

18
24.



**Universidad Nacional Autónoma
de México**

FACULTAD DE CIENCIAS

**BREVE INTRODUCCION A LA TEORIA
GEOMETRICA DE LAS FOLIACIONES**

T E S I S
Que para obtener el título de
M A T E M A T I C O
p r e s e n t a

JOSE LUIS LUGO GOYTIA

México, D. F.

1988



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Introducción.

Los primeros trabajos sobre foliaciones pueden situarse entre los años 1880 y 1940 y fueron realizados principalmente por H. Poincaré, I. Bendixson, H. Kneser, H. Whitney y W. Kopylov en lo que ellos llamaban: familias de curvas regulares en superficies. La teoría de las foliaciones, tal como se conoce actualmente, se inicia entre los años 1940 y 1950 con los trabajos de Ch. Ehresmann, G. Reeb y A. Haefliger y algunos más. El desarrollo que ha tenido la teoría de las foliaciones desde entonces ha sido enorme y en la actualidad puede decirse que se ha subdividido en dos ramas principales: la teoría cuantitativa y la teoría geométrica.

En este trabajo se intenta analizar y mostrar los aspectos más elementales de la teoría geométrica de las foliaciones. Está dividido en seis secciones y tres apéndices. Los trabajos en donde se expone la teoría de las foliaciones son avanzados y omiten muchos detalles en las demostraciones o solamente indican como pueden realizarse dichas demostraciones, además de que algunas veces muchas de estas indicaciones no son del todo correctas, dando lugar a que no se cuente con demostraciones completas y convincentes de muchos resultados que prescriban. Por este motivo he intentado dar demostraciones completas y detalladas de los principales resultados que se prescriban en las secciones. En los apéndices la presentación es más bien descriptiva, consistiendo principalmente de resúmenes de resultados y las demostraciones pueden concentrarse en las referencias que se indican.

La primera sección contiene las definiciones básicas, se establecen algunas propiedades elementales de las placas y de las hojas y se demuestra la equivalencia

entre la definición de foliación dada en términos del atlas de cartas trivializadas y la dada en términos de la descomposición de la variedad propiamente por las hojas. En la sección 2 se dan ejemplos de foliaciones definidas por medio de submersiones, en particular la fibración de Hopf de S^3 . En la sección 3 se define la estructura intrínseca de la hoja y se demuestra que las hojas con la estructura intrínseca son subvariedades immeridas. En la sección 4 se establece la correspondencia entre las foliaciones y los sistemas de aplicaciones distinguibles, además se muestra que una aplicación transversal a una foliación a su vez induce una foliación.

El Teorema de Frobenius es un resultado de gran importancia en el cálculo en variedades, a partir de él pueden obtenerse muchos resultados en foliaciones. En la sección 5 se incluye una demostración completa y detallada de dicho teorema, además se presenta una formulación en términos de formas diferenciales (vale la pena mencionar que la demostración de la versión dual que se presenta en Hecoy y Hirsch [1901] pág. 170 no es completamente correcta). En esta misma sección se presenta como un ejemplo a la foliación de Reeb de S^3 . En la sección 6 se da la definición de fibrado de K -planos orientable (transversalmente orientable) y la construcción del cubriente de orientaciones de un fibrado, la demostración de que el fibrado inducido por el cubriente de orientaciones es un fibrado orientable; se definen los foliaciones orientables (transversalmente orientables) en términos de la orientabilidad de su fibrado tangente y se traducen los resultados anteriores de fibrados al caso de foliaciones. Se dan ejemplos de cubrientes de orientaciones para algunas foliaciones no orientables definidas en superficies compactas. Se incluye también un resultado que relaciona la orientabilidad y la orientabilidad transversal de una foliación con la orientabilidad de la variedad. Creo que las demostraciones que se encuentran en esta sección son más completas y convincentes que las que se encuentran

en Camacho y Neto [1979] págs. 39-49.

Finalmente, en los apéndices, se presentan ejemplos específicos de foliaciones. El apéndice A con la construcción de foliaciones de dimensión 1 a partir de difeomorfismos, y señala cómo algunas propiedades del difeomorfismo se traducen en propiedades de las hojas de la suscripción del difeomorfismo. En el apéndice B se muestra que las acciones localmente libres de un grupo de Lie determinan una foliación, en particular la fibration de Hopf de S^{2n-1} se obtiene a partir de una acción libre de S^1 sobre S^{2n-1} en la que el espacio de hojas de esta foliación es difeomorfo al espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^{n-1}$. En el apéndice C se describe la topología de un flujo lineal holomorfo en \mathbb{C}^n en el llamado caso de Poincaré.

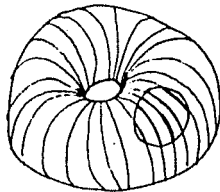
1. Folioaciones, placas y hojas.

El ejemplo más sencillo de una foliación de dimensión n es el siguiente. Consideréce en $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ la descomposición en placas m -dimensionales de la forma $\mathbb{R}^n \times \{c\}$, con $c \in \mathbb{R}^{m-n}$.



Los difeomorfismos locales $h: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ que preservan esta descomposición de \mathbb{R}^m , es decir si para cada $c \in \mathbb{R}^{m-n}$ con $U \cap (\mathbb{R}^n \times \{c\}) \neq \emptyset$ entonces $h(U \cap (\mathbb{R}^n \times \{c\})) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{c\})$ para alguna $c' \in \mathbb{R}^{m-n}$, deben ser de la forma $h(x,y) = (g(x,y), k(y))$, $(x,y) \in U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$.

Entonces una foliación de dimensión n de una variedad diferenciable M será una descomposición de M en subconjuntos conexos ajenos μ que localmente sea la foliación de \mathbb{R}^m que describimos antes.

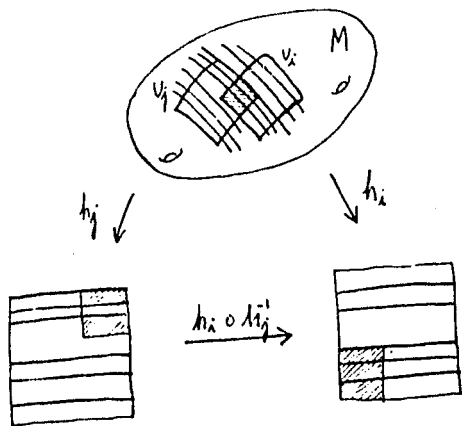


Podemos resumir la idea de foliación en la siguiente definición formal, la cual tiene ciertas ventajas para entender o enfatizar algunas propiedades de las foliaciones.

1.1 Definición. Sea M^m una variedad diferenciable de dimensión m y de clase C^∞ . Sea $\mathcal{F} = \{ (U_i, h_i) : i \in I \}$ un atlas de clase C^r para M . Entonces \mathcal{F} es una foliación de dimensión n y de clase C^r en una variedad M si se cumplen las siguientes dos condiciones:

F1) Si (U_i, h_i) es una carta de \mathcal{F} , entonces existen dos discos abiertos $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n}$ tales que $h_i(U) = U_1 \times U_2$.

F2) Si (U_i, h_i) y (U_j, h_j) están en \mathcal{F} y si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces los cambios de coordenadas $h_{ij} = h_i \circ h_j^{-1} : h_j(U_i \cap U_j) \rightarrow h_i(U_i \cap U_j)$ son de la forma $h_{ij}(x, y) = (g_{ij}(x, y), R_{ij}(y))$ en todo punto (x, y) de $h_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$.



Una carta (U, h) de M es compatible con la foliación $\mathcal{F} = \{ (U_i, h_i) : i \in I \}$ si $h(U) = U_1 \times U_2$ para algunos discos abiertos $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n}$ y si $U \cap U_i \neq \emptyset$ para alguna $i \in I$, entonces $h \circ h_i^{-1} : h_i(U \cap U_i) \rightarrow h(U \cap U_i)$ es un C^r -difeomorfismo de la forma $h \circ h_i^{-1}(x, y) = (\phi(x, y), \kappa(y))$.

Dada una foliación \mathcal{F} , el conjunto de todas las cartas compatibles con \mathcal{F} \mathcal{F}_c define el atlas maximal generado por \mathcal{F} , el cual es único, y este atlas maximal define en M una foliación que denotaremos también por \mathcal{F} . Es conveniente suponer, y así lo haremos, que toda foliación es un atlas maximal ya que en este caso los dominios de las cartas que pertenecen a la foliación constituyen una base para la topología de la variedad M .

Comentario. Debido a la condición F2) de la definición 1.1, el atlas \mathcal{F} es muy especial, por lo que no es posible esperar que toda variedad de dimensión m deba tener una foliación de dimensión n , para $0 < n < m$. En particular, como la característica de Euler de S^2 no es cero, entonces S^2 no admite una foliación de dimensión uno.

Si A es un subconjunto abierto de M , entonces $\mathcal{F}|_A = \{ (U \cap A, h|_{U \cap A}) : (U, h) \in \mathcal{F} \}$ define una foliación de dimensión n y de clase C^r en A , llamada la foliación inducida por \mathcal{F} en A .

Las cartas (U, h) que pertenecen a una foliación \mathcal{F} también son conocidas como las cartas trivializadoras de \mathcal{F} .

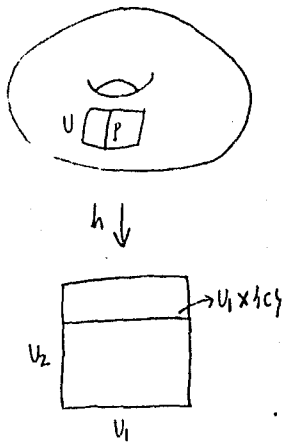
Decimos que dos foliaciones \mathcal{F} y \mathcal{F}' de dimensión n y de clase C^r de las variedades M y M' respectivamente son isomorfas si existe un C^r -difeo-

merfismo $f: M \rightarrow M^r$ tal que para cada carta trivializadora (U, h) de \mathcal{F} se tiene que $(f^{-1}(U), h \circ f)$ es también una carta trivializadora de \mathcal{F} .

Sea \mathcal{F} una foliación de clase C^r y dimensión n de una variedad M^m . En lo que sigue supondremos que $1 \leq r \leq \infty$ o $r = \omega$ y que $0 < n < m$.

1.2. Definición. Sea (U, h) una carta trivializadora de \mathcal{F} y supongamos que $h(U) = U_1 \times U_2$ donde $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n}$ son discos abiertos. Un subconjunto $P \subset M$ es una placa de \mathcal{F} si existe alguna $c \in U_2$ tal que $P = h^{-1}(U_1 \times \{c\})$.

1.3. Definición. Un subconjunto $P \subset M$ es una placa de \mathcal{F} si existe alguna carta trivializadora (U, h) de \mathcal{F} tal que P sea placa de U .



1.4. Proposición. Toda placa de \mathcal{F} es una subvariedad conexa de M de dimensión n y de clase C^r .

En efecto, sea $P = h^{-1}(U_1 \times \{c\})$ para alguna carta (U, h) de \mathcal{F} y alguna $c \in U_2$,

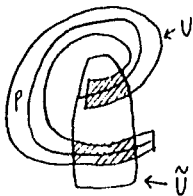
siendo $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n}$ abiertos conexos tales que $h(U) = U_1 \times U_2$. Sea $i_c: U_1 \rightarrow U_1 \times U_2$ la inmersión definida por $i_c(x) = (x, c)$ y sea $f: U_1 \rightarrow M$ definido por $f = h^{-1} \circ i_c$, entonces f es un empuje de clase C^r . Como U_1 es una variedad conexa de dimensión m y $P = f(U_1)$, entonces la placa P es una subvariedad conexa de M de dimensión m y de clase C^r .

Observación. De lo anterior también podemos concluir que P es conexo por caminos.

Consideremos ahora una carta trivializadora (U, h) de π y supongamos que $h(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Si $p \in U$ entonces $h(p) = (x, y)$ para algún $(x, y) \in U_1 \times U_2$. Sean $P_1 = h^{-1}(U_1 \times \{c_1\})$ y $P_2 = h^{-1}(U_1 \times \{c_2\})$ dos placas de U y supongamos que $p \in P_1 \cap P_2$. Como $p \in P_1$ entonces $h(p) = (x, y) \in U_1 \times \{c_1\}$ y por lo tanto $y = c_1$. De manera similar se tiene que $y = c_2$ y por consiguiente $c_1 = c_2$. Así pues, tenemos el siguiente resultado.

1.5. Proposición. Si P_1 y P_2 son placas de U , entonces $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ o $P_1 = P_2$.

Si (U, h) y (\tilde{U}, \tilde{h}) son cartas trivializadoras de π y P es una placa de U , se puede tener que la placa P en \tilde{U} no consista de solamente una placa de \tilde{U}



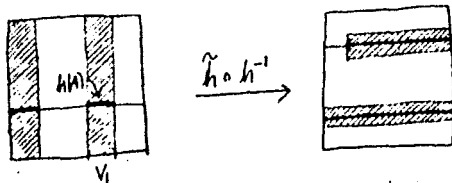
Sin embargo podemos establecer el siguiente resultado.

1.6. Proposición. Sean (U, h) y (\tilde{U}, \tilde{h}) dos cartas trivializadoras de π y sea P una placa de U . Entonces $P \cap \tilde{U}$ está formado por una colección finita

de partes de placas de \tilde{U} .

En efecto, ya que P es una subvariedad de clase C^r de M la inclusión canónica $i: P \rightarrow M$ definida por $i(p) = p$ es un empuje de clase C^r . Como además \tilde{U} es una subvariedad abierta de M , entonces $i^{-1}(\tilde{U}) = P \cap \tilde{U}$ es una subvariedad abierta de clase C^r de P . Y utilizando el hecho de que las variedades son espacios localmente conexos y completamente separables podemos concluir entonces que las componentes conexas de $P \cap \tilde{U}$ son conjuntos abiertos y que tan solo hay un número a lo más numerable de dichas componentes conexas.

Supongamos que $P = h^{-1}(U \times \{c\})$ para alguna $c \in \mathbb{R}^k$ y que A es una componente conexa de $P \cap \tilde{U}$. Por consiguiente $h(A) = V_1 \times \{c\}$ para algún conjunto abierto conexo $V_1 \subset U_1$.



En virtud de F2) de la definición 1.1 podemos escribir $\tilde{h} \circ h^{-1}(x, y) = (\eta(x, y), k(y))$. Sea $\tilde{c} = k(c)$ y \tilde{P} la placa de \tilde{U} definida por $\tilde{P} = \tilde{h}^{-1}(\tilde{U} \times \{\tilde{c}\})$. Dado $p \in A$ entonces $p = h^{-1}(x, c)$ para alguna $x \in V_1$ y como se tiene que $\tilde{h}(p) = \tilde{h}(h^{-1}(x, c)) = (\eta(x, c), k(c)) = (\eta(x, c), \tilde{c}) \in \tilde{h}(U \cap \tilde{U}) \cap (\tilde{U} \times \{\tilde{c}\}) \subset \tilde{U} \times \{\tilde{c}\}$, entonces $p \in \tilde{h}^{-1}(\tilde{U} \times \{\tilde{c}\})$ y por consiguiente $A \subset \tilde{P}$. Además por la prop. 1.5, A no puede estar contenida en otra placa de \tilde{U} diferente de \tilde{P} .

Entonces debido a que cada componente conexa de $P \cap \tilde{U}$ está contenida en solamente una placa de \tilde{U} , y a que tan solo hay una cantidad a lo más numerable de componentes conexas de $P \cap \tilde{U}$, se tiene que hay una colección a lo más numerable de placas de \tilde{U} en donde $P \cap \tilde{U}$ puede estar contenida.

Consideremos una carta (U_i, h_i) de \mathcal{F} . Como todo punto $p \in U_i$ está en alguna placa de U_i resulta que U_i está cubierta por placas de U_i y por la prop. 1.7 podemos afirmar que existe una relación de equivalencia R_i en U_i en donde las clases de equivalencia son precisamente las placas de U_i . Además si (U_j, h_j) es alguna otra carta de \mathcal{F} y si $p \in U_i \cap U_j$, entonces la placa de U_i que contiene a p y la placa de U_j que contiene a p deben coincidir en una vecindad suficientemente pequeña de p , por consiguiente las relaciones de equivalencia R_i y R_j coinciden en $U_i \cap U_j$. De esta forma se puede construir una relación de equivalencia R sobre la variedad M generada a partir de las relaciones R_i . Antes de definir la relación R es conveniente establecer las siguientes definiciones.

1.7. Definición. Un camino de placas de \mathcal{F} es una sucesión P_1, \dots, P_k de placas de \mathcal{F} que cumplen la condición siguiente:
para toda $j \in \{1, \dots, k-1\}$ se tiene que $P_j \cap P_{j+1} \neq \emptyset$.

Como M está cubierto por placas de \mathcal{F} podemos definir una relación R sobre M de la siguiente manera:

$p R q$ si y sólo si existe P_1, \dots, P_k , camino de placas de \mathcal{F} , tal que $p \in P_1$ y $q \in P_k$.

Es claro que R así definida es una relación de equivalencia.

1.8. Definición. Las clases de equivalencia de la relación R son llamadas las hojas de la foliación \mathcal{F} .

De esta definición se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

1.9. Proposición. Si F es una hoja de \mathcal{F} , entonces F es un subconjunto de M conexo por caminos y por lo tanto conexo.

En efecto, si p y q pertenecen a la hoja F entonces existe un camino de placas de \mathcal{F} , digamos P_1, \dots, P_k , tales que $p \in P_1$ y $q \in P_k$. Como cada placa P_j es un

conjunto conexo por caminos y además $P_j \cap P_{j+1} \neq \emptyset$, se sigue que $P_1 \cup \dots \cup P_R \subset F$ es un conjunto conexo por caminos y por tanto existe un camino en F que conecta a los puntos p y q .

Como las hojas son clases de equivalencia de la relación R y localmente son placas de \mathcal{F} , entonces como consecuencia inmediata de 1.8 y 1.9 podemos enunciar:

1.10. Proposición. Sea \mathcal{F} una foliación de dimensión n y clase C^r de una variedad diferenciable M^n . Entonces la familia de hojas de \mathcal{F} , $\{F : F \text{ es hoja de } \mathcal{F}\}$, es una descomposición de M en subconjuntos conexos que satisfacen la siguiente condición:

Para cada punto de M existe una vecindad abierta U de dicho punto y un C^r -difeomorfismo $h: U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ tal que para cada hoja F de \mathcal{F} y cada componente conexa A de $U \cap F$ se tiene que $h(A) = U_1 \times C$ para algún conjunto abierto conexo $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ y alguna $C \in \mathbb{R}^{m-n}$.

1.11. Proposición. Si \mathcal{F} y \mathcal{G} son dos foliaciones de clase C^r de la variedad M y si tanto \mathcal{F} como \mathcal{G} tienen el mismo conjunto de hojas, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

En efecto, si (U, h) y (W, g) son cartas de \mathcal{F} y \mathcal{G} respectivamente y F es una hoja común a ambas foliaciones y tal que $F \cap U \cap W \neq \emptyset$, entonces se tiene que existen subconjuntos abiertos U_1 y W_1 de \mathbb{R}^n (no necesariamente conexos) y $c, c' \in \mathbb{R}^{m-n}$ tales que $h^{-1}(U_1 \times c) = F \cap U \cap W = g^{-1}(W_1 \times c')$. Por consiguiente $g \circ h^{-1}(U_1 \times c) = W_1 \times c'$ de donde se deduce que la carta (W, g) es compatible con \mathcal{F} . De manera similar tenemos que (U, h) es compatible con \mathcal{G} . Así hemos visto que toda carta (U, h) de \mathcal{F} pertenece a \mathcal{G} y toda carta (W, g) de \mathcal{G} pertenece a \mathcal{F} .

Finalmente esta sección dando una proposición que junto con 1.10 nos permite tener una definición de foliación equivalente a la definición 1.1.

1.12. Proposición. Sea M^m una variedad diferenciable de dimensión m . Sea $\{F_i : i \in I\}$ una descomposición de M en subconjuntos conexos ajenos con la propiedad siguiente:

(1.13) Para cada punto de M existe una vecindad abierta U de dicho punto y un C^r -difeomorfismo $h: U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ tal que para cada F_i y cada componente conexa A de $U \cap F_i$ existe un abierto conexo V_i en \mathbb{R}^n y un punto $c \in \mathbb{R}^{m-n}$ tales que $h(A) = V_i \times \{c\}$.

