11

2ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

AVANCES EN UNA CONJETURA DE MULTICOHERENCIA

T E S I S

Que para obtener el Título de:
LICENCIADO EN MATEMATICAS

p r e s e n t a

DAVID RADAMES GOMEZ PACHECO

México, D. F. 1988

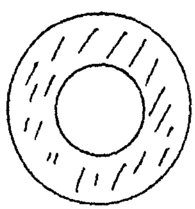
INDICE

INTRODUCCION

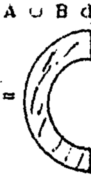
Uno de los problemas fundamentales de la Topología de conjuntos es el de poder decidir cuándo dos espacios (topológicos) son diferentes. Propiedades tales como conexidad, compacidad, separabilidad, etc. pueden servir para este fin. Algo que en particular es sumamente útil para tal objetivo es el de poder decir si un espacio tiene agujeros, cuántos tiene, de qué tipo son etc.

Una forma muy sencilla de definir que un espacio tenga agujeros es la siguiente: Decimos que un espacio conexo está agujerado si no se puede poner como la unión de dos subconjuntos cerrados conexos cuya intersección es disconexa. A los espacios que no tienen agujeros les llamaremos espacios unicoherentes.

El ejemplo típico de un espacio que no es unicoherente es un anillo como:

X = 

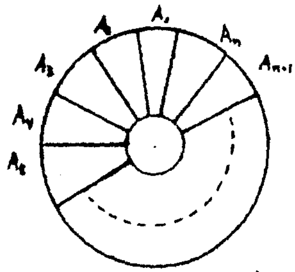
Que se puede poner como $A \cup B$ donde

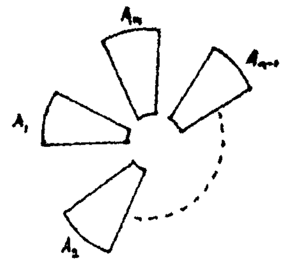
A =  y B = 

con $A \cap B$ =

que claramente no es conexo.

Una propiedad agradable que tiene este espacio X es que, para cualquer numero natural n, X se puede poner como la unión de una cadena circular de n pedazos conexos y cerrados en la que cada eslabón sólo intersecta a su sucesor y a su antecesor.

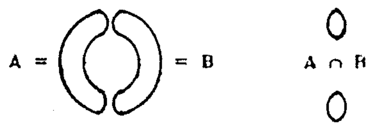




Este trabajo está dedicado a describir los pasos que se han dado para responder la siguiente pregunta: Para qué espacios agujerados es posible encontrar cadenas de este tipo con n eslabones ?.

Obsérvese que cuando X se puede poner como la unión de n+1 eslabones, entonces, fundiendo dos eslabones en uno solo, X se puede poner como la unión de n eslabones. Es muy fácil encontrar espacios agujerados (ver ejemplo) que no se pueden poner como la unión de tres eslabones (para el caso de tres eslabones y sólo para éste se tiene que pedir que la intersección de los tres sea vacía pues de lo contrario el problema no tiene sentido) por ejemplo, sin pedirle lo anterior, cualquier espacio X se puede poner como la unión de tres eslabones donde cada uno de ellos es igual a X mismo, y por la observación anterior X no se puede poner como una cadena de ningún tamaño. El problema con estos ejemplos es que no son localmente conexos por lo que vamos a pedir que nuestros espacios sean localmente conexos. También pediremos que nuestros espacios sean T_1 y normales. Estas propiedades de separación se utilizan todo el tiempo pero no se sabe si son indespensables.

Ahora supongamos que X es agujerado. entonces existen subconjuntos cerrados conexos A y B cuya unión es X y su intersección no es conexa.

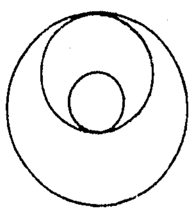


Un primer intento para poner a X como la unión de cuatro eslabones,

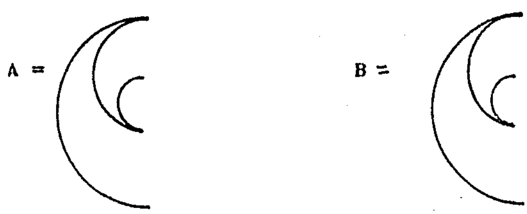
sería partir a A y B en dos pedazos:

El siguiente es un ejemplo de que no siempre se pueden partir A y B en esta forma.

X =



Este ejemplo simple ilustra a grosso modo el tipo de dificultades que surgen al trabajar los problemas que son atacados en esta tesis.



A continuación describiremos el contenido de los capítulos de este trabajo. Para abreviar, denotaremos por P(n) la siguiente afirmación: X agujerado implica que se puede poner como la unión de una cadena circular con n eslabones.

Capítulo I. Definimos los conjuntos más importantes usados en este trabajo y también probamos algunas propiedades preliminares de carácter general.

Capítulo II. Mostramos que P(3) no es cierto para espacios que no son localmente conexos y vemos que para los espacios que vamos a considerar en este trabajo (conexos, localmente conexos, T_1 y normales), si es cierto.

Capítulo III. Mostramos que si X tiene la propiedad de que cada vez que X se pueda poner como la unión de dos cerrados conexos A y B se tiene que $A \cap B$ tiene nada más un número finito de componentes, entonces P(n) es verdadera para toda $n \geq 3$.

Capítulo IV. Demostraremos que si X es compacto entonces P(6) (y por tanto P(3), P(4) y P(5)) es cierta .

Capítulo V. Construiremos un ejemplo de un espacio para el que P(5) es falsa.

Capítulo VI. Probamos que P(4) es verdadera.

Capítulo VII. Mostramos un ejemplo de un espacio compacto para el cual P(7) es falsa.

CAPITULO I

Definiciones Importantes

Todo el tiempo X denotará, a menos que se indique otra cosa, un espacio topológico conexo, localmente conexo, normal y T_1. Un *continuo* de X es un subconjunto cerrado y conexo de X (no necesariamente compacto). Una *región* de X es un subconjunto abierto y conexo de X. Un mapeo es una función continua.

Si A es cualquier espacio topológico, definimos $b_0(A)$ = (numero de componentes de A) − 1, si este numero es finito, en caso contrario, $b_0(A) = \infty$. También definimos $\mathcal{C}(A) = \{ E \mid E$ es componente (conexa) de A $\}$.

El grado de multicoherencia, $r(X)$, de X se define por:
$r(X) = \sup \{ b_0(H \cap K) \mid H$ y K son continuos de X y $X = A \cup B \}$. En el caso de que $r(X) = 0$ decimos que X es unicoherente, de lo contrario X es multicoherente. X es finitamente multicoherente si $0 < r(X) < \infty$. Finalmente, si $0 < r(X) \leq \infty$, pero $b_0(H \cap K) < \infty$ para cualesquiera continuos H y K de X tales que $X = H \cup K$, decimos que X es débil-finitamente multicoherente. La existencia de espacios débil-finitamente multicoherentes para los que $r(X)= \infty$ es mostrada por A. H. Stone en [8].

Denotaremos al conjunto de números naturales por $\mathbf{N}$. Si $n \in \mathbf{N}$, definimos $\bar{n} = \{ 1, 2, \ldots, n \}$. Si k y r son enteros $k \oplus_n r$ representa el elemento de $\bar{n}$ que es congruente a $k + r$ (de manera similar se define para la diferencia). Por comodidad sólo escribiremos $k \oplus r$ (resp $k \ominus r$) si se entiende de que n estamos hablando.

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset X$ decimos que la secuencia (A_1, A_2, A_n) es una cadena circular si no hay tres A_i's que tengan puntos en común y, y $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ si y sólo si $i = j \oplus 1$ o $j = i \oplus 1$. (o equivalentemente $| i - j |_n = 1$, lo cual significa: el valor absoluto de la diferencia en módulo "n").

Denotaremos por $P(n)$ con $n \geq 3$ la siguiente proposición: $P(n)$ = Existen $A_1, A_2, \ldots A_n$ continuos de X tales que $X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ y $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ es una cadena circular.

Como dijimos antes, el objetivo de este trabajo es analizar los avances en la pregunta Qué debe cumplir un espacio multicoherente para que P(n) sea cierta ?.

Resultados Preliminares

Para las tres primeras proposiciones de esta sección la única hipótesis que se necesita de X es que sea un espacio conexo.

1.- Proposición. Sea $\emptyset \neq A \subset X$ y $n \geq 0$, entonces $b_0(A) \geq n$ si y sólo si existen subconjuntos no vacíos y mutuamente separados $A_1, A_2, \ldots A_{n+1}$ de X tales que $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n+1}$.

Demostración. Supongamos primero que $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n+1}$ con $A_1 \ldots A_{n+1}$ no vacíos y mutuamente separados. elegimos puntos $p_1 \in A_1, \ldots p_{n+1} \in A_{n+1}$. Para cada $i \in \overline{n+1}$ sea D_i la componente de A que tiene a p_i. Como A_i y $(\cup \{ A_j \mid j \in \overline{n+1}-\{i\} \})$ son conjuntos separados cuya unión contiene al conexo D_i, tenemos que D_i debe estar contenido en alguno de los dos, y como intersecta a A_i, tenemos que $D_i \subset A_i$. Esto implica que $D_i \neq D_j$ si de que n estamos hablando.

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset X$ decimos que la secuencia (A_1, A_2, A_n) es una cadena circular si no hay tres A_i's que tengan puntos en común y, y $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ si y sólo si $i = j \oplus 1$ o $j = i \oplus 1$. (o equivalentemente $|i - j|_n = 1$, lo cual significa: el valor absoluto de la diferencia en módulo "n").

Denotaremos por $P(n)$ con $n \geq 3$ la siguiente proposición: $P(n)$ = Existen $A_1, A_2, \ldots A_n$ continuos de X tales que $X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ y ($A_1, A_2, \ldots A_n$) es una cadena circular.

Como dijimos antes, el objetivo de este trabajo es analizar los avances en la pregunta Qué debe cumplir un espacio multicoherente para que $P(n)$ sea cierta ?.

Resultados Preliminares

Para las tres primeras proposiciones de esta sección la única hipótesis que se necesita de X es que sea un espacio conexo.

1.- Proposición. Sea $\emptyset \neq A \subset X$ y $n \geq 0$, entonces $bo(A) \geq n$ si y sólo si existen subconjuntos no vacíos y mutuamente separados $A_1, A_2, \ldots A_{n+1}$ de X tales que $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n+1}$.

Demostración. Supongamos primero que $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n+1}$ con $A_1 \ldots A_{n+1}$ no vacíos y mutuamente separados. elegimos puntos $p_1 \in A_1, \ldots p_{n+1} \in A_{n+1}$. Para cada $i \in \overline{n+1}$ sea D_i la componente de A que tiene a p_i. Como A_i y $(\cup \{ A_j \mid j \in \overline{n+1} - \{i\} \})$ son conjuntos separados cuya unión contiene al conexo D_i, tenemos que D_i debe estar contenido en alguno de los dos, y como intersecta a A_i, tenemos que $D_i \subset A_i$. Esto implica que $D_i \neq D_j$ si

$i \neq j$, así que A tiene al menos $n + 1$ componentes. Por lo tanto $b_0(A) \geq n$.

Ahora supongamos que $b_0(A) \geq n$. A una colección finita $A_1, \ldots A_m$ de conjuntos no vacíos y separados dos a dos tales que $A = A_1 \cup \ldots \cup A_m$ le llamaremos una m - separación de A. Si $m > 1$ y $A_1, \ldots A_m$ es una m - separación de A, entonces $A_1, \ldots A_{m-2}, (A_{m-1} \cup A_m)$ es una $(m - 1)$ - separación de A. Queremos probar que existe una $(n + 1)$ - separación de A, supongamos que esto no ocurre, por la observación que hicimos arriba, entonces no existe m - separación de A para ninguna $m \geq n + 1$.

Sea $m_0 = \max\{ m \in \mathbb{N} \mid$ existe una m-separación de $A \}$ como $A = A_1$ es una 1-separación de A, tenemos que m_0 efectivamente existe. Ademas $1 \leq m_0 < n + 1$. Sea $A_1, \ldots, A_{m_0}$ una m_0-separación de A. Si $i \in \overline{m_0}$ y A_i es conexo entonces, como $A = A_i \cup (\cup \{ A_j \mid j \in \overline{m_0} - \{ i \} \})$ y estos conjuntos estan separados, tenemos que A_i es una componente de A. Entonces si cada A_i fuera conexo, tendríamos que las componentes de A serían $A_1, \ldots, A_{m_0}$ y entonces $b_0(A) = m_0 - 1 < n$. Esta contradicción muestra que algun A_i no es conexo. Supongamos, sin pérdida de generalidad que A_{m_0} no es conexo. Entonces existen subconjuntos no vacíos y separados H y K de X tales que $A_{m_0} = H \cup K$. De modo que $A_1, \ldots, A_{m_0-1}, H, K$ es una $(m_0 + 1)$-separación de A. Esto contradice la elección de m_0 y termina la prueba de la proposición.

2.- Proposición. Si A es un subconjunto conexo de X y H, K son subconjuntos separados de X tales que $X - A = H \cup K$, entonces $A \cup H$ y $A \cup K$ son conexos.

Demostración. Supongamos por ejemplo, que $A \cup H$ no es conexo. Sean E y F subconjuntos no vacíos y separados de X tales que $A \cup H = E \cup F$. Como A es conexo, $A \subset E$ o $A \subset F$. Supongamos que $A \subset E$. Entonces $X = A \cup H \cup K = E \cup F \cup K$. Además $F \subset H$ y esto implica que $E \cup K$ y F son conjuntos no vacíos y separados cuya unión es X. Esto contradice la conexidad de X y prueba la proposición

3.- Proposición Si A es un subconjunto conexo de X y D es una componente de $X - A$ entonces $X - D$ es conexo.

Demostración. Supongamos que $X - D$ no es conexo, entonces $X - D = H \cup K$ donde H y K son no vacíos y separados. Como $A \subset H \cup K$ y A es conexo, entonces $A \subset H$ o $A \subset K$. Supongamos, por ejemplo, que $A \subset H$. Por la proposición 2, $D \cup K$ es conexo, además $D \cup K \subset X - A$ y como D es componente de $X - A$, tenemos que $D \cup K = D$. Esto implica que $K = \emptyset$. Este absurdo prueba la proposición

4.- Proposición. Si A es una componente de B entonces se tiene que $\mathrm{Fr}A \subset \mathrm{Fr}B$.

Demostración. Sea $x \in \mathrm{Fr}\, A$, supongamos que $x \notin \mathrm{Fr}\, B$. Ya que $x \in \mathrm{Fr}\, A \subset \bar{A} \subset \bar{B} = \mathrm{Fr}\, B \cup \mathrm{Int}\, B$, entonces $x \in \mathrm{Int}\, B$ y como X es localmente conexo, existe una región U de X tal que $x \in U \subset \mathrm{Int}\, B$. Como $x \in \mathrm{Fr}\, A$, $U \cap (X - A) \neq \emptyset$ y $U \cap A \neq \emptyset$, así que $A \cup U$ es un subconjunto conexo de B. Pero A es componente de B, de aquí que $A \cup U = A$ y entonces $U \cap (X - A) = \emptyset$. Esta contradicción termina la prueba.

5.- Proposición. Sea $\{ A\alpha \mid \alpha \in J \}$ una familia de subconjuntos de X, entonces $\mathrm{Fr}\,(\cup \{ A\alpha \mid \alpha \in J \}) \subset \overline{(\cup \{ \mathrm{Fr}(A\alpha) \mid \alpha \in J \})}$.

Demostración. Supongamos que existe un punto $x \in Fr(\cup \{ A\alpha \mid \alpha \in J \})$ tal que $x \notin (\cup \{ Fr(A\alpha) \mid \alpha \in J \})^{-}$, entonces existe una region U de X tal que $x \in U$ y $U \cap (\cup \{ Fr(A\alpha) \mid \alpha \in J \}) = \emptyset$. Como $x \in Fr(\cup \{ A\alpha \mid \alpha \in J \})$ tenemos que $U \cap A_\beta \neq \emptyset$ para alguna $\beta \in J$ y $U \cap (X - (\cup \{ A\alpha \mid \alpha \in J \})) \neq \emptyset$, en particular $U \cap (X - A_\beta) \neq \emptyset$. De manera que U es un conjunto conexo que intersecta a A_β y a $X - A_\beta$. Esto implica que $U \cap Fr\, A_\beta \neq \emptyset$. Esto contradice la elección de U y concluye la prueba.

6.- Proposición. Sean A, B subconjuntos cerrados ajenos y no vacíos de X y sea N un subconjunto conexo de X tal que $A \cap N \neq \emptyset$ y $B \cap N \neq \phi$. entonces existe $D \in \mathcal{C}(X - (A \cup B))$ tal que $D^{-} \cap A \neq \emptyset$ $D^{-} \cap B \neq \phi$ y $D \cap N \neq \emptyset$

Demostración. Dada $D \in \mathcal{C}(X - (A \cup B))$, por la proposición 4 $FrD \subset Fr(X - (A \cup B)) = Fr(A \cup B) \subset A \cup B$, así que $FrD \subset A \cup B$. Supongamos que nuestra proposición es falsa, entonces $FrD \subset A$ o $FrB \subset B$ o $D \cap N = \emptyset$ para toda $D \in \mathcal{C}(X - (A \cup B))$.

Sean $H = \cup \{ D \in \mathcal{C}(X - (A \cup B)) \mid Fr\, D \subset A \}$ y sea $K = \cup \{ D \in \mathcal{C}(X - (A \cup B)) \mid Fr\, D \subset B \}$. Si $H \cap K \cap N \neq \emptyset$ entonces existe $D \in \mathcal{C}(X - (A \cup B))$ tal que $FrD \subset A$, $FrD \subset B$ y $D \cap N \neq \emptyset$. Como estamos suponiendo que la proposición es falsa, FrD tendría que ser vacía, pero X es conexo y $D \neq \emptyset$ esto implica que $D = X$ y entonces $A \cup B = 0$ lo cual contradice la hipótesis de que A y B son no vacíos. De modo que $H \cap K \cap N = \emptyset$. Ademas H y K son abiertos porque X es localmente conexo, así que H y K están separados. Notemos que $N - (A \cup B) \subset H \cup K$.

Sean $P = A \cup H$ y $Q = B \cup K$. Entonces $N \subset P \cup Q$, $N \cap P$ y $N \cap Q$ son no vacíos por hipótesis.

Por la proposición 5, $FrP = Fr(A \cup H) \subset (FrA \cup FrH^{-})$ =

$\mathrm{Fr}A \cup \mathrm{Fr}B \subset \cup\ \mathrm{Fr}(\cup \{ D \in \mathcal{C}(X-(A \cup B)) \mid \mathrm{Fr}D \subset A \}) \subset A \cup (\cup \{ \mathrm{Fr}\, D \mid D \in \mathcal{C}(X-(A \cup B)) \text{ y } \mathrm{Fr}\, D \subset \overline{A} \} \subset A \cup \overline{A} \subset = A \subset P$ así que $\mathrm{Fr}P \subset P$ y entonces P es cerrado. Similarmente, Q es cerrado. Claramente $P \cap Q \cap N = \emptyset$. Hemos obtenido entonces una separación de N. Esta contradicción prueba la proposición

7. Proposición. Sea D una región de X y sean $x,y \in D$ entonces existe una región U de X tal que tal que $x,y \in U \subset \overline{U} \subset D$.

Demostración. Dada $p \in D$, como X es regular y T_1, existe V_p abierto tal que $p \in V_p \subset \overline{V_p} \subset D$. Elegimos una región U_p de X tal que $p \in U_p \subset V_p$. Consideremos la cubierta abierta $\mathcal{U} = \{ U_p \mid p \in D \}$ de D. Ya que D es conexo, por [11], tenemos que x,y, se pueden conectar por una cadena simple de elementos de $\mathcal{U}$, es decir existen $n \in \mathbb{N}$ y $p_1, \ldots, p_n \in D$, tales que $U_{p_1} \cap U_{p_2} \neq \emptyset, \ldots, U_{p_{n-1}} \cap U_{p_n} \neq \emptyset$, $x \in U_{p_1}$ y $y \in U_{p_n}$. Definimos $U = U_{p_1} \cup \ldots \cup U_{p_n}$. Entonces U es una región de X que cumple lo que queriamos.

Esta proposición puede generilizarse a :

8. Proposición. Sean D una región de X y K un subconjunto compacto de D, entonces existe una región U de X tal que $K \subset U \subset \overline{U} \subset D$.

Demostración. Elegimos un punto $p_0 \in K$ (si $K = \emptyset$, hacemos $U = \emptyset$). Por la proposición 7 por cada punto $p \in K$, podemos elegir una región U_p de X tal que $p_0, p \in U_p \subset \overline{U_p} \subset D$. Entonces $\{ U_p \mid p \in K \}$ es una cubierta abierta de K por lo que existen $n \in \mathbb{N}$ y $p_1, \ldots, p_n \in K$ tales que $K \subset U_{p_1} \cup \ \cup U_{p_n}$. Como $p_0 \in U_{p_1} \cap \ \cap U_{p_n}$ tenemos que $U = U_{p_1} \cup \ldots \cup U_{p_n}$ es una región de X con las propiedades requeridas.

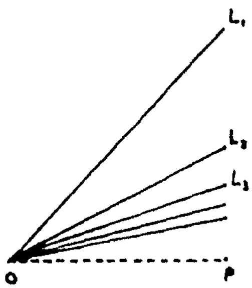
CAPITULO II

En este capítulo mostraremos un ejemplo de un espacio conexo, métrico que no es localmente conexo únicamente en un punto y multicoherente en el que no vale P(3). Tambien mostraremos que si X es multicoherente (además de las hipótesis que estamos suponiendo para él) entonces P(3) es cierta.

1. Un Ejemplo.

Consideremos el siguiente subespacio Y del plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$:

Y =



$= (\cup \{ L_n \mid n \in \mathbb{N} \}) \cup \{ p \}$ donde L_n es el segmento en $\mathbb{R}^2$ que une a $0 = (0,0)$ con $(1,\frac{1}{n})$ y $p = (1,0)$

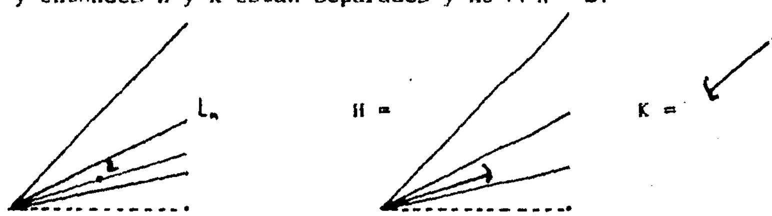
Y es conexo porque cada L_n es conexo, todos tienen un punto en común y $p \in \overline{(\cup \{ L_n \mid n \in \mathbb{N} \})}$. Y claramente es métrico (lo estamos tomando como subespacio de $\mathbb{R}^2$).

Hacemos $A = (\cup \{ L_{2n} \mid n \in \mathbb{N} \}) \cup \{ p \}$ y $B = (\cup \{ L_{2n-1} \mid n \in \mathbb{N} \}) \cup \{ p \}$. Claramente A y B son subespacios cerrados conexos de Y tales que $Y = A \cup B$. Ademas $A \cap B = \{ 0, p \}$ y entonces $A \cap B$ no es conexo. Esto prueba que Y es multicoherente.

Ahora supongamos que P(3) es verdadera para Y, entonces existen A_1, A_2, A_3 continuos de Y tales que $Y = A_1 \cup A_2 \cup A_3$,

$A_1 \cap A_2$, $A_2 \cap A_3$, $A_3 \cap A_1$ son no vacíos y $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$. En particular, no es posible que " 0 " este en los tres A_i's. Supongamos por ejemplo, que $0 \notin A_3$. Como A_3 es conexo, entonces $A_3 = \{ p \}$ o $A_3 \subset L_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. No es posible que $A_3 = \{ p \}$ porque de lo contrario, como $A_1 \cap A_3 \neq \emptyset \neq A_2 \cap A_3$, tendríamos que $p \in A_1 \cap A_2 \cap A_3$ que sería un absurdo. Por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A_3 \subset L_n$. Como L_n es un segmento y A_3 es cerrado en X, entonces A_3 es cerrado y conexo en L_n y por tanto A_3 debe ser un segmento (no puede ser un punto por la misma razón de que no podía ser $\{ p \}$). Supongamos que A_3 es el segmento que une a los puntos "a" y "b" donde "a" está más cerca que "b" de "0".

Como $a \notin A_1 \cap A_2 \cap A_3$, $a \notin A_1$ o $a \notin A_2$. Supongamos que $a \notin A_2$. Notemos que $X - \{ a \} = H \cup K$ donde H y K son como en el dibujo y entonces H y K están separados y $A_3 \cap H = \emptyset$.



