\beta \frac{a_2}{\beta} |z|^{\beta-1}.$$

Se concluye de las desigualdades anteriores que la derivada de  $H$  está acotada y que satisface la siguiente relación

$$c_1 |z|^{\beta-1} \leq |H'(z)| \leq c_2 |z|^{\beta-1}, \quad (6.1.2)$$

con  $c_1$  y  $c_2$  constantes, siendo  $c_1 = a_1/\beta$  y  $c_2 = 2^\beta a_2/\beta$ .

En forma análoga, puesto que  $G$  es convexa y satisface desigualdades similares, se tiene

$$d_1 |u|^{\alpha-1} \leq |G'(u)| \leq d_2 |u|^{\alpha-1}.$$

De esta última relación se desprende que el mapeo

$$G' : L^\alpha([0, 2\pi], \mathbb{R}^{2N}) \rightarrow L^\beta([0, 2\pi], \mathbb{R}^{2N})$$

$$u(t) \rightarrow G'(u)$$

está bien definido, pues

$$|G'(u)| \leq d |u|^{\alpha-1},$$

y puesto que  $\alpha$  y  $\beta$  son exponentes conjugados, se tiene la relación  $\alpha - 1 = \alpha/\beta$ , por lo que

$$|G'(u)|^\beta \leq d |u|^\alpha.$$

Por un teorema debido a Krasnosel'skii (ver apéndice 4), el mapeo  $G'$  resulta ser continuo. Se prueba en seguida que los otros términos que forman al funcional  $I^*$  son también continuos. En efecto, por una parte,  $K$  es un operador compacto y como  $\alpha > 2$ , se tiene  $\beta < 2$  y se cumplen las siguientes contenciones:

$$K : L^\alpha([0, 2\pi], \mathbb{R}^{2N}) \subset L^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^{2N}) \rightarrow L^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^{2N}) \subset L^\beta([0, 2\pi], \mathbb{R}^{2N}),$$

por lo que el operador es continuo.

Finalmente, el último término de  $I^*$

$$\int_0^{2\pi} G'(u(t)) dt$$

satisface que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} G'(u(t)) dt \right|_{L^\beta} &= \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} |G'(u(t))|^\beta dx \right)^\frac{1}{\beta} dt \right)^\frac{1}{\beta} \\ &= (2\pi)^\frac{1}{\beta} \left| \int_0^{2\pi} |G'(u(t))| dt \right| \\ &\leq (2\pi) \left( \int_0^{2\pi} |G'(t)|^\beta dt \right)^\frac{1}{\beta} \\ &\leq 2\pi d \left( \int_0^{2\pi} |u|^\alpha dt \right)^\frac{1}{\beta} = 2\pi d |u|_{L^\alpha}^\frac{\alpha}{\beta}, \end{aligned}$$

por lo cual resulta también ser continuo.

De estas tres últimas estimaciones, se concluye que el funcional  $I^{**}$  es continuo y por lo tanto, se tiene que  $I^*$  es continuamente Fréchet-diferenciable.

Se puede además probar que el funcional  $I^*$  satisface las condiciones P.S.

## 6.1.1 Proposición.

El funcional  $I^*$  satisface las condiciones de Palais-Smale.

Prueba. Considérese una sucesión  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$  tal que

- 1)  $|I^*(u_n)| \leq M$ , para  $M > 0$  y
- 2)  $|I'^*(u_n)|_{E^*} \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ .

Entonces se tiene que mostrar que  $\{u_n\}$  admite una subsucesión convergente en  $E$ .

Para ello es necesario hacer algunas estimaciones. Primero, nótese que por ser  $K$  compacto y autoadjunto, con espectro contenido en  $[-1, 1]$ , se tiene que

$$|K| \leq \max_{j \in \mathbb{Z} - \{0\}} |\lambda_j| \leq 1,$$

en donde  $\lambda_j$  denota al  $j$ -ésimo eigenvalor (ver [Br2] pp.94). Es decir, la siguiente relación es válida

$$\int_0^{2\pi} K u_n \cdot u_n dt = (K u_n, u_n) \leq |K| \|u_n\|^2 \leq \|u_n\|^2.$$

Utilizando ahora el hecho de que

$$G(u) \geq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{a_2}\right)^{\alpha-1} |u|^\alpha,$$

se desprende que

$$-M \leq I^*(u_n) \leq \frac{1}{2} \|u_n\|_{L^2}^2 - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{a_2}\right)^{\alpha-1} \|u_n\|_{L^2}^\alpha.$$

Como también

$$\int_0^{2\pi} u_n^2 \leq \left(\int_0^{2\pi} (u_n^2)^{\frac{\alpha}{2}} dt\right)^{\frac{2}{\alpha}} \left(\int_0^{2\pi} dt\right)^{1-\frac{2}{\alpha}} = \|u_n\|_{L^2}^2 (2\pi)^{1-\frac{2}{\alpha}},$$

se tiene finalmente que

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L^2}^2 &\leq \alpha (a_2)^{\alpha-1} \left(M + \frac{1}{2} \|u_n\|_{L^2}^2\right) \\ &\leq M_1 + M_2 \|u_n\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

con  $M_1$  y  $M_2$  constantes positivas.

Pero por ser  $\alpha > 2$ , se tiene que

$$\|u_n\|_{L^2} \leq (M_1 \|u_n\|_{L^2}^2 + M_2)^{\frac{1}{\alpha-2}},$$

y tomando a

$$\bar{M} = \max(1, [M_1 + M_2]^{\frac{1}{\alpha-2}}),$$

se concluye que  $\|u_n\|_{L^2} \leq \bar{M}$ ; i.e.  $\{u_n\}$  está uniformemente acotada.

Ahora bien, por ser  $\{u_n\}$  uniformemente acotada, existe una subsucesión que converge en la topología débil (ver apéndice 1). Abusando de la notación, se designa también a dicha subsucesión por  $\{u_n\}$ . Es decir, que existe  $u \in E$  tal que

$$u_n \rightarrow u \text{ débilmente.}$$

Por otra parte, por la condición (2) de las hipótesis y de la expresión para la derivada de  $I^*$  se concluye que

$$\epsilon_n \equiv K u_n - G'(u_n) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G'(u_n(t)) dt,$$

56 El caso de  $H$  estrictamente convexo.

es tal que

$$|\epsilon_n|_{E^*} \rightarrow 0,$$

si  $n \rightarrow \infty$ .

Además, como  $u \in E$  y  $\int_0^{2\pi} K u dt = 0$  se tiene que

$$\int_0^{2\pi} \epsilon_n(t) dt = 0.$$

Por simplicidad se denota

$$\rho_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G'(u_n(t)) dt. \quad (6.1.3)$$

Como  $K$  es compacto, no sólo como operador de  $L^2$  en  $L^2$ , sino también como operador de  $L^\alpha$  en  $L^\beta$ , se tiene que mapea sucesiones débilmente convergentes, en sucesiones fuertemente convergentes; i.e.

$$\|K u_n - K u\|_{L^\beta} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

que en particular son acotadas.

$|G'(u_n)|_{L^\beta}$  es también uniformemente acotada, pues

$$|G'(u_n)| \leq d |u_n|^{\frac{\beta}{\alpha}},$$

lo cual implica que

$$|G'(u_n)|_{L^\beta} \leq d |u_n|_{L^\alpha}^{\frac{\beta}{\alpha}} \leq M,$$

puesto que  $u_n$  es débilmente convergente, y toda sucesión débilmente convergente es acotada (ver apéndice 1).

Finalmente, usando la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} |\rho_n| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} G'(u_n(t)) dt \right| \\ &\leq \left( \int_0^{2\pi} |G'(u_n)|^\beta dt \right)^{\frac{1}{\beta}} (2\pi)^{\frac{1}{\beta}-1} \\ &\leq \left( \int_0^{2\pi} |u_n|^\alpha dt \right)^{\frac{1}{\alpha}} (2\pi)^{\frac{1}{\alpha}-1} \\ &\leq |u_n|_{L^\alpha}^{\frac{\beta}{\alpha}} (2\pi)^{\frac{1}{\alpha}-1}, \end{aligned}$$

por lo que  $\{\rho_n\}$  también está uniformemente acotada en  $\mathbb{R}^{2N}$ .

Por lo anterior, es posible obtener una subsucesión convergente, también denotada por  $\{\rho_n\}$ ; i.e. existe  $\rho \in \mathbb{R}^{2N}$  tal que

$$\rho_n \rightarrow \rho, \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

De (6.1.1) se obtiene entonces

$$G'(u_n) = K u_n + \rho_n - \epsilon_n.$$

Utilizando la proposición 3.2.1 resulta que

$$u_n = G'^{-1}(G'(u_n)) = H'(G'(u_n)),$$

$$u_n = H'(K(u_n) + \rho_n - \epsilon_n). \quad (6.1.4)$$

Puesto que  $H'$  satisface la condición  $|H'(z)| \leq c|z|^{\frac{p}{q}}$ , utilizando de nuevo el teorema de Krasnosel'skii sobre la continuidad de mapeos entre espacios  $L^p$  al que se hizo mención, se concluye que

$$H' : L^p([0, 2\pi], \mathbb{R}^{2N}) \rightarrow L^q([0, 2\pi], \mathbb{R}^{2N})$$

$$u(t) \rightarrow H'(u(t)),$$

es continuo, por lo que de (6.1.2) resulta

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} H'(Ku_n + \rho_n - \epsilon_n) \\ &= H'(\lim_{n \rightarrow \infty} (Ku_n + \rho_n - \epsilon_n)) \\ &= H'(Ku + \rho), \end{aligned}$$

i.e.  $u_n$  converge fuertemente en  $E$ .

### 6.2 Puntos críticos de $I^*$

Con base en lo anterior, es posible determinar los puntos críticos de  $I^*$ , siguiendo argumentos estándar (ver [Cl], [Ni2], [CH], [Mu]).

De hecho, se tiene el siguiente resultado:

#### 6.2.1 Teorema.

Sea  $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$  tal que satisface las hipótesis del teorema 2.1.1. Supóngase que además  $H$  es estrictamente conveza. Entonces para  $k = 1, \dots, N$ , los números

$$c_k = \sup_{\Gamma \in \Sigma} \inf_{u \in \Gamma} I^*(u),$$

$$i(\Gamma) \geq k$$

con  $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_N$ , son valores críticos del funcional  $I^*$  y los correspondientes puntos críticos tienen período minimal  $2\pi$ .

*Prueba.* Puesto que por el corolario 5.2.1  $I^*$  está acotado por arriba ( $I^*(u) \leq M$ ), se tiene que

$$c_k \leq \sup_{\Gamma \in \Sigma} M = M < \infty, \forall k = 1, \dots, N.$$

$$i(\Gamma) \geq k$$

Por otra parte, si  $\Gamma_0$  es el conjunto invariante definido en la sección 5.2, se tiene, por la proposición 5.2.3, que

$$\inf_{\Gamma_0} I^* > c_\alpha,$$

y finalmente, por la proposición 4.1.5, se sabe que  $i(\Gamma_0) = N$ .

Por lo tanto

$$c_k = \sup_{\Gamma \in \Sigma} \inf_{u \in \Gamma} I^*(u) \geq \inf_{u \in \Gamma_0} I^*(u) > c_\alpha,$$

$$i(\Gamma) \geq k$$

$\forall k = 1, \dots, N$ , y se concluye entonces que  $-\infty < c_k < +\infty$ ,  $k = 1, \dots, N$ .

Si  $u \in E$  es tal que  $I^*(u) = c_k > c_\alpha$ ,  $k = 1, \dots, N$ , se sabe entonces por la proposición 5.2.2, que  $u$  tiene período minimal  $2\pi$ .

Consecuentemente, basta probar que los  $c_k$  son valores críticos de  $I^*$ . Procediendo por contradicción, supóngase que  $c_k$  no es un valor crítico de  $I^*$ ; aplicando entonces el lema de

58 El caso de  $H$  estrictamente convexo.

deformación, se obtiene que existe una constante  $\varepsilon > 0$ , tal que si  $0 < \epsilon < \varepsilon$ , entonces puede hallarse un mapeo equivariante  $\eta_\epsilon : E \rightarrow E$ , que satisface

$$\eta_\epsilon(A_{c_k - \epsilon}) \subset A_{c_k + \epsilon}.$$

De acuerdo a la definición de  $c_k$  como el supremo de cierto conjunto, para  $c_k - \epsilon$  existe un conjunto equivariante  $\Gamma_1 \in \Sigma$ , tal que

- 1)  $i(\Gamma_1) \geq k$ .
- 2)  $I^*(u) \geq \inf_{u \in \Gamma_1} I^*(u) \geq c_k - \epsilon, \forall u \in \Gamma_1$ ; i.e.  $\Gamma_1 \in A_{c_k - \epsilon}$ .

Pero si se toma

$$\tilde{\Gamma} = \eta_\epsilon(\Gamma_1) \subset \eta_\epsilon(A_{c_k - \epsilon}) \subset A_{c_k + \epsilon}, \quad (6.2.1)$$

de acuerdo a la propiedad (2) se tiene que  $\tilde{\Gamma} \in \Sigma$ , pues es la imagen bajo un homeomorfismo equivariante de un conjunto que es cerrado y equivariante. Más aún

$$i(\tilde{\Gamma}) = i(\eta_\epsilon(\Gamma_1)) \geq k,$$

pues  $\eta_\epsilon$  es mapeo continuo y equivariante (ver propiedades 4.1.2). Pero esto no es posible, pues por (6.2.1) se tendría

$$\inf_{u \in \tilde{\Gamma}} I^*(u) \geq c_k + \epsilon,$$

lo cual contradice la definición de  $c_k$ .

Se puede establecer también el siguiente resultado concierne a la multiplicidad de  $c_k$ :

**Proposición 6.2.2**

Sea  $c_k$  como en el teorema 6.2.1. Si  $c_k = c_{k+1} = \dots = c_{k+r} = c, 1 \leq k, k+r \leq N$ , entonces  $i(K_c) > r$ .

*Prueba.* Recuérdese que  $K_c = \{u \in E \mid I^*(u) = c, I''(u) = 0\}$ ; puesto que  $I^*$  es  $C^1$  y  $S^1$  invariante, se tiene que  $K_c$  es cerrado ( $K_c = I^{*-1}(c) \cap I''^{-1}(0)$ ) e invariante, o sea que  $K_c \in \Sigma$ . Además, como  $I^*$  satisface las condiciones P.S.,  $K_c$  es compacto, pues dichas condiciones garantizan que todo subconjunto infinito de  $K_c$  tiene un punto de acumulación, a saber, el límite de la subsucesión convergente de una sucesión de  $K_c$ .

Procediendo por contradicción, supóngase que

$$i(K_c) \leq r.$$

Por la parte (v) de las propiedades del índice (ver proposición 4.1.2), correspondiente a la vecindad  $N_\delta(K_c)$  tal que  $i(N_\delta(K_c)) = i(K_c)$ , existe por el lema de deformación, un mapeo equivariante  $\eta_\epsilon : E \rightarrow E$  que satisface

$$\eta_\epsilon(A_{c-\epsilon} - N_\delta(K_c)) \subset A_{c+\epsilon},$$

si  $0 < \epsilon < \varepsilon$ , para cierta  $\varepsilon > 0$ .

Por otra parte, puesto que  $c_{k+r} = c$ , se tiene, por la definición de  $c_k$  y para algún  $\Gamma_1 \in \Sigma$ :

$$i(\Gamma_1) \geq k+r$$

y

$$I^*(u) \geq \inf_{u \in \Gamma_1} I^*(u) \geq c - \epsilon,$$

es decir, que  $\Gamma_1 \subset A_{c-\epsilon}$ .

Pero entonces, si se toma

$$\tilde{\Gamma} = \eta_1(\overline{\Gamma_1 - N_\delta(K_c)}) \subset \Sigma,$$

resulta que

$$\begin{aligned} i(\tilde{\Gamma}) &= i(\eta_1(\overline{\Gamma_1 - N_\delta(K_c)})) \\ &= i(\overline{\Gamma_1 - N_\delta(K_c)}) \\ &\geq i(\Gamma_1) - i(N_\delta(K_c)), \text{ por las propiedades de } i \\ &\geq (k+r) - r = k, \end{aligned}$$

pero esto no es posible, pues  $\tilde{\Gamma} \subset A_{c+\epsilon}$ , como consecuencia del lema de deformación, y esto implicaría

$$I^*(\tilde{\Gamma}) \geq c_k + \epsilon,$$

lo cual contradice la definición de los  $c_k$ .

### 6.3 Prueba para el caso $H$ estrictamente convexo.

Es posible ahora probar, con base en el material desarrollado, el teorema 2.1.1 para el caso estrictamente convexo. Si los  $c_k$  dados en 6.2 son todos ellos distintos, entonces el funcional  $I^*$  tiene  $N$  puntos críticos distintos de período minimal  $2\pi$ , y por lo tanto, el problema 2.1.1 con  $T = 2\pi$  admite  $N$  soluciones diferentes (pues  $I^*$  de cada una es diferente), con período minimal  $2\pi$ , lo cual prueba el teorema 2.1.1 en este caso. Por otra parte, si para algún  $1 \leq k \leq N$  se tiene que

$$c_k = c_{k+1} = \dots = c_{k+r} = c,$$

con  $1 \leq k+r \leq N$  y  $r \geq 1$ , entonces se mostrará que en este caso,  $K_c$  contiene un número infinito de puntos críticos distintos en el sentido de la definición dada.

De hecho, por la proposición 6.2.2, se tiene que

$$i(K_c) \geq r \geq 1.$$

Procediendo por contradicción, supóngase que

$$K_c = \bigcup_{\ell=1}^s \theta(u_\ell),$$

siendo

$$\theta(u_\ell) = \{\dot{u} \in E \mid u = T_\theta(u_\ell), \text{ para alguna } \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Como  $u_\ell$  tiene período minimal  $2\pi$ , cada punto de la órbita está representado por un único  $\theta \in [0, 2\pi]$ , una vez que se escogió el punto inicial.

Puesto que  $c > 0$  (de hecho  $c = c_k > c_\alpha > 0$ ), y  $I^*(0) = 0$ , se concluye que  $u_\ell \neq 0$ ,  $\forall \ell = 1, \dots, s$ .

Entonces si se escribe a  $u_\ell$  en su serie de Fourier

$$u_\ell = \sum_{|j|>0} s_{j\ell}^t e^{ij_t t}, \quad s_{j\ell}^t \in \mathbb{C}^N,$$

para algún  $j_\ell > 0$  se tiene que  $s_{j_\ell}^t \neq 0$  y si se define el mapeo

$$f: K_c \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$$

$$f(u_\ell) = |s_{j_\ell}^t|,$$

60 El caso de  $H$  estrictamente convexo.

y

$$f(\theta(u_i)) = e^{i\theta} |s_i^t|,$$

resulta

$$f(T_\theta u_i) = e^{i\theta} f(u_i), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi],$$

$i = 1, \dots, s.$

Es decir, que  $f$  es equivariante por construcción, lo cual implica que  $i(K_c) = 1$ , de acuerdo con la definición de índice, y esto contradice la desigualdad 6.3.1.