Entonces existe una única foliación \mathcal{F} de dimensión n y clase C^r de M tal que el conjunto de todas las hojas de \mathcal{F} es precisamente $\{F_i : i \in I\}$.

Se verifica fácilmente que la colección de todas las cartas (U, h) que cumplen la condición (1.13) del enunciado define una foliación \mathcal{F} con las propiedades deseadas, y por la prop. 1.11 esta foliación es única.

2. Ejemplos de foliaciones.

Antes de continuar estudiando a las foliaciones es conveniente contar con algunos ejemplos específicos de foliaciones que nos sugieran algunas propiedades de éstas y de sus hojas. En particular muchos ejemplos pueden construirse por medio de sumersiones.

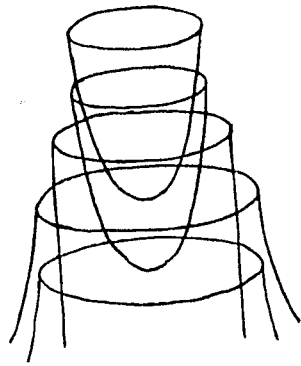
Sea $f: M^m \rightarrow N^n$ una sumersion de clase C^r . Como todo punto $c \in N$ es un valor regular de f , entonces podemos afirmar que $f^{-1}(c): c \in N$ es una descomposicion de M en subvariedades de clase C^r y de dimension $m-n$. Sin embargo las subvariedades $f^{-1}(c)$ no necesariamente son conexas; pero esto no representa una dificultad seria para que se pueda definir una foliacion en M a partir de la descomposicion dada por las superficies de nivel. De hecho basta tomar como descomposicion de M la dada por las componentes conexas de las superficies de nivel $f^{-1}(c)$ para $c \in N$.

En efecto, ya que por la forma local de las sumersiones, dado un punto $p \in M$ existen cartas locales (U, h) alrededor de p , (V, g) alrededor de $q = f(p)$, y discos abiertos $U_1 \subset \mathbb{R}^{m-n}$ y $U_2 \subset \mathbb{R}^n$ tales que $f(U) \subset V$, $h(U) = U_1 \times U_2$, $g(V) \subset U_2$ y $g \circ f \circ h^{-1}: U_1 \times U_2 \rightarrow U_2$ coincide con la segunda proyeccion $pr_2(x, y) = y$. Sea A la componente conexa de $f^{-1}(q) \cap U$ que contiene a p , por lo tanto $f(A) = \{q\}$. Ademàs $h(A)$ es un subconjunto conexo de $U_1 \times U_2$. Sea $C = g(q)$ y como $pr_2 \circ h = g \circ f$, entonces $(pr_2 \circ h)(A) = (g \circ f)(A) = g(f(A)) = \{q\}$ y por consiguiente $h(A) \subset U_1 \times \{q\}$. Pero como $h(A)$ es conexo, existe algùn conjunto abierto conexo $W_1 \subset U_1$ tal que $h(A) = W_1 \times \{q\}$. Así hemos demostrado (prop. 1.12) lo siguiente.

2.1. Proposición. Sea $f: M^m \rightarrow N^n$ una submersión de clase C^r . Entonces las componentes conexas de las superficies de nivel $f^{-1}(a)$, $a \in N$, son las hojas de una foliación de dimensión $m-n$ y de clase C^r de M .

2.2. Ejemplo. Considérese a una función $m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ y tal que $m(0)=1$, $m(1)=0$ y $m'(t) < 0$ para toda $t > 0$. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x_1, x_2, x_3) = m(r^2) \exp(x_3)$ en donde $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$. Como $\text{grad } f(x_1, x_2, x_3) = (2m'(r^2)x_1 \exp(x_3), 2m'(r^2)x_2 \exp(x_3), m(r^2) \exp(x_3))$ es un vector no nulo en todo punto $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, entonces f es una submersión y por consiguiente las superficies de nivel de f determinan una foliación de dimensión dos y clase C^∞ de \mathbb{R}^3 . Esta foliación puede describirse como sigue:

En el interior del cilindro sólido $C = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ se encuentran, para $c > 0$, las hojas $f^{-1}(c) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 < 1 \text{ y } x_3 = \log(c/m(r^2))\}$ las cuales son homeomorfas a \mathbb{R}^2 y se van acumulando únicamente sobre la frontera de C . Como $f^{-1}(0) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, entonces la frontera del cilindro sólido C es también una hoja. En el exterior de C , para $c < 0$, las hojas $f^{-1}(c) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 > 1 \text{ y } x_3 = \log(c/m(r^2))\}$ también son homeomorfas a cilindros $S^1 \times \mathbb{R}$ y se van acumulando sobre el cilindro $f^{-1}(0)$.



2.3. Ejemplo. (La fibración de Hopf)

Pensemos a S^3 , la esfera unitaria en \mathbb{R}^4 , como el conjunto $S^3 = \{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \langle (z_1, z_2), (z_1, z_2) \rangle = 1 \}$ en donde \langle, \rangle es el producto hermitiano usual de \mathbb{C}^2 (es decir, $\langle (z_1, z_2), (w_1, w_2) \rangle = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2$).

A la esfera S^2 como el conjunto $S^2 = \{ (r, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} : r^2 + |w|^2 = 1 \}$.

El espacio tangente a S^3 en el punto $(z_1, z_2) \in S^3$ está dado por $T_{(z_1, z_2)} S^3 = \{ (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Re} \langle (z_1, z_2), (w_1, w_2) \rangle = 0 \}$, y es un espacio vectorial real de dimensión tres. El espacio tangente a S^2 en un punto $(r, z) \in S^2$ es $T_{(r, z)} S^2 = \{ (a, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} : ra + \operatorname{Re}(z \bar{w}) = 0 \}$, y es un espacio vectorial real de dimensión dos.

Considérese a la aplicación $\pi: S^3 \rightarrow S^2$ que está definida por $\pi(z_1, z_2) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2z_1 \bar{z}_2)$. Sea dado $(a, b) \in S^2$, se encuentra fácilmente que la derivada de π en (a, b) , $D\pi(a, b): T_{(a, b)} S^3 \rightarrow T_{\pi(a, b)} S^2$, está dada por $D\pi(a, b) \cdot (w_1, w_2) = 2(\operatorname{Re}(a \bar{w}_1 - b \bar{w}_2), a \bar{w}_2 + b \bar{w}_1)$. Y por consiguiente $\operatorname{Ker} D\pi(a, b) = \{ (w_1, w_2) \in T_{(a, b)} S^3 : \operatorname{Re}(a \bar{w}_1 - b \bar{w}_2) = 0 \text{ y } a \bar{w}_2 + b \bar{w}_1 = 0 \}$. En el caso en que $a=0$, entonces $|b|=1$ y tenemos que $\operatorname{Ker} D\pi(0, b)$ es el espacio generado por $\{ (0, ib) \}$ y, es decir, $\operatorname{Ker} D\pi(0, b) = \mathbb{R} \cdot \{ (0, ib) \} = \{ (0, ibt) : t \in \mathbb{R} \}$.

En el caso $a \neq 0$, se encuentra que $\operatorname{Ker} D\pi(a, b) = \mathbb{R} \cdot \{ (\frac{i}{a}, \frac{ib}{|a|^2}) \}$. En ambos casos se tiene que $\dim \operatorname{Ker} D\pi(a, b) = 1$ y, por consiguiente $D\pi(a, b)$ es suryectiva y π será una submersión.

De esta manera se tiene que π determina una foliación de dimensión uno en S^3 , en donde los hojos de dicha foliación son los componentes

de las subvariedades $\pi^{-1}(r, w) = \{ (z_1, z_2) \in S^3 : r = |z_1|^2 - |z_2|^2 \text{ y } w = 2z_1\bar{z}_2 \}$,
para $(r, w) \in S^2$.

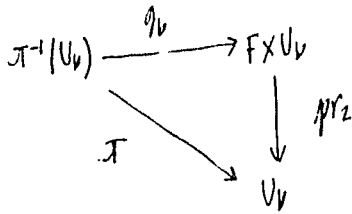
Aquí también tenemos que considerar los casos $w=0$ y $w \neq 0$. En el primero, $w=0$; implica que $r^2=1$, y encontramos entonces que $\pi^{-1}(1, 0) = \{ (z_1, 0) : |z_1|=1 \}$, y $\pi^{-1}(-1, 0) = \{ (0, z_2) : |z_2|=1 \}$ y es claro que ambas subvariedades son difeomorfas a S^1 . En el segundo caso, $w \neq 0$, se tiene que $\pi^{-1}(r, w) = \{ (\sqrt{\frac{r+1}{2}} m, \sqrt{\frac{1-r}{2}} \frac{w}{|w|} m) : m \in S^1 \}$ el cual es también difeomorfo a S^1 .

En este ejemplo hemos visto que todas las fibras $\pi^{-1}(r, w)$ son difeomorfas a una variedad fija, en este caso al círculo S^1 . El siguiente resultado que enunciaremos es una consecuencia inmediata de la prop. 2.1. en el caso de aquellas sumersiones en las que todas las fibras sean difeomorfas a una única variedad fija.

2.4. Proposición. Sea (E, π, B, F) un espacio fibrado en donde E, B y F son variedades diferenciables y $\pi: E \rightarrow B$ es una sumersion de clase C^∞ . Entonces existe una foliación \mathcal{F} de E de clase C^∞ y $\dim \mathcal{F} = \dim F$ tal que las hojas de \mathcal{F} son las componentes conexas de las fibras $\pi^{-1}(b)$, $b \in B$.

Aunque ya se dijo que esta proposición es una consecuencia inmediata de 2.1, puede ser de utilidad para familiarizarse con la definición de foliación conpar con una demostración que no haga referencia a 2.1.

Demostración de 2.4. Dado $b \in B$ podemos encontrar una carta (U_b, h_b) de B con $b \in U_b$ y un C^∞ -difeomorfismo $g_b: \pi^{-1}(U_b) \rightarrow F \times U_b$ tal que el diagrama siguiente



es conmutativo. Denotamos por $\text{pr}_2: F \times U_b \rightarrow U_b$ a la segunda proyección $\text{pr}_2(x,y) = y$, y denotaremos por $\text{pr}_1: F \times U_b \rightarrow F$ a la primera proyección $\text{pr}_1(x,y) = x$. Como $\pi = \text{pr}_2 \circ q_b$, entonces $q_b = (\text{pr}_1 \circ q_b, \text{pr}_2 \circ q_b) = (\text{pr}_1 \circ q_b, \pi)$. Además podemos suponer que las cartas (U_b, h_b) son tales que $h_b(U_b)$ es un disco abierto en \mathbb{R}^m en donde $m = \dim B$. En lo que sigue únicamente consideraremos cartas (V, f) de F tales que $f(V)$ sea un disco abierto en \mathbb{R}^n donde $n = \dim F$.

Hagamos $\pi = h \circ (q_b^{-1} \circ (f \times h_b) \circ q_b)$: $b \in B$ y (V, f) es carta de F . Verifiquemos ahora que esta π es la foliación que buscamos.

Sea $b \in B$ y (V, f) una carta de F , se tiene entonces que

$$[(f \times h_b) \circ q_b] \circ (q_b^{-1} \circ (f \times h_b) \circ q_b) = (f \times h_b) \circ (V \times U_b) = f(V) \times h_b(U_b) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

en donde $f(V)$ y $h_b(U_b)$ son discos abiertos de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m respectivamente.

Ahora tomemos a $b \in B$ y $(V, f), (\tilde{V}, \tilde{f})$ cartas de F y suponemos que $U_a \cap U_b \neq \emptyset$ y $V \cap \tilde{V} \neq \emptyset$. Se tiene entonces que $q_b \circ q_a^{-1}: (V \cap \tilde{V}) \times (U_a \cap U_b) \rightarrow (V \cap \tilde{V}) \times (U_a \cap U_b)$ y

$$q_b \circ q_a^{-1} = (\text{pr}_1 \circ q_b \circ q_a^{-1}, \text{pr}_2 \circ q_b \circ q_a^{-1}) = (\text{pr}_1 \circ q_a \circ q_b^{-1}, \pi \circ q_a^{-1}) = (\text{pr}_1 \circ q_b \circ q_a^{-1}, \text{pr}_2). \text{ Por}$$

lo tanto, para todo punto (x,y) en $(f(V) \cap \tilde{f}(\tilde{V})) \times (h_b(U_b) \cap h_a(U_a)) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ se tiene que $(f \times h_b) \circ q_b \circ q_a^{-1} \circ (\tilde{f}^{-1} \times h_a^{-1})(x,y) = (f \times h_b) \circ q_b \circ q_a^{-1}(\tilde{f}^{-1}(x), h_a^{-1}(y))$

$$= (f \times h_b)(H(x,y), h_a^{-1}(y)) = (G(x,y), h_b \circ h_a^{-1}(y)).$$

De lo anterior se concluye que π es efectivamente una foliación de clase C^∞ y de dimensión $n = \dim F$. Además, las hojas de esta foliación son las componentes conexas de las fibras $\pi^{-1}(b)$.

En efecto, sea $U \in \mathcal{B}$ y (V, π) una carta de F , y consideremos la carta $(f \times h_U) \circ g_U : g_U^{-1}(V \times U) \rightarrow f(V) \times h_U(U)$ de la foliación F , y sea ahora dado $\eta \in h_U(U)$. Como $h_U : U \rightarrow h_U(U)$ es una biyección, $\eta = h_U(c)$ para una única $c \in U$. Pero como además $[(f \times h_U) \circ g_U]^{-1}(f(V) \times \eta) = g_U^{-1}[(f^{-1} \times h_U^{-1})(f(V) \times \eta)] = g_U^{-1}(V \times \{c\})$, entonces la placa $P = [(f \times h_U) \circ g_U]^{-1}(f(V) \times \eta)$ está contenida en la fibra $\pi^{-1}(c)$. Además es claro que todo camino de placas del que P forma parte está también contenido en $\pi^{-1}(c)$. Y como las hojas son conjuntos conexos, la hoja que contiene a P necesariamente debe estar contenida en alguna componente conexa de $\pi^{-1}(c)$.

3. La estructura intrínseca de las hojas.

3.1. Lema. Sean P_1 y P_2 dos placas de \mathcal{T} , entonces $P_1 \cap P_2$ es un conjunto abierto en P_1 y en P_2 .

Tenemos que P_1 y P_2 son subvariedades conexas de M y por consiguiente la topología de P_1 y de P_2 es la topología inducida por la topología de M . Supongamos que (U, h) y (\tilde{U}, \tilde{h}) son cartas de \mathcal{T} tales que P_1 es placa de U y P_2 es placa de \tilde{U} . Supongamos ahora que $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ y que $P_1 \cap P_2$ es conexo. Sea W la componente conexa de $U \cap \tilde{U}$ que contiene al conjunto $P_1 \cap P_2$. Como U y \tilde{U} son conjuntos abiertos de M y M es un espacio localmente conexo, entonces W es un conjunto abierto en M . Como además $P_1 \cap W$ está formado por placas de \tilde{U} (prop. 1.6) y $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ entonces P_2 es la única placa de \tilde{U} que contiene a $P_1 \cap W$ (prop. 1.5). Por lo tanto $P_1 \cap W = P_1 \cap P_2$. Análogamente se tiene que $P_1 \cap P_2 = P_2 \cap W$. Y como W es un conjunto abierto en M y la topología de P_1 y de P_2 es la topología inducida por M , concluimos que $P_1 \cap P_2$ es un conjunto abierto de P_1 y de P_2 . En el caso en que $P_1 \cap P_2$ no sea conexo, entonces de una manera similar se obtiene que las componentes conexas de $P_1 \cap P_2$ son conjuntos abiertos de P_1 y de P_2 y por lo tanto $P_1 \cap P_2$ también lo será.

Como estamos considerando que la variedad M tiene base numerable y hemos supuesto que el atlas \mathcal{T} es maximal y por lo tanto los dominios de las cartas de \mathcal{T} forman una base. Para la topología de M , podemos suponer que $\mathcal{T} = \{ (U_i, h_i) : i \in I \}$ y para algún conjunto contable de índices I .

Sea dado un punto $p \in M$ y escojamos $i \in I$ de manera que (U_i, h_i) sea tal que $p \in U_i$ y sea P_i la placa de U_i que contiene a p . Sea l un entero positivo. Decimos que una placa P de \mathcal{T} está l -unida al punto p si existe un conjunto de l índices $\{i_1, \dots, i_l\} \subset I$ y un camino de placas P_{i_1}, \dots, P_{i_l} (es decir, $P_{i_j} \cap P_{i_{j+1}} \neq \emptyset$ para toda $j \in \{1, \dots, l-1\}$) en donde para cada $j \in \{1, \dots, l\}$

$P_{i,j}$ es placa de alguna carta U_i y además $P_{i,1} = P_i$ y $P_{i,2} = P$. Sea H_i el conjunto de todas las placas L -unidas a P . Entonces en virtud de la prop. 1.6 cada uno de los conjuntos H_i es a lo más numerable y por consiguiente el conjunto de todas las placas de \mathcal{F} que pueden unirse a P está dado por $\bigcup_{i \in I} H_i$ el cual es también a lo más numerable por ser la unión numerable de conjuntos a lo más numerables. De lo anterior podemos sacar como conclusión la siguiente proposición.

3.2 Proposición. Toda hoja de la foliación \mathcal{F} es una unión contable de placas de \mathcal{F} .

3.3 Corolario. Sea F una hoja de \mathcal{F} y (U, h) una carta trivializadora de \mathcal{F} , entonces $F \cap U$ está formado por una colección contable de placas de U .

En efecto, tenemos que $F = \bigcup_{i \in I} P_i$ en donde I es un conjunto contable de índices y cada P_i es una placa de \mathcal{F} . Por la prop. 1.6 tenemos que para cada $i \in I$

existe un conjunto contable de índices J_i tal que $P_i \cap U = \bigcup_{j \in J_i} P_{i,j}$ en donde cada $P_{i,j}$ es una placa de U . Por lo tanto $F \cap U = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} P_{i,j}$.

Sea (U, h) una carta de \mathcal{F} y supongamos que $h(U) = U_1 \times U_2$ en donde $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n}$ son discos abiertos y sea $P = h^{-1}(U_1 \times \{c\})$, $c \in U_2$, una placa de U . Denotemos por $\bar{h}_P : P \rightarrow U_1$ la aplicación definida por $\bar{h}_P = \text{pr}_1 \circ h|_P$, en donde $\text{pr}_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la primera proyección. Sea $\bar{h}_c : U_1 \rightarrow U_1 \times \{c\}$ definida por $\bar{h}_c(x) = (x, c)$ y notemos que \bar{h}_P es una aplicación continua con una inversa continua $\bar{h}_P^{-1} = h^{-1} \circ \bar{h}_c$, por lo que \bar{h}_P es un homeomorfismo de la subvariedad P de M sobre el disco abierto $U_1 \subset \mathbb{R}^n$.

Veamos ahora que siempre será posible dotar a las hojas de una foliación de una estructura de variedad diferenciable.

3.4. Proposición. Sea F una hoja de una foliación \mathcal{F} de clase C^r y dimensión n . La colección $\mathcal{A} = \{(P, \bar{h}_P) : P \subset F \text{ es placa de } U \text{ y } (U, h) \in \mathcal{F}\}$ determina en F una estructura de variedad diferenciable de clase C^r y de dimensión n .

En efecto. Como solo puede haber una cantidad a lo más numerable de placas de \mathcal{F} contenidas en la hoja F y hay solo una cantidad a lo más numerable de cartas trivializadoras de \mathcal{F} , entonces tenemos que los dominios de las cartas que pertenecen a \mathcal{A} forman una cubierta contable de F .

Sean $p, q \in F$ y supongamos que $p \neq q$. Como M es un espacio de Hausdorff entonces existen cartas trivializadoras (U_i, h_i) y (U_j, h_j) de \mathcal{F} tales que $p \in U_i$, $q \in U_j$ y $U_i \cap U_j = \emptyset$. Sea P_i la placa de U_i que contiene a p y P_j la placa de U_j que contiene a q , tenemos entonces que $P_i \cap P_j = \emptyset$.

