UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA TEORIA DE CONJUNTOS SUS ORIGENES, DESARROLLO Y CONSECUENCIAS

TESIS QUE PRESENTA

ALEJANDRO R. GARCIADIEGO DANTAN

PARA OBTENER EL TITULO DE

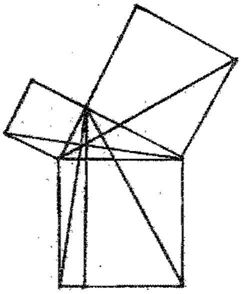
M A T E M A T I C O

México, D. F. Enero 1977

19/I/77

Al Biólogo más matematizado.

Alejandro



A mi Abuela.

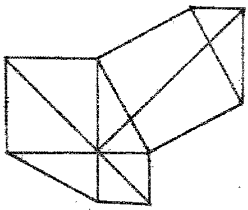
A mis Padres.

A mis Hermanos.

A mi Sobrina, y al que le sigue.

Muy especialmente, con todo mi cariño, a Lupita.

Y a todas aquellas personas que se opusieron al desarrollo del presente trabajo.



I N D I C E   G E N E R A L

Cantor, por el contrario, cree en la existencia del infinito actual: el 'infinito acabado' que horrorizaba a Gauss y que Kronecker sólo admite como devenir. El autor de la Teoría de Conjuntos mira por primera vez cara a cara el infinito y ni se deslumbra ni se aterra, como cuando miramos el sol o la muerte; Kronecker, en cambio, aparta los ojos de la sima que abre a sus pies la teoría positiva del infinito y hace en el cuerpo de la Matemática una ablación que no es la limitación griega, sino la protesta inevitable contra el absolutismo totalizador de tipo kantiano de que estaba empapada la teoría de Cantor.

.....Los finitistas son cautos y cuando sienten que el suelo oscila bajo sus pies dan marcha atrás; los infinitistas, más audaces, procuran mantener el equilibrio y cuando creen que han vuelto a la estabilidad avanzan de nuevo sin tener en cuenta que el andamio que les ha servido para sus construcciones pende de un hilo que se puede romper.

Francisco Vera.

INTRODUCCION

Cuando nosotros abrimos cualquier libro de Historia de las Matemáticas nos encontramos con dos posturas, con respecto a su contenido, diametralmente opuestas.

En la primera siempre nos mencionan que es un libro apto para cualquier persona y que no se necesita ningún conocimiento previo de la Matemática. Por lo general, se le da mucha importancia a los aspectos personales del matemático en cuestión y una casi nula importancia al desarrollo de su obra. El resultado es un anecdotario de la Matemática, o más claramente, una 'chismología'.

La segunda postura abarca aquellos libros que están dedicados a la gente especializada en el campo matemático. Comprenden, en su mayoría, una rama específica de la Matemática. Pero, desgraciadamente, sólo son accesibles a una pequeña minoría.

Mi intención al escribir esta tesis es hacer un ensayo de Historia de la Teoría de Conjuntos que no sea un anecdotario, para que la gente especializada este interesada; y que sea, al mismo tiempo, fácil de comprender a todas aquellas personas que no se dedican, o que apenas empiezan sus estudios (superiores) de Matemáticas.

Al hacer un trabajo de historia siempre nos sentimos obligados a justificarlo. El conocer o estudiar la Historia de la Ciencia que nos ocupa siempre ha sido menospreciado, nunca se le ha dado al estudio de la Historia de las Matemáticas el valor que se merece.

No voy a intentar justificar su estudio dentro de la propia Matemática o la necesidad de hacerlo. Veámoslo desde el punto de vista de su enseñanza. Estamos acostumbrados a estudiar la Matemática ya hecha, y no como se ha ido creando.

La presente tesis puede considerarse como un pequeño muestrario de algunas de las lecturas, comentarios y discuciones que se hicieron durante los cursos de: Teoría de los Conjuntos I y II, Historia de las Matemáticas I y II y otros seminarios cursados con el Prof. Francisco Zubieta R.

No debe olvidarse, en ningún momento, que antes que un libro de Teoría de Conjuntos este ensayo es un intento por hacer una "Nueva Historia de la Teoría de Conjuntos", aunque es importante señalar que hasta la fecha no se ha publicado ninguna. Sin embargo, esta tesis puede ser utilizada como un libro introductorio al tema, y, en el mejor de los casos, como un libro complementario al curso de 'Teoría de los Conjuntos I', que por su contenido, es difícil de encontrar.

No pretendo hacer un análisis completo de todas las cuestiones que originaron el estudio de la Teoría de Conjuntos, como tampoco lo hacemos de su desarrollo ni de sus consecuencias. Muchos puntos sólo son mencionados y otros de plano no son tomados en consideración.

La tesis fue dividida en siete libros (a la manera de los griegos) principales:

(1) En el primero señalamos algunos de los problemas que influenciaron a Cantor a dedicarse a cuestiones como: el

concepto de continuidad y el concepto del infinito. Tomando en cuenta únicamente los problemas concernientes a la Matemática y dejando de lado las cuestiones filosóficas o pertenecientes a otras ciencias.

(2) El segundo es una pequeña biografía de Cantor. Este capítulo tiene un fin divulgatorio o de cultura general y, no lo considero de fundamental importancia para comprender su obra. - Mientras que considero que para entender su vida si hay que conocer su obra.

(3) El libro III es la traducción de una de las memorias más representativas de la obra de Cantor: "Contribuciones a la Fundamentación de la Teoría de los Números Transfinitos" (primer artículo, 1895). Por cuestiones técnicas me fue imposible traducirlo del idioma original.

El fin de este capítulo es el de mostrar las ideas originales y no el de querer hacer una traducción perfecta del artículo. En este libro considero de igual importancia las notas que se mencionan; ya que éstas son las que nos muestran la importancia, los comentarios y las críticas que posteriormente se le han hecho a la obra de Cantor.

(4) En el libro IV se desarrolla de una manera sistemática la Teoría de Conjuntos para llegar al Teorema del Buen-Orden de Zermelo, partiendo de la definición de Conjunto Bien-Ordenado.

(5) El quinto libro es un estudio sobre les diferentes tipos de paradojas y antinomias que surgieron alrededor de la Teoría, aunque algunas de éstas no pertenecen necesariamente al campo de la Matemática.

(6) En el libro VI se intenta mostrar cuales han sido los diferentes medios que han propuesto los matemáticos y filósofos para resolver algunos de los problemas que provocaron un caos dentro de los Fundamentos de la Matemática a principios de siglo.

(7) Y, finalmente, se señalan algunas de las conclusiones que se pueden obtener a través del estudio de la Historia de la Teoría de Conjuntos, además se señalan algunos de los resultados más modernos que han influido notablemente en el desarrollo de la Teoría de Conjuntos.

No me queda más que agradecerles de la manera más sincera a los profesores Francisco Zubieta R. y Guillermo Torres D. sus innumerables consejos y correcciones.

¡El infinito! Ningún otro problema ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre.
David Hilbert.

LIBRO I.-

BOSQUEJO HISTORICO

Es en la escuela pitagórica, fundada en Crotona en la segunda mitad del siglo VI a.c., donde encontramos la primera crisis de la Matemática[1]. Esta escuela fundada por Pitágoras, "figura semilegendaria y semirreal"[2], se dedicó a estudios de tipo científico, filosófico y políticos.

Más que una escuela era una secta, pues todos los dogmas y enseñanzas se rodeaban de misterios y secretos. Es difícil averiguar cuales fueron las verdaderas contribuciones y aportaciones de los pitagóricos a la Matemática, pues los conocimientos se trasmitían de una forma oral y se le atribuían a Pitágoras.

Sin lugar a dudas su mayor aportación a la Matemática fue la demostración del hoy llamado "Teorema de Pitágoras"[3]. La crisis que mencionamos en el primer párrafo se generó, dentro de la secta pitagórica, con el 'descubrimiento' de los números irracionales al generalizar el famoso teorema. "El descubrimiento de los irracionales, esas cosas que no eran números, conmovió profundamente la escuela pitagórica; la secta impusó el secreto sobre ese escándalo y una leyenda cuenta que Hipaso, que desobedeció la orden, fue alcanzado por la ira de los dioses y pereció en un naufragio"[4].

Poco tiempo más tarde la Matemática sufriría un nuevo ataque por medio de Zenón de Elea (450 a.c. aprox. - ?) quien: "Desarrollando las doctrinas de Parménides, el jefe de la escuela eleática, descubre que el punto vulnerable del pitagórismo radica en la interpretación del cuerpo geométrico como pluralidad, y con sus famosas paradojas hace despertar el espíritu crítico de los matemáticos llamando la atención sobre las cuestiones en que interviene el concepto de infinito y, al substituir la doctrina geométrica de la pluralidad por la doctrina abstracta de la unidad, le da un significado simbólico de tendencia idealista que culmina después en Platón."(5)

Bertrand Russell afirma ser el primero en haber estudiado seriamente las paradojas de Zenón al hacer el siguiente comentario: "En este mundo caprichoso nada lo es más que la fama póstuma. Una de las víctimas más notables de la falta de juicio de la posteridad es el eleático Zenón. Habiendo inventado cuatro argumentos, todos inconmensurablemente sutiles y profundos, la grosería de los filósofos subsiguientes lo consideró como un mero impostor y juzgó a cada uno y a todos sus argumentos como sofismas."(6)

Las paradojas de Zenón son las siguientes:

(1) La Dicotomía.- Zenón argumentaba que no hay movimiento porque aquello que se mueve cualquier distancia debe llegar a la mitad de su curso antes de llegar al final; pero, antes de avanzar la mitad de su distancia, debió haber avanzado la mitad de esa mitad, y así 'ad infinitum'; de aquí que el movimiento no puede nunca empezar.

(2) Aquiles y la Tortuga.- Se afirma que Aquiles nunca alcanza a la tortuga, pues Aquiles deberá llegar primeramen-

te al punto donde empezó la tortuga, al llegar a este punto Aquiles, la tortuga deberá estar en otro más adelante, y así sucesivamente.

(3) La Flecha.- Una flecha que se mueve en un instante dado está en reposo o no está en reposo, es decir, se mueve. Si el instante es indivisible, la flecha no puede moverse, pues si lo hace el instante quedaría dividido inmediatamente. Pero el tiempo está constituido de instantes. Como la flecha no puede moverse en ningún instante, no podrá moverse en ningún momento. De aquí que siempre permanecerá en reposo. "Se ha considerado que ésta es una paradoja tan monstruosa que no merece siquiera discusión seria ..... Y veremos que es un lugar muy común muy importante y muy aplicable, a saber: 'Todo valor posible de una variable es una constante'."[7]

(4) El Estadio.- "La mitad del tiempo puede ser igual al doble del tiempo. Supongamos tres filas de cuerpos, una de las cuales (A) está en descanso mientras las otras dos (B,C) se mueven con igual velocidad en opuestas direcciones (fig 1). Por el tiempo en que todos están en la misma parte de la carrera, B habrá pasado dos veces tantos cuerpos en C como en A (fig 2).

Por tanto el tiempo que tarda en pasar C es dos veces mayor que el que tarda en pasar A. Pero el tiempo que B y C tardan en alcanzar la posición de A es el mismo. Por tanto, el doble del tiempo es igual a la mitad".[8]

```
A        . . . .
B  . . . . ——→
C        ←—— . . . .
     (fig 1)
```

```
A  . . . .
B  . . . .
C  . . . .
  (fig 2)
```

La rama que adquiriría una madurez insospechada sería la Geometría. Es con los "Elementos" de Euclides (300 a.c. - aprox.) cuando la geometría llega a su máximo esplendor. Es tan importante su influencia que el mismo Inmanuel Kant (1724-1804) basó sus estudios sobre la razón en el molde conceptual del geómetra alejandrino. Posteriormente veremos la influencia que tuvó Kant en el surgimiento de las diferentes escuelas filosóficas dentro de la Matemática.

Si tomamos los "Elementos" como la obra que representa las ideas de los griegos, vemos que ellos tenían el concepto de un espacio finito, aunque muy grande, o que podían pensar en un espacio infinito de una manera constructiva. Por ejemplo, en el segundo postulado de Euclides leemos: "Prolongar por continuidad en línea recta una recta delimitada".(9) En el famoso quinto postulado se lee: "Que, si una recta incidente sobre dos rectas, hace ángulos internos y de la misma parte menores que dos rectos, prolongadas esas dos rectas indefinidamente coincidirán por la parte en que estén los ángulos menores que dos ángulos rectos."(10) También en la definición 23 del libro I, Euclides menciona la misma idea, así como en muchas otras proposiciones.(11)

Si, como en el segundo postulado, Euclides menciona que la recta está delimitada es porque no está pensando en la recta como una totalidad ya dada. Pero no por ésto imposibilita a la recta de ser infinita, porque como menciona en el quinto postulado y en la definición 23, la recta puede ser prolongada indefinidamente.

Pero la Matemática Griega llevaba dentro de sí los elementos que la acabarían: la imaginación visual[12] y el interés tan importante que adquiere el sentido de la estética[13] hacen - que el desarrollo de la Matemática se frene.

Mientras caía la Matemática griega aparecía la Aritmética Indú, y es de aquí de donde surge el álgebra creada por los Arabes. La difusión del álgebra produce una verdadera revolución - que exalta la facultad creadora de los matemáticos, pero se produce una nueva crisis, pues la síntesis algebráico-lógica a que quedaba reducida la matemática ideal era innaplicable en la Física.

El problema del infinito no había sido olvidado por los hombres de ciencia.[14] Galileo Galilei (1564-1642) escribió - lo siguiente: "Esto de fijar un infinito como mayor que otro infinito es, en mi opinión, un concepto que nunca se podrá comprender de ningún modo."[15]

El diálogo entre 'Salvatius' y 'Sagredo' es de la - siguiente manera:

"Salvatius: Si pregunto que cuántos son los números cuadrados me puedes contestar en verdad que hay tantos como raíces cuadradas, porque cada cuadrado tiene su raíz, y cada raíz su cuadrado, y no hay ni un sólo cuadrado que tenga más de una raíz, ni una raíz que tenga más de un sólo cuadrado.

Sagredo: ¿Qué es lo que debe uno concluir bajo estas circunstancias?

Salvatius: No creo que quepa otra decisión que la - de decir que todos los números son infinitos, hay infinitos cuadrados y ni la multitud de cuadrados es más grande que la de todos - los números ni esta es mayor que aquélla, y, en conclusión, los atributos de 'igualdad', 'mayor que', o 'menor que' no tienen lugar entre los infinitos, sino tan sólo en las cantidades finitas".(16)

"En el ejemplo de Galileo todos (la clase) de los enteros cuadrados es equivalente a la clase de todos los enteros positivos."(17)

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & n & \cdots\cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1 & 4 & 9 & \cdots\cdots & n^2 & \cdots\cdots \end{array}$$

Es en 1637, con René Descartes (1596-1650), cuando nace propiamente la Geometría Analítica (aunque el nombre es muy posterior), ya que en uno de los ensayos ("La Geometría") que aparece en el "Discurso del Método para conducir bien la razón y buscar la verdad en las Ciencias, además: La Dióptrica, Los Meteoros y la Geometría; que son ensayos de ese método", es de donde surgen los fundamentos de la nueva rama matemática. Es en esta obra donde aparece por primera vez el uso de las primeras letras del alfabeto (a,b,c,.....) para los valores conocidos y las últimas (x,y,z,...) para los valores desconocidos, así también como el uso de los exponentes.

Descartes demuestra la posibilidad de determinar la recta tomando dos de sus puntos, y no simplemente el segmento que los une. Este hecho es fundamental pues cambia por completo el concepto de infinito. Al estar dada la recta entera nosotros no tenemos necesidad de prolongarla indefinidamente pues la tenemos determinada completamente, o sea, obtenemos un infinito actual.(18)

John Wallis (1616-1703) fue el primero en introducir el símbolo de infinito (∞) en la Matemática, ésto lo hizó en su obra más famosa "Arithmetica Infinitorum" (1655). Además fue el primero que se dedicó al estudio sistemático de las series.