Esto concluye la prueba para el caso  $H$  estrictamente convexo. ■

Nota:

De hecho, en el caso en el que se tienen puntos críticos de multiplicidad mayor que uno, puede probarse no sólo que el conjunto de soluciones es infinito, sino que el conjunto de órbitas  $K_c/S^1$  tiene dimensión topológica mayor o igual que  $i(K_c) - 1 \geq r$ .

En efecto, primero nótese que la acción de  $S^1$  sobre  $K_c$  es libre, es decir, que

$$u(t) \in K_c \text{ y } T_\theta(u(t)) = u(t + \theta) = u(t)$$

implica que  $\theta = 0$  o bien  $\theta = 2\pi$  (recuérdese que por ser  $u$  de período minimal  $2\pi$  se tiene  $c > c_\infty$ ). Se puede entonces identificar a una órbita en  $K_c/S^1$ ,  $[u]$ , con uno de sus representantes  $u$ .

Ahora bien, si

$$f : K_c/S^1 \rightarrow \mathbb{R}^k - \{0\}$$

es una función continua, se puede definir

$$\tilde{f} : K_c \rightarrow \mathbb{C}^k - \{0\}$$

por

$$\tilde{f}(T_\theta u) = e^{i\theta} f([u]),$$

donde  $u$  es un representante de la órbita  $[u]$ .

Pero  $i(K_c) > r$ , implica  $k \geq i(K_c) \geq r + 1$ .

En este caso se tiene la siguiente caracterización de la dimensión de un recubrimiento de un espacio normal (ver [Pe]).

*Un espacio normal  $X$  tiene dimensión menor o igual que  $n$  si y sólo si para cada subconjunto cerrado  $A \subset X$  y cualquier función continua*

$$g : A \rightarrow S^n$$

*dicha función tiene una extensión continua a  $X$ .*

Por lo anterior resulta que la dimensión de un espacio normal  $X$  es mayor que  $n$  si existen un subconjunto cerrado  $A$  y una función continua  $g : A \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  que no se pueda extender a todo  $X$ .

Aquí se toma  $X = K_c/S^1$ ,  $A$  un punto de  $X$  y cualquier mapeo de ese punto a  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ , con  $n + 1 = i(K_c) - 1$ . Entonces, se desprende que  $\dim X \geq n + 1 \geq i(K_c) - 1 \geq r \geq 1$ .

En particular  $K_c/S^1$  no puede tener un número finito de elementos, es decir, no puede haber un número finito de órbitas.



---

## Capítulo 7.

El caso general.

### Introducción.

Se considera ahora el caso general en el que  $H$  es únicamente convexo. Por lo tanto, el funcional  $I^*$  ya no es Fréchet-diferenciable. Sin embargo, es posible construir un funcional más regular y utilizar las nociones de subgradiente introducidas en el capítulo 1, de tal forma que las ideas usadas en la demostración del caso estrictamente convexo puedan también aplicarse.

## 62 El caso general.

### 7.1 El análogo de las condiciones P.S.

Se prueba a continuación que el funcional  $I^*$  satisface una condición del tipo P.S.

#### 7.1.1 Lema.

Sea  $\{(u_n, v_n)\}$  una sucesión en  $E \times E^*$ . Supóngase que:

1)  $|I^*(u_n)| \leq M,$

2)  $v_n \in \partial_E I^*(u_n)$  y  $|v_n|_{E^*} \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$

entonces la sucesión  $u_n$  admite una subsucesión convergente.

Observación.

Esta versión de las condiciones P.S. fue introducida por Ekeland y Lasry [EK], y resulta ser conveniente para funcionales que poseen subgradiente.

Prueba (lema 7.1.1.) Similarmente a la prueba dada en 6.1, se ve que la condición

$$|I^*(u_n)| \leq M$$

implica que  $|u_n|_{L^\infty}$  está uniformemente acotada, por lo que existe una subsucesión débilmente convergente en  $L^\infty$  a cierta  $u \in E$ .

Por las fórmulas duales de Fenchel (ver apéndice 1), se tiene

$$\frac{\alpha_1}{\beta} |\xi|^\beta \leq H(\xi) \leq H(\xi) + G(u) = \xi \cdot u,$$

$\forall \xi \in \partial G(u)$ , y por lo tanto, para algunas constantes  $\alpha, \alpha_1 > 0$  se cumple

$$|\xi|^\beta \leq \alpha_1 |u| |\xi|,$$

y

$$|\xi| \leq \alpha |u|^{\beta-1} = \alpha |u|^{\alpha-1}. \quad (7.1.2)$$

Por lo tanto, si  $v_n \in \partial I^*(u_n)$ , existen  $\xi_n \in E^*$  y  $\rho_n \in \mathbb{R}^{2N}$ , tales que

$$v_n = K u_n - \xi_n + \rho_n,$$

y se cumple que

$$\xi_n(t) \in \partial G(u_n(t)) \text{ a.e.},$$

(ver capítulo 1). Esto último implica que  $u_n(t) = H'(\xi_n)$ , a.e.

Pero de 7.1.2, se tiene que  $\xi_n$  está uniformemente acotada en  $L^\beta[0, 2\pi]$ , ya que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\xi_n|^\beta dt &\leq \alpha^\beta \int_0^{2\pi} |u_n|^{\beta(\alpha-1)} dt \\ &= \alpha^\beta \int_0^{2\pi} |u_n|^\alpha dt \leq M. \end{aligned}$$

En este caso es posible extraer una subsucesión débilmente convergente.

Finalmente, como en la sección 6.1, es posible extraer una subsucesión convergente de  $\{\rho_n\}$ , pues por lo anterior está uniformemente acotada, ya que  $v_n \rightarrow 0$  en  $E^*$  (por lo que está acotada) y  $K u_n$  es acotado.

Por la compacidad de  $K$ , y puesto que  $u_n \rightarrow u$  converge débilmente en  $L^\infty$   $K u_n \rightarrow K u$  en  $L^\beta$ . Como además  $\xi_n \rightarrow \xi$ ,  $\rho_n \rightarrow \rho$  débilmente y  $v_n \rightarrow v \in E^* \subset L^\beta$ , de la expresión

$$v_n = K u_n - \xi_n + \rho_n,$$

se concluye que  $\xi_n$  converge fuertemente en  $E^*$  a  $\xi = Ku + \rho$ .

Finalmente, como  $u_n = H'(\xi_n(t))$  y  $H' : L^{\theta} \rightarrow L^{\alpha}$  es continua, se tiene que  $u_n \rightarrow u$  en  $E$ . Siguiendo la misma notación que en el capítulo 1 para el mapeo

$$\underline{G} : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \rightarrow \int_0^{2\pi} G(u(t)) dt,$$

se denota por  $\partial_E \underline{G}(u)$  el subgradiente de  $\underline{G}$  en  $E$  en el punto  $u$ ; i.e.

$$\partial_E \underline{G}(u) = \{ \xi \in E^* \mid \forall w \in E, \underline{G}(w) - \underline{G}(u) \geq \int_0^{2\pi} (w - u) \cdot \xi dt \}.$$

### 7.2 Puntos críticos de $I^*$ .

Para encontrar los puntos críticos de  $I^*$ , se usa el procedimiento presentado por Ekeland-Lasry [EK], para funcionales definidos en  $L^2$  (se utiliza en este caso fuertemente el carácter de espacio de Hilbert de  $L^2$ ) y en lo que sigue se generaliza a la situación estudiada.

Como ya se mencionó, la idea es introducir un nuevo funcional que sea más regular que  $I^*$ . Para ello, dado  $\epsilon > 0$ , defínase

$$I_{\epsilon}^*(u) = \sup_{w \in E} (I^*(w) - \frac{1}{\epsilon} |w - u|_{L^2}^2),$$

con  $u \in E$ .

Claramente el funcional  $I_{\epsilon}^* \leq \sup I^*$  y por lo tanto es acotado por arriba.

Las propiedades de  $I_{\epsilon}^*$  que se usan más adelante se presentan en el siguiente teorema.

#### 7.2.1 Teorema.

1)  $I_{\epsilon}^*$  admite una derivada de Fréchet  $I_{\epsilon}^{\prime}$ , si  $\epsilon$  es suficientemente pequeña, más aún,  $I_{\epsilon}^{\prime}$  define un mapeo globalmente Lipschitz de  $E \rightarrow E \subset E^*$ .

2) Toda sucesión  $\{u_n\} \subset E$  tal que  $|I_{\epsilon}^{\prime}(u_n)| \leq M$  y  $|I_{\epsilon}^{\prime}(u_n)|_E \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  admite una subsucesión convergente.

3)  $I_{\epsilon}^*$  es  $S^1$  invariante.

4)  $I_{\epsilon}^{\prime} = 0$  implica que  $0 \in \partial_E I^*(u)$  y también se cumple  $I_{\epsilon}^{\prime} = 0$  si y sólo si  $I^*(u) = I_{\epsilon}^*(u)$ .

Prueba. Antes de probar lo anterior, obsérvese que si  $\xi_1 \in \partial_E \underline{G}(v_1)$  y  $\xi_2 \in \partial_E \underline{G}(v_2)$ , entonces

$$(\xi_1(t) - \xi_2(t)) \cdot (v_1(t) - v_2(t)) \geq 0, \text{ a.e.} \quad (7.2.1)$$

(la demostración de la afirmación anterior se presenta en el apéndice 5).

Considérese ahora el mapeo

$$F_{\epsilon}(w) = I^*(w) - \frac{1}{\epsilon} |w - u|_{L^2}^2,$$

con  $w \in E$ . Se probará que si  $\epsilon$  es suficientemente pequeña, entonces  $F_{\epsilon}$  es estrictamente cóncava; i.e. que  $-F_{\epsilon}$  es estrictamente convexa.

De acuerdo a la definición de  $I^*$ ,

$$-F_{\epsilon}(w) = \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{2} Kw \cdot w + \frac{1}{\epsilon} (w - u) \cdot (w - u) \right] dt + \underline{G}(w),$$

#### 64 El caso general.

y como una vez que se desarrolla  $(w - u) \cdot (w - u)$  el término  $u \cdot u/\epsilon$  es constante, el término  $-2u \cdot w/\epsilon$  es lineal y el término  $Q$  es convexo, basta probar que los términos restantes son estrictamente convexos, es decir, que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\epsilon} w \cdot w - \frac{1}{2} K w \cdot w = \frac{1}{\epsilon} ((I - \frac{\epsilon}{2} K) w, w)_{L^2},$$

es estrictamente convexo  $((\cdot, \cdot)_{L^2}$ , denota el producto interior en  $L^2$  e  $I$  la identidad en ese mismo espacio).

Nota:

$K: L^2[0, 2\pi] \cap E \rightarrow L^2[0, 2\pi] \cap E$  es compacto y autoadjunto y por las propiedades del espectro de  $K$  tiene norma menor o igual que la identidad.

Esto implica que

$$\begin{aligned} ((I - \frac{\epsilon}{2} K) w, w) &\geq (1 - \frac{\epsilon}{2}) \|K\| \|w\|_{L^2}^2 \\ &\geq (1 - \frac{\epsilon}{2}) \|w\|_{L^2}^2 > 0 \end{aligned}$$

si  $\epsilon < 2$ , por lo que se concluye que la expresión es una forma cuadrática fuertemente positiva. Pero esto implica que efectivamente es estrictamente cóncava si  $\epsilon$  es suficientemente pequeño.

En seguida se prueba esta última afirmación.

Sea  $A: L^2 \cap E \rightarrow L^2 \cap E$  un operador continuo, autoadjunto y fuertemente positivo; i.e.  $(Aw, w)_{L^2} \geq c \|w\|_{L^2}^2$ , con  $c$  constante, entonces hay que probar que  $A$  es estrictamente convexa.

Para ello considérense  $w, v \in L^2 \cap E$  y  $\lambda \in [0, 1]$ , entonces

$$\begin{aligned} (A(\lambda w + (1 - \lambda)v), \lambda w + (1 - \lambda)v)_{L^2} \\ = \lambda^2 (Aw, w)_{L^2} + (1 - \lambda)^2 (Av, v)_{L^2} + 2\lambda(1 - \lambda) (Av, w)_{L^2}, \end{aligned}$$

en donde se usó el hecho de que  $A$  es autoadjunto.

Por otra parte,

$$(Av, w)^2 \leq (Av, v)_{L^2} (Aw, w)_{L^2},$$

ya que

$$\begin{aligned} (A(v + \tau w), v + \tau w)_{L^2} &= \tau^2 (Aw, w)_{L^2} + 2\tau (Av, w)_{L^2} + (Av, v)_{L^2} \\ &\geq c \|v + \tau w\|_{L^2}^2 > 0, \text{ si } v \neq \tau w, \end{aligned}$$

dada la positividad de  $A$ .

Se obtiene entonces un polinomio en  $\tau$  que es positivo. El discriminante de dicho polinomio debe ser entonces negativo, por lo que se tiene la desigualdad propuesta.

Nótese también que si el discriminante es cero, entonces el polinomio mencionado tiene un cero doble en  $v + \tau_0 w = 0$ .

Con base en lo anterior se concluye que

$$(A(\lambda w + (1 - \lambda)v), \lambda w + (1 - \lambda)v)_{L^2} \leq \lambda^2 (Aw, w)_{L^2} + (1 - \lambda)^2 (Av, v)_{L^2} + 2\lambda(1 - \lambda) (Av, v)_{L^2} (Aw, w)_{L^2}$$

y el miembro derecho de la desigualdad es a su vez menor o igual que

$$\lambda (Aw, w)_{L^2} + (1 - \lambda) (Av, v)_{L^2},$$

por la convexidad de  $x^2$ , por lo que la función  $(Aw, w)$  es convexa.

Además, para que se dé la igualdad, es necesario que  $(Aw, w)_{L^2} = (Av, v)_{L^2}$  y que  $v = -r_0 w$ . Pero entonces se tiene  $(Aw, w)_{L^2} = r_0^2 (Aw, w)_{L^2}$ , por lo que

$$(Av, v)_{L^2} = 0 = (Aw, w)_{L^2}, \text{ i.e. } w = v = 0,$$

o bien

$$r_0^2 = 1; \text{ i.e. } r_0 = \pm 1,$$

y esto último implica que  $v = \pm w$ . Si  $v = -w$ , entonces

$$(A(\lambda w + (1 - \lambda)v), \lambda w + (1 - \lambda)v)_{L^2} = (1 - 2\lambda)^2 (Av, v)_{L^2} < (Av, v),$$

a menos de que  $\lambda = 0, 1$ .

Se concluye finalmente que el mapeo  $F_u$  es estrictamente cóncavo para  $\epsilon$  suficientemente pequeña.

**Comentario.**

Lo anterior también se puede probar usando el hecho de que la segunda derivada de Fréchet de  $(Aw, w)_{L^2}$  es fuertemente positiva. Esto último requiere sin embargo definir lo que se entiende por el hessiano de una función en un espacio de dimensión infinita.

Por otra parte, dadas las condiciones de crecimiento de  $G$ , se desprende que

$$F_u(w) \rightarrow -\infty, |w|_{L^2} \rightarrow \infty,$$

pues el término  $-G(w)$  domina y  $|w|_{L^2} \leq C|w|_{L^2}$ . Puesto que  $-F_u$  es estrictamente convexa y cumple con lo anterior, entonces tiene un único mínimo (ver [Re]), y correspondientemente  $F_u$  tiene un único máximo al que se denota por  $\psi(u)$ . En otras palabras,

$$F_u(\psi(u)) = \max_{w \in E} (I^*(w) - \frac{1}{\epsilon} |w - u|_{L^2}^2) = I_u^*(u).$$

Sin embargo, por lo expuesto en el capítulo 1 (sección 1.2),  $\psi(u)$  puede caracterizarse como el único elemento de  $E$  tal que

$$0 \in \partial_E F_u(\psi(u)),$$

es decir, existe una  $\xi \in \partial_E G(\psi(u))$  tal que

$$K\psi(u) - \xi - \frac{2}{\epsilon}(\psi(u) - u) = 0,$$

ya que la derivada de Fréchet del término  $|w - u|_{L^2}^2/\epsilon$  es  $2(w - u)/\epsilon$ . Equivalentemente

$$u = \psi(u) + \frac{\epsilon}{2}[\xi - K\psi(u)],$$

con  $\xi \in \partial_E(\psi(u))$  y

$$\frac{2}{\epsilon}(\psi(u) - u) \in \partial_E I^*(\psi(u)).$$

A continuación se muestra que el mapeo  $\psi: E \rightarrow E$  es globalmente Lipschitz suponiendo que  $\epsilon$  es suficientemente pequeña. En efecto, considérense  $u_1, u_2 \in E$  y  $\xi_i \in \partial_E(u_i)$ ,  $i = 1, 2$ , tales que

$$u_1 = \psi(u_1) + \frac{\epsilon}{2}(\xi_1 - K\psi(u_1)),$$

$$u_2 = \psi(u_2) + \frac{\epsilon}{2}(\xi_2 - K\psi(u_2)).$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} |u_1 - u_2|^2 &= |\psi(u_1) - \psi(u_2)|^2 - \epsilon(K(\psi(u_1) - \psi(u_2)) \cdot (\psi(u_1) - \psi(u_2))) \\ &\quad + \epsilon(\psi(u_1) - \psi(u_2)) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \\ &\quad + \frac{\epsilon^2}{4} |\xi_1 - \xi_2 - K(\psi(u_1) - \psi(u_2))|^2. \end{aligned}$$

Utilizando ahora 7.2.1 resulta

$$|\psi(u_1) - \psi(u_2)|^2 \leq |u_1 - u_2|^2 + \epsilon |K(\psi(u_1) - \psi(u_2)) \cdot (\psi(u_1) - \psi(u_2))| \text{ a.e.,}$$

y por lo tanto, usando el hecho de que para  $a, b > 0 \in \mathbb{R}$  se cumple que

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p),$$

(ver nota al final del capítulo) se obtiene

$$|\psi(u_1) - \psi(u_2)|_{L^\infty}^2 \leq 2^{\frac{2}{p-1}} (|u_1 - u_2|_{L^\infty}^2 + \epsilon^{\frac{2}{p}} |K(\psi(u_1) - \psi(u_2)) \cdot (\psi(u_1) - \psi(u_2))|_{L^\infty}^{\frac{2}{p}}). \quad (7.2.2)$$