Ya que $A_2 \subset H \cup K$, tenemos que $A_2 \subset H$ o $A_2 \subset K$. Si $A_2 \subset H$ entonces $A_2 \cap A_3 = \emptyset$ que es absurdo, de manera que $A_2 \subset K$ y por tanto A_2 debe ser otro segmento. Supongamos que $A_2 = \widehat{cd}$ donde "c" está más cerca que "d" del origen. Entonces $c \in \widehat{ab} = A_3$, porque de lo contrario A_2 no intersecta a A_3 y $c \in A_1$ pues de otra manera A_1 quedaría en la misma componente de $X - \{ c \}$ que contiene al "o" y no podría intersectar a A_2. Hemos obtenido que $c \in A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Esta contradicción termina la prueba de que $P(3)$ no se cumple para Y.

2. X es multicoherente si y sólo si vale $P(3)$ para X.

Teorema 1.- X es multicoherente si y sólo si vale $P(3)$.

Demostración. Supongamos primero que X es multicoherente. Sean A, B, H y K cerrados no vacíos de X tales que $A \cap B = \emptyset$, H y K son conexos y $X = H \cup K$. Sean U_0 y V_0 dos conjuntos abiertos de X tales que $A \subset U_0$, $B \subset V_0$ y $\bar{U_0} \cap \bar{V_0} = \emptyset$. Hacemos $V = \cup \{ E \in \mathcal{C}(V_0) \mid E \cap B \neq \emptyset \}$. Como X es localmente conexo, tenemos que V es abierto. Además $B \subset V$ y $V^- \cap U^- = \emptyset$.

Elegimos una componente W de U_0 tal que $W \cap A \neq \emptyset$. Hacemos $A_1 = W^-$ y $A_2 = A - A_1$. Dada $x \in A - W$, existe W_1 componente de U_0 tal que $x \in W_1$ y $W \neq W_1$, asi que W_1 es una vecindad de x ajena a W y entonces $x \in A - W^-$. De manera que $A_2 = A - W$. Entonces A_1 y A_2 son dos subconjuntos cerrados ajenos de X. De modo que existe un subconjunto abierto U_2 de X tal que $A_2 \subset U_2$ y $\bar{U_2} \cap W^- = \emptyset$. Sea $U = \cup \{ E \in \mathcal{C}(U_2) \mid E \cap A_2 \neq \emptyset \}$. Entonces U es abierto, $A_2 \subset U$ y $U^- \cap W^- = \emptyset$.

Hacemos $Z = H \cup W \cup U \cup V$. Entonces Z es conexo. Elegimos un punto $b \in B$, entonces $b \in W^-$, así que existe una componente D de $Z - W$ tal que $b \in D$.

Sea $Y = H \cup W \cup D$, entonces Y es conexo, $Y \subset Z$ y $D \subset W$. Aseguramos que D es una componente de $Y - W$. Para probar esto supongamos que D_1 es la componente de $Y - W$ tal que $D \subset D_1$. Como $D_1 \subset Y - W \subset Z - W$ y D es componente de $Z - W$, tenemos que $D_1 \subset D$. Por tanto D es componente de $Y - W$. Esto implica (Proposición 3) que $Y - D$ es conexo

Definimos $B_1 = K$, $B_2 = (Y - D)^-$ y $B_3 = D^-$. Entonces B_1, B_2 y B_3 son subconjuntos cerrados y conexos de X. Como $X = H \cup K \subset$

$Y \cup K \subset (Y - D) \cup D \cup K \subset B_1 \cup B_2 \cup B_3$ tenemos que $X = B_1 \cup B_2 \cup B_3$. Ya que $\emptyset \neq A \cap W \subset B_1 \cap (Y - D) \subset B_1 \cap B_2$, tenemos que $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Dado que $b \in D \cap K \subset B_3 \cap B_1$, tenemos que $B_1 \cap B_3 \neq \emptyset$. Como D es un subconjunto propio y no vacío del espacio conexo Y, tenemos que $\emptyset \neq Fr_Y(D) = D^{-Y} \cap (Y - D)^{-Y} \subset D^- \cap (Y - D)^- = B_3 \cap B_2$ así que $B_2 \cap B_3 \neq \emptyset$.

Finalmente probaremos que $B_1 \cap B_2 \cap B_3 = \emptyset$. Supongamos que existe un punto $p \in K \cap (Y - D)^- \cap D^- \subset K \cap (H \cup W)^- \cap D^- = (K \cap H \cap D^-) \cup (K \cap W^- \cap D^-) = (A \cap D^-) \cup (B \cap D^-) \cup (K \cap W^- \cap D^-)$.

Vamos a analizar varios casos :

(a). $p \in A$. Como $W \cap D = \emptyset$ y W es abierto, tenemos que $p \notin W$, así que $p \in A - W = A_2 \subset U \subset Z$. Como U es abierto, existe una región P de X tal que $p \in P \subset U$ y $P \cap W^- = \emptyset$ y entonces $P \subset Z - W$. Como $p \in D^-$, tenemos que $P \cap D \neq \emptyset$ y ya que D es componente de $Z - W$, tenemos que $P \subset D$. Esto es una contradicción pues $p \in (Y - D)^-$.

(b). $p \in B$. Ya que $V^- \cap U_0 = \emptyset$, tenemos que $p \notin W^-$. Sea Q una región de X tal que $p \in Q \subset V$ y $Q \cap W^- = \emptyset$. Entonces $Q \subset Z - W$ y $Q \cap D \neq \emptyset$. De manera que $Q \subset D$. Esto es de nuevo una contradicción.

(c). $p \in K \cap W^- \cap D^-$, $p \notin A$ y $p \notin B$. Entonces $p \notin H$, ademas $p \in W^-$ implica que $p \notin V^-$ y $p \notin U^-$. De modo que existe una región R de X tal que $p \in R$ y $R \cap (H \cup V^- \cup U^-) = \emptyset$. Pero $\emptyset \neq R \cap D \subset R \cap Z \cap D \subset R \cap (H \cup W \cup U \cup V) \cap D = K \cap W \cap D \subset W \cap D$, así que $W \cap D \neq \emptyset$. Esta nueva contradicción termina la prueba de que $B_1 \cap B_2 \cap B_3 = \emptyset$. Y esto prueba que $P(3)$ es válida.

Ahora supongamos que P(3) es válida, es decir que existen continuos A_1, A_2, y A_3 de X tales que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$, $A_3 \cap A_1 \neq \emptyset$, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$ y $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Entonces A_1, $A_2 \cup A_3$ son continuos de X cuya unión es X y con intersección igual a $(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$ que son dos cerrados ajenos y no vacíos. De modo que $A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$ no es conexo. Esto prueba que X es multicoherente.

CAPITULO III

El objetivo de este capítulo es mostrar que si X es débil **finitamente multicoherente, entonces $P(n)$ es válida para toda** $n \geq 3$. La idea para la prueba de este Teorema fue extraida del artículo [3].

Lema 1.- Supongamos que $X = H \cup K$ y $H \cap K = A \cup B$, donde H y K son continuos de X y A y B son cerrados ajenos y no vacíos. Entonces existe $D \in \mathcal{C}(X - K)$ tal que $\bar{D} \cap A \neq \emptyset$ y $\bar{D} \cap B \neq \emptyset$.

Demostración. De acuerdo con la proposición 6, existe $D \in \mathcal{C}(X - (A \cup B))$ tal que $\bar{D} \cap A \neq \emptyset$, $\bar{D} \cap B \neq \emptyset$ y $D \cap H \neq \emptyset$. Como $D \subset X - (A \cup B) = X - (H \cap K) = (X - H) \cup (X - K)$, D es conexo y $X - H$, $X - K$ son abiertos ajenos de X tenemos que $D \subset X - H$ o $D \subset X - K$. Pero $D \cap H \neq \emptyset$, así que $D \subset X - K$.

Sea E la componente de $X - K$ que contiene a D. Entonces $D \cap E \neq \emptyset$, $E \subset X - (A \cup B)$ y ya que D es componente de $X - (A \cup B)$, obtenemos que $E \subset D$. De manera que $D = E$ es componente de $X - K$.

Lema 2.- Sean P, Q, y C subconjuntos cerrados de X y sea D una región de X tales que $bo(FrD) < \infty$, $FrD = P \cup Q$, $P \cap Q = \emptyset$ y $C \cap (P \cup D) = \emptyset$. Entonces existe un continuo B de X tal que $P \subset Int(B)$ y $B \cap (C \cup Q) = \emptyset$.

Demostración. Tomemos un subconjunto abierto U de X tal que $P \subset U$, y $\bar{U} \cap (Q \cup C) = \emptyset$. Supongamos que $\mathcal{C}(FrD) = \{ C_1, \ldots C_r \}$.

Para cada $\iota \in \bar{r}$, $C_\iota \subset P$ ó $C_\iota \subset Q$ por que P y Q son cerrados ajenos. Podemos suponer que $C_1 \cup \ldots \cup C_k = P$ con $k \leq r$. Si $P = \emptyset$, hacemos $B = \emptyset$ y terminamos la prueba. Supongamos pues que $1 \leq k$. Sean $U_1, \ldots U_k$ las componentes de U que contienen a $C_1, \ldots, C_k$ respectivamente.

Ya que $\emptyset \neq C_\iota \subset U_\iota \cap Fr\ D$ y U_ι es abierto, podemos elegir un punto $x_\iota \in U_\iota \cap D$ para $\iota \in \bar{k}$. Aplicando la proposición 8 a $K = \{ x_1, \quad , x_k \}$ y obtenemos una region V de X tal que $\{ x_1, \quad , x_k \} \subset V \subset V^- \subset D$. Definimos $B = V^- \cup U_1^- \cup \ldots \cup U_k^-$. Claramente B tiene las propiedades requeridas.

Lema 3.- Si X es débil finitamente multicoherente y $X = H \cup K$, $H \cap K = A \cup B$, donde H y K son continuos de X y A, B son cerrados ajenos no vacíos de X, entonces es posible construir una sucesión de regiones $(D_m)_m$ de X y una sucesión de continuos $(B_m)_m$ de X tales que:

(a). $D_1 \in \mathcal{G}(X - K)$, $D_2 \in \mathcal{G}(X - (K \cup B_1))$, $D_3 \in \mathcal{G}(X - (K \cup B_1 \cup B_2))$, $\ldots$.

(b). $\overline{D_1} \cap A \neq \emptyset$, y para cada $m \geq 1$ $\overline{D_m} \cap B \neq \emptyset$, $D_{+1} \cap B_m \neq \emptyset, \ldots$

(c). $\overline{D_1} \cap A \subset Int\ B_1$, $\overline{D_2} \cap B_1 \subset Int\ B_2$, $\overline{D_3} \cap B_2 \subset Int\ B_3$, $\ldots$

(d). $B_2 \cap K = \emptyset$, $B_3 \cap (K \cup B_1) = \emptyset$, $B_4 \cap (K \cup B_1 \cup B_2) = \emptyset$, $\ldots$

(e). $D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset \ldots$, y para toda $m \geq 1$, $B_{m+1} \subset D_m$.

(f). $\overline{D_{m+1}} \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots, \cup B_{m-1}) = \emptyset$ para toda $m \geq 2$.

(g). $B_1 \cap B = \emptyset$.

Demostración. Haremos la construcción en forma inductiva.

(1). $m = 1$. De acuerdo con el lema 1, existe D_1 componente de $X - K$ tal que $\overline{D_1} \cap A \neq \emptyset$ y $\overline{D_1} \cap B \neq \emptyset$. La propisición 3 implica que $X - D_1$ es conexo. Como $\overline{D_1} \cup (X - D_1) = X$ y X es débil finitamente multicoherente, tenemos que $bo(FrD_1) = bo(D_1 \cap$

$(X - D_1)) < \omega$. Sean $P = \overline{D_1} \cap A$ y $Q = \overline{D_1} \cap B$. Entonces por la proposición 4 $FrD_1 \subset Fr(X - K) \cap \overline{D_1} \subset FrK \cap H \subset K \cap H = A \cup B$. De aquí se sigue que $P \cup Q = FrD_1$.

Aplicando el Lema 2 (para $C = B$), obtenemos un continuo B_1 de X tal que $D_1 \cap A \subset Int B_1$ y $B_1 \cap \overline{D_1} \cap B = \emptyset$. Esto concluye el primer paso de la inducción.

(2). Supongamos que han sido construidos $D_1, \ldots, D_m$ y $B_1, \ldots, B_m$.

Es claro que $X = H \cup (K \cup B_1 \cup \ldots \cup B_m)$. Por (b) y (c), $K \cap B_1 \neq \emptyset$ y también por (b) y (c), tenemos que $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, $B_2 \cap B_3 \neq \emptyset, \ldots, B_{m-1} \cap B_m \neq \emptyset$. De manera que $K_1 = K \cup B_1 \cup \ldots \cup B_m$ es un continuo de X. Por (a) y (e), $B_2 \cup \ldots \cup B_m \subset H$ así que $H \cap K_1 = B \cup (A \cup (H \cap B_1) \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m)$. (g) y (d) implican que $A_1 = A \cup (H \cap B_1) \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m$ es un cerrado (no vacío) de X ajeno a B. De acuerdo con (b), $\overline{D_m} \cap B \neq \emptyset$ y $\overline{D_m} \cap A_1 \neq \emptyset$. Aplicando la proposición 6, obtenemos que $D_{m+1} \in \mathfrak{C}(X - (B \cup A_1))$ tal que $D_{m+1} \cap \overline{D_m} \neq \emptyset$, $\overline{D_{m+1}} \cap A_1 \neq \emptyset$ y $\overline{D_{m+1}} \cap B \neq \emptyset$.

$D_{m+1} \subset X - (A_1 \cup B) = X - (H \cap K_1) = (X - H) \cup (X - K_1)$ que son dos abiertos ajenos, ademas D_{m+1} es conexo de modo que $D_{m+1} \subset X - H$ o $D_{m+1} \subset X - K_1$. Como $D_{m+1} \cap \overline{D_m} \neq \emptyset$ y son abiertos, tenemos que $D_{m+1} \cap D_m \neq \emptyset$ y por (a), $D_m \subset H$. Esto implica que D_{m+1} no está contenido en $X - H$. De modo que $D_{m+1} \subset X - K_1$. Sea E la componente de $X - K_1$ tal que $D_{m+1} \subset E$. Entonces $E \subset X - K_1 \subset X - (A_1 \cup B)$, $E \cap D_{m+1} \neq \emptyset$ y $D_{m+1} \subset \mathfrak{C}(X - (A \cup B))$. De aqui que $E = D_{m+1}$. Por tanto $D_{m+1} \in \mathfrak{C}(X - (K \cup \ldots \cup B_m))$.

Ya que $X - (K \cup B_1 \cup \ldots \cup B_m) \subset X - (K \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{m-1})$, $D_{m+1} \cap D_m \neq \emptyset$ y $D_m \in \mathfrak{C}(X - (K \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{m-1}))$, tenemos que $D_{m+1} \subset D_m$. Por (f), $\overline{D_m} \cap (B_1 \cup \ldots \cup B_{m-2}) = \emptyset$, así que $\overline{D_{m+1}} \cap (B_1 \cup \ldots \cup B_{m-2}) = \emptyset$.

Si $\emptyset \neq \overline{D_{m+1}} \cap B_{m-1} \subset \overline{D_m} \cap B_{m-1} \subset \text{int } B_m$, entonces $\overline{D_{m+1}} \cap \text{Int } B_m \neq \emptyset$, así que $D_{m+1} \cap \text{int. } B_m \neq \emptyset$ esto es absurdo porque $D_{m+1} \subset X - (K \cup B_1 \cup \ldots \cup B_m)$. Por tanto $\overline{D_{m+1}} \cap B_{m-1} = \emptyset$.

Si $\emptyset \neq \overline{D_{m+1}} \cap A \subset \overline{D_1} \cap A \subset \text{Int } B_1$ entonces $\overline{D_{m+1}} \cap \text{Int } B_1 \neq \emptyset$ asi que $D_{m+1} \cap B_1 \neq \emptyset$. Esto no es posible pues $D_{m+1} \subset X - (K \cup B_1 \ldots \cup B_m)$. Por tanto $\overline{D_{m+1}} \cap A = \emptyset$.

Resumiendo $\overline{D_{m+1}} \cap (A \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{m-1}) = \emptyset$, y como por construcción, $\overline{D_{m+1}} \cap A_1 \neq \emptyset$, obtenemos que $\overline{D_{m+1}} \cap B_m \neq \emptyset$.

Como K_1 es conexo, la proposición 3 implica que $X - D_{m+1}$ es conexo y ya que X es débil finitamente multicoherente, tenemos que $b_0(FrD_{m+1}) < \infty$.

Hacemos $P = \overline{D_{m+1}} \cap B_m = \overline{B_{m+1}} \cap A_1$ y $Q = \overline{D_{m+1}} \cap B$. Entonces $FrD_{m+1} = P \cup Q$ y P, Q son cerrados ajenos. También hacemos $C = K \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{m-1}$. Supongamos que existe $x \in P \cap C$, entonces $x \in (\overline{D_{m+1}} \cap B_m) \cap (K \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{m-1})$ Como $\overline{D_{m+1}} \cap (A \cup B_1 \cup \ldots \cup B_m) = \emptyset$ y $D_{m+1} \subset H$, tenemos que $x \in H \cap B_m \cap K = B_m \cap (A \cup B)$ y $x \notin A$, así que $x \in B_m \cap B$. Esto no es posible por (g), (e) y (a). Por tanto $P \cap C = \emptyset$. Podemos entonces aplicar el Lema 2 y obtener un continuo B_{m+1} de X tal que $\overline{D_{m+1}} \cap B_m \subset \text{Int } B_{m+1}$ y $B_{m+1} \cap (K \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{m-1} \cup (\overline{D_{m+1}} \cap B)) = \emptyset$.

Finalmente, como $\emptyset \neq \overline{D_{m+1}} \cap B_m \subset \text{Int } B_{m+1}$, tenemos que $\emptyset \neq D_{m+1} \cap \text{int } B_{m+1}$ así que $D_m \cap B_{m+1} \neq \emptyset$, además B_{m+1} es un subconjunto conexo de $X - (K \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{m-1})$ y D_m es una componente de $X - (K \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{m-1})$. De aquí que $B_{m+1} \subset D_m$. Esto termina la inducción y la prueba del lema.

Teorema 2.- Si X es débil finitamente multicoherente, entonces $P(n)$ es válida para toda $n \geq 3$.

Demostración. Tomemos $n \geq 3$. Sean H, K, A y B subconjuntos cerrados de X tales que $X = H \cup K$, $H \cap K = A \cup B$, A y B son ajenos y no vacíos y H, K son conexos. Sean $(D_n)_n$ y (B_n) como en el lema 3. Haremos la demostración por pasos.

Primer paso. Si $1 \leq s < s + 2 < r$ y D es componente de $X - (K \cup B_1 \cup \ldots \cup B_r)$ entonces $D^{-} \cap B_s = \emptyset$ o $D^{-} \cap B_r = \emptyset$. Supongamos que $D^{-} \cap B_r \neq \emptyset$, entonces $\emptyset \neq D^{-} \cap D_{r-1} \subset D^{-} \cap D_{s+2}$, de aquí que $D \cap D_{s+2} \neq \emptyset$. Como $D \subset X - (K \cup B_1 \cup \ldots \cup B_r) \subset X - (K \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{s+1})$ y $D_{s+2} \in \mathcal{C}(X - (K \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{s+1})$, tenemos que $D \subset D_{s+2}$. (f) implica entonces que $D^{-} \cap (B_1 \cup \ldots \cup B_s) = \emptyset$. Por tanto $D^{-} \cap B_s = \emptyset$.

Segundo paso. Para toda $m \geq 2$ $FrD_{m+1} \subset K \cup B_m$ y $K \cap B_m = \emptyset$. Por la proposición 4, $Fr\, D_{m+1} \subset Fr(K \cup B_1 \cup \ldots \cup B_m) \subset K \cup B_1 \cup \ldots \cup B_m$. Por otra parte, $D_{m+1}^{-} \cap (B_1 \cup \ldots \cup B_{m-1}) = \emptyset$. Por tanto, $FrD_{m+1} \subset K \cup B_m$. Aplicando la propiedad (e) tenemos que $B_m \subset D_{m-1} \subset X - (K \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{m-2})$ de manera que $B_m \cap K = \emptyset$.

Tercer paso. Definimos $F = \cup (B_m : m \geq 2)$. Sea E la componente de $X - F$ que contiene a K. De acuerdo con la proposición 3, $X - E$ es conexo y como X es débil finitamente multicoherente, tenemos que FrE tiene un número finito de componentes. Supongamos que $\mathcal{C}(FrE) = (E_1, \ldots, E_r)$. En este tercer paso aseguramos que :

Sean $m \geq 2$ y $j \in \bar{r}$ tales que $E_j \cap B_m \neq \emptyset$ entonces

$E_j \cap (\cup (B_k : k \geq m + 2)) = \emptyset$.

Supongamos que $E_j \cap (\cup B_k : k \geq m + 2)) \neq \emptyset$. Como $E_j \subset \mathrm{Fr}\, E \subset \mathrm{Fr}\, F \subset F^- = B_2 \cup \ldots \cup B_{m+1} \cup (B_{m+2} \cup \ldots)^- \subset B_2 \cup \ldots \cup B_{m+1} \cup D^-_{m+1}$. Esto implica que $E_j \subset B_2 \cup \ldots \cup B_m \cup (B_{m+1} - D_{m+1}) \cup D^-_{m+1}$. Por lo que estamos suponiendo, $E_j \cap D^-_{m+1} \neq \emptyset$ y por hipótesis, $E_j \cap (B_2 \cup \ldots \cup B_m \cup (B_{m+1} - D_{m+1})) \neq \emptyset$. Ademas, D_{m+1} y $(B_2 \cup \ldots \cup B_m \cup (B_{m+1} - D_{m+1}))$ son cerrados y E_j es conexo, esto implica que existe un punto $x \in E_j \cap D^-_{m+1} \cap (B_2 \cup \ldots \cup B_m \cup (B_{m+1} - D_{m+1}))$.

De la propiedad (f), $x \in E_j \cap D^-_{m+1} \cap (B_m \cup (B_{m+1} - D_{m+1}))$. Como $E_j \cap D^-_{m+1} \cap B_m \subset \mathrm{FrF} \cap \mathrm{int}\, B_{m+1}$ (propiedad (c)) $\subset \mathrm{FrF} \cap \mathrm{int}\, F = \emptyset$, tenemos que $x \in E_j \cap D_{m+1} \cap (B_{m+1} - D_{m+1})$. Asi que $x \in E_j \cap (\mathrm{Fr}\, D_{m+1} \cap B_{m+1}) \subset E_j \cap (K \cup B_m) \cap B_{m+1} = E_j \cap B_m \cap B_{m+1}$ (ver paso 2). De modo que $x \in E_j \cap (\mathrm{Fr}\, D_{m+1}) \cap B_m \subset \mathrm{FrF} \cap \mathrm{int}\, B_{m+1} \subset \mathrm{FrF} \cap \mathrm{int}\, F = \emptyset$. Esta contradicción termina la prueba del tercer paso.

Cuarto paso. En este paso demostramos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{FrE} \cap (\cup (B_k : k \geq N)) = \emptyset$.

Para $j \in \bar{r}$, hacemos $I_j = (m \in \mathbb{N} : E_j \cap B_m \neq \emptyset)$. Por el tercer paso, I_j es finito. Tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > k$ para toda $k \in I_1 \cup \ldots \cup I_r$. Entonces N tiene la propiedad que queremos.

Quinto paso. Sea $D \in \mathcal{C}(X - (K \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{N+5n}))$ tal que $D \cap K \neq \emptyset$, entonces $D^- \cap (B_N \cup B_{N+1} \cup \ldots \cup B_{N+5n-2}) = \emptyset$. Supongamos que existe $k \in \{ N , N + 1, \ldots, N + 5n - 2 \}$ tal que $D^- \cap B_k \neq \emptyset$. Primero mostraremos que $D \in \mathcal{C}(X - (K \cup B_1 \cup B_2 \cup \ldots))$. Como $X - (K \cup B_1 \cup B_2 \cup \ldots) \subset X - (K \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{N+5n})$ bastara probar que $D \subset X - (K \cup B_1\, B_2 \cup \ldots)$. Es decir

$D \cap (K \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots) = \emptyset$. Ya sabemos que $D \cap (K \cup B_1 \cup \dots \cup B_{N+5n}) = \emptyset$. Supongamos que $\emptyset \neq D \cap (D_{N+5n+1} \cup \dots) \subset D \cap D_{N+5n}$. Asi que $D \cap D_{N+5n} \neq \emptyset$, ademas $D \subset X - (K \cup B_1 \cup \dots \cup B_{N+5n}) \subset X - (K \cup B_1 \cup \dots \cup B_{N+5n-1})$ y D_{N+5n} es componente de este último. Por tanto $D \subset D_{N+5n}$. De aquí que $\emptyset \neq \overline{D} \cap B_k \subset \overline{D}_{N+5n} \cap (B_1 \cup \dots \cup B_{N+5n-2})$. Esto contradice la propiedad (f) y termina la prueba de que $D \in \mathcal{C}(X - (K \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots))$.