Más tarde, cuando se crea el Cálculo Diferencial e Integral se abandona la concepción sintética y desaparece la unidad armoniosa de la Matemática que le habían dado Euclides a la Geometría y Descartes al Algebra.[19]

Guillermo Godofredo Leibniz (1646-1716), uno de los creadores del Cálculo, "se pregunta: ¿Qué hay más, números naturales 1,2,3,...,n,... ó números pares 2,4,6,..;2n,...? se asusta y afirma: 'El número de todos los números encierra una contradicción' y archiva el problema."[20]

Pocos años más tarde, en 1764, Voltaire decía: "Admitimos, en Geometría, no solamente magnitudes infinitas, es decir, magnitudes mayores que cualquier magnitud asignada, pero magnitudes infinitas infinitamente mayores una que la otra. Esto asombra nuestra dimensión de cerebros, el cual tiene cerca de seis pulgadas de largo, cinco de ancho, y seis de profundidad, en las cabezas más grandes."[21] Un poco más adelante dice: "Tenemos definido hábilmente el infinito en aritmética mediante un nudo de amor, de esta manera ∞; pero no poseemos por lo tanto una noción clara de él."[22]

Inmanuel Kant señaló en su "Introducción de la Crítica de la Razón Pura" que las proposiciones se dividen en Analíticas y Sintéticas, y estas últimas a su vez en 'a priori' y 'a posteriori'. Kant asegura que las proposiciones analíticas son aquellas cuya negación es contradictoria en sí, mientras que las sintéticas son aquellas que añaden algo nuevo a nuestro conocimiento, las a priori son condiciones necesarias de la posibilidad de la experiencia objetiva, mientras que las a porteriori dependen de la -

percepción sensible.

Ahora, Kant afirma que todas las proposiciones de la Matemática pura pertenecen a la clase intuitiva de las proposiciones sintéticas a priori, ésto debido a que: (1) son juicios sintéticos ya que al describir el espacio y el tiempo describimos entidades particulares, y (2) son a priori porque no describimos impresiones sensibles (al describir el espacio y el tiempo) sino las matrices permanentes e invariantes del espacio y el tiempo.

"La matemática pura tiene su objeto de estudio en la estructura del espacio y el tiempo, libre de material empírico. La matemática aplicada, en cambio, tiene su objeto de estudio en la estructura del espacio y el tiempo juntamente con el material que la llena."(23)

Mientras que con Augustin Louis Cauchy (1789-1857) el Análisis salía triunfante de su polémica con la Geometría Descriptiva renovando el concepto filosófico de continuidad e introduciendo (de nueva cuenta) el rigor en la Matemática; Johann Karl Friedrich Gauss (1777-1855) atacaba la idea del infinito 'actual' de la siguiente manera: "Protesto contra el uso de la magnitud infinita como una cosa completa, que jamás puede permitirse en Matemáticas. Infinito es simplemente una forma de hablar, y la verdadera significación es un límite al que ciertas razones se aproximan indefinidamente, mientras otras aumentan sin restricción."(24)

A través del desarrollo del presente trabajo nos hemos podido dar cuenta de los problemas internos (no todos) que llevaba dentro de sí la Matemática, debidos principalmente al concepto de infinito. Además, el fracaso de las especulaciones sobre el infinito actual y la aritmetización del Análisis crean dos disciplinas irreductibles al parecer: la Matemática de lo finito y de -

lo infinito, la de lo numerable y la del continuo, que corresponden a las condiciones históricas de la evolución del pensamiento matemático.

Es aquí cuando aparece el genio de un 'demente'en el contexto de nuestra historia con su 'Teoría de los Conjuntos': Georg Cantor (1845-1918). Quien contestaría a Gauss de la siguiente manera: "A pesar de la diferencia esencial entre los conceptos del infinito 'potencial' y 'actual' -el primero significa una magnitud finita 'variable', que aumenta más allá de todos los límites finitos, mientras el último es una magnitud 'constante', fija, más allá de todas las magnitudes finitas- ambas son con frecuencia confundidas."(25)

La esencia de la Matemática radica en su libertad.
Georg Cantor.

LIBRO II.-

¡ UN DEMENTE.....GEORG CANTOR !

Georg Ferdinand Ludwig Cantor nació el 3 de marzo de 1845 en la ciudad de San Petesburgo, Rusia. Los padres de Georg fueron: Georg Waldemar Cantor y María Bohm. Fue el mayor de su familia, sólo tuvó dos hermanos: Constantin y Sophie Nobiling.

La familia era cristiana, su padre protestante y su madre católica. Cantor, al igual que Leopold Kronecker (1823-1891), se inclinó por el protestantismo. Años más tarde los jesuitas se basarían en la Teoría de Conjuntos en sus intentos de dar nuevas demostraciones de la existencia de Dios y de algunos misterios de la religión. Cantor no solamente no contribuyó a estas ideas sino que las atacó de una manera formal.

El talento y precocidad matemática de Cantor fueron reconocidas antes de que éste cumpliera los quince años. Primeramente tomó clases particulares, pasando más tarde a la escuela elemental de San Petesburgo. Posteriormente, ya en Alemania, asistió a escuelas privadas en Francfort y Darmofadt y, a la edad de quince años ingresó en el Instituto de Wiesbaden (1860).

Su padre lo obligó a seguir los estudios de ingeniería, por ser una carrera más lucrativa, imposibilitando en un principio sus estudios en Matemática. Más tarde el padre cedería de su capricho permitiéndole la entrada a la Universidad de Zurich en -

1862. Al año siguiente murió su padre, y se cambió a la Universidad de Berlín.

En Berlín, Cantor se especializó en los estudios de Matemática, Filosofía y Física, aunque a esta última nunca se dedicó. Aquí sus maestros fueron Ernst Eduard Kummer (1810-1893), Karl Weiestrass (1815-1897) y Kronecker. Posteriormente pasó a otra Universidad y estuvó un semestre (1866) en Göttingen, el centro matemático más importante que ha habido en la Historia de la Matemática.

A los 22 años, Cantor publicó su primer trabajo individual y personal basado en una memoria de Gauss ("Disquisitiones Arithmeticae") donde había dejado un problema pendiente. El problema consistía en la solución en números enteros x,y,z, de la ecuación indeterminada

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

donde a,b,c son números enteros. Era una demostración completamente clásica, por lo que se ve el talento del matemático pero no su gran genio. Lo mismo se puede decir de todos sus trabajos hasta la edad de 29 años.

Cantor primeramente se dedicó a la teoría gausiana de números, posteriormente pasó al Análisis riguroso, en particular al estudio de las Teorías de las Series Trigonométricas. El estudio de los conceptos de continuidad, de límite y de convergencia lo llevaron al estudio exhaustivo de los fundamentos del análisis y de la filosofía del infinito.

La carrera académica de Cantor transcurrió en la Universidad de Halle[26] donde, en 1869, fue nombrado maestro Privatdozent[27]. En 1872 es nombrado profesor ayudante y antes de que su obra fuera atacada por la crítica es nombrado profesor ordinario (1879).

En 1874 publicó su primera memoria relacionada con la Teoría de Conjuntos. En esta memoria Cantor se reveló como un matemático creador y original debido a los métodos seguidos y a los resultados obtenidos. En esta memoria demostró la numerabilidad de los números algebráicos[28].

Cantor se casó en 1874 con Vally Guttman, tuvó dos hijos y cuatro hijas, de los cuales ninguno se dedicó a la Matemática.

En 1884, Cantor fue internado por primera vez en una clínica para enfermos mentales. Debido a su falta de carácter, a sus constantes momentos depresivos y al ataque incesante de sus contemporáneos, Cantor comenzó a dudar de su obra. Los ataques de Kronecker fueron tan constantes y faltos de misericordia que fue imposible para Cantor conseguir una plaza importante en la Universidad. Las visitas a la clínica se hicieron más constantes y prolongadas. Cantor, finalmente, solicitó al Departamento de Matemáticas de la Universidad su traslado al de Filosofía.

Richard Dedekind (1831-1916) simpatizó con Cantor porque la obra de ambos y sus consecuencias habían tomado caminos paralelos. También Charles Hermite (1822-1901) simpatizó con Cantor y así lo demuestra él en uno de sus escritos: "Los elogios que

Hermite me hace en su carta ..... respecto a la cuestión de la teoría de conjuntos son tan importantes en mi opinión, tan inmerecidos, que no me atrevo a publicarlos para no incurrir en el reproche de haber sido deslumbrado por ellos."[29]

Poco a poco su obra fue reconocida, recibió múltiples honores. Cantor y Kronecker habían logrado una reconciliación, aunque de una manera superficial, pocos años antes de que éste último muriera.

Finalmente, Cantor murió el 6 de enero de 1918, a la edad de 73 años, en la clínica psiquiátrica de Halle. Su obra solamente puede ser comparada, en importancia, a la de Isaac Newton (1643-1727) y Godofredo G. Leibniz (1646-1716).

"El concepto de infinito es nuestro mejor amigo; es también el mayor enemigo de nuestra paz mental. Weiestrass nos enseñó a creer que hemos al fin domado y domesticado completamente este elemento ingobernable. Sin embargo, no fue así; volvió a recobrar su libertad. Hilbert y Brouwer han venido a domesticarlo una vez mas. ¿Por cuanto tiempo? Deseamos saberlo."

James Pierpont.

LIBRO III.-

[481]

CONTRIBUCION A LA FUNDAMENTACION DE LOS NUMEROS TRANSFINITOS.-

(Primer Artículo).

§I

EL CONCEPTO DE POTENCIA O NUMERO CARDINAL.-

Por un agregado (menge) entendemos cualquier colección M dentro de un todo de objetos m determinados y bien distintos de nuestra percepción o nuestro pensamiento. Estos objetos son llamados los elementos de M.

En símbolos expresamos esto así:

(1) $$M = \{m\}^{(30)}$$

Denotamos la unión de muchos agregados M,N,P,...... los cuales no tienen elementos comunes, dentro de un agregado singular por

(2) $$(M,N,P,.....)^{(31)}.$$

Llamaremos con el nombre de 'parte' o 'agregado parcial' de un agregado M cualquier otro agregado M_1 cuyos elementos también son elementos de M.

Si M_2 es una parte de M_1 y M_1 es una parte de M, entonces M_2 es una parte de M.[32]

Todo agregado M tiene una 'potencia', la cual también llamaremos su 'número cardinal'.

Llamaremos con el nombre de 'potencia' ó 'número cardinal' de M el concepto general que, con ayuda de la actividad de nuestra inteligencia, surge del agregado M cuando hacemos abstracción de la naturaleza de sus elementos m y del orden en el cual están dados.

[482] Denotamos el resultado de este doble acto de abstracción, el número cardinal o potencia de M, por

$$\overline{\overline{M}}\ ^{(33)}. \tag{3}$$

Desde que cada elemento singular m, si nos abstraemos de su naturaleza, se convierte en una 'unidad', el número cardinal $\overline{\overline{M}}$ es un agregado definido compuesto de unidades, y este número tiene existencia en nuestra mente como una imagen intelectual o proyección de un agregado M dado.

Decimos que dos agregados M y N son 'equivalentes', en símbolos

$$M \sim N \quad ó \quad N \sim M,$$

si es posible ponerlos, por alguna regla, en una relación tal que a cada elemento de cada agregado corresponda uno y solamente un elemento del otro. A cada parte M_1 de M corresponde, entonces, una parte equivalente definida N_1 de N, e inversamente.[34]

Si tenemos tal regla de co-ordinación de dos agregados equivalentes, entonces aparte del caso en que cada uno de ellos consista solamente de un elemento, podemos modificar esta regla de muchas maneras. Podemos, por ejemplo, tomar siempre cuidado de un elemento especial m_o de M a su correspondiente elemento especial n_o de N. Por si, de acuerdo a la regla original, los elementos m_o y n_o no se corresponden, pero al elemento m_o de M corresponde el elemento n_1 de N, y al elemento n_o de N corresponde el elemento m_1 de M, tomamos la regla modificada de acuerdo a la cual m_o corresponde a n_o y m_1 a n_1 y para los otros elementos la regla original queda sin alterar. Por estos medios el fin se obtiene.(35)

Todo agregado es equivalente a sí mismo

(5) $$M \sim M.$$

Si dos agregados son equivalentes a un tercero, son equivalentes entre sí, es decir;

(6). de $M \sim P$ y $N \sim P$ se sigue $M \sim N$.(36)

De fundamental importancia es el teorema que dos agregados M y N tienen el mismo número cardinal si, y sólo si, son equivalentes; así,

(7) de $M \sim N$ obtenemos $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$

y

(8) de $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$ obtenemos $M \sim N$.

Así la equivalencia de agregados forma la condición necesaria y suficiente para la igualdad de sus números cardinales.(37)

[483] De hecho, de acuerdo a la definición anterior de potencia, el número cardinal $\overline{\overline{M}}$ queda sin alterar si en el lugar de cada uno, o muchos o aún todos los elementos m de M otras cosas

son substituidas. Si, ahora, $M \sim N$, existe una regla de co-ordinación mediante la cual M y N están referidos unívocamente y recíprocamente uno al otro; y por esto al elemento m de M corresponde el elemento n de N substituido, y, de esta forma, M se transforma en N sin alterar su número cardinal. Consecuentemente

$$\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}.$$

El converso del teorema resulta de la nota que entre los elementos de M y las diferentes unidades de su número cardinal $\overline{\overline{M}}$ una relación recíprocamente unívoca (o biunívoca) de correspondencia subsiste. Porque, como vemos, $\overline{\overline{M}}$ crece, por así decirlo, fuera de M de tal manera que de cada elemento m de M una unidad especial de M surge. Así podemos decir que

$$M \sim \overline{\overline{M}}. \tag{9}$$

De la misma manera $N \sim \overline{\overline{N}}$. Si entonces $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, tenemos, por (6),

$$M \sim N.$$

Mencionaremos el siguiente teorema, el cual resulta inmediatamente del concepto de equivalencia. Si M,N,P,... son agregados que no tienen elementos comunes, M',N',P',...... son también agregados con la misma propiedad, y si

$$M \sim M',\ N \sim N',\ P \sim P',\ .....$$

entonces siempre tenemos

$$(M,N,P,....) \sim (M',N',P',....).$$

§2

"MAYOR" Y "MENOR" CON POTENCIAS.-

Si para dos agregados M y N con los números cardinales $a = \overline{\overline{M}}$ y $b = \overline{\overline{N}}$, y ambas condiciones:

(a) No existe parte de M que sea equivalente a N,

(b) Existe una parte N_1 de N, tal que $N_1 \sim M$

se cumplen, es obvio que estas condiciones se siguen cumpliendo si en ellas son reemplazados, M y N, por dos agregados equivalentes, M' y N'. Así ellas expresan una relación definida de los números cardinales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ del uno al otro.

[484] Además, la equivalencia de M y N, y así la igualdad de $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$, es exclusiva, porque si tenemos $M \sim N$, tendremos, porque $N_1 \sim M$, la equivalencia $N_1 \sim N$, y entonces, porque $M \sim N$, debe existir una parte M_1 de M tal que $M_1 \sim M$, y por lo tanto debemos tener $M_1 \sim N$; y esto contradice la condición (a).

Terceramente, la relación de $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ es tal que hace imposible la misma relación de $\mathfrak{b}$ a $\mathfrak{a}$; porque si en (a) y (b) las partes jugadas por M y N son intercambiadas, dos condiciones surgen, las cuales son contradictorias a las ya formadas.

Expresamos la relación de $\mathfrak{a}$ en $\mathfrak{b}$ caracterizada por (a) y (b) diciendo: $\mathfrak{a}$ es "menor" que $\mathfrak{b}$ ó $\mathfrak{b}$ es "mayor" que $\mathfrak{a}$; en símbolos

(1) $$\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \text{ ó } \mathfrak{b} > \mathfrak{a}$$

Podemos probar fácilmente que

(2) Si $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ y $\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$, entonces siempre tenemos $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$.

Análogamente, de la definición, se sigue inmediatamente que, si P_1 es una parte de un agregado P, de $\mathfrak{a} < \overline{\overline{P}}_1$ se sigue $\mathfrak{a} < \overline{\overline{P}}$ y de $\overline{\overline{P}} < \mathfrak{b}$ se sigue $\overline{\overline{P}}_1 < \mathfrak{b}$.

Hemos visto que de estas tres relaciones

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\ ,\ \mathfrak{a} < \mathfrak{b}\ ,\ \mathfrak{b} < \mathfrak{a}$$

cada una excluye a las otras dos. Por otro lado, el teorema que, con cualesquiera dos números cardinales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$, una de esas tres relaciones debe realizarse necesariamenté, no es por su significado evidente por sí misma y difícilmente puede ser probada en este punto.

No hasta más tarde, cuando nosotros hayamos adelantado en el examen sobre las sucesiones ascedentes de los números cardinales transfinitos y una visión dentro de su conexión, resultará la verdad del teorema:

A.- Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son dos números cardinales cualesquiera, entonces ó $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, ó $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ ó $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$.

De este teorema los teoremas siguientes, de los cuales, como sea, no haremos uso aquí, pueden ser derivados simplemente.