De donde, usando la desigualdad de Hölder

$$|\psi(u_1) - \psi(u_2)|_{L^\infty}^2 \leq 2^{\frac{2}{p-1}} (|u_1 - u_2|_{L^\infty}^2 + \epsilon^{\frac{2}{p}} |K(\psi(u_1) - \psi(u_2))|_{L^\infty}^{\frac{2}{p}} |(\psi(u_1) - \psi(u_2))|_{L^\infty}^{\frac{2}{p}}).$$

Si se utiliza ahora la desigualdad usada en la sección 3.2 para probar que  $K$  estaba bien definido,

$$|Ku|_{L^\infty} \leq C(\alpha)|u|_{L^\infty},$$

se concluye que

$$|\psi(u_1) - \psi(u_2)|_{L^\infty}^2 (1 - C^{\frac{2}{p}}(\alpha) 2^{\frac{2}{p-1}} \epsilon^{\frac{2}{p}}) \leq 2^{\frac{2}{p-1}} |u_1 - u_2|_{L^\infty}^2.$$

Si  $\epsilon$  es suficientemente pequeña, por ejemplo tal que  $\epsilon C \leq 1/2$ ; i.e.  $\epsilon \leq 1/2C$  se tiene que

$$|\psi(u_1) - \psi(u_2)|_{L^\infty} \leq \rho |u_1 - u_2|_{L^\infty},$$

con  $\rho = 2^{1/2}$ , y en forma análoga, usando (7.2.2), para  $\alpha = 2$ , y usando que

$$|Ku|_{L^2} \leq |u|_{L^2},$$

se obtiene también la siguiente desigualdad

$$|\psi(u_1) - \psi(u_2)|_{L^2} \leq \sqrt{2} |u_1 - u_2|_{L^2}.$$

A partir de lo anterior, es posible ahora calcular la derivada de Fréchet de  $I_\epsilon^*$ . Para ello obsérvese que de la definición de  $I_\epsilon^*$  se tiene

$$I_\epsilon^*(v) = I^*(\psi(u)) - \frac{1}{\epsilon} |\psi(u) - v|_{L^2}^2, \quad \forall v \in E,$$

y entonces

$$\begin{aligned} I_\epsilon^*(u) - I_\epsilon^*(v) &= I^*(\psi(u)) - \frac{1}{\epsilon} |\psi(u) - u|_{L^2}^2 - I_\epsilon^*(v) \\ &\leq I^*(\psi(u)) - \frac{1}{\epsilon} |\psi(u) - u|_{L^2}^2 - (I^*(\psi(u)) - \frac{1}{\epsilon} |\psi(u) - v|_{L^2}^2) \\ &= \frac{1}{\epsilon} (|\psi(u) - v|_{L^2}^2 - |\psi(u) - u|_{L^2}^2) \\ &= \frac{1}{\epsilon} \int_0^{2\pi} (\psi(u) \cdot \psi(u) - 2\psi(u) \cdot v + v \cdot v - \psi(u) \cdot \psi(u) + 2\psi(u) \cdot u - u \cdot u) dt, \end{aligned}$$

sumando y restando  $2u \cdot v$  y reordenando términos se tiene

$$\begin{aligned} I_t^*(u) - I_t^*(v) &\leq \frac{1}{\epsilon} \int_0^{2\pi} (|u - v|^2 + 2(\psi(u) - u) \cdot (u - v)) dt \\ &= \frac{1}{\epsilon} (|u - v|_{L^2}^2 + 2 \int_0^{2\pi} (\psi(u) - u) \cdot (u - v) dt) \end{aligned}$$

y finalmente

$$I_t^*(u) - I_t^*(v) - \frac{2}{\epsilon} \int_0^{2\pi} (\psi(u) - u) \cdot (u - v) dt \leq \frac{1}{\epsilon} |u - v|_{L^2}^2. \quad (7.2.3)$$

Intercambiando  $u$  por  $v$  resulta

$$I_t^*(v) - I_t^*(u) - \frac{2}{\epsilon} \int_0^{2\pi} (\psi(v) - v) \cdot (v - u) dt \leq \frac{1}{\epsilon} |u - v|_{L^2}^2. \quad (7.2.4)$$

Se tiene la siguiente igualdad, que puede verificarse inmediatamente sumando y restando  $\psi(v) - v$  en el primer miembro y desarrollando

$$\int_0^{2\pi} (\psi(u) - u) \cdot (u - v) dt = - \int_0^{2\pi} (\psi(v) - v) \cdot (v - u) dt + \int_0^{2\pi} (\psi(u) - \psi(v)) \cdot (u - v) dt - |u - v|_{L^2}^2.$$

Utilizando la desigualdad (7.2.4) y sustituyendo la expresión anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} I_t^*(u) - I_t^*(v) - \frac{2}{\epsilon} \int_0^{2\pi} (\psi(u) - u) \cdot (u - v) dt \\ &\geq -\frac{1}{\epsilon} |u - v|_{L^2}^2 - \frac{2}{\epsilon} \left( \int_0^{2\pi} ((\psi(u) - u) \cdot (u - v) + (\psi(v) - v) \cdot (v - u)) dt \right) \\ &= -\frac{1}{\epsilon} |u - v|_{L^2}^2 - \frac{2}{\epsilon} \left( \int_0^{2\pi} (\psi(u) - \psi(v)) \cdot (u - v) dt - |u - v|_{L^2}^2 \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon} |u - v|_{L^2}^2 - \frac{2}{\epsilon} \int_0^{2\pi} (\psi(u) - \psi(v)) \cdot (u - v) dt, \end{aligned}$$

y utilizando la desigualdad de Hölder se obtiene finalmente que

$$\begin{aligned} I_t^*(u) - I_t^*(v) - \frac{2}{\epsilon} \int_0^{2\pi} (\psi(u) - u) \cdot (u - v) dt &\geq \frac{1}{\epsilon} |u - v|_{L^2}^2 - \frac{2}{\epsilon} \|(\psi(u) - \psi(v))\|_{L^2} \|u - v\|_{L^2} \\ &\geq |u - v|_{L^2}^2 \left( \frac{1}{\epsilon} - \frac{2}{\epsilon} \rho \right), \text{ para } \epsilon \text{ pequeña} \\ &\geq -\frac{2}{\epsilon} \rho |u - v|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

y usando (7.2.1) se concluye que

$$|I_t^*(u) - I_t^*(v) - \frac{2}{\epsilon} \int_0^{2\pi} (\psi(u) - u) \cdot (u - v) dt| \leq c |u - v|_{L^2}^2,$$

con  $c = \max(1/\epsilon, 2\rho/\epsilon) \leq 2/\sqrt{\epsilon}$ .

Es decir, que

$$I_t^{**}(u) = \frac{2}{\epsilon} (\psi(u) - u),$$

y por lo tanto  $I'_\varepsilon(u)$  define un mapeo de  $E$  en  $E$  y es Lipschitz-continuo, puesto que  $\psi$  y la identidad lo son.

Además, si  $I'_\varepsilon(u) = 0$ , entonces  $\psi(u) = u$ , lo cual implica que  $0 \in \partial I'_\varepsilon(u)$  (ver sección 1.3). Esto prueba la parte (1).

Por otra parte, usando el hecho de que

$$I'_\varepsilon(u) = I^*(\psi(u)) - \frac{1}{\varepsilon} |\psi(u) - u|_{L^2}^2,$$

se ve que  $I'_\varepsilon = 0$  si y sólo si  $\psi(u) = u$ , y esto prueba el punto (4) del teorema.

La parte (2) establece que el funcional  $I'_\varepsilon$  satisface una condición del tipo P.S. adecuada, lo cual toma en cuenta el hecho de que  $I'_\varepsilon$  mapca  $E$  en  $E \subset E^*$ , (recuérdese que se pide que  $|I'_\varepsilon(u_n)|_E \rightarrow 0$  y  $|\cdot|_{L^p} \leq c|\cdot|_{L^*}$ ).

Se prueba a continuación el punto (3). Sea  $\{u_n\} \subset E$  una sucesión como en (2). Defínase una nueva sucesión

$$v_n = \psi(u_n) \in E.$$

Entonces

$$\begin{aligned} I^*(v_n) &= I^*(\psi(u_n)) = I'_\varepsilon(u_n) + \frac{1}{\varepsilon} |u_n - v_n|_{L^2}^2 \\ &\geq I'_\varepsilon(u_n) \geq -M \end{aligned}$$

Puesto que  $I^*$  está acotado por arriba, se tiene que para cierta constante  $M_1 > 0$  se cumple

$$|I^*(v_n)| \leq M_1.$$

Además se mostró que  $2(\psi(u_n) - u_n)/\varepsilon \in \partial_E I^*(\psi(u_n))$ , y esto implica que

$$w_n = \frac{2}{\varepsilon} (\psi(u_n) - u_n) = I'_\varepsilon(u_n) \in \partial_E I^*(v_n),$$

con  $|w_n|_{L^*} \rightarrow 0$  (también  $|w_n|_{L^p} \leq |w_n|_{L^*} \rightarrow 0$ ). Por lo tanto, por el lema 7.1.1,  $v_n = \psi(u_n)$  tiene una subsucesión convergente en  $E$ .

Por otra parte,

$$u_n = v_n - \frac{\varepsilon}{2} I'_\varepsilon(u_n),$$

y  $I'_\varepsilon \rightarrow 0$  en  $E$  (aquí es donde se usa la condición de que la sucesión tienda a cero en  $L^*$ , que es más fuerte que pedir que tienda a cero en  $L^p$ ), por lo que  $u_n$  admite una subsucesión convergente en  $E$ .

Finalmente, para probar que  $I'_\varepsilon$  es invariante bajo la acción de  $S^1$ , basta notar que

$$I'_\varepsilon(T_\theta(u)) = \max_{w \in E} |I^*(w) - \frac{1}{\varepsilon} |w - T_\theta u|_{L^2}^2|.$$

Haciendo el cambio de variable  $t + \theta = 2\pi + t'$ , en el segundo sumando de la expresión anterior, se obtiene

$$I'_\varepsilon(T_\theta u) = \max_{w \in E} |I^*(w) - \frac{1}{\varepsilon} |T_{2\pi-\theta} w - u|_{L^2}^2|,$$

pues  $I^*$  es invariante bajo la acción de  $S^1$ , de donde finalmente

$$I'_\varepsilon(T_\theta u) = \max_{w \in E} |I^*(T_{2\pi-\theta} w) - \frac{1}{\varepsilon} |T_{2\pi-\theta} w - u|_{L^2}^2|,$$



por lo que  $I_\epsilon^*(T_\theta u) = I_\epsilon^*(u)$ .

En lo sucesivo, se toma  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeña de tal forma que el teorema anterior se cumpla.

Esto reduce el problema general, a encontrar puntos críticos de  $I_\epsilon^*$ . Sin embargo, como  $I_\epsilon^*$  determina un mapeo globalmente Lipschitz de  $E$  en  $E$ , que satisface una condición apropiada de Palais-Smale, es posible aplicar el lema de deformación a  $I_\epsilon^*$  (ver apéndice 3). Por lo tanto, se pueden encontrar los puntos críticos de  $I_\epsilon^*$  mediante el mismo argumento que en el caso estrictamente convexo.

Se concluye entonces:

### 7.2.2 Teorema.

Sea  $H$  tal que satisface las hipótesis del teorema 2.1.1. Entonces el funcional  $I^*$  admite al menos  $N$  puntos críticos distintos con período minimal  $2\pi$ .

Prueba. Defínase los números

$$c_k = \sup_{\Gamma \geq k} \inf_{\Gamma} I_\epsilon^*(u),$$

con  $k = 1, \dots, N$ .

Claramente  $c_N \leq c_{N-1} \leq \dots \leq c_1$ .

Como se desprende inmediatamente de la definición

$$I_\epsilon^*(u) = \max_{w \in E} [I^*(w) - \frac{1}{\epsilon} \|w - u\|_E^2],$$

se tiene que  $I_\epsilon^*(u) \geq I^*(u)$ , y como este último está acotado, también lo está el primero.

Para toda  $u \in \Gamma_0$  se tiene entonces, por un lado, que

$$I_\epsilon^*(u) = I^*(\psi(u)) - \frac{1}{\epsilon} \|u - \psi(u)\|_E^2 \leq I^*(\psi(u)) \leq M,$$

por lo que  $c_1 \leq M$ .

Por otro lado,  $c_N \geq \inf_{\Gamma} I_\epsilon^*(u)$  y

$$c_k \geq \inf I_\epsilon^*(u) \geq \inf I^*(u) \geq c_\alpha, \quad \forall k = 1, \dots, N,$$

por lo que se concluye, mediante el lema de deformación, igual que en el caso estrictamente convexo, que los  $c_k$  son todos finitos y corresponden a valores críticos de  $I_\epsilon^*$ .

Sin embargo, por el teorema 7.2.1, se tiene que los puntos críticos correspondientes también son puntos críticos de  $I^*$ , y puesto que

$$I^*(u_k) = I_\epsilon^*(u_k) = c_k > c_\alpha,$$

entonces  $u_k$  tiene período minimal  $2\pi$ . Por otra parte, si  $c_k = c_{k+1} = \dots = c_{k+r} = c$ , con  $r \geq 1$ , entonces  $K_c$  contiene una infinidad de puntos críticos distintos de  $I_\epsilon^*$ , y consecuentemente de  $I^*$  (la prueba es exactamente la misma que en el caso estrictamente convexo). Esto concluye la prueba.

## 7.3 Comentarios finales.

1) Siguiendo un argumento dado por Ambroseti y Mancini [AM], se puede derivar del teorema 2.1.1 el resultado de Ekeland-Lasry [EL] para el problema de energía fija.

2) El teorema 2.1.1 prueba, en ciertos casos, la suposición natural para el problema de período minimal, a saber, un sistema hamiltoniano admite al menos, tantas soluciones como grados de libertad tenga. Es razonable suponer que la afirmación anterior es válida para una clase mucho más amplia de hamiltonianos, en las cuales sólo se impongan condiciones de crecimiento en el origen y en el infinito.

3) Tarantello y Michalek han generalizado el resultado que aquí se presenta para el caso de hamiltonianos no autónomos,  $H(z, t)$ , de período  $T$  la variable  $t$ .

Considérese el siguiente problema

$$J\dot{z} = H_z(z, t),$$

$$z(0) = z(pT),$$

con  $p \geq 1$ .

Las soluciones al problema anterior se denominan subarmónicas.

Con respecto a las soluciones subarmónicas, se puede probar entonces lo siguiente:

**Teorema.**

Sea  $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  y tal que satisface las condiciones siguientes

- a)  $H(\cdot, t)$  es cóncava  $\forall t \in \mathbb{R}$  fijo.  
 b)  $H(z, t + T) = H(z, t)$ ,  $\forall (z, t) \in \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}$ .  
 c)  $\forall z$  se cumple que

$$\frac{a_1}{\beta}|z|^\beta \leq H(z, t) \leq \frac{a_2}{\beta}|z|^\beta, \quad 1 < \beta < 2,$$

en donde  $a_1$  y  $a_2$  son constantes positivas tales que

$$\frac{a_2}{a_1} < 2^{\frac{2}{\beta}}.$$

Entonces, para cualquier  $p \geq 2$ , existen al menos  $N$  soluciones distintas con período minimal  $pT$ .

Sin embargo, si se enfatiza el carácter no autónomo del sistema, se puede probar un resultado mejor. Supóngase para ello, que  $H(z, t)$  tiene la siguiente propiedad: si  $z(t)$  es una función periódica con período minimal  $kT$ ,  $k \in \mathbb{Q}$ , y la función  $H_z(z(t), t) \neq 0$  es  $kT$  periódica, entonces  $k$  es necesariamente un entero. Por ejemplo,  $H(z, t) = b(t)H(z)$ , en donde  $b(t)$  es periódica con período minimal  $T$ .

Se prueba entonces el siguiente resultado.

**Teorema.**

Sea  $H$  tal que satisface las condiciones (a), (b) y (c), así como la condición que se acaba de mencionar. Entonces, para cualquier  $p \geq 2$  tal que

$$\frac{a_2}{a_1} < \left(\frac{2s_p}{s(s+1)}\right)^{\frac{2}{\beta}},$$

para algún  $s \geq 1$ , en donde  $s_p$  es el menor factor primo de  $p$ ; se tienen al menos  $N$  soluciones de período minimal  $pT$ .

El contenido del teorema anterior es interesante en el sentido de que, por ejemplo, si se toma  $p$  primo, el número de soluciones al problema con período minimal  $pT$  aumenta si  $p$  aumenta.

La prueba de estos dos teoremas se basa fuertemente en el hecho de que el problema es invariante bajo la acción del grupo  $\mathbb{Z}_p$ . Se aplican ideas similares a las aquí expuestas.

4) Es interesante mencionar que también el problema de cuerdas vibrantes

$$u_{xx} - u_{tt} + h(u, x, t) = 0,$$

$$u(x, t + T) = u(x, t)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbb{R},$$

puede ser planteado como un sistema hamiltoniano de dimensión infinita (véase [Br1]), y que si bien las técnicas expuestas en este trabajo presentan dificultades importantes al tratar de ser extendidas a este caso (fundamentalmente porque el operador  $K$  correspondiente ya no es compacto), es posible no obstante usar un enfoque dual que presenta algunas ventajas.

Se explica un poco más en detalle en qué consiste este resultado para el caso de la ecuación de onda.

En particular, si se supone que

$$h \in C^0(\mathbb{R} \times [0, \pi] \times \mathbb{R}),$$

con  $h(\cdot, x, t)$  creciente y  $h(u, x, \cdot)$   $T$ -periódica, y se satisface la condición adicional para

$$H(u, x, t) = \int_0^u h(v, x, t) dv$$

$$\frac{\alpha_1}{\beta} |u|^\beta \leq H(u, x, t) \leq \frac{\alpha_2}{\beta} |u|^\beta,$$

en donde  $1 < \beta < 2$  y  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son constantes positivas.

Puesto que el caso general presenta dificultades debido al problema de los pequeños divisores, se considera sólo el caso en el que  $T$  es un múltiplo racional de  $\pi$ . Es decir, se considera

$$T = \frac{q}{p} \cdot 2\pi,$$

con  $p$  y  $q$  enteros positivos.

Se buscan entonces soluciones del problema anterior, que tengan período minimal prescrito  $T$ .

Se introduce la siguiente notación:

Sea  $T = (q/p) \cdot \pi$ . Para cualquier entero  $m \geq 1$  defínase

$$\lambda(m, T) = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n = (mj)^2 - (kq)^2 > 0, j, k = 1, 2, \dots\}.$$

Defínase también

$$\bar{\lambda}(T) = \min_{m \geq 1} \lambda(m, T),$$

$$\tilde{\lambda}(T) = \lambda(1, T).$$

Se dice entonces que  $T$  es admisible si

$$\tilde{\lambda}(T) > \lambda(T).$$

Se prueba entonces el siguiente teorema

**Teorema.**

Sea  $T = q/p \cdot 2\pi$  admisible y  $h(u, x, t)$  tal que satisface las condiciones anteriormente establecidas. Entonces existe una constante  $\beta_T \in [1, 2]$ , que depende sólo de  $T$  y cierta  $c(T, \beta) > 1$ , que depende de  $T$  y de  $\beta$ , para las cuales si

$$\beta_T < \beta < 2, \quad \text{y} \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} < c,$$

el problema considerado admite una solución débil en  $L^\infty$  con período minimal  $T$ .