En particular, $D \subset X - F$. Además $\overline{D} \cap K \neq \emptyset$ y $K \subset X - F$ implica que $K \cup D$ es un subconjunto conexo de $X - F$, de modo que $K \cup D \subset E$. Entonces $\overline{D} \cap (B_N \cup B_{N+1} \cup \dots \cup B_{N+5n-2}) \subset \overline{E} \cap (\cup \{ B_k : k \geq N \}) \subset \overline{E} \cap (\cup \{ B_k : k \geq N \}) \cap (X - E) \subset \mathrm{Fr}\, E \cap (\cup \{ B_k : k \geq N \}) = \emptyset$. Por tanto $\overline{D} \cap (B_N \cup B_{N+1} \cup \dots \cup B_{N+5n-2})) = \emptyset$.

Sexto paso. Hacemos $m = 5n$ y definimos $F_1 = K \cup B_1 \cup \dots \cup B_{N+1}$, $F_2 = B_{N+2}$, $F_3 = B_{N+3}$, ... $F_m = B_{N+m}$, probaremos que si $D \in \mathcal{C}(X - (F_1 \cup \dots \cup F_m))$, $\overline{D} \cap F_i \neq \emptyset$ y $\overline{D} \cap F_j \neq \emptyset$ entonces $| i - j |_m \leq 2$.

Supongamos que $i < j$. Analizaremos dos casos:

(a). $1 < i$ o ($i = 1$ y $\overline{D} \cap K = \emptyset$). Entonces $\overline{D} \cap B_l \neq \emptyset$ para alguna $l \leq N + i$ (si $i > 1$ tomamos $l = N + i$ y si $i = 1$, l sería menor o igual que $N + 1$). Como $\overline{D} \cap B_{N+j} \neq \emptyset$, por el primer paso tenemos que, no es posible que $l + 2 < N + j$, asi que $N + i + 2 \geq l + 2 \geq N + j > N + i$ entonces $j \in \{ i + 1, i + 2 \}$, de modo que $| i - j |_m \leq 2$.

(b). $i = 1$ y $\overline{D} \cap K \neq \emptyset$. Por el quinto paso, j debe de estar en $\{ 5n - 1, 5n \}$, entonces $| i - j |_m \leq 2$.

Séptimo paso. Definimos los conjuntos: $C_1 = F_1 \cup \dots \cup F_5$; $C_2 = F_6 \cup \dots \cup F_{10}$; ...; $C_{n-1} = F_{5(n-1)-4} \cup \dots \cup F_{5(n-1)}$ y $C_n = F_{5n-1} \cup \dots \cup F_{5n}$. Y, para $s \in \overline{5n}$, hacemos $A_s = C_s \cup (\{ D \in \mathcal{C}(X - (F_1 \cup \dots \cup F_{5n}) : \overline{D} \cap C_s \neq \emptyset \})$. Demostraremos que A_1,

..., A_n son continuos de X tales que $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$ y $(A_1, \dots, A_n)$ es una cadena circular.

Las propiedades (b) y (c) del Lema 3 implican $B_{r+1} \cap B_r \neq \emptyset$ para toda $r \in \mathbb{N}$ y que $B_1 \cap K \neq \emptyset$. De aquí que $C_1, \dots, C_n$ son continuos de X. Esto implica que $A_1, \dots, A_n$ son continuos de X. Claramente $F_1 \cup \dots \cup F_{5n} \subset A_1 \cup \dots \cup A_n$. Ahora dado $x \in X - (F_1 \cup \dots \cup F_{5n})$, existe $D \in \mathcal{C}(X - (F_1 \cup \dots \cup F_{5n}))$ tal que $x \in D$. Como $K \subset X - D$, tenemos que $\emptyset \neq FrD \subset F_1 \cup \dots \cup F_{5n} = C_1 \cup \dots \cup C_n$. De manera que $x \in A_s$ para algun $s \in \bar{n}$. Hemos probado entonces que $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$.

Como cada B_r intersecta a B_{r+1}, tenemos que dada $1 \le s < n$, $F_{5s} \cap F_{5s+1} \neq \emptyset$. De aquí que $A_s \cap A_{s+1} \neq \emptyset$. Por la propiedad (b) del lema 3 tenemos que $\emptyset \neq \overline{D}_{N+5n+1} \cap B_{N+5n} \subset \overline{D}_{N+5n+1} \cap C_n$ y $\emptyset \neq \overline{D}_{N+5n+1} \cap B \subset \overline{D}_{N+5n+1} \cap K \subset \overline{D}_{N+5n+1} \cap C_1$. Ademas $D_{N+5n+1} \in \mathcal{C}(X - (F_1 \cup \dots \cup F_{5n}))$. Esto implica que $D_{N+5n+1} \subset A_n \cap A_1$. Por tanto $A_1 \cap A_n \neq \emptyset$. Hemos probado entonces que para toda $s \in \bar{n}$, $A_s \cap A_{s+1} \neq \emptyset$.

Supongamos ahora que $s, r \in \bar{n}$ son tales que $s < r$ y $A_s \cap A_r \neq \emptyset$, probaremos que $| s - r |_n \le 1$. Para $k \in \bar{n}$ definimos $L_k = \cup \{ D \in \mathcal{C}(X - (F_1 \cup \dots \cup F_{5n})) : \overline{D} \cap K \neq \emptyset \}$. Entonces $A_s = C_s \cup \overline{L_s}$ y $A_r = C_r \cup \overline{L_r}$.

Las propiedades (f) y (g) del Lema 3 implican que $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ si y solo si $| i - j | \le 1$. Además por (a) y (e) del mismo lema $K \cap (B_2 \cup \dots) = \emptyset$. De aquí que $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ si y solo si $| i - j | \le 1$ y $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ si y sólo si $| i - j | \le 1$.

Notemos que, para $k \in \bar{n}$, $L_k \cap (C_1 \cup \dots \cup C_n) = \emptyset$. Entonces $\emptyset \neq A_s \cap A_r = (C_s \cup \overline{L_s}) \cap (C_r \cap \overline{L_r}) = (C_s \cap C_r) \cup (C_s \cap Fr\, L_r) \cup (Fr\, L_s \cap C_r) \cup (\overline{L_s} \cap \overline{L_r})$.

Si $C_r \cap C_s \neq \emptyset$, ya dijimos que, entonces $0 < r - s \leq 1$. Dada $D \in \mathcal{C}(X - (F_1 \cup \ldots \cup F_{5n}))$ tal que $FrD \cap C_s \neq \emptyset$. Entonces $FrD \cap (F_{5s-4} \cup \ldots \cup F_{5s}) \neq \emptyset$. Por el paso 6, tenemos que $FrD \subset F_{5s-6} \cup \ldots \cup F_{5s-2}$ (las diferencias $5s - 6$ y $5s - 2$ son consideradas en módulo 5n). De manera que (ver proposición 5) $FrL_s \subset (\cup \{ FrD : D \in \mathcal{C}(X - (F_1 \cup \ldots \cup F_{5n}) \text{ y } \bar{D} \cap C_s \neq \emptyset \}) \subset F_{5s-6} \cup \ldots \cup F_{5s+2}$. Por tanto $FrLs \subset F_{5s-6} \cup \ldots \cup F_{5s+2}$. (las operaciones marcadas en los índices son consideradas en módulo 5n).

Ahora supongamos que $C_r \cap FrLs \neq \emptyset$. Entonces $\emptyset \neq C_r \cap FrLs \subset (F_{5r-4} \cup \ldots F_{5r}) \cap (F_{5s-6} \cup \ldots \cup F_{5s+2})$. De aquí que existe $i \in \{ 5r - 4, \ldots, 5r \}$ tal que $F_i \cap (F_{5s-6} \cup \ldots \cup F_{5s+2}) \neq \emptyset$. De manera que $i \in \{ 5s - 7, \ldots, 5s + 3 \}$. Entonces $5r \in \{ 5s - 7, \ldots, 5s + 7 \}$. De aquí que $5r \in \{ 5s - 5, 5s, 5s + 5 \}$. De modo que $r \in \{ s - 1, s, s + 1 \}$ (en el caso en que $5r = 5s - 5$ entonces $5n \mid 5r - 5s + 5 \Rightarrow n \mid r - s + 1 \Rightarrow r = s +_n 1$). Por tanto, $| r - s |_n \leq 1$.

Similarmente se analiza el caso en que $C_s \cap FrLr \neq \emptyset$. Ahora supongamos que $L_s \cap L_r \neq \emptyset$. Entonces $L_s \cap L_r \neq \emptyset$ o $FrL_s \cap FrL_r \neq \emptyset$. Si $L_s \cap L_r \neq \emptyset$, entonces existe $D \in \mathcal{C}(X - (F_1 \cup \ldots \cup F_{5n}))$ tal que $\bar{D} \cap C_s \neq \emptyset$ y $\bar{D} \cap C_r \neq \emptyset$. Entonces $D \subset L_s$ y $D \subset L_r$ ademas $\emptyset \neq \bar{D} \cap C_s \subset \bar{L_r} \cap C_s = FrL_r \cap C_s$. Así que, por el análisis anterior, $| r - s |_n \leq 1$.

Finalmente supongamos que $FrL_s \cap FrL_r \neq \emptyset$ entonces $(F_{5s-6} \cup \ldots \cup F_{5s+2}) \cap (F_{5r-6} \cup \ldots \cup F_{5r+2}) \neq \emptyset$. De modo que existe $i \in \{ 5r - 6, \ldots, 5r + 2 \}$ tal que $F_i \cap (F_{5s-6} \cup \ldots \cup F_{5s+2}) \neq \emptyset$ y entonces $i \in \{ 5s - 7, \ldots, 5s + 3 \}$. Así que $5r \in \{ 5s - 9, \ldots, 5s + 9 \}$. De modo que $5r \in \{ 5s - 5, 5s, 5s + 5 \}$. Esto implica que $| r - s |_n \leq 1$.

Por tanto, en cualquier caso, $| r - s |_n \leq 1$. Esto prueba que $P(n)$ es válida para X y termina la prueba del teorema.

CAPITULO IV

En este capítulo supondremos que X es también compacto y ulticoherente y probaremos que, en este caso, $P(6)$ es cierta. La prueba es un extracto de la de R. F. Dickman, Jr. [3].

Lema 4. Sean A y B dos subconjuntos cerrados ajenos de X y $D \in C(X - (A \cup B))$ tal que $D^{-} \cap A \neq \emptyset \neq D^{-} \cap B$. Entonces existe un continuo F de X y existen D_1, $D_2 \in C(X - (A \cup B \cup F))$ tales que $F \subset D$, $D_1^{-} \cap A \neq \emptyset$, $D_1^{-} \cap F \neq \emptyset$, $D_2^{-} \cap F \neq \emptyset$, $D_2^{-} \cap B \neq \emptyset$ y para toda $E \in C(X - (A \cup B \cup F))$, $E^{-} \cap A = \emptyset$ o $E^{-} \cap F = \emptyset$ o $E^{-} \cap B = \emptyset$.

Demostración. Sean U y V abiertos de X tales que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U^{-} \cap V^{-} = \emptyset$. Como $FrD \subset Fr((X - (A \cup B)) \subset A \cup B$ y $(A \cup B) \cap Fr\, U = \emptyset$, tenemos que $FrD \cap FrU = \emptyset$. De manera que $(FrU) \cap D = (FrU) \cap D^{-}$. Así que $(FrU) \cap D$ es un subconjunto compacto de D y entonces, por la proposición 8, existe un continuo F de X tal que $(FrU) \cap D \subset F \subset D$.

Como $F \subset D$, $F \cap (A \cup B) = \emptyset$, de modo que A y $(F \cup B)$ son cerrados ajenos e intersectan ambos a D^{-}. De acuerdo con la proposición 6, existe D_1 componente de $X - (F \cup A \cup B)$ tal que $D_1^{-} \cap A \neq \emptyset$, $D_1^{-} \cap (F \cup B) \neq \emptyset$ y $D_1^{-} \cap D \neq \emptyset$. Pero D_1 y D son abiertos de modo que $D_1 \cap D \neq \emptyset$. Esto implica que $D_1 \subset D$. Si $D_1^{-} \cap B \neq \emptyset$, entonces $D_1^{-} \cap U \neq \emptyset \neq D_1^{-} \cap (X - U^{-})$. De aqui que $D_1 \cap U \neq \emptyset$ y $D_1 \cap (X - U^{-}) \neq \emptyset$. De manera que $D_1 \cap Fr\ U \neq \emptyset$. Asi que $D_1 \cap (D \cap Fr\ U) \neq \emptyset$. Y entonces $D_1 \cap F \neq \emptyset$. Esta contradiccion prueba que $D_1^{-} \cap B = \emptyset$. Entonces $D_1^{-} \cap F \neq \emptyset$.

De una menera similar se demuestra que existe

$D_2 \in \mathcal{C}(X - (F \cup A \cup B))$ tal que $D_2^- \cap F \neq \emptyset$, $D_2^- \cap A = \emptyset$ y $D_2^- \cap B \neq \emptyset$.

Ahora supongamos que existe $E \in \mathcal{C}(X - (F \cup A \cup B))$ tal que $E^- \cap F \neq \emptyset$, $E^- \cap A \neq \emptyset$ y $E^- \cap B \neq \emptyset$. Como $F \subset D$, tenemos que $E^- \cap D \neq \emptyset$, así que $E \cap D \neq \emptyset$. Además $E \subset X - (A \cup B)$, de manera que $E \subset D$. Ya que $E^- \cap U \neq \emptyset \neq E^- \cap (X - U^-)$, obtenemos que $E \cap Fr\ U \neq \emptyset$. De modo que $\emptyset \neq E \cap Fr\ U = E \cap (D \cap Fr\ U) \subset E \cap F$. Entonces $\emptyset \neq E \cap F$. Esta contradicción termina la prueba del lema.

Lema 5. Existen continuos ajenos entre si C_1, C_2 y C_3 de X y existen componentes D_1, D_2 y D_3 de $X - (C_1 \cup C_2 \cup C_3)$ tales que para $i = 1, 2, 3$, $D_i^- \cap C_i \neq \emptyset \neq D_i \cap C_{i+1}$ y para toda $E \in \mathcal{C}(X - (C_1 \cup C_2 \cup C_3))$, $E^- \cap C_1 = \emptyset$ o $E^- \cap C_2 = \emptyset$ o $E^- \cap C_3 = \emptyset$.

Demostración. Como X es multicoherente, existen continuos H y K de X y existen subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos A y B de X tales que $X = H \cup K$ y $H \cap K = A \cup B$. De acuerdo con la proposición 6, existe $D \in \mathcal{C}(X - (A \cup B))$ tal que $D^- \cap A \neq \emptyset$, $D^- \cap B \neq \emptyset$ y $D \cap H \neq \emptyset$. Ya que $D \subset X - (A \cup B) = (X - H) \cup (X - K)$ que son dos abiertos ajenos y como D es conexo y $D \cap H \neq \emptyset$, tenemos que $D \subset X - K$.

Por el Lema 4, existe un continuo C_1 de X y existen componentes E_1 y E_2 de $X - (A \cup B \cup C_1)$ tales que $E_1^- \cap A \neq \emptyset$, $E_1 \cap C_1 \neq \emptyset$, $E_2^- \cap C_1 \neq \emptyset$, $E_2^- \cap B \neq \emptyset$, $C_1 \subset D$ y $E_1 \neq E_2$. Para cada $i = 1, 2$, $\emptyset \neq E_i^- \cap C_1 \subset E_i^- \cap D$. De aquí que $E_i \cap D \neq \emptyset$ y como $E_i \subset X - (A \cup B \cup C_1) \subset X - (A \cup B)$, tenemos que $E_i \subset D$. Así que $E_i \subset X - (C_1 \cup K) \subset X - (C_1 \cup A \cup B)$. Esto implica que E_i es componente de $X - (C_1 \cup K)$.

Aplicando otra vez el Lema 4, pero ahora a C_1, K y E_1

obtenemos un continuo C_2 de X y componentes D_1, D_2 de $X - (C_1 \cup K \cup C_2)$ tales que $C_2 \subset E_1$, $\overline{D_1} \cap C_1 \neq \emptyset$, $\overline{D_1} \cap C_2 \neq \emptyset$, $\overline{D_2} \cap C_2 \neq \emptyset$, $\overline{D_2} \cap K \neq \emptyset$ y para toda $E \in \mathcal{C}(X - (C_1 \cup C_2 \cup K))$, $E^- \cap C_1 = \emptyset$ o $E^- \cap C_2 = \emptyset$ o $E^- \cap K = \emptyset$. Definimos $C_3 = K$ y $D_3 = E_2$. Como E_2 es ajeno a E_1, tenemos que E_2 es ajeno a C_2, de manera que $E_2 \subset X - (C_1 \cup C_2 \cup C_3) \subset X - (A \cup B \cup C_1)$. Y como E_2 es componente de $X - (A \cup B \cup C_1)$, obtenemos que $D_3 \in \mathcal{C}(X - (C_1 \cup C_2 \cup C_3))$. Es fácil comprobar que C_1, C_2, C_3, D_1, D_2 y D_3 tienen las propiedades enunciadas.

Teorema 3. $P(6)$ es cierta para X.

Demostración. Sean C_1, C_2, C_3, D_1, D_2 y D_3 como en el lema 5. Definimos $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ y para $i = 1, 2, 3$, hacemos :
$B_i = C_i \cup (\cup (D \in \mathcal{C}(X - C) : Fr\, D \subset C_i))$ y
$U_i = \cup (D \in \mathcal{C}(X - C) : D^- \cap C_i \neq \emptyset$ y $D^- \cap C_{i+1} \neq \emptyset)$. Claramente U_1, U_2 y U_3 son ajenos entre si y como para toda $D \in \mathcal{C}(X - C)$, $Fr\, D \subset C_1 \cup C_2 \cup C_3$, tenemos que $X - (B_1 \cup B_2 \cup B_3) = U_1 \cup U_2 \cup U_3$.

Para cada $i \in \{ 1, 2, 3 \}$, definimos $Y_i = B_i \cup U_i \cup B_{i+1}$. Como $FrY_i = Fr(B_i \cup U_i \cup B_{i+1}) \subset FrC_i \cup Fr(\cup (D \in \mathcal{C}(X - C) : Fr\, D \subset C_i)) \cup Fr(\cup (D \in \mathcal{C}(X - C) : D^- \cap C_i \neq \emptyset$ y $D^- \cap C_{i+1} \neq \emptyset)) \cup Fr\, C_{i+1} \cup Fr(\cup (D \in \mathcal{C}(X - C) : FrD \subset C_{i+1})) \subset$ (ver proposicion 4) $C_i \cup C_i \cup (C_i \cup C_{i+1}) \cup C_{i+1} \cup C_{i+1} \subset Y_i$, tenemos que Y_i es cerrado. Dada $D \in \mathcal{C}(X - C)$, $FrD \neq \emptyset$. de aquí que B_i es conexo, entonces $B_i \cup U_i$ y $U_i \cup B_{i+1}$ son conexos. Además U_i es no vacio pues contiene a D_i. Por tanto Y_i es conexo.

Argumentando como en el párrafo anterior se obtiene que B_1, B_2 y B_3 son cerrados, conexos y ajenos entre si. Dada $D \in$

$\mathcal{G}(X - C)$, e i .. $\bar{3}$, como D es abierto, tenemos que $D^- \cap C_i \subset Fr\ D$. De modo que no puede existir $D \in \mathcal{G}(X - C)$ tal que $Fr\ D \subset C_i$ y ($D^- \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ o $D^- \cap C_{i+2} \neq \emptyset$). De aquí se obtiene que $(B_1 \cup B_2 \cup B_3) \cap (U_1 \cup U_2 \cup U_3) = \emptyset$. Entonces $Y_1 \cap Y_2 = B_2$, $Y_2 \cap Y_3 = B_3$, $Y_3 \cap Y_1 = B_1$, $B_1 \cap Y_2 = \emptyset$ y $B_2 \cap Y_3 = \emptyset$ y $B_3 \cap Y_1 = \emptyset$.

Vamos a probar ahora que Y_1 se puede representar como $Y_1 = A_1 \cup A_2$, donde A_1, A_2 son continuos tales que $B_1 \subset A_1$, $B_2 \subset A_2$ y $(A_1 \cap A_2) \cap (B_1 \cup B_2) = \emptyset$. Para esto necesitamos probar antes el siguiente hecho : Si E es un subconjunto conexo de X tal que $B_1 \subset E$, y $E \cap B_2 = \emptyset$, entonces $E \cap Y_1$ es conexo. Primero observemos que como $U_1 \subset Y_1$, $Y_1 \cap B_3 = \emptyset$ y Y_1, B_3 son cerrados, entonces U_1 y B_3 son conjuntos separados. Dado U_1 y $U_2 \cup U_3$ son abiertos ajenos, entonces U_1 y $U_2 \cup U_3$ son conjuntos separados. Como $B_1 \subset E$ y $E \cap B_2 = \emptyset$, tenemos que $E = B_1 \cup (E \cap U_1) \cup (E \cap (U_2 \cup B_3 \cup U_3))$. Aplicamos la proposición 2 al espacio E y el subespacio conexo B_1, entonces $B_1 \cup (E \cap U_1)$ es conexo y como $B_1 \cup (E \cap U_1) = E \cap Y_1$ concluimos que $E \cap Y_1$ es conexo. En forma similar, se puede probar que si E es un subconjunto conexo de X tal que $B_2 \subset E$ y $E \cap B_1 = \emptyset$, entonces $E \cap Y_1$ es conexo.

Ahora mostraremos por que existen A_1 y A_2. Tomemos un abierto V de X tal que $B_1 \subset V$ y $V^- \cap B_2 = \emptyset$. Sea U la componente de V que contiene a B_1, entonces tambien U es abierto, $B_1 \subset U$ y $U^- \cap B_2 = \emptyset$. Sea W la componente de $X - U$ que contiene a B_2. Entonces por la propósición 3, $X - W$ es tambien conexo. Claramente W es un continuo que contiene a B_2 y ajeno a B_1. Por lo que probamos en el párrafo anterior, el conjunto $A_2 = W \cap Y_1$ es un continuo que contiene a B_2. Ya que $Fr(X - W) = Fr\ W \subset Fr(X - U) = Fr\ U$ y $Fr\ U \cap (B_1 \cup B_2) = \emptyset$, tenemos que $Fr(X - W) \cap ($

$B_1 \cup B_2) = \emptyset$. Como además $B_2 \cap (X - W) = \emptyset$, obtenemos que $B_2 \cap (X - W)^- = \emptyset$. Y ya que $B_1 \subset U \subset (X - W)$, aplicamos nuevamente lo del párrafo anterior, obtenemos que el conjunto $A_1 = (X - W)^- \cap Y_1$ es un continuo que contiene a B_1. Claramente $A_1 \cup A_2 = Y_1$ y como $A_1 \cap A_2 \subset V^- \cap (X - W)^- = Fr(X - W)$, tenemos que $(A_1 \cap A_2) \cap (B_1 \cup B_2) = \emptyset$. Esto termina la construcción de A_1 y A_2.

Análogamente es posible construir continuos A_3, A_4, A_5 y A_6 de X tales que $A_3 \cup A_4 = Y_2$, $B_2 \subset A_3$, $B_3 \subset A_4$, $A_3 \cap A_4 \cap (B_2 \cup B_3) = \emptyset$; $A_5 \cup A_6 = Y_3$, $B_3 \subset A_5$, $B_1 \subset A_6$ y $A_5 \cap A_6 \cap (B_3 \cup B_1) = \emptyset$. Finalmente demostraremos que $P(6)$ es válida para X checando que A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 y A_6 satisfacen la propiedad de ser una cadena circular de seis eslabones.