Sean ahora dadas (U_i, h_i) y (U_j, h_j) dos cartas de \mathcal{F} y sean P_i una placa de U_i contenida en F y P_j una placa de U_j también contenida en F . Por el lema 3.1 tenemos que $P_i \cap P_j$ es un conjunto abierto de P_i y de P_j , y como \bar{h}_{i, P_i} es un homeomorfismo, entonces $\bar{h}_{i, P_i}(P_i \cap P_j)$ es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .

Supongamos ahora que $P_i \cap P_j \neq \emptyset$. Como $h_i \circ h_j^{-1} : h_j(U_i \cap U_j) \rightarrow h_i(U_i \cap U_j)$ es un C^r -difeomorfismo de la forma $h_i \circ h_j^{-1}(x, y) = (g_{ij}(x, y), k_{ij}(y))$, para toda (x, y) en $h_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, en donde $g_{ij} : h_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $k_{ij} : h_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ son aplicaciones de clase C^r . Supongamos que $h_i(U_i) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ para U_1 y U_2 discos abiertos y que $P_i = h_i^{-1}(U_1 \times \{c\})$ para alguna $c \in U_2$. De manera análoga

$h_j(U_j) = W_1 \times W_2$ y $P_j = h_j^{-1}(W_1 \times \{c\})$ para $c \in W_2$. Resulta que la aplicación $\bar{h}_{i, P_i} \circ \bar{h}_{j, P_j}^{-1} : \bar{h}_{j, P_j}(P_i \cap P_j) \rightarrow \bar{h}_{i, P_i}(P_i \cap P_j)$ está dada por $\bar{h}_{i, P_i} \circ \bar{h}_{j, P_j}^{-1}(x) = g_{ij}(x, c)$

para toda $x \in \bar{h}_{j, P_j}(P_i \cap P_j)$, y por lo tanto $\bar{h}_{i, P_i} \circ \bar{h}_{j, P_j}^{-1}$ es una aplicación de clase C^r .

De una manera completamente similar se obtiene que $\bar{T}_{i p_2} \circ \bar{T}_{i p_1}^{-1}$ es una aplicación de clase C^r . Por lo tanto $\bar{T}_{i p_1} \circ \bar{T}_{i p_2}^{-1}$ es un C^r -difeomorfismo entre conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n . Entonces podemos concluir (ver Spernberg [1964], pp. 44) que existe una única (topológica) estructura de variedad diferenciable sobre F de clase C^r y de dimensión n , en la que las placas $P \subset F$ de \mathfrak{F} son una base de abiertos y los $\bar{T}_{i p}$ son C^r -difeomorfismos.

A la estructura de variedad diferenciable determinada por el atlas \mathcal{A} se le conoce con el nombre de estructura intrínseca de la hoja.

Hemos visto que en el caso de las foliaciones definidas por sumersiones las hojas son subvariedades de M y por consiguiente la topología intrínseca de la hoja coincide con la topología inducida por M .

Sin embargo las hojas de una foliación no necesariamente serán subvariedades, ya que las hojas pueden acumularse sobre sí mismas como en el caso de la foliación de Reeb. (Ver ejemplo 5.17)

Por ejemplo, puede suceder que una hoja F interseque al dominio U de una carta (U, h) de \mathfrak{F} en una sucesión de placas de U (P_k) , $k \in \mathbb{N}$, que se acumulen sobre una placa $P \subset F$, en el sentido de que cualquier vecindad abierta $W \subset M$ de P que esté contenida en U , contenga a una infinidad de placas P_k . Resulta entonces que F no puede ser un espacio localmente conexo cuando se le considera con la topología inducida por M . Pero con la topología intrínseca F es una variedad y por lo tanto es un espacio localmente conexo. De esta manera vemos que la topología intrínseca no coincide con la topología inducida, y por consiguiente F no es una subvariedad.

Aunque las hojas en general no son subvariedades, siempre serán subvariedades inmersas como lo establece el siguiente resultado.

3.5. Proposición. Sea F una hoja de \mathfrak{F} y consideremos en F la estructura intrínseca. Entonces la inclusión canónica $i: F \rightarrow M$ definida por $i(p) = p$ es una inmersión biyectiva de clase C^r .

En efecto, sea dado $p \in F$ y sea (U, h) una carta de M que sea también una carta trivializadora de π y tal que $p \in U$. Sea $P \subset F$ la placa de U que contiene a p . Supongamos que $h(U) = U_1 \times U_2$ donde $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $U_2 \subset \mathbb{R}^{m-1}$ son discos abiertos y $P = h^{-1}(U_1 \times \{c\})$ para alguna $c \in U_2$. Demostremos por $i_c: U_1 \rightarrow U_1 \times U_2$ a la aplicación definida por $i_c(x) = (x, c)$. Como se tiene que $\bar{h}_p = h^{-1} \circ i_c$, entonces resulta que la expresión de la inclusión canónica $i: F \rightarrow M$ en las cartas (P, \bar{h}_p) de F y (U, h) de M está dada por $h \circ i \circ \bar{h}_p^{-1} = i_c$, la cual es una aplicación de rango n en el punto $\bar{h}_p(p) \in \mathbb{R}^n$. Y como el rango de i en p es independiente de las cartas escogidas, tenemos entonces que como p es un punto arbitrario de F que la aplicación i es una inmersión y es claramente una biyección.

3.6. observación. Tenemos que F será una subvariedad inmersa de M aunque no necesariamente sea una subvariedad de M , y esto último ocurre si y sólo si la topología intrínseca de F coincide con la topología inducida por M y esto es equivalente a que la inclusión canónica sea un empuje.

4. Las aplicaciones distinguidas.

4.1. Definición. Un sistema de aplicaciones distinguidas de clase C^r y de codimensión s en una variedad M es una familia maximal de sumersiones de clase C^r $f_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^s$, en donde $\{U_i: i \in I\}$ es una cubierta abierta de M y para cada $i, j \in I$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ existe un C^r -difeomorfismo K_{ij} de \mathbb{R}^s tal que $f_i = K_{ij} \circ f_j$ en $U_i \cap U_j$.

Supongamos que \mathcal{F} es una foliación de clase C^r y de codimensión s de una variedad M y que (U, h) es una carta de \mathcal{F} tal que $h(U) = U_1 \times U_2$ con $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $U_2 \subset \mathbb{R}^s$ discos abiertos, denotemos por $pr_2: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ a la segunda proyección. Ya que h es un C^r -difeomorfismo y pr_2 es una sumersión, entonces $f = pr_2 \circ h: U \rightarrow \mathbb{R}^s$ es una sumersión de clase C^r y además para cada $c \in U_2$ el conjunto $f^{-1}(c)$ es una placa de U . Si (U_i, h_i) y (U_j, h_j) son dos cartas de \mathcal{F} tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces vemos que (Def 1.1) existe un C^r -difeomorfismo $K_{ij}: pr_2(h_j(U_i \cap U_j)) \subset \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ tal que $pr_2 \circ h_i \circ h_j^{-1} = K_{ij} \circ pr_2$ y por consiguiente $K_{ij} \circ pr_2 \circ h_j = pr_2 \circ h_i \circ h_j^{-1} \circ h_j = pr_2 \circ h_i$; por lo tanto podemos concluir que $\{ (U, pr_2 \circ h) : (U, h) \in \mathcal{F} \}$ es un sistema de aplicaciones distinguidas de clase C^r y codimensión s .

Podemos resumir lo anterior en el siguiente enunciado.

4.2. Proposición. Sea \mathcal{F} una foliación de clase C^r y codimensión s de una variedad M . Entonces existe un único sistema de aplicaciones distinguidas $\{ (U_i, f_i) : i \in I \}$ de clase C^r y codimensión s en M tal que las componentes conexas de los conjuntos $f_i^{-1}(c)$ para $c \in f_i(U_i)$ son placas de \mathcal{F} .

El sistema de aplicaciones distinguidas al que se refiere la proposición anterior se llama el sistema de aplicaciones distinguidas de la foliación \mathcal{F} y a cada una de las sumersiones f_i se le llama una aplicación distinguida de \mathcal{F} .

De hecho todo sistema de aplicaciones distinguidas en una variedad es un sistema de aplicaciones distinguidas de alguna foliación en esa variedad.

4.3. Proposición. Sea $\{U_i, f_i\} : i \in I$ un sistema de aplicaciones distinguidas de clase C^r y codimensión s en una variedad M . Entonces existe una única foliación \mathcal{F} de clase C^r y codimensión s de M tal que $\{U_i, f_i\} : i \in I$ es el sistema de aplicaciones distinguidas de \mathcal{F} .

Como cada $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^s$ es una sumersión de clase C^r , entonces (por la forma local de las sumersiones) para cada punto $p \in U_i$ existen $W_{i,p} \subset U_i$ vecindad de p y discos abiertos $W_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $W_2 \subset \mathbb{R}^s$ con $W_2 \subset f_i(U_i)$ y además un difeomorfismo $h_{i,p} : W_{i,p} \rightarrow W_1 \times W_2$ tal que $f_i \circ h_{i,p}^{-1} : W_1 \times W_2 \rightarrow W_2$ es la segunda proyección, $pr_2 = f_i \circ h_{i,p}^{-1}$. La colección de todas estas cartas $\{W_{i,p}, h_{i,p}\} : i \in I, p \in U_i$ determina una foliación de clase C^r y codimensión s de M . En efecto, sean $(W_{i,p}, h_{i,p})$ y $(W_{j,q}, h_{j,q})$ dos de estas cartas y supongamos que $W_{i,p} \cap W_{j,q} \neq \emptyset$, por lo consiguiente $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ y existe un C^r -difeomorfismo R_{ij} de \mathbb{R}^s tal que $f_i = R_{ij} \circ f_j$. Sea dado $(x,y) \in h_{j,q}(W_{i,p} \cap W_{j,q}) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ y verifiquemos que $pr_2 \circ h_{i,p}^{-1} \circ h_{j,q}^{-1}(x,y)$ no depende de la componente x ; en efecto, ya que $pr_2 \circ h_{i,p}^{-1} \circ h_{j,q}^{-1}(x,y) = f_i \circ h_{i,p}^{-1} \circ h_{j,q}^{-1}(x,y) = f_i \circ h_{j,q}^{-1}(x,y) = R_{ij} \circ f_j \circ h_{j,q}^{-1}(x,y) = R_{ij} \circ pr_2(x,y) = R_{ij}(y)$.

4.4. observación. A partir de estas dos últimas proposiciones podemos identificar a una foliación \mathcal{F} con el sistema de aplicaciones distinguidas de \mathcal{F} . A partir de esta identificación podemos entonces considerar a una foliación como una estructura diferenciable generalizada sobre M (una estructura de variedad diferenciable es una foliación de dimensión cero). De hecho, una foliación es una estructura similar a un haz principal sobre M , en donde la fibra en lugar de ser un grupo topológico es un grupo poide topológico. (ver Lawson [1977], pg. 3).

Supongamos que \mathcal{F} es una foliación de clase C^r y de dimensión n de una variedad M , entonces todas las hojas de \mathcal{F} tienen una estructura de variedad diferenciable de clase C^r y dimensión n y son subvariedades inmersas de M (prop. 3.4 y prop. 3.6). Denotemos por $T_x \mathcal{F}$ al espacio tangente en x a la única hoja de \mathcal{F} que pasa por x y lo llamaremos el espacio tangente a la foliación \mathcal{F} en el punto x . Es claro (prop. 3.6) que $T_x \mathcal{F}$ es un subespacio de dimensión n del espacio tangente $T_x M$.

4.5. Definición. Sea N una variedad diferenciable. Una aplicación $q: N \rightarrow M$ es transversal a la foliación \mathcal{F} de M si para todo $p \in N$ tenemos que $Dq(p) \cdot T_p N + T_p \mathcal{F} = T_p M$, donde $q = q(p)$.

Utilizaremos algunas veces la notación $q \pitchfork \mathcal{F}$ para indicar que la aplicación q es transversal a la foliación \mathcal{F} .

Debido a que por cada punto de M pasa una hoja de \mathcal{F} , $q \pitchfork \mathcal{F}$ significa que q es transversal a todas las hojas de \mathcal{F} .

4.6. Proposición. Sea \mathcal{F} una foliación de clase C^r y de codimensión s de una variedad M . Entonces una aplicación $g: N \rightarrow M$ es transversal a la foliación \mathcal{F} si y solo si para toda aplicación distinguída $f: U \rightarrow \mathbb{R}^s$ de \mathcal{F} la composición $f \circ g: g^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^s$ es una submersión.

Supongamos que $g: N \rightarrow M$ es una aplicación transversal a \mathcal{F} y sea $f: U \rightarrow \mathbb{R}^s$ una aplicación distinguída de \mathcal{F} . Sea $p \in g^{-1}(U)$ y $q = g(p)$. Como g es transversal a \mathcal{F} entonces $T_p M = T_p \mathcal{F} + Dg(p) \cdot T_p N$ y como $Df(q): T_q M \rightarrow \mathbb{R}^s$ es suryectiva, entonces por la regla de la cadena tenemos que $\mathbb{R}^s = Df(q) \cdot T_q M = Df(q) \cdot T_q \mathcal{F} + D(f \circ g)(p) \cdot T_p N$. Pero como $T_q \mathcal{F}$ es el espacio tangente a la placa de \mathcal{F} que pasa por el punto q y esta placa es $f^{-1}(c)$ para alguna $c \in \mathbb{R}^s$, entonces $T_q \mathcal{F} = \ker Df(q)$ y por lo tanto $D(f \circ g)(p) \cdot T_p N = \mathbb{R}^s$ y así $f \circ g$ es una submersión.

Recíprocamente, sea $p \in N$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}^s$ una aplicación distinguída de \mathcal{F} tal que $q = g(p) \in U$. Como estamos suponiendo que $f \circ g$ es una submersión tenemos que $Df(q) \cdot Dg(p) \cdot T_p N = \mathbb{R}^s$, por lo que $Df(q) | Dg(p) \cdot T_p N: Dg(p) \cdot T_p N \rightarrow \mathbb{R}^s$ es suryectiva. Por lo tanto existe un subespacio $W \subset Dg(p) \cdot T_p N$ con $\dim(W) = s$ y tal que $Df(q) | W: W \rightarrow \mathbb{R}^s$ es un isomorfismo. Por consiguiente $W \cap \ker Df(q) = \{0\}$ y como $T_q \mathcal{F} = \ker Df(q)$ entonces $W \cap T_q \mathcal{F} = \{0\}$, además $T_q M = W \oplus T_q \mathcal{F}$ ya que $\dim(W) = \text{cod}(T_q \mathcal{F})$. Y como W es subespacio de $Dg(p) \cdot T_p N$ entonces tenemos que $T_q M = Dg(p) \cdot T_p N + T_q \mathcal{F}$ que es lo que queríamos demostrar.

4.7. Proposición. Sea \mathcal{F} una foliación de clase C^r y codimensión s de una variedad M y sea $g: N \rightarrow M$ una aplicación de clase C^r transversal a \mathcal{F} . Entonces existe una única foliación de clase C^r y de codimensión s en la variedad N inducida por g y que demostramos por $g^*\mathcal{F}$ en la que las hojas de esta foliación son las componentes conexas de los conjuntos $g^{-1}(F)$ para F hoja de \mathcal{F} .

En efecto. Hay un único sistema de aplicaciones distinguidas $f_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^s$, $i \in I$, de clase C^r para la foliación \mathcal{F} en el que las componentes conexas de $f_i^{-1}(c)$ para $c \in f_i(U_i)$ son placas de \mathcal{F} (prop. 4.2). Como g es una aplicación de clase C^r y $g^*\mathcal{F}$ entonces para toda $i \in I$ $f_i \circ g: g^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^s$ es una submersión de clase C^r (prop. 4.6). Si suponemos que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ entonces también $g^{-1}(U_i) \cap g^{-1}(U_j) \neq \emptyset$ y existe un C^r -difeomorfismo R_{ij} tal que $f_i = R_{ij} \circ f_j$ en $U_i \cap U_j$ y por consiguiente $f_i \circ g = R_{ij} \circ (f_j \circ g)$ en $g^{-1}(U_i) \cap g^{-1}(U_j)$. Por lo anterior, la colección de subersiones $f_i \circ g: g^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^s$, $i \in I$, es un sistema de aplicaciones distinguidas de clase C^r y de codimensión s en la variedad N y determina (prop. 4.3) a una única foliación de clase C^r y codimensión s en N .

Por otra parte, si P es una placa de $g^*\mathcal{F}$ entonces P es una componente conexa de alguno de los conjuntos $g^{-1}(f_i^{-1}(c))$ y como las placas de \mathcal{F} son componentes conexas de los conjuntos $f_i^{-1}(c)$ tenemos que para toda placa P de $g^*\mathcal{F}$ existe alguna placa Q de \mathcal{F} tal que P es una componente conexa de $g^{-1}(Q)$. Ahora sea H una hoja de $g^*\mathcal{F}$ y sean $p_1, p_2 \in H$. Existe un camino de placas P_1, \dots, P_k de $g^*\mathcal{F}$ tal que $p_1 \in P_1$ y $p_2 \in P_k$.

Como cada P_i está contenida en $g^{-1}(Q_i)$ para alguna placa Q_i de \mathfrak{F} , entonces $\bigcup_{i=1}^k P_i \subset \bigcup_{i=1}^k g^{-1}(Q_i) = g^{-1}(\bigcup_{i=1}^k Q_i)$ y como $Q_i \cap Q_{i+1} \neq \emptyset$ pues $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$, podemos entonces afirmar que Q_1, \dots, Q_k es un camino de placas en M que une a $q_1 = g(p_1)$ con $q_2 = g(p_2)$ y que si F es la hoja de \mathfrak{F} que contiene a las placas Q_1, \dots, Q_k entonces $g^{-1}(\bigcup_{i=1}^k Q_i) \subset g^{-1}(F)$, y por lo tanto $\bigcup_{i=1}^k P_i \subset g^{-1}(F)$. Como lo anterior se cumple para todo camino de placas P_1, \dots, P_k que pertenece a la hoja H entonces se cumple también que $H \subset g^{-1}(F)$.

4.8. Observación. En particular, cuando la aplicación $g: N \rightarrow M$ es una submersión entonces g es transversal a cualquier foliación \mathfrak{F} en M y por consiguiente $g^*\mathfrak{F}$ está bien definido para toda foliación \mathfrak{F} de M .

5. El teorema de Frobenius.

5.1. Definición. Sea $p: E \rightarrow M$ un fibrado vectorial de dimensión k y de clase C^r sobre la variedad M . Diremos que E es un fibrado de k -planos de clase C^r sobre M si es un subfibrado de TM . En otras palabras, si $E \subset TM$ y la inclusión canónica $i: E \rightarrow TM$ es un C^r -monomorfismo (es decir, envía a la fibra $p^{-1}(b)$, $b \in M$, en la fibra $T_b M$ de una manera lineal e inyectiva).

Cada fibra $E_b = p^{-1}(b)$, $b \in M$, de un fibrado de k -planos $p: E \rightarrow M$ es un subespacio de dimensión k del espacio tangente $T_b M$. En particular a los fibrados de 1-planos se les llama fibrados de líneas o de direcciones. Si $U \subset M$ es un conjunto abierto y \mathcal{X} es un campo vectorial definido en U , diremos que \mathcal{X} es tangente al fibrado de k -planos E en U si para cada $b \in U$ $\mathcal{X}(b)$ pertenece a la fibra E_b .

5.2. Proposición. Sea $p: E \rightarrow M$ un fibrado de k -planos de clase C^r sobre M . Para cada punto $b \in M$ existen una vecindad abierta $U \subset M$ alrededor de b y $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k$ campos vectoriales de clase C^r tangentes a E en U y tales que para cada $q \in U$ el conjunto $\{\mathcal{X}_1(q), \dots, \mathcal{X}_k(q)\}$ es una base de la fibra E_q .