B.- Si dos agregados M y N son tales que M es equivalente a una parte N_1 de N y N a una parte M_1 de M, entonces M y N son equivalentes;

C.- Si M_1 es una parte de un agregado M, M_2 es una parte del agregado M_1, y si los agregados M y M_2 son equivalentes, entonces M_1 es equivalente a ambos M y M_2;

D.- Si, con dos agregados M y N, N no es equivalente a M ni a una parte de M, existe una parte N_1 de N que es equivalente a M;

E.- Si dos agregados M y N no son equivalentes, y existe una parte N_1 de N que es equivalente a M, entonces ninguna parte de M es equivalente a N.

[485] §3

LA ADICION Y MULTIPLICACION CON POTENCIAS.-

La unión de dos agregados M y N que no tienen elementos comunes fue denotada en §1, (2) por (M,N). Lo llamamos el -

"agregado unión (vereinigungsmenge) de M y N".

Si M' y N' son otros dos agregados sin elementos comunes, y si $M \sim M'$ y $N \sim N'$, vemos que tenemos

$$(M,N) \sim (M',N').$$

De aquí que el número cardinal de (M,N) solamente depende de los números cardinales $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$ y $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$.

Esto nos lleva a la definición de la suma de $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$. Ponemos

$$(1) \qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \overline{\overline{(M,N)}}.$$

Desde que en el concepto de potencia hacemos abstracción del orden de los elementos, concluimos inmediatamente que

$$(2) \qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$$ (38)

y para tres números cardinales cualesquiera $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ tenemos

$$(3) \qquad \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}.$$ (39)

Llegamos ahora a la multiplicación. Cualquier elemento m de un agregado M puede ser pensado como ligado con cualquier elemento n de otro agregado N para así formar un nuevo elemento (m,n); denotamos por (M.N) el agregado de todas estas ligaduras (m,n) y lo llamamos el "agregado de ligaduras (verbindongsmenge) de M y N". Así

$$(4) \qquad (M.N) = \{(m,n)\}.$$

Vemos que la potencia de (M.N) solamente depende de las potencias $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$ y $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$; porque si reemplazamos los agregados M y N por los agregados

$$M' = \{m'\} \quad y \; N' = \{n'\}$$

respectivamente equivalentes a ellos y, consideramos m,m' y n,n' - como elementos correspondientes, entonces el agregado

$$(M'.N') = \{(m',n')\}$$

es llevado en una correspondencia recíproca y unívoca con (M.N) - guardando a (m,n) y (m',n') como elementos correspondientes. Así -

(5) $$(M'.N') \sim (M.N).$$

Definimos ahora el producto $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ por la ecuación

(6) $$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \overline{\overline{(M.N)}}.$$

[486] Un agregado con el número cardinal $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ puede ser compuesto a partir de los agregados M y N con los números cardinales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ de acuerdo a la siguiente regla: Comenzamos a partir del agregado N y reemplazamos en el cada elemento n por un agregado M_n M; si, entonces, reunimos los elementos de todos estos agregados M_n en un todo S, vemos que

(7) $$S \sim (M.N),$$

y consecuentemente

$$\overline{\overline{S}} = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}.$$

Porque, si, con cualquier regla dada la correspondencia de los dos agregados equivalentes M y M_n, denotamos por m el elemento de M - que corresponde al elemento m_n de M_n, tenemos

(8) $$S = \{m_n\};$$

y así los agregados S y (M.N) pueden ser referidos recíprocamente y unívocamente uno al otro tomando m_n y (m,n) como elementos correspondientes.

De nuestras definiciones resultan inmediatamente los teoremas

(9) $$a \cdot b = b \cdot a$$

(10) $$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

(11) $$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c;$$

porque

$$(M.N) \sim (N.M)$$

$$(M.(N.P)) \sim ((M.N).P)$$

$$(M.(N,P)) \sim ((M.N),(M.P).$$

La adición y multiplicación de potencias están sujetas, por lo tanto, a las leyes conmutativas, asociativas y distributivas.

§4

LA EXPONENCIACION DE POTENCIAS.-

Por un "cubrimiento de un agregado N con elementos del agregado M", ó, más simplemente, por un "cubrimiento de N con M", entendemos una regla mediante la cual cada elemento n de N está ligado a un elemento definido de M, donde uno y el mismo elemento de M puede venir repetidamente en la aplicación. El elemento de M ligado con n, es, de una forma, un valor de una función de n, y puede ser denotado por f(n); y es llamada una "función cubierta de n". La cubierta correspondiente de N será llamada f(N).

[487] Dos cubiertas $f_1(N)$ y $f_2(N)$ se dicen iguales si, y sólo si, para todos los elementos n de N la ecuación

(1) $$f_1(n) = f_2(n)$$

se cumple, de tal forma que si esta ecuación no subsiste aún para un elemento singular $n = n_o$, $f_1(N)$ y $f_2(N)$ son caracterizadas como cubrimientos diferentes de N. Por ejemplo, si m_o es un elemento particular de M, debemos hacer que, para todos los n's

$$f(n) = m_o;$$

esta regla constituye un cubrimiento particular de N con M. Otra clase de cubrimientos resulta si m_o y m_1 son dos elementos particulares distintos de M y n_o un elemento particular de N,

$$f(n_o) = m_o$$

$$f(n) = m_1,$$

para todos los n's que son diferentes de n_o.

La totalidad de cubiertas diferentes de N con M forma un agregado definido con los elementos f(N); lo llamamos el "agregado cubierta (belegunsmenge) de N con M", y lo denotamos por (N|M). Así:

(2) $$(N|M) = \{f(N)\}.$$

Si $M \sim M'$ y $N \sim N'$, encontramos fácilmente que

(3) $$(N|M) \sim (N'|M').$$

Así el número cardinal de (N|M) depende sólo de los cardinales $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$ y $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$; nos sirve para nuestra definición de $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$:

(4) $$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \overline{\overline{(N|M)}}.$$

Para cualesquiera tres agregados M,N,P, probamos fácilmente los teoremas

(5) $((N|M).(P|M)) \sim ((N,P)|M),$

(6) $((P|M).(P|N)) \sim (P|(M.N)),$

(7) $(P|(N|M)) \sim ((P.N)|M),$

de los cuales, si ponemos $\overline{\overline{P}} = \mathfrak{c}$, tenemos, por (4) y poniendo atención al §3, los teoremas para cualesquiera tres números cardinales $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$:

(8) $$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}$$

(9) $$\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} \cdot \mathfrak{b}^{\mathfrak{c}} = (\mathfrak{a}.\mathfrak{b})^{\mathfrak{c}}$$

(10) $$(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}.\mathfrak{c}}$$

[488] Vemos que tan profundas y enriquecedoras son estas simples fórmulas extendidas a potencias mediante el siguiente ejemplo. Si denotamos la potencia del continuo lineal X (o sea, la totalidad X de números reales tales que $0 \leq x \leq 1$) por $\mathfrak{c}$, vemos fácilmente que puede ser representada por, entre otras, la fórmula:

(11) $$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$$

donde el §6 da el significado de $\aleph_0$. De hecho, por (4), $2^{\aleph_0}$ es la potencia de todas las representaciones

(12) $$x = \frac{f(1)}{2} + \frac{f(2)}{2^2} + \dots + \frac{f(v)}{2^v} + \dots \text{ (donde } f(v) = 0 \text{ ó a } 1)$$

de los números x en el sistema binario. Si ponemos atención al hecho de que cada número x está representado una sola vez, con la excepción de los números $x = \frac{2v + 1}{2^v} < 1$, los cuales están representados dos veces, tenemos, si denotamos la totalidad "numerable" de aquel por $\{s_v\}$,

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{(\{s_v\}, X)}}.$$

Si sacamos de X cualquier agregado numerable $\{t_v\}$ y denotamos el restante por X_1, tenemos:

$$X = (\{t_v\}, X_1) = (\{t_{2v-1}\}, \{t_{2v}\}, X_1),$$

$$(\{s_v\}, X) = (\{s_v\}, \{t_v\}, X_1),$$

$$\{t_{2v-1}\} \sim \{s_v\},\ \{t_{2v}\} \sim \{t_v\},\ X_1 \sim X_1;$$

así que

$$X \sim (\{s_v\}, X),$$

y así (§1)

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{X}} = \mathfrak{c}.$$

De (11) se sigue elevando al cuadrado por §6, (6),

$$\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

y de aquí que, continuando la multiplicación por ,

(13) $$\mathfrak{c}^{v} = \mathfrak{c},$$

donde v es cualquier número cardinal finito.

Si alzamos ambos lados de (11) a la potencia $\aleph_0$ obtenemos

$$\mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0}$$

pero desde que, por el §6 (8), $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, tenemos

(14) $$\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

Las fórmulas (13) y (14) significan que la dimensión-v y la dimensión-$\aleph_0$ del continuo tienen la potencia de la dimensión-1 continua. Así el contenido completo de mi artículo en el Journal de Crelle, Vol LXXXIV, 1878, está derivado algebráicamente puro con estas pocas plumadas de las fórmulas fundamentales del cálculo con números cardinales.

[489] § 5

LOS NUMEROS CARDINALES FINITOS.-

Mostraremos ahora como los principios que hemos establecido, sobre los cuales construiremos más tarde la teoría del infinito o números cardinales transfinitos, proporcionando también la más natural, corta y rigurosa fundamentación de la teoría de los números finitos.

A una cosa singular e_o, si la subllamamos bajo el concepto de agregado $E_o = (e_o)$, corresponde a un número cardinal, al cual llamamos "uno" y lo denotamos por 1; tenemos

(1) $$1 = \overline{\overline{E}}_o.$$

Unamos ahora a E_o otra cosa e_1, y llamamos al conjunto unión E_1, tal que

(2) $$E_1 = (E_o, e_1) = (e_o, e_1).$$

El número cardinal de E_1 es llamado "dos" y está denotado por 2:

(3) $$2 = \overline{\overline{E}}_1.$$

Añadiendo nuevos elementos obtenemos la serie de agregados

$$E_2 = (E_1, e_2),\ E_3 = (E_2, e_3),\ \ldots\ldots$$

la cual nos da sucesivamente, una sucesión ilimitada, los otros así llamados "números cardinales finitos" denotados por 3,4,5,.... El uso que hemos hecho de estos números como sufijos está justificado por el hecho de que un número sólo puede ser usado como un sufijo cuando ha sido definido como un número cardinal. Tenemos, si por v-1 es entendido el número inmediatamente precedente de v en la serie anterior

(4) $$v = \overline{\overline{E}}_{v-1}$$

(5) $$E_v = (E_{v-1}, e_v) = (e_0, e_1, \ldots\ldots, e_v).$$

De la definición de la sume en el 3 se sigue

(6) $$\overline{\overline{E}}_v = \overline{\overline{E}}_{v-1} + 1$$

es decir, cada número cardinal excepto el 1, es la suma del inmediato predecesor y 1.(40)

Ahora, los siguientes teoremas vienen a caer en primer plano:

A.- Los términos de la serie ilimitada de números cardinales finitos

$$1, 2, 3, \ldots\ldots, v, \ldots\ldots$$

son todos diferentes uno del otro (es decir, la condición de equivalencia establecida en el §1 no se cumple para los agregados correspondientes).

[490] B.- Cada uno de estos números v es mayor que los que lo preceden y menor que los que le siguen (§2).

C.- No existen números cardinales que, en magnitud, caigan entre dos números consecutivos v y v+1 (§2).

Haremos la demostración de estos teoremas descansando sobre los dos siguientes, D y E. Debemos, entonces, en el próximo lugar, dar demostraciones rigurosas de los últimos teoremas.

D.- Si M es un agregado tal que tiene igualdad de potencia con ninguna de sus partes, entonces el agregado (M,e) el cual surge de M añadiéndole un elemento singular e, tiene la misma propiedad de ser de igual potencia con ninguna de sus partes.

E.- Si N es un agregado con el número cardinal finito v, y N_1 es cualquier parte de N, el número cardinal de N_1 es igual a uno de los números precedentes 1,2,3,.....,v-1.

Demostración del D.- Supongamos que el agregado -

(M,e) es equivalente a una de sus partes la cual llamaremos N. Entonces dos casos, ambos de los cuales caen en una contradicción, deben distinguirse:

(a).- El agregado N contiene a e como elemento; sea $N = (M_1,e)$; entonces M_1 es una parte de M porque N es una parte de (M,e). Como vimos en el §1, la regla de correspondencia de los dos agregados equivalentes (M,e) y (M_1,e) puede ser de tal forma modificada que el elemento e de uno corresponda al mismo elemento e del otro; por lo que, entonces, M y M_1 están referidos recíprocamente y unívocamente uno al otro. Pero ésto contradice la suposición que M no es equivalente a su parte M_1.

(b).- La parte N de (M,e) no contiene a e como elemento, de tal manera que N es ó M ó una parte de M. En la regla de correspondencia entre (M,e) y N, la cual cae en la base de nuestra hipótesis, al elemento e del primero permítase al elemento f del último corresponder. Sea $N = (M_1,f)$; entonces el agregado M es puesto en una relación recíprocamente unívoca con M_1. Pero M_1 es una parte de N y de aquí de M. De aquí que M debe ser equivalente a una de sus partes, y esto contradice nuestra hipótesis.

Demostración del E.- Supondremos la veracidad del teorema hasta cierta v, y entonces concluir su validez para el número $v+1$ el cual sigue inmediatamente, de la siguiente manera: Empezamos con el agregado $E_v = (e_0,e_1,e_2,\ldots\ldots,e_v)$ como un agregado con el número cardinal $v+1$. Si el teorema es cierto para este agregado, la veracidad para cualquier agregado con el mismo número cardinal $v+1$ se sigue inmediatamente de §1. Sea E' cualquier parte de E_v; distinguimos los siguientes casos:

(a).- E' no contiene a e_v como elemento, entonces E es E_{v-1} [491] ó una parte de E_{v-1}, y así tiene como número cardinal a v ó a uno de los números $1,2,3,\ldots\ldots,v-1$, porque supusimos nuestro teorema verdadero para el agregado E_{v-1}, con el número cardinal v.

(b).- E' consiste del elemento singular e_v, entonces $\overline{\overline{E}}' = 1$.

(c).- E' consiste de e_v y un conjunto E'', tal que $E' = (E'', e_v)$. E'' es una parte de E_{v-1} y tiene por lo tanto, por la hipótesis, como número cardinal a uno de los números 1,2,3,...... ..,v-1. Pero ahora $\overline{\overline{E}}' = \overline{\overline{E}}'' + 1$, y así el número cardinal de E' es uno de los números 2,3,3,......,v.

Demostración del A.- Cada uno de los agregados que hemos denotado por E_v tiene la propiedad de no ser equivalente a cualquiera de sus partes. Porque si suponemos que ésto es cierto para cierta v, se sigue del teorema D que ésto es de la misma forma para el número que le sigue inmediatamente v+1. Para v = 1, reconocemos inmediatamente que el agregado $E_1 = (e_o, e_1)$ no es equivalente a cualquiera de sus partes, las cuales son aquí (e_o) y (e_1). Consideremos, ahora, cualesquiera dos números u y v de la serie 1,2,3,.....; entonces, si u es el primero y v es el último, E_{u-1} es una parte de E_{v-1}. Así E_{u-1} y E_{v-1} no son equivalentes, y consecuentemente sus números cardinales $u = \overline{\overline{E}}_{u-1}$ y $v = \overline{\overline{E}}_{v-1}$ no son iguales.

Demostración del B.- Si de los dos números cardinales finitos u y v el primero es el anterior y el segundo es el último, entonces u < v. Para considerar los dos agregados $M = E_{u-1}$ y $N = E_{v-1}$; para ellos cada una de las condiciones en §2 para $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$ se cumplen. La condición (a) está cumplida porque, por el teorema E una parte de $M = E_{u-1}$ puede tener solamente uno de los números cardinales 1,2,3,......,u-1, y por lo tanto, por el teorema A, no puede ser equivalente al agregado $N = E_{v-1}$. La condición (b) se cumple porque M mismo es una parte de N.

Demostración del C.- Sea α un número cardinal menor que v+1. Debido a la condición (b) del §2, existe una parte de E_v con el número cardinal α. Por el teorema E, una parte de E_v solamente puede tener uno de los números cardinales 1,2,3,.....,v. Así α es igual a uno de los números cardinales 1,2,3,......,v. Por el teorema B, ninguno de éstos es mayor que v. Consecuentemente no existe un número cardinal el cual es menor que v+1 y mayor que v.