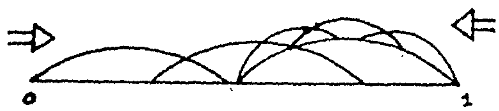
Para empezar $X = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup U_1 \cup U_2 \cup U_3 = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$. $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ (resp. $A_3 \cap A_4 \neq \emptyset$ y $A_5 \cap A_6 \neq \emptyset$) porque de lo contrario A_1 y A_2 (resp. (A_3 y A_4) y (A_5 y A_6)) serían una separación de Y_1 (resp. Y_2 y Y_3). $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$ (resp. $A_4 \cap A_5 \neq \emptyset$ y $A_6 \cap A_1 \neq \emptyset$) porque ambos contienen a B_2 (resp. B_3 y B_1). Por tanto $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para toda $i \in \bar{6}$. Como $A_1 \cap (A_3 \cup A_4 \cup A_5) = (A_1 \cap (A_3 \cup A_4)) \cup (A_1 \cap A_5) = (A_1 \cap Y_1 \cap Y_2) \cup (A_1 \cap Y_1 \cap Y_3 \cap A_5) = (A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_5) \subset ((A_1 \cap A_2) \cap B_2) \cup ((A_6 \cap A_5) \cap B_1) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$, tenemos que A_1 sólo intersecta a A_2 y A_6. En forma similar se prueba que cada A_i solo intersecta a A_{i+1} y a A_{i-1}. En particular tres diferentes A_i's no pueden tener puntos en común. Esto termina la prueba del teorema.

CAPITULO V

En este capítulo construiremos un ejemplo de un espacio conexo, localmente conexo, multicoherente y métrico X, para el cual P(5) es falsa. Este ejemplo se debe a R. F. Dickman [2].

El ejemplo se construye de la siguiente manera:

Como primer paso tomamos al intervalo I, para cada pareja de racionales diferentes en I, le pegamos a I un segmento que coincida con I nada más en esos dos puntos. Como segundo paso a cada uno de los segmentos que añadimos en el primer paso, le hacemos lo mismo que le hicimos a I en el primer paso, es decir, le añadimos un segmento para cada pareja de racionales del segmento. El tercer paso consiste en añadir segmentos a los segmentos creados en el segundo paso. Y así sucesivamente.



Segmentos del primer paso.

Segmentos del segundo paso.

Este capítulo lo dividiremos en dos partes. La primera es para mostrar que la descripción anterior se puede llevar a cabo y que nos da como resultado un espacio X conexo, localmente conexo, multicoherente y métrico. La segunda parte es para probar que P(5) no es válida para X.

Primera Parte.

Definición. Un espacio métrico (X, d) es llamado arco -

convexo si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$, $x = y$ o existe un arco C en X (subespacio C de X que es homeomorfo a I) tales que $x, y \in C$ y $d(x,c) + d(c,y) = d(x,y)$ para toda $c \in C$. Claramente todo espacio arco - convexo es conexo y localmente conexo.

Supongamos que tenemos una familia de espacios métricos $\mathcal{F} = \{ (X_a, d_a) : a \in A \cup \{ 0 \} \}$ tales que $0 \notin A$ y:

(a). Para cada $a \in A$. $X_0 \cap X_a$ es un subconjunto cerrado y no vacío de X_a. Además d_a coincide con d_0 en $X_0 \cap X_a$.

(b). Los elementos de la familia $\{ X_a - X_0 : a \in A \}$ son ajenos dos a dos.

Definimos $A^* = A \cup \{ 0 \}$ y $R_{\mathcal{F}} = \cup \{ X_a \times X_a : a \in A \}$. Notese que si $a \in A$, $x \in X_a - X_0$ y $(x,y) \in R_{\mathcal{F}}$ implican que $y \in X_a$. Definimos también $X_{\mathcal{F}} = \cup \{ X_a : a \in A^* \}$ y $\delta_{\mathcal{F}}(x,y) = d(x,y)$ cuando $(x,y) \in X_a \times X_a$. La única forma en que (x,y) puede pertenecer a $X_a \times X_a$ y $X_b \times X_b$ con $a \neq b$ es cuando (x,y) pertenece además a $X_0 \times X_0$ y entonces $d_a(x,y) = d_0(x,y) = d_b(x,y)$. Esto muestra que $\delta_{\mathcal{F}}$ está bien definida. Finalmente definimos $d_{\mathcal{F}} : X_{\mathcal{F}} \times X_{\mathcal{F}} \dashrightarrow \mathbb{R}$ por $d_{\mathcal{F}}(x,y) = \inf \{ \delta_{\mathcal{F}}(z_1,z_2) + \delta_{\mathcal{F}}(z_2,z_3) + \ldots + \delta_{\mathcal{F}}(z_{m-1},z_m) : m \geq 2,$ $(z_1,z_2), \ldots, (z_{m-1},z_m) \in R_{\mathcal{F}}$ y $x = z_1, y = z_m \}$.

9. Proposición. $d_{\mathcal{F}}$ es una métrica para $X_{\mathcal{F}}$ que coincide con d_a en X_a para toda $a \in A^*$. Dada $a \in A^*$, si $x \in X_a$ y $y \notin X_a$, entonces $d_{\mathcal{F}}(x,y) = \inf \{ \delta_{\mathcal{F}}(x,z) + \delta_{\mathcal{F}}(z,y) : z \in X_a \cap X_0 \}$. Además, si $X_a \cap X_0$ es finito para cada $a \in A$ y todos los espacios (X_a, d_a) son arco - convexos, entonces $(X_{\mathcal{F}}, d_{\mathcal{F}})$ es arco - convexo.

Demostración. Para ahorrarnos notación, escribiremos R, δ,

X, y d en lugar de $k_{\bar{p}}$, $d_{\bar{p}}$, $X_{\bar{p}}$ y $d_{\bar{p}}$ respectivamente. Dividimos esta prueba en cinco pasos.

Primer paso. Si $x, y \in X_0$, entonces $d(x,y) = d_0(x,y)$.
Para probar esto, tomamos $m \geq 2$ y $z_1, \dots, z_m \in X$, tales que $x = z_1$, $y = z_m$ y $(z_1,z_2), \dots, (z_{m-1},z_m) \in R$. Supongamos que $z_{k_1}, \dots, z_{k_n}$ son los z_i's que pertenecen a X_0 donde $1 = k_1 < \dots < k_n = m$, $(n \geq 2)$.

Tomemos $s \in \bar{n}$, aseguramos que $Z_{k_s}, Z_{k_s+1}, \dots, Z_{k_{s+1}}$ pertenecen todos a un mismo X_a. Si $k_s + 1 = k_{s+1}$, sólo tenemos a los puntos Z_{k_s} y $Z_{k_{s+1}}$ que pertenecen ambos a X_0. Supongamos entonces que $k_s < k_{s+1}$. Entonces $Z_{k_s+1} \in X_a - X_0$ para alguna $a \in A - \{ 0 \}$. Como $(Z_{k_s+1}, Z_{k_s+2}) \in R$, tenemos que $Z_{k_s+2} \in X_a$. Si todavia $k_s + 2 < k_{s+1}$, entonces que $Z_{k_s+2} \in X_a - X_0$. Esto implica que $Z_{k_s+3} \in X_a$. Procediendo de esta manera, se obtiene que $Z_{k_s}, Z_{k_s+1}, \dots, Z_{k_{s+1}} \in X_a$. En cualquier caso, existe $a \in A^*$ tal que $Z_{k_s}, \dots, Z_{k_{s+1}} \in X_a$. Entonces $\delta(Z_{k_s}, Z_{k_s+1}) + \delta(Z_{k_s+1}, Z_{k_s+2}) + \dots + \delta(Z_{k_{s+1}-1}, Z_{k_{s+1}}) = d_a(Z_{k_s}, Z_{k_s+1}) + \dots + d_a(Z_{k_{s+1}-1}, Z_{k_{s+1}}) \geq d_a(Z_{k_s}, Z_{k_{s+1}}) = d_0(Z_{k_s}, Z_{k_{s+1}})$.

Por tanto $\delta(Z_{k_s}, Z_{k_s+1}) + \dots + \delta(Z_{k_{s+1}-1}, Z_{k_{s+1}}) \geq d_0(Z_{k_s}, Z_{k_{s+1}})$ para toda $s \in \bar{n}$. Esto implica que $\delta(Z_1,Z_2) + \dots + \delta(Z_{m-1},Z_m) \geq d_0(Z_{k_1}, Z_{k_2}) + \dots + d_0(Z_{k_{n-1}}, Z_{k_n}) \geq d_0(Z_{k_1}, Z_{k_n}) = d_0(x,y)$. De aqui que $d(x,y) \geq d_0(x,y)$. La otra desigualdad es cierta porque $d_0(x,y)$ es uno de los números que se consideran para definir $d(x,y)$ (basta hacer $x = z_1$, $y = z_2$ y $m = 2$). Por tanto $d(x,y) = d_0(x,y)$.

Segundo paso. Si $x, y \in X_a$ con $a \in A$, entonces $d(x,y) = d_a(x,y)$. Para mostrar esto tomemos nuevamente $m \geq 2$ y $Z_1, \dots, Z_m \in X$ tales que $x = Z_1$, $y = Z_m$ y $(Z_1,Z_2), \dots, (Z_{m-1},Z_m) \in R$.

Si $(z_1, \ldots, z_m) \subset X_a$, entonces $\delta(z_1,z_2) + \ldots + \delta(z_{m-1},z_m) = d_a(z_1,z_2) + \ldots + d_a(z_{m-1},z_m) \geq d_a(z_1,z_m) = d_a(x,y)$. De modo que $\delta(z_1,z_2) + \ldots + \delta(z_{m-1},z_m) \geq d_a(x,y)$. Si $(z_1, \ldots, z_m)$ no está contenido en X_a, sean h y k el máximo y el mínimo de $\{ s \in \overline{m} : z_s \notin X_a \}$ respectivamente Entonces $1 < h \leq k < m$ y z_{h-1} , $z_{k+1} \in X_a$. Además $z_{h-1} \in X_0$ pues de lo contrario $z_{h-1} \in X_a - X_0$ y $(z_{h-1},z_h) \in R$ implican que $z_h \in X_a$ que es una contradicción con la elección de h. Por el mismo argumento $z_{k+1} \in X_0$.

Entonces $\delta(z_1,z_2) + \ldots + \delta(z_{m-1},z_m) = \delta(z_1,z_2) + \ldots + \delta(z_{h-2},z_{h-1}) + \delta(z_{h-1},z_h) + \quad + \delta(z_k,z_{k+1}) + \delta(z_{k+1},z_{k+2}) + \ldots + \delta(z_{m-1},z_m) \geq$ (por la definición de $d(z_{h-1},z_{k+1})$) $d_a(z_1,z_2) + \ldots + d_a(z_{h-2},z_{h-1}) + d(z_{h-1},z_{k+1}) + d_a(z_{k+1},z_{k+2}) + \ldots + d_a(z_{m-1},z_m) \geq$ (por el primer paso $d(z_{h-1},z_{k+1}) = d_0(z_{h-1},z_{k+1}) = d_a(z_{h-1},z_{k+1})$) $\geq d_a(z_1,z_m) = d_a(x,y)$.

En cualquier caso, $\delta(z_1,z_2) + \ldots + \delta(z_{m-1},z_m) \geq d_a(x,y)$. Esto implica que $d(x,y) \geq d_a(x,y)$. La otra desigualdad se debe, nuevamente, a que $d_a(x,y) = \delta(x,y)$ es de las sumas consideradas en la definición de $d(x,y)$. Por lo tanto, $d(x,y) = d_a(x,y)$.

Tercer paso. Si $a \in A$, $y \in X_0$ y $x \in X_a$, entonces $d(x,y) \geq \inf \{ d(x,z) + d(z,y) : z \in X_a \cap X_0 \}$. En el caso en que $x \in X_0$, hacemos $z = x$ y tenemos que $d(x,y) = d_0(x,x) + d(x,y) =$ (por el primer paso) $d(x,x) + d(x,y) = d(x,z) + d(z,y) \geq \inf \{ d(x,w) + d(w,y) : w \in X_a \cap X_0 \}$. Supongamos entonces que $x \notin X_0$.

Tomemos $m \geq 2$ y $z_1, \ldots, z_m \in X$ tales que $x = z_1$, $y = z_m$ y $(z_1,z_2), \ldots, (z_{m-1},z_m) \in R$. Sea $s = \min \{ k \in \overline{m} : z_k \notin X_a \}$. Como $z_1 = x \in X_a - X_0$ y $(z_1,z_2) \in R$, Tenemos que $z_2 \in X_a$. Asi que $2 < s \leq m$. Notemos que $z_{s-1} \in X_0$ pues de lo contrario, $z_{s-1} \in$

$X_a - X_0$ y $(Z_{s-1}, Z_s) \in R$ implicarían que $Z_s \in X_a$ que es absurdo. Por tanto $Z_{s-1} \in X_a \cap X_0$.

Entonces $\delta(Z_1,Z_2) + \ldots + \delta(Z_{m-1},Z_m) = \delta(Z_1,Z_2) + \ldots + \delta(Z_{s-2},Z_{s-1}) + \delta(Z_{s-1},Z_s) + \ldots + \delta(Z_{m-1},Z_m) \geq d(Z_1,Z_{s-1}) + d(Z_{s-1},Z_m) \geq \inf \{ d(x,z) + d(z,y) : z \in X_a \cap X_0 \}$. De aquí que $d(x,y) \geq \inf \{ d(x,z) + d(z,y) : z \in X_a \cap X_0 \}$.

Cuarto paso. d es una métrica para X. Y entonces, se puede reemplazar la desigualdad por igualdad en el tercer paso. Comprobaremos entonces las propiedades de métrica para d.

(a). Claramente $d(x,y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$.

(b) Si $x \in X$, entonces $x \in X_a$ para alguna $a \in A^*$ así que (por los primeros dos pasos) $d(x,x) = d_a(x,x) = 0$.

(c). Supongamos que $d(x,y) = 0$. Si x, y están en un mismo X_a ($a \in A^*$), entonces los dos primeros pasos implican que $x = y$. Supongamos entonces que $x \in X_a - X_0$ y $y \notin X_a$ con $a \in A$. Como $X_a \cap X_0$ es cerrado en X_a, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\{ z \in X_a : d_a(x,z) < \varepsilon \} \subset X_a - X_0$. Entonces $d(x,y) \geq$ (por el tercer paso) $\inf \{ d(x,z) + d(z,y) : z \in X_a \cap X_0 \} \geq$ (por (a) y el segundo paso) $\inf \{ d_a(x,z) : z \in X_a \cap X_0 \} \geq \varepsilon > 0$. Así que $d(x,y) > \varepsilon$. Esta contradicción prueba que x, y deben estar en el mismo X_a y, por tanto $x = y$.

(d). Para comprobar que $d(x,y) = d(y,x)$, basta recordar que si $a \in A^*$ y $(x,y) \in X_a \times X_a$, entonces $\delta(x,y) = d_a(x,y) = d_a(y,x) = \delta(y,x)$. Así que $\delta(x,y) = \delta(y,x)$ para toda $(x,y) \in R$.

(e). Dados $x, y, z \in X$, $d(x,Z) + d(Z,y) = \inf \{ \delta(x,Z_2) + \ldots + \delta(Z_{m-1},Z) : (Z_1,Z_2), \ldots, (Z_{m-1},Z_m) \in R,\ m \geq 2,\ x = Z_1,\ Z = Z_m \} + \inf \{ \delta(Z,W_2) + \ldots + \delta(W_{k-1},y) : k \geq 2, (W_1,W_2), \ldots, (W_{k-1},W_k) \in R$ y $Z = W_1,\ W_k = y \} = \inf \{ \delta(x, Z_2) + \ldots + \delta(Z_{m-1},Z) + \delta(Z,W_2) + \ldots + \delta(W_{k-1},y) : (x,Z_2), \ldots, (Z_{m-1},Z), (Z,W_2), \ldots (W_{k-1},y) \in$

R, $m,k \geq 2$) $\geq d(x,y)$. Por tanto $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Quinto paso. Si cada (X_a, d_a) ($a \in A^*$) es arco - convexo y $X_a \cap X_0$ es finito para toda $a \in A$, entonces (X,d) es arco - convexo.

Tomemos $x,y \in X$, $x \neq y$. Si ambos puntos están en un mismo X_a ($a \in A^*$), como $(X_a, d) = (X_a, d_a)$ es arco - convexo, existe C arco en X con las propiedades requeridas. Podemos suponer entonces que existe $a \in A$ tal que $x \in X_a$ y $y \notin X_a$. Por el tercer (y el cuarto) paso, existe $z \in X_a \cap X_0$ tal que $d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$. Supongamos que $y \in X_b$ con $b \in A^*$. Entonces existe $w \in X_0 \cap X_b$ tal que $d(z,w) + d(w,y) = d(z,y)$ (si $b \neq 0$ y $z \in X_b$, hacemos $z = w$. Si $b \neq 0$ y $z \notin X_b$, w existe por el tercer (y cuarto) paso. Si $b = 0$, hacemos $w = y$.).
Como todos los X_a's son arco - convexos, existen arcos C_1, C_2 y C_3 en X_a, X_0 y X_b respectivamente (y por tanto en X) tales que $x,z \in C_1$, $z,w \in C_2$, $w,y \in C_3$, $d(x,z) = d(x,x_1) + d(x_1,z)$, $d(z,w) = d(z,x_2) + d(x_2,w)$ y $d(w,y) = d(w,x_3) + d(x_3,y)$ para cualesquiera $x_1 \in C_1$, $x_2 \in C_2$ y $x_3 \in C_3$. (Aquí estaríamos suponiendo que $x \neq z$, $z \neq w$, y $w \neq y$. En el caso en que se diera alguna (o algunas) igualdad entre estos puntos, sólo tomaríamos arcos para los que sean diferentes y se haría un argumento como el que vamos a hacer).

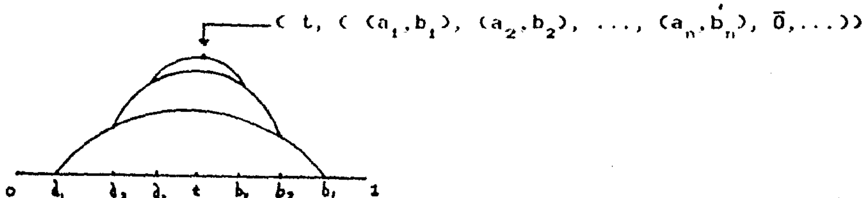
Entonces, para cualquier $x_1 \in C_1$, $d(x,y) = d(x,z) + d(z,w) + d(w,y) = d(x,x_1) + d(x_1,z) + d(z,w) + d(w,y) \geq d(x,x_1) + d(x_1,y) \geq d(x,y)$. Asi que $d(x,y) = d(x,x_1) + d(x_1,y)$. En esta forma se muestra que $d(x,y) = d(x,x_0) + d(x_0,y)$ para cualquier $x_0 \in C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

Finalmente, como $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ es arco - conexo, existe C

arco en $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ que tiene a x y a y. Entonces C tiene las propiedades requeridas.

Construcción del ejemplo.

Definimos $X = \{ (t, ((a_1,b_1), (a_2,b_2), \ldots, (a_n,b_n), \bar{0}, \ldots)) : n \in \mathbb{N} \cup \{ 0 \}, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ son numeros racionales de I y $0 < a_1 < \ldots < a_n \leq t \leq b_n < \ldots < b_1 \}$. Donde $\bar{0} = (0,0)$.



Para manejar mejor a X, se introduce la siguiente notación: Denotamos por S al conjunto de sucesiones de elementos de $Q \times Q$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, hacemos $Pn = \{ ((a_1,b_1), \ldots, (a_n,b_n), \bar{0}, \bar{0}, \ldots) \in S : 0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < b_n < \ldots < b_1 < 1 \}$. Si $\alpha = ((a_1,b_1), \ldots, (a_n,b_n), \bar{0}) \in S$, hacemos $c_\alpha = a_n$, $e_\alpha = b_n$, $\alpha* = ((a_1,b_1), \ldots, (a_{n-1},b_{n-1}), \bar{0}, \ldots) \in P_{n-1}$ ($P_0 = \{ \acute{0} \}$ donde $\acute{0} = (\bar{0}, \bar{0}, \ldots)$), $I\alpha = \{ (t,\alpha) : c_\alpha < t < e_\alpha \} \cup \{ a_\alpha, b_\alpha \}$ donde $a_\alpha = (c_\alpha, \alpha*)$, $b_\alpha = (e_\alpha, \alpha*)$.

Le damos a $I\alpha$ la métrica $d\alpha$ que lo hace isométrico al intervalo $[c_\alpha, e_\alpha]$. Es decir, $d\alpha((t,\alpha), (s,\alpha)) = |t - s|$, $d\alpha(a_\alpha, b_\alpha) = e_\alpha - c_\alpha$, $d\alpha((t,\alpha), a_\alpha) = t - c_\alpha$ y $d\alpha((s,\alpha), b_\alpha) = e_\alpha - t$.

Para el caso en que $\alpha = \acute{0}$, las definiciones son : $\alpha* = \alpha$, $c_\alpha = 0$, $e_\alpha = 1$, $a_\alpha = (c_\alpha, \alpha*)$, $b_\alpha = (e_\alpha, \alpha*)$, $I\alpha = \{ (t,\alpha) : 0 \leq t \leq 1 \}$ y $d\alpha$ es la métrica usual, esto es $d\alpha((t,\alpha),(s,\alpha)) = |s - t|$.

Para $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{ 0 \}$, definimos $X_n = \cup \{ I\alpha : \alpha \in P_k$ para alguna $k \in \{ 0, 1, \ldots, n \}\}$. Entonces $X_n = \{ (t,((a_1,b_1), \ldots, (a_k,b_k), \bar{0}, \ldots)) \in X : 0 \leq k \leq n \}$, $X_* = \cup \{ X_n : n \in \mathbb{N}^* \}$ y $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots$.

Otras definiciones que nos serán útiles son :

Para $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in P_n$, definimos $K\alpha' = \{ (t,((s_1,t_1), (s_2,t_2), \ldots)) \in X : ((s_1,t_1), \ldots, (s_n,t_n), \bar{0}, \ldots) = \alpha \}$, $K\alpha = K\alpha' \cup \{ a_\alpha, b_\alpha \}$ y $L\alpha = X - K\alpha'$. Por último, definimos $P = \cup \{ P_n : n \in \mathbb{N} \}$ y $P^* = P \cup P_0$. Notemos que :

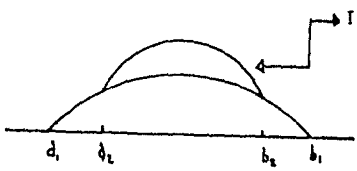
(i). $I\alpha \subset K\alpha$.

(ii). $K\alpha \cap X_{n-1} = I\alpha$ (si $\alpha \in P_n$).

(iii). $I\alpha \cap X_{n-1} = \{ a_\alpha, b_\alpha \}$ (si $\alpha \in P_n$).

Para $\alpha = ((a_1,b_1), (a_2,b_2), \bar{0}, \ldots)$

$I\alpha$ es este intervalo.



$K\alpha = I\alpha$ + la unión de todos los intervalos que se construyen sobre $I\alpha$ + la unión de todos los intervalos que se construyen sobre uno que es construido sobre $I\alpha$ + ...

X_n = la unión de todos los intervalos que se han construido hasta el paso n-ésimo.

Para definir la métrica del espacio X, construiremos primero, de manera inductiva una sucesión de métricas d_0, d_1, ... tales que, para cada $n \in \mathbb{N}^*$:

(1). d_n es métrica para X_n.

(2). d_{n+1} coincide con d_n en X_n.

(3). d_n coincide con d_α en I_α, para cualquier $\alpha \in P_n$.

(4). (X_n, d_n) es arco convexo.

(5). Si $k \in \bar{n}$, $\alpha \in P_k \cap X_n$ y $y \in X_n - K_\alpha$, entonces $d_n(x,y) = \min\ (\ d_n(x,a_\alpha) + d_n(a_\alpha,y),\ d_n(x,b_\alpha) + d_n(b_\alpha,y)\ )$.

1. Para $n = 0$. $X_0 = I_{\hat{0}}$, de manera que podemos definir $d_0 = d_{\hat{0}}$.

2. Supongamos que han sido definidas d_0, d_1, ..., d_n con las propiedades requeridas, d_{n+1} sera construida aplicando la proposición 9, por lo que tenemos que acomodar todo para poder aplicar dicha proposición.