En efecto, como $p: E \rightarrow M$ es un fibrado vectorial de dimensión k de clase C^r , para cada punto $b \in M$ existe una vecindad abierta $U \subset M$ alrededor de b y un C^r -difeomorfismo $q: p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ con la propiedad de que $p \circ q^{-1} = p_1$, o sea, que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{q} & U \times \mathbb{R}^k \\ p \downarrow & \swarrow p_1 & \\ U & & \end{array}$$

es conmutativo. Sea $\{m_1, \dots, m_k\} \subset \mathbb{R}^k$ un conjunto linealmente independiente. Para cada $j \in \{1, \dots, k\}$ sea $X_j: U \rightarrow E$ la sección de E definida por $X_j(q) = q^{-1}(q, m_j)$, $q \in U$. Entonces X_1, \dots, X_k son campos vectoriales de clase C^r tangentes a E en U con la condición de que $\{X_1(q), \dots, X_k(q)\}$ es una base de la fibra E_q para cada $q \in U$.

5.3. Observación. Debido a que no todo fibrado de \mathbb{R}^2 -planos sobre M es trivial sólo podemos asegurar la existencia de los campos vectoriales X_1, \dots, X_k localmente en U y no en toda la variedad M . Por ejemplo, en las figuras de abajo las rectas tangentes a las curvas que ahí se muestran determinan fibrados de líneas en el cilindro \mathbb{R}^2/\sim .

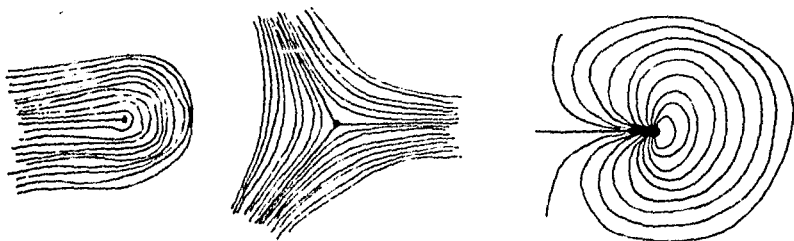


Figura 5.A.

estos fibrados de líneas no son triviales y por consiguiente no existe un campo vectorial continuo en todo \mathbb{R}^2/\sim que sea tangente a estos fibrados de líneas.

5.4. Ejemplo. Si M^2 es una superficie y ω es una 1-forma de clase C^r no singular en M , entonces existe un fibrado de líneas E de clase C^r sobre M

en donde la fibra de E sobre el punto $b \in M$ es $E_b = \text{Ker } \omega(b)$. En particular, si M es el cilindro \mathbb{R}^2 / \sim y r, θ son las coordenadas polares, entonces las 1-formas $\omega_n = \sin \frac{n\theta}{2} dr + \cos \frac{n\theta}{2} d\theta$, $n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, determinan fibrados de líneas triviales para n par y no triviales para n impar.

Supongamos que \mathcal{F} es una foliación de dimensión k y clase C^r ($r \geq 1$) en M , entonces $T_b \mathcal{F}$, el espacio tangente a la foliación en el punto b , es un subespacio de dimensión k de $T_b M$. La foliación \mathcal{F} define en la variedad M una estructura de variedad diferenciable de la misma dimensión pero de clase C^r . Considerando ahora en M esta última estructura diferenciable de clase C^r tenemos que el fibrado tangente de M $\pi: TM \rightarrow M$ es un fibrado vectorial de clase C^r (ya que si $h: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una carta trivializadora de \mathcal{F} , entonces la aplicación $\pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^m$ que manda al vector tangente $v \in T_b M$ a $(b, D_h(v) \cdot m)$ es una trivialización local de clase C^r de π por encima de U). Hagamos $T\mathcal{F} = \bigcup_{b \in M} T_b \mathcal{F}$ y consi-

deremos a $T\mathcal{F}$ con la topología inducida por TM , entonces $\pi|_{T\mathcal{F}}: T\mathcal{F} \rightarrow M$ determina un fibrado de k -planos de clase C^r sobre M . Al fibrado $T\mathcal{F}$ se le llama el fibrado tangente a la foliación \mathcal{F} y la fibra de $T\mathcal{F}$ por encima del punto $b \in M$ es el espacio tangente a la hoja de \mathcal{F} que pasa por dicho punto b . Podemos resumir lo anterior en el siguiente enunciado.

5.5. Proposición. Sea \mathcal{F} una foliación de dimensión k y clase C^r ($r \geq 1$) en M . El fibrado tangente a \mathcal{F} es un fibrado de k -planos de clase C^r sobre M .

5.6. Observación. Si $h: U \rightarrow U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ es una carta de \mathcal{F} , entonces la aplicación que envía al vector tangente $v \in T_b \mathcal{F}$ en el punto $(b, \pi^{-1}(D_h(v) \cdot m))$ es una trivialización de $T\mathcal{F}$ arriba de U y de clase C^r , la inversa de esta aplicación es la aplicación $U \times \mathbb{R}^k \ni (b, m) \mapsto D_h^{-1}(h(b)) \cdot (m, 0)$, en donde

$(M, 0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Así pues, la fibra de $T\pi$ por encima del punto $b \in M$ está dada por $D\pi^{-1}(h(b)) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = T_b \mathcal{F}$.

9.7. observación. Sea $g: N \rightarrow M$ un C^r -difeomorfismo local y sea \mathcal{F} una foliación de clase C^r y dimensión k en M . Entonces $g^* \mathcal{F}$ es una foliación de clase C^r y de dimensión k en N . Como $T\pi$ es un fibrado de k -planos de clase C^{r-1} sobre M entonces $g^* T\pi$, el fibrado inducido por g , es un fibrado de k -planos sobre N y de la misma clase de diferenciabilidad de $T\pi$. Ahora bien, como $g^* \mathcal{F}$ es una foliación de clase C^r y dimensión k en la variedad N su fibrado tangente $Tg^* \mathcal{F}$ es un fibrado de k -planos de clase C^{r-1} sobre N . Se tiene que $Dg: TN \rightarrow TM$ es un C^{r-1} -isomorfismo de fibrados ya que g es un C^r -difeomorfismo local, por lo consiguiente $Dg|_{Tg^* \mathcal{F}}: Tg^* \mathcal{F} \rightarrow T\pi$ también es un C^{r-1} -isomorfismo entre los fibrados de k -planos $Tg^* \mathcal{F}$ y $T\pi$. Entonces por la propiedad universal del fibrado inducido podemos afirmar que los fibrados $Tg^* \mathcal{F}$ y $g^* T\pi$ son C^{r-1} -isomorfos y podemos identificarlos $Tg^* \mathcal{F} = g^* T\pi$ desde un C^{r-1} -isomorfismo.

9.8. observación. Puesto que la esfera S^n no admite fibrados de k -planos continuos si n es par y $1 \leq k \leq n-1$ o bien si $n \equiv 1 \pmod{4}$ y $2 \leq k \leq n-2$ (Steenrod [1951], teor. 27.18, pág. 144); podemos entonces concluir que en S^n no existen fibrados de k -planos continuos para $k=2$ o $k=3$. y por lo tanto (prop. 9.5) no existen foliaciones de clase C^r ($r \geq 1$) de dimensión 2 ó 3 en la esfera S^n .

En el caso de que exista un fibrado de k -planos sobre una variedad M no necesariamente dicho fibrado es el fibrado tangente de alguna foliación en M .

Por ejemplo, sean $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 y sea E el fibrado de planos sobre \mathbb{R}^3 que tiene como fibra $E(a, b, c)$ arriba del punto (a, b, c) al plano descrito por la ecuación $z - c = f(a, b)(x - a) + g(a, b)(y - b)$. El plano $E(a, b, c)$ es paralelo al plano $E(a, b, 0)$ ya que f y g solo dependen de a y b . Entonces el fibrado E es el fibrado tangente de una foliación \mathcal{F} si y sólo si para cada hoja F de \mathcal{F} y cada punto (a, b, c) de F el plano tangente a F en (a, b, c) es el plano $E(a, b, c)$. Supongamos que existe una foliación \mathcal{F} con esta propiedad. Como para todo (a, b, c) el plano $E(a, b, c)$ no es perpendicular al plano $z = 0$, entonces por el Teorema de la función implícita, para el punto (a, b, c) existen una vecindad $U \subset \mathbb{R}^2$ alrededor de (a, b) y una función $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(a, b) = c$ y F , la hoja de \mathcal{F} que pasa por (a, b, c) , está dada localmente como la gráfica de h . Por consiguiente el plano tangente a la gráfica de h en el punto $(u, v, h(u, v))$ para $(u, v) \in U$ dado por la ecuación

$$z - h(u, v) = \frac{\partial h}{\partial x}(u, v)(x - u) + \frac{\partial h}{\partial y}(u, v)(y - v)$$

debe ser igual al plano $E(u, v, h(u, v))$; por lo tanto tenemos que

$$f(u, v) = \frac{\partial h}{\partial x}(u, v) \quad , \quad g(u, v) = \frac{\partial h}{\partial y}(u, v)$$

para toda $(u, v) \in U$. Con esto hemos visto que si el fibrado de planos E es tangente a alguna foliación, entonces existe una función $h: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que.

$$f = \frac{\partial h}{\partial x} \quad , \quad g = \frac{\partial h}{\partial y}$$

en U . Pero dadas las funciones f y g no siempre será posible encontrar a la función h que satisfaga la condición anterior, ya que una condición

necesaria y suficiente para la existencia de dicha función es que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Por lo tanto, si las funciones f y g no cumplen con esta condición no existe foliación en \mathbb{R}^2 para la cual E sea su fibrado tangente.

A toda foliación \mathcal{F} de M podemos asignarle un subfibrado $T\mathcal{F}$ de TM pero, en general, no todo subfibrado de TM será el fibrado tangente de alguna foliación. Es natural preguntarse por las condiciones que hacen que un subfibrado de TM sea el fibrado tangente de una foliación. La respuesta a esta cuestión está dada por el Teorema de Frobenius, el que, como ha señalado Milnor, ya era conocido por Clebsch y Darboux.

5.9. Definición. Sea E un fibrado de \mathbb{R} -planos de clase C^r ($r \geq 1$) sobre M . Entonces E es involutivo si para cualquier $u \in M$ existe una vecindad abierta $U \subset M$ alrededor de u tal que $[X, Y]$ es tangente a E en U para cualesquiera dos campos vectoriales X y Y de clase C^1 definidos en U y tangentes a E en U .

5.10. Definición. Un fibrado de \mathbb{R} -planos de clase C^r ($r \geq 1$) sobre M es completamente integrable si es el fibrado tangente de alguna única foliación de dimensión \mathbb{R} y clase C^r en M .

5.11. Lemma. Sea $\rho: E \rightarrow N$ un fibrado de \mathbb{R} -planos en una variedad N y sea $f: M \rightarrow N$ un difeomorfismo. Entonces el fibrado E es involutivo si y sólo si

el fibrado inducido f^*E es involutivo. (Como $Df: TM \rightarrow TN$ es un isomorfismo de fibrados, entonces por la propiedad universal del fibrado inducido tenemos que f^*E es isomorfo a un subfibrado R -dimensional de TM e identificamos a f^*E con dicho subfibrado.)

En efecto, denotemos por f_* al isomorfismo canónico entre f^*E y E . Tenemos así el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{f_*} & E \\ f_*^* \downarrow & & \downarrow p \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

en donde f_*^*p es la proyección de f^*E sobre M .

Sean X e Y dos secciones locales de f^*E . Entonces tenemos que $X_* = f_* \circ X \circ f^{-1}$ e $Y_* = f_* \circ Y \circ f^{-1}$ son dos secciones locales de E . Si E es involutivo, entonces $[X_*, Y_*]$ también es una sección local de E y por lo tanto $f_*^{-1} \circ [X_*, Y_*] \circ f = f_*^{-1} \circ [f_* \circ X \circ f^{-1}, f_* \circ Y \circ f^{-1}] \circ f = f_*^{-1} \circ f_* \circ [X, Y] \circ f^{-1} \circ f = [X, Y]$ es una sección local de f^*E . Por consiguiente f^*E es involutivo.

Sean ahora X e Y secciones locales de E y supongamos que f^*E es involutivo. Entonces $X^* = f_*^{-1} \circ X \circ f$ e $Y^* = f_*^{-1} \circ Y \circ f$ son secciones locales de f^*E y por consiguiente $[X^*, Y^*]$ también lo es. Por lo tanto $f_* \circ [X^*, Y^*] \circ f^{-1}$ es una sección local de E , y como $f_* \circ [X^*, Y^*] \circ f^{-1} = f_* \circ [f_*^{-1} \circ X \circ f, f_*^{-1} \circ Y \circ f] \circ f^{-1} = f_* \circ f_*^{-1} \circ [X, Y] \circ f \circ f^{-1} = [X, Y]$ podemos concluir que E es involutivo.

5.12. Teorema (de Frobenius). Sea E un fibrado de K -planos de clase C^1 ($r \geq 2$) sobre M^m . Entonces E es involutivo si y sólo si es completamente integrable.

Demostración. Supongamos que E es involutiva. Por la prop. 1.2 tenemos que existen campos vectoriales Y_1, \dots, Y_K de clase C^r y tangentes a E en una vecindad suficientemente pequeña $U \subset M$ y tal que para cada $q \in U$ el conjunto $\{Y_1(q), \dots, Y_K(q)\}$ es una base de la fibra E_q . Podemos suponer que U es el dominio de una carta local $x: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ (de clase C^r) de M . Para cada $j \in \{1, \dots, K\}$, en las coordenadas locales asociadas a la carta (U, x) el campo vectorial Y_j está dado por

$$Y_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

para algunas funciones $a_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^r . Como para todo $q \in U$ el conjunto $\{Y_1(q), \dots, Y_K(q)\}$ es linealmente independiente, la matriz $(a_{ij}(q))$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq K$, tiene rango K para todo $q \in U$. Por lo consiguiente existe una submatriz $K \times K$ que podemos suponer sin pérdida de generalidad como $A(q) = (a_{ij}(q))$, $1 \leq i, j \leq K$ y tal que $\det(A(q)) \neq 0$ para todo $q \in U$. Sea $B(q) = (b_{ij}(q)) = A^{-1}(q)$ para $q \in U$, entonces B está bien definida y las funciones $b_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^r . Para cada $j \in \{1, \dots, K\}$ sea

$$X_j = \sum_{i=1}^K b_{ij} Y_i.$$

Por consiguiente

$$X_j = \sum_{i=1}^K b_{ij} \sum_{l=1}^m a_{li} \frac{\partial}{\partial x_l} = \sum_{l=1}^m \left(\sum_{i=1}^K a_{li} b_{ij} \right) \frac{\partial}{\partial x_l}, \quad j \in \{1, \dots, K\},$$

y como para $1 \leq l \leq K$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^K a_{li} b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } l=j \\ 0 & \text{si } l \neq j \end{cases}$$

entonces

$$(*) \quad X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{l=K+1}^m c_{lj} \frac{\partial}{\partial x_l}, \quad j \in \{1, \dots, K\},$$

para algunas funciones $c_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^r . Es claro que $\{X_1(q), \dots, X_R(q)\}$ es también una base de la fibra E_q para toda $q \in U$.

Como para toda $r, s \in \{1, \dots, m\}$ se tiene que

$$\left[\frac{\partial}{\partial X_r}, \frac{\partial}{\partial X_s} \right] = 0,$$

entonces, dados $i, j \in \{1, \dots, R\}$, se tendrá que

$$\begin{aligned} [X_i, X_j] &= \left[\frac{\partial}{\partial X_i} + \sum_{k=R+1}^m c_{ki} \frac{\partial}{\partial X_k}, \frac{\partial}{\partial X_j} + \sum_{n=R+1}^m c_{nj} \frac{\partial}{\partial X_n} \right] \\ &= \left[\sum_{k=R+1}^m c_{ki} \frac{\partial}{\partial X_k}, \frac{\partial}{\partial X_j} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial X_i}, \sum_{n=R+1}^m c_{nj} \frac{\partial}{\partial X_n} \right] \\ &\quad + \left[\sum_{k=R+1}^m c_{ki} \frac{\partial}{\partial X_k}, \sum_{n=R+1}^m c_{nj} \frac{\partial}{\partial X_n} \right] \\ &= \sum_{r=R+1}^m d_r \frac{\partial}{\partial X_r} \end{aligned}$$

en donde

$$d_r = \frac{\partial c_{rj}}{\partial X_i} - \frac{\partial c_{ri}}{\partial X_j} + \sum_{s=R+1}^m (c_{si} \frac{\partial c_{rj}}{\partial X_s} - c_{sj} \frac{\partial c_{ri}}{\partial X_s})$$

Como el fibrado E es involutivo y los campos vectoriales X_1, \dots, X_R son tangentes a E en U y como además para cada $q \in U$ $\{X_1(q), \dots, X_R(q)\}$ es una base de E_q , entonces

$$[X_i, X_j] = \sum_{s=1}^R f_s X_s$$

para algunas funciones $f_s : U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^r . Por lo tanto

$$\sum_{r=R+1}^m d_r \frac{\partial}{\partial X_r} = \sum_{s=1}^R f_s X_s$$

$$= \sum_{s=1}^k f_s \frac{\partial}{\partial x_s} + \sum_{t=1}^m \left(\sum_{s=1}^k f_s c_{ts} \right) \frac{\partial}{\partial x_t}$$

y de esta última relación podemos concluir que $f_1 = \dots = f_k = 0$ y por consiguiente $[X_i, X_j] = 0$, para todos $i, j \in \{1, \dots, k\}$.

Sea $p \in U$ y para $\epsilon > 0$ sea $D_\epsilon \subset \mathbb{R}^{m-k}$ el disco abierto de radio ϵ y centro en el origen $0 \in \mathbb{R}^{m-k}$. Sea $h: D_\epsilon \rightarrow M$ un encaje tal que $h(0) = p$. Supongamos que ϵ es suficientemente pequeño para que $D = h(D_\epsilon) \subset U$. Supongamos además que para toda $q \in D_\epsilon$ se tenga que el espacio tangente del disco encajado en el punto $q = h(q)$ sea transversal a la fibra E_q , o sea, que se tenga

$$(*) \quad T_q M = E_q \oplus T_q D.$$

Para cada $j \in \{1, \dots, k\}$ denotemos por φ_j^i al flujo local del campo vectorial X_j . Como $[X_i, X_j] = 0$, entonces $\varphi_j^i \circ \varphi_i^j = \varphi_i^j \circ \varphi_j^i$ para todos $i, j \in \{1, \dots, k\}$. Existe una vecindad abierta $V \subset \mathbb{R}^k$ alrededor del $0 \in \mathbb{R}^k$ de manera que la aplicación $\psi: V \times D_\epsilon \rightarrow M$ dada por $\psi(t_1, \dots, t_k, y) = \varphi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t_k}^k (h(y))$ está bien definida. Dado $(u, v) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$, $u = (u_1, \dots, u_k)$, se tiene que

$$D_1 \psi(0, 0) \cdot u = \sum_{i=1}^k u_i X_i|_p \quad \text{y} \quad D_2 \psi(0, 0) \cdot v = Dh(0) \cdot v$$

y por consiguiente $D_1 \psi(0, 0): \mathbb{R}^k \rightarrow E_p$ y $D_2 \psi(0, 0): \mathbb{R}^{m-k} \rightarrow T_p D$ son isomorfismos. Por la condición de transversalidad $(*)$ podemos entonces concluir que $D\psi(0, 0): \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k} \rightarrow T_p M$ es un isomorfismo. Por el teorema de la función inversa hay una vecindad abierta $V' \times D' \subset V \times D_\epsilon$ con $(0, 0) \in V' \times D'$ y tal que $\psi|_{V' \times D'}: V' \times D' \rightarrow \psi(V' \times D') \subset M$ es un CR-difcomorfismo. Sea $W \subset M$ el conjunto abierto dado por $W = \psi(V' \times D')$ y sea $g = (\psi|_{V' \times D'})^{-1}$. Entonces (W, g) es una carta local de M de clase CR y las subvariedades $g^{-1}(V' \times \{y\})$, $y \in D'$, son las placas de una foliación \mathcal{F}_W de dimensión k y clase CR definida

en W y $E|W$ es el fibrado tangente a esta foliación \mathcal{F}_W . Además esta foliación \mathcal{F}_W es la única foliación en W que tiene como fibrado tangente a $E|W$.
 En efecto, ya que las hojas de \mathcal{F}_W son las subvariedades $q^{-1}(v \times \{y\})$ para $y \in D$, y si denotamos por $\bar{\mathcal{F}}$ a la foliación de $V \times D$ que tiene como hojas a los conjuntos $v \times \{y\}$ con $y \in D$, entonces (prop 4.7) se tiene que \mathcal{F}_W es precisamente la foliación inducida por q , es decir, $q^* \bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_W$, y es la única con esta propiedad. Como $T\mathcal{F}_W = E|W$, entonces (obs. 5.7) se sigue que $q^* T\bar{\mathcal{F}} = Tq^* \bar{\mathcal{F}} = E|W$, en donde $q^* T\bar{\mathcal{F}}$ es el fibrado inducido por q . Además es claro que la foliación $\bar{\mathcal{F}}$ es la única en $V \times D$ que tiene como fibrado tangente al fibrado de \mathbb{R} -planos trivial $\bar{E} = (V \times D) \times \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset (V \times D) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$. Por lo tanto $q^* \bar{E} = E|W$. Si \mathcal{F}_W fuera otra foliación de dimensión k y clase cr en W diferente de \mathcal{F}_W pero con la propiedad de que $E|W$ sea también el fibrado tangente de \mathcal{F}_W , entonces se tendría que $T\mathcal{F}_W = E|W = q^* \bar{E} = q^* T\bar{\mathcal{F}} = Tq^* \bar{\mathcal{F}}$ y por lo tanto $\mathcal{F}_W = q^* \bar{\mathcal{F}}$, lo que es imposible. Por lo anterior podemos entonces afirmar que \mathcal{F}_W es la única foliación de dimensión k y clase cr en W tal que $T\mathcal{F}_W = E|W$.