---

## Apéndices.

---

### Introducción.

En este apéndice se presentan con más detalle los hechos fundamentales sobre subdiferenciabilidad de funciones.

Se dan asimismo algunas demostraciones omitidas en el desarrollo principal del trabajo, por no estar directamente relacionadas con él. En particular, se presenta una versión del teorema de Hahn-Banach para funciones convexas que es ligeramente distinta de la más usual.

Si se busca un tratamiento más completo sobre estos temas, consúltese por ejemplo [Ro] (capítulo 1, subdiferenciabilidad) o [SR] (Hahn-Banach).

#### 74 Subdiferenciabilidad y otros desarrollos complementarios.

##### A1.1 Una versión del teorema de Hahn-Banach.

La siguiente versión del teorema de Hahn-Banach permite extender formas lineales definidas en un subespacio y dominadas por una función convexa a todo el espacio considerado.

##### A1.1.1 Teorema.

Sea  $X$  un espacio vectorial real,  $p$  una función real definida en  $X$  y que satisface

$$p(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha p(x) + (1 - \alpha)p(y), \quad \forall x \in X, \forall \alpha \in [0, 1].$$

Supóngase que  $\lambda$  es un funcional lineal definido sobre un subespacio  $Y$  de  $X$  que satisface

$$\lambda(x) \leq p(x), \quad \forall x \in Y.$$

Entonces existe un funcional lineal  $\Lambda$ , definido en  $X$ , que satisface

$$\Lambda(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X,$$

y tal que  $\Lambda(x) = \lambda(x)$  para toda  $x \in Y$ .

*Prueba.* Primero se mostrará que si  $x \in X$ , pero  $x \notin Y$ , entonces puede extenderse  $\lambda$  a un funcional con las mismas propiedades y definido en el subespacio generado por  $Y$  y  $x$ . Se usa entonces el lema de Zorn para probar que este proceso puede continuarse de tal modo que  $\lambda$  se extienda a todo  $X$ .

Sea  $\tilde{Y}$  el subespacio generado por  $x$  y  $Y$ . La extensión de  $\lambda$  a  $\tilde{Y}$ , denotada por  $\tilde{\lambda}$ , queda definida cuando se especifica  $\tilde{\lambda}(x)$ , puesto que

$$\tilde{\lambda}(\alpha x + y) = \alpha \tilde{\lambda}(x) + \lambda(y),$$

con  $y \in Y$ .

Supóngase que  $y_1, y_2 \in Y$ , y sean  $\alpha, \beta > 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} \beta \lambda(y_1) + \alpha \lambda(y_2) &= \lambda(\beta y_1 + \alpha y_2) \\ &= (\alpha + \beta) \lambda\left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} y_1 + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} y_2\right) \\ &\leq (\alpha + \beta) p\left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} (y_1 - \alpha x) + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} (y_2 + \beta x)\right) \\ &\leq \beta p(y_1 - \alpha x) + \alpha p(y_2 + \beta x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todas  $\alpha, \beta > 0$  y  $y_1, y_2 \in Y$ , se cumple

$$\frac{1}{\alpha} [-p(y_1 - \alpha x) + \lambda(y_1)] \leq \frac{1}{\beta} [p(y_2 + \beta x) - \lambda(y_2)].$$

Puede entonces encontrarse un número real  $a$ , tal que

$$\sup_{\substack{y \in Y \\ \alpha > 0}} \frac{1}{\alpha} [-p(y - \alpha x) + \lambda(y)] \leq a \leq \sup_{\substack{y \in Y \\ \beta > 0}} \frac{1}{\beta} [p(y + \beta x) - \lambda(y)].$$

Se define ahora  $\tilde{\lambda}(x) = a$ . Se verifica inmediatamente que la extensión satisface entonces  $\tilde{\lambda}(x) \leq p(x)$ , para toda  $x \in \tilde{Y}$ . Esto muestra que  $\lambda$  puede extenderse una dimensión cada vez.

Se procede a aplicar el lema de Zorn. Sea  $E$  la colección de las extensiones  $e(x)$  de  $\lambda$ , que satisfacen  $e(x) \leq p(x)$  en el subespacio en el que están definidas. Se introduce la relación de orden parcial  $<$ , en  $E$ , haciendo  $e_1 < e_2$ , si  $e_2$  está definida en un conjunto mayor que  $e_1$  y  $e_1(x) = e_2(x)$  en donde ambas están definidas.

Sea  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un subconjunto totalmente ordenado de  $E$ ; sea  $X_\alpha$  el subespacio en el cual  $e_\alpha$  está definida. Hágase  $e$  en  $\cup_{\alpha \in A} X_\alpha$  como

$$e(x) = e_\alpha(x), \quad \forall x \in X_\alpha.$$

Claramente  $e_\alpha < e$ , por lo que cada subconjunto totalmente ordenado de  $E$  admite una cota superior. Por el lema de Zorn,  $E$  posee un elemento maximal  $\lambda$ , definido en cierto conjunto  $X'$ , y tal que satisface la relación  $\lambda(x) \leq p(x)$ , para  $x \in X'$ . Pero  $X'$  debe coincidir con  $X$ , pues en caso contrario se podría extender  $\lambda$  a una  $\lambda'$ , mediante el procedimiento descrito en la parte inicial de la demostración. Pero esto último contradice la maximalidad de  $\lambda$ , por lo que debe tenerse  $X = X'$ . Por lo tanto la extensión  $\lambda$  está definida en todo  $X$ .

**A.1.2 Espacios duales y topologías débiles.**

El espacio vectorial de las formas lineales sobre un espacio vectorial  $E$  se denomina dual topológico o simplemente dual de  $E$  y se denota por  $E^*$ .

Si  $x^* \in E^*$ , el valor de dicho funcional en el punto  $x \in E$  se escribe como

$$\langle x, x^* \rangle.$$

Es un hecho bien conocido que en el caso de un espacio  $L^p$ , con  $p \in (0, 1)$ , el dual es isométricamente isomorfo a  $L^q$ , en donde  $p$  y  $q$  son exponentes conjugados. La forma  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  en este caso está dada simplemente por

$$\langle x, x^* \rangle = \int x x^*.$$

Se introduce una norma en  $E^*$  como sigue

$$\|x^*\|_{E^*} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} |\langle x, x^* \rangle|.$$

Se verifica en forma sencilla que la definición anterior efectivamente define una norma en  $E^*$  (ver [5]).

Finalmente se provee a  $E$  de un topología menos fina que la original inducida por  $\|\cdot\|_E$ . A esta nueva topología se le conoce con el nombre de topología débil, y está definida por el siguiente sistema de vecindades de cero

$$N(x_1^*, \dots, x_n^*, \epsilon) = \{x \in E \mid |\langle x, x_i^* \rangle| < \epsilon; i = 1, \dots, n\}.$$

Un sistema de vecindades de cualquier otro punto se obtiene del anterior por translación.

Se puede mostrar que la topología débil es la menos fina que hace continuos a todos los elementos  $x^*$  de  $E^*$ .

Finalmente se enuncia una proposición que establece una relación entre sucesiones fuertemente y débilmente convergentes.

**A1.2.1 Proposición.**

Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión débilmente convergente, entonces  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es acotada en norma. Recíprocamente, si una sucesión es acotada en norma, entonces admite una subsucesión débilmente convergente.

Prueba. Ver [5].

**Subdiferenciabilidad.**

Antes de presentar el concepto de subdiferenciabilidad de un funcional, se exponen algunas nociones importantes.

Considérense las funciones de la forma

$$F(x) = x^*(x) + \alpha,$$

en donde  $x^* \in E^*$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Este tipo de funciones se denominan funciones afines continuas. Cuando el espacio vectorial considerado es  $E = \mathbb{R}^n$  las gráficas de estas funciones corresponden a hiperplanos afines en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . La utilidad de este tipo de funciones radica en el hecho de que su uso permite generalizar la noción de gradiente. En efecto, del cálculo de varias variables se sabe que el vector normal al plano tangente de una superficie en un punto, es precisamente el gradiente en dicho punto. En el caso de funciones convexas, dicho plano puede caracterizarse como aquél que coincide con la función en el punto considerado y que es menor o igual que la misma en otro caso (ver fig.A1.3.1).

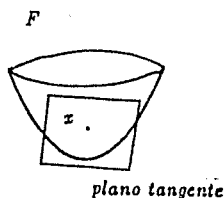


Figura A1.3.1 El plano tangente de una función convexa.

Estas dos observaciones permiten extender lo que se entiende por gradiente para funciones convexas en un espacio vectorial arbitrario como la "pendiente"  $x^*$  de una función afín continua que coincide con la función en el punto, y que es menor o igual que ella.

Al conjunto de funciones  $F : E \rightarrow \mathbb{R}$  que en todo punto son el supremo de una familia de funciones afines continuas se le denota por  $\Gamma(E)$ . Las funciones que pertenecen a  $\Gamma(E)$  se pueden caracterizar en forma simple, tal como lo garantiza la siguiente proposición.

**Proposición.**

$F \in \Gamma(E)$  si y sólo si  $F$  es convexa e inferiormente semicontinua.\* Además, si  $F$  toma el valor  $-\infty$ , entonces es idénticamente  $-\infty$ .

Prueba. Ver [5].

\* Se dice que una función  $F : E \rightarrow \mathbb{R}$  es inferiormente semicontinua si  $\forall a \in \mathbb{R}$  el conjunto  $\{s \in E \mid F(s) \leq a\}$  es cerrado.



De la definición de  $\Gamma(E)$  se sigue inmediatamente la equivalencia de las afirmaciones que se presentan a continuación:

i)  $F$  es el supremo de las funciones afines inferiormente semicontinuas que son en todo punto menores o iguales que  $F$ .

ii)  $F$  es el mayor minorante de  $F$  en  $\Gamma(E)$ .

A  $F$  se le llama  $\Gamma$ -regularización de  $F$ .

Se procede ahora a formalizar las nociones anteriores.

**A1.3.2 Definición.**

Se dice que una función afín continua  $\ell$ , menor o igual que  $F$  es exacta en  $x \in E$ , si  $\ell(x) = F(x)$ .

Obsérvese que si  $\ell$  es exacta en  $x_0$ , entonces necesariamente es de la forma

$$\begin{aligned} \ell(x) &= \langle x_0^*, x - x_0 \rangle + F(x_0) \\ &= \langle x_0^*, x \rangle + F(x_0) - \langle x_0^*, x_0 \rangle. \end{aligned}$$

Además  $\ell$  es necesariamente maximal en  $x_0$ ; i.e.

$$F(x_0) - \langle x_0^*, x_0 \rangle = -F^*(x_0), \tag{A1.3.1}$$

pues su término constante (A1.3.1) es el mayor posible entre todas las funciones afines continuas menores o iguales que  $F$ , ya que  $\ell$  es exacta.

**A1.3.3 Definición.**

Una función  $F$  de  $E$  en  $\mathbb{R}$  es subdiferenciable en el punto  $x \in E$ , si existe un minorante afín continuo que sea exacto en  $x$ . La tangente  $x^* \in E^*$  de tal minorante se llama subdiferencial de  $F$  en  $x$ , y se denota por

$$\partial F(x).$$

Si  $F$  no es subdiferenciable en  $x$  se define  $\partial F(x) = \emptyset$ .

De lo anterior se concluye que se puede caracterizar al subgradiente de una función como sigue:

$$\begin{aligned} x^* \in \partial F(x) &\iff F(x) < \infty \text{ y} \\ \langle x^*, y - x \rangle + F(x) &\leq F(y), \quad \forall y \in E. \end{aligned} \tag{A1.3.2}$$

En efecto, de (A1.3.2) y de la definición de  $F^*$ , la desigualdad

$$\langle x^*, y - x \rangle + F(x) \geq F(y)$$

se cumple siempre, y para que se dé la igualdad, debe cumplirse (A1.3.2).

Se prueba a continuación una proposición importante usada en la demostración del caso general.

**A1.3.3 Proposición (Fórmula dual de Fenchel).**

$$x^* \in \partial F(x) \iff F(x) + F^*(x^*) = \langle x^*, x \rangle.$$

*Prueba.* La necesidad de la afirmación quedó demostrada en el párrafo anterior a la definición de subgradiente.

Inversamente, si

$$F(x) + F^*(x^*) = \langle x^*, x \rangle,$$

entonces se cumple que

$$\ell(y) = \langle y, x^* \rangle + F(x) - \langle x, x^* \rangle$$

es menor o igual que  $F$ .

En efecto,

$$\langle x^*, y \rangle + F(x) - \langle x^*, x \rangle = \langle x^*, y \rangle - F^*(x^*),$$

y como

$$F^*(x^*) = \sup_{z \in E} \{ \langle x^*, z \rangle - F(z) \},$$

entonces

$$F^*(x^*) \geq \langle x^*, y \rangle - F(x),$$

de donde

$$\langle x^*, y \rangle - F^*(x^*) \leq F(x),$$

y como  $\ell$  es exacta en  $x$ , se tiene que  $x^* \in \partial F(x)$ .

Se ilustran ahora estos conceptos cuando  $E = \mathbb{R}^n$ . Considérese el caso  $n = 1$  y sea entonces  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x) = x^2.$$

Dada la definición de derivada, es fácil ver que la forma lineal

$$(y - x)F'(x) + F(x)$$

es la única que satisface la condición (A1.3.2), por lo que se tiene en este caso que

$$\partial F(x) = \{F'(x)\};$$

i.e. el subgradiente coincide con la noción usual de derivada.

En el caso general, si  $\ell$  es una función afín continua, acotada por arriba por  $F$ , entonces  $\ell$  es menor o igual a  $F^{**}$  (la  $\Gamma$ -regularización de  $F$ ). Por lo tanto, si  $\ell$  es exacta en  $x$ , se tiene, primero

$$\ell(x) \leq F^{**}(x) \leq F(x),$$

y segundo

$$F^{**}(x) = \ell(x).$$

De lo anterior pueden establecerse dos conclusiones importantes: i. Si  $\partial F(x) \neq \emptyset$ , entonces  $F(x) = F^{**}(x)$ .

ii. si  $F(x) = F^{**}(x)$ , entonces  $\partial F(x) = \partial F^{**}(x)$ .

La primera de estas condiciones tiene particular importancia en el caso de funciones convexas, pues como se probará más adelante, para una función convexa continua y superiormente acotada, entonces el subgradiente de dicha función es diferente del vacío. Entonces esta primera condición establece que la transformada de Legendre es involutiva en el contexto de funciones convexas, tal como se planteó en la sección 0.4.

Una de las características relevantes del subgradiente es, como ya se dijo, que permite generalizar la noción de punto crítico. En efecto, puede concluirse de (A1.3.2) que

$$F(x) = \min_{z \in E} F(z) \iff 0 \in \partial F(x).$$

Es decir, si se tiene un extremo en un punto, dicho punto es crítico; i.e.  $0 \in \partial F(x)$ .

En lo que sigue se presenta una proposición que establece algunas propiedades importantes del subgradiente.

#### A1.3.4 Proposición.

El conjunto  $\partial F(x)$  es convexo y débilmente cerrado en  $E^*$ .

Prueba. Puesto que

$$F^*(x^*) - \langle x, x^* \rangle \geq -F(x)$$

siempre se cumple, la proposición A1.3.3 establece que

$$\partial F(x) = \{x^* \in E^* \mid F^*(x^*) - \langle x, x^* \rangle \leq -F(x)\},$$

y como  $F^*(x^*) \in \Gamma(E^*)$ , resulta ser, por la definición de  $\Gamma(E^*)$ , inferiormente semicontinua; i.e. el conjunto descrito es convexo y cerrado, lo cual implica que es también débilmente cerrado.

La siguiente proposición es importante, pues establece un criterio para determinar si la subdiferencial de una función en un punto es diferente del vacío.

#### A1.3.5 Proposición.

Sea  $F$  una función convexa de  $E$  en  $\mathbb{R}$ , finita y continua en un punto  $x \in E$ . Entonces  $\partial F(y) \neq \emptyset$ , para toda  $y$  en el interior del dominio efectivo\* de  $F$ ,  $\text{dom} F$ .

Prueba. En la prueba se usa el hecho de que si  $F$  es finita y continua en  $x$  (y por lo tanto acotada por arriba en una vecindad de dicho punto), entonces es finita y acotada en todo punto del interior de su dominio efectivo (ver [10] pp.13).

Basta entonces probar que  $\partial F(x) \neq \emptyset$ . Puesto que  $F$  es convexa, el conjunto (llamado epigráfica de  $F$ )

$$\text{epi} F = \{(x, a) \in E \times \mathbb{R} \mid F(x) \leq a\},$$

es convexo como subconjunto de  $E \times \mathbb{R}$ . Ya que  $F$  es continua, el interior de la epigráfica es no vacío. En efecto, tomando una vecindad  $O$  de  $x$  sobre la cual  $F$  esté acotada por arriba por una constante  $c \in \mathbb{R}$ , se tiene que el conjunto  $O \times (c, +\infty)$  es un subconjunto abierto contenido en la epigráfica de  $F$ . Puesto que  $(x, F(x))$  pertenece a la frontera de la epigráfica, puede separarse del interior del dominio efectivo por un hiperplano afín cerrado (esto es una consecuencia inmediata de un corolario bien conocido del teorema de Hahn-Banach [5]).

Se obtiene así un hiperplano de soporte  $\mathcal{N}$  de la epigráfica de  $F$  que contiene a  $(x, F(x))$ . Escríbase la ecuación de  $\mathcal{N}$

$$\mathcal{N} = \{(y, a) \in E \times \mathbb{R} \mid \langle y, x^* \rangle + \alpha a = \beta\},$$

donde  $x^* \in E^*$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , y no todos los coeficientes son cero. Se tiene entonces la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \langle y, x^* \rangle + \alpha a &\geq \beta, \quad \forall (y, a) \in \text{epi} F \text{ y} \\ \langle x, x^* \rangle + \alpha F(x) &= \beta, \end{aligned}$$

pues  $\mathcal{N}$  contiene a  $(x, F(x))$ .