Hacemos $\mathcal{F} = \{\ (I_\alpha, d_\alpha)\ :\ \alpha \in P_{n+1}\ \} \cup \{\ (X_n, d_n)\ \}$. Mencionamos en (iii) que si $\alpha \in P_{n+1}$, entonces $I_\alpha \cap X_n = \{\ a_\alpha, b_\alpha\ \}$. De modo que $I_\alpha \cap X_n$ es cerrado en I_α. Además, $d_n(a_\alpha, b_\alpha) = d_n(\ (c_\alpha, \alpha*),\ (e_\alpha, \alpha*)\ ) =$ (por hipótesis de inducción) $d_{\alpha*}(\ (c_\alpha,\alpha*),\ (e_\alpha,\alpha*)\ ) = e_\alpha - c_\alpha = d_\alpha(a_\alpha, b_\alpha)$. De manera que d_n y d_α coinciden en $I_\alpha \cap X_n$. Finalmente, si α, $\beta \in P_{n+1}$ y $x \in (\ I_\alpha - X_n\ ) \cap (\ I_\beta - X_n\ )$ entonces $x \neq a_\alpha$ y b_α. De aquí que x es de las formas $x = (t,\alpha)$ y $x = (s,\beta)$. Entonces $\alpha = \beta$. Esto prueba que los conjuntos de la familia $\{\ I_\alpha - X_n\ :\ \alpha \in P_{n+1}\ \}$ son ajenos dos a dos.

Hemos satisfecho entonces las hipótesis de la proposición 9. Entonces existe una metrica d_{n+1} para $X_{\mathcal{F}} = (\ \cup\ \{\ I_\alpha : \alpha \in P_{n+1}\ \}) \cup X_n = X_{n+1}$ que extiende a todos las d_α's y a d_n. Además (X_{n+1}, d_{n+1}) es arco convexo porque cada (I_α, d_α) es un intervalo e $I_\alpha \cap X_n = \{\ a_\alpha,\ b_\alpha\ \}$ para toda $\alpha \in P_{n+1}$. Y también, si $\alpha \in P_{n+1}$, $x \in I_\alpha$ y $y \notin I_\alpha$, entonces $d_{n+1}(x,y) = \min\ (\ d_{n+1}(x,a_\alpha) + d_{n+1}(a_\alpha,y),\ \ d_{n+1}(x,b_\alpha) + d_{n+1}(b_\alpha,y)\ )$ ....(*).

Solo nos falta comprobar que d_{n+1} cumple con la propiedad (5). Tomemos $k \in \overline{n+1}$, $\alpha \in P_k$, $x \in K_\alpha \cap X_{n+1}$ y $y \in X_{n+1} - K_\alpha$. Analicemos dos casos :

(a) $k = n + 1$. Entonces $\alpha \in P_{n+1}$. Así que (ii) implica que $y \in I_\alpha$, e (i) implica que $y \notin I_\alpha$. Entonces, por (*), tenemos que $d_{n+1}(x,y) = \min (d_{n+1}(x,a_\alpha) + d_{n+1}(a_\alpha,y), d_{n+1}(x,b_\alpha) + d_{n+1}(b_\alpha,y)$.

(b) $1 \leq k \leq n$. Si $x \in X_{n+1} - X_n$, entonces existe $\beta \in P_{n+1}$ tal que $x \in I_\beta - \{ a_\beta, b_\beta \}$. Entonces β es de la forma $\beta = ((a_1,b_1), \dots, (a_{n+1},b_{n+1}), \bar{0}, \dots)$ y x es de la forma $x = (t,\beta)$. Como $x \in K_\alpha - X_n$, y $\alpha \in P_k$ y $k \leq n$, tenemos que $\{ a_\alpha, b_\alpha \} \subset I_\alpha \subset X_n$. así que $x \in K_\alpha - \{ a_\alpha, b_\alpha \} = K_\alpha'$. De modo que $((a_1,b_1), \dots, (a_k,b_k), \bar{0}, \dots) = \alpha$. Como $k \leq n$, las primeras k coordenadas de β y β^* son $(a_1,b_1), \dots, (a_k,b_k)$ entonces cualquier elemento de X de la forma (s,β) y (s,β^*) pertenece a K_α'. De manera que $I_\beta \subset K_\alpha$. Entonces $y \notin I_\beta$. Aplicando (*), tenemos que existe $Z_1 \in \{ a_\zeta, b_\zeta \} \subset K_\alpha \cap X_n$ tal que $d_{n+1}(x,y) = d_{n+1}(x,Z_1) + d_{n+1}(Z_1,y)$. Cuando $x \in X_n$, hacemos $Z_1 = x$ y entonces tenemos que, en cualquier caso :

Existe $Z_1 \in K_\alpha \cap X_n$ tal que $d_{n+1}(x,y) = d_{n+1}(x,Z_1) + d_{n+1}(Z_1,y)$.

Si $y \in X_{n+1} - X_n$, entonces existe $\gamma \in P_{n+1}$ tal que $y \in I\gamma - \{ a_\gamma, b_\gamma \}$. Entonces γ es de la forma $\gamma = ((c_1,d_1), \dots, (c_{n+1},d_{n+1}), \bar{0}, \dots)$ y y es de la forma $y = (s,\gamma)$. Supongamos que existe un punto $z \in I\gamma \cap K_\alpha$. Entonces z es de la forma $z = (r,\gamma)$ o $z = (r,\gamma^*)$. Como γ y γ^* tienen al menos n coordenadas diferentes de $\bar{0}$ tenemos que $z \notin X_{n-1}$. Ya que $1 \leq k \leq n$, tenemos que $z \notin X_{k-1}$. Además, $a_\alpha, b_\alpha \in X_{k-1}$, de manera que $z \in K_\alpha - \{ a_\alpha, b_\alpha \} = K_\alpha'$.

Así que $((c_1,d_1), \dots, (c_l,d_l), \bar{0}, \dots) = \alpha$, pero $y \in I\gamma - \{ a_\gamma, b_\gamma \}$ implica que y es de la forma $y = (u,\gamma) = (u, ($

(c_1,d_1), ..., (c_{n+1},d_{n+1}), $\bar{0}$, ...)). De aquí que $y \in K\alpha' \subset K\alpha$. **Esta** contradicción prueba que $I\gamma \cap K\alpha = \emptyset$. En particular, $Z_1 \in I\gamma$. Entonces, aplicando (*), tenemos que existe $Z_2 \in (a_\gamma, b_\gamma) \subset X_n - K\alpha$ tal que $d_{n+1}(Z_1,y) = d_{n+1}(Z_1,Z_2) + d_{n+1}(Z_2,y)$. Cuando $y \in X_n$, hacemos $Z_2 = y$ y entonces tenemos que, en cualquier caso:

Existe $Z_2 \in X_n - K\alpha$ tal que $d_{n+1}(Z_1,y) = d_{n+1}(Z_1,Z_2) + d_{n+1}(Z_2,y)$.

Podemos entonces aplicar la hipótesis de inducción a Z_1 y Z_2 y obtenemos que : $d_{n+1}(Z_1,Z_2) = \min(d_{n+1}(Z_1,a_\alpha) + d_{n+1}(a_\alpha,Z_2), d_{n+1}(Z_1,b_\alpha) + d_{n+1}(b_\alpha,Z_2))$ (ponemos d_{n+1} por que es una extensión de d_n). Supongamos, por ejemplo, que $d_{n+1}(Z_1,Z_2) = d_{n+1}(Z_1,a_\alpha) + d_{n+1}(a_\alpha,Z_2)$.

Entonces $d_{n+1}(x,y) = d_{n+1}(x,Z_1) + d_{n+1}(Z_1,y) = d_{n+1}(x,Z_1) + d_{n+1}(Z_1,Z_2) + d_{n+1}(Z_2,y) = d_{n+1}(x,Z_1) + d_{n+1}(Z_1,a_\alpha) + d_{n+1}(a_\alpha,Z_2) + d_{n+1}(Z_2,y) \geq d_{n+1}(x,a_\alpha) + d_{n+1}(a_\alpha,y) \geq d_{n+1}(x,y)$. De manera que $d_{n+1}(x,a_\alpha) + d_{n+1}(a_\alpha,y) = d_{n+1}(x,y) \leq d_{n+1}(x,b_\alpha) + d_{n+1}(b_\alpha,y)$. Por tanto $d_{n+1}(x,y) = \min(d_{n+1}(x,a_\alpha) + d_{n+1}(a_\alpha,y), d_{n+1}(x,b_\alpha) + d_{n+1}(b_\alpha,y))$.

Hemos comprobado entonces la propiedad (5). Esto termina el paso inductivo y por tanto, la prueba de la existencia de las d_n's está completa.

Consideremos a X con la métrica d que extiende a d_n para toda $n \in \mathbb{N}$. Formalmente esta métrica puede definirse así : Dados $x,y \in X$, existen $n,m \in \mathbb{N}$ tales que $x \in X_n$, $y \in X_m$ y, por ejemplo, $n \leq m$. Entonces $x,y \in X_m$ así que tiene sentido definir $d(x,y) = d_m(x,y)$. La propiedad (2) implica que esta definición no depende de m. Es fácil probar que, así definida, d es una métrica. Por las propiedades (3) y (4), tenemos entonces que d coincide con d_α

en $I\alpha$ para toda α y (X,d) es arco convexo. Entonces X es un espacio conexo y localmente conexo.

Segunda Parte. $P(5)$ es falsa para X.

Para comprobar que $P(5)$ es falsa para X, probaremos una serie de propiedades para este espacio.

A. Para toda $\alpha \in P$ sea $X = K\alpha \cup L\alpha$ y $K\alpha \cap L\alpha = \{ a_\alpha, b_\alpha \}$. De las definiciones de $K\alpha$ y $L\alpha$, es claro que $X = K\alpha \cup L\alpha$ y que $K\alpha \cap L\alpha \subset \{ a_\alpha, b_\alpha \}$. Para probar la otra inclusión, es suficiente mostrar que $a_\alpha, b_\alpha \in L\alpha$, es decir que $a_\alpha, b_\alpha \notin K\alpha'$. Si $\alpha = ((a_1,b_1), \ldots, (a_n,b_n), \bar{0}, \ldots)$ entonces a_α y b_α son de la forma:
$(s,((a_1,b_1), \ldots, (a_{n-1},b_{n-1}), \bar{0}, \ldots))$ y si alguno de ellos estuviera en $K\alpha'$, entonces $((a_1,b_1), \ldots, (a_{n-1},b_{n-1}), \bar{0}, \ldots) = \alpha$. Esto no es posible pues $(a_n,b_n) \neq \bar{0}$. Por tanto $a_\alpha, b_\alpha \notin K\alpha'$. Esto termina la prueba de que $K\alpha \cap L\alpha = \{ a_\alpha, b_\alpha \}$.

B. Para toda $\alpha \in P$, $L\alpha$ es un continuo de X. Para probar que $L\alpha$ es cerrado, tomemos $x \in X - L\alpha = K\alpha - \{ a_\alpha, b_\alpha \}$. Sea $\varepsilon = \text{mín} \{ d(x,a_\alpha), d(x,b_\alpha) \}$. Probaremos que $B\varepsilon(x) \subset K\alpha - \{ a_\alpha, b_\alpha \}$. Supongamos que existe $y \in B\varepsilon(x)$ tal que $y \notin K\alpha - \{ a_\alpha, b_\alpha \}$. Entonces $y \notin K\alpha$ o $y \in \{ a_\alpha, b_\alpha \}$. La segunda opción no es posible pues $d(a_\alpha,x), d(b_\alpha,x) \geq \varepsilon > d(x,y)$, de manera que $y \notin K\alpha$.

Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \in Pk$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq k$, $x,y \in Xn$. Entonces $x \in Xn \cap K\alpha$ y $y \in Xn - K\alpha$. De modo que por la propiedad (5) (de este capítulo), tenemos que $\varepsilon > d(x,y) = \text{mín} \{ d(x,a_\alpha) + d(a_\alpha,y), d(x,b_\alpha) + d(b_\alpha,y) \} \geq \text{mín} \{ d(x,a_\alpha), d(x,b_\alpha) \} = \varepsilon$. Esta contradicción prueba que $B\varepsilon(x) \subset X - L\alpha$. Por tanto $L\alpha$ es cerrado.

Para probar que $L\alpha$ es conexo, tomemos $x \in L\alpha - \{ a_\alpha, b_\alpha \} = X - K\alpha$. Sea $\varepsilon = \min \{ d(x,a_\alpha), d(x,b_\alpha) \}$. Procediendo como en el parrafo anterior, se muestra que $B\varepsilon(x) \subset X - K\alpha$ (esto prueba, en particular, que $K\alpha$ es cerrado). Supongamos, por ejemplo, que $\varepsilon = d(x,a_\alpha)$. Sea C un arco en X tal que $x,a_\alpha \in C$ y $d(x,c) + d(c,a_\alpha) = d(x,a_\alpha)$ para toda $c \in C$. Dada $c \in C - \{ a_\alpha \}$, $d(x,c) < d(x,a_\alpha) = \varepsilon$. De manera que $C \subset B\varepsilon(x) \cup \{ a_\alpha \} \subset (X - K\alpha) \cup \{ a_\alpha \} \subset L\alpha$. Hemos probado entonces que cualquier punto de x de $L\alpha$ puede conectarse por un conexo dentro de $L\alpha$ a alguno de los dos puntos a_α o b_α. Entonces si probamos que a_α y b_α pueden conectarse por un conexo dentro de $L\alpha$, tendremos que $L\alpha$ es conexo.

Por definición, $a_\alpha, b_\alpha \in I\alpha$. Aseguramos que $I\alpha^* \subset L\alpha = X - K\alpha$, de no ser así existe $z = (t, ((a_1,b_1), \ldots)) \in K\alpha' \cap I\alpha^*$. Entonces $\alpha = ((a_1,b_1), \ldots, (a_k,b_k), \bar{0}, \ldots) \neq ((a_1,b_1), \ldots, (a_{k-1},b_{k-1}), \bar{0}, \ldots) = \alpha^*$ y $\alpha \neq (\alpha^*)^*$ ($k \geq 1$). Como $z \in I\alpha^*$, z debe de ser de la forma $z = (t,\alpha^*)$ o $z = (t,(\alpha^*)^*)$ lo que nos llevaría a que $\alpha = \alpha^*$ o $\alpha = (\alpha^*)^*$. Esta contradicción termina la prueba de que $L\alpha$ es conexo.

C. Para toda $\alpha \in P$, $K\alpha$ es un continuo de X. Ya mencionamos hace dos párrafos que $K\alpha$ es conexo. Procediendo como en ese mismo párrafo, es posible probar que cualquier punto x de $K\alpha$ puede conectarse por un conexo dentro de $K\alpha$ a alguno de los dos puntos a_α o b_α. Y como $I\alpha$ es un subconjunto conexo de $K\alpha$ que contiene a estos dos puntos, podemos concluir que $K\alpha$ es conexo.

CH. X es multicoherente. Esto es inmediato de las propiedades anteriores.

Supongamos que P(5) es válida para X. Sean C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5 continuos de X tales que $X = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5$

y $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ si y sólo si $| i - j |_5 \leq 1$. Para cada $i \in \bar{5}$, hacemos $D_i = X - (\cup \{ C_j : j \in \bar{5} - \{ i \} \})$. Es claro que $D_i = C_i - (C_{i+1} \cup C_{i-1})$. D_i es un conjunto no vacío pues de lo contrario, $C_i = (C_i \cap C_{i+1}) \cup (C_i \cap C_{i-1})$ sería una separación de C_i que es conexo. Queremos obtener una contradicción a la suposición de que $P(5)$ es válida para X. Para hacer esto, probaremos primero cinco afirmaciones.

D. Si $\alpha \in P^*$ e $i, j \in \bar{5}$ son tales que $I\alpha \cap D_i \neq \emptyset$ e $I\alpha \cap D_j \neq \emptyset$, entonces $| i - j |_5 \leq 1$.

Supongamos que esta afirmación es falsa. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $i = 1$ y $j = 3$. Como cada D_i es abierto y el espacio $(I\alpha, d|I\alpha)$ es isométrico a un intervalo, tenemos que podemos elegir racionales u_1, u_2, u_3, u_4 y v_1, v_2, v_3, v_4 tales que $u_1 < u_2 < u_3 < u_4$, $v_1 < v_2 < v_3 < v_4$, $(u_k,\alpha) \in I\alpha \cap D_1$, $(v_k,\alpha) \in I\alpha \cap D_3$ con $k \in \bar{4}$ y que, por ejemplo, $u_4 < v_1$.
Para $k \in \bar{4}$, hacemos $\beta_k = ((a_1,b_1), \ldots, (a_n,b_n), (u_k,v_k), \bar{0}, \ldots)$ donde $((a_1,b_1), \ldots, (a_n,b_n), \bar{0}, \ldots) = \alpha$ en el caso en que $\alpha \in P_n$ con $n \geq 1$. En el caso en que $\alpha = \dot{0}$ simplemente hacemos $\beta_k = ((u_k,v_k), \bar{0}, \ldots)$. Entonces $a_{\beta_k} = (u_k,\alpha) \in K_{\beta_k} \cap D_1$ y $b_{\beta_k} = (v_k,\alpha) \in K_{\beta_k} \cap D_3$. De manera que K_{β_k} es conexo, intersecta a C_1 y a C_3 que son cerrados ajenos. Entonces K_{β_k} no puede estar contenido en $C_1 \cup C_3$. De aquí que existe $i_k \in \bar{5}$ tal que $C_{i_k} \cap K_{\beta_k} \neq \emptyset$. Como $a_{\beta_k} \in D_1$ y $b_{\beta_k} \in D_3$, tenemos que $a_{\beta_k}, b_{\beta_k} \notin C_{i_k}$. de (A) se deduce entonces que $C_{i_k} \subset (K_{\beta_k} - L_{\beta_k}) \cup (L_{\beta_k} - K_{\beta_k}) = (X - L_{\beta_k}) \cup (X - K_{\beta_k})$ que son dos abiertos ajenos de X. Ya que C_{i_k} es conexo e intersecta a K_{β_k}, tenemos que $C_{i_k} \subset K_{\beta_k} - L_{\beta_k} = K_{\beta_k} - \{ a_{\beta_k}, b_{\beta_k} \} = K'_{\beta_k}$. Por tanto $C_{i_k} \subset K'_{\beta_k}$.

Tomemos $h, k \in \bar{4}$ tales que $h \neq k$. Entonces $(u_k,v_k) \neq (u_h,v_h)$. Así que $\beta_h \neq \beta_k$. Esto implica que $K'_{\beta_h} \cap K'_{\beta_k} = \emptyset$.

($x = (t, ((c_1, d_1), \ldots)) \in K'_{\beta k} \cap K'_{\beta k}$ de manera que $((c_1, d_1), \ldots, (c_{n+1}, d_{n+1}), \bar{0}, \ldots)$ es igual a βk o a βk).

Y como $C_{i_j} \cap C_{i_k} \subset K'_{\beta k} \cap K'_{\beta k} = \emptyset$, tenemos que $i_k \neq i_j$. Como $a_{\beta k} \in C_1 - C_{i_k}$ (por que $C_{i_k} \subset K_{\beta k} - L_{\beta k}$) y $b_{\beta k} \in C_3 - C_{i_k}$, tenemos que $i_k \neq 1, 3$. Hemos probado entonces que $1, 3, i_1, i_2, i_3, i_4$ son seis elementos diferentes de $\bar{5}$. Esta contradicción prueba a D.

E. Si $\alpha \in P^*$ e $i, j \in \bar{5}$ son tales que $|i - j| \geq 2$, $C_i \cap I\alpha \neq \emptyset$ y $C_j \cap I\alpha \neq \emptyset$ entonces $D_{i+1} \cap I\alpha \neq \emptyset$ o $D_{i-1} \cap I\alpha \neq \emptyset$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $i = 1$ y $j = 3$. $I\alpha$ es un conjunto conexo que intersecta a los conjuntos cerrados ajenos C_1 y $C_3 \cup C_4$, entonces existe un punto $x \in I\alpha - (C_1 \cup C_3 \cup C_4)$. Entonces $x \in C_2 - (C_1 \cup C_3 \cup C_4) \subset D_2$ o $x \in C_5 - (C_1 \cup C_3 \cup C_4) \subset D_5$. Por tanto $I\alpha \cap D_{i+1} \neq \emptyset$ o $I\alpha \cap D_{i-1} \neq \emptyset$.

F. Si $\alpha \in P^*$ e $i, j \in \bar{5}$ son tales que $I\alpha \cap C_i \neq \emptyset$, $I\alpha \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ e $I\alpha \cap D_j \neq \emptyset$, entonces $j \neq i \oplus 3$.

Supongamos que es falsa esta afirmación y que, por ejemplo, $i = 1$ y $j = 4$. Entonces $I\alpha \cap C_1 \neq \emptyset \neq I\alpha \cap C_2$ y $\emptyset \neq I\alpha \cap D_4 \subset I\alpha \cap C_4$. Por E, tenemos que $I\alpha \cap D_2 \neq \emptyset$ o $I\alpha \cap D_5 \neq \emptyset$. La primera opción contradice D. De manera que $I\alpha \cap D_5 \neq \emptyset$. Como $I\alpha \cap C_2 \neq \emptyset$ e $I\alpha \cap C_4 \neq \emptyset$, aplicando otra vez E, obtenemos que $I\alpha \cap D_1 \neq \emptyset$ o $I\alpha \cap D_3 \neq \emptyset$. Ambas opciones contradicen D por que $I\alpha \cap D_5 \neq \emptyset$. Esto termina la prueba de F.

G. Si $\alpha \in P^*$, entonces existe $i \in \bar{5}$ tal que $I\alpha \cap C_i = \emptyset$.

Supongamos que no es cierto. Entonces $I\alpha \cap C_1 \neq \emptyset$, $I\alpha \cap C_3 \neq \emptyset$ y E implican que $I\alpha \cap D_5 \neq \emptyset$ o $I\alpha \cap D_2 \neq \emptyset$. Ambas contradicen F por que estamos suponiendo que $I\alpha$ intersecta todos los C_i's. Esto prueba G.

H. Si $\alpha \in P^*$ e $i \in \bar{5}$ son tales que $C_i \cap I\alpha \neq \emptyset$ e $I\alpha$ no está contenido en C_i, entonces $D_{i+1} \cap I\alpha \neq \emptyset$ o $D_{i-1} \cap I\alpha \neq \emptyset$.

Supongamos, por ejemplo, que $i = 1$. Si $I\alpha \cap (C_3 \cup C_4) \neq \emptyset$, entonces esta afirmacion se sigue inmediatamente de E. Supongamos entonces que $I\alpha \cap (C_3 \cup C_4) = \emptyset$. Como $I\alpha$ no está contenido en C_1, existe $x \in (I\alpha - C_1) - (C_3 \cup C_4) \subset D_2 \cup D_5$. Por tanto, $I\alpha \cap (D_2 \cup D_5) \neq \emptyset$.

Ahora estamos listos para obtener una contradicción con la suposición que hicimos de que P(5) es válida.

Sea $m = \text{mín} \{ k \in \mathbb{N} : X_k \cap C_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \bar{5} \}$. Entonces existe $i_0 \in \bar{5}$ tal que $X_{m-1} \cap C_{i_0} = \emptyset$, (si $m = 1$, la existencia de i_0 se obtiene de G). Supongamos, por ejemplo, que $i_0 = 3$. Tomemos $x \in (C_3 \cap X_m) - X_{m-1}$, entonces existe $\alpha \in P_m$ tal que $x \in I\alpha$, de manera que $C_3 \cap K\alpha \neq \emptyset$. Notemos que $a_\alpha, b_\alpha \notin C_3$.

Como C_3 es conexo, $a_\alpha, b_\alpha \notin C_3$, $C_3 \cap K\alpha \neq \emptyset$ y $X - \{ a_\alpha, b_\alpha \} = (K\alpha - \{ a_\alpha, b_\alpha \}) \cup (L\alpha - \{ a_\alpha, b_\alpha \} = (X - L\alpha) \cup (X - K\alpha)$ es una separación, tenemos que $C_3 \subset K\alpha - \{ a_\alpha, b_\alpha \}$. Por otra parte, $C_3 \cap I\alpha \neq \emptyset$ e $I\alpha$ no está contenido en C_3 ($a_\alpha, b_\alpha \notin C_3$) junto con H implican que $D_2 \cap I\alpha \neq \emptyset$ o $D_4 \cap I\alpha \neq \emptyset$. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $D_4 \cap I\alpha \neq \emptyset$.

Aseguramos que $C_2 \cap I\alpha \neq \emptyset$ pues de lo contrario, $a_\alpha, b_\alpha \notin C_2$, $\emptyset \neq C_2 \cap C_3 \subset C_2 \cap K\alpha$. Así que $C_2 \subset (X - K\alpha) \cup (X - L\alpha)$, $C_2 \cap (X - L\alpha) \neq \emptyset$ y C_2 es conexo. De modo que $C_2 \subset X - L\alpha \subset K\alpha$. Por tanto $C_2 \cap X_m \subset K\alpha \cap X_m = I\alpha$ (por (ii)). Y entonces $C_2 \cap X_m \subset C_2 \cap I_\alpha = \emptyset$. Esto es una contradicción con la elección de m. Por tanto $C_2 \cap I\alpha \neq \emptyset$

Ahora vamos a mostrar que $a_\alpha, b_\alpha \notin C_2$. Si, por ejemplo $a_\alpha \in C_2$, como $a_\alpha \notin C_3$, tenemos que $a_\alpha \in C_1 \cap C_2$ o $a_\alpha \in D_2$. La segunda opción contradice D. (porque ya teníamos que $D_4 \cap I\alpha \neq \emptyset$). La primera opción también es absurda por F. Por tanto $a_\alpha, b_\alpha \notin C_2$.