Ahora bien, el conjunto de todas las cartas (W, η) construidas anteriormente definiendo una foliación \mathcal{F} de dimensión k y clase cr en M tal que $T\mathcal{F} = E$. En efecto, si (W, η) y $(\tilde{W}, \tilde{\eta})$ son dos de estas cartas y $W \cap \tilde{W} \neq \emptyset$, entonces, como acabamos de ver, \mathcal{F}_W y $\mathcal{F}_{\tilde{W}}$ coinciden en $W \cap \tilde{W}$ y esto a su vez implica que el cambio de coordenadas $\tilde{\eta} \circ \eta^{-1}: \eta(W \cap \tilde{W}) \subset V \times D \rightarrow \tilde{\eta}(W \cap \tilde{W}) \subset \tilde{V} \times \tilde{D}$ sea de la forma $\tilde{\eta} \circ \eta^{-1}(x, y) = (G_1(x, y), G_2(y))$.

Supongamos ahora que E es completamente integrable y por consiguiente $E = T\mathcal{F}$ para alguna foliación \mathcal{F} . Sea $h: U \rightarrow U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ una carta trivializadora de \mathcal{F} . Como el cr -difeomorfismo h manda a las hojas de $\mathcal{F}|U$ en las placas $U_1 \times \{y\}$, $y \in U_2$, entonces $\mathcal{F}|U = h^* \bar{\mathcal{F}}$ en donde $\bar{\mathcal{F}}$ es la foliación de $U_1 \times U_2$ que tiene como hojas a los conjuntos $U_1 \times \{y\}$, $y \in U_2$. Sea \bar{E} el fibrado de \mathbb{R} -planos

η de clase C^{r-1} sobre $U_1 \times U_2$ definido por $\bar{E} = T\bar{\eta}$. Por lo tanto (Lem. 5.7) $EU = \mathbb{R}^k \bar{E}$. Verifiquemos ahora que el fibrado \bar{E} es involutivo. Sean X e Y dos campos vectoriales de clase C^1 tangentes a \bar{E} en $U_1 \times U_2$. (Como el fibrado \bar{E} es de clase C^{r-1} y $r \geq 2$ podemos asegurar la existencia de campos vectoriales de clase C^1 tangentes a \bar{E}) Como \bar{E} es precisamente el fibrado tangente a la foliación de $U_1 \times U_2$ que tiene como hojas a los conjuntos $U_1 \times \{y\}$, $\{y\} \times U_2$, entonces existen funciones $f, g: U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^k$ de clase C^1 y tales que $X(x, y) = (f(x, y), 0)$ e $Y(x, y) = (g(x, y), 0)$ para toda $(x, y) \in U_1 \times U_2$. Como X e Y son campos vectoriales definidos en el conjunto abierto $U_1 \times U_2$ de \mathbb{R}^m se tiene que $[X, Y](x, y) = (D_x g(x, y) \cdot f(x, y) - D_x f(x, y) \cdot g(x, y), 0)$ para toda $(x, y) \in U_1 \times U_2$. Y por lo tanto $[X, Y]$ es tangente a \bar{E} pues tiene la segunda componente nula. Por el Lem. 5.11 podemos entonces concluir que EU es involutivo.

5.13 Observación. En la demostración de este teorema se ha utilizado de una manera esencial el hecho de que el fibrado de \mathbb{R}^k -planos sea de clase C^r para $r \geq 2$. Sin embargo el teorema se sigue cumpliendo para fibrados de \mathbb{R}^k -planos de clase C^1 y una demostración puede encontrarse en Camacho-Neco [1979], Apéndice 2, págs. 207-221.

5.14. Observación. A partir de las propiedades del corchete de Lie se sigue que todo fibrado de líneas es involutivo y por consiguiente es completamente integrable. En este caso particular ($k=1$) el teorema de Frobenius se reduce al teorema de existencia y unicidad de las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria. Por este motivo el teorema de Frobenius puede ser considerado como una generalización del teorema de existencia y unicidad a ciertos tipos de ecuaciones diferenciales parciales.

Sean $\omega^1, \dots, \omega^k$ 1-formas de clase C^r definidas en M y supongamos que para cada $p \in M$ se tiene que $\{\omega^1(p), \dots, \omega^k(p)\}$ es un conjunto linealmente independiente en T_p^*M . Sea $f: TM \rightarrow \mathbb{R}^k$ la aplicación definida como sigue: para $\alpha \in T_pM$ sea $f(\alpha) = (\omega^1(p)(\alpha), \dots, \omega^k(p)(\alpha))$. Para cada $p \in M$ sea $f_p = f|_{T_pM}$. Si consideramos a \mathbb{R}^k como el fibrado vectorial k -dimensional trivial que tiene como base a un punto, entonces resulta que $f: TM \rightarrow \mathbb{R}^k$ es un C^r -epimorfismo entre los fibrados TM y \mathbb{R}^k . Como $\text{ranjo}(f_p) = \mathbb{R}^k$ para toda $p \in M$, entonces $\text{Ker} f = \bigcup_{p \in M} \text{Ker} f_p$ es un subfibrado de TM de codimensión k . A este subfibrado $\text{Ker} f$ lo llamaremos el kernel de las 1-formas $\omega^1, \dots, \omega^k$ y lo denotaremos por $\text{Ker}(\omega^1, \dots, \omega^k)$.

Si E es un fibrado de $(m-k)$ -planos de clase C^r sobre M^m , entonces para cada $b \in M$ existen una vecindad abierta $U \subset M$ alrededor de b y $\omega^1, \dots, \omega^k$ 1-formas linealmente independientes y de clase C^r definidas en U y tales que $E|_U = \text{Ker}(\omega^1, \dots, \omega^k)$. En efecto, para cada $b \in M$ existen una vecindad abierta U alrededor de b y X_{k+1}, \dots, X_m campos vectoriales de clase C^r tangentes a E en U y con la propiedad de que $\{X_{k+1}(q), \dots, X_m(q)\}$ es una base de E_q para toda $q \in U$. También existen campos vectoriales X_1, \dots, X_k definidos en U y de clase C^r con la propiedad de que $\{X_1(q), \dots, X_m(q)\}$ es una base de T_qM para toda $q \in U$. Basta ahora con considerar a las 1-formas $\omega^1, \dots, \omega^k$ que para cada $q \in U$ sea $\{\omega^1(q), \dots, \omega^k(q)\}$ la base dual de $\{X_1(q), \dots, X_m(q)\}$. Como para toda $q \in U$ $\{X_{k+1}(q), \dots, X_m(q)\}$ es base de E_q y para toda $j=1, \dots, k$, $X_j \notin E$ y de $\text{Ker}(\omega^1, \dots, \omega^k)$ por arriba de $q \in U$ son las mismas y por lo tanto $E|_U = \text{Ker}(\omega^1, \dots, \omega^k)$.

Esto último sugiere que el teorema de Frobenius puede formularse en términos

de formas diferenciales.

5.19. Proposición. Sean $\omega^1, \dots, \omega^k$ 1-formas de clase C^r y linealmente independientes. Entonces $\text{Ker}(\omega^1, \dots, \omega^k)$ es completamente integrable si y sólo si para cada $j \in \{1, \dots, k\}$ se tiene que $d\omega^j \wedge \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k = 0$.

Supongamos que se cumple esta última condición. Por consiguiente

$$d\omega^j = \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} \wedge \omega^i$$

para algunas 1-formas α_{ij} de clase C^r . Sean X e Y dos campos vectoriales tangentes de clase C^1 tangentes a $\text{Ker}(\omega^1, \dots, \omega^k)$ en algún abierto $U \subset M$. Para cada $j \in \{1, \dots, k\}$ sean $f_j, g_j: U \rightarrow \mathbb{R}$ las 0-formas definidas por $f_j(q) = \omega^j(q)(X(q))$ y $g_j(q) = \omega^j(q)(Y(q))$, $q \in U$. Como X e Y son tangentes a $\text{Ker}(\omega^1, \dots, \omega^k)$ en U entonces f_j y g_j son idénticamente nulas en U . Por lo tanto

$$\begin{aligned} d\omega^j(q)(X(q), Y(q)) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (\alpha_{ij}(X(q))g_i(q) - \alpha_{ij}(Y(q))f_i(q)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para toda $q \in U$. Y como además

$$\begin{aligned} d\omega^j(q)(X(q), Y(q)) &= Df_j(q) \cdot Y(q) - Dg_j(q) \cdot X(q) + \omega^j(q)([X, Y](q)) \\ &= \omega^j(q)([X, Y](q)), \end{aligned}$$

se tiene entonces que $\omega^j(q)([X, Y](q)) = 0$ para toda $q \in U$ y $j \in \{1, \dots, k\}$, lo que implica que $[X, Y]$ sea tangente a $\text{Ker}(\omega^1, \dots, \omega^k)$ en U .

Supongamos ahora que $\text{Ker}(\omega^1, \dots, \omega^k) = \mathcal{T}\mathcal{F}$ para alguna foliación \mathcal{F} de dimensión $m-k$ y de clase C^r . Sea (W, h) una carta trivializadora de \mathcal{F} .

Como la imagen de las placas de π en conjuntos de la forma $\mathbb{R}^{m-k} \times \{y\}$, entonces (en las coordenadas locales asociadas a la carta (W, α)) los campos vectoriales

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{m-k}}$$

son tangentes a $\text{Ker}(\omega^1, \dots, \omega^k)$ en W .

Si dx_1, \dots, dx_m son las 1-formas duales a los campos vectoriales

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$$

se tiene entonces que para todo $i \in \{1, \dots, k\}$

$$\omega^i = \sum_{j=1}^k f^j_i dx_{m-k+i}$$

para algunas funciones $f^j_i: W \rightarrow \mathbb{R}$. Por lo tanto

$$d\omega^i = \sum_{j=1}^k df^j_i \wedge dx_{m-k+i}.$$

Como para cada $q \in W$ $\{w^1(q), \dots, w^k(q)\}$ y $\{dx_{m-k+1}(q), \dots, dx_m(q)\}$ son bases del mismo subespacio de T_q^*M , se sigue que para cada $i \in \{1, \dots, k\}$

$$dx_{m-k+i} = \sum_{\lambda=1}^k g^{\lambda}_i w^{\lambda}$$

para algunas funciones $g^{\lambda}_i: W \rightarrow \mathbb{R}$. Sustituyendo obtenemos que

$$d\omega^i = \sum_{\lambda=1}^k \left(\sum_{j=1}^k g^j_{\lambda} df^j_i \right) \wedge w^{\lambda}$$

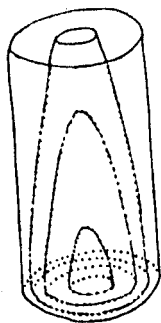
y por lo tanto

$$d\omega^1 \wedge \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k = 0.$$

La versión dual del teorema de Frobenius puede entonces formularse así:

5.16. Teorema (de Frobenius, versión dual). Sea E un fibrado de k -planos de clase C^r en una variedad M^m . Entonces E es completamente integrable si y sólo si para cada $b \in M$ existen una vecindad abierta $U \subset M$ alrededor de b y k -formas $\omega^1, \dots, \omega^{m-k}$ definidas en U de clase C^r y linealmente independientes con la propiedad de que $E|U = \text{Ker}(\omega^1, \dots, \omega^{m-k})$ y $d\omega^1 \wedge \dots \wedge d\omega^{m-k} = 0$ para toda $j \in \{1, \dots, m-k\}$.

5.17. Ejemplo. Sea $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ la bola unitaria cerrada de \mathbb{R}^2 y denotemos por M al toro sólido $D^2 \times S^1$. Designemos a los puntos de M por medio de las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) . Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente de clase C^∞ y tal que $0 < g(r) < 1$ para $r \in (0,1)$, $g(r) = 0$ para $r \leq 0$ y $g(r) = 1$ para $r \geq 1$. Se tiene entonces que $\omega = g(r)dr + (1-g(r))dz$ es una 1-forma de clase C^∞ definida en el toro sólido y que satisface la condición $d\omega|_E = 0$. Por consiguiente define una foliación de codimensión 1 y de clase C^∞ en el toro sólido $D^2 \times S^1$.



→
identificando
 $(r, \theta, 0)$ con $(r, \theta, 1)$
en $D^2 \times [0,1]$.

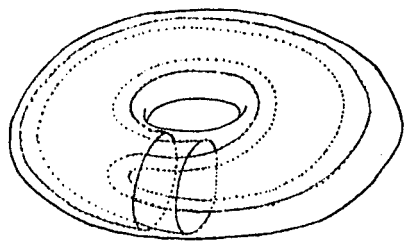


Figura 5.8.

Esta foliación tiene la propiedad de que $2M = S^1 \times S^1$ es una hoja y todas las hojas en el interior son difeomorfas a \mathbb{R}^2 y se van acumulando tangencialmente sobre esta hoja compacta. A esta foliación se le llama la foliación de Reeb del toro sólido. Si tomamos dos copias de toros sólidos con sus respectivas foliaciones de Reeb y pegamos a estos toros a lo largo de sus fronteras por un difeomorfismo que lleve a los meridianos de uno en los paralelos del otro, obtenemos entonces una foliación de codimensión 1 y de clase C^∞ en la esfera S^3 . Esta foliación tiene una hoja compacta difeomorfa a un toro $S^1 \times S^1$ y todas las demás hojas son difeomorfas al plano \mathbb{R}^2 y se acumulan tangencialmente sobre la hoja compacta. A esta última foliación se le llama la foliación de Reeb de S^3 . (Para una demostración de que S^3 puede obtenerse pegando dos toros sólidos véase Gredbillon [1971], cap. II, pp. 1.7, págs. 33-34.)

4. Foliaciones orientables y foliaciones transversalmente orientables.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión $n > 0$. Dos bases ordenadas (m_1, \dots, m_n) y (n_1, \dots, n_n) de V son equivalentes si el automorfismo $A: V \rightarrow V$ definido por $A(m_i) = n_i, i=1, \dots, n$, tiene determinante positivo. La relación de ser equivalentes es claramente una relación de equivalencia que divide al conjunto de bases ordenadas en sólo dos clases de equivalencia. Cada una de estas clases de equivalencia es llamada una orientación de V . La clase a la que pertenece la base ordenada (m_1, \dots, m_n) será denotada por $[m_1, \dots, m_n]$; por lo tanto si θ es una orientación de V , entonces $(m_1, \dots, m_n) \in \theta$ si y sólo si $[m_1, \dots, m_n] = \theta$. Si θ denota una orientación de V , la otra orientación será denotada por $-\theta$. Si $\dim V = 0$ una orientación de V es simplemente uno de los números ± 1 .

Un espacio vectorial orientado es una pareja (V, θ) en donde θ es una orientación del espacio vectorial V .

Sea $f: V \rightarrow W$ un isomorfismo de espacios vectoriales y sea $\theta = [m_1, \dots, m_n]$ una orientación de V , entonces $f(\theta) = [f(m_1), \dots, f(m_n)]$ es una orientación de W . Sean (V, θ) y (V, θ') dos espacios vectoriales orientados. Un isomorfismo $f: V \rightarrow V'$ se dice que conserva la orientación si $f(\theta) = \theta'$ y si $f(\theta) = -\theta'$ entonces se dice que invierte la orientación. Es claro lo siguiente. Si f conserva la orientación, entonces f^{-1} conserva la orientación. Si $f: V \rightarrow V'$ y $g: V' \rightarrow V''$ conservan la orientación entonces $g \circ f$ también conserva la orientación.

Para $n > 0$ la orientación estándar de \mathbb{R}^n se define como $\theta^n = [e_1, \dots, e_n]$ en donde $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ es la base estándar de \mathbb{R}^n . La orientación estándar de \mathbb{R}^0 es $\theta^0 = +1$.

0.1. Definición. Sea $p: E \rightarrow M$ un fibrado de \mathbb{R} -planos sobre M . Una familia $\theta = \{ \theta_b : b \in M \}$ de orientaciones θ_b de las fibras E_b es una orientación del fibrado E si para cada punto $b \in M$ existe $g: p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ trivialización de p por arriba de alguna vecindad abierta $U \subset M$ alrededor de b tal que para cada $q \in U$ la aplicación $g_q = p_2 \circ g|_{E_q}: E_q \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ satisface $g_q(\theta_q) = \theta^{\mathbb{R}^k}$. En otras palabras, que las aplicaciones g_q conservan la orientación cuando se consideran los espacios vectoriales orientados (E_q, θ_q) y $(\mathbb{R}^k, \theta^{\mathbb{R}^k})$.

Un fibrado de \mathbb{R} -planos es orientable si existe alguna orientación de él y no orientable en caso contrario. Un fibrado de \mathbb{R} -planos orientado es una pareja (E, θ) en donde E es un fibrado de \mathbb{R} -planos y θ es una orientación de E . Estas definiciones pueden aplicarse en particular al fibrado tangente TM de una variedad M . En este caso decimos que la variedad M es orientable (no orientable) si TM es orientable (no orientable). Una orientación de TM es una orientación de M y una variedad orientada es una pareja (M, θ) en donde θ es una orientación de TM .

Si E es un fibrado de \mathbb{R} -planos orientable y $\theta = \{ \theta_b : b \in M \}$ es una orientación, entonces $-\theta = \{ -\theta_b : b \in M \}$ también es una orientación de E . Si la base M del fibrado de \mathbb{R} -planos orientable E es conexa, entonces hay únicamente dos orientaciones de E . En lo que sigue supondremos que M es una variedad conexa.

0.2. Definición. Una foliación \mathcal{F} es orientable si su fibrado tangente $T\mathcal{F}$ es orientable.

El que una foliación sea orientable intuitivamente significa que todas las hojas de la foliación pueden orientarse simultáneamente de una manera coherente.

6.3. Proposición: Todo fibrado de k -planos trivial es orientable.

En efecto, sea E un fibrado de k -planos sobre M y supongamos que es trivial. Por consiguiente existe un isomorfismo de fibrados $g: E \rightarrow M \times \mathbb{R}^k$. Para cada $v \in M$ se tiene que $g_v = \text{pr}_2 \circ g|_{E_v}: E_v \rightarrow k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ es un isomorfismo entre la fibra E_v y \mathbb{R}^k . Definimos una orientación de E_v $\theta_v = g_v^{-1}(\theta^*)$. Se verifica inmediatamente que $\theta = h \circ \theta_v: v \in M$ es una orientación de E .