Si  $\alpha = 0$ , se tendría  $\langle y - x, x^* \rangle \geq 0$ , para toda  $y \in \text{dom} F$ , es decir, que  $x^*$  sería cero (recuérdese que  $\text{dom} F$  es una vecindad de  $x$ ). Se tiene entonces que  $\alpha > 0$  y dividiendo la desigualdad anterior entre  $\alpha$

$$\frac{\beta}{\alpha} - \langle y, \frac{x^*}{\alpha} \rangle \leq F(y) \quad \forall y \in \text{dom} F,$$

y

$$\frac{\beta}{\alpha} - \langle x, \frac{x^*}{\alpha} \rangle = F(x).$$

\* El dominio efectivo de una función que toma valores extendidos está formado por todos los puntos en los que la función es finita.

## 80 Subdiferenciabilidad y otros desarrollos complementarios.

Finalmente se concluye que

$$\langle y - z, \frac{-x^*}{\alpha} \rangle + F(z) \leq F(y), \quad \forall y \in E,$$

es decir,  $-x^*/\alpha \in \partial F(z)$ .

Finalmente se proporciona una demostración de que, al menos en el contexto de funciones convexas, la subdiferenciabilidad es una generalización de la diferenciabilidad usual.

Si  $F$  es una función de  $E$  en  $\mathbb{R}$ , la derivada direccional de  $F$  en el punto  $x$  en la dirección de  $y$  se define como

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{F(x + \lambda y) - F(x)}{\lambda},$$

cuando este límite existe, y se denota por  $F'(x, y)$ .

Por otra parte, si existe  $x^* \in E^*$  tal que

$$F'(x, y) = \langle y, x^* \rangle, \quad \forall y \in E,$$

se dice que  $F$  es Gâteaux-diferenciable en  $x$  y a  $x^*$  se le denomina la diferencial de Gâteaux de  $F$ .

En el caso de una función convexa, el límite mencionado siempre existe, pues el cociente resulta ser una función creciente de  $\lambda$ , si bien puede ser  $+\infty$ .

Se tiene entonces la siguiente proposición:

### A1.3.6 Proposición.

Sea  $F$  una función convexa de  $E$  en  $\mathbb{R}$ . Si  $F$  es Gâteaux-diferenciable, entonces es también subdiferenciable y

$$\partial F(x) = \{F'(x)\}.$$

Inversamente, si en el punto  $x \in E$   $F$  es continua, finita y admite un único subgradiente, entonces  $F$  es Gâteaux-diferenciable y

$$\{F'(x)\} = \partial F(x).$$

*Prueba.* Si  $F$  es Gâteaux-diferenciable en  $x$ ,  $F'(x) \in \partial F(x)$ , pues

$$F(x + y) - F(x) \geq F'(x, y) = \langle y, F'(x) \rangle,$$

o, haciendo  $z = x + y$

$$F(z) - F(x) \geq \langle z - x, F'(x) \rangle.$$

Alternativamente, si  $x^* \in \partial F(x)$ , se tiene

$$F(x + \lambda y) - F(x) \geq \lambda \langle y, x^* \rangle, \quad \forall y \in E, \forall \lambda \geq 0,$$

o dividiendo entre  $\lambda$  y tomando el límite cuando  $\lambda \rightarrow 0^+$ , se obtiene

$$\langle y, F'(x) \rangle \geq \langle y, x^* \rangle,$$

o

$$\langle y, F'(x) - x^* \rangle \geq 0,$$

y puesto que  $y$  es arbitrario, entonces  $x^* = F'(x)$ .

Para probar el recíproco, ya que  $F$  es convexa, se tiene que para toda  $\lambda \in \mathbb{R}$  y para toda  $y \in E$

$$F(x) + \lambda F'(x, y) \leq F(x + \lambda y).$$

Esto significa geoméricamente, que la recta en  $E \times \mathbb{R}$  dada por

$$\mathcal{L} = \{(x + \lambda y, F(x) + \lambda F'(x, y)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

no intersecta el interior de la epigráfica de  $F$ .

Pero el interior de la epigráfica de  $F$  es convexo, abierto y no vacío, pues  $F$  es convexa, continua y finita.

De nuevo, como corolario del teorema de Hahn-Banach, existe un hiperplano afín cerrado  $\mathcal{N}$ , que contiene a  $\mathcal{L}$  y que no intersecta al interior de la epigráfica de  $F$ .

Pero entonces  $\mathcal{N}$  es la gráfica de una función afín continua, menor o igual que  $F$  en todo punto y que es exacta en  $x$ . Puesto que se supuso que el subgradiente  $x^*$  de  $F$  en  $x$  es único, la pendiente de  $\mathcal{N}$  es necesariamente  $x^*$ , y puesto que  $\mathcal{L} \subset \mathcal{N}$

$$F'(x, y) = \langle y, x^* \rangle,$$

es decir,  $F$  es Gâteaux-diferenciable, con diferencial  $x^*$ .

---

## Apéndice 2.

Una generalización del teorema de Borsuk-Ulam.

---

En este apéndice se prueba una generalización del teorema de Borsuk-Ulam, usada en el capítulo 4 en relación con el índice geométrico de  $S^1$ . Esta prueba es más simple que la que se presenta usualmente (ver [Nil] (preedición)). La demostración que aquí se da, se debe a J. Ize.

Se exponen primero algunos resultados usados en la demostración:

### A2.1.1 Teorema de extensión de Borsuk y otros lemas.

Sean  $A \subset X \subset \mathbb{R}^n$  dos conjuntos cerrados, y

$$F_0 : A \rightarrow \mathbb{R}^m - \{0\},$$

$$F_1 : A \rightarrow \mathbb{R}^m - \{0\},$$

tales que existe una homotopía

$$F_t : A \times I \rightarrow \mathbb{R}^m - \{0\}$$

de  $F_0$  en  $F_1$ .

Sea  $\tilde{F}_0 : X \rightarrow \mathbb{R}^m - \{0\}$  una extensión de  $F_0$  a todo  $X$ . Entonces existe una extensión  $\tilde{F}_1 : X \rightarrow \mathbb{R}^m - \{0\}$  de  $F_1$  a todo  $X$ .

*Prueba.* Definase la función  $H$  sobre  $Y = (X \times \{0\}) \cup (A \times [0, 1])$  como sigue

$$H : Y \rightarrow \mathbb{R}^m - \{0\}$$

$$H(x, t) = \begin{cases} \tilde{F}_0(x) & \text{si } x \in X \times \{0\} \\ \tilde{F}_1(x) & \text{si } x \in A \times [0, 1]. \end{cases}$$

Sea  $\tilde{H}$  una extensión continua de  $H$  a  $X \times I$ , que existe por el teorema de extensión de Tietze.  
Sea

$$B = \{x \in X \mid \tilde{H}(x, t) = 0 \text{ para alguna } t \in I\}.$$

Entonces  $B$  es cerrado, por ser la imagen inversa bajo una función continua de un cerrado, y por otra parte,  $A \cap B = \emptyset$ , por la construcción misma de  $\tilde{H}$ . Existe pues una función de Urysohn que separa a  $A$  y  $B$ , es decir, existe  $\varphi$  tal que

$$\varphi : X \rightarrow [0, 1],$$

que satisface  $\varphi(x) = 1$  para toda  $x \in A$  y  $\varphi(x) = 0$  para toda  $x \in B$ .

Considérese entonces

$$\tilde{F}(x, t) : X \times I \rightarrow \mathbb{R}^m$$

definida como

$$\tilde{F}(x, t) = \tilde{H}(x, \varphi(x)t).$$

Se tiene por definición que

$$\tilde{F}(x, 0) = \tilde{F}_0(x).$$

Por otra parte,  $\tilde{F}$  no su anula. Pues supóngase que  $\tilde{F}(x, t) = 0$ , entonces se tendría que  $x \in B$ , es decir que  $\tilde{F}(x, t) = \tilde{H}(x, 0) = \tilde{F}_0(x) \neq 0$ , lo cual contradice la suposición original.

Finalmente,

$$\tilde{F}(x, 1)|_A = \tilde{H}(x, \varphi(x))|_A = \tilde{H}(x, 1)|_A = H(x, 1)|_A = F_1(x).$$

Por lo anterior, si se define a  $\tilde{F}_1(x) = \tilde{F}(x, 1)$ , esta es la extensión buscada. ■

### A2.1.2 Teorema.

Sea  $B$  una bola en  $\mathbb{R}^n$  y  $f : S^{n-1} = \partial B \rightarrow \mathbb{R}^m - \{0\}$ . Entonces si  $n < m$ ,  $f$  tiene una extensión sin ceros a  $B$ .

*Prueba.* Primero se prueba el resultado anterior cuando  $f \in C^\infty(S^{n-1})$ . En este caso, el resultado es una consecuencia del teorema de Sard, o más directamente del teorema de transversalidad, uno de cuyos corolarios es el siguiente:

Si  $X$  es una variedad con frontera y  $F$  es una función diferenciable

$$F : \partial X \rightarrow Y,$$

tal que  $F|_{\partial X}$  es transversal\* a una subvariedad  $Z$  de  $Y$ , entonces existe una función  $G : X \rightarrow Y$  que es homotópica a  $F$  y tal que  $F = G$  en  $\partial X$  (ver [GP] pp.75). Para el caso considerado, basta tomar a  $X$  como  $B$ ,  $Y$  como  $\mathbb{R}^m$  y a  $Z$  como el cero de  $\mathbb{R}^m$ , y notar que puesto que  $n < m$ , la condición de transversalidad se reduce a que  $\tilde{f}(B) \cap \{0\} = \emptyset$ , en donde  $\tilde{f}$  es cualquier extensión  $C^\infty$  de  $f$ . Entonces la función homotópica a  $\tilde{f}$  que proporciona el corolario es la extensión sin ceros buscada.

En el caso general en el que  $f$  es solamente continua, la prueba se reduce al caso anterior al considerar una aproximación  $C^\infty$  de  $f$ ,  $f_1$  y de aplicar el mismo proceso. Se puede entonces deformar a  $f_1$  en un vecindad de  $\partial B$  de tal forma que coincida con  $f$  y mostrar, simplemente por continuidad, que dicha modificación tampoco se anula en  $B$ .

Se presenta por simplicidad otra prueba más directa de este teorema que no hace uso del teorema de transversalidad.

Se considera inicialmente una extensión continua de  $f$ , denotada por  $f_1 : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ , la cual existe por el teorema de extensión de Tietze [KF]. A partir de  $f_1$  [KF], se construye a su vez otra función  $C^\infty$ ,  $f_2$ , que es una aproximación uniforme de  $f_1$ ; i.e.

$$|f_2 - f_1| \leq \epsilon,$$

en donde se toma  $\epsilon = d(f_1(S^{n-1}), 0)$ , la distancia de la imagen de  $\partial B$  bajo  $f_1$  a cero, que es un número estrictamente positivo, pues  $f_1$  es continua y  $B$  es compacta.

Lo anterior puede hacerse explícitamente mediante el alisador de Friedrichs

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{1}{\epsilon^n} \int \int_B \rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) f_1(y) dy \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^n} \rho(z) f_1(x + \epsilon z) dz, \end{aligned}$$

\* Se dice que una función  $F : X \rightarrow Y$  es transversal a  $Z$ , si para toda  $y \in Z \cap F(X)$  se cumple que  $T_y Y = dF_x(T_x X) + T_y(Z)$ , con  $y = F(x)$ .

### 84 Una generalización del teorema de Borsuk-Ulam.

en donde  $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  es tal que

$$\int \int_{\mathbb{R}^n} \rho(z) dz = 1, \quad \rho(z) = 0, \quad \forall |z| \geq 1,$$

tomando además a  $f_1$  como extendida continuamente a  $B_\epsilon = \{x \mid |x| \leq R + \epsilon\}$  ( $B_0 = B$ ).

Entonces  $f_2|_{\partial B} \neq 0$ , y  $f_2$  es homotópica a  $f_1$  mediante una deformación lineal. Por el teorema de Sard, el conjunto de valores críticos de  $f_2: B \rightarrow \mathbb{R}^m$  tiene medida cero; i.e. existe  $\eta_0 \in \mathbb{R}^m$  con  $|\eta_0| \leq \epsilon$  y tal que  $\eta_0$  es un valor regular de  $f_2$ . Pero esto significa que el jacobiano  $df_2$  en todo punto  $x_0 \in B$  tal que  $f_2(x_0) = \eta_0$  tiene rango maximal  $n$  (pues  $n < m$ ). Pero entonces la ecuación  $f_2(x) - \eta = 0$  se puede reducir por el teorema de la función implícita para  $x = x(\eta)$  con  $x(\eta_0) = x_0$ , en cierta vecindad de  $(x_0, \eta_0)$ . En particular, para toda  $\eta$  tal que  $|\eta - \eta_0| \leq \epsilon$ ,  $|x - x_0| \leq \epsilon$ .

Pero

$$f_2(x) = f_2(x_0) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0)(x - x_0) + O(|x - x_0|^2).$$

Lo anterior implica que

$$\eta - \eta_0 = A(x - x_0) + O(|x - x_0|^2),$$

en donde  $A$  es una matriz de  $m \times n$  que determina un mapeo uno a uno ( $\{A(x - x_0)\}$  es un hiperplano de codimensión  $m - n$ ). Tomando  $\eta - \eta_0$  en el núcleo de  $A^T$ , se tiene

$$\begin{aligned} |\eta - \eta_0|^2 &= (A(x - x_0), \eta - \eta_0) + (O(|\eta - \eta_0|^2), \eta - \eta_0) \\ &= ((x - x_0), A^T(\eta - \eta_0)) + (O(|x - x_0|^2), \eta - \eta_0) \\ &\leq O(|x - x_0|^2, |\eta - \eta_0|^2) |\eta - \eta_0|. \end{aligned}$$

Lo cual implica que  $|\eta - \eta_0| \leq O(|x - x_0|^2)$ , que contradice el hecho de que la vecindad de  $\eta$  puede ser dada arbitrariamente.

Se tiene finalmente que  $f_2^{-1}(\eta_0) = \emptyset$  si y sólo si  $f_2(x) - \eta_0 \neq 0, \forall \eta \in B$ . Es decir que

$$f_2(\cdot) - \eta_0|_{\partial B}$$

tiene una extensión continua sin ceros a  $B$ .

Como  $|\eta_0| \leq \epsilon$ ,  $f_2(\cdot) - \eta_0|_{\partial B}$  es homotópica a  $f_2(\cdot)|_{\partial B}$ , que a su vez es homotópica a  $f|_{\partial B}$ .

Se tiene entonces que por el teorema de extensión de Borsuk,  $f$  tiene una extensión continua.

#### A2.2 Teorema de Borsuk-Ulam generalizado.

Se presenta en lo que sigue la prueba del teorema:

##### A2.2.1 Teorema.

Sea  $\Omega$  una vecindad abierta y acotada del origen de  $\mathbb{C}^k$ , invariante bajo la siguiente acción de  $S^1$ : para cualquier  $u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{C}^k$ ,

$$T_\theta u = (e^{in_1\theta} u_1, \dots, e^{in_k\theta} u_k),$$

en donde  $\theta \in [0, 2\pi]$  y  $n_p \neq 0$  ( $p = 1, \dots, k$ ) son enteros dados.



Sea

$$f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{C}^h$$

$$f = (f_1, \dots, f_h)$$

una función continua y tal que para algunos enteros  $m_q \neq 0$ ,  $q = 1, \dots, h$ , se tenga:

$$f(T_\theta u) = (e^{im_1\theta} f_1(u), \dots, e^{im_h\theta} f_h(u)).$$

Entonces, si  $h < k$ , existe una  $u \in \partial\Omega$  para la cual  $f(u) = 0$ .

Prueba. Considérese

$$f : \Omega \subset \mathbb{C}^h \rightarrow \mathbb{C}^h$$

con las acciones para  $\mathbb{C}^h$  y  $\mathbb{C}^h$  mencionadas en el teorema y tal que  $f|_{\partial\Omega}$  es diferente de cero.

En particular se tiene que

$$f|_{\partial\Omega \cap \{u_{k+1}=0, \dots, u_k=0\}} \rightarrow \mathbb{C}^h - \{0\}.$$

Sea  $B = \{u \mid |u_j| \leq R\}$  y escójase  $R$  suficientemente grande para que  $\Omega \subset B$ ; defínase

$$\tilde{f} : B \rightarrow \mathbb{C}^h$$

un extensión continua y equivariante de  $f$  a  $B$  (ver lema 4.1.3).

Por otra parte, constrúyase (tal como en la prueba del lema 4.1.2) una vecindad invariante de  $\partial\Omega$ ,  $N_\delta$  tal que  $\tilde{f} \neq 0$  en  $N_\delta$ .

Finalmente, sea

$$\varphi : B \rightarrow [0, 1]$$

una función invariante y tal que

$$\varphi(u) = \begin{cases} 0, & \text{si } u \in \Omega \\ 1, & \text{si } u \in (\Omega \cup N_\delta)^c. \end{cases}$$

Dicha función puede ser, por ejemplo:

$$\varphi = \frac{d(u, \tilde{\Omega})}{d(u, \tilde{\Omega}) + d(u, (\tilde{\Omega} \cup N_\delta)^c)},$$

en donde  $d(\cdot)$  es la distancia en  $\mathbb{C}^h$ .

Entonces, sobre  $[0, 1] \times B$ , se considera la función

$$F(t, u) = (2(t + \varphi(u)) - 1, \tilde{f}(u)).$$

Como  $\tilde{f}(u) \neq 0$  en  $N_\delta$ , los ceros de  $F(t, u)$  se tienen ya sea para  $u \in \Omega$ , o bien para  $u \in (\Omega \cup N_\delta)^c$ .

En el primer caso,  $\varphi(u) = 0$ , lo cual implica que  $t = 1/2$  y además

$$f(u) = \tilde{f}(u).$$

En el segundo caso  $\varphi = 1$  y se tiene que  $2(t + \varphi(t)) - 1 \neq 0$ , por lo que  $F(t, u) \neq 0$  en  $\partial([0, 1] \times B)$ .

Si se define ahora

$$\mathbb{C}^k = \mathbb{C}^h,$$

con la acción

$$(z_1, \dots, z_k) \rightarrow (e^{i\theta} z_1, \dots, e^{i\theta} z_k),$$

y

$$\Theta : \mathbb{C}_*^k \rightarrow \mathbb{C}^k,$$

como

$$\Theta(z_1, \dots, z_k) = (z_1^{n_1}, \dots, z_k^{n_k}),$$

en donde para  $n_j$  negativo se toma  $z_j^{n_j}$  como  $\bar{z}_j^{|n_j|}$ .