De importancia para lo que sigue es el siguiente teorema:

F.- Si K es cualquier agregado de diferentes números cardinales finitos, existe uno, k_1, entre ellos el cual es menor que el resto, y por lo tanto el menor de todos.

[492] Demostración.- El agregado K o contiene el número 1, en cuyo caso es el menor, $k_1 = 1$, o no lo contiene. En el último caso, sea J el agregado de todos aquellos números cardinales de nuestra serie 1,2,3,....., los cuales son menores que aquellos que existen en K. Si un número v pertenece a J, todos los números menores que v pertenecen a J. Pero J debe tener un elemento v_1 tal que $v_1 + 1$, y consecuentemente todos los números mayores no pertenecen a J, porque de otra manera J contendría todos los números finitos, puesto que los números pertenecientes a K no están contenidos en J. Así J es el segmento (Abschnitt) $(1,2,.....,v_1)$. El número $v_1 + 1 = k_1$ es necesariamente un elemento de K y menor que el resto.

De F concluimos:

G.- Todo conjunto $K = \{k\}$ de diferentes números cardinales finitos puede ser llevado a la forma de la serie

$$K = (k_1, k_2, k_3, ...)$$

tal que

$$k_1 < k_2 < k_3 < \ldots\ldots$$

§6

EL MENOR NUMERO CARDINAL TRANSFINITO ALEPH-CERO.-

Conjuntos con números cardinales finitos son llamados "conjuntos finitos", todos los otros los llamaremos "conjuntos transfinitos" y sus números cardinales "números cardinales transfinitos".

El primer ejemplo de un conjunto transfinito está dado por la totalidad de los números cardinales finitos v; llamaremos a su número cardinal (§1) "Aleph-Cero" y lo denotamos por $\aleph_0$; así definimos

$$(1) \qquad \aleph_0 = \overline{\overline{\{v\}}}.^{(41)}$$

Que $\aleph_0$ es un número cardinal transfinito, es decir, que no es igual a cualquier número finito u, se sigue del simple hecho que, si a un agregado $\{v\}$ es sumado un nuevo elemento e_0, el agregado-unión $(\{v\}, e_0)$ es equivalente al agregado original $\{v\}$. - Porque nosotros podemos pensar en una correspondencia recíprocamente unívoca entre ellos; al elemento e_0 del primero corresponde el elemento 1 del segundo, y al elemento v del primero corresponde el elemento v+1 del otro. Por el §3 tenemos así

$$(2) \qquad \aleph_0 + 1 = \aleph_0.$$

Pero mostramos en el §5 que u+1 es siempre diferente de u, y por lo tanto $\aleph_0$ no es igual a cualquier número finito u.

$$(3) \qquad \aleph_0 > u$$

[493] Esto se sigue, si ponemos atención al §3, de los tres hechos que $u = \overline{\overline{(1,2,3,\ldots\ldots,u)}}$, que no existe parte del agregado $(1,2,3,\ldots\ldots,u)$ que sea equivalente al agregado $\{v\}$, y que $(1,2,3,\ldots\ldots,u)$ es él mismo una parte de $\{v\}$.(42)

Por otro lado, $\aleph_0$ es el menor de los números cardinales transfinitos. Si $\mathfrak{a}$ es cualquier número cardinal transfinito diferente de $\aleph_0$, entonces

$$(4) \qquad \aleph_0 < \mathfrak{a}.$$

Esto descansa en los teoremas siguientes:

A.- Cualquier agregado transfinito T tiene partes con el número cardinal $\aleph_0$.

Demostración.- Si, mediante cualquier regla, hemos sacado un número finito de elementos $t_1, t_2, \ldots\ldots, t_{v-1}$, queda siempre la posibilidad de sacar un elemento posterior t_v. El agregado $\{t_v\}$, donde v denota cualquier número cardinal finito, es una parte de T con el número cardinal $\aleph_0$, porque $\{t_v\} \sim \{v\}$ (§1).

B.- Si S es un agregado transfinito con el número cardinal $\aleph_0$, y S_1 es cualquier parte transfinita de S, entonces, $\overline{\overline{S_1}} = \aleph_0$.

Demostración.- Hemos supuesto que $S \sim \{v\}$. Escójase una regla de correspondencia definida entre estos dos agregados, y, con ésta regla, denótese por s_v aquel elemento de S que corresponde al elemento v de $\{v\}$ tal que,

$$S = \{s_v\}.$$

La parte S_1 de S consiste de ciertos elementos s_k de S, y la totalidad de números k forma una parte transfinita K del agregado $\{v\}$. Por el teorema G del §5 el agregado K puede ser llevado a la forma de una serie

$$K = \{k_v\},$$

donde

$$k_v < k_{v+1};$$

consecuentemente tenemos

$$S_1 = \{s_{k_v}\}.$$

De aquí se sigue que $S_1 \sim S$, y por lo tanto $\overline{\overline{S_1}} = \aleph_0$.

De A y B resulta la fórmula (4), si hemos observado el § 2.[43]

De (2) concluimos, añadiendo 1 a ambos lados,

$$\aleph_0 + 2 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0$$

y, repitiendo esto

$$\aleph_0 + v = \aleph_0. \tag{5}$$

También tenemos

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0. \tag{6}$$

[494] Para, por (1) del § 3, $\aleph_0 + \aleph_0$ es el número cardinal de $\overline{\overline{(\{a_v\},\{b_v\})}}$ porque

$$\overline{\overline{\{a_v\}}} = \overline{\overline{\{b_v\}}} = \aleph_0 .$$

Ahora, obviamente

$$\{v\} = (\{2v-1\},\{2v\}),$$

$$(\{2v-1\},\{2v\}) \sim (\{a_v\},\{b_v\}),$$

y por lo tanto

$$\overline{\overline{(\{a_v\},\{b_v\})}} = \overline{\overline{\{v\}}} = \aleph_0.$$

La ecuación (6) también puede ser escrita

$$\aleph_0 \cdot 2 = \aleph_0;$$

y, añadiendo $\aleph_0$ repetidamente a ambos lados, encontramos que

(7) $$\aleph_0 \cdot v = v \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

También tenemos

(8) $$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

Demostración.- Por (6) del §3, $\aleph_0 \cdot \aleph_0$ es el número cardinal del agregado de ligaduras

$$\{(u,v)\},$$

donde u y v son cualesquiera números cardinales finitos los cuales son independientes uno del otro. Si λ también representa cualquier número cardinal finito, tal que $\{\lambda\}$, $\{u\}$, y $\{v\}$ son diferentes notaciones solamente para el mismo agregado de todos los números finitos, tenemos que mostrar que

$$\{(u,v)\} \sim \{\lambda\}.$$

Denotemos u+v por ρ; entonces ρ toma todos los valores numéricos 2,3,4,......, y existen (u,v) en todos los elementos $\rho-1$ para los cuales $u+v = \rho$, llamémosle:

$$(1, \rho-1), (2, \rho-2), \ldots\ldots, (\rho-1, 1).$$

En esta sucesión imagine primero el elemento (1,1), para el cual $\rho = 2$, ponga, entonces los dos elementos para los cuales $\rho = 3$, entonces los tres elementos para los cuales $\rho = 4$, y así en adelante. Por lo que obtenemos todos los elementos (u,v) en una sucesión simple

$$(1,1);\ (1,2),(2,1);\ (1,3),(2,2),(3,1);\ (1,4),(2,3),\ldots\ldots$$

y aquí, como fácilmente vemos, el elemento (u,v) viene en el λ-ésimo lugar donde

(9) $$\lambda = u + \frac{(u+v-1)\ (u+v-2)}{2}$$

la variable λ toma todos los valores numéricos 1,2,3,....., una so la vez. Consecuentemente, por el significado de (9), subsiste una relación recíprocamente unívoca entre los agregados $\{v\}$ y $\{(u,v)\}$.

[495] Si ambos lados de la ecuación (8) son multiplicados por $\aleph_0$, obtenemos $\aleph_0^3 = \aleph_0^2 = \aleph_0$, y, mediante multiplicaciones repetidas por $\aleph_0$, obtenemos la ecuación, válida para todo número cardinal finito v:

$$\aleph_0^{v} = \aleph_0. \tag{10}$$

Los teoremas E y A del §5 nos llevan a este teorema sobre agregados finitos:

C.- Todo agregado finito E es tal que es equivalente a ninguna de sus partes.

Este teorema sostiene fuerte oposición al siguiente sobre agregados infinitos:

D.- Todo agregado transfinito T es tal que tiene partes T_1 que son equivalentes a él.

Demostración.- Por el teorema A de este parágrafo existe una parte $S = \{t_v\}$ de T con el número cardinal $\aleph_0$. Sea $T = (S,U)$, tal que U está compuesto de aquellos elementos de T que son diferentes de los elementos t_v. Pongamos $S_1 = \{t_{v+1}\}$, $T_1 = (S_1,U)$; entonces T_1 es una parte de T, y, de hecho, aquella parte que surge fuera de T si dejamos fuera el elemento singular t_1. Desde que $S \sim S_1$, por el teorema B de este parágrafo, y $U \sim U$, tenemos, por el §1, $T \sim T_1$.

En estos teoremas C y D la diferencia esencial entre conjuntos finitos y transfinitos, a la cual me refería en el año de 1877, en el volumen LXXXIV [1878] del Journal de Crelle, 242 pp., aparece en su forma más clara.

Después de haber introducido el menor número cardinal transfinito $\aleph_0$ y derivado sus propiedades que caen a primera mano, la cuestión surge hasta los números cardinales mayores y como provienen de $\aleph_0$. Debemos mostrar que los números cardinales transfinitos pueden ser arreglados de acuerdo a sus magnitudes, y, en este orden, formar como los números finitos, un "agregado bien-ordenado" en el sentido extendido de las palabras. Con exepción de $\aleph_0$, por una regla definida, el número cardinal próximo mayor $\aleph_1$, sale de éste mediante la misma regla el siguiente mayor $\aleph_2$, y así en adelante. Pero aún la sucesión ilimitada de números cardinales

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots\ldots, \aleph_\nu, \ldots\ldots$$

no agota el concepto de número cardinal transfinito. Demostraremos la existencia de un número cardinal el cual denotamos mediante $\aleph_\omega$ y que demuestra él mismo ser el siguiente mayor a todos los números $\aleph_\nu$; sacado del procedimiento de la misma manera como $\aleph_1$ sale de $\aleph$ un próximo mayor $\aleph_{\omega+1}$, y así en adelante, sin fin.

[496] Para cada número cardinal transfinito $\mathfrak{a}$ existe un próximo mayor procediendo fuera de él de acuerdo a una regla unitaria, y también para todo agregado bien-ordenado creciendo ilimitadamente de números cardinales transfinitos, $\{\mathfrak{a}\}$, existe uno mayor que le sigue procediendo fuera de aquel agregado de una forma única.(44)

Para la fundación rigurosa de esta materia, descubierta en 1882 y expuesta en el panfleto Grundlagen einer allgemeinen mannichfaltigkeitslehre (Leipzig, 1883) y en el volumen XXI del Mathematische Annalen, hacemos uso de los así llamados "tipos de orden" cuya teoría tenemos que poner fuera en los siguientes parágrafos.

§ 7

LOS TIPOS DE ORDEN DE AGREGADOS SIMPLEMENTE ORDENADOS.-

Llamamos un agregado M "simplemente ordenado" si una regla definida de "orden de precedencia" sobre sus elementos m, tal que, de cada dos elementos m_1 y m_2, uno toma el "menor" y el otro el "mayor" rango, y tal que, si de tres elementos m_1, m_2 y m_3, m_1 digamos, es de menor rango que m_2, y m_2 es de menor rango que m_3, entonces m_1 es de menor rango que m_3.

La relación de dos elementos m_1 y m_2, en la cual m_1 tiene el menor rango en el orden de precedencia dado y m_2 el mayor, se expresa por la fórmula:

$$(1) \qquad m_1 < m_2 \qquad m_2 > m_1.$$ (45)

Así, por ejemplo, todo agregado P de puntos definidos sobre una línea recta es un agregado simplemente ordenado si, para cada dos puntos p_1 y p_2 pertenecientes a ella, aquel cuya ordenada (han sido fijados un origen y una dirección positiva) es la menor se le da el menor rango.

Es evidente que uno y el mismo conjunto pueden ser "simplemente ordenados" de acuerdo a reglas muy diferentes. Así, por ejemplo, con el conjunto R de todos los números racionales positivos p/q (donde p y q son primos relativos enteros) los cuales son mayores que cero y menores que uno, existe, primeramente, su orden "natural" de acuerdo a su magnitud; entonces ellos pueden ser arreglados (y en este orden denotaremos al conjunto por R_0) tal que, de dos números p_1/q_1 y p_2/q_2 para los cuales las sumas p_1+q_1 y p_2+q_2 tienen diferentes valores, el número para el cual la suma correspondiente es menor toma el menor rango, y, si

$$p_1+q_1 = p_2+q_2,$$

entonces el más pequeño de los dos números racionales es el menor. [497] En este orden de precedencia, nuestro agregado, desde que a uno y el mismo valor de p+q pertenece solamente a un número finito de números racionales p/q, evidentemente tiene la forma

$$R_0 = (r_1, r_2, \ldots\ldots, r_n, \ldots\ldots) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \ldots\ldots\right)$$

donde

$$r_v \prec r_{v+1}.$$

Siempre, entonces, cuando nosotros hablamos de un agregado M "simplemente ordenado", nosotros imaginamos acostado un orden definido de precedencia de sus elementos, en el sentido expuesto arriba.

Existen agregados ordenados doblemente, terceramente, v-mente y α-mente, pero para el presente no los consideraremos. Así que en lo que sigue usaremos la expresión más corta "agregado ordenado" cuando pensamos en "agregados simplemente-ordenados."

Cada agregado ordenado M tiene un "tipo ordinal" definido, o más cortamente un "tipo" definido, el cual denotamos por

(2) $$\overline{M}.$$

Por esto entendemos el concepto general que resulta de M si nos abstraemos solamente de la naturaleza de los elementos m, y retenemos el orden de precedencia entre ellos. Así el tipo ordinal $\overline{M}$ es él mismo un agregado-ordenado cuyos elementos son unidades las cuales tienen el mismo orden de precedencia entre cada una de ellas como los elementos correspondientes de M, de los cuales ellas son derivadas por abstracción.

Llamamos a dos agregados-ordenados M y N "similares" (ähnlich) si ellos pueden ser puestos en una correspondencia biunívoca uno al otro de tal manera que, si m_1 y m_2 son cualesquiera dos elementos de M y n_1 y n_2 los correspondientes elementos de N, entonces la relación de rango de m_1 a m_2 en M es la misma como aquella de n_1 a n_2 en N. Una correspondencia tal de conjuntos similares la llamamos una "imaginación"(46) (abblidung) de estos agregados uno sobre otro. En una "imaginación" tal, a cada parte -la cual obviamente sólo aparece como un agregado-ordenado- M_1 de M corresponde una parte similar N_1 de N.

Expresamos la similaridad de dos agregados M y N por la fórmula

$$M \simeq N. \tag{3}$$

Todo agregado es similar a sí mismo.

Si dos agregados-ordenados son similares a un tercero, ellos son similares entre sí.

[498] Una consideración simple muestra que dos agregados-ordenados tienen el mismo tipo ordinal si, y sólo si, son similares; de tal forma que de las fórmulas

$$\overline{M} = \overline{N} \text{ y } M \simeq N \tag{4}$$

una es siempre consecuencia de la otra.

Si, con el tipo ordinal $\overline{M}$ abstraemos el orden de precedencia de sus elementos, obtenemos (§1) el número cardinal $\overline{\overline{M}}$ del agregado-ordenado M, el cual es, al mismo tiempo, el número cardinal del tipo ordinal. De $\overline{M} = \overline{N}$ siempre se sigue $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, es decir, agregados-ordenados de tipos iguales siempre tienen la misma poten cia o número cardinal; de la similaridad de agregados-ordenados se sigue su equivalencia. Por otro lado, dos agregados pueden ser e-- quivalentes sin ser similares.