6.4. Observación: Si el fibrado tangente TM es trivial se dice que la variedad M es paralelizable. Como todas las esferas S^n son orientables pero únicamente S^1 , S^3 y S^7 son paralelizables, vemos entonces que la condición de orientabilidad en la prop. 6.3 es tan solo necesaria. Resulta que para el caso de fibrados de líneas también es suficiente.

6.5. Proposición: Todo fibrado de líneas es orientable si y sólo si es trivial.

Sea $p: E \rightarrow M$ un fibrado de líneas orientable y sea $\theta = h \circ \theta_v: v \in M$ una orientación de E . Existe una cubierta abierta $h_i: i \in I$ de M y una familia $g_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}$ de trivializaciones de E por arriba de los abiertos U_i de suerte que para cada $q \in U_i$ se tiene que el isomorfismo $g_i|_q: E_q \rightarrow \mathbb{R}$ conserva la orientación. Sea $\{ \varphi_i \}$ una partición de la unidad subordinada a la cubierta h_i . Entonces $f: E \rightarrow M \times \mathbb{R}$ definida así: para $q \in E_q$ sea $f(q) = \sum_{i \in I} \varphi_i(q) g_i(q)$, es un isomorfismo de fibrados.

En la figura 6.A se encuentran ejemplos de fibrados de líneas no orientables.

A veces hay que tener consideraciones de orientación en fibrados no orientables (por ejemplo, en la misma demostración de no orientabilidad, o si una cierta propiedad demostrada para fibrados orientables también puede ser utilizada para los no orientables), y por ello el concepto de cubierta de orientaciones de un fibrado es de una gran utilidad.

Sea $p: E \rightarrow M$ un fibrado de K -planos sobre M . Por consiguiente existe una cubierta abierta $\{U_i\}_{i \in I}$ de M y una familia $\{q_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^k\}$ de trivializaciones de E por arriba de los abiertos U_i . Para toda $i, j \in I$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ se tiene que $q_i \circ q_j^{-1}: (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k$ es un automorfismo del fibrado trivial $(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k$. Si para cada $b \in U_i \cap U_j$ denotamos por $g_{ij}(b): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ al automorfismo de \mathbb{R}^k dado por $p_i \circ (q_i \circ q_j^{-1})|_{b \times \mathbb{R}^k} \circ i_b: \mathbb{R}^k \rightarrow b \times \mathbb{R}^k \rightarrow b \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, en donde $i_b: \mathbb{R}^k \rightarrow b \times \mathbb{R}^k$ es la inmersión definida por $i_b(m) = (b, m)$, entonces tenemos que (las funciones de paso

$$g_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$$

$$b \mapsto g_{ij}(b)$$

son aplicaciones continuas y como $q_i \circ q_j^{-1}(b, m) = (b, g_{ij}(b)(m))$ entonces se satisface la siguiente relación

$$g_{ij}(b) \circ g_{jk}(b) = g_{ik}(b)$$

para toda $b \in U_i \cap U_j \cap U_k$. En particular

$$g_{ii}(b) = \text{identidad de } GL(k, \mathbb{R})$$

$$g_{ji}(b) = (g_{ij}(b))^{-1}$$

$$b \in U_i,$$

$$b \in U_i \cap U_j.$$

La familia $\{g_{ij}\}$ de funciones de paso del fibrado E es un cociclo sobre M que tiene como grupo de estructura a $GL(k, \mathbb{R})$ (o que toma valores en el

grupo $GL(k, \mathbb{R})$). Así tenemos visto que todo fibrado de k planos sobre M determina un cociclo sobre M con $GL(k, \mathbb{R})$ como grupo de estructura, y es claro que este cociclo depende de las trivializaciones locales escogidas.

Dado un cociclo h_{ij} sobre M con valores en $GL(k, \mathbb{R})$ se puede construir un fibrado de k -planos sobre M que tiene a h_{ij} como su cociclo (Sifert y Smi, Teor. 3.2, pág. 14).

Si el fibrado E es orientable, entonces cada uno de los isomorfismos $g_{ij}(b): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ conserva la orientación y por lo tanto $\det(g_{ij}(b)) > 0$. Con esto vemos que si un fibrado de k -planos es orientable, entonces su grupo de estructura puede reducirse a $GL^+(k, \mathbb{R}) = \{A \in GL(k, \mathbb{R}) : \det(A) > 0\}$. Por otra parte, si existe una cubierta abierta $\{U_i\}$ de M y una familia $g_i: \mathcal{P}^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^k$ de trivializaciones de E por arriba de los U_i de manera que el cociclo g_{ij} de estas trivializaciones locales tiene como grupo de estructura a $GL^+(k, \mathbb{R})$, entonces el fibrado E es orientable. En efecto, como todo punto de M está contenido en algún abierto U_i tenemos que $g_i(b): E_b \rightarrow \mathbb{R}^k$ es un isomorfismo, entonces podemos definir una orientación θ_b de la fibra E_b como $\theta_b = g_i^{-1}(\theta)$. Resulta que la orientación θ_b así definida no depende de la trivialización local escogida. Porque si $h_{ij}: U_i \cap U_j$ y suponemos que la orientación definida por $g_{ij}(b): E_b \rightarrow \mathbb{R}^k$ es distinta, entonces se tendría que $g_{ij} \circ g_{ij}^{-1}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ es un isomorfismo que invierte la orientación y por lo tanto $\det(g_{ij}(b)) = \det(g_{ij} \circ g_{ij}^{-1}) < 0$, lo cual es imposible. Por consiguiente $\theta = h_{ij} \theta_b: \mathcal{P}^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^k$ es una orientación de E .

Sea h_{ij} un cociclo sobre M con valores en $GL(k, \mathbb{R})$ determinado por un fibrado de k -planos $\mathcal{P}: E \rightarrow M$. Resulta entonces que las aplicaciones

$$h_{ij}(b) = \frac{\det(g_{ij}(b))}{|\det(g_{ij}(b))|}$$

determinados unicociclo sobre M y con valores en el grupo $\mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}$. Este cociclo determina (Godbillon [1971], cap. VII, Prop. 5.1, págs. 115) un cubriente de dos hojas que denotamos por $\pi: \tilde{M}(E) \rightarrow M$. A este cubriente se le llama el cubriente de orientaciones del fibrado de k -planos E . Además, sobre el espacio total $\tilde{M}(E)$ existe una única estructura de variedad diferenciable que hace que π sea un difeomorfismo local (Godbillon [1971], cap. X, Prop. 3.11, págs. 149). Como conjunto, el espacio total $\tilde{M}(E)$ es el conjunto de todas las orientaciones de todas las fibras y por consiguiente $\pi^{-1}(v)$ consta de las dos orientaciones de E_v .

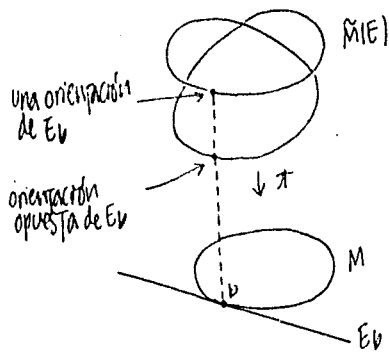


Figura 6.A.

La proyección del cubriente $\pi: \tilde{M}(E) \rightarrow M$ induce un fibrado de k -planos π^*E sobre la variedad $\tilde{M}(E)$ y de la misma clase de diferenciabilidad del fibrado E . Si denotamos por π_* al isomorfismo canónico entre los fibrados π^*E y E ,

entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi^*E & \xrightarrow{\pi^*} & E \\ \pi^*p \downarrow & & \downarrow p \\ \tilde{M}(E) & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

en donde π^*p denota a la proyección de π^*E sobre $\tilde{M}(E)$.

6.6. Teorema El fibrado π^*E es orientable.

En efecto. Sea $\{U_i: i \in I\}$ una cubierta abierta de M y supongamos que cada U_i es conexo. Sean $h_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \{+1, -1\}$ trivializaciones del cubriente π por arriba de U_i . Para cada $i \in I$ y $\alpha \in \{+1, -1\}$ sea $V_{i,\alpha}$ el conjunto abierto de $\pi^{-1}(U_i)$ dado por $V_{i,\alpha} = h_i^{-1}(U_i \times \{\alpha\})$. Se tiene por consiguiente que $\pi^{-1}(U_i)$ es la unión de $V_{i,+1}$ y $V_{i,-1}$, y además $\pi|_{V_{i,\alpha}}$ es un difeomorfismo. También se tiene que $\{V_{i,\alpha}: i \in I, \alpha \in \{+1, -1\}\}$ es una cubierta abierta de $\tilde{M}(E)$. Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ entonces $h_i \circ h_j^{-1}: (U_i \cap U_j) \times \{+1, -1\} \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \{+1, -1\}$ manda al punto $(b, \alpha) \in (U_i \cap U_j) \times \{+1, -1\}$ en el punto $(b, \beta) = (b, h_{ij}(b)\alpha)$, en donde $h_{ij}(b)$ son las funciones de paso que determinan al cubriente π ; por lo que $\beta = h_{ij}(b)\alpha$ para $\alpha, \beta \in \{+1, -1\}$ y de esto se sigue que si $\alpha = \beta$ entonces $h_{ij}(b) = +1$ y si $\alpha \neq \beta$ entonces $h_{ij}(b) = -1$.

Supongamos ahora que los abiertos U_i son bastante pequeños y sean $g_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^k$ trivializaciones de E por encima de U_i . Si $g_{ij}(b)$ son las funciones de paso asociadas a estas trivializaciones, entonces se tiene que

$$h_{ij}(b) = \frac{\det(g_{ij}(b))}{|\det(g_{ij}(b))|}$$

Denotemos por $\pi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ a la simetría de \mathbb{R}^k definida por

$$\pi(x_1, x_2, \dots, x_k) = (-x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Para cada $i \in I$ y $\alpha \in \{+1, -1\}$ sean $g_{i,\alpha}: (\pi^* \pi)^{-1}(V_{i,\alpha}) \rightarrow V_{i,\alpha} \times \mathbb{R}^k$ las aplicaciones definidas por

$$g_{i,\alpha} = \begin{cases} (\pi^* \pi, \pi_2 \circ g_i \circ \pi_*) & \text{para } \alpha = +1, \\ (\pi^* \pi, \mathbb{A} \circ \pi_2 \circ g_i \circ \pi_*) & \text{para } \alpha = -1. \end{cases}$$

(aquí $\pi_2: V_i \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ denota a la segunda proyección definida en el conjunto $V_i \times \mathbb{R}^k$). Cada una de estas aplicaciones $g_{i,\alpha}$ es un difeomorfismo cuya aplicación inversa está dada por

$$g_{i,\alpha}^{-1} = \begin{cases} \pi_*^{-1} \circ g_i^{-1} \circ (\pi \circ \pi_1, \text{Id}_{\mathbb{R}^k} \circ \pi_2) & \text{para } \alpha = +1, \\ \pi_*^{-1} \circ g_i^{-1} \circ (\pi \circ \pi_1, \mathbb{A} \circ \pi_2) & \text{para } \alpha = -1. \end{cases}$$

(aquí π_1 y π_2 denotan a las proyecciones $\pi_1: V_{i,\alpha} \times \mathbb{R}^k \rightarrow V_{i,\alpha}$ y $\pi_2: V_{i,\alpha} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ definidas en el conjunto $V_{i,\alpha} \times \mathbb{R}^k$). Como $\pi_1 \circ g_{i,\alpha} = \pi^* \pi|_{(\pi^* \pi)^{-1}(V_{i,\alpha})}$ se tiene entonces que las aplicaciones $g_{i,\alpha}$, $(i,\alpha) \in I \times \{+1, -1\}$, constituyen una familia de trivializaciones locales del fibrado inducido $\pi^* E$ por arriba de los abiertos $V_{i,\alpha}$.

Se encuentra fácilmente que las funciones de paso $g_{i,\alpha} \circ g_{j,\beta}^{-1}(q) = \pi_2 \circ (g_{i,\alpha} \circ g_{j,\beta}^{-1})|_{(q) \times \mathbb{R}^k}$ asociadas a esta familia de trivializaciones locales de $\pi^* E$ está dada por

$$g_{ij,\alpha\beta}(q) = \begin{cases} g_{ij}(\pi(q)) & \text{PARA } \alpha = \beta = +1, \\ g_{ij}(\pi(q)) \circ A & \text{PARA } \alpha = -\beta = +1, \\ A \circ g_{ij}(\pi(q)) & \text{PARA } \alpha = -\beta = -1, \\ A \circ g_{ij}(\pi(q)) \circ A & \text{PARA } \alpha = \beta = -1. \end{cases}$$

Como $\det(g_{ij}(\pi(q))) = |\det(g_{ij}(\pi(q)))| |h_{ij}(\pi(q))|$ y $\det(A) = -1$, se sigue que $\det(g_{ij,\alpha\beta}(q))$ siempre es positivo y por lo tanto el grupo de estructura de π^*E puede reducirse a $GL^+(K, R)$.

Q.7. Observación Sea $U_i: i \in I$ una cubierta abierta de M y sean

$h_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \{+1, -1\}$ trivializaciones del cubriente π por arriba de U_i . Supongamos que el cociclo h_{ij} determinado por esta familia de trivializaciones toma únicamente el valor $+1$, es decir, que $h_{ij}(v) = +1$ para toda $v \in U_i \cap U_j$ y toda $i, j \in I$. Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ entonces tenemos que $h_i = h_j$ en $\pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ ya que $h_i \circ h_j^{-1}(v, \alpha) = (v, h_j(v)\alpha) = (v, \alpha)$ para toda $(v, \alpha) \in (U_i \cap U_j) \times \{+1, -1\}$. Como $U_i: i \in I$ es una cubierta abierta de M podemos por lo tanto extender estas trivializaciones de π a toda la variedad M y por lo tanto el cubriente π es trivial.

Si suponemos ahora que el cubriente π es trivial, entonces existe

$h: \pi^{-1}(E) \rightarrow M \times \{+1, -1\}$ trivialización de π por arriba de toda la variedad M . Y como para cada $v \in M$ se tiene que $(h \circ h^{-1})|_{\{v\} \times \{+1, -1\}} = \text{Id}_{\mathbb{Z}_2}$, entonces es claro que el cociclo del cubriente π asociado con esta trivialización toma únicamente el valor $+1$.

6.8. Proposición. $\tilde{M}(E)$ es la suma topológica de las copias de M si y sólo si el fibrado de K -planos E es orientable.

En efecto. Supongamos que E es orientable y sea h_{ij} un cociclo sobre M determinado por el fibrado E y con $GL^+(K, K)$ como grupo de estructura. Por lo tanto tenemos que

$$h_{ij}(b) = \frac{\det(q_{ij}(b))}{|\det(q_{ij}(b))|} = +1$$

y por la obs. 6.7 se sigue que el cubriente $\tilde{M}(E)$ es isomorfo a $M \times \mathbb{Z} / \mathbb{Z}$. Supongamos ahora que $\tilde{M}(E)$ es trivial y sea h_{ij} un cociclo sobre M con grupo de estructura $GL(K, K)$ y que determina al fibrado E . Como $\tilde{M}(E)$ es trivial entonces $h_{ij}(b) = +1$ y por lo tanto $\det(q_{ij}(b)) = |\det(q_{ij}(b))|$. De esto se sigue que el grupo de estructura del cociclo h_{ij} puede reducirse a $GL^+(K, K)$.

Como una variedad simplemente conexa no puede ser el espacio base de un cubriente conexo con más de una hoja, se tiene el siguiente.

6.9. Corolario. Todo fibrado de K -planos sobre una variedad simplemente conexa es orientable. En particular toda variedad simplemente conexa es orientable.

6.10. Observación. Al cubriente de orientaciones $\pi: \tilde{M}(TM) \rightarrow M$ del fibrado tangente TM se le llama también el cubriente de orientaciones de la variedad M . En este caso tenemos que π^*TM es orientable y como

por la propiedad universal del fibrado inducido se tiene que π^*TM es isomorfo al fibrado tangente $T(\tilde{M}(TM))$ de la variedad $\tilde{M}(TM)$, entonces se concluye que $\tilde{M}(TM)$ es una variedad orientable. Sin embargo, para un fibrado de \mathbb{R} -planos E que no sea el fibrado tangente TM , en general, la variedad $\tilde{M}(E)$ no necesariamente es orientable; ya que en una variedad M no orientable pueden existir fibrados de \mathbb{R} -planos orientables y por la prop. 6.8 se sigue que el ambiente $\tilde{M}(E)$ tampoco es orientable.

Sea \mathcal{F} una foliación de dimensión \mathbb{R} en M , entonces $T\mathcal{F}$ es un fibrado de \mathbb{R} -planos sobre M y por consiguiente se tiene un cubrimiento de orientaciones $\pi: \tilde{M}(T\mathcal{F}) \rightarrow M$ de este fibrado. Al cubrimiento $\tilde{M}(T\mathcal{F})$ de orientaciones de $T\mathcal{F}$ se le llama el cubrimiento de orientaciones de la foliación \mathcal{F} y se le denota simplemente por $\tilde{M}(\mathcal{F})$. El difeomorfismo local $\pi: \tilde{M}(\mathcal{F}) \rightarrow M$ induce una foliación $\pi^*\mathcal{F}$ en $\tilde{M}(\mathcal{F})$ de la misma dimensión y clase de diferenciabilidad de \mathcal{F} (prop. 4.7). El fibrado tangente de esta foliación $T\pi^*\mathcal{F}$ es un fibrado de \mathbb{R} -planos sobre $\tilde{M}(\mathcal{F})$ que puede ser identificado con el fibrado $\pi^*T\mathcal{F}$ inducido por el difeomorfismo local π (obs. 5.7). Como por el Teor. 6.6 $\pi^*T\mathcal{F}$ es orientable, entonces se sigue que la foliación inducida $\pi^*\mathcal{F}$ es orientable.

6.11. Ejemplo: En las figuras de abajo se muestran foliaciones no orientables en el cilindro \mathbb{R}^2/\sim , ya que los fibrados de líneas tangentes a dichas foliaciones son fibrados de líneas no triviales.

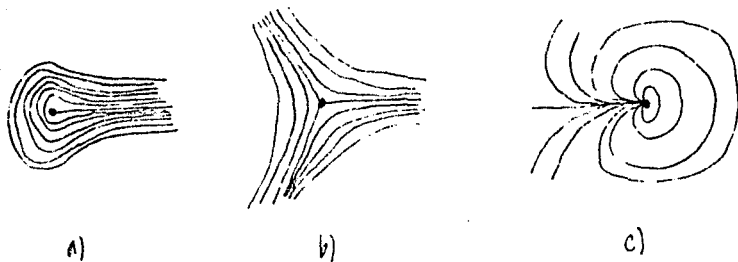


Figura 6.B.

El cubriente de orientaciones de estas foliaciones tiene como espacio total también al cilindro \mathbb{R}^2/\sim y las foliaciones inducidas por este cubriente son orientables y tienen el aspecto siguiente respectivamente

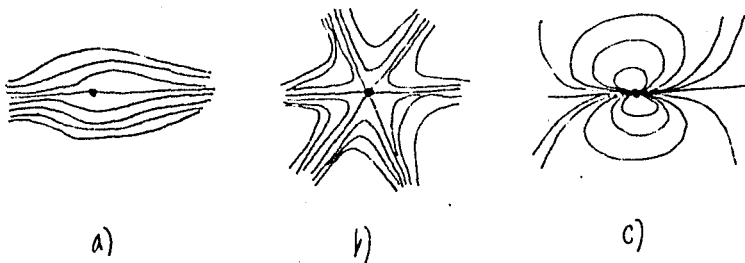


Figura 6.C.

6.12. Ejemplo. Consideremos en el toro T^2 el fibrado de líneas no orientable tangente a la foliación \mathcal{F}_1 que se muestra en la figura de abajo

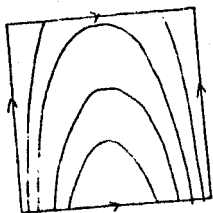


Figura 6.D.

En esta figura las aristas verticales constituyen una sola hoja de T_1 . En este ejemplo $\pi(T_1) = T^2$ y la foliación en T^2 inducida por el cubriente de orientaciones de T_1 tiene el aspecto siguiente

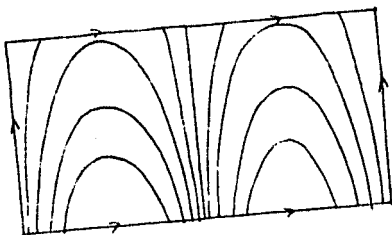


Figura 6.E.

y esta foliación es orientable.