Sobre  $I \times D$  con  $D = \{z \in \mathbb{C}^k \mid |z_j| \leq R_j \equiv R^{1/|n_j|}\}$ , sea

$$\begin{aligned} \bar{F}(t, z_1, \dots, z_k) &= (2(t + \varphi(\Theta(z_1, \dots, z_k))) - 1, \bar{f}(\Theta(z_1, \dots, z_k))) \\ &= (2(t + \varphi(z_1^{n_1}, \dots, z_k^{n_k})) - 1, \bar{f}(z_1^{n_1}, \dots, z_k^{n_k})). \end{aligned}$$

Por lo anteriormente expuesto, si se restringe a  $F$  a la frontera, no se tienen ceros; i.e.

$$\bar{F} : \partial(I \times D) \rightarrow \mathbb{C}^h - \{0\}.$$

Si  $h < k$ , entonces  $\bar{F} : \partial(I \times D) \cap \{z_{h+1} = 0, \dots, z_k = 0\} \rightarrow \mathbb{C}^h - \{0\}$  se puede deformar mediante la siguiente familia de funciones

$$\bar{F}_r(t, z_1, \dots, z_h, 0, \dots, rR_k)$$

en la función  $\bar{F}(t, z_1, \dots, 0, R_k)$ , y esta última función no tiene ceros en  $(I \times D) \cap \{z_{h+1} = 0, \dots, z_k = 0\}$ . Por el teorema A2.1.1, la función  $F|_{\partial(I \times D) \cap \{z_{h+1}=0, \dots, z_k=0\}}$  tiene una extensión sin ceros a todo  $(I \times D) \cap \{z_{h+1} = 0, \dots, z_k = 0\}$ .

Se prueba a continuación que esto implica una contradicción, por lo que la suposición original de que  $f|_{\partial\Omega} \neq 0$  no es válida.

Sean

$$H(t, z_1, \dots, z_h) \equiv \bar{F}(t, z_1, \dots, z_h, 0, \dots, 0),$$

$$D_h = \{z \in \mathbb{C}^h \mid |z_j| \leq R_j, j = 1, \dots, h\}$$

y

$$B_\epsilon = \{z \in \mathbb{C}^h \mid |z_j| \leq \epsilon_j \equiv \epsilon^{1/|n_j|}\},$$

en donde  $\epsilon$  se escoge suficientemente pequeña, de tal forma que la bola  $\{u \mid |u| \leq 2\epsilon\} \subset \Omega$  (recuérdese que  $0 \in \Omega$  y que  $\Omega$  es abierto).

Se puede usar entonces la deformación

$$(2(t + \varphi(z_1^{n_1}, \dots, z_h^{n_h})) - 1, (1 - r\psi)(z_1^{n_1}, \dots, z_h^{n_h})\bar{f}(z_1^{n_1}, \dots, z_h^{n_h}) + r\psi(z_1^{n_1}, \dots, z_h^{n_h})),$$

en donde  $\psi$  es una función invariante que vale 1 en  $B_\epsilon$  y 0 en el complemento de  $B_{2\epsilon}$ .

Si se evalúa sobre la frontera de  $I \times B$ , se tiene, que si  $u \in \partial B$ , entonces  $\varphi = 1$ , lo que implica que no se anula. Por otra parte, si  $t = 1$ , se tiene que  $2\varphi + 1 \neq 0$ , por lo que tampoco hay ceros. Finalmente, si  $t = 0$ , la función sólo se modifica en  $B_{2\epsilon}$ , en donde  $\varphi = 0$  y la primera componente tampoco se anula.

Es decir, que  $\bar{f}|_{B_\epsilon}$  es

$$(z_1^{n_1}, \dots, z_h^{n_h}).$$

Por otra parte, sean

$$\Omega_\epsilon = \Omega - \{u \mid |u| \leq \epsilon\}$$

y  $\varphi_i$  una función que se anula en  $\Omega_i$  y que vale 1 en  $B_{i/2}$  y fuera de  $N_i$ .

Si ahora se define

$$H_i(t, z_1, \dots, z_h) = (2(t + \varphi_i) - 1, \tilde{f}(z_1^{n_1}, \dots, z_h^{n_h}, 0, \dots, 0)),$$

donde  $\tilde{f}|_{B_i} = (z_1^{n_1}, \dots, z_h^{n_h})$ , es decir, que  $H_i \neq 0$  en  $\partial(I \times B)$ . De esto se sigue que  $H_i(t, 0, \dots, 0) = (2t + 1, 0, \dots, 0)$ .

Se construye entonces una extensión equivariante de  $H_i|_{\partial(I \times B) \cup (I \times \{0\})}$  a  $I \times B$  con la propiedad de que no tenga ceros, extendiendo primero a dicha función a los puntos de la forma  $(|z|, 0, \dots, 0)$ , después a  $(z, 0, \dots, 0)$ , a  $(z_1, |z_2|, \dots, 0)$ , etc.

Para  $z = (|z_1|, 0, \dots, 0)$ , el mapeo definido como

$$(2t + 1, 0),$$

si  $z_1 = 0$ , y como

$$(2(t + \varphi_i(|z_1|, 0, \dots, 0)) - 1, \tilde{f}(|z_1|, 0, \dots)),$$

para  $|z_1| = R$  o  $t = 0, 1$  es diferente de 0 y claramente continuo de  $\partial(I \times \{z | 0 \leq |z| \leq R\})$  en  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^h - \{0\}$ .

Obsérvese que  $\partial(I \times \{z | 0 \leq |z| \leq R\})$  es homeomorfo a  $S^1$ , y que  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^h - \{0\}$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^{2h+1} - \{0\}$ , es decir, a  $S^{2h}$ .

Como  $1 < 2h$ , este mapeo tiene siempre una extensión continua y que no se anula

$$G_1(t, |z_1|) = (g_0(t, |z_1|), g_1(t, |z_1|), \dots, g_h(t, |z_1|))$$

Se define para  $z_1 = e^{i\psi}|z_1|$  la función equivariante

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1(t, e^{i\psi}|z_1|) = \\ (g_0(t, |z_1|), e^{im_1\psi}g_1(t, |z_1|), \dots, e^{im_h\psi}g_h(t, |z_1|)) \end{aligned}$$

Para  $z_1 = 0$ ,  $\tilde{G}_1$  está bien definida, ya que  $G_1(t, 0) = (2t + 1, 0)$ . Si se reemplaza a  $z_1$  por  $e^{i\psi}z_1$ , entonces es inmediato comprobar que el mapeo es equivariante. Para  $|z_1| = R$ ,  $G_1(t, R) = H_i(t, R, 0, \dots, 0)$  y para  $t = 0, 1$  se tiene que  $G_1(t, |z_1|) = H_i(t, |z_1|, 0, \dots, 0)$ , con las mismas propiedades de equivarianza, es decir,  $\tilde{G}_1$  es una extensión de  $H_i$ .

Para  $z = (z_1, |z_2|, 0, \dots, 0)$ , el mapeo definido por

$$\begin{cases} \tilde{G}_1, & \text{si } z_2 = 0 \\ H_i, & \text{si } z_2 = R, \end{cases}$$

va de  $\partial(I \times \{z_1 \in \mathbb{C} | |z_1| \leq R, 0 \leq z_2 \leq R\})$  (homeomorfo a  $S^3$ ) a  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^h - \{0\}$  (homeomorfo a  $S^{2h}$ ), y tiene una extensión si  $h > 1$  (que efectivamente es el caso, pues  $z = (z_1, |z_2|)$ ). Denótese por  $G_2$  a esa extensión.

Para  $z = (z_1, e^{i\psi}|z_2|, 0, \dots, 0)$  se define a su vez

$$\tilde{G}_2(t, z_1, e^{i\psi}|z_2|) = (g_{02}(t, e^{-i\psi}z_1, |z_2|), e^{im_1\psi}g_{12}(t, e^{-i\psi}z_1, |z_2|), \dots, e^{im_h\psi}g_{h2}(t, e^{-i\psi}z_1, |z_2|)).$$

Para  $z_2 = 0$ ,

$$G_2(t, e^{-i\psi}z_1) = \tilde{G}_1(t, e^{-i\psi}z_1) = (g_{01}(t, |z_1|, e^{-im_1\psi}e^{im_1\psi}g_{11}, \dots, e^{-im_h\psi}e^{im_h\psi}g_{h1}(t, |z_1|)),$$

lo cual implica que  $\tilde{G}_2$  está bien definida.

88 Una generalización del teorema de Borsuk-Ulam.

Por otra parte,

$$\tilde{G}_2(t, e^{i\varphi} z_1, e^{i\psi} |z_2|) = (g_{02}(t, e^{-i\psi} z_1, |z_2|), e^{im_1(\varphi+\psi)} g_{12}(t, e^{-i\psi} z_1, |z_2|), \dots, e^{im_h(\varphi+\psi)} g_{h2}(t, e^{-i\psi} z_1, |z_2|)),$$

que es equivariante.

El proceso descrito anteriormente se sigue hasta que se defina, para  $z = (z_1, \dots, z_{h-1}, |z_h|)$ , la función  $\tilde{G}_{h-1}$  para  $z_h = 0$  y  $H_\epsilon$  para  $|z_h| = R$ , definida sobre  $\partial(I \times \{z \in \mathbb{C}^h \mid |z_1|, \dots, |z_{h-1}| \leq R, 0 \leq z_h \leq R\})$ , que es homeomorfo a  $S^{1+2h-2} = S^{2h-1}$  y con valores en  $S^h$ , por lo que se tiene entonces una extensión continua  $G_h = (g_{0h}, g_{1h}, \dots, g_{hh})$ , como antes.

Se construye ahora

$$H_\epsilon(t, z_1, \dots, z_{h-1}, e^{i\psi} |z_h|) = (g_{0h}(t, e^{-i\psi} z_1, \dots, e^{-i\psi} z_{h-1}, |z_h|), e^{im_1\psi} g_{1h}(t, e^{-i\psi} z_1, \dots, e^{-i\psi} z_{h-1}, |z_h|), \dots, e^{im_h\psi} g_{hh}(t, e^{-i\psi} z_1, \dots, e^{-i\psi} z_{h-1}, |z_h|))$$

que es equivariante y extiende al mapeo definido como  $H_\epsilon$  sobre  $\partial(I \times B)$  y como  $(2t+1, 0, \dots, 0)$  sobre  $I \times \{0\}$ .

Si se considera ahora el conjunto  $\partial(I \times (B - B_\epsilon))$ , y el mapeo definido en él  $(2(t + \varphi_\epsilon) - 1, \tilde{f}(z_1, \dots, z_h))$ , se ve que puede extenderse a todo el conjunto. En efecto, si

$$X(r, z_1, \dots, z_h) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z_j| > 2\epsilon_j, \forall r \in [0, 1], \\ 1 & \text{si } r = 1, z \in B_\epsilon, \\ 0 & \text{si } r = 0, z \in B_\epsilon, \end{cases}$$

entonces  $H_\epsilon(t, Xz_1, \dots, Xz_h)$  es una deformación de  $H_\epsilon$  sobre  $\partial(I \times B - B_\epsilon)$  a un mapeo que vale  $(2t+1, 0)$  para  $z \in \partial B_\epsilon$ , pues en ese caso se tiene

$$(2(t + \varphi_\epsilon(Xz)) - 1, X^{m_1} z_1^{m_1}, \dots, X^{m_h} z_h^{m_h}),$$

y si  $Xz = 0$ ,  $\varphi_\epsilon = 1$ . Entonces la función que se acaba de construir es una extensión para  $r = 1$ , y se tiene por lo tanto una extensión para  $r = 0$ .

Ahora bien, en  $I \times (B - B_\epsilon)$ ,  $\varphi_\epsilon = \varphi$ , lo cual implica que  $H$  tiene una extensión de  $\partial(I \times (B - B_\epsilon))$  a  $I \times (B - B_\epsilon)$ .

Finalmente,  $H|_{\partial(I \times B_\epsilon)}$  es deformable a  $H|_{\partial(I \times B)}$ , mediante  $rz + (1-r)Rz$ , usando para  $0 < t < 1$  la extensión que se obtuvo para  $\varphi$  con  $z \in \partial B_\epsilon$ .

Como  $H|_{\partial(I \times B)}$  tiene una extensión a  $I \times B$ , entonces  $H|_{\partial(I \times B_\epsilon)}$  tiene una extensión a  $I \times B_\epsilon$ , es decir

$$(2t - 1, z_1^{m_1}, \dots, z_h^{m_h})$$

tiene una extensión sin ceros a  $I \times B_\epsilon$ .

Esto es imposible, pues es un hecho conocido que el grado de Brower de este mapeo es diferente de cero (ver la nota siguiente), de hecho es  $\prod_i m_i$ , lo cual en particular implica que la función se anula al menos en algún punto.

Nota: Como  $H : \partial(I \times B) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{C}^h - \{0\}$ , entonces  $H$  tiene un grado de Brower.

Pero  $H = (2(t + \varphi) - 1, \tilde{f}) \neq 0$  para  $z$  en el complemento de  $\Theta^{-1}(\Omega)$ , por lo que

$$\begin{aligned} \text{grad}(H, I \times B) &= \text{grad}(H, I \times \Theta^{-1}(\Omega)) \\ &= \text{grad}(2t - 1, \tilde{f}(z_1^{n_1}, \dots, z_h^{n_h}), I \times \Theta^{-1}(\Omega)) \\ &= \text{grad}(\tilde{f}(z_1^{n_1}, \dots, z_h^{n_h}), \Theta^{-1}(\Omega)), \end{aligned}$$

ya que el grado de la función producto es el producto de los grados de cada una de las funciones componenetas.

De igual forma,  $grad(H_\epsilon, I \times B) = grad(\tilde{f}, \Theta^{-1}(\Omega - B_\epsilon))$ . Pero probamos que  $H_\epsilon|_{\partial(I \times (B - B_\epsilon))}$  tiene una extensión a  $I \times (B - B_\epsilon)$ , lo cual implica que  $grad(H_\epsilon, I \times B) = grad(H_\epsilon, I \times B_\epsilon) = 0$ , ya que  $H_\epsilon \neq 0$  en  $I \times B_\epsilon$ .

Se tiene entonces que  $grad(\tilde{f}, \Theta^{-1}(\Omega - B_\epsilon)) = 0$ , y de esto último se concluye que

$$grad(\tilde{f}, \Theta^{-1}(\Omega)) = grad(\tilde{f}, B_\epsilon) = grad(z_1^{m_1}, \dots, z_h^{m_h}, B_\epsilon) = \prod_i m_i,$$

y si  $h < k$ , entonces  $grad(\tilde{f}, \Theta^{-1}(\Omega)) = 0$ .

También,  $(z_1, \dots, z_h) \rightarrow (z_1^{n_1}, \dots, z_h^{n_h})$  es un mapeo de grado  $\prod_i n_i$ , lo cual implica que

$$f(u_1, \dots, u_h) : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{C}^h - \{0\}$$

tiene grado (por el teorema de composición)  $\prod m_i / \prod n_i$ .

En este apéndice se prueba el lema de deformación presentado en el capítulo 4. Se introduce primero la noción de un campo vectorial pseudogradiante y se prueba que todo funcional continuamente diferenciable posee uno de dichos campos.

Posteriormente se prueba el lema de deformación para funcionales continuamente diferenciables, usando el flujo de la ecuación diferencial determinada por el campo vectorial pseudogradiante antes mencionado.

### A3.1 Campos vectoriales pseudogradientes.

Como antes, sea  $E$  un espacio de Banach real (por ejemplo  $L^p$  o un subespacio de éste),  $U \subset E$  y  $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R})$ .

Se dice que  $v \in E$  es un vector pseudogradiante para  $\Phi$  en  $u \in U$  si

$$\begin{cases} i) |v|_E \leq 2|\Phi'(u)|_E. \\ ii) (\Phi'(u), v) \geq |\Phi'(u)|_E^2. \end{cases} \quad (A3.1.1)$$

Nótese que, en general, un vector pseudogradiante (p.g.) no es único, y que una combinación convexa de vectores p.g. para  $\Phi$  en  $u$ , es también un vector p.g. Si  $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ , entonces se denota como

$$\tilde{E} = \{u \in E \mid \Phi'(u) \neq 0\}.$$

Se define a  $v(x)$  como un campo vectorial pseudogradiante sobre  $\tilde{E}$ , si  $v$  es localmente Lipschitz continua y  $v(x)$  es un vector p.g. para toda  $x \in \tilde{E}$ .

#### A3.1.1 Lema.

Si  $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ , entonces existe un campo vectorial pseudogradiante para  $\Phi$  sobre  $\tilde{E}$ . En particular, si  $\Phi$  es tal que su derivada  $\Phi'$  define un mapeo localmente Lipschitz, entonces existe un campo vectorial pseudogradiante para  $\Phi$  sobre  $\tilde{E}$ .

*Prueba.* Sea  $u \in \tilde{E}$  y  $w \in E$  con  $|w|_E = 1$  y tal que

$$(\Phi'(u), w) > \frac{2}{3}|\Phi'(u)|_E.$$

Entonces

$$z = \frac{3}{2}|\Phi'(u)|_E \cdot w \quad (A3.1.2)$$

es un campo vectorial pseudogradiiente para  $\Phi$  en  $u$ , pues

$$|z|_E = \frac{3}{2} |\Phi'|_{E^*} < 2 |\Phi'|_{E^*},$$

y por otra parte

$$\begin{aligned} (\Phi', z) &\geq \frac{3}{2} |\Phi'|_{E^*} (\Phi', w) \\ &> |\Phi'|_{E^*}^2. \end{aligned}$$

Por la continuidad de  $\Phi'$  en el caso en que  $\Phi$  es continuamente diferenciable, o simplemente por la Lipschitz continuidad de la misma función en el segundo caso, se tiene que  $z$  es un vector p.g. para  $\Phi$  para toda  $x$  en cierta vecindad abierta y acotada  $N_u$  de  $u$ . El conjunto de todas estas vecindades cubre  $\tilde{E}$ . Por lo tanto, existe un refinamiento localmente finito  $\{N_{u_i}\}$ . Sea  $\rho_i(x)$  la distancia de  $x$  al complemento de  $N_{u_i}$ .

Entonces,  $\rho_i$  es Lipschitz continua, por ser  $N_{u_i}$  acotada, y claramente se anula en el complemento de esa vecindad. Defínase entonces

$$\beta_i(x) = \frac{\rho_i(x)}{\sum_r \rho_r(x)}.$$

Puesto que  $\{N_{u_i}\}$  es una cubierta localmente finita, para cada  $x \in \tilde{E}$  el denominador en la definición de  $\beta_i(x)$  se reduce a una suma finita. Finalmente, sea  $v(x) = \sum_i z_i \beta_i(x)$ , donde  $z_i$  está dada por (A3.1.2) para  $u = u_i$  para cada  $x \in \tilde{E}$ ,  $v$  es una combinación convexa de vectores p.g. y por lo tanto es también un vector p.g. Además  $v$  es localmente Lipschitz continua. Esto completa la prueba.