Usaremos las letras minúsculas del alfabeto griego para denotar tipos ordinales. Si α es un tipo ordinal, entendemos por

$$(5) \qquad \overline{\alpha}$$

su correspondiente número cardinal.[47]

Los tipos ordinales de agregados-ordenados finitos no ofrecen interés especial. Para ésto nos convencemos fácilmente que, para uno y él mismo número cardinal finito v, todos los agregados simplemente-ordenados son similares uno a otro, y así tienen uno y el mismo tipo. Así los tipos ordinales simples finitos están sujetos a las mismas leyes que los números cardinales finitos y está permitido usar los mismos símbolos 1,2,3,4,......,v,..... para ellos, aunque son conceptualmente diferentes a los números cardinales. El caso es totalmente diferente con los tipos ordinales transfinitos; porque para uno y el mismo número cardinal pertenecen una innumerabilidad de tipos diferentes de agregados simplemente-ordenados, los cuales, en su totalidad, constituyen una "clase de ti-- pos" (typenclasse) particular. Cada una de estas clases de tipos - está, por lo tanto, determinada por el número cardianl transfinito $\mathfrak{a}$ el cual es común a todos los tipos pertenecientes a la clase. Así lo llamamos pro brevedad la clase de tipos $[\mathfrak{a}]$. Aquella clase - que se presenta naturalmente primero a nosotros, y cuya completa - investigación debe, por consiguiente, ser el próximo objetivo especial de la Teoría de Conjuntos Transfinitos, es la clase de tipos $[\aleph_0]$ la cual abarca todos los tipos con el menor de los números -

cardinales transfinitos $\aleph$. A partir del número cardinal que DETERMINA la clase de tipos $[\alpha]$ tenemos que distinguir el número cardinal α' el cual por su parte [499] ESTA DETERMINADO POR la clase de tipos $[\alpha]$. El último es el número cardinal que (§1) la clase $[\alpha]$ tiene, en cuanto representa un agregado-ordenado definido cuyos elementos son todos los tipos α con el número cardinal α. Veremos que α' es diferente de α, y desde luego siempre mayor que α.

Si en un agregado-ordenado M todas las relaciones de precedencia de sus elementos están invertidas, de tal forma que "menor" se vuelve "mayor" y "mayor" se vuelve "menor" en todas partes, obtenemos de nuevo un agregado-ordenado, el cual denotamos por

$$(6) \qquad {}^{*}M$$

y llamado el "inverso" de M. Denotamos el tipo ordinal de M, si $\alpha = \overline{M}$, por

$$(7) \qquad {}^{*}\alpha.$$ (48)

Puede suceder que ${}^{*}\alpha = \alpha$, como, por ejemplo, en el caso de tipos finitos o en aquel del tipo del agregado de todos los números racionales que son mayores que cero y menores que uno en su orden natural de precedencia. Este tipo lo investigaremos bajo la notación η.

Remaracaremos más adelante que dos agregados-ordenados similares pueden ser imaginados uno sobre otro o en una manera o en muchas maneras; en el primer caso el tipo en cuestión es similar a él mismo en una manera solamente, en el segundo caso en muchas maneras. No solamente todos los tipos finitos, sin embargo los tipos de conjuntos bien-ordenados transfinitos, de los cuales nos ocuparemos más tarde y los cuales llamamos "números ordinales transfinitos", son tales que ellos permiten una imagen singular sobre ellos mismos. Por otro lado, el tipo η es similar a sí mismo - en una infinidad de maneras.

Haremos clara esta diferencia mediante dos ejemplos simples. Por w entendemos el tipo del agregado bien-ordenado

$$(e_1, e_2, \ldots\ldots, e_v, \ldots\ldots),$$

en el cual

$$e_v \prec e_{v+1},$$

y donde v representa todos los números cardinales finitos en turno. Otro agregado bien-ordenado

$$(f_1, f_2, \ldots\ldots, f_v, \ldots\ldots)$$

con la condición

$$f_v \prec f_{v+1},$$

del mismo tipo w obviamente solamente puede ser imaginado en el - formado de tal manera que e_v y f_v son elementos correspondientes. Para e_1, el elemento menor en rango del primero, debe, en el proceso de imaginar, ser correlacionado al menor elemento f_1 del segundo, el próximo después de e_1 en rango (e_2) a f_2, el próximo después de f_1, y así en adelante. [500] Toda otra correspondencia biunívoca de dos conjuntos equivalentes $\{e_v\}$ y $\{f_v\}$ no es una "imaginación" en el sentido que la hemos compuesto arriba para la teoría de tipos.

Por otro lado, tomemos un agregado ordenado de la - forma

$$\{e_v\},$$

donde v representa todos los enteros finitos positivos y negativos, incluyendo el cero, y donde del mismo modo

$$e_v \prec e_{v+1}.$$

Este conjunto no tiene elemento menor ni mayor en rango. Su tipo es, por la definición dada en el § 8,

$$^*w + w.$$

Es similar a él mismo en una infinidad de maneras. Consideremos un conjunto del mismo tipo

$$\{f'_v\},$$

donde

$$f'_v \prec f'_{v+1}.$$

Entonces los dos agregados ordenados pueden ser imaginados uno sobre otro de tal forma que, si entendemos por v'_0 un elemento definido de los números v', el elemento e_v, del primero corresponde al elemento $f_{v'_0+v'}$ del segundo. Desde que v'_0 es arbitrario, tenemos aquí una infinidad de imágenes.

El concepto de "tipo ordinal" desarrollado aquí, cuando es transferido de manera semejante a "conjuntos ordenados multiplicados", contiene, en conjunción con el concepto de "número cardinal" o "potencia" introducido en el §1, toda cosa capaz de ser numerada (anzahlmässige) que es pensable, y en este sentido no puede ser generalizada más allá. No contiene nada arbitrario, sin emabrgo es la extensión natural del concepto de número. Merece ser enfatizado especialmente que el criterio de igualdad (4) se sigue con necesidad absoluta del concepto de tipo ordinal y consecuentemente no permite alteración. La causa más importante del gran error de G. Veronese en "Grundzüge der Geometrie" (Alemán por A. -Sheep, Leipzig, 1894) es el no reconocimiento de este punto.

En la página 30 el "número (anzahl oder zahl) de un grupo ordenado" está definido del mismo modo como aquel que hemos llamado el "tipo ordinal de un agregado simplemente ordenado" (zur lehre vom transfiniten, Halle, 1890, pp 68-75; reimpreso de la zeitschr. für Philos. und Philos. Kritik de 1887). [501] Sin embargo, Veronese piensa que el debe hacer una adición al criterio de igualdad. El dice en la página 31: "Números cuyas unidades corresponden uno a otro únicamente y en el mismo orden en los cuales el primero no es una parte del otro o igual a una parte del otro son iguales". La definición de igualdad contiene un círculo y así es sin sentido. ¿Cuál es el significado de "no igual a una parte del otro en esta adición? Para contestar esta pregunta, debemos saber primero cuando dos números son iguales o desiguales. Así, a parte de la arbitrariedad de su definición de igual, presupone una definición de igualdad, y esta de nuevo presupone una definición de igualdad, en la cual debemos saber de nuevo que son iguales o desiguales, y así sucesivamente AD INFINITUM. Después que Veronese, por así decirlo, ha dado por su propia voluntad reconocimiento a la fundamentación indispensable para la comparación de números, no debemos estar sorprendidos, con el desorden con el cual, más tarde, él opera con sus números pseudotransfinitos, y les atribuye propiedades las cuales ellos no pueden poseer simplemente porque ellos mismos, en la forma imaginada por él, no tienen existencia exepto sobre el papel. De esta manera, también la similaridad extraordinaria entre sus "números" a los muy absurdos "números infinitos" de Fontenelle en su "Géométrie de l'infini" (París, 1727) llega a ser comprensible.

Recientemente, W. Killing ha dado la expresión de bienvenida a sus dudas concernientes a la fundamentación del libro de Veronese en el "Index Lectionum" de la Academia de Münster de 1895-1896.(49)

§ 8

SUMA Y MULTIPLICACION DE LOS TIPOS DE ORDEN.-

El agregado unión (M,N) de dos agregados M y N puede, si M y N están ordenados, ser concebido como un agregado ordenado en el cual las relaciones de precedencia de los elementos de M entre ellos mismos así como las relaciones de precedencia de los elementos de N entre ellos mismos queden igual como en M y N respectivamente, y todos los elementos de M tienen menor rango que todos los elementos de N. Si M' y N' son otros dos agregados ordenados, $M \simeq M'$ y $N \simeq N'$, [502] entonces $(M,N) \simeq (M',N')$; así el tipo ordinal de (M,N) depende solamente de los tipos ordinales $\overline{M} = \alpha$ y $\overline{N} = \beta$. De esta manera definimos

$$(1) \qquad \alpha + \beta = \overline{(M,N)} \quad (50)$$

En la suma $\alpha + \beta$ llamamos a α el "sumando" y β el "sumador".

Para tres tipos cualesquiera probamos fácilmente la ley asociativa:

$$(2) \qquad \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Por otro lado, la ley conmutativa no es válida, en general, para la adición de tipos. Vemos esto mediante el siguiente ejemplo simple:

Si w es el tipo, ya mencionado en el § 7, del conjunto bien-ordenado

$$E = (e_0, e_1, \ldots\ldots, e_v, \ldots\ldots), \qquad e_v < e_{v+1},$$

entonces 1+w no es igual a w+1. Porque si f es un nuevo elemento, tenemos por (1):

$$1+w = \overline{(f,E)}$$

$$w+1 = \overline{(E,f)}.$$

Pero el agregado

$$(f,E) = (f, e_0, e_1, \ldots\ldots, e_v, \ldots\ldots)$$

es similar al conjunto E, y consecuentemente

$$1+w = w.$$

Por el contrario, los agregados E y (E,f) no son similares, porque el primero no tiene un elemento que sea el mayor en rango, pero el segundo tiene el término mayor f. De esta manera w+1 es diferente de w = 1+w.[51]

Fuera de los dos agregados ordenados M y N con los tipos α y β podemos levantar un agregado ordenado S sustituyendo - cada elemento n de N por un agregado ordenado M_n el cual tiene el mismo tipo α de M, de modo que

$$(3) \qquad \overline{M}_n = \alpha;$$

y, para el orden de precedencia en

$$(4) \qquad S = \{M_n\}$$

hacemos las dos reglas:

(1) Cada dos elementos de S los cuales pertenecen a uno y al mismo agregado M_n retienen en S el mismo orden de precedencia como en M_n;

(2) Cada dos elementos de S que pertenecen a dos agregados diferentes M_{n_1} y M_{n_2} tienen la misma relación de precedencia como n_1 y n_2 tienen en N.

El tipo ordinal de S depende, como vemos fácilmente, solamente de los tipos α y β; definimos

$$(5) \qquad \alpha \cdot \beta = \overline{S}.$$

[503] En este producto α es llamado el "multiplicando" y β el "multiplicador".

En cualquier imagen definida de M sobre M_n sea m_n el elemento de M_n que corresponde al elemento m de M: entonces también podemos escribir

$$(6) \qquad S = \{m_n\}.$$

Considerese un tercer agregado $P = \{p\}$ con el tipo ordinal $\overline{P} = \gamma$, entonces por (5),

$$\alpha \cdot \beta = \{\overline{m_n}\} \;, \; \beta \cdot \gamma = \{\overline{n_p}\}, \; (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \{\overline{(m_n)_p}\},$$

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \{\overline{m_{(n_p)}}\}.$$

Pero los dos agregados ordenados $\{(m_n)_p\}$ y $\{m_{(n_p)}\}$ son similares, y están imaginados uno sobre otro si observamos los elementos $(m_n)_p$ y $m_{(n_p)}$ como correspondiéndose. Consecuentemente, para tres tipos α, β y γ la ley asociativa

$$(7) \qquad (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$$

subsiste. De (1) y (5) se sigue fácilmente la ley distributiva

$$(8) \qquad \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma;$$

pero en esta forma solamente, donde el factor de dos términos es el multiplicador.

Por el contrario, en la multiplicación como en la adición, la ley conmutativa no es generalmente válida. Por ejemplo, $2 \cdot w$ y $w \cdot 2$ son tipos diferentes; porque, por (5),

$$2 \cdot w = \overline{(e_1, f_1; e_2, f_2; \ldots\ldots; e_v, f_v; \ldots\ldots)} = w$$

mientras que

$$w \cdot 2 = \overline{(e_1, e_2, \ldots\ldots, e_v, \ldots\ldots; f_1, f_2, \ldots\ldots, f_v, \ldots\ldots)}$$

es diferente de w obviamente.[52]

Si nosotros comparamos las definiciones de las operaciones elementales para los números cardinales, dadas en el §3, con aquellas establecidas aquí para tipos ordinales, fácilmente vemos que el número cardinal de la suma de dos tipos es igual a la suma de los números cardinales de los tipos singulares, y que el número cardinal del producto de dos tipos es igual al producto de los números cardinales de los tipos singulares. Cada ecuación entre tipos ordinales que procede de las dos operaciones elementales permanece correcta, por lo tanto, podemos reemplazar en ellas todos los tipos por sus números cardinales.[53]

[504] §9

EL TIPO ORDINAL η DEL AGREGADO R DE TODOS LOS NUMEROS RACIONALES QUE SON MAYORES QUE CERO Y MENORES QUE UNO, EN SU ORDEN NATURAL DE PRECEDENCIA.-

Por **R** entendemos, como en el §7, el sistema de todos los números racionales p/q (siendo p y q primos relativos) los cuales son >0 y <1, en su orden natural de precedencia, donde la magnitud de un número determina su rango. Denotamos el tipo ordinal de **R** por η:

(1) $$\eta = \overline{\mathbf{R}}.$$

entonces el tipo ordinal de M es η:

$$\overline{M} = \eta.$$

Demostración.- A causa de la condición (a), M puede ser llevado - dentro de la forma [505] de un agregado bien-ordenado de tipo w: - teniendo arreglada tal forma, lo denotamos por M_0 y ponemos

$$(5) \qquad M_0 = (m_1, m_2, \ldots\ldots, m_v, \ldots\ldots).$$

Tenemos ahora que demostrar que

$$(6) \qquad M \simeq R;$$

es decir, debemos probar que M puede ser imaginado sobre R de tal forma que la relación de precedencia de todos y cualesquiera dos e lementos en M es la misma que aquella de los dos elementos correspondientes en R.

Sea el elemento r_1 en R correlacionado al elemento m_1 de M. El elemento r_2 tiene una relación de precedencia a r_1 en R. A causa de la condición (b), existen una infinidad de elementos m_v de M que tienen la misma relación de precedencia en M a m_1 como r_2 a r_1 en R; de ellos escogemos aquel que tenga el índice menor - en M_0, sea este m_{1_2} y correlacionado a r_2. El elemento r_3 tiene en R relaciones definidas de precedencia a r_1 y r_2; a causa de las - condiciones (b) y (c) existen una infinidad de elementos m_v de M los cuales tienen la misma relación de precedencia a m_1 y m_{1_2} en M como r_3 a r_1 y r_2 a R; de ellos escogemos -sea m_{1_3}- el cual tiene el menor índice en M_0, y correlacionado a r_3. De acuerdo a esta ley imaginamos el proceso de correlación continuo. Si a los v elementos

$$r_1, r_2, \ldots\ldots, r_v$$

de R están correlacionados, como imágenes, elementos definidos

$$m_1, m_{1_2}, m_{1_3}, \ldots\ldots, m_{1_v},$$

los cuales tienen las mismas relaciones de precedencia entre uno y otro en M como los elementos correspondientes en R, entonces al elemento r_{v+1} de R se le correlaciona aquel elemento $m_{1_{v+1}}$ de M que tiene el índice menor en M_0 de aquellos que tienen las mismas relaciones de precedencia para

$$m_1, m_{1_2}, m_{1_3}, \ldots\ldots, m_{1_v}$$

en M como r_{v+1} a $r_1, r_2, \ldots\ldots, r_v$ en R.

De esta manera hemos correlacionado elementos definidos m_{1_v} de M a todos los elementos r_v de R, y los elementos m_{1_v} tienen en M el mismo orden de precedencia como los elementos correspondientes r_v en R. Pero aún tenemos que demostrar que los elementos m_{1_v} incluyen TODOS los elementos m_v de M, ó, lo que es lo mismo, que la sucesión

$$1, 1_2, 1_3, \ldots\ldots, 1_v, \ldots\ldots$$

[506] sólo es una permutación de la sucesión

$$1, 2, 3, \ldots\ldots, v, \ldots\ldots$$

Probamos esto por inducción completa: demostraremos que, si los elementos $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_v$, aparecen en la imagen, este también es el caso para el elemento siguiente m_{v+1}.