6.13. Ejemplo. En la siguiente figura se muestra una foliación no orientable en la banda de Möbius, en la que la frontera es una hoja compuesta difeomorfa a S^1 y todas las hojas en el interior son difeomorfas a la recta \mathbb{R} y se van acumulando sobre la frontera

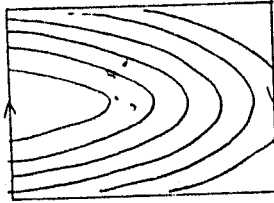


Figura 6.F.

El cubriente de orientaciones de esta foliación está definido en el anillo $S^1 \times [0,1]$ y la foliación inducida en este anillo por el cubriente de orientaciones tiene el aspecto que se ilustra en la figura de abajo.

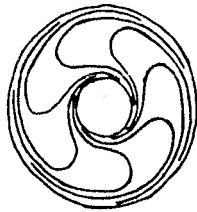


Figura 6.G.

6.14 Ejemplo. En la botella de Klein K^2 la foliación no orientable de la figura de abajo

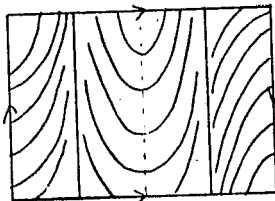


Figura 6.H.

Tiene un cubrimiento de orientados definido en un toro T^2 y la foliación inducida en T^2 por este cubrimiento es una foliación orientable como la que se muestra abajo:

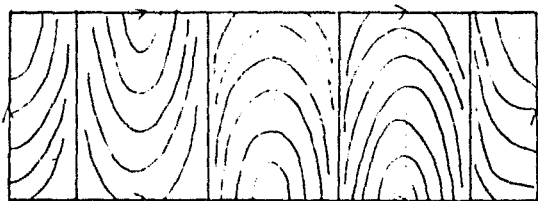


Figura 6.1.

Con otros ejemplos podríamos ver que aún en variedades no orientables pueden existir foliaciones orientables.

Si consideramos al fibrado tangente de una foliación de dimensión k en M , tenemos entonces que el teorema 6.6 y la proposición 6.8 así como el corolario 6.9 pueden reescribirse en términos de foliaciones como sigue.

6.15. Teorema. Sea \mathcal{F} una foliación de dimensión k y clase C^r ($r \geq 1$) en M . Entonces $\pi^* \mathcal{F}$ es orientable.

6.16. Proposición. $\tilde{M}(\mathcal{F})$ es la suma topológica de dos copias de M si y sólo si la foliación \mathcal{F} es orientable.

6.17. Corolario. Si M es simplemente conexa, entonces toda foliación de clase C^r ($r \geq 1$) en M es orientable.

Introduciremos ahora la noción de orientabilidad transversal.

Sea E un fibrado de k -planos sobre M . Al fibrado cociente $F = TM/E$ se le llama el fibrado normal a E y si este fibrado normal es orientable entonces se dice que E es transversalmente orientable.

¶ 18. Definición. Una foliación \mathcal{F} es transversalmente orientable si su fibrado tangente $T\mathcal{F}$ es transversalmente orientable.

Una sucesión exacta de homomorfismos de fibrados de planos sobre una variedad M es una sucesión finita o infinita

$$\dots \rightarrow E_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} E_i \xrightarrow{f_i} E_{i+1} \rightarrow \dots$$

de homomorfismos de fibrados de planos sobre M tales que para cada $b \in M$ se tiene

$$\text{imagen}(f_{i-1}|_{(E_{i-1})_b}) = \text{Kernel}(f_i|_{(E_i)_b})$$

para toda i .

Si denotamos por 0 al fibrado vectorial trivial $M \times \{0\}$, entonces un homomorfismo $f: E \rightarrow E'$ de fibrados de planos sobre M es un monomorfismo si y sólo si la sucesión

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{f} E'$$

es exacta. Y es un epimorfismo si y sólo si la sucesión

$$E \xrightarrow{f} E' \rightarrow 0$$

es exacta.

Sea $0 \rightarrow E \xrightarrow{f} E' \xrightarrow{g} E'' \rightarrow 0$ una sucesión exacta. Supongamos

que los fibrados E y E' son orientables. Sean $\theta = \downarrow \theta_b : \text{beM} \rightarrow E'$ y $\theta' = \downarrow \theta'_b : \text{beM} \rightarrow E''$ orientaciones de E y E'' respectivamente. Dado un punto $b \in M$ sea (u_1, \dots, u_k) una base ordenada de E_b tal que $[u_1, \dots, u_k] = \theta_b$ y sea (w_1, \dots, w_r) una base ordenada de E'_b tal que $[w_1, \dots, w_r] = \theta'_b$. Como g es un isomorfismo, existen $v_1, \dots, v_r \in E_b$ tales que $g(w_{k+i}) = v_{k+i}$ para toda $i \in \{1, \dots, r-k\}$. Como f es un isomorfismo, se tiene entonces que $(f(u_1), \dots, f(u_k), v_1, \dots, v_r)$ es una base ordenada de E'_b y si definimos una orientación θ'_b de E'_b como $\theta'_b = [f(u_1), \dots, f(u_k), v_1, \dots, v_r]$ entonces se tiene que $\theta' = \downarrow \theta'_b : \text{beM} \rightarrow E''$ es una orientación de E' . Si suponemos ahora que E y E' son orientables, entonces se tiene que E'' también es orientable. En efecto, sean $\theta = \downarrow \theta_b : \text{beM} \rightarrow E$ y $\theta' = \downarrow \theta'_b : \text{beM} \rightarrow E'$ orientaciones de E y E' respectivamente. Para cada $b \in M$ sea $(u_1, \dots, u_k) \in \theta_b$. Podemos definir una orientación θ'_b de la fibra E'_b de la siguiente manera: $(v_1, \dots, v_r) \in \theta'_b$ si y sólo si existen $w_1, \dots, w_r \in E_b$ tales que $g(w_{k+i}) = v_{k+i}$, $i \in \{1, \dots, r-k\}$ y $\theta'_b = [f(u_1), \dots, f(u_k), v_1, \dots, v_r]$. De esta manera se tiene que $\theta' = \downarrow \theta'_b : \text{beM} \rightarrow E''$ es una orientación de E'' . De manera similar se muestra que si E' y E'' son orientables, entonces E es orientable.

Si E es un fibrado de k -planos sobre una variedad M entonces la inclusión canónica $i : E \rightarrow TM$ es un monomorfismo y la proyección canónica $p : TM \rightarrow TM/E$ del fibrado tangente TM sobre el fibrado normal a E es un epimorfismo. Por lo tanto

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{i} TM \xrightarrow{p} TM/E \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta. De lo anterior podemos sacar como conclusión el siguiente resultado.

6.19. Teorema. Sea E un fibrado de k -planos sobre la variedad M . Si E es orientable y transversalmente orientable, entonces la variedad M es orientable. Y si la variedad M es orientable, entonces E es orientable si y sólo si es transversalmente orientable.

Al considerar al fibrado tangente de una foliación este último resultado puede expresarse en términos de foliaciones como sigue.

6.20. Teorema. Sea \mathcal{F} una foliación de dimensión k y clase C^r ($r \geq 1$) en M . Si la foliación \mathcal{F} es orientable y transversalmente orientable entonces la variedad M es orientable. Y si la variedad M es orientable, entonces la foliación \mathcal{F} es orientable si y sólo si es transversalmente orientable.

Sea E un fibrado de k -planos sobre M y sea $F = TM/E$ el fibrado normal a E . Consideremos ahora a $\nu: \tilde{M}(F) \rightarrow M$ el cubriente de orientaciones del fibrado normal. Entonces el fibrado inducido ν^*F es un fibrado de planos de codimensión k sobre la variedad $\tilde{M}(F)$. Por el prop. 6.6 se tiene que ν^*F es orientable y por la prop. 6.8 se puede afirmar que $\nu: \tilde{M}(F) \rightarrow M$ es un cubriente trivial si y sólo si E es transversalmente orientable.

Por otra parte, ya que $\nu: \tilde{M}(F) \rightarrow M$ es un difeomorfismo local se tiene que $D\nu: T\tilde{M}(F) \rightarrow TM$ es un isomorfismo de fibrados por arriba de ν y por la propiedad universal del fibrado inducido se sigue que $T\tilde{M}(F)$ y ν^*TM son isomorfos y por lo tanto podemos identificarlos hasta un isomorfismo. Tenemos además que ν^*E es isomorfo a E y $\nu^*(TM/E)$ es isomorfo a TM/E . Y como un monomorfismo entre fibrados de perilla hasta un isomorfismo al cociente de estos, tenemos entonces que existe un isomorfismo entre los

fibrados $T\tilde{M}(F)/\nu^*E$ y TM/E de manera que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \nu^*E & \longrightarrow & T\tilde{M}(F) & \longrightarrow & T\tilde{M}(F)/\nu^*E \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & TM & \longrightarrow & TM/E \longrightarrow 0
 \end{array}$$

conmuta. Por lo tanto $\nu^*(TM/E)$ es isomorfo a $T\tilde{M}(F)/\nu^*E$. Por todo lo anterior podemos entonces concluir lo siguiente.

Q.21. Teorema. Sea E un fibrado de k -planos sobre M y sea $F = TM/E$ el fibrado normal de E . Sea $\nu: \tilde{M}(F) \rightarrow M$ el cubriente de orientaciones de F . Entonces se cumplen las siguientes dos condiciones:

- 1) ν^*E es transversalmente orientable.
- 2) El cubriente ν es trivial si y sólo si E es transversalmente orientable.

En términos de foliaciones puede escribirse así.

Q.22. Teorema. Sea \mathcal{F} una foliación de dimensión k y clase C^r ($r \geq 1$) en M . Sea $N\mathcal{F} = TM/\mathcal{F}$ el fibrado normal a \mathcal{F} y sea $\nu: \tilde{M}(N\mathcal{F}) \rightarrow M$ el cubriente de orientaciones de $N\mathcal{F}$. Entonces se cumplen las siguientes dos condiciones:

- 1) $\nu^*\mathcal{F}$ es transversalmente orientable.
- 2) El cubriente ν es trivial si y sólo si la foliación \mathcal{F} es transversalmente orientable.

Al fibrado $N\mathcal{F}$ se le llama el fibrado normal de la foliación \mathcal{F} .

Sean \mathfrak{F} y \mathfrak{G} dos foliaciones de clase (\mathcal{C}^k) en M . Diremos que \mathfrak{F} es transversal a \mathfrak{G} si $T_x\mathfrak{F} + T_x\mathfrak{G} = T_xM$ para todo punto $x \in M$. Esto significa que todas las hojas de \mathfrak{F} son transversales a todas las hojas de \mathfrak{G} . Es claro que si \mathfrak{F} es transversal a \mathfrak{G} , entonces \mathfrak{G} es transversal a \mathfrak{F} . Si dos foliaciones son transversales entonces las intersecciones de sus hojas determinarán una foliación. En efecto. Supongamos que \mathfrak{F} y \mathfrak{G} son foliaciones transversales y sea $E = T\mathfrak{F} \cap T\mathfrak{G}$ el fibrado de planos que tiene como fibra sobre el punto $x \in M$ al subespacio $T_x\mathfrak{F} \cap T_x\mathfrak{G}$. Como $\dim(T_x\mathfrak{F} + T_x\mathfrak{G}) = \dim(M)$, entonces se tiene que E es un fibrado de k -planos sobre M en donde $k = \dim(\mathfrak{F}) + \dim(\mathfrak{G}) - \dim(M)$. Sean X e Y dos secciones locales de E , y por consiguiente también son secciones locales de $T\mathfrak{F}$ y de $T\mathfrak{G}$. Por lo tanto $[X, Y]$ es sección local de $T\mathfrak{F}$ y de $T\mathfrak{G}$ (teor. 9.12) y por consiguiente lo es también de E . Hemos visto con esto que E es involutivo y por lo tanto debe ser el fibrado tangente de alguna única foliación \mathfrak{H} de dimensión k y clase (\mathcal{C}^k) en M (teor. 9.12). Además si H es la hoja de \mathfrak{H} que pasa por el punto $x \in M$, entonces $T_xH = T_x\mathfrak{F} \cap T_x\mathfrak{G}$ y por consiguiente existen hojas F y G de \mathfrak{F} y \mathfrak{G} respectivamente que contienen a x . Por lo tanto $H \subset FG$. Pero como H es conexo entonces está contenida en alguna componente conexa de FG . Así podemos concluir que las componentes conexas de las intersecciones de las hojas de dos foliaciones transversales son las hojas de una foliación.

Se verifica fácilmente que si una foliación \mathfrak{F} tiene una foliación transversal, orientable, y de dimensión complementaria, entonces \mathfrak{F} es transversal a la misma orientable.

Pero dada una foliación \mathfrak{F} en M , en general, no existe una foliación de dimensión complementaria y transversal a \mathfrak{F} . Sin embargo, si \mathfrak{F} es de codimensión 1,

entonces $\pi^* \mathcal{F}_M$ es un fibrado de líneas en M y por lo tanto es completamente irreducible. Por lo tanto existe una única foliación de dimensión 1 en M cuyo fibrado tangente es precisamente el fibrado normal a \mathcal{F}_M . Así pues, toda foliación \mathcal{F}_M de codimensión 1 siempre tiene una foliación transversal \mathcal{G}_M de dimensión complementaria.

Siempre resulta útil contar con algún criterio que permita determinar cuando una foliación es transversalmente orientable.

6.23. Proposición. Sea $f: M \rightarrow N$ una submersión de clase C^r ($r \geq 1$) y sea \mathcal{F}_M la foliación de M dada por las superficies de nivel de f (prop. 2.1). Si la variedad N es orientable entonces la foliación \mathcal{F}_M es transversalmente orientable.

En efecto, $Df: TM \rightarrow TN$ es un epimorfismo de fibrados porque f es una submersión. Además $T\mathcal{F}_M = \ker Df$ pues $T_{\mathcal{F}_M} = \ker Df(q)$ para toda $q \in M$. Por lo tanto $TM/\ker Df$ es isomorfo al fibrado orientable TN y por consiguiente $T\mathcal{F}_M$ es transversalmente orientable.

6.24. Observación. Como la fibration de Hopf de S^3 (ejemplo 2.3) está definida por una submersión $S^3 \rightarrow S^2$ y como las esferas S^3 y S^2 son variedades orientables, entonces la foliación determinada por la fibration de Hopf es transversalmente orientable (prop. 6.23) y orientable (Teor. 6.20).

Como una aplicación directa del teorema de Poincaré-Hopf y del teorema 6.6 se tiene el siguiente resultado.

6.25. Proposición. Sea M una variedad compacta. Si existe una foliación de codimensión 1 y clase C^r ($r \geq 1$) en M , entonces la característica de Euler-Poincaré de M es cero.

En efecto. Sea π una foliación de codimensión 1 en M . Entonces $N\pi$ es un fibrado de líneas sobre M . Supongamos que $N\pi$ es orientable. Tenemos entonces que $N\pi$ es trivial (prop. 6.5) y por lo tanto existe un campo vectorial X en M , no singular, y tal que $X(p)$ pertenece a la fibra de $N\pi$ por arriba de $p \in M$. Por el teorema de Poincaré-Hopf se concluye que la característica de Euler-Poincaré de M es cero. Supongamos ahora que $N\pi$ no es orientable. Sea $\nu: \tilde{M}(N\pi) \rightarrow M$ el cubrimiento de orientaciones del fibrado $N\pi$. Tenemos entonces que $\tilde{M}(N\pi)$ es difeomorfo a dos copias de M y por lo tanto la característica de Euler-Poincaré de $\tilde{M}(N\pi)$ es el doble de la característica de Euler-Poincaré de M . Como $\nu^*N\pi$ es un fibrado de líneas orientable (teor. 6.6) y por consiguiente es trivial (prop. 6.5). Por lo tanto existe un campo vectorial \tilde{X} en $\tilde{M}(N\pi)$, no singular, tal que para cada $q \in \tilde{M}(N\pi)$ la fibra de $\nu^*N\pi$ por arriba de q es el subespacio generado por $\tilde{X}(q)$. Como \tilde{X} es no singular, el teorema de Poincaré-Hopf implica que la característica de Euler-Poincaré de $\tilde{M}(N\pi)$ es cero y por lo tanto también lo es la de M .

6.26. Observación. Las únicas superficies compactas M^2 en donde pueden existir foliaciones de codimensión 1 son el toro T^2 , la botella de Klein K^2 , la banda de Möbius B^2 y el anillo $S^1 \times [0,1]$.

6.27. Observación. Se puede demostrar que si una variedad compacta M tiene característica de Euler-Poincaré cero, entonces existe un campo vectorial en M no singular. Este campo vectorial determina un fibrado de líneas trivial y por lo tanto orientable; y por consiguiente existe una foliación de dimensión 1 orientable en M . De aquí podemos concluir la existencia de foliaciones orientables de dimensión 1 en el toro, la botella de Klein, la banda de Möbius y el anillo. (véase obs. 6.10).

A.- Apéndice: Construcción de foliaciones de dimensión uno a partir de difeomorfismos.

Sea f un difeomorfismo de la variedad M . Las aplicaciones $(x, t) \mapsto (f^{-1}(x), t+j)$, $j \in \mathbb{Z}$, definen una acción propia y libre de \mathbb{Z} sobre el producto $M \times \mathbb{R}$. Sea $M_f = M \times \mathbb{R} / \mathbb{Z}$ el espacio de órbitas de esta acción de \mathbb{Z} y sea $\pi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M_f$ la proyección que a cada punto de $M \times \mathbb{R}$ lo manda a la órbita que contiene a dicho punto. Como \mathbb{Z} es un grupo discreto que actúa propia y libremente sobre el espacio localmente compacto $M \times \mathbb{R}$, la proyección $\pi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M_f$ es un cubriente (Godbillon [1971], cap. VII, teor. 3.1, pág. 110). Además, existe una única estructura de variedad diferenciable sobre M_f de manera que el cubriente $\pi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M_f$ es un difeomorfismo local (Godbillon [1971], cap. X, prop. 3.6, pág. 190).

En el producto $M \times \mathbb{R}$ consideremos a la foliación \mathcal{F}_0 cuyas hojas son las rectas $\{x\} \times \mathbb{R}$, $x \in M$. Esta foliación \mathcal{F}_0 es invariante bajo esta acción de \mathbb{Z} , ya que toda hoja $\{x\} \times \mathbb{R}$ de \mathcal{F}_0 es aplicada sobre sí misma por cada uno de los difeomorfismos $(x, t) \mapsto (f^{-1}(x), t+j)$, $j \in \mathbb{Z}$.

Lema. Existe una única foliación \mathcal{F}_f en M_f tal que $\mathcal{F}_0 = \pi^* \mathcal{F}_f$.

En efecto. Para cada $q \in M_f$ existe una vecindad abierta $U_q \subset M_f$ alrededor de q tal que $\pi^{-1}(U_q)$ es la unión ajena $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_{j,q}$ de conjuntos abiertos V_j y tales que $\pi|_{V_j}: V_j \rightarrow U_q$ es un difeomorfismo. Podemos suponer que cada uno de los abiertos V_j es el dominio de una carta trivializadora (V_j, h_j) de \mathcal{F}_0 .