Entonces $C_2 \subset X - \{ a_\alpha, b_\alpha \}$ e intersecta a $K\alpha$. La convexidad de C_2 implica que $C_2 \subset K\alpha - \{ a_\alpha, b_\alpha \}$. Si $C_1 \cap I\alpha = \emptyset$, entonces $a_\alpha, b_\alpha c \notin C_1$. Esto implica que $C_1 \subset X - K\alpha$ o $C_1 \subset X - L\alpha$. Pero $\emptyset \neq C_1 \cap C_2 \subset C_1 \cap K\alpha$, de manera que $C_1 \subset K\alpha - I\alpha$. Además $\emptyset \neq C_1 \cap X_m \subset (K\alpha - I\alpha) \cap X_m = \emptyset$. Esta contradicción muestra que $C_1 \cap I\alpha \neq \emptyset$. Por tanto, $C_1 \cap I\alpha \neq \emptyset \neq C_2 \cap I\alpha$ y $D_4 \cap I\alpha \neq \emptyset$. Esto contradice F y termina la prueba de que P(5) no es válida para X.

CAPITULO VI

En este capítulo probaremos que $P(4)$ es verdadera. La demostración fue extraida de [6].

Lema 6.- Sea X conexo, localmente conexo, normal, T_1 y multicoherente. Entonces existen continuos A_1 A_2 A_3 y A_4 de X tales que (A_1, A_2, A_3, A_4) es una cadena circular, y si $Y = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, entonces $(X - Y)^{-} \cap ((A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \cap A_3) \cup (A_3 \cap A_4) \cup (A_4 \cap A_1)) = \emptyset$.

Demostración. X multicoherente implica que existen continuos H y K de X tales que $X = H \cup K$ y $H \cap K$ no es conexo. Sean A y B cerrados ajenos y no vacíos tales que $A \cup B = H \cap K$. Por el lema 1 existe una componente D de $X - H$ tal que $D^{-} \cap A \neq \emptyset$ y $D^{-} \cap B \neq \emptyset$. Sean U_1 y V_1 abiertos de X tales que $A \subset U_1$, $B \subset V_1$ y $U_1^{-} \cap V_1^{-} = \emptyset$. Elegimos una componente U de U_1 y una componente V de V_1 tales que $U \cap D^{-} \cap A \neq \emptyset$ y $V \cap D^{-} \cap B \neq \emptyset$. Entonces podemos elegir puntos $u \in U \cap D$ y $v \in V \cap D$.

Como X es regular y localmente conexo, podemos dar una cubierta de D por abiertos conexos cuya cerradura esté contenida en D. Haciendo una cadena finita con los elementos de esta cubierta entre u y v, podemos construir un abierto conexo W de D tal que $u, v \in W \subset W^{-} \subset D$.

Se asegura que $FrU \cap D$ es cerrado y no vacío. Para ver que es cerrado tomamos $x \in (FrU \cap D)^{-} \subset FrU \subset X - (A \cup B) = X - (H \cap K) = (X - H) \cup (X - K)$.

Como $x \in D^- \subset K^- = K$, así que $x \notin X - K$ y entonces $x \in X - H$. Si $x \notin D$ entonces existe E componente de $X - H$ tal que $x \in E$ y $E \neq D$. E es abierto y ajeno a $FrU \cap D$. Esto es absurdo, así que $x \in D$, por tanto $(FrU \cap D]^- \subset FrU \cap D$. Esto prueba que $FrU \cap D$ es cerrado. Como $u \in U \cap D$ y $v \in V \cap D$ tenemos que $U \cap D \neq \emptyset$ y $D \cap (X - U) \neq \emptyset$, lo que implica que $D \cap FrU \neq \emptyset$. En forma similar se prueba que $FrV \cap D$ es un cerrado no vacío.

Sean P y Q abiertos de X tales que $D \cap FrU \subset P$, $D \cap FrV \subset Q$, $P^- \cap Q^- = \emptyset$, $P^- \cup Q^- \subset D$, $P^- \cap (FrU \cap (X - D)) = \emptyset$, $Q \cap (FrV \cap (X - D)) = \emptyset$, $P^- \cap V^- = \emptyset$ y $Q^- \cap U^- = \emptyset$. Sea T = la componente de $P \cup Q \cup W$ que contiene a W.

Definimos $A_1 = H$, $A_2 = U^-$, $A_3 = T^-$ y $A_4 = V^-$. Claramente $A_1, \ldots A_4$ son continiuos de X. $A_1 \cap A_3 \subset H \cap D = \emptyset$, $A_2 \cap A_4 \subset U^- \cap V^- = \emptyset$, $\emptyset \neq A \cap U \subset A_1 \cap A_2$, $\emptyset \neq B \cap V \subset A_1 \cap A_4$, $\emptyset \neq (u) \subset A_2 \cap Q \subset A_2 \cap A_3$ y $\emptyset \neq (v) \subset A_4 \cap A_3$. Por tanto (A_1, A_2, A_3, A_4) es una cadeana circular.

Sea $Y = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Entonces $A_1 \cap A_2 \subset (H \cap U) \cup (H \cap Fr\,U) \subset U \cup (H \cap [(X - H) \cup (X - K)]) \subset U \cup (X - K) \cup U \cup Int\,H \subset Int\,Y$. De esta manera $(A_1 \cap A_2) \cap (X - Y]^- = \emptyset$.

Ahora tomamos $x \in A_2 \cap A_3 = U^- \cap T^-$. Si $x \in U \cup T \subset Int\,Y$ entonces $x \notin (X - Y]^-$. Supongamos entonces que $x \in FrU \cap FrT \subset FrU \cap Fr(P \cup Q \cup W) \subset FrU \cap (FrP \cup FrQ \cup FrW) =$ $(FrU \cap FrP) \cup (FrU \cap FrQ) \cup (FrU \cap FrW) =$ $(FrU \cap D \cap FrP) \cup (FrU \cap (X - D) \cap FrP) \cup (FrU \cap FrW)$ $= FrU \cap FrW$. De modo que $x \in FrU \cap FrW = FrU \cap D \subset P$.

Así que $W \cup (x)$ es un subconjunto conexo de $W \cup P$. De aquí que $W \cup \{ x \} \subset T$ y entonces $x \in T$. Esto es absurdo pues $x \notin T$. Esto prueba que $A_2 \cap A_3 \subset \mathrm{Int}\ Y$, y por tanto $A_2 \cap A_3 \cap (X - Y) = \emptyset$.

Finalmente tomemos $x \in A_3 \cap A_4 = T^- \cap V^-$. Supongamos que $x \in FrT \cap FrV \subset Fr(P \cup Q \cup W) \cap FrV \subset (FrP \cup FrQ \cup FrW) \cap FrV = (FrP \cap FrV) \cup (FrQ \cap FrV) \cup (FrW \cap FrV) = (FrV \cap FrQ \cap D) \cup (FrV \cap FrQ \cap (X - D)) \cup (FrW \cap Fr\ V) = FrW \cap FrV$. De manera que $x \in FrW \cap FrV \subset D \cap FrV \subset Q$. Por tanto $W \cup \{ x \}$ es un subconjunto conexo de $W \cup Q$. Así que $W \cup \{ x \} \subset T$. Esto es absurdo porque $x \notin T$. Hemos probado entonces que $FrT \cap FrV = \emptyset$. De aquí que $A_3 \cap A_4 \subset T \cup V \subset \mathrm{Int}\ Y$. Por tanto $A_3 \cap A_4 \cap (X - Y)^- = \emptyset$. Esto termina la prueba del lema.

Lema 7. Supongamos que existen continuos K, H, A, y B de X tales que $X = H \cup K$, $H \cap K = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Entonces $P(4)$ vale para X.

Demostración. Sean U y V abiertos de X tales que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U^- \cap V^- = \emptyset$. Sea P = (componente de U que contiene a A) y sea Q = (componente de $X - P$ que contiene a B). Sea $S = (X - Q)^-$, de esta manera S y Q son continuos de X, $X = S \cup Q$, $B \subset Q$ y como $A \subset P$, $P \cap Q = \emptyset$, tenemos que $A \subset (X - Q)^-$ y que $A \subset S$.
Ademas $Q \cap S = Q \cap (X - Q)^- = FrQ \subset FrP \subset FrU \subset X - (A \cup B) \subset (X - H) \cup (X - K)$, asi que $Q \cap S \subset X - (A \cup B) = (X - H) \cup (X - K)$.

Definimos $A_1 = S \cap K$, $A_2 = K \cap Q$, $A_3 = H \cap Q$ y $A_4 = H \cap S$, evidentemente A_1, A_2, A_3 y A_4 son cerrados de X. Además, $X = H \cup K = S \cup Q$, implica que $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Ya que S es un espacio conexo y $S - A = (S \cap (X - H)) \cup (S \cap (X - K))$, (si $x \in S - A$ entonces $x \notin B$ pues de lo contrario $x \in S \cap Q \subset FrU \subset U^-$, donde esto es absurdo pues $U^- \cap B = \emptyset$, así pues $x \notin B$, y por tanto

$x \in (X - H) \cup (X - K))$ donde estos dos últimos conjuntos son dos abiertos de $S - A$, lo que implica que $A \cup (S \cap (X - H))$ y $A \cap (S \cap (X - K))$ son conexos.

Pero $A \cup (S \cap (X - H)) = S \cap K = A_1$ y $A \cup (S \cap (X - K))$ $= S \cap H = A_4$. Esto prueba que A_1 y A_4 son continuos de X. De igual manera A_2 y A_3 son continuos de X.

Como $A \subset S \cap K = A_1$ y $A \subset S \cap H = A_4$, tenemos que $A_4 \cap A_1 \neq \emptyset$. Similarmente, como $B \subset Q \cap K = A_2$ y $B \subset Q \cap H = A_3$, tenemos que $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$. Por otro lado $K = (K \cap S) \cup (K \cap Q)$, $K \cap S \neq \emptyset$, $K \cap Q \neq \emptyset$ y $K \cap S$, $K \cap Q$ son cerrados, tenemos que $(K \cap S) \cap (K \cap Q) \neq \emptyset$ (K es conexo). Así que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Análogamente $A_3 \cap A_4 \neq \emptyset$.

Finalmente, $A_1 \cap A_3 = (S \cap K) \cap (H \cap Q) \subset (K \cap H) \cap ((X - H) \cup (X - K)) = \emptyset$, así que $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ y $A_2 \cap A_4 = K \cap Q \cap H \cap S = \emptyset$. Entonces $A_2 \cap A_4 = \emptyset$. Por tanto $P(4)$ vale para el espacio X.

Lema 8 . Sea (A_1, A_2, A_3, A_4) una cadena circular, sea $Y = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Supongamos que existe una componente D de $X - Y$ tal que $FrD \subset A_1 \cup A_3$, $FrD \cap A_1 \neq \emptyset$ y $FrD \cap A_3 \neq \emptyset$. Entonces $P(4)$ es valida para X.

Demostración. Como D es componente del complemento de un conexo, entonces $X - D$ es un continuo de X. Hacemos $H = X - D$ y $K = \bar{D} \cup A_1 \cup A_3$ entonces H y K son continuos de X, $X = H \cup K$ y $H \cap K = (X - D) \cap (\bar{D} \cup A_1 \cup A_3) = ((X - D) \cap \bar{D}) \cup ((X - D) \cap A_1) \cup ((X - D) \cap A_3) = FrD \cup A_1 \cup A_3 = A_1 \cup A_3$.

Así que $H \cap K = A_1 \cup A_3$. Por tanto podemos aplicar el lema 7 y obtener que $P(4)$ es válida para X.

Lema 9 . Supongamos que en X existen :

a). Una cadena circular (B_1, B_2, B_3, B_4) de continuos de X.

b). Cerrados ajenos P y Q tales que $X - (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) \subset P \cup Q$, $P \cap B_3 = \emptyset$, $Q \cap B_2 = \emptyset$. Entonces $P(4)$ es válida para X.

Demostración. Hacemos $Z = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$. Dada D componente de $X - Z$, $D \subset P \cup Q$ y como P y Q son cerrados ajenos tenemos que $D \subset P$ o $D \subset Q$. Si existiera alguna componente de $X - Z$ que cumpla que ($\operatorname{Fr} D \subset B_1 \cup B_3$ y $\operatorname{Fr} D \cap B_1 \neq \emptyset$ y $\operatorname{Fr} D \cap B_3 \neq \emptyset$) o ($\operatorname{Fr} D \subset B_2 \cup B_4$ y $\operatorname{Fr} D \cap B_2 \neq \emptyset$ y $\operatorname{Fr} D \cap B_3 \neq \emptyset$). Entonces $P(4)$ es válida para X, por tanto podemos suponer que esto no ocurre.

Definimos $A_1 = B_1 \cup (\cup \{ D \mid D \in \mathcal{C}(X - Z) \text{ y } \operatorname{Fr} D \subset B_1 \})$
$\cup (\cup \{ D \mid D \in \mathcal{C}(X - Z), D \subset P \text{ y } \operatorname{Fr} D \cap B_1 \neq \emptyset \})$,
$A_2 = B_2 \cup (\cup \{ D \mid D \in \mathcal{C}(X - Z) \text{ y } \operatorname{Fr} D \subset B_2 \})$.
$A_3 = B_3 \cup (\cup \{ D \mid D \in \mathcal{C}(X - Z) \text{ y } \operatorname{Fr} D \subset B_3 \})$.
$A_4 = B_4 \cup (\cup \{ D \mid D \in \mathcal{C}(X - Z) \text{ y } \operatorname{Fr} D \subset B_4 \}) \cup (\cup \{ D \mid D \in \mathcal{C}(X - Z), D \subset Q \text{ y } \operatorname{Fr} D \cap B_4 \neq \emptyset \})$.

Vamos a probar una serie de propiedades de A_1. A_2 A_3 y A_4.

(A). $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

Sea $x \in X$, si $x \in Z = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$ entonces $x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Supongamos entonces que $x \notin Z$. Sea D la componente de $X - Z$ tal que $x \in D$. Entonces $\operatorname{Fr} D \subset \operatorname{Fr}(X - Z) = \operatorname{Fr} Z \subset Z = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$. Así que $\operatorname{Fr} D \subset B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$. Además se tiene que $D \subset P \cup Q$, así que $D \subset P$ o $D \subset Q$, con lo que $\operatorname{Fr} D \subset P$ o $\operatorname{Fr} D \subset Q$. Analicemos los posibles casos:

(a). $D \subset P$. Entonces $\operatorname{Fr} D \subset P$ y $\overline{D} \cap B_3 \neq \emptyset$. Notemos que $\operatorname{Fr} D \neq \emptyset$, puesto que D no es vacío al igual que Z. Si $\operatorname{Fr} D \subset B_i$ con $i \in \overline{4}$, entonces $D \subset A_i$. De manera que podemos suponer que $\operatorname{Fr} D$

intersecta al menos a dos B_i's. Si intersecta a B_1, entonces $D \subset A_1$. Y no puede ocurrir que no intersecte a B_1 pues de lo contrario intersecta B_2 y a B_4 y está contenida en los dos.
Esto es contrario a lo que estamos suponiendo. Y por tanto termina la demostracion del caso (a).

(b). $D \subset Q$. Entonces $D^- \cap B_2 = \emptyset$ Entonces $FrD \cap B_2 = \emptyset$, $FrD \subset B_1 \cup B_3 \cup B_4$. Si $FrD \subset B_i$ para alguna $i \in \{1, 3, 4\}$, entonces $D \subset A_i$. Supongamos entonces que FrD intersecta al menos a dos B_i's. Si no intersecta a B_4, entonces $FrD \subset B_1 \cup B_3$ y los intersecta a ambos. Esto es contrario a lo que estamos suponiendo. Entonces $FrD \cap B_4 \neq \emptyset$. De manera que $D \subset A_4$. Lo que termina la prueba de que $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

(B). A_1, A_2, A_3, y A_4 son continuos de X.

Dada D componente de $X - Z$, $FrD \neq \emptyset$. Si $FrD \subset B_1$ entonces $B_1 \cup D$ es conexo. Si $FrD \cap B_1 \neq \emptyset$, entonces $B_1 \cup D$ también es conexo. De aquí que A_1 es conexo. Similarmente A_2, A_3 y A_4 son conexos.
$Fr(\cup \{ D \mid D \in C(X - Z) \text{ y } FrD \subset B_1 \}) \subset$
$(\cup \{ FrD \mid D \in C(X - Z) \text{ y } FrD \subset B_1 \})^- \subset B_1$. De manera que $B_1 \cup (\cup \{ D \mid D \in C(X - Z) \text{ y } FrD \subset B_1 \})$ es cerrado. Por tanto A_1 es cerrado. Similarmente A_2, A_3 y A_4 son cerrados. Esto termina la prueba de (B).

(C). $\{ A_1, A_2, A_3, A_4 \}$ es una cadena circular.

Como $\emptyset \neq B_1 \cap B_2 \subset A_1 \cap A_2$, tenemos que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Similarmente, $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$, $A_3 \cap A_4 \neq \emptyset$ y $A_4 \cap A_1 \neq \emptyset$.

Veamos ahora $A_1 \cap A_3 = \emptyset$. Claramente $B_1 \cap A_3 = \emptyset$. También es fácil ver que $\cup \{ D \mid D \in C(X - Z) \text{ y } FrD \subset B_1 \}$ es ajeno a B_3 y a $\cup \{ D \mid D \in C(X - Z) \text{ y } FrD \subset B_3 \}$ por tanto $\cup \{ D \mid D \in$

$\mathcal{C}(X - Z)$ y $FrD \subset B_1 \})$ es ajeno a A_3. Finalmente $(\cup\{ D \mid D \in \mathcal{C}(X - Z), D \subset P$ y $FrD \cap B_1 \neq \emptyset \})^- \subset P$, por tanto $(\cup\{ D \mid D \in \mathcal{C}(X - Z), D \subset P$ y $FrD \cap B_1 \neq \emptyset \})^-$ es ajeno a B_3. Si $(\cup\{ D \mid D \in \mathcal{C}(X - Z), D \subset P$ y $FrD \cap B_1 \neq \emptyset \})^- \cap A_3 \neq \emptyset$ entonces existiría un elemento x en la intersección antes mencionada. Así que $x \in D$ para alguna $D \in \mathcal{C}(X - Z)$ tal que $FrD \subset B_3$. Entonces $D \cap (\cup\{ E \mid E \in \mathcal{C}(X - Z), E \subset P$ y $FrE \cap B_1 \neq 0 \}) \neq \emptyset$. De manera que $FrD \subset B_3$ y $FrD \cap B_1 \neq \emptyset$, esto es absurdo. Por tanto $A_1 \cap A_3 = \emptyset$. Similarmente $A_2 \cap A_4 = \emptyset$. Esto termina la prueba del lema.

Teorema 1. Si X es multicoherente, entonces $P(4)$ vale para el espacio X.

Demostración. Por el lema 6, existen continuos A_1, A_2, A_3 y A_4 de X tales que (A_1, A_2, A_3, A_4) es una cadena circular y si $Y = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, entonces $(X - Y)^- \cap ((A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \cap A_3) \cup (A_3 \cap A_4) \cup (A_4 \cap A_1)) = \emptyset$.
Sean $H_1 = (X - Y)^- \cap A_1$, $H_2 = (X - Y)^- \cap A_2$, $H_3 = (X - Y)^- \cap A_3$ y $H_4 = (X - Y)^- \cap A_4$. Entonces H_1, H_2, H_3 y H_4 son cerrados de X, ajenos dos a dos, asi que existen abiertos U_1, U_2, U_3 y U_4 de X tales que $\overline{U_1}$, $\overline{U_2}$, $\overline{U_3}$ y $\overline{U_4}$ son ajenos dos a dos, $H_i \subset U_i$ y $\overline{U_1} \cap (A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \overline{U_2} \cap (A_1 \cup A_3 \cup A_4) = \overline{U_3} \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_4) = \overline{U_4} \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 0$.

Sea $V_i = \cup\{ D \mid D \in \mathcal{C}(U_i)$ y $D \cap A_i \neq \emptyset \}$. Claramente V_i es abierto de X, $V_i \subset U_i$ y $H_i \subset V_i$ para toda $i \in \{1,2,3,4\}$.

A continuación probaremos una serie de hechos importantes para lograr la demostración del teorema.

(A). Toda componente de V_i intersecta a A_i. Sea $D \in \mathcal{C}(V_i)$, elegimos $x \in D \subset V_i$, entonces existe $E \in \mathcal{C}(U_i)$ tal que $x \in E$ y $E \cap A_i \neq \emptyset$. Entonces $E \subset V_i$ y E es conexo, así que $E \subset D$. Además $D \subset E$ por que $D \subset U_i$ y D es conexo. Por tanto $E = D$. De manera que $D \cap A_i \neq \emptyset$.

Sea $H = X - (Y \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4)$.

(B). H es cerrado y ajeno a Y.

Como $\mathrm{Fr}Y = (X - Y)^- \cap Y = (X - Y)^- \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 \subset V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ tenemos que $Y \cup (V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4) = \mathrm{Int}\,(Y \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4)$. Por tanto H es cerrado.

Sea V abierto de X tal que $H \subset V \subset V^- \subset X - Y$. Entonces $X = Y \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \cup H = Y \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \cup V$.

Definimos $\mathcal{A}_1 = \{ D \mid D \in \mathcal{C}(V_2) \}$, $\mathcal{B}_1 = \{ D \mid D \in \mathcal{C}(V_3) \}$ y $\mathcal{G}_1 = \{ D \mid D \in \mathcal{C}(V),\ D \cap (\cup \mathcal{A}_1) \neq \emptyset$ y $D \cap (\cup \mathcal{B}_1) \neq \emptyset \}$. Para $n \geq 2$, definimos:

$\mathcal{A}_n = \{ D \mid D \in \mathcal{C}(V_1)$ y $D \cap (\cup \mathcal{G}_{n-1}) \neq \emptyset \}$

$\mathcal{B}_n = \{ D \mid D \in \mathcal{C}(V_4)$ y $D \cap (\cup \mathcal{G}_{n-1}) \neq \emptyset \}$

$\mathcal{G}_n \quad \{ D \mid D \in \mathcal{C}(V),\ D \cap ((\cup \mathcal{A}_1) \cup \ldots \cup (\cup \mathcal{A}_n)) \neq \emptyset$ y $D \cap ((\cup \mathcal{B}_1) \cup \ldots \cup (\cup \mathcal{B}_n)) \neq \emptyset \}$.

Definimos $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup \ldots)$ y $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \cup \ldots)$.

Sean: $B_1 = A_1 \cup (\cup \{ D \mid D$ es componente de V_1 y $D \notin \mathcal{A} \})^-$.

$B_2 = A_2 \cup [\, ((\cup \mathcal{A}_1) \cup (\cup \mathcal{A}_2) \cup \ldots)^- \cup ((\cup \mathcal{G}_1) \cup (\cup \mathcal{G}_2) \cup \ldots) \,]^-$.

$B_3 = A_3 \cup [\, ((\cup \mathcal{B}_1) \cup (\cup \mathcal{B}_2) \cup \ldots) \cup ((\cup \mathcal{G}_1) \cup (\cup \mathcal{G}_2) \cup \ldots) \,]^-$.

$B_4 = A_4 \cup (\cup \{ D \mid D$ es componente de V_4 y $D \notin \mathcal{B} \})^-$.

(C). B_1, B_2 B_3 y B_4 son continuos.

Claramente B_1, B_2 B_3 y B_4 son cerrados. Como todas las componentes de V_1 intersectan a A_1, tenemos que $A_1 \cup (\cup \{ D \mid D$ es componente de V_1 y $D \in \mathcal{A} \})$ es conexo, de manera que B_1 es conexo. Similarmente, B_4 es conexo, $A_2 \cup (\cup \mathcal{A}_1)$ y $A_3 \cup (\cup \mathcal{B}_1)$ son conexos. Todo elemento de $\cup \mathcal{G}_1$ esta un un conexo $D \subset \cup \mathcal{G}_1$ que intersecta a $(\cup \mathcal{A}_1)$, así que $A_2 \cup (\cup \mathcal{A}_1) \cup (\cup \mathcal{G}_1)$ es conexo. Todo elemento de $(\cup \mathcal{A}_2)$ está en un conexo contenido en $(\cup \mathcal{A}_2)$ que intersecta a $(\cup \mathcal{G}_1)$. De manera que $A_2 \cup (\cup \mathcal{A}_1) \cup (\cup \mathcal{G}_1) \cup (\cup \mathcal{A}_2)$ es conexo. Procediendo de igual manera se prueba que $A_2 \cup (\cup \mathcal{A}_1) \cup (\cup \mathcal{G}_1) \cup (\cup \mathcal{A}_2) \cup (\cup \mathcal{G}_2) \cup \ldots$ es conexo Por tanto B_2 es conexo. Similarmente B_4 es conexo.