Sea λ tan grande que, entre los elementos

$$m_1, m_{1_2}, m_{1_3}, \ldots\ldots, m_{1_\lambda},$$

los elementos

$$m_1, m_2, \ldots\ldots, m_v,$$

los cuales, por hipótesis, aparecen en la imagen, están contenidos. Puede ser también que m_{v+1} aparezca entre ellos; entonces m_{v+1} aparece en la imagen. Pero si m_{v+1} no está entre los elementos

$$m_1, m_{l_2}, m_{l_3}, \ldots\ldots, m_{l_\lambda},$$

entonces m_{v+1} tiene, con respecto a estos elementos, una posición ordinal definida en **M**; una infinidad de elementos en **R** tienen la misma posición ordinal en **R** con respecto a $r_1, r_2, \ldots\ldots, r_\lambda$, entre los cuales sea $r_{\lambda+\tau}$ aquel con el índice menor en R_0. Entonces m_{v+1} tiene, como podemos hacerlo fácilmente seguro, la misma posición ordinal con respecto a

$$m_1, m_{l_2}, \ldots\ldots, m_{l_{\lambda+\tau-1}}.$$

en M como $r_{\lambda+\tau}$ tiene con respecto a

$$r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots, r_{\lambda+\tau-1}$$

en **R**. Desde que $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_v$ han aparecido ya en la imagen, m_{v+1} es aquel elemento con el índice menor en M el cual tiene esta posición ordinal con respecto a

$$m_1, m_{l_2}, \ldots\ldots, m_{l_{\lambda+\tau-1}}.$$

Consecuentemente, de acuerdo a nuestra regla de correlación

$$m_{l_{\lambda+\tau}} = m_{v+1}.$$

Así, en este caso también, el elemento m_{v+1} aparece en la imagen, y $r_{\lambda+v}$ es el elemento de **R** al cual está correlacionado.

Vemos, entonces, qué por nuestra manera de correlacionar, el AGREGADO TOTAL M está imaginado sobre el AGREGADO TOTAL **R**; M y **R** son agregados similares, lo cual teníamos que probar.

Del teorema que nosotros acabamos de demostrar resultan, por ejemplo, los siguientes teoremas:

[507] El tipo ordinal del agregado de todos los números racionales negativos y positivos, incluyendo el cero, en su

A.- Si dos series fundamentales son coherentes a una tercera, ellas son coherentes una a otra.

B.- Dos series fundamentales procediendo de la misma dirección de la cual una es parte de la otra son coherentes.

Si existe en M un elemento m_o el cual tiene una posición con respecto a la serie fundamental $\{a_v\}$ que;

(a) para todo v $\qquad a_v < m_o$,

(b) para cada elemento m de M que precede a m_o existe un cierto número v_o tal que

$$a_v > m, \text{ para } v \geqslant v_o,$$

entonces llamamos a m_o un "elemento límite (grenzelment) de $\{a_v\}$ en M", y también un "elemento principal (hauptelement) de M". Del mismo modo llamamos a m_o un "elemento principal de M" y también un "elemento límite de $\{b_v\}$ en M" si estas condiciones se satisfacen:

(a) para cada v $\qquad b_v > m_o$,

(b) para cada elemento m de M que sigue a m_o existe un cierto número v_o tal que

$$b_v > m, \text{ para } v \geqslant v_o.$$

Una serie fundamental no puede tener más de un elemento límite en M; pero M tiene, en general, muchos elementos principales.

Percibimos la veracidad de los siguientes teoremas:

C.- Si una serie fundamental tiene un elemento límite en M, todas las series fundamentales coherentes a ella tienen el mismo elemento límite en M.

D.- Si dos series fundamentales (ya sea que proceden en la misma dirección o en direcciones opuestas) tienen uno y el mismo elemento límite en M, son coherentes.[55]

Si M y M' son dos agregados similarmente ordenados tales que

$$(6) \qquad \bar{M} = \bar{M}',$$

y formamos cualquier imagen de los dos agregados, entonces vemos fácilmente que los siguientes teoremas son válidos:

[510] E.- Para cada serie fundamental en M corresponde como imagen una serie fundamental en M', e inversamente; a cada serie ascendente una ascedente, y a cada serie descendiente una descendiente; a una serie fundamental coherente en M corresponde como imagen una serie fundamental coherente en M', e inversamente.

F.- Si a una serie fundamental en M pertenece un elemento límite en M, entonces a la serie fundamental correspondiente en M' pertenece un elemento límite en M', e inversamente: y estos dos elementos límites son imágenes uno del otro en la imaginación.

G.- A los elementos principales de M corresponden como imágenes elementos principales de M', e inversamente.

Si un agregado M consiste de elementos principales, de tal forma que cada uno de los elementos es un elemento principal, lo llamamos un "agregado el cual es denso en él mismo" (insichdichte Menge). Si para cada serie fundamental en M existe un elemento límite en M, llamamos a M un "agregado Cerrado" (abeeschlo-seene). Un agregado que es ambos "denso en sí mismo" y "cerrado" es llamado un "agregado perfecto".[56] Si un agregado tiene uno de estos tres predicados, cada agregado similar tiene el mismo predicado; así también estos predicados pueden ser adscritos a los tipos ordinales correspondientes, y así existen "tipos que son densos en ellos mismos", "tipos cerrados", "tipos perfectos", y también "tipos densos en todas partes". (§9).

Por ejemplo, η es un tipo el cual es "denso en sí mismo", y, como demostramos en el §9, es también denso en todas partes, pero no es "cerrado". Los tipos w y $^*w$ no tienen elementos principales, pero $w+v$ y $v+{}^*w$ cada uno tiene un elemento principal, y son tipos "cerrados". El tipo $w\cdot 3$ tiene dos elementos principales, pero no es "cerrado"; y el tipo $w\cdot 3+v$ tiene tres elementos principales, y es "cerrado".(57)

§11

EL TIPO ORDINAL θ DEL CONTINUO LINEAL X.-

Nos dirigimos a la investigación del tipo ordinal del conjunto $X = \{x\}$ de todos los números reales x tales que $x \geqslant 0$ y $x \leqslant 1$, en su orden natural de precedencia, de tal forma, que cualesquiera dos de sus elemento x y x'

$$x \prec x', \text{ si } x < x'.$$ (58)

Sea la notación para este tipo

$$\overline{\overline{X}} = \theta. \tag{1}$$

[511] De los elementos de la teoría de los números racionales e irracionales sabemos que cada serie fundamental $\{x_v\}$ en X tiene un elemento límite x_0 en X, y así también, inversamente cada elemento x de X es un elemento límite de una serie fundamental coherente en X. Consecuentemente X es un "agregado perfecto" y θ es un "tipo perfecto".(59)

Pero θ no está perfectamente caracterizado por eso: además nosotros debemos fijar nuestra atención sobre la siguiente propiedad de **X**. El agregado **X** contiene como parte al agregado **R** de tipo ordinal η investigado en el §9, y de tal manera que, entre cualesquiera dos elementos x_0 y x_1 de **X**, caen elementos de **R**.

Mostraremos ahora que estas propiedades, tomadas juntas, caracterizan el tipo ordinal θ del continuo lineal **X** de una manera exhaustiva, así tenemos el teorema:

Si un agregado ordenado M es tal que (a) es "perfecto" y (b) en él está contenido un agregado S con el número cardinal $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$ y el cual soporta una relación tal de M que, entre cualesquiera dos elementos m_0 y m_1 de M caen elementos de S, entonces $\overline{M} = \theta$.

Demostración.- Si S tiene un elemento mínimo o máximo, éstos elementos, por (b), desempeñan el mismo carácter como elementos de M; podríamos removerlos de S sin que S pierda con eso la relación a M expresada en (b). De esta manera, suponemos que S no tiene elemento mínimo o máximo, de modo que, por el §9, tiene el tipo ordinal η. Desde que S es una parte de M, entre cualesquiera dos elementos s_0 y s_1 de S otro elemento de S debe, por (b), caer. Por otra parte, por (b) tenemos $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$. Así los agregados S y **R** son "similares" uno a otro

$$S \simeq R.$$

Señalamos cualquier imaginación de **R** sobre S, y aseguramos que da una "imaginación" definida de **X** sobre M de la siguiente manera:

Sean todos los elementos de **X** que, al mismo tiempo, pertenecen al agregado **R** y corresponden como imágenes a aquellos elementos de M que son, al mismo tiempo, elementos de S y, en la imagen supuesta de **R** sobre S, corresponden a los elementos dichos -

de **R**. Pero si x_0 es un elemento de **X** el cual no pertenece a **R**, x_0 debe ser observado como un elemento límite de una serie fundamental $\{x_v\}$ contenida en **X**, y esta serie puede ser reemplazada por una serie fundamental coherente $\{r_{k_v}\}$ contenida en R. A esto [512] corresponde como imagen una serie fundamental $\{s_{\lambda_v}\}$ en S y M, la cual, a causa de (a), está limitada por un elemento m_0 de M que no pertenece a S (F, §10). Sea este elemento m_0 de M (el cual permanece el mismo, por E,C, y D del §10, si las series fundamentales $\{x_v\}$ y $\{r_{k_v}\}$ son reemplazadas por otras limitadas por el mismo elemento x_0 en **X**) la imagen de x_0 en **X**. Inversamente, a cada elemento m_0 de M el cual no existe en S pertenece a un elemento completamente definido x_0 de **X** el cual no pertenece a **R** y del cual m_0 es la imagen.

De esta manera una correspondencia biunívoca entre **X** y M está establecida, y tenemos ahora que mostrar que da una "imaginación" de estos agregados.

Esto es, por supuesto, el caso de aquellos elementos de **X** que pertenecen a **R**, y para aquellos elementos de M que pertenecen a S. Comparemos un elemento r de **R** con un elemento x_0 de **X** el cual no pertenece a **R**; sean s y m_0 los elementos correspondientes de M. Si $r < x_0$, existe una serie fundamental $\{r_{k_v}\}$, la cual está limitada por x_0 y, de una cierta v_0

$$r < r_{k_v} \text{ para } v \geq v_0.$$

La imagen de $\{r_{k_v}\}$ en M es una serie fundamental ascendente $\{s_{\lambda_v}\}$, la cual estará limitada por un m_0, y tenemos (§10) $s_{\lambda_v} < m_0$ para cada v, y $s < s_{\lambda_v}$ para $v \geq v_0$. Así (§7) $s < m_0$.

Si $r > x_0$, concluimos análogamente que $s > m_0$.

Consideremos, finalmente, dos elementos x_0 y x_0' no pertenecientes a **R** y los elementos m_0 y m_0' correspondientes a ellos en M; entonces mostramos, mediante una consideración análoga, que: si $x_0 < x_0'$, entonces $m_0 < m_0'$.

La demostración de la similaridad de X y M está acabada ahora, y así tenemos

$$\bar{\bar{M}} = \theta \,.$$

Halle, Marzo 1895.

"Zenón se refería a tres problemas..... Tratábase del problema de lo infinitesimal, de lo infinito y de la continuidad..... Desde su época a la nuestra, los mejores talentos de cada generación han atacado a su vez estos problemas, pero, hablando en términos generales, no han logrado nada...... Weiestrass, Dedekind y Cantor...... los han resuelto completamente. Sus soluciones..... son tan claras que no dejan lugar a la menor duda. Esta conquista es problablemente la más importante de la que la época pueda jactarse."

Bertrand Russell.

LIBRO IV.-

EL TEOREMA DE ZERMELO

§1.- CONJUNTOS BIEN-ORDENADOS.-

Un conjunto ordenado es llamado bien-ordenado si todo subconjunto no vacío tiene un primer elemento. Como ejemplos de conjuntos bien-ordenados tenemos:

1.- Todo conjunto finito ordenado es bien-ordenado.[60]

2.- $N = \{1,2,3,4,.....\}$

3.- $A_b = \{a_0, a_1, a_2, ..., b_0, b_1, ... b_{k-1}\}$

4.- $C = \{1,5,9,...,2,6,10,...,3,7,11,...,4,8,12,...\}$

5.- $D = \left\{1,2,3,......,\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},......,\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3},......\right\}$

El tipo de orden de un conjunto bien-ordenado es llamado su 'número ordinal', ó más simplemente, su 'ordinal'. En el caso de los conjuntos infinitos bien-ordenados se les llama 'números ordinales transfinitos'. Ahora, como todos los conjuntos finitos ordenados son bien ordenados el conjunto de todos los tipos finitos

$$o,1,2,3,4,.....$$

en el orden que los menciono, es un ordinal.

Teorema 1.- "En todo conjunto bien-ordenado cada elemento, que no es un último elemento, tiene un inmediato sucesor."

Demostración.- Sea a_1 un elemento de un conjunto A bien-ordenado. El conjunto de elementos que siguen a a_1 en A es un subconjunto de A, y por lo tanto, de acuerdo a la definición de bien-ordenado, si no es vacío tiene un primer elemento a_2. Entonces $a_1 < a_2$, y no existe un a_0 tal que $a_1 < a_0 < a_2$ de acuerdo a la definición de a_2.

Q.E.D.

El siguiente hecho se sigue inmediatamente de la definición de conjunto bien-ordenado:

Teorema 2.- "Cada subconjunto A_n de un conjunto A bien-ordenado es también bien-ordenado."[61]

Así como también es obvio que:

Teorema 3.- "Cada conjunto ordenado que es similar a un conjunto bien-ordenado es él mismo bien-ordenado."

Le llamaremos 'segmento'[62] de A al conjunto de todos los elementos de un conjunto ordenado A que preceden a cierto elemento a de A. Más claramente se dice, el segmento determinado por a.

Un segmento de un conjunto siempre es un subconjunto propio del conjunto[63].

Teorema 4.- "La unión de una finidad mutuamente disjunta de conjuntos bien-ordenados es bien-ordenable, sin importar el orden en el que los términos son tomados."

De este teorema se desprende que la suma de una finidad de ordinales es siempre un ordinal. Aunque lo mismo puede -

ser aplicado a una infinidad de términos, previniendo su arreglo correspondiente a un conjunto bien-ordenado.

Si A y B son dos conjuntos con los tipos ordinales α y β, respectivamente, y si A es similar a un segmento de B, entonces α es llamado "menor que" β ($\alpha < \beta$). Análogamente con $\alpha < \beta$ escribimos $\beta > \alpha$, " β es mayor que α".

La igualdad de los tipos ordinales ($\alpha = \beta$) está definida por la similaridad de conjuntos correspondientes.

Podemos definir este orden entre ordinales "de acuerdo a su magnitud", y resulta que es:

1.- Irreflexiva, o sea, no podemos obtener

$$\alpha < \alpha;$$

2.- Asimétrica, es decir, si

$$\alpha < \beta$$

no puede ser cierto que

$$\beta < \alpha.$$

3.- Transitiva, ya que de

$$\alpha < \beta \text{ y } \beta < \gamma$$

se sigue que

$$\alpha < \gamma.$$

Pero lo que si no podemos concluir es que esta relación sea conectiva, o sea, que dados dos conjuntos bien-ordenados cualesquiera nosotros podamos decidir cual de los dos tiene menor o mayor (o aún igual) tipo ordinal.

Una nueva definición de conjunto finito (y desde - luego de conjunto infinito) está dada por el siguiente teorema:

Teorema 5.- "Un conjunto A bien-ordenado en el or-- den dado de sus elementos y bien-ordenado en el orden inverso[64] debe ser finito."

Demostración.- Supongamos que A es infinito. Al considerar el orden inverso de sus elementos vemos que existe al me-- nos un subconjunto (puede ser el mismo conjunto) que no tiene un - primer elemento y por lo tanto, no está bien-ordenado. Contraria-- mente a nuestra hipótesis, por lo que A debe ser finito.

Q.E.D.

Teorema 6.- "El conjunto de todos los números ordinales que son menores que un ordinal dado α, puede ser ordenado de acuerdo a las magnitudes crecientes de los ordinales: el conjunto ordenado $A(\alpha)$ obtenido de esta manera está bien-ordenado, y el tipo de $A(\alpha)$ es el mismo ordinal α[65]. En símbolos

$$\overline{A(\alpha)} = \alpha".$$

Demostración.- Sea B un conjunto arbitrario bien-ordenado y α su tipo ordinal. Como cualquier elemento γ de $A(\alpha)$ es - un ordinal menor que α, se sigue de la definición de la relación - de menor o mayor que, B tiene un segmento cuyo tipo ordinal es γ. De aquí que si γ_1, γ_2 son elementos distintos de $A(\alpha)$, son los tipos de diferentes segmentos de B determinados por elementos b_1 y - b_2 de B respectivamente. Dependiendo de si $b_1 < b_2$ ó $b_2 < b_1$ en B, tengamos $\gamma_1 < \gamma_2$ ó $\gamma_2 < \gamma_1$.[66] Como se ve fácilmente, $A(\alpha)$ es un conjunto ordenado (véase nota 44).

Para demostrar que $A(\alpha)$ es bien-ordenado debemos - mostrar un mapeo similar de $A(\alpha)$ dentro del conjunto bien-ordenado B. Ahora, si γ es un elemento de $A(\alpha)$, $\gamma < \alpha$, entonces sea γ asignado al elemento b de B que determina en B el segmento de tipo ordinal γ. Esta regla define una correspondencia uno-a-uno entre los elementos de $A(\alpha)$ y B. Es más, el mapeo construido es similar. Para ver ésto consideremos elementos distintos b_1, b_2 de B y los ordinales correspondientes γ_1, γ_2 que pertenecen a $A(\alpha)$. Ahora, como son similares, el tipo ordinal de B es también el tipo ordinal de $A(\alpha)$. Por lo tanto, $\overline{A(\alpha)} = \alpha$.

Q.E.D.

§2.- COMPARABILIDAD DE TIPOS ORDINALES.-

Enunciaremos y demostraremos otros teoremas para que se vea de una manera más natural el surgimiento del teorema de comparabilidad entre ordinales de conjuntos bien-ordenados.

Teorema 7.- "Supongamos que existe un mapeo similar entre el conjunto A bien-ordenado y un subconjunto (propio o impropio) B, denotando los elementos de A y B por a y b respectivamente. Si consideramos la posición de estos elementos en el conjunto A, tenemos invariablemente $a = b$ ó $a < b$, pero nunca $b < a$."

Demostración.- Lo demostraremos por reducción al absurdo. Supongamos que el conjunto de pares de elementos a,b para los cuales $b < a$, no es vacío. Las b's con $b < a$ constituyen un subconjunto de un conjunto B bien-ordenado, y tienen, por lo tanto, un primer elemento b_o. Para el elemento a_o correspondiente al b_o tenemos $b_o < a_o$. El elemento b_o, como sea, es también un elemento de A, y lo denotamos por a_1. A este elemento a_1 corresponde un elemento b_1 de B. Por lo que, con los elementos a_o, a_1 de A están asociados los elementos b_o, b_1 de B. Desde que $a_1 = b_o < a_o$, y la similaridad del mapeo no disturbe el orden en la sucesión, también tenemos $a_1 < a_o$, o sea, $b_1 < a_1$. De aquí que, b_o no es el primer elemento de B para preceder el elemento correspondiente de A: el elemento $b_1 < b_0$ tenía ya esta propiedad. Por lo que el suponer que $b < a$ nos lleva a una contradicción.

Q.E.D.

De aquí se obtiene inmediatamente que:

Teorema 8.- "Todo conjunto A bien-ordenado puede ser mapeado similarmente sobre sí mismo unícamente por el mapeo idéntico. Si A está bien-ordenado, y $A \simeq B$, entonces existe un sólo mapeo similar de A en B".

Demostración.- Sabemos que A es un subconjunto de sí mismo. Sean a y a' dos elementos que se corresponden bajo el mapeo de A en sí mismo. Entonces, de acuerdo al teorema 7, nunca tenemos $a < a'$ ó $a' < a$, por lo que invariablemente tenemos $a = a'$.

En el caso en que B pudiera ser mapeado sobre A de dos maneras, substituyendo B por A, mapearíamos A sobre sí mismo de dos maneras, lo que contradiría la primera parte del teorema.

Q.E.D.

Teorema 9.- "Si B es un segmento de un conjunto A bien-ordenado, y C es un segmento del conjunto B, entonces C también es un segmento de A".

Teorema 10.- "Sean A_m y A_n dos segmentos distintos del mismo conjunto A bien-ordenado. Entonces uno de los segmentos es un segmento del otro.

Teorema 11.- "Bajo un mapeo similar de un conjunto A bien-ordenado sobre un conjunto B bien-ordenado, cada segmento de A se transforma en un segmento de B."

Demostración.- Sea A_m un segmento de A, y sea el elemento b de B el que se corresponde al elemento a de A. Entonces los elementos de A que preceden al elemento a van precisamente a -

los elementos de B que preceden al elemento b.

Q.E.D.

Teorema 12.- "Ningún conjunto A bien-ordenado es similar a cualquiera de sus segmentos, o a un segmento de un subconjunto."

Demostración.- Si, para algún segmento A'_m del subconjunto $A' \subseteq A$, tenemos $A'_m \simeq A$, el elemento a del conjunto A corresponderá a un elemento de A_m, es decir, a un elemento que lo precede en A, lo cual, por el teorema 7, es imposible. Si, ahora, A_m y A_n son dos segmentos distintos del mismo conjunto, entonces de acuerdo al teorema 10, uno de ellos debe ser un segmento del otro, y, por lo tanto, no pueden ser similares.

Q.E.D.

Ahora ya tenemos los elementos necesarios para poder comparar los conjuntos bien-ordenados con respecto a sus ordinales.

Teorema 13.- Comparabilidad de Tipos Ordinales.- "Dos conjuntos bien-ordenados son o similares uno a otro, o uno es similar a un segmento del otro. De aquí que una y sólo una de las relaciones

$$\alpha = \beta \, , \; \alpha < \beta \, , \; \beta < \alpha$$

se mantiene entre ordinales α y β."

Demostración.- Si A y B son dos conjuntos bien-ordenados con tipos ordinales α y β, respectivamente, debemos reemplazarlos por los conjuntos similares estandar $C(\alpha)$ y $C(\beta)$ respectivamente, cuyos elementos son ordinales.

Sea I la intersección de $C(\alpha)$ y $C(\beta)$; I está bien-ordenado, porque un subconjunto de conjuntos bien-ordenados es -

bien-ordenado (teorema 2). Si un ordinal fijo pertenece a I, entonces todo ordinal menor también pertenece a I (véase teorema 6). - Por lo que I "empieza" con 0,1,2,3,.....

Si I no coincide con $C(\alpha)$, I es obviamente un segmento de $C(\alpha)$, y análogamente funciona para I y $C(\beta)$. Es decir, tenemos

	$I = C(\alpha)$	I segmento de $C(\alpha)$
$I = C(\beta)$	1er. caso $C(\alpha) = C(\beta)$	2do. caso $C(\beta)$ segmento de $C(\alpha)$
I segmento de $C(\beta)$	3er. caso $C(\alpha)$ segmento de $C(\beta)$	4o. caso

1er. caso.- $A \cong C(\alpha)$ y $B \cong C(\beta)$, por lo que $A \cong B$, es decir, $\alpha = \beta$.

2do. caso.- $B \cong C(\alpha)$, o sea, $\beta < \alpha$, de acuerdo a la definición de - la relación menor entre ordinales.

3er. caso.- $A \cong C(\beta)$, es decir, $\alpha < \beta$.

4o. caso.- Es imposible. Porque según nuestro esquema, el tipo ordinal de I es menor que ambos α y β. Y de aquí que, - si γ es el ordinal que sigue inmediatmente a todos los ordinales contenidos en I, γ debe estar en $C(\alpha)$ y - $C(\beta)$, y de aquí que γ está en I. Contradicción puesto que habíamos supuesto que γ no estaba en I.

De aquí que sólo uno de los tres primeros casos se realiza en la comparación de tipos ordinales.

Q.E.D.

§ 3.- Comparabilidad de Cardinales.-

Debido a este último teorema (sobre comparabilidad de tipos ordinales) y al Teorema de Ecuivalencia[67] estamos ahora capacitados para comparar los cardinales de conjuntos bien-ordenados.

Teorema 14.- Comparabilidad de Cardinales.- "Los cardinales de dos conjuntos bien-ordenados o son iguales o bien uno es mayor que otro."

Demostración.- Sean A y B dos conjuntos bien-ordenados. Por el teorema anterior, el primer caso significa que $A \cong B$, debido a la definición de similaridad tenemos $A \sim B$, y esto implica que los cardinales de A y B son iguales.

Sabemos que el segmento de un conjunto es un subconjunto propio del conjunto. De aquí que, si el primer caso no se realiza entonces A es equivalente a un subconjunto de B ó B es equivalente a un subconjunto de A. Esto quiere decir por el teorema de Equivalencia que el cardinal de A es igual o menor que el de B, o que el cardinal de B es igual o menor que el de A.

Q.E.D.

Necesitamos justificar el uso del Principio de Inducción Transfinita (véase nota 43) en las demostraciones, aunque sabemos que es mucho más útil y profunda cuando la utilizamos en las definiciones. Fue J. von Neumann (1923) el primero en darse cuenta de la necesidad de esta justificación.

Teorema 15.- "Sea P(x) una propiedad o argumento que es significativa para todos los elementos 'a' de un conjunto A bien-ordenado. Si:

(a) P es verdadera para el primer elemento de A: y,

(b) La veracidad de P para todos los elementos de A que preceden a determinado elemento 'a', implica la veracidad para 'a',

entonces P es verdadera para todos los elementos de A."

Demostración.- Lo demostraremos por reducción al absurdo. Supongamos que el subconjunto de A que contiene aquellas 'a' para las cuales P no es verdadera, no es vacío. Como A es un conjunto bien-ordenado, el subconjunto tiene un primer elemento a_0 el cual por (a) no es el primer elemento de A. Por la definición de a_0, P es verdadera para todos los elementos que preceden a a_0; por lo tanto, por (b) P debe ser verdadera para a_0 también. Contradicción, de aquí que el subconjunto para los cuales P no es verdadera es vacío.

Q.E.D.

§4.- EL TEOREMA DEL BUEN-ORDEN.-

Llegamos ahora a uno de los resultados más sorprendentes dentro de la Teoría de Conjuntos Transfinitos de Cantor: el Teorema del Buen-Orden, demostrado por E. Zermelo ("Mathematische Annalen 59 (1904) 514-516 pp.", y una segunda demostración en "Mathematische Annalen 65 (1908) 107-128 pp.").

Teorema 17.- "Todo conjunto infinito S puede ser bien ordenado."(68)

Si nosotros aceptamos el Axioma de Elección (véase Libro VII, §1) entonces estamos aceptando, aunque sea de una manera implícita, el Teorema del Buen-Orden; e inversamente, si aceptamos el Teorema del Buen-Orden debemos hacer lo mismo con el Axioma de Elección. Es decir, los dos principios son equivalentes.

Ahora, si nosotros tomamos como válido el Axioma de Elección, y obligadamente el Teorema de Zermelo, vemos que éstos son equivalentes a los siguientes principios:

(1) Teorema de Numeración.- "Para cualquier conjunto A existe un ordinal α tal que $\alpha \approx A$." (Por el símbolo '$\approx$' entiéndase la equipotencia, es decir, el concepto que resulta cuando - entre dos conjuntos existe una correspondencia uno-a-uno y tienen el mismo número cardinal).

(2) El Lema de Zorn.- "Si A es un conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadena en A tiene una cota superior, - entonces A contiene un elemento máximo." (Una cadena es un conjunto totalmente ordenado. Y por una cadena 'en A' entendemos un subconjunto de A tal que el subconjunto resulta estar totalmente ordenado).

(3) La Ley de la Tricotomía.- "Dados dos conjuntos cualesquiera siempre sucede que $A < B$, $A = B$ ó $B < A$ con respecto a sus cardinales."

Para ver algunas de las posibles equivalencias del Axioma de Elección, y por supuesto del Teorema del Buen-Orden, véase: RUBIN, H. & RUBIN, J.E. "Equivalents of the Axiom of Choice." North-Holland. Amsterdam. 1970. 158 pp. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics).

"Cantor introdujó en la ciencia una nueva forma de considerar el infinito matemático..... pero ha ocurrido que hemos encontrado ciertas paradojas, ciertas aparentes contradicciones que hubieran hecho las delicias de Zenón de Elea y la Escuela de Megara.

Henri Poincaré (1905).

LIBRO V.-

LAS PARADOJAS

§1.- INTRODUCCION CONCEPTUAL.-

La palabra "paradoja" proviene del griego; está compuesta del prefijo PARA que denota 'contrariedad', 'proximidad', 'semejanza'; y de la palabra DOXA que significa 'opinión'.

O sea, una paradoja es una opinión contraria a la común. En filosofía es una contradicción a la que llega el razonamiento abstracto. Es también la figura del pensamiento que consiste en emplear expresiones o frases que envuelven contradicción.

La palabra "antinomia" también proviene del griego. Está formada por un prefijo ANTI que significa 'en contra', y por la palabra NOMOS que significa 'ley'.

Una antinomia es una contradicción entre dos leyes, o dos principios. Es la reunión de dos consecuencias contradictorias que resultan de la misma premisa.

Una paradoja es una contradicción aparente que tiene solución dentro del sistema, mientras que la antinomia no la tiene. Aunque actualmente a esta diferencia no se le da mucha importancia[69] y se les menciona indistintamente. Por ejemplo, W.V. Quine divide las paradojas en tres grupos: (1) verídicas, (2) falsídicas y (3) antinomias y de éstas afirma: "Una antinomia da orirales) que la sucesión de todos los ordinales (en su orden de magnitud) está bien-ordenada. Se sigue que la sucesión de todos los ordinales tiene un número ordinal, digamos Ω. Pero en ese caso la sucesión de todos los ordinales incluyendo Ω tiene el número ordinal $\Omega+1$, el cual debe ser mayor que Ω, de aquí que, Ω no es el número ordinal de todos los ordinales."[75]

En otras palabras, Burali-Forti considera el conjunto de todos los números ordinales. Este conjunto no puede existir porque si existiera estaría bien-ordenado, y por lo tanto, tendría un tipo de orden que es un elemento del conjunto considerado; ahora, como el conjunto de todos los números ordinales inferiores a dicho tipo es un segmento del conjunto de los ordinales, sería semejante a uno de sus elementos, lo cual es un absurdo.

2.- La Paradoja de Cantor.- Cantor descubrió esta paradoja en 1899, pero obviamente ésta no fue publicada inmediatamente. Esta paradoja fue dada a conocer en 1932 cuando se publicaron sus obras completas.

Nosotros sabemos, por un teorema de Cantor, que la potencia o número cardinal de un conjunto es siempre menor que la cardinalidad de su conjunto potencia[76], es decir,

$$\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{2^{M}}}.$$

Cantor se dió cuenta de que no podía hablar del conjunto universal,[77] pues siempre tendría que

$$\overline{\overline{U}} < \overline{\overline{2^{U}}},$$

y se está suponiendo implícitamente que

$$\overline{\overline{2^{U}}} < \overline{\overline{U}}.$$

Aunque muy sencilla esta paradoja no es de ninguna forma elemental, pues se necesitan los conceptos técnicos de subconjunto y de conjunto potencia. Y es por ésto que ahora nos vemos en la necesidad de hablar de conjuntos universales 'relativos'.

3.- La Paradoja de Russell.- En 1902, Bertrand Russell dió a conocer su paradoja en una carta dirigida a Gottlob Frege.[78] La paradoja dice: Sea M el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos. M es un conjunto de primera clase[79] y, por lo tanto, es distinto de cada uno de sus elementos; pero como también M debe contener todos los conjuntos de primera clase, tiene que contenerse a sí mismo y entonces es de segunda clase.

La versión informal de esta paradoja es la siguiente: Supongamos que en un cierto país los bibliotecarios acostumbran catalogar sus libros, no mediante un catálogo de fichas, sino mediante un libro de hojas sueltas, es decir, el catálogo mismo es un libro. Algunos bibliotecarios catalogan el catálogo mismo en el catálogo, pero otros no hacen lo mismo. Bertrand Russell denomina a la primera clase de catálogos como un conjunto R, o sea, los conjuntos R son conjuntos que se contienen a sí mismos. Pero, ¿qué sucede si el bibliotecario general del país decide hacer un catálogo de todos los catálogos que no se catalogan a sí mismos?. Este catálogo, ¿debe catalogarse a sí mismo o no?.

Una versión un poco más formal es la siguiente: "Sea w la clase de todas aquellas clases que no son miembros de sí mismos. Entonces, no importa que clase x puede ser, 'x es una w' es equivalente a 'x no es una w.' De aquí que, dándole a x el valor w, 'w es una w' es equivalente a 'w no es una w'."[80]

De la paradoja de Russell existen varias versiones equivalentes entre las que están:

a) Supongamos que existe una aldea donde sólo hay un barbero, y se afirma que el barbero rasura a todos los hombres de la aldea que no se rasuran a sí mismos. La contradicción surge cuando uno se pregunta: ¿el barbero se rasura a sí mismo?.

b) Supóngase que todo municipio de México tiene un alcalde, y no pueden existir dos municipios distintos que tengan el mismo alcalde. Lo que si puede suceder es que el alcalde no resida en su municipio, que es lo más común. Pero un día se promulga una ley, sin tomar en cuenta la opinión de los ciudadanos, la cual obliga a todos los alcaldes que no residen en su municipio a residir en un lugar especial S. Desafortunamente, la población es tan grande que se ven en la necesidad de transformar esta área en un nuevo municipio S.

Nos podemos preguntar entonces: ¿donde reside el alcalde de S?. En el municipio S sólo pueden residir aquellos alcaldes que no residen en su propio municipio, por lo que el alcalde de S no puede residir en S. Pero si el alcalde de S no reside en S, tiene que vivir en S porque así lo obliga la ley. Este problema le fue comunicado al jefe del poder ejecutivo quien exclamó: "La solución de este problema ni nos beneficia ni nos perjudica, sino todo lo contrario."

Russell intentó mostrar que la Matemática era una parte de la Lógica por medio de paradojas lógicas que se encontraban en un campo pre-matemático. La más famosa es la siguiente: Sucede que podemos dividir todos los adjetivos del diccionario en dos conjuntos. En el primero van a estar todas las palabras que sean predicativas(81), y en el segundo van a estar todas las palabras impredicativas.[82] Pero, ¿qué sucede con la palabra "impredicativa"?, ¿en qué conjunto debe estar?. "Llegamos a la consecuencia paradójica de que impredicable es impredicable si y sólo si impredicable no es impredicable."[83]

§3.- LAS PARADOJAS SEMANTICAS.-

Otro tipo de paradojas aparecieron más tarde, las paradojas semánticas.[84]

1.- La Paradoja de Richard.- Jules-Antoine Richard (1864-1921) publicó en la "Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées." (tomo XVI, núm 12, pág 541, correspondiente al 30 de junio de 1905) la paradoja que actualmente lleva su nombre.

Richard demostró que todos los números definidos por medio de un número finito de palabras forman un conjunto numerable, y sin embargo se puede formar un número definido por un número finito de palabras que no se encuentra en este conjunto.

Lo importante de esta paradoja es que en su formulación utiliza el método de la diagonal, método que Cantor había popularizado con sus demostraciones. Existen, ahora, muchísimas versiones de esta paradoja.

"Esta paradoja es especialmente interesante por sus implicaciones concernientes a lenguajes como el castellano, y por su estrecho parentesco con la demostración cantoriana de la no-enumerabilidad de las funciones de la teoría de los números. Richard expuso la paradoja en forma relativa a la definición de un número real, paralelamente a la demostración cantoriana de la no-enumerabilidad de los números reales."[85]

La antinomia de Berry[86] es esencialmente una ingeniosa e ilustrativa simplificación de la paradoja de Richard.

2.- <u>La Paradoja de Grelling y Nelson.</u>- Poco tiempo más tarde, en 1908, apareció otra paradoja de tipo semántico debida a Grelling y Nelson. En cierta forma ésta era un caso particular de la paradoja de Russell con respecto a las palabras impredicativas.

Unos cuantos adjetivos en español, como 'español' o 'polisilábico', tienen ellos mismos la propiedad que denotan. Por ejemplo, el adjetivo español es español, el adjetivo polisilábico es polisilábico. Pero la gran mayoría no tienen la misma propiedad. Como, por ejemplo, la palabra monosilábica no es monosilábica, como tampoco las palabras blanco, caliente, etc. tienen la propiedad que denotan. El segundo tipo de adjetivos es llamado heterológico, y si analizamos con cuidado esta palabra nos damos cuenta que: el adjetivo heterológico es heterológico si y sólo si heterológico no es heterológico.

3.- <u>La Paradoja del Cretense.</u>- Tal vez la paradoja más antigua es aquella que se le atribuye al filósofo Epiménides de Creta (siglo VI a.C.). Se supone que Epiménides afirmó que: 'los cretenses mienten siempre'. La paradoja surgió cuando un cretense afirmó: 'estoy mintiendo'. "Es lógicamente insatisfactorio que pudiésemos escapar de la paradoja sólo merced al histórico accidente de que existiera algún cretense que alguna vez dijese la verdad."(87)

Una versión más moderna de ésta se refiere al personaje 'Sancho Panza' del "<u>Quijote</u>" de Cervantes. La paradoja de Sancho Panza es como sigue: Al ser nombrado gobernador de la ínsula, Sancho promulgó una nueva ley que decía: "En la única entrada que hay en la ínsula se instalará una horca con el fin de ejecutar a toda aquella persona que al ser interrogada acerca del motivo que la trajo a la ínsula mienta. Por el contrario, si dice la verdad, podrá transitar libremente por donde le plazca."

Los interrogadores no habían tenido ningún problema hasta que se presentó un hombre que confesó: "Yo vengo a que me ahorquen." Si lo ahorcaban, este hombre había dicho la verdad y, tenía derecho a vivir en la ínsula. Pero si, por el contrario, no lo hacían, el hombre había mentido y tenían la obligación de ahorcarlo. Parece ser que Sancho Panza lo ahorcó en castigo por los dolores de cabeza que le produjó este problema.(88)

§4.- NOTAS GENERALES A LAS PARADOJAS.-

Si analizamos un poco las paradojas mencionadas anteriormente nos podemos dar cuenta que:

a) La paradoja de Burali-Forti postulaba implícitamente la existencia de todos los números ordinales de Cantor. Lo que demuestra que la noción 'todos los ordinales' es una noción ilegítima.

b) La paradoja de Cantor habla de una 'totalidad' ya dada, el conjunto de todos los conjuntos.

c) La paradoja de Russell exigía que se precisara el concepto de 'clase' y además el admitir que 'todo' conjunto contiene, al menos, una parte que no es elemento de él mismo.

d) La paradoja de Richard conducía simplemente a un círculo vicioso, y se concluye que 'todos los números' es una proposición ilegítima.

La mayor parte de las paradojas utilizan los conceptos de orden y de existencia -que no estaban bien definidos- y la palabra 'todos', que como hemos visto es una palabra muy peligrosa en Matemáticas por la gran cantidad de paradojas o antinomias que puede generar. Es debido a esto que la definición de Russell del concepto de 'potencia' está mal, pues está mencionando una totalidad que no puede existir.

El problema del orden fue resuelto en 1905 con la obra de Zermelo, donde precisó la diferencia entre conjuntos ordenados y conjuntos bien-ordenados. Aunque por estar fundamentada esta distinción en el Axioma de Elección (véase nota 43) fue rechazada inmeditamente por la Escuela Intuicionista (véase Libro VII,§1).

De estos problemas el más díficil de resolver era el concerniente a la 'existencia' en Matemáticas. Este es un punto donde las discusiones no han acabado aún. Por ejemplo, Henri Poincaré afirma que: ".....en Matemática la palabra existir no puede tener más que un sentido: significa exento de contradicción."(89) Mientras que para los Intuicionistas más estrictos el hecho de que un objeto 'exista' quiere decir que podemos 'construirlo', o que podemos probar en un número finito de pasos que tal objeto tiene tal propiedad. Para los Formalistas como David Hilbert, todo objeto está en posibilidad de existir(90) siempre y cuando no implique contradicción dentro del sistema.

Parece ser que el problema más fácil de resolver fue el concerniente a la palabra 'todos' o el de considerar una totalidad que contuviera todo ente posible de existir o de pensarse, pues como anteriormente habíamos mencionado, actualmente se consideran los conjuntos universales como conjuntos 'relativos'.

"Nadie será jamás capaz de expulsarnos del paraíso que Cantor ha creado para nosotros."
David Hilbert.

LIBRO VI.-

LA AXIOMATIZACION DE LA TEORIA DE CONJUNTOS

§1.- DIFERENTES FORMAS DE ATACAR EL PROBLEMA.-

Las tres diferentes escuelas filosóficas de la Matemática (véase Libro VII, §1) tomaron caminos diferentes para erradicar las paradojas o antinomias de la Teoría de Conjuntos.

Los Intuicionistas rechazaron inmediatamente la Teoría de Conjuntos Transfinitos y no se vieron en la necesidad de intentar fundamentarla en principios que estuvieran exentos de toda duda. Y, en contraposición con la Escuela Formalista, los Intuicionistas afirmaban que la Matemática Pura es una creación libre del espíritu humano y que no tiene ninguna relación con los hechos de la experiencia. Por esto mismo, los Intuicionistas se preocuparon más por darle un fundamento y bases rígidas y rigurosas a su propia escuela.

Los Logicistas querían mostrar que la Matemática se podía reducir a la Lógica, y debían dar una axiomatización donde todos los conceptos y reglas de inferencia Matemática fueran vistos como generados por la Lógica. Para ésto contaban con los grandes avances de la Lógica debidos a los trabajos de George Boole - ("Las Leyes del Pensamiento", 1854) y Gottlob Frege ("Fundamentos de la Aritmética", 1884)

Los Formalistas no estaban dispuestos a abandonar la Teoría de Conjuntos simplemente porque existieran ciertas contradicciones internas en ella. Se había llegado a la conclusión de que la noción de 'conjunto' podría generar la idea de 'número natural' y, a partir de ésta se podría reproducir toda la Matemática: por lo que, los Formalistas, estaban obligados a mostrar un Sistema Axiomático del cual se generara toda la Teoría de Conjuntos (excluyendo lás paradojas) para de esta forma reproducir y fundamentar la Matemática por completo.

Antes de continuar con el estudio de las diferentes axiomatizaciones de la Teoría de Conjuntos haremos un pequeño resumen o lista de los símbolos que utilizaremos en este capítulo[91]:

(1) "$\equiv$".....para la equipotencia (si.....entonces y recíprocamente, ó si y sólo si).

(2) "$\supset$".....para la implicación (si.....entonces)

(3) "$\neg$".....para la negación (no).

(4) "&".....para la conjunción (y).

(5) "V".....para la alternativa (o).

(6) "(x)".....para la cuantificación universal (para toda x).

(7) "(Ey)".....para la cuantificación particular (existe una y tal que).

(8) "$\in$".....pertenencia.

(9) "$\subseteq$".....inclusión.

(10) "ϕ".....conjunto vacío.

§2.- LA TEORIA DE TIPOS.-

Los primeros logicistas que hicieron trabajos en la fundamentación de la Teoría de Conjuntos fueron Bertrand Russell y Alfred North Whitehead, quienes en su "Principia Mathematica" (principalmente en el tomo II) desarrollaron la 'Teoría de Tipos'.

Alfred North Whitehead, filósofo y matemático inglés, nació en Ramsgate, Kent el 15 de febrero de 1861 y murió en Cambridge, Massachusetts el 30 de diciembre de 1947.

Whitehead se graduó en Cambridge en 1884. Durante la mayor parte de su vida enseñó matemáticas en Inglaterra, pero en 1924 fue a los Estados Unidos como profesor de Filosofía en la Universidad de Harvard, y permaneció allí hasta su muerte. Su principal interes radicó en tratar de fundamentar la matemática en la Lógica, aunque también se dedicó a muchísimas cuestiones filosóficas. Son también muy interesantes sus lecturas en cuestiones tales como: "La Organización del Pensamiento. Anatomía de algunas Ideas Científicas. El Espacio, el Tiempo y la Relatividad." (UNAM. México. 1964. Centro de Estudios Filosóficos. Cuaderno #13).

Sir Bertrand Arthur Russell, matemático y filósofo inglés, nació en Trelleck, Monmouthshire el 18 de mayo de 1872 y murió en Penrhyndendraeth, Merionethshire el 2 de febrero de 1970.

A lo largo de la mayor parte de su vida fue un pacifista militante y por ello perdió su puesto en la Universidad durante la Primera Guerra Mundial.

Sus ideas sobre los problemas sociales son poco convencionales. En 1940 fue nombrado profesor de la Universidad de la ciudad de Nueva York. Pero su nombramiento fue retirado por orden de la Corte Suprema del Estado.

En 1950 recibió el Premio Nobel de Literatura y, en el año de 1961 estuvo en la cárcel.

Entre algunas de sus obras tenemos:

a) "Principia Mathematica",

b) "Los Principios de la Matemática",

c) "Misticismo y Lógica",

d) "Ensayos sobre Educación", etc.

Analizando su obra vemos que: "Un tipo está definido como el rango de significancia de una función proposicional, es decir, como la colección de argumentos para los cuales la llamada función tiene valores".(92)

Whitehead y Russell aseguran que para facilitar la comprensión del concepto de conjunto o de clase es necesario establecer una jerarquía de tipos. Esta jerarquía de tipos sé forma a partir de los individuos (substancias individuales(93)) que forman el tipo 0. Al considerar las clases ó conjuntos de individuos formamos el tipo 1, y al tomar las clases de clases de individuos hacemos el tipo 2, y así 'ad infinitum'.

Por lo que, las clases de tipo i (i en N, i > 1) tienen por elementos solamente cosas de tipo i-1. Es por esto que nunca nos podríamos preguntar por los conjuntos que se contienen a sí mismos, pues estaríamos considerando cosas en un tipo que éste no puede contener.

También es fácil de ver que tendremos una infinidad de tipos diferentes (se supone la existencia de la totalidad ya dada de los números naturales), además tendremos en cada tipo un con junto o clase vacía y, el conjunto universal de cada tipo i pertenece o está contenido en el tipo i+1; por lo que nosotros no podemos hacer ninguna afirmación acerca del conjunto de todos los conjuntos.

En la Teoría de Tipos debemos ponerle a cada variable un índice que indique en que tipo están sus valores, y por el índice nosotros sabremos si estamos hablando de individuos (x_0) ó de clases de individuos (x_1). En la Teoría de Tipos no tiene sentido hacer una proposición existencial o una cuantificación universal sin mencionar a que tipo nos estamos refiriendo. Y si nosotros señalamos que $x_i \in y_j$ entonces debe suceder que $j = i+1$.

Los logicistas admiten tres axiomas para el desarrollo de la Teoría de Tipos:

T1.- Axioma de Extensionalidad.- "Dos clases que tienen los mismos miembros son idénticas." O sea, una clase está totalmente determinada cuando sus miembros están dados. En símbolos tenemos:

$$(x_i)(x_i \in y_{i+1} \equiv x_i \in z_{i+1}) \supset (y_{i+1} = z_{i+1}).$$

T2.- Axioma de Separación o de Comprensión.- "Existe una clase de tipo i+1 correspondiente a toda frase que sirve de definición para los objetos de tipo i. Por lo tanto, si '$F(x_i)$' es una frase de T(94) donde 'y_{i+1}' no aparece tenemos

$$(Ey_{i+1})(x_i)(x_i \in y_{i+1} \equiv F(x_i))".$$

Este axioma nos permite formular definiciones predicativas que sin él serían impredicativas (véase nota 153). Pero los mismos creadores de la teoría afirman: "La justificación de este axioma es puramente pragmática: lleva a los resultados deseados y no otros. Pero es claro que no es la clase de axioma, del cual podamos quedar satisfechos."[95]

T3.- Axioma del Infinito.- "Dado cualquier número natural n siempre existe otro mayor n+1." Este axioma nos asegura la existencia de una infinidad de números naturales.

Podríamos analizar las paradojas del capítulo anterior y ver que éstas no se pueden realizar dentro de la Teoría de Tipos, pero ¿qué nos asegura que no surgirán otras?

Otro punto que es importante mencionar es que la reducción completa de la Matemática dentro de la Lógica, no se ha llevado a cabo, pues el concepto de iteración, que es un concepto matemático, se está utilizando en la formulación de la Teoría de Tipos.

Es por esto que Hermann Weyl afirma que: "...... ya no se puede decir que las Matemáticas están fundadas sobre la Lógica, sino en una especie de paraíso para los lógicos."[96] También Henri Poincaré critica la Teoría de Tipos diciendo: "..... pero lo que el Sr. Russell pretende y es lo que me parece dudoso, es que después de estos llamados a la intuición, no se harán más; no habrá que hacer otras y podrán constituirse las Matemáticas íntegramente sin hacer intervenir ningún elemento nuevo."[97]

§3.- LOS AXIOMAS DE ZERMELO.-

Es en 1907, cuando Ernst Zermelo (desgraciadamente, se tienen muy pocos datos de su vida) se dedicó a la tarea de sistematizar los resultados de la Teoría de Conjuntos obtenidos hasta entonces. Primeramente demostró que la Teoría de Conjuntos Finitos no se podía fundar sin el Axioma de Elección y enunció una serie de axiomas para fundamentar la Teoría de Conjuntos Transfinitos, siguiendo el ejemplo de su maestro David Hilbert, quien había axiomatizado la Geometría Euclidiana en su obra "Fundamentos de Geometría", 1899.

La axiomatización de Zermelo para la Teoría de Conjuntos Transfinitos está expuesta en su memoria: "Untersungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I"[(98)] Math. Annalen 65 (1908) - 261-281 pp.

Zermelo comienza su artículo de la siguiente manera: "La Teoría de Conjuntos es aquella rama