Para cada $j \in \mathbb{Z}$, al difeomorfismo $(x, t) \mapsto (f^j(x), t + j)$ de $M \times \mathbb{R}$ lo denotaremos también por la letra j , siempre y cuando esta notación no se preste a confusión. Ahora bien, como la foliación \mathcal{F}_0 es invariante bajo la acción de \mathbb{Z} se sigue que $(j(V_{y_1}), h_{y_1} \circ j^{-1})$ es también una carta trivializadora de \mathcal{F}_0 para toda $j \in \mathbb{Z}$. El atlas $\{(U_j, h_j \circ (\pi|_{V_{y_1}})^{-1}) : j \in M_f, y \in \pi^{-1}(q)\}$ define una foliación \mathcal{F}_f en M_f de la misma dimensión y clase de diferenciabilidad que \mathcal{F}_0 . En efecto, sean $(U_{y_1}, h_{y_1} \circ (\pi|_{V_{y_1}})^{-1})$ y $(U_{y_2}, h_{y_2} \circ (\pi|_{V_{y_2}})^{-1})$ dos de estas cartas y supongamos que $U_{y_1} \cap U_{y_2} \neq \emptyset$, entonces existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $V_{y_1} \cap j(V_{y_2}) \neq \emptyset$ y tenemos además que $j \circ \pi \circ j^{-1} = \pi$ (ya que el difeomorfismo j manda a cada órbita $\{(f^k(x), t + k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sobre sí misma) y por consiguiente $h_{y_1} \circ (\pi|_{V_{y_1}})^{-1} \circ (\pi|_{V_{y_2}}) \circ h_{y_2}^{-1} = h_{y_1} \circ j^{-1} \circ h_{y_2}^{-1}$. Pero como $(j(V_{y_1}), h_{y_1} \circ j^{-1})$ es una carta trivializadora de \mathcal{F}_0 , entonces podemos concluir lo que habíamos afirmado antes. Y por construcción tenemos que $\mathcal{F}_0 = \pi^* \mathcal{F}_f$.

A la foliación \mathcal{F}_f se le llama la suspensión del difeomorfismo f , y a la variedad M_f la variedad de suspensión de f .

Sea $M_0 = \pi(M \times \{0\})$. Como $q = \pi|_{M \times \{0\}} : M \times \{0\} \rightarrow M_0$ es un difeomorfismo, M_0 es una subvariedad encajada en M_f . Esta subvariedad M_0 tiene la propiedad de que toda hoja de \mathcal{F}_f la intersecciona transversalmente. Sea $q = \pi(x, 0) \in M_0$ un punto de esta subvariedad y sea F_q la hoja de \mathcal{F}_f que pasa por q . Sea $t \mapsto \pi(x, t)$ una parametrización de esta hoja F_q . Como los puntos $(x, 1)$ y $(f(x), 0)$ están sobre la misma órbita que determina la acción de \mathbb{Z} (ya que $(x, 1) = j(f(x), 0)$ para $j=1$), se sigue que $\pi(x, 1) = \pi(f(x), 0) \in M_0$ y por consiguiente para

$t=1$ la hoja F_q vuelve a cortar a M_0 . Si $i_0: M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ es la inclusión definida por $i_0(x) = (x, 0)$ y $\pi_1: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ la proyección en el primer factor, entonces $\pi_1(x, t) = \pi_1(i_0 \circ f \circ \pi_1^{-1}(q))$. Así pues, podemos definir una aplicación $\tilde{f}: M_0 \rightarrow M_0$ dada por $\tilde{f} = \pi_1 \circ i_0 \circ f \circ \pi_1^{-1}$; esta aplicación es un difeomorfismo y se le conoce como la transformación de Poincaré de la sección M_0 y de la foliación \mathcal{F}_f , y asocia a cada punto $q \in M_0$ con el primer repetido en M_0 de la hoja de \mathcal{F}_f que pasa por q .

Por consiguiente existe una correspondencia biunívoca entre las hojas de \mathcal{F}_f y las órbitas del difeomorfismo f .

Las propiedades topológicas o algebraicas de f se traducen en propiedades análogas de la foliación \mathcal{F}_f . Por ejemplo, si $x \in M$ es un punto periódico de f con período k , entonces la hoja de \mathcal{F}_f que pasa por el punto $q = \pi(x, 0)$ es una curva cerrada que corta k veces a M_0 . Si x no es un punto periódico de f , entonces la hoja de \mathcal{F}_f que pasa por $q = \pi(x, 0)$ no es compacta y corta a M_0 en los puntos $\pi(f^n(x), 0)$, $n \in \mathbb{Z}$. Si la órbita $\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ es densa en M , entonces la hoja de \mathcal{F}_f que pasa por $\pi(x, 0)$ es densa en M_f .

Si M es el círculo S^1 , la variedad M_f es difeomorfa al toro T^2 si el difeomorfismo f conserva la orientación, y a la botella de Klein K^2 en el otro caso. Si el difeomorfismo f no conserva la orientación entonces tiene dos puntos fijos; por consiguiente la suspensión \mathcal{F}_f en la botella de Klein K^2 tiene dos hojas compactas homeomorfas a S^1 .

En particular, si $f_\alpha: S^1 \rightarrow S^1$ es la rotación definida por $f_\alpha(z) = e^{2\pi i \alpha} z$, entonces la suspensión de este difeomorfismo es una foliación definida en el toro T^2 . Si $\alpha = m/n \in \mathbb{Q}$, con m y n primos entre sí, entonces todos

Los puntos de S^1 son puntos periódicos de f_α y con período n , y por consiguiente todas las hojas de la suspensión de f_α son homeomorfas a S^1 y cortan a $M_0 = \pi(S^1 \times I_0)$ n veces. Si $\alpha \neq \alpha'$ todas las hojas de la suspensión de f_α son densas en T^2 .

B Apéndice: Foliaciones definidas por la acción de un grupo de Lie localmente libre.

En este apéndice indicaremos, muy brevemente y sin entrar en detalles, porque las órbitas de una acción localmente libre de un grupo de Lie definen las hojas de una foliación (véase Hector-Hirsch [1981], cap. II, págs. 171-176)

Para lo que sigue se supondrá que G es un grupo de Lie conexo y que $\dim(G) = l$. Sea $\Phi: G \times M \rightarrow M$ una acción suave del grupo de Lie G sobre la variedad M . Para cada $x \in M$ denotaremos por $G \cdot x = \{ \Phi(g, x) : g \in G \}$ a la órbita de x . Recordemos que la acción $\Phi: G \times M \rightarrow M$ es localmente libre si para cada $x \in M$ el grupo de isotropía $G_x = \{ g \in G : \Phi(g, x) = x \}$ y el punto x es discreto. Si $\Phi_x: G \rightarrow M$ es la aplicación continua definida por $\Phi_x(g) = \Phi(g, x)$, entonces se tiene que $G_x = \Phi_x^{-1}(x)$ y por consiguiente G_x es un subgrupo conlido de G , y como G es un grupo de Lie, G_x es una subvariedad de G .

Como $\Phi_x(g_1 g_2) = \Phi(g_1, \Phi(g_2, x)) = \Phi(g_1, x) = \Phi_x(g_1)$ para toda $g_1, g_2 \in G_x$, entonces Φ_x induce una aplicación $\tilde{\Phi}_x: G/G_x \rightarrow G \cdot x \subset M: gG_x \mapsto \Phi_x(g)$. Y como $\Phi_x(g) = \Phi_x(h)$ si y sólo si $gG_x = hG_x$, entonces la aplicación $\tilde{\Phi}_x$ es inyectiva. Se puede demostrar que $\tilde{\Phi}_x: G/G_x \rightarrow G \cdot x \subset M$ es una inversión inyectiva y por consiguiente la órbita $G \cdot x$ es una subvariedad inmersa.

Para cada $g \in G$ la traslación izquierda $L_g: G \rightarrow G: h \mapsto gh$ es un difeomorfismo. Un campo vectorial X en G se dice que es invariante izquierdo si para cada $g \in G$ se tiene que $DL_g(X(h)) = X(gh)$ para toda $h \in G$, es decir, que el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc}
 TG & \xrightarrow{D\varphi} & TG \\
 \uparrow \tilde{X} & & \uparrow \tilde{X} \\
 G & \xrightarrow{L\varphi} & G
 \end{array}$$

sea conmutativo.

El conjunto de todos los campos vectoriales invariantes izquierdos, que denotaremos por $\mathfrak{L}(G)$, es un subálgebra de Lie del álgebra de Lie $\mathfrak{X}(G)$ de campos vectoriales en G . Denotemos por $\lambda: M \rightarrow TM$ a la sección nula del fibrado tangente TM . Dado un campo vectorial $\tilde{X} \in \mathfrak{L}(G)$ entonces tenemos que para cada $(q, x) \in G \times M$ el vector tangente $D\Phi(\tilde{X}(q), \lambda(x)) \in TM$ pertenece al espacio tangente a la órbita $G \cdot x$ en el punto $\Phi(q, x)$; y además, si $\Phi(q, x) = \Phi(q', x')$ entonces $D\Phi(\tilde{X}(q), \lambda(x)) = D\Phi(\tilde{X}(q'), \lambda(x'))$. Por consiguiente, para cada punto $x \in M$ tenemos que $\tilde{X}(x) = D\Phi(\tilde{X}(q), \lambda(x))$ define un campo vectorial (completo) en M , y tal que $\tilde{X}(x)$ es tangente a la órbita $G \cdot x$ en el punto $x \in M$.

Resulta que la correspondencia $\mathfrak{L}(G) \rightarrow \mathfrak{X}(M): \tilde{X} \mapsto \tilde{X}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, que manda a cada campo vectorial de $\mathfrak{L}(G)$ en un campo vectorial tangente a las órbitas de la acción Φ .

Sea $\{\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_L\}$ una base de $\mathfrak{L}(G)$. Como Φ es una acción localmente libre, se tiene que para cada punto $x \in M$ el conjunto $\{\tilde{X}_1(x), \dots, \tilde{X}_L(x)\}$ es linealmente independiente y el subespacio que genera coincide con el espacio tangente a la órbita que pasa por x . El fibrado de L -planos sobre M que tiene por fibra sobre el punto $x \in M$ al subespacio generado por $\{\tilde{X}_1(x), \dots, \tilde{X}_L(x)\}$ es trivial,

ya que $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k$ son campos vectoriales definidos en todo M y linealmente independientes en cada punto. Puesto que $\lambda(G) \rightarrow \mathcal{E}(M): \tilde{X} \mapsto \tilde{X}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, se tiene que dicho fibrado de k -planos es involutivo. Por el teorema de Frobenius tenemos entonces que existe en M una foliación \mathcal{F}_G de dimensión k que tiene como fibrado tangente al fibrado de k -planos anterior. Como \mathcal{F}_G es un fibrado trivial, la foliación \mathcal{F}_G es orientable (prop. 6.3). La hoja F_x de \mathcal{F}_G que pasa por el punto $x \in M$ coincide con la órbita $G \cdot x$.

Ejemplo: La fibración de Hopf de S^{2n-1} .

El círculo $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ con la multiplicación de números complejos es un grupo de Lie de dimensión 1. Para $n \geq 2$ sea $S^{2n-1} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 1\}$ la esfera unitaria en \mathbb{R}^{2n} . Dado $K = (k_1, \dots, k_n)$, con $k_j \in \mathbb{Z} - \{0\}$ para toda $j \in \{1, \dots, n\}$, la aplicación $\Phi_K: S^1 \times S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$ definida por $\Phi_K(w, (z_1, \dots, z_n)) = (w^{k_1} z_1, \dots, w^{k_n} z_n)$ es una acción localmente libre de S^1 sobre la esfera unitaria S^{2n-1} . Por consiguiente las órbitas de esta acción Φ_K definen una foliación \mathcal{F}_K de dimensión 1 en la esfera S^{2n-1} , y todas las hojas de esta foliación son difeomorfias al círculo S^1 . En el caso particular $K = (1, \dots, 1)$, la foliación \mathcal{F}_K es la fibración de Hopf de S^{2n-1} . En este caso el grupo de isotropía es $\{1\}$ y la acción es libre. Teniéndose entonces que la proyección canónica $S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}/S^1$ de la esfera S^{2n-1} en donde las fibras son difeomorfias a S^1 . El grupo multiplicativo $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ actúa libremente sobre el espacio $\mathbb{C}^n - \{0\}$ mediante

las triangulaciones $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{0\} : (v_i, z_1, \dots, z_n) \mapsto (v_i z_1, \dots, v_i z_n)$.

El espacio proyectivo complejo de dimensión $n-1$, $\mathbb{C}P^{n-1}$, es el espacio de órbitas $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$ de esta acción de \mathbb{C}^* sobre el espacio $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

Tenemos entonces que la inclusión canónica $i: S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ induce un difeomorfismo de S^{2n-1}/S^1 sobre $\mathbb{C}P^{n-1}$. Por consiguiente el espacio de hojas de la fibración de Hopf de S^{2n-1} es una variedad de dimensión $2n-2$ difeomorfa al espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^{n-1}$.

C.- Apéndice: Foliaciones de \mathbb{C}^n -hojas determinadas por un flujo lineal holomorfo (en el caso de Poincaré).

Sea $n > 1$ y $A \in GL(n, \mathbb{C})$ una matriz $n \times n$ compleja y no singular. Consideremos el campo vectorial lineal en \mathbb{C}^n -hojas definido por $X(z) = A z$. Al integrar este campo vectorial se obtiene el flujo complejo $\Phi: \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \text{-hojas} \rightarrow \mathbb{C}^n \text{-hojas}; (s, z) \mapsto e^{sA} z$ en \mathbb{C}^n -hojas. Puesto que A es no singular, esta acción es libre y por consiguiente las órbitas de este flujo que son superficies reales de dimensión dos determinan una foliación \mathcal{F}_A de dimensión 2 en \mathbb{C}^n -hojas.

En lo que sigue supondremos que $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ y que $\lambda_j \notin \mathbb{R} \cdot \lambda_k$ si $j \neq k$. La hoja F_z de la foliación \mathcal{F}_A de \mathbb{C}^n -hojas que pasa por el punto $z = (z_1, \dots, z_n)$ está dada por $F_z = \{ (z_1 e^{2\pi i s}, \dots, z_n e^{2\pi i s}) : s \in \mathbb{C} \}$ y ya que A es una matriz diagonal, los ejes coordenados $E_j = \{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_j \neq 0 \text{ y } z_k = 0 \text{ para } k \neq j \}$ son hojas de la foliación \mathcal{F}_A y son las únicas hojas homeomorfas al cilindro $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$. Si $z \in \mathbb{C}^n$ -hojas y no está sobre algún eje coordenado, entonces la hoja F_z de \mathcal{F}_A es homeomorfa al plano \mathbb{C} .

Sea $\mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \{ \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j : \alpha_j \geq 0 \text{ para } j=1, \dots, n \}$ y $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$ la cerradura convexa de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ en el plano complejo \mathbb{C} . Para lo que sigue supondremos que $0 \notin \mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (el caso de Poincaré). Bajo esta suposición se tiene que la foliación \mathcal{F}_A y la foliación de \mathbb{C}^n -hojas que tiene como hojas a las esferas

$S_r = \{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = r^2 \}$, $r > 0$, son transversales.

En efecto. Sea $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ -hojas. Se tiene que $T_z \mathcal{F}_A = \mathbb{C} \cdot A z$ y que

$T_2 S_r = \{ w \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} \langle w, z \rangle = 0 \}$ (en donde \langle, \rangle es el producto hermitiano usual de \mathbb{C}^n) y supóngase que $T_2 \mathcal{F}_A \subset T_2 S_r$. Se tendría entonces que $\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^n c \lambda_j |z_j|^2 \right) = 0$ para toda $c \in \mathbb{C}$, y escogiendo en particular $c = 1/r^2$ y $c = -i/r^2$ se obtendría que $\sum_{j=1}^n \frac{|z_j|^2}{r^2} \lambda_j = 0$. Pero como $\sum_{j=1}^n \frac{|z_j|^2}{r^2} = 1$, entonces $0 \in \mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ lo cual es absurdo.

Así pues, la intersección de estas dos foliaciones determina una foliación \mathcal{F}_r de dimensión 1 en cada una de las esferas S_r . La intersección $E_j \cap S_r$ de cada eje coordenado con S_r es una hoja de \mathcal{F}_r difeomorfa al círculo S^1 . Si $z \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ no está sobre algún eje coordenado y F_z es la hoja de \mathcal{F}_A que pasa por z , entonces $F_z \cap S_r$ es una hoja de \mathcal{F}_r difeomorfa a la recta \mathbb{R} . En efecto, si suponemos que $F_z \cap S_r$ es una curva cerrada entonces por el teorema de la curva de Jordan (reuérdese que F_z es homeomorfo al plano \mathbb{C}) $F_z \cap S_r$ descompones a F_z en dos regiones, una compacta (el interior) y otra no compacta (el exterior). La función distancia Euclidiana de \mathbb{C}^n restringida al interior de la curva $F_z \cap S_r$ tiene un punto crítico w_0 y por lo tanto alí $T_{w_0} F_z \subset T_{w_0} S_{r=0}$ y la hoja F_z no es transversal a la esfera $S_{r=0}$, lo que es absurdo. Por lo tanto la variedad 1-dimensional $F_z \cap S_r$ no puede ser difeomorfa a S^1 .

Como cada esfera S_r es una variedad simplemente conexa, se tiene entonces que la foliación \mathcal{F}_r es orientable (cor. 6.17) y por consiguiente $T\mathcal{F}_r$ es un fibrado de líneas trivial (prop. 6.5). De esto último se sigue que existe un campo vectorial no singular X_r definido en toda la esfera S_r tangente a $T\mathcal{F}_r$.

Ya hemos visto que la intersección $E_j \cap S_r$ de los ejes coordenados con S_r son las únicas órbitas cerradas del campo vectorial Z_r , y por lo tanto tiene únicamente un número finito de órbitas cerradas.

En Guckenheimer [1972] se demuestra que Z_r es un campo Morse-Smale, es decir, que tiene un número finito de órbitas cerradas, cada una hiperbólica, que las variedades estable e inestable de estas órbitas cerradas se intersecan transversalmente, y que el conjunto de puntos no errantes de Z_r es la unión de las órbitas cerradas.

Utilizando el hecho de que los campos Morse-Smale en variedades compactas son estructuralmente estables y de que las hojas de la foliación \mathcal{F}_A son conos generados por rectas desde $0 \in \mathbb{C}^n$ a las hojas de la foliación \mathcal{F}_1 de la esfera S_1 , Guckenheimer demuestra que la foliación \mathcal{F}_A es globalmente estable en el siguiente sentido: Sea $\tilde{A} = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n)$ con $\tilde{\lambda}_j \in \mathbb{R} \cdot \tilde{\lambda}_k$ si $k \neq j$ y $0 \in \mathcal{H}(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n)$, si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ y $(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n)$ están suficientemente cerca en \mathbb{C}^n y $\mathcal{F}_{\tilde{A}}$ es la foliación correspondiente al campo vectorial $\tilde{X}(z) = \tilde{A}z$, entonces existe un homeomorfismo $h: \mathbb{C}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^n - \{0\}$ que manda a las hojas de \mathcal{F}_A en las hojas de $\mathcal{F}_{\tilde{A}}$.

Guckenheimer también señala que si $0 \in \mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (el caso de Siegel) entonces las esferas S_r no serán transversales a la foliación \mathcal{F}_A , pero las superficies cuadráticas reales $V_r = \{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^n \sigma_j |z_j|^2 = r \}$ serán transversales a \mathcal{F}_A si se escogen $\sigma_j = \pm 1$ de manera que $0 \in \mathcal{H}(\sigma_1 \lambda_1, \dots, \sigma_n \lambda_n)$.

Bibliografía

Bröcker, Th. y Jänich, K., Einführung in die Differentialtopologie, Berlin: Springer-Verlag, 1973. Traducción al español en Introducción a la topología diferencial, Madrid: Ediponal AC, 1977.

Camacho, C. y Neto, A.L., Teoria geométrica das folheações, Rio de Janeiro: I.M.P.A., 1979.

Godbillon, C., Éléments de topologie algébrique, Paris: Hermann, 1971.

Guckenheimer, J., "HARTMAN'S THEOREM FOR COMPLEX FLOW IN THE POINCARÉ DOMAIN," Compositio Math. 24, (1972 a), 75-82.

Hector, G. y Hirsch, U., Introduction to the geometry of foliations, Part A, Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg, 1981.

Lawson, B., The quantitative theory of foliations, CBMS, Reg. Conf. Ser. Math, 27, Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1977.

Spivak, M., A comprehensive introduction to differential geometry, vol. I, 2^a ed., Berkeley, CA: Publish or Perish, 1979.

Steenrod, N., The topology of fibre bundles, Princeton Math. series 14, Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1951.

Sternberg, S., Lectures on differential geometry, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1964.