(D). (B_1, B_2, B_3, B_4) es una cadena circular.
$\emptyset \neq A_1 \cap A_2 \subset B_1 \cap B_2$. Asi que $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Similarmente $B_2 \cap B_3 \neq \emptyset$, $B_3 \cap B_4 \neq \emptyset$ y $B_4 \cap B_1 \neq \emptyset$.
Tomemos $x \in B_2 \cap B_4$, entonces $x \in (A_2 \cup \overline{(\cup \mathcal{A}_1)} \cup \overline{((\cup \mathcal{A}_2) \cup (\cup \mathcal{A}_3) \cup \ldots)} \cup \overline{((\cup \mathcal{G}_1) \cup (\cup \mathcal{G}_2) \cup \ldots)}) \cap (A_4 \cup \overline{(\cup \{ D \mid D \in C(V_4) \text{ y } D \notin \mathcal{B} \})}) \subset (A_2 \cup \overline{V_2} \cup \overline{V_1} \cup \overline{V}) \cap (A_4 \cup \overline{V_4}) =$
$(A_2 \cap A_4) \cup (A_2 \cap \overline{V_4}) \cup (V_2 \cap A_4) \cup (\overline{V_2} \cap \overline{V_4}) \cup (\overline{V_1} \cap \overline{A_4}) \cup (\overline{V_1} \cap \overline{V_4}) \cup (\overline{V} \cap A_4) \cup (\overline{V} \cap \overline{V_4}) = (\overline{V} \cap \overline{V_4})$.
Por tanto $x \in \overline{V} \cap \overline{V_4}$. Entonces $x \notin Y \cup \overline{V_1} \cup \overline{V_2} \cup \overline{V_3}$.
Como $X = Y \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \cup V$, tenemos que $x \in V_4 \cup V$. Analicemos las dos posibilidades:

(a). $x \in V_4$. Sea D la componente de V_4 que contiene a x. Como $x \in \overline{((\cup \mathcal{G}_1) \cup \ldots)}$, tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $D \cap (\cup \mathcal{G}_n)$ es distinto del vacío. Entonces existe $E \in \mathcal{G}_n$ tal que $D \cap E \neq \emptyset$. Por tanto, D es componente de V_4 que intersecta a $(\cup \mathcal{G}_n)$. Esto implica que $D \in \mathcal{B}_{n+1} \subset \mathcal{B}$. Como $x \in \overline{(\cup \{ F \mid F \in C(V_4) \text{ y } F \notin \mathcal{B} \})}$, tenemos que existe $F \in V_4$ tal que $F \notin \mathcal{B}$ y $D \cap F \neq \emptyset$. Entonces

$D = F \in \mathcal{B}$ y $D = F \notin \mathcal{B}$. Esta contradicción prueba que $x \notin V_4$.

(b). $x \in V$. Sea D la componente de V que contiene a x. Como $x \in ((\cup \mathcal{G}_1) \cup \ldots)^-$, tenemos que $D \cap ((\cup \mathcal{G}_1) \cup \ldots) \neq \emptyset$, así que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $D \cap (\cup \mathcal{G}_n) \neq \emptyset$. De manera que existe $E \in \mathcal{G}_n$ tal que $D \cap E \neq \emptyset$. Entonces E es componente de V al igual que D y se intersectan así que $x \in D = E$.

Como $x \in (\cup \{ F \mid F \in \mathcal{C}(V_4)$ y $F \in \mathcal{B} \})^-$, tenemos que existe F componente de V_4 tal que $F \in \mathcal{B}$ y $F \cap E \neq \emptyset$. Pero $E \subset \mathcal{G}_n$, así que $F \cap (\cup \mathcal{G}_n) \neq \emptyset$ y entonces $F \in \mathcal{B}_{n+1} \subset \mathcal{B}$. Esta contradicción muestra que tampoco es posible que $x \in V$. Por tanto $B_2 \cap B_4 = \emptyset$. En forma similar se prueba que $B_1 \cap B_3 = \emptyset$. Concluimos entonces que (B_1, B_2, B_3, B_4) es una cadena circular.

(E). Hagamos $Z = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$. Entonces $X - Z \subset V$.

Sea D una componente de V_1, si $D \in \mathcal{A}$, entonces $D \in \mathcal{A}_n$ para alguna $n \geq 2$. Así que $D \subset (\cup \mathcal{A}_n)$ y entonces $D \subset B_2 \subset Z$. Si $D \notin \mathcal{A}$ entonces $D \subset B_1 \subset Z$. En cualquier caso $D \subset Z$. Por tanto $V_1 \subset Z$. Similarmente $V_4 \subset Z$. Dada una componente D de V_2, $D \subset (\cup \mathcal{A}_1) \subset B_2 \subset Z$. De manera que $V_2 \subset Z$. Similarmente $V_3 \subset Z$. Claramente $Y \subset Z$, por tanto $Y \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \subset Z$. De modo que $X - Z \subset X - (Y \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4) = H \subset V$.

Sean $\mathcal{P} = \{ D \mid D \in \mathcal{C}(V), D \cap (X - Z) \neq \emptyset$ y $D \cap B_2 \neq \emptyset \}$, $\mathcal{Q} = \{ D \mid D \in \mathcal{C}(V), D \cap (X - Z) \neq \emptyset$ y $D \cap B_3 \neq \emptyset \}$ y $\mathcal{R} = \{ D \mid D \in \mathcal{C}(V), D \cap (X - Z) \neq \emptyset$ y $D \cap (B_2 \cup B_3) = \emptyset \}$. Sean $P = (\cup \mathcal{P}) \cap (X - Z)$, $Q = (\cup \mathcal{Q}) \cap (X - Z)$ y por último sea $R = (\cup \mathcal{R}) \cap (X - Z)$.

(F). $P^- \cap Q^- = P^- \cap R^- = Q^- \cap R^- = P^- \cap B_3 = Q \cap B_2 = R^- \cap (B_2 \cup B_3) = \emptyset$ y $X - Z \subset P \cup Q \cup R$.

Supongamos que existe $x \in P^- \cap Q^- \subset (X - Z)^-, \subset H \subset V$, de manera que existe una componente D de V tal que $x \in D$. Como $x \in P^- = ((\cup \mathcal{P}) \cap (X - Z))^- \subset (\cup \mathcal{P})^- \subset (\cup \mathcal{P})^-$, tenemos que $D \cap (\cup \mathcal{P}) \neq \emptyset$, así que existe E componente de V tal que $E \cap (X - Z) \neq \emptyset$, $E \cap B_2 \neq \emptyset$ y $E \cap D \neq \emptyset$. Entonces $E = D$ y $D \cap (X - Z) \neq \emptyset$, $D \cap B_2 \neq \emptyset$. Usando que $x \in Q^-$ se obtiene que $D \cap B_3 \neq \emptyset$

Como $D \cap B_2 \neq \emptyset$ y $B_2 = A_2 \cup ((\cup \mathcal{A}_1) \cup \dots)^- \cup ((\cup \mathcal{C}_1) \cup \dots)^-$, $D \subset V \subset (X - A_2)$, tenemos que $D \cap ((\cup \mathcal{C}_1) \cup \dots)$ es distinto del vacío o $D \cap ((\cup \mathcal{A}_1) \cup \dots)$ es diferente del vacío. En el primer caso, $D \cap (\cup \mathcal{C}_n) \neq \emptyset$ para alguna n. Así que existe $E \in \mathcal{C}_n$ tal que $D \cap E \neq \emptyset$. Entonces E es componente de V y $E \cap ((\cup \mathcal{A}_1) \cup \dots \cup (\cup \mathcal{A}_n)) \neq \emptyset$. Como También D es componente de V, tenemos que $D = E$. Entonces $D \subset \cup \mathcal{C}_n \subset B_2 \subset Z$. Así que $D \cap (X - Z) = \emptyset$. Donde esta contradicción prueba que $D \cap ((\cup \mathcal{A}_1) \cup \dots) \neq \emptyset$. De manera que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $D \cap (\cup \mathcal{A}_n) \neq \emptyset$.

Ya que $D \cap B_3 \neq \emptyset$ y $B_3 = A_3 \cup ((\cup \mathcal{B}_1) \cup \dots)^- \cup ((\cup \mathcal{C}_1) \cup \dots)^-$ tenemos que $D \cap ((\cup \mathcal{B}_1) \cup \dots) \neq \emptyset$ o bien $D \cap ((\cup \mathcal{C}_1) \cup \dots) \neq \emptyset$. Razonando como en el párrafo anterior se obtiene que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $D \cap (\cup \mathcal{B}_m) \neq \emptyset$. Supongamos por ejemplo, que $n \leq m$. Entonces $D \cap ((\cup \mathcal{A}_1) \cup \dots \cup (\cup \mathcal{A}_m)) \neq \emptyset$ y $D \cap ((\cup \mathcal{B}_1) \cup \dots \cup (\cup \mathcal{B}_m)) \neq \emptyset$. De manera que $D \in \mathcal{C}_m$ y $D \subset (\cup \mathcal{C}_m) \subset B_2 \subset Z$. Entonces $D \subset Z$. Esta contradicción prueba que $P^- \cap Q^- = \emptyset$.

Ahora supongamos que existe una $x \in P^- \cap R^- \subset (X - Z)^- \subset H \subset V$. Entonces existe una componente D de V tal que $x \in D$. Como $x \in R^- \subset (\cup \mathcal{R})^-$, Tenemos que $D \cap (\cup \mathcal{R}) \neq \emptyset$. De manera que existe

$E \in \mathcal{R}$ tal que $D \cap E \neq \emptyset$. Así que E es componente de V y por tanto $D = E$, y además $E \cap (B_2 \cup B_3) = \emptyset$. Como $x \in P^- \subset (\cup \mathcal{P})^-$, tenemos que $D \cap (\cup \mathcal{P}) \neq \emptyset$, así que existe $F \in \mathcal{P}$ tal que $D \cap F \neq \emptyset$. Entonces F es componente de V (y por tanto $D = F$) y $F \cap B_2 \neq \emptyset$. De manera que $D \cap B_2 \neq \emptyset$ (y $D \cap (B_2 \cup B_3) = \emptyset$). Esta contradicción prueba que $P^- \cap R^- = \emptyset$.

Similarmente se prueba que $Q^- \cap R^- = \emptyset$.

Ahora supongamos que existe $x \in P^- \cap B_3 \subset P^- \subset (X - Z)^- \subset H \subset V$. Entonces existe una componente D de V tal que $x \in D$. Como $x \in P^- = ((\cup \mathcal{P}) \cap (X - Z))^- \subset (\cup \mathcal{P})^-$, tenemos que $D \cap (\cup \mathcal{P}) \neq \emptyset$. De manera que existe $E \in \mathcal{P}$ tal que $D \cap E \neq \emptyset$. Entonces E es una componente de V, $E \cap (X - Z) \neq \emptyset$ y $E \cap B_2 \neq \emptyset$, de modo que $D = E$. De manera que $D \cap (X - Z) \neq \emptyset$, $D \cap B_2 \neq \emptyset$ y $D \cap B_3 \neq \emptyset$. Razonando como en la página anterior se obtiene una contradicción. Por tanto, $P^- \cap B_3 = \emptyset$. Similarmente se prueba que $Q \cap B_2 = \emptyset$.

Supóngase ahora que existe $x \in R^- \cap (B_2 \cup B_3) \subset (X - Z)^- \subset H \subset V$, así que existe D componente de V tal que $x \in D$. Como $x \in R^-$, tenemos que $D \cap R = D \cap ((\cup \mathcal{R}) \cap (X - Z)) \neq \emptyset$ asi que $D \cap (\cup \mathcal{R}) \neq \emptyset$. Esto implica que existe $E \in \mathcal{R}$ tal que $D \cap E \neq \emptyset$. Entonces E es componente de V (así que $D = E$) y $E \cap (B_2 \cup B_3)$ es no vacío. De esta manera $x \in D \cap (B_2 \cup B_3) = \emptyset$. Esta contradicción prueba que $R \cap (B_2 \cup B_3) = \emptyset$.

Dado $x \in (X - Z) \subset V$, existe D componente de V tal que $x \in D \subset V$. Si $D \cap B_2 \neq \emptyset$, entonces $D \in \mathcal{P}$ así que $x \in (\cup \mathcal{P}) \cap (X - Z) = P$. Si $D \cap B_3 \neq \emptyset$, entonces $D \in Q$, de modo que $x \in (\cup Q) \cap (X - Z) = Q$. Si $D \cap (B_2 \cup B_3) = \emptyset$, entonces $D \in \mathcal{R}$ así que $x \in (\cup \mathcal{R}) \cap (X - Z) = R$. Por tanto, $x \in P \cup Q \cup R$. De manera que $X - Z \subset P \cup Q \cup R$. Con esto termina la prueba de (F).

La prueba del teorema se sigue entonces del lema 8 (haciendo $P_1 = P^-$ y $Q_1 = Q^- \cup R^-$).

CAPITULO VII.

En este capítulo exponemos el ejemplo de H. Bell y R. F. Dickman Jr. [1], que consiste de un subconjunto conexo, localmente conexo, compacto y multicoherente de $\mathbb{R}^2$ para el cual P(7) es falsa.

El siguiente lema nos será útil para probar que P(7) es falsa en el mencionado subconjunto.

Lema 10. Supongamos que $X - \{ a,b \} = R \cup P \cup Q$, donde $a,b \in X$, $a \neq b$ y R, P y Q son regiones ajenas dos a dos de X tales que $\{ a, b \} = \bar{R} \cap \bar{P} \cap \bar{Q}$. Sea $(A_1, \ldots, A_n)$ una cadena circular de continuos de X tales que $X = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Si $A_m \subset R$ para alguna m, entonces $\bar{P} \cup \bar{Q}$ intersecta a lo más a cuatro A_k's.

Demostración. Supongamos $n \geq 5$. Observemos que $\{ a, b \} \subset FrR \cap FrP \cap FrQ$. Dada $x \in FrR$, si $x \in P$, entonces $P \cap R \neq \emptyset$, esto es absurdo de modo que $x \notin P$ y similarmente $x \notin Q$. Además R abierto implica que $x \notin R$. Por tanto $x \in \{ a, b \}$. Hemos probado que $FrR = \{ a, b \}$. Análogamente $FrP = \{ a, b \} = FrQ$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $A_1 \subset R$. Tomamos $l = \min \{ i \in \bar{n} \mid a \in A_i \}$, $k = \max \{ i \in \bar{n} \mid a \in A_i \}$, $m = \min \{ i \in \bar{n} \mid b \in A_i \}$ y $p = \max \{ i \in \bar{n} \mid b \in A_i \}$. Como cada elemento de X puede estar a lo más en dos A_i's y cuando está en dos de ellos estos son consecutivos, tenemos que $l = k$ o $k = l + 1$ (no ponemos $k = l \oplus 1$ por que $a,b \notin A_1$) y también que $p = m$ o $p = m + 1$.

Supongamos por ejemplo que $l \leq m$. Vamos a probar que $k + l \geq m$. Supongamos que esto no ocurre, es decir que $k + 1 < m$. Entonces $(A_{k+1} \cup A_{k+2} \cup \ldots \cup A_{m-1})$ y $A_{p\oplus 1} \cup \ldots \cup A_{l\ominus 1}$ son dos continuos que no tienen a " a " ni a " b " y por tanto están contenidos en $R \cup P \cup Q$. Como A_1 está contenido en el segundo y en R y R, P y Q son abiertos ajenos, tenemos que $A_{p\oplus 1} \cup \ldots \cup A_{l\ominus 1} \subset R$. El otro conjunto $(A_{k+1} \cup \ldots \cup A_{m-1})$ debe estar contenido en R, P o Q. Supongamos, por ejemplo que $A_{k+1} \cup \ldots \cup A_{m-1}$ está contenido en $R \cup P$. Entonces Q es ajeno a $A_{k+1} \cup \ldots \cup A_{m-1} \cup A_{p\oplus 1} \cup \ldots \cup A_{l\ominus 1}$. De manera que como $Q \subset A_1 \cup \ldots \cup A_n$, debe ocurrir que $Q \subset (A_l \cup A_k) \cup (A_m \cup A_p)$. Así que el conjunto $Q \cup \{ a, b \}$ está contenido en $(A_l \cup A_k) \cup (A_m \cup A_p)$, intersecta a ambos, es conexo y como estamos suponiendo que $k + 1 < m$, tenemos que $(A_l \cup A_k) \cap (A_m \cup A_p) = \emptyset$. Esto es una contradicción. Por tanto $k + 1 \geq m$. Y como $l \leq k \leq l + 1 \leq k + 1 \leq l + 2$ y $m \leq p \leq m + 1$, tenemos que $l \leq m \leq l + 2$ y $l \leq m \leq p \leq m + 1 \leq$
$l + 3$. Por tanto $\{ l, k, m, p \} \subset \{ l, l + 1, l + 2, l + 3 \}$.

Supongamos que máx $\{ l, k, m, p \} = l + q$, con $0 \leq q \leq 3$. Entonces $\{ l, k, m, p \} \subset \{ l, l + 1, \ldots, l + q \}$. De manera que $A_{l+q\oplus 1} \cup A_{l+q\oplus 2} \cup \ldots \cup A_{l-1}$ es un conjunto de X que no tiene a " a " ni a " b " y que contiene a A_1. Entonces es un continuo contenido en $R \cup P \cup Q$ que intersecta a R. De manera que debe estar contenido en R. Pero $X = A_1 \cup \ldots \cup A_n$.

De modo que $P^- \cup Q^- = P \cup Q \cup \{ a, b \} \subset X - R$. Y entonces $P^- \cup Q^-$ sólo puede intersectar a A_l, $A_{l+1}, \ldots A_{l+q}$. Por tanto $P^- \cup Q^-$ intersecta a lo más a cuatro A_i's.

Ejemplo. Dados dos puntos diferentes $p, q \in \mathbb{R}^2$, definimos: $\overline{pq}$ = segmento que une al punto "p" con el punto " q" y $\widehat{pq} = \overline{pq} - \{ p, q \}$. $\widehat{pq}$ se llama segmento abierto con extremos p y q.

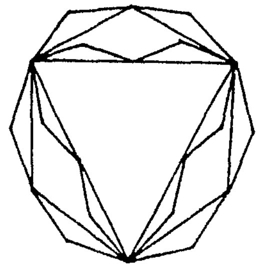
Para elaborar el ejemplo, construiremos inductivamente dos sucesiones $(S_n)_n$ y $(\mathcal{U}_n)_n$, donde cada S_n es un conjunto que consta de $3 \times 4^{n-1}$ segmentos abiertos ajenos dos a dos y cada $\mathcal{U}_n$ es una colección de $3 \times 4^{n-1}$ abiertos convexos y ajenos dos a dos. Tanto S_n como $\mathcal{U}_n$ tienen propiedades adicionales que especificaremos más adelante.

Para empezar elegimos tres puntos $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ tales que el triángulo Δabc sea equilátero de perímetro 3.
Definimos $S_1 = \{\overset{\frown}{ab}, \overset{\frown}{bc}, \overset{\frown}{ca}\}$. Elegimos para cada $I \in S_1$ un abierto convexo U_I que contenga a I tal que diámtro de U_I = diámetro de I y $(U_I^-) \cap (\cup\{U_J \mid J \in S_1 - \{I\}\}^-)$ = los extremos de I. Definimos $\mathcal{U}_1 = \{U_I \mid I \in S_1\}$.

Ahora diremos como construir S_{n+1} y $\mathcal{U}_{n+1}$, una vez que se han construido S_n y $\mathcal{U}_n$. Para cada $I \in S_n$, denotamos a sus extremos por $a(I)$ y $b(I)$. Sea $m(I) = 1/2\,(a(I) + b(I))$ su punto medio. Elegimos un punto $p(I) \in U_I - I^-$ tal que $\| m(I) - p(I) \| < 1/2^{2n}$. Definimos $S_{n+1} = \cup\{\{\overset{\frown}{a(I)\,m(I)}, \overset{\frown}{m(I)\,b(I)}, \overset{\frown}{a(I)\,p(I)}, \overset{\frown}{p(I)\,b(I)}\}$ tales que $I \in S_n\}$. A los segmentos $\overset{\frown}{a(I)\,m(I)}$, $\overset{\frown}{m(I)\,b(I)}$, $\overset{\frown}{a(I)\,p(I)}$ y $\overset{\frown}{b(I)\,p(I)}$ les llamaremos sucesores de I. Con esta convención $S_{n+1} = \{J \mid J$ es sucesor de un elemento de $S_n\}$.

Notemos que si $J, K \in S_{n+1}$, entonces J^- y K^- sólo pueden intersectarse en sus extremos. Además cada $J \in S_{n+1}$ es un sucesor de un $I \in S_n$. De manera que es posible construir una colección $\mathcal{U}_{n+1} = \{U_J \mid J \in S_{n+1}\}$ de abiertos convexos ajenos dos a dos tales que $J \subset U_J \subset U_I$, diametro de U_J = diámetro de J y $U_J^- \cap (\cup\{U_K \mid K \in S_{n+1} - \{J\}\}^-) = \{a(I), b(I)\}$ ...(*).

Con esto termina la construcción de $(S_n)_n$ y $(\mathcal{U}_n)_n$.

$C_3 =$ 

Definimos $S = \cup\{ S_n \mid n \in \mathbb{N} \}$. El espacio X se define entonces como $X = \overline{\cup\{ I \mid I \in S \}}$.

Antes de probar las propiedades que requerimos de X, es necesario mostrar algunas propiedades de $(S_n)_n$ y $(\mathcal{U}_n)_n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, hacemos $M_n = \cup\{ I^- \mid I \in S_n \}$. Dados J e I en S, diremos que J es descendiente de I si existe $m \in \mathbb{N}$ y $J_1, \dots, J_m \in S$ tales que J_{i+1} es sucesor de J_i para toda $i \in \{ 1, \dots, m-1 \}$ e $I = J_1$ y $J = J_m$.

(1). $X = \overline{\cup\{ M_n \mid n \in \mathbb{N} \}}$, $M_n \subset M_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $X = \overline{\cup\{ M_n \mid n \geq k \}}$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

La primera igualdad es clara. Dada $I \in S_n$, $I^- = \overline{\widehat{a(I)\,m(I)}} \cup \overline{\widehat{m(I)\,b(I)}} \subset M_{n+1}$. De manera que $M_n \subset M_{n+1}$. La segunda igualdad resulta entonces inmediata.

(2). Para cada $n \in \mathbb{N}$, $X \subset \cup\{ \overline{U_I} \mid I \in S_n \}$.

Sea $x \in \cup\{ M_m \mid m \geq n \}$. Entonces $x \in J^-$ para alguna $J \in S_m$ con $m \geq n$. Si $m = n$, entonces $x \in J^- \subset \overline{U_J} \subset \cup\{ \overline{U_I} \mid I \in S_n \}$. Si $m > n$ entonces J es sucesor de algun elemento de J_{m-1} de S_{m-1}, a su vez es sucesor de un elemento de J_{m-2} de S_{m-2}, ... J_{r-1} es sucesor de un elemento I de S_n. De manera que $J \subset U_J \subset U_{J_{m-1}} \subset \dots \subset U_{J_{n+1}} \subset U_I$. Por tanto, $x \in \overline{U_I}$. Esto prueba que: $\cup\{ M_m \mid m \geq n \} \subset \cup\{ \overline{U_I} \mid I \in S_n \}$. Como S_n es finito, tenemos entonces que $\cup\{ \overline{U_I} \mid I \in S_n \}$ es cerrado y entonces contiene a X.

(3). X es compacto.

Por (2), $X \subset \cup\{ \overline{U_I} \mid I \in S_1 \}$. Además cada U_I con $I \in S_1$ tiene diámetro igual a 1 y S_1 tiene tres elementos. De manera que X es acotado y por tanto, compacto.

(4). Para toda $I \in S$, $\overline{U_I} \cap X =$
$(\cup\{ J \in S \mid J$ es descendiente de $I \}) \cup I^-$.