### A3.2 Condiciones Palais-Smale y prueba del lema.

Recuérdese que para  $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ , se dice que  $u$  es un punto crítico de  $\Phi$  si  $\Phi'(u) = 0$  y  $c$  es un valor crítico de  $\Phi$ , si  $\Phi^{-1}(c)$  contiene un punto crítico.

Se definen asimismo los siguientes conjuntos

$$A_c = \{x \in E \mid \Phi(x) \leq c\},$$

$$K_c = \{x \in E \mid \Phi(x) = c, \Phi'(x) = 0\};$$

i.e.  $K_c$  es el conjunto de puntos críticos con valor crítico  $c$ .

Como ya se definió anteriormente, se dice que un funcional  $\Phi$  satisface las condiciones de Palais-Smale (P.S), si cualquier sucesión  $\{u_n\}$  para la cual

- i.  $\|\Phi(u_n)\|_E$  esté acotada y
- ii.  $\|\Phi'(u_n)\|_{E^*} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$

posee una subsucesión convergente en  $E$ .

**Nota.**

En el trabajo se usaron dos versiones distintas de las condiciones de P.S.: las arriba mencionadas para el caso estrictamente convexo (ver proposición 6.1.1), y una versión ligeramente diferente en la que se modificó la condición (ii) como sigue: ii'.  $\|\Phi'(u)\|_{E^*} \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$  y en donde  $\Phi$  se tomó no necesariamente de clase  $C^1$ , sino tal que su derivada determinaba un mapeo globalmente Lipschitz.

Es decir, en las primeras condiciones se pide convergencia en el dual  $E^*$  para un funcional de clase  $C^1$ , mientras que para las segundas condiciones se pide, por una parte algo menos fuerte, que es convergencia en el espacio original (recuérdese que en el caso estudiado  $E \subset E^*$ )

92 Lema de deformación.

y por otra se pide más regularidad, es decir se considera un funcional tal que su derivada determina un mapeo globalmente Lipschitz.

La prueba del lema de deformación expuesta a continuación se desarrolla usando las primeras condiciones P.S. y se indican como notas a pie de página las modificaciones necesarias para el otro caso.

Se tiene entonces el lema de deformación:

A3.2.1 Lema.

Sea  $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$  o bien tal que su derivada define un mapeo localmente Lipschitz continuo, y que satisface las condiciones de P.S. Si  $c \in \mathbb{R}$  y  $N$  es cualquier vecindad de  $K_c$ , entonces existe  $\eta(t, x) \equiv \eta_t(x) \in C([0, 1] \times E, E)$  y ciertas constantes  $\varepsilon > \epsilon > 0$  tales que

- i  $\eta_0(x) = x$ , para toda  $x \in E$ .
- ii  $\eta_t(x) = x$ , para toda  $x \notin \Phi^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  y para toda  $t \in [0, 1]$ .
- iii  $\eta_t(x)$  es un homeomorfismo de  $E$  sobre  $E$  para todo  $t \in [0, 1]$ .
- iv  $\Phi(\eta_t(x)) \leq \Phi(x)$  para toda  $x \in E$  y  $t \in [0, 1]$
- v  $\eta_1(A_{c+\varepsilon} - N) \subset A_{c-\varepsilon}$ .
- vi Si  $K_c = \emptyset$ , entonces  $\eta_1(A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$ .

*Prueba.* Supóngase primero que  $K_c \neq \emptyset$ , pues el otro caso se sigue inmediatamente de éste. Por las condiciones de P.S., el conjunto  $K_c$  es compacto, ya que todo conjunto infinito numerable admite un punto de acumulación, a saber el límite de la subsucesión convergente cuya existencia garantizan dichas condiciones \*.

Por lo tanto, de las propiedades fundamentales de los conjuntos compactos en espacios métricos, para  $\delta > 0$  suficientemente pequeña,  $M_\delta \equiv \text{int } N_\delta(K_c) \subset N$ . Es decir, que basta probar  $\nu$  reemplazando a  $N$  por  $M_\delta$ .

Por otra parte, para cierta  $\delta$  fija, existen constantes  $b, \epsilon > 0$ , tales que

$$|\Phi'(x)|_{E^*} \geq b \quad \text{para } x \in A_{c+\varepsilon} - A_{c-\varepsilon} - M_\delta, \quad (A3.2.1)$$

pues en caso contrario existirían sucesiones  $b_n \rightarrow 0$  y  $\epsilon_n \rightarrow 0$ , y  $x_n \in A_{c+\epsilon_n} - A_{c-\epsilon_n} - M_\delta$ , con

$$|\Phi'(x_n)|_{E^*} < b_n.$$

Por las condiciones de P.S., una subsucesión de  $x_n$  convergería a cierta  $x \in K_c$  con la propiedad de que

$$\Phi(x) = c, \quad \Phi'(x) = 0, \quad (A3.2.2)$$

y tal que  $x \notin M_\delta$ . Pero por otra parte, la condición (A3.2.2) implica que  $x \in K_c \subset M_\delta$ , lo que contradice lo anterior \*\*.

Puesto que (A3.2.1) sigue siendo válida si  $\varepsilon$  es reemplazada por un número menor, puede suponerse que

$$0 < \varepsilon < \min\left(\frac{b\delta}{2}, \frac{b^2}{8}, \frac{1}{8}\right).$$

Sea  $\epsilon \in (0, \varepsilon)$ , y

$$A = \{x \in E \mid \Phi(x) \geq c + \varepsilon \text{ ó } \Phi(x) \leq c - \varepsilon\},$$

$$B = \{x \in E \mid c - \epsilon \leq \Phi(x) \leq c + \epsilon\}.$$

Se tiene que  $A \cap B = \emptyset$ . Definase

$$g(x) = \frac{|x - A|_E}{|x - A|_E + |x - B|_E}.$$

\* La afirmación anterior es válida para ambos tipos de condiciones, pues  $E \subset E^*$

\*\* El argumento anterior no cambia, basta tomar  $|\cdot|_E$  en lugar de  $|\cdot|_{E^*}$ .



Entonces  $g$  es Lipschitz continua, con  $g(x) = 0$  si  $x \in A$ ,  $g(x) = 0$  si  $x \in B$  y  $0 \leq g(x) \leq 1$ . De manera similar, existe una función Lipschitz continua  $\bar{g}$  con  $\bar{g} = 1$  en  $E - M_\epsilon$ ,  $\bar{g} = 0$  en  $M_\epsilon$  y  $0 \leq \bar{g}(x) \leq 1$ .

Defínase

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } s \in [0, 1]; \\ 1/s, & \text{si } s \geq 1. \end{cases}$$

De tal forma que también  $h$  es un mapeo Lipschitz continuo. Puesto que  $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ , o bien su derivada determina un mapeo localmente Lipschitz, por el lema A3.1.1 existe un campo vectorial p.g.  $v$  para  $\Phi$  en  $\bar{E}$ .

Finalmente, defínase

$$V(x) = -g(x)\bar{g}(x)h(|v(x)|)v(x).$$

Por las observaciones anteriores, el campo  $V(x)$  es localmente Lipschitz continuo en  $E$  y satisface

$$0 \leq |V(x)| \leq 1.$$

Si se considera la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d\eta}{dt} = V(\eta), \quad \eta(0, x) = x \quad \text{para } x \in E, \tag{A3.2.3}$$

el teorema básico de existencia para dichas ecuaciones garantiza que para toda  $x \in E$  hay una solución única  $\eta(t, x)$  de (A3.2.3) para  $t \in (t^-(x), t^+(x))$ , siendo este último intervalo maximal.

Puesto que  $V(x)$  es acotada,  $t^\pm = \pm\infty$ , para toda  $x \in E$ , ya que de otra forma, si e.g.  $t^+ < \infty$ , sea  $t_n \rightarrow t^+(x)$ . Integrando entonces (A3.2.3) resulta:

$$|\eta(t_{n+1}, x) - \eta(t_n, x)| = \left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} V(\eta(t, x)) dt \right| \leq |t_{n+1} - t_n|.$$

Esto implica que  $\eta(t_n, x)$  es una sucesión de Cauchy, que converge a cierta  $x$  conforme  $t_n \rightarrow t^+(x)$ . Pero entonces la solución de la ecuación (A3.2.3) con condición inicial  $x$  proporciona una continuación de  $\eta(t, x)$ , lo cual contradice la maximalidad de  $t^+(x)$ .

Se sigue entonces que en particular  $\eta_t(x) \in C([0, 1], \times E, E)$  y que satisface la condición i. Por otra parte, puesto que  $g = 0$  en  $A$ ; i.e. puesto que todas las  $x$  son puntos de equilibrio para la ecuación si  $x \in A$ , entonces ii se deduce inmediatamente.

La propiedad de semigrupo de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias implica que la propiedad iii se cumple, es decir, que  $\eta_t$  define un homeomorfismo de  $E$  en  $E$  para toda  $t \in [0, 1]$

Para verificar iv, nótese primero que el resultado es trivial cuando  $\eta_t(x) = x$ . Si  $\eta_t(x) \neq x$ , entonces  $v(\eta_t(x))$  está definida y

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi(\eta_t(x)) &= (\Phi'(\eta_t(x)), \frac{d}{dt} \eta_t(x)) \\ &= (\Phi'(\eta_t(x)), -g(\eta_t(x))\bar{g}(\eta_t(x))h(|v(\eta_t(x))|)v(\eta_t(x))) \\ &= -g(\eta_t(x))\bar{g}(\eta_t(x))h(|v(\eta_t(x))|) (\Phi'(\eta_t(x), v(\eta_t(x))) \leq 0, \end{aligned} \tag{A3.2.4}$$

ya que  $v(x)$  es un campo vectorial p.g. y de la forma en que se definió a  $g$ ,  $\bar{g}$  y  $h$  (de hecho, la desigualdad anterior es estricta).

Finalmente, para mostrar v, es necesario probar que

$$\eta_1(A_{c+\epsilon} - M_\delta) \subset A_{c-\epsilon}. \tag{A3.2.5}$$

94 Lema de deformación.

Puesto que por iv,  $\Phi(\eta_t(x)) \leq c - \epsilon$  para  $x \in A_{c-\epsilon}$ , es necesario verificar la relación (A3.2.5) únicamente para  $x \in Y \equiv A_{c+\epsilon} - M_\delta$ .

Poniendo

$$a_x(t) = \Phi(\eta_t(x)),$$

lo anterior equivale a mostrar que  $a_x(1) \leq c - \epsilon$ , para  $x \in Y$ . Por (A3.2.4),  $da_x(t)/dt \leq 0$ . Puesto que  $g \equiv 0$  en  $A_{c-\epsilon}$ , la órbita  $\eta_t(x)$  no puede entrar en  $A_{c-\epsilon}$ , por lo que integrando la ecuación se tiene

$$0 \leq a_x(0) - a_x(t) \leq 2\epsilon.$$

Si  $x \in Y$  y  $\eta_s(x) \in Z \equiv A_{c+\epsilon} - A_{c-\epsilon} - M_\frac{1}{2}$ , para  $s \in [0, t]$  (lo cual claramente sucede si  $t$  es suficientemente pequeña), entonces, por (A3.2.1),  $\eta_t(x) \in \tilde{E}$  y  $g(\eta_s(x)) = \beta(\eta_s(x)) = 1$  para  $s \in [0, t]$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} 2\epsilon &\geq \int_0^t h(|v(\eta_s(t))|) (\Phi'(\eta_s(x)), v(\eta_s(x))) ds \\ &\geq \int_0^t h(|v(\eta_s(t))|) |\Phi'(\eta_s(x))|^2 ds \\ &\geq b \int_0^t h(|v(\eta_s(t))|) |\Phi'(\eta_s(x))| ds \\ &\geq \frac{b}{2} \int_0^t h(|v(\eta_s(t))|) |v(\eta_s(x))| ds \\ &\geq \frac{b}{2} \left| \int_0^t h(|v(\eta_s(x))|) v(\eta_s(x)) ds \right| \\ &= \frac{b}{2} \left| \int_0^t V(\eta_s(x)) ds \right| \\ &= \frac{b}{2} |\eta_t(x) - x|. \end{aligned} \tag{A3.2.6}$$

se tiene entonces, de la desigualdad anterior (A3.2.6) y de la forma en que se escogió  $\epsilon$  que

$$|\eta_t(x) - x| < \frac{\delta}{8}.$$

En particular, la órbita  $\eta_t(x)$  no puede entrar en  $M_\frac{1}{2}$  y por lo tanto, sólo puede salir de  $Z$  entrando en  $A_{c-\epsilon}$ . Para mostrar que esto efectivamente sucede para  $t \in (0, 1)$ , supóngase que  $\eta_t(x) \in Z$  para toda  $t \in [0, 1]$ . De la relación (A3.2.4) se tiene

$$\frac{da_x(t)}{dt} \leq -h(|v(\eta_t(x))|) |\Phi'(\eta_t(x))|^2.$$

Si para alguna  $t$ ,  $|v(\eta_t(x))| \leq 1$ , entonces  $h(|v(\eta_t(x))|) = 1$  y de la relación anterior para  $da_x(t)/dt$  y la expresión (A3.2.1)

$$\frac{da_x(t)}{dt} \leq -\frac{|\Phi'(\eta_t(x))|^2}{|v(\eta_t(x))|} \leq -\frac{|v(\eta_t(x))|}{4} \leq -\frac{1}{4}. \tag{A3.2.7}$$

Combinando las dos desigualdades anteriores resulta

$$\frac{da_x}{dt} \leq \min(b^2, \frac{1}{4}),$$

de donde

$$\min(b^2, \frac{1}{4}) \leq a_x(0) - a_x(1) \leq 2\varepsilon,$$

lo cual contradice la forma en que se había escogido  $\varepsilon$ .

Por último, resta probar que  $\eta_r(x)$  puede tomarse como equivariante. Para ello es necesario recordar que si  $\Phi$  es invariante, entonces  $\Phi'$  es equivariante. En efecto, como

$$(\Phi'(u), v) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\Phi(u + \theta v) - \Phi(u)}{|\theta|},$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(T_\theta u + v) - \Phi(T_\theta u)}{|v|} &= \frac{\Phi(T_\theta(u + T_\theta^{-1}v)) - \Phi(T_\theta u)}{|T_\theta^{-1}v|} \\ &= \frac{\Phi(u + T_\theta^{-1}v) - \Phi(u)}{|T_\theta^{-1}v|}, \end{aligned}$$

ya que  $|T_\theta v| = |v|$  y  $\Phi$  es invariante. En el límite:

$$(\Phi'(T_\theta u), v) = (\Phi'(u), T_\theta^{-1}v) = (T_\theta \Phi'(u), v),$$

puesto que la dualidad preserva la isometría (otra manera de ver esto es definir la acción de  $S^1$  sobre  $E^*$  por  $(T_\theta v, u) \equiv (v, T_\theta^{-1}u)$ ).

Por lo tanto, todos los conjuntos de la forma  $\Phi^{-1}(a, b)$ ,  $\Phi^{-1}(0)$  son invariantes.

Ahora bien, si  $v(x)$  es un campo pseudogradiente para  $\Phi$  sobre  $\tilde{E}$ , considérese

$$\tilde{v}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T^{-1}v(T_\theta x) d\theta,$$

que es, como se vio en el lema 4.1.3, un campo equivariante. Para ver que sigue siendo un campo pseudogradiente, obsérvese que

$$\begin{aligned} |\tilde{v}(x)|_E &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |v(T_\theta x)|_E d\theta \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi'(T_\theta x)|_{E^*} d\theta \\ &\leq 2|\Phi'(x)|_{E^*}, \end{aligned}$$

ya que  $\Phi'$  es equivariante y  $T_\theta$  es una isometría.

Además

$$\begin{aligned} (\Phi'(x), \tilde{v}(x)) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Phi'(x), T_\theta^{-1}v(T_\theta x)) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Phi'(T_\theta x), v(T_\theta x)) d\theta \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi'(T_\theta x)|_{E^*}^2 d\theta \\ &\geq |\Phi'(x)|_{E^*}^2, \end{aligned}$$

en donde se usó de nuevo la equivarianza e invarianza de estas funciones.

96 Lema de deformación.

En la prueba del lema, basta entonces notar que los conjuntos  $N$ ,  $K_x$ ,  $M_\delta$ ,  $A$  y  $B$  son invariantes. Por lo tanto, la función  $\varrho(x)$  es invariante (está definida en términos de distancias, que son invariantes) y el campo  $V(x)$  es equivariante. Para verificar que  $\eta_t$  es equivariante, es suficiente notar que

$$\frac{d\eta_t}{dt}(T_\theta x) = V(\eta_t(T_\theta x)), \quad \eta_0(T_\theta x) = T_\theta x.$$

y que

$$\frac{d}{dt}(T_\theta \eta_t(x)) = T_\theta V(\eta_t(x)) = V(T_\theta \eta_t(x)),$$

es decir, que  $\eta_t(T_\theta x)$  y  $T_\theta \eta_t(x)$  son soluciones a la ecuación (A3.2.3), con la misma condición inicial; i.e.

$$\eta_t(T_\theta x) = T_\theta(\eta_t(x)).$$

El resto de la prueba es el mismo.

## A4.1 El operador $F$ .

En este apéndice se prueba un importante teorema de Krasnosel'skii que garantiza la continuidad de cierto operador definido de  $L^a(\Omega)$  a  $L^b(\Omega)$ . En el trabajo se consideró el caso de funciones definidas en algún subconjunto  $\Omega$  abierto y acotado de  $\mathbb{R}^m$  y que tomaban valores en  $\mathbb{R}^n$ . Sin embargo, la prueba que se da a continuación es únicamente para el caso de funciones que toman valores reales, la extensión al caso general es inmediata.

Se dice que una función  $F(s, u)$  de dos variables  $-\infty < u < \infty$  y  $s \in \Omega$  satisface las condiciones de Carathéodory, si es continua con respecto a  $u$  para casi toda  $s$  y medible con respecto a  $s$  para todos los valores de  $u$ . En el caso de interés, como ya se dijo,  $\Omega$  representa un conjunto de medida finita en un espacio euclídeo. Abusando de la notación, se designa por  $F$  al operador definido sobre todas las funciones reales de  $\Omega$  mediante la relación

$$F(u(s)) = F(s, u(s)).$$

Este operador desempeña un papel importante en el estudio de una clase muy amplia de ecuaciones integrales no lineales y resulta que la continuidad y acotación de  $F$  se desprenden únicamente del hecho de que actúa de  $L^a$  a  $L^b$ . Para probar lo anterior, es necesario el siguiente lema.

## A4.2 Convergencia en medida.

**A4.2.1 Lema.** *Sea  $\Omega$  un conjunto de medida finita. Entonces el operador  $F$  transforma a toda sucesión de funciones que convergen en medida*

$$u_1(s), u_2(s), \dots, \quad s \in \Omega, \tag{A4.2.1}$$

*en una sucesión de funciones que también converge en medida.*

*Prueba.* Supóngase que la sucesión (A4.2.1) converge en medida a  $u_0(s)$ . Se denota por  $\Omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) al conjunto de todas las  $s \in \Omega$  para las cuales la desigualdad

$$|u_0(s) - u(s)| < \frac{1}{k}$$

implica que

$$|F(s, u_0(s)) - F(s, u(s))| < \epsilon,$$

98 Un teorema de Krasnosel'skii.

en donde  $\epsilon$  es un número positivo arbitrario. Evidentemente,  $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \dots$ . Se tiene entonces que la continuidad de  $F(s, u)$  con respecto a  $u$  para casi toda  $s \in \Omega$ , implica que

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k\right) = m(\Omega),$$

de donde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m(\Omega_k) = m(\Omega). \quad (A4.2.2)$$

Supóngase que se tienen dos números positivos arbitrarios  $\eta$  y  $\epsilon$ . Se escoge entonces  $k_0$  tal que

$$m(\Omega_{k_0}) > m(\Omega) - \frac{\eta}{2};$$

esto es posible en virtud de (A4.2.2). Se denota entonces por  $F_n$  al conjunto de puntos  $s \in \Omega$ , para los cuales

$$|u_0(s) - u_n(s)| < \frac{1}{k_0}.$$

Tómese  $N$  de tal forma que, para toda  $n > N$ ,

$$m(F_n) > m(\Omega) - \frac{\eta}{2}.$$

Considerando la sucesión de funciones

$$F(u_1)(s) = F(s, u_1(s)), \quad F(u_2)(s) = F(s, u_2(s)) \dots$$

y denotando por  $D_n$  al conjunto de puntos  $s \in \Omega$  tales que

$$|F(s, u_0(s)) - F(s, u_n(s))| < \epsilon,$$

se sigue que

$$\Omega_{k_0} \cap F_n \subset D_n,$$

de donde

$$m(D_n) > m(\Omega) - \eta.$$

Puesto que  $\eta$  y  $\epsilon$  son arbitrarios, la última desigualdad prueba el lema.

#### A4.3 Continuidad del operador $F$ .

Se tiene entonces el siguiente resultado:

##### A4.3 Teorema.

Supóngase que el operador  $F$  transforma toda función de  $L^\alpha$  en una función de  $L^\beta$ , ( $\alpha, \beta \geq 1$ ). Entonces el operador  $F$  es continuo.

*Prueba.* Primero considérese el caso en el que  $F(0) = 0$ . Se mostrará que el operador  $F$  es continuo en el 0 del espacio  $L^\alpha$ . Si este no es el caso, entonces existe una sucesión de funciones

$$\phi_n(s) \in L^\alpha, \quad n = 1, 2, \dots$$

que convergen fuertemente hacia 0 y tales que

$$\int_{\Omega} |F(\phi_n(s))|^\beta ds > \alpha, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (A4.3.1)$$

en donde  $a$  es un número positivo. Supóngase que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} |\phi_n(s)|^a ds < \infty, \quad (\text{A4.3.2})$$

lo cual no resta generalidad, pues como  $|\phi_n|_{L^a} \rightarrow 0$ , siempre es posible encontrar una subsecución que cumpla lo anterior.

Se construye una sucesión de números  $\epsilon_k$ , así como una sucesión de funciones  $\phi_{n_k}(s)$  y de conjuntos  $\Omega_k \subset \Omega$ , que satisfacen las siguientes condiciones:

- (a)  $\epsilon_{k+1} < \frac{1}{2} \epsilon_k$ ,
- (b)  $m(\Omega_k) \leq \epsilon_k$ ,
- (c)  $\int_{\Omega_k} |F(\phi_{n_k})(s)|^p ds > \frac{2}{3} a$  y
- (d) para cualquier subconjunto  $D \subset \Omega$ , tal que  $m(D) \leq 2\epsilon_{k+1}$ , implica que

$$\int_D |F(\phi_{n_k})(s)|^p ds < \frac{a}{3}.$$

Este proceso se efectúa de manera inductiva como sigue:

Sea  $\epsilon_1 = m(\Omega)$ ,  $\phi_{n_1}(s) = \phi_1(s)$ ,  $\Omega_1 = \Omega$ .

Si  $\epsilon_k$ ,  $\phi_{n_k}$  y  $\Omega_k$  ya han sido construidas, entonces se selecciona un número  $\epsilon_{k+1}$ , tal que la condición (d) se cumpla, lo cual es posible por la convergencia absoluta de la integral

$$\int_{\Omega} |F(\phi_{n_k})(s)|^p ds.$$

La condición (a) es satisfecha automáticamente, puesto que la función  $\phi_{n_k}(s)$  satisface la condición (c), si se tuviera  $\epsilon_k \leq 2\epsilon_{k+1}$ , para ese número ya seleccionado, entonces  $m(\Omega_k) \leq \epsilon_k \leq 2\epsilon_{k+1}$ , y se podría tomar en (d) a  $\Omega_k$  como posible conjunto  $D$ , lo cual contradice la condición (c).

Por el lema A4.2.1, es posible encontrar un número  $n_{k+1}$  y un conjunto  $F_{k+1} \subset \Omega$  tales que, cuando  $s \in F_{k+1}$ ,

$$|F(\phi_{n_{k+1}})(s)| < \left( \frac{a}{3m(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (\text{A4.3.3})$$

con

$$m(\Omega) - m(F_{k+1}) < \epsilon_{k+1}. \quad (\text{A4.3.4})$$

Sea  $\Omega_{k+1} = \Omega - F_{k+1}$ . Entonces (A4.3.4) implica que la condición (b) es satisfecha para  $\Omega_{k+1}$ . Que la condición (c) también se cumple se sigue de (A4.3.1) y de (A4.3.3), pues

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{k+1}} |F(\phi_{n_{k+1}})(s)|^p ds \\ &= \int_{\Omega} |F(\phi_{n_{k+1}})(s)|^p ds - \int_{F_{k+1}} |F(\phi_{n_{k+1}})(s)|^p ds > \frac{2}{3} a. \end{aligned}$$

Considérense ahora los conjuntos ajenos

$$D_k = \Omega_k - \bigcup_{i=k+1}^{\infty} \Omega_i, \quad k = 1, 2, \dots$$

De las condiciones (a) y (b) se desprende que

$$m\left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} \Omega_i\right) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \epsilon_i < 2\epsilon_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (A4.3.5)$$

Se define a la función  $\phi(s)$  mediante la ecuación

$$\phi(s) = \begin{cases} \phi_{n_k}(s), & \text{si } s \in D_k (k = 1, 2, \dots); \\ 0, & \text{si } s \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i. \end{cases} \quad (A4.3.7)$$

De las condiciones (c) y (d) y de (A4.3.5), se sigue que

$$\begin{aligned} & \int_{D_k} |F(\phi)(s)|^\rho ds = \int_{D_k} |F(\phi_{n_k})|^\rho ds \\ & \geq \int_{\Omega_k} |F(\phi_{n_k})|^\rho ds - \int_{\Omega_k - \bigcup_{i=k+1}^{\infty} \Omega_i} |F(\phi_{n_k})|^\rho ds \geq \frac{\alpha}{3}. \end{aligned} \quad (A4.3.7)$$

Por (A4.3.2)  $\phi \in L^\alpha$  y, de acuerdo a la condición enunciada en el teorema,  $F(\phi) \in L^\beta$ . Por otra parte, por (A4.3.7)  $F(\phi) \notin L^\beta$ , puesto que  $D_i \cup D_j = \emptyset$ , cuando  $i \neq j$ , y se sigue que

$$\int_{\Omega} |F(\phi)(s)|^\rho ds \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{D_k} |F(\phi)(s)|^\rho ds = \infty.$$

Esta contradicción muestra que efectivamente el operador  $F$  es continuo en 0 (bajo la suposición de que  $F(0) = 0$ ).

Regresando al caso general, es posible probar ahora la continuidad de  $F$  en cualquier punto  $u_0$  de  $L^\alpha$ . Para ello considérese la función

$$G(s, u) = F(s, u_0(s) + u) - F(s, u_0(s)), \quad s \in G, \quad -\infty < u < \infty.$$

El operador  $G$  correspondiente a la definición anterior, satisface la condición  $G(0) = 0$  y de lo que se ha probado se desprende que  $G$  es continuo en el punto 0. Pero entonces en forma inmediata se concluye que esto implica la continuidad de  $F$  en  $u_0 \in L^\alpha$ . ■

Nota: el teorema anterior es cierto aún si no se impone la restricción  $m(\Omega) < \infty$ , sin embargo no se dará la demostración (ver [Kr]pp.20-25).



El objeto de este apéndice es probar una desigualdad que fue utilizada en el capítulo 7 durante la demostración del resultado general, concerniente a los subgradientes de una función.

Se tiene entonces la siguiente proposición por demostrar:

**A5.1 Teorema.** *Sea  $\underline{G}$  como se definió en el capítulo 1. Si  $\xi_1 \in \partial_E \underline{G}(v_1)$  y  $\xi_2 \in \partial_E \underline{G}(v_2)$ , entonces*

$$(\xi_1(t) - \xi_2(t)) \cdot (v_1(t) - v_2(t)) \geq 0 \quad \text{a.e.}$$

*Prueba.* Nótese primero que la afirmación anterior es una consecuencia de lo siguiente:

Si  $u \in E$  y  $\xi \in \partial_E \underline{G}(u)$ , entonces para cualquier  $w \in L^\alpha([0, 2\pi], \mathbb{R}^{2N})$ :

$$G(w(t)) - G(u(t)) \geq (w(t) - u(t)) \cdot \xi(t) \quad \text{a.e.} \tag{A5.1}$$

De hecho, para  $\xi_1 \in \partial_E \underline{G}(v_1)$ , si se toma  $w = v_2$  en la condición anterior, se tiene:

(1)  $G(v_2(t)) - G(v_1(t)) \geq (v_2(t) - v_1(t)) \cdot \xi_1(t)$  a.e., y similarmente para  $\xi_2 \in \partial_E \underline{G}(v_2)$ , tomando  $w = v_1$ , se sigue:

$$G(v_1(t)) - G(v_2(t)) \geq (v_1(t) - v_2(t)) \cdot \xi_2(t) \quad \text{a.e.}$$

Sumando las dos desigualdades así obtenidas se encuentra:

$$-(v_1(t) - v_2(t)) \cdot (\xi_1(t) - \xi_2(t)) \leq 0.$$

De tal forma que el problema se reduce a mostrar la desigualdad (A5.1).

Procediendo por contradicción, supóngase que existe una  $w \in L^\alpha([0, 2\pi], \mathbb{R}^{2N})$ , tal que, para alguna  $\gamma > 0$  el conjunto:

$$\Omega = \{t | G(w(t)) - G(u(t)) < (w(t) - u(t)) \cdot \xi(t) - \gamma\},$$

tenga medida positiva.

Además, puesto que el mapeo

$$L^\alpha([0, 2\pi], \mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \rightarrow \int_0^{2\pi} G(u(t)) dt,$$

102 Una desigualdad entre subgradientes.

es continuo (recuérdese que  $G$  mismo se toma continuo), existe un  $\delta > 0$ , tal que para cualquier  $c \in \mathbb{R}^{2N}$  y  $|c| < \delta$ , se tiene:

$$\left| \int_0^{2\pi} |G(u(t) + c) - G(u(t))| dt \right| \leq \frac{\gamma}{4}.$$

Sea  $A$  un subconjunto medible de  $\Omega$  con medida positiva y tal que para

$$c = -\frac{1}{2\pi} \int_A (w(t) - u(t)) dt$$

se tenga  $|c| < \delta$  y

$$\int_A |G(u(t) + c) - G(u(t))| dt \leq \frac{\gamma}{4},$$

$$\int_A |G(w(t) + c) - G(w(t))| dt \leq \frac{\gamma}{2}.$$

Lo anterior es posible por la continuidad de la integral, para ello basta tomar  $A \subset \Omega$  con medida positiva pequeña. Por otra parte, defínase

$$\tilde{w}(t) = w(t)\chi_A + u(t)\chi_{A^c} + c,$$

en donde  $A^c = [0, 2\pi] - A$  y  $\chi_A$  es la función característica de  $A$ . Se tiene entonces que

$$\tilde{w} \in L^{\infty}([0, 2\pi], \mathbb{R}^{2N});$$

y puesto que  $u \in E$ , resulta:

$$\begin{aligned} \int_{A^c} u(t) dt &= \int_{[0, 2\pi] - A} u(t) dt \\ &= \int_{[0, 2\pi]} u(t) dt - \int_A u(t) dt \\ &= - \int_A u(t) dt \end{aligned}$$

Es decir, que

$$\int_0^{2\pi} \tilde{w}(t) dt = 0,$$

i.e.  $\tilde{w}(t) \in E$ . Además, si se efectúa el siguiente cálculo, se tiene por una parte que

$$\begin{aligned} \underline{G}(\tilde{w}) - \underline{G}(u) &= \int_0^{2\pi} (G(\tilde{w}(t)) - G(u(t))) dt \\ &= \int_A |G(\tilde{w}(t) - G(u(t)))| dt + \int_{A^c} |G(\tilde{w}(t)) - G(u(t))| dt \\ &= \int_A |G(w(t) + c) - G(w(t))| dt + \int_A |G(w(t)) - G(u(t))| dt \\ &\quad + \int_{A^c} |G(u(t) + c) - G(u(t))| dt; \end{aligned}$$

y por otra parte

$$\begin{aligned} & \int_{A^c} [G(u(t) + c) - G(u(t))] dt \\ &= \int_0^{2\pi} [G(u(t) + c) - G(u(t))] dt - \int_A [G(u(t) + c) - G(u(t))] dt \\ &\leq \frac{7}{4} + \frac{7}{4} = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \underline{G}(\tilde{w}) - \underline{G}(u) &\leq \frac{7}{2} + \int_A [G(w(t)) - G(u(t))] dt + \frac{7}{2} \\ &< \int_A (w(t) - u(t)) \cdot \xi(t) dt \\ &= \int_A (w(t) + c - u(t)) \cdot \xi(t) + \int_{A^c} (u(t) + c - u(t)) \cdot \xi(t), \end{aligned}$$

ya que  $\int_0^{2\pi} \xi(t) dt = 0$ , es decir

$$\underline{G}(\tilde{w}) - \underline{G}(u) < \int_0^{2\pi} (\tilde{w}(t) - u(t)) \cdot \xi(t) dt,$$

lo cual contradice el hecho de que  $\xi \in \partial_E \underline{G}(u)$ .

---

## Referencias.

---

- [AM] Ambrosetti, A. y Mancini G. (1982): *On a Theorem by Ekeland and Lasry Concerning the Number of Periodic Hamiltonian Trajectories*, J. Diff. Eq. 43, pp. 249-256.
- [Ar] Arnold, V.I. (1978): *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York, pp. 55-68.
- [Be] Benci, V. (1981): *A Geometrical Index for the Group  $S^1$  and some Applications to the Study of Periodic Solutions of Ordinary Differential Equations*, Comm. Pure Appl. Math., pp. 393.
- [Bg] Berger, M. S. (1977): *Nonlinearity and Functional Analysis*, Academic Press, New York, pp. 3-21, 70-71.
- [Br1] Brezis, H. (1983): *Periodic Solutions of Nonlinear Vibrating Strings and Duality Principles*, Bulletin of the Am. Math. Soc., pp. 409.
- [Br2] Brezis, H. (1983): *Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones*, Editorial Alianza, Madrid.
- [CH] Courant, R. y Hilbert, D. (1937): *Methoden der Mathematischen Physik*, Julius Springer Verlag, pp. 138-233.
- Chow, S. y Hale, J. (1982): *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York, pp. 140-142
- [Cl] Clarke, F. (1980): *Hamiltonian Trajectories having Prescribed Minimal Period*, Comm. Pure Appl. Math., pp. 103-116.
- [EL] Ekeland, I. y Lasry, J. M. (1980): *On the Number of Periodic Trajectories for Hamiltonian Flow on a Convex Energy Surface*, Annals of Math. 112, pp. 283-316.
- [EH] Ekeland, I. y Hofer, H.: *Periodic Solutions with Prescribed Minimal Period for Convex Autonomous Hamiltonian Systems*, preprint GREMADE, n.8421, Paris.
- [ET] Ekeland, I. y Temam, R. (1976): *Convex Analysis and Variational Problems*, North Holland Publishing Company, New York, pp. 1-33.
- [GP] Guillemin, V. y Pollack, A. (1974): *Differential Topology*, Prentice Hall, New Jersey.

- [GM] Giradi, M. y Matzeu, M.: *Periodic Solutions of Convex Autonomous Hamiltonian Systems with Quadratic Growth at the Origin and Superquadratic Growth at Infinity*, por publicarse.
- [KF] Kolmogorov, A. N. y Fomín, (1975): *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, Mir, Moscú.
- [Kr] Krasnosel'skii, M. A. (1964): *Nonlinear Integral Equations*, The MacMillan Company, pp. 20-25.
- [Mu] Murillo, R. (1984): *El Teorema del Paso de la Montaña, Resultados Análogos y Aplicaciones*, Tesis de Licenciatura, UNAM.
- [MW] Mawhin, J. y Willem, M. (1987): *Existence and Multiplicity for Semilinear Equations by the Duality Method and its Applications*, Mathematical and Physical Sciences, Vol 173.
- [Ni1] Nirenberg, L. (1981): *Nonlinear Problems*, Le Matematiche, Vol. XXXVI, Fasc. I.
- [Ni2] Nirenberg, L. (1974): *Topics in Nonlinear Analysis*, Lecture Notes, Courant Institute, New York, pp. 21.
- [Pe] Peano, A. R. (1925): *Dimension Theory of General Spaces*, Cambridge University Press, pp. 123.
- [Ra1] Rabinowitz, P. H. (1974): *Variational Methods for Nonlinear Eigenvalue Problems*, G. Prodi Editor, Edizioni Cremonese, Roma.
- [Ra2] Rabinowitz, P. H. (1978): *Periodic Solutions of Hamiltonian Systems*, Comm. Pure Appl. Math., 31, pp. 157-184.
- [Re] Rectorys, K. (1980): *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*, D. Reidel Publishing Co.
- [Ro] Rockafellar, R. T. (1970): *Convex Analysis*, Princeton University Press.
- [SR] Simon, M. y Reed, R. (1972): *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I Functional Analysis*, Academic Press, New York, pp, 75.
- [Ta] Tarantello, G. (1986): *Some Results on the Minimal Period Problem for Nonlinear Vibrating Strings and Hamiltonian Systems; and on the Number of Solutions for Semilinear Elliptic Equations*, Tesis doctoral, Courant Institute, NYU.
- [To] Toland, J. F. (1987): *An Index for Hamiltonian Systems with a Natural Order Structure*, Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Mathematical and Physical Sciences, Vol. 173.