Si J es descendiente de I, entonces, por construcción, $J \subset U_J \subset U_I$ así que $J \subset \overline{U_I} \cap X$. Además $I \subset U_I \cap X$. Esto prueba la contención " $\supset$ ".
Dada $x \in \overline{U_I} \cap (\cup\{ M_m \mid m \geq n \})$, tenemos que existen $m > n$ y $J \in S_m$ tal que $x \in J^-$. Como $J \in S_m$ y $m > n$, existe $K \in S_n$ tal que J es descendiente de K. Si $K \neq I$, entonces $x \in \overline{U_I} \cap J^- \subset \overline{U_I} \cap \overline{U_J} \subset \overline{U_I} \cap \overline{U_K} \subset (a(I), b(I)) \subset I^-$. De manera que $x \in I^-$. Si $K = I$, entonces $x \in (\cup\{ J \in S \mid J$ es descendiente de $I \})$. Hemos probado entonces que $\overline{U_I} \cap (\cup\{ M_m \mid m > n \}) \subset$
$(\cup\{ J \in S \mid J$ es descendiente de $I \}) \cup I^-$. Sólo nos faltaría mostrar que $\overline{U_I} \cap X = [\overline{U_I} \cap (\cup\{ M_m \mid m > n \})]$. La contención " $\supset$ " es inmediata de (1).
Sea $x \in \overline{U_I} \cap X$. Si $x \in (a(I), b(I))$, entonces $x \in I^- \cap M_n \subset \overline{U_I} \cap M_{n+1}$. Si $x \in (a(I), b(I))$, entonces $x \in \cup\{ U_J \mid J \in S_n - \{ I \} \}$ asi que x tiene una vecindad V tal que $V \cap (\cup\{ \overline{U_J} \mid J \in S_n - \{ I \} \}) = \emptyset$. Sea V' una vecindad cualquiera de x contenida en V. Como $x \in X = (\cup\{ M_m \mid m > n \})$,

se tiene que $\emptyset \neq W \cap (\cup \{ M_m \mid m > n \})$, por (2) y porque $W \subset V$, tenemos que este conjunto está contenido en $U\bar{I}$. Por tanto $W \cap (\cup \{ M_m \mid m > n \}) \cap U\bar{I} \neq \emptyset$. Esto muestra que $x \in (U\bar{I} \cap (\cup \{ M_m \mid m > n \}))^{-}$ y completa la prueba de (4).

(5). Para toda $I \in S$, $(U\bar{I} \cap X) - \{ a(I) \}$ es conexo.

Primero se probará que si $I \in S_n$ y $m > n$, entonces $C_m = (I^{-} \cup (\cup \{ J^{-} \mid J \in S_{n+1} \cup \ldots \cup S_m$ y J es descendiente de $I \})) - \{ a(I) \}$ es conexo.

Notemos que $I^{-} - \{ a(I) \}$ es un segmento al cual le falta un extremo, de manera que $I^{-} - \{ a(I) \}$ es conexo. Como $C_{n+1} = I^{-} \cup (\cup \{ J^{-} \in S_{n+1} \mid J$ es descendiente de $I \}) - \{ a(I) \} = (I^{-} \cup \overline{a(I)\,m(I)} \cup \overline{m(I)\,b(I)} \cup \overline{a(I)\,p(I)} \cup \overline{p(I)\,b(I)} - \{ a(I) \} = (\overline{a(I)\,b(I)} - \{ a(I) \}) \cup (\overline{a(I)\,p(I)} - \{ a(I) \}) \cup \overline{p(I)\,b(I)}$, tenemos que la afirmación es válida para $m = n + 1$.

Supongamos ahora que C_m es conexo. Sea $J \in S_{m+1}$ tal que J es descendiente de I. Entonces existe $K \in S_m$ tal que K es decendiente de I y J es sucesor de K, es decir:
$J \in \{ \overset{\frown}{a(K)\,m(K)}, \overset{\frown}{m(K)\,b(K)}, \overset{\frown}{a(K)\,p(K)}, \overset{\frown}{p(K)\,b(K)} \}$. Entonces $S = \overline{a(K)\,m(K)} \cup \overline{m(K)\,b(K)} \cup \overline{a(K)\,p(K)} \cup \overline{p(K)\,b(K)} = K \cup \overline{a(K)\,p(K)} \cup \overline{p(K)\,b(K)}$ es un conjunto homeomorfo a un círculo, además $S - \{ a(I) \} \subset C_{m+1}$, $\emptyset \neq K - \{ a(I) \} \subset C_m \cap S - \{ a(I) \}$. De manera que $S - \{ a(I) \}$ es un subconjunto conexo de C_{m+1} que intersecta a C_m y que contiene a $J^{-} - \{ a(I) \}$. Entonces $J^{-} - \{ a(I) \}$ está en la misma componente de C_{m+1} que C_m para toda $J \in S_{m+1}$. Por tanto C_{m+1} es conexo.

Ya que $C_{n+1} \subset C_{n+2} \subset \ldots$, obtenemos entonces que $C = \cup \{ C_m \mid m > n \} = (I^{-} \cup (\cup J^{-} \mid J \in S$ y J es descendiente de $I \}) - \{ a(I) \}$ es conexo. Dadas $x \in (U\bar{I} \cap X) - \{ a(I) \}$ y W

abierto de X tal que $x \in W$. por (4), $W \cap I \neq \emptyset$ o $W \cap J \neq \emptyset$ para alguna $J \in S$ descendiente de I. Como I y J son segmentos, $W \cap I$ tiene una infinidad de puntos o $W \cap J$ tiene una infinidad de puntos, en particular $(W \cap I) - \{ a(I) \} \neq \emptyset$ o $(W \cap J) - \{ a(I) \} \neq \emptyset$ para alguna J descendiente de I. En cualquier caso, $W \cap C \neq \emptyset$. De aquí que $C \subset (U_{\bar{I}} \cap X) - \{ a(I) \} \subset \bar{C}$. Por tanto $(U_{\bar{I}} \cap X) - \{ a(I) \}$ es conexo.

(6). Para toda $I \in S$, $U_{\bar{I}} \cap X$ es conexo.

Como $a(I) \in \overline{(I - \{ a(I) \})} \subset \overline{((U_{\bar{I}} \cap X) - \{ a(I) \})}$, por (5) tenemos que $((U_{\bar{I}} \cap X) - \{ a(I) \}) \cup \{ a(I) \} = U_{\bar{I}} \cap X$ es conexo.

(7). X es conexo.

Sabemos que $S_1 = \{ \widehat{ab}, \widehat{bc}, \widehat{ca} \}$ y que por (2) $X \subset U_{\widehat{ab}} \cup U_{\widehat{bc}} \cup U_{\widehat{ca}}$. Entonces $X = (X \cap U_{\widehat{ab}}) \cup (X \cap U_{\widehat{bc}}) \cup (X \cap U_{\widehat{ca}})$. Por (6) cada uno de estos conjuntos son conexos, los dos primeros tienen a "b" y los dos últimos a "c". Por tanto X es conexo.

(8). X es multicoherente.

Hacemos $H = (X \cap U_{\widehat{ab}}) \cup (X \cap U_{\widehat{bc}})$ y $K = X \cap U_{\widehat{ca}}$. Entonces H y K son subconjuntos cerrados conexos de X, además $\{ a, c \} \subset H \cap K$. Y como para toda $I \in S_1$, $U_{\bar{I}} \cap (\cup \{ U_{\bar{J}} \mid J \in S_1 - \{ I \} \}) = \{ a(I), b(I) \}$, tenemos que $H \cap K = \{ a, c \}$. Por tanto X es multicoherente.

(9) La longitud de $I \leq 1 / 2^{n-1} + 1 / 2^{n} + \ldots + 1 / 2^{2n-2}$ para todo $I \in S_n$ y para toda $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia : Para toda $n \in \mathbb{N}$ y toda $I \in S_n$, diámetro de U_I = longitud de $I \leq 1 / 2^{n-2}$.

Haremos la prueba inductivamente.

Por definición, para $I \in S_1$, longitud de $I = 1 \leq 1 / 2^0$. Supongamos que la afirmación es válida para n. Tomemos $J \in S_{n+1}$. Entonces existe $I \in S_n$ tal que $J \in \{ \widehat{a(I)\ m(I)},\ \widehat{m(I)\ b(I)},\ \widehat{a(I)\ p(I)},\ \widehat{p(I)\ b(I)} \}$ donde $m(I)$ es el punto medio de I y $p(I)$ es un punto que dista de $m(I)$ menos que $1 / 2^{2n}$.

Si $J \in \{ \widehat{a(I)\ m(I)},\ \widehat{m(I)\ b(I)} \}$, entonces longitud de $J = (1 / 2)$ (longitud de I) $\leq (1 / 2)(1 / 2^{n-1} + 1 / 2^n + \ldots + 1 / 2^{2n-2}) = 1 / 2^n + 1 / 2^{n+1} + \ldots + 1 / 2^{2n-1} =$
$1 / 2^{(n+1)-1} + 1 / 2^{(n+1)} + \ldots + 1 / 2^{2(n+1)-3} <$
$1 / 2^{(n+1)-1} + 1 / 2^{(n+1)} + \ldots + 1 / 2^{2(n+1)-2}$.
Ahora si $J = \widehat{a(I)\ p(I)}$, entonces longitud de J . longitud de $\widehat{a(I)\ m(I)}$ + longitud de $\widehat{m(I)\ p(I)} \leq (1 / 2)(1 / 2^{n-1} + 1 / 2^n + \ldots + 1 / 2^{2n-2}) + 1 / 2^n = 1 / 2^{(n+1)-1} + 1 / 2^{(n+1)} + \ldots + 1 / 2^{2(n+1)-2}$. En forma similar se comprueba la desigualdad para $J = \widehat{p(I)\ b(I)}$. Esto termina la prueba de (9).

(10). X es localmente conexo.

Probaremos que X es conexo Im-Kleinen en todos sus puntos y entonces por [12], X es localmente conexo.

Sean $p \in X$ y W abierto de X tal que $p \in W$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(p) \subset W$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 / 2^{n-2} < \varepsilon / 2$.
Hacemos $A = \cup \{ X \cap U\overline{I} \mid I \in S_n \text{ y } p \notin U\overline{I} \}$, $V = X - A$ y por último $B = \{ X \cap U\overline{I} \mid I \in S_n \text{ y } p \in U\overline{I} \}$. Entonces A y B son subconjuntos cerrados de X, V es abierto de X, ademas por (6) B es conexo. Por (9) cada $X \cap U\overline{I}$ tiene diámetro menor o igual que $1 / 2^{n-2}$, de manera que todos los puntos de B distan de p a lo más en $1 / 2^{n-2}$.

Por tanto $B \subset B_\varepsilon(p) \subset W$.

De (2) se obtiene que $V \subset B$. Por tanto V es vecindad de p contenida en W y todos los puntos de V se pueden conectar por un conexo (B) dentro de W. Esto muestra que X es conexo im-Kleinen en p y termina la prueba de que X es localmente conexo.

(11). Para todo $I \in S$, $X - U_{\bar{I}}$ es conexo.

Como $I \in S$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I \in S_n$. Probaremos la afirmación haciendo inducción en n.

Sea $I \in S_1$, supongamos por ejemplo que $I = \widehat{ab}$. Por (5), los conjuntos $C_1 = (U_{\widehat{bc}} - \{ b \}) \cap X$ y $C_2 = (U_{\widehat{ac}} - \{ a \}) \cap X$ son conexos y ambos tienen a "c", de manera que $C_1 \cup C_2$ es conexo. Aseguramos que $C_1 \cup C_2 = X - U_{\widehat{ab}}$. La contención $X - U_{\widehat{ab}} \subset C_1 \cup C_2$ se sigue de (2) y de que a y $b \in U_{\widehat{ab}}$.
Como $(U_{\widehat{bc}} \cup U_{\widehat{ac}}) \cap U_{\widehat{ab}} = \{ a, b \}$, $(U_{\widehat{ab}} \cup U_{\widehat{bc}}) \cap U_{\widehat{ac}} = \{ a, c \}$ y $(U_{\widehat{ac}} \cup U_{\widehat{ab}}) \cap U_{\widehat{cb}} = \{ c, b \}$, tenemos que $a \in U_{\widehat{bc}}$, $b \in U_{\widehat{ac}}$ y entonces $C_1 \cup C_2 \subset X - U_{\widehat{ab}}$. Esto termina la base de la inducción.

Ahora supongamos que la afirmación es cierta para n. Tomemos $J \in S_{n+1}$, entonces existe $I \in S_n$ tal que $J \in \{ J_1, J_2, J_3, J_4 \}$ donde $J_1 = \widehat{a(I)\, m(I)}$, $J_2 = \widehat{m(I)\, b(I)}$, $J_3 = \widehat{a(I)\, p(I)}$, $J_4 = \widehat{p(I)\, b(I)}$. Supongamos, por ejemplo, que $J = J_1$ (los demás casos son similares). Aseguramos que $X - U_{\bar{J}} =$
$(X - U_{\bar{I}}) \cup ((U_{\bar{J}_2} - \{ m(I) \}) \cap X) \cup ((U_{\bar{J}_3} - \{ a(I) \}) \cap X)$
$\cup (U_{\bar{J}_4} \cap X)$.
Como $U_J \subset U_I$, $X - U_{\bar{I}} \subset X - U_{\bar{J}}$. Además por (*), $U_{\bar{J}_1} \cap U_{\bar{J}_2} \subset \{ a(I), m(I) \} \cap \{ m(I), b(I) \} = \{ m(I) \}$, tenemos que $(U_{\bar{J}_2} - \{ m(I) \}) \cap X \subset X - U_{\bar{J}}$. Similarmente, $(U_{\bar{J}_3} - \{ a(I) \})$

$\cap X$ y $\bigcup\overline{J}_4 \cap X$ son subconjuntos de $X - \bigcup\overline{J}$. Esto prueba la contención " $\supset$ ".

Dada $x \in X - \bigcup\overline{J}$. Por (2), existe $K \in S_{n+1}$ tal que $x \in \bigcup\overline{K}$. Sea $L \in S_n$ tal que K es sucesor de L. Analizamos dos casos:

(1). $L \neq I$. Por (*), $\bigcup\overline{L} \cap \bigcup\overline{I} \subset \{ a(I), b(I) \}$. Como $\bigcup\overline{K} \subset \bigcup\overline{L}$, tenemos que $x \in \bigcup\overline{L}$. Si $x \in \bigcup\overline{I}$, entonces $x \in \{ a(I), b(I) \}$. No es posible que $x = a(I)$ porque $x \in \bigcup\overline{J}$ y $a(I) \in \bigcup\overline{J}$. De manera que $x = b(I)$, donde este último pertenece a $(\bigcup\overline{J}_4 \cap X)$. Esto prueba que $x \in (X - \bigcup\overline{I}) \cup (\bigcup\overline{J}_4 \cap X)$.

(2). $L = I$. Entonces $K \in \{ J_1, J_2, J_3, J_4 \}$. $x \in \bigcup\overline{K}$ y $x \notin \bigcup\overline{J}$ implican que $K \in \{ J_2, J_3, J_4 \}$ y como $x \notin \{ a(I), m(I) \}$, tenemos que $x \in ((\bigcup\overline{J}_2 - \{ m(I) \}) \cap X) \cup ((\bigcup\overline{J}_3 - \{ a(I) \}) \cap X) \cup (\bigcup\overline{J}_4 \cap X)$. Esto termina la prueba de la igualdad.

Ya que $b(I) \in (\bigcup\overline{J}_2 - \{ m(I) \}) \cap X \cap \bigcup\overline{J}_4 \cap \overline{(X - \bigcup\overline{I})}$ y $p(I) \in (\bigcup\overline{J}_3 - \{ a(I) \}) \cap X \cap \bigcup\overline{J}_4$, usando la hipótesis de inducción, (5) y (6), concluimos que $X - \bigcup\overline{J}$ es conexo. Esto termina la prueba de (11).

(12). Para toda $I \in X$, $X - \{ a(I), b(I) \}$ tiene exactamente tres componentes: la que tiene a $p(I)$, la que tiene a $m(I)$, (ambas contenidas en $\bigcup\overline{I}$) y $X - \bigcup\overline{I}$. Además las tres tienen a $a(I)$ y a $b(I)$ en su cerradura.

Sean $J_1 = \widehat{a(I)\,m(I)}$, $J_2 = \widehat{m(I)\,b(I)}$, $J_3 = \widehat{a(I)\,p(I)}$, $J_4 = \widehat{p(I)\,b(I)}$. Aseguramos que $X - \{ a(I), b(I) \} = (X - \bigcup\overline{I}) \cup [(\bigcup\overline{J}_1 - \{ a(I) \}) \cap X] \cup [(\bigcup\overline{J}_2 - \{ b(I) \}) \cap X)] \cup [(\bigcup\overline{J}_3 - \{ a(I) \}) \cap X] \cup [(\bigcup\overline{J}_4 - \{ b(I) \}) \cap X]$.

Sea $x \in \{ a(I), b(I) \}$, entonces por (2), existe $K \in S_{n+1}$ tal que $x \in \bigcup\overline{K}$. Sea $L \in S_n$ tal que K es sucesor de L. Si $L \neq I$,

por (*), $U\bar{L} \cap U\bar{I}$ = { a(I), b(I) }. Como $x \in U\bar{K} \subset U\bar{L}$ y $x \notin$ { a(I), b(I) }, tenemos que $x \in X - U\bar{I}$.
Si L = I, entonces $K \in$ { J_1, J_2, J_3, J_4 }. De manera que $x \in (UJ_i$ - { a(I), b(I) }) $\cap X$, para alguna i. Esto prueba la contención " $\subset$ ".
De (*) se obtiene que b(I) $\notin U\bar{J}_1 \cup U\bar{J}_3$ y que a(I) $\notin U\bar{J}_2 \cup U\bar{J}_4$. De aquí se sigue la contención " $\supset$ ". De (11) y (5) se obtiene que los tres uniendos de la derecha de la igualdad (al inicio de este inciso) son conexos (m(I) $\in U\bar{J}_1 \cap U\bar{J}_2$ y p(I) $\in U\bar{J}_3 \cap U\bar{J}_4$).

Notemos que (X - $U\bar{I}$ $\bar{)}$ $\cap U\bar{I} \subset$ (por (2)) ($\cup$ { $U\bar{J}$ | J $\in S_n$ - { I } } $\bar{)}$ $\cap$ $U\bar{I}$ = { a(I), b(I) }. Ya que el segundo y tercero uniendos están contenidos en $U\bar{I}$ y sin excepción de los tres ninguno tiene a los puntos a(I) y b(I), tenemos que el primer uniendo está separado de los otros dos. Por (*), si intersectamos las cerraduras de los dos últimos uniendos, obtenemos un subconjunto de { a(I), m(I), b(I) } $\cap$ { a(I), p(I), b(I) } = { a(I), b(I) }. Razonando, como arriba obtenemos que estos conjuntos están separados .

Por tanto los tres uniendos son conexos y están mutuamente separados, entonces deben ser componentes de X - { a(I), b(I) }.

(13). X no se puede poner como la unión de una cadena circular de siete eslabones.

Supongamos que X = $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_7$, donde (C_1, ..., C_7) es una cadena circular.
Se probará por inducción que para toda n, existe I $\in S_n$ tal que $U\bar{I}$ - { a(I), b(I) } contiene algún C_i.

(a) Cada punto de X puede estar en a lo más dos de los C_i's.

Entonces sólo seis de los C_i's pueden intersectar al conjunto $\{ a, b, c \}$. Así que uno de ellos no intersecta a $\{ a, b, c \}$. Supongamos que $C_1 \cap \{ a, b, c \} = \emptyset$. Elegimos un punto $x_0 \in C_1$. Por (2), podemos suponer que $x_0 \in \cup\overline{\mathfrak{T}}$. Entonces C_1 es un subconjunto conexo de $X - \{ a, b, c \}$ que intersecta al complemento de $X - \cup\overline{\mathfrak{T}}$, es decir, C_1 no está contenido en $X - \cup\overline{\mathfrak{T}}$ y como debe esta contenido en alguna componente de las contenidas en $\cup\overline{\mathfrak{T}}$ (por (12)), de $X - \{ a, b \}$, tenemos que $C_1 \subset \cup\overline{\mathfrak{T}} - \{ a, b \}$.

(b). Supongamos que la afirmación es válida para n. Sea $I \in S_n$ tal que, por ejemplo, $C_1 \subset \cup\bar{I} - \{ a(I), b(I) \}$. Entonces C_1 estar contenido en la componente de $X - \{ a(I), b(I) \}$ que contiene a $p(I)$ o en la que contiene a $m(I)$ (ver (12)). Analizaremos el caso en que está en la componente de $p(I)$ (el otro caso es análogo).

Sean R = la componente de $X - \{ a(I), b(I) \}$ que contiene a $p(I)$, P la que contiene a $m(I)$ y $Q = X - \cup\bar{I}$. Entonces $X - \{ a(I), b(I) \} = P \cup Q \cup R$, $a(I) \neq b(I)$, P, Q y R son regiones ajenas dos a dos (son componentes de un abierto) y $P^- \cap Q^- \cap R^- = \{ a(I), b(I) \}$. Como $C_1 \subset R$, aplicando el lema 10, obtenemos que $P^- \cup Q^-$ intersecta a lo más a 4 de los C_i's. Entonces al menos tres de los C_i's están contenidas en R. Así que existen $i, j \in \bar{7}$ tales que $C_i, C_j \subset R$, $i \neq j$, $i, j \neq 1$. Como cualquier punto de X puede estar a lo más en dos C_k's, tenemos que alguno de los conjuntos C_1, C_i, C_j no contiene a $p(I)$. Supongamos por ejemplo que $p(I) \notin C_i$. Usando la notación de la prueba de (12), tenemos que $R = [(\cup\bar{J}_3 - \{ a(I) \}) \cap X] \cup [(\cup\bar{J}_4 - b(I)) \cap X]$. Por (*) la intersección de las cerraduras de estos dos conjuntos está contenida en $\{ a(I), p(I) \} \cap \{ p(I), b(I) \} = \{ p(I) \}$, por tanto $R = ((\cup\bar{J}_3 - \{ a(I), p(I) \}) \cap X) \cup ((\cup\bar{J}_4 - \{ p(I), b(I) \})$

$\cap$ X) es una separación de R − { p(I) }. Además $C_i \subset R$ − { p(I) } de manera que C_i está contenido en alguno de estos dos conjuntos. La prueba de la inducción está entonces completa puesto que J_3, $J_4 \in S_{n+1}$.

De acuerdo con (9), para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos entonces que existe C_i tal que diámetro de $C_i \leq 1 / 2^{n-2}$. Como sólo hay siete C_i's, alguno de ellos debe tener diámetro igual a cero, es decir, existe $i_0 \in \overline{7}$ tal que C_{i_0} consta de un solo punto p_0. Pero $C_{i_0} \cap C_{i_0+1} \neq \emptyset$ y $C_{i_0} \cap C_{i_0-1} \neq \emptyset$. Así que $p_0 \in C_{i_0-1} \cap C_{i_0+1}$. Esto es absurdo por la definición de cadena circular. Por tanto X no se puede poner como la unión de una cadena circular de 7 elementos. Las operaciones marcadas en los índices de los C_i's son consideradas en módulo 7.

Por tanto P(7) no es válida ni siquiera para espacios compactos.

BIBLIOGRAFIA.

[1] H. Bell and R. F. Dickman, Jr. A counterexample to a conjecture of A. H. Stone Proc. Amer. Math. Soc. 71 (1978) 305-308.

[2] H. Bell and R. F. Dickman, Jr. The end of a conjecture of A. H. Stone Topology Appl. 19 (1985) 245-250.

[3] R. F. Dickman, Jr. Multicoherent Spaces Fund. Math. 91 (1976) 219-229.

[4] R. F. Dickman, Jr. A proof of a conjecture of a A. H. Stone Proc. Amer. Math. Soc. 80 (1980) 177-180.

[5] R. F. Dickman, Jr. A strong form of the Phragmen-Brouwer theorem Proc. Amer. Math. Soc. 90 (1984) 333-337.

[6] A. Illanes An alternative proof to a conjecture of A. H. Stone. To appear in An. Ins. Matematicas Universidad Nac. Autonoma de Mexico.

[7] A. H. Stone Incidence relations in unicoherent spaces Trans. Amer. Math. Soc. 65 (1949) 427-447.

[8] A. H. Stone On infinitely multicoherent spaces Quart. J. Math. Oxford Ser. 3 (1952) 298-306.

[9] R. F. Dickman, Jr. Unicoherence , C-separated sets and non-alternating maps Proc. of the University of Oklahoma Topology Conference (1972) 42-46.

[10] R. F. Dickman Jr. Some mapping characterizations of unicoherence Fund. Math. 78 (1973) 27-35.

[11] Stephen Willard. General Topology. Addison Wesley Publishing Company (1970) 26.5.

[12] James Dugundji. Topology. Allyn & Bacon Inc. (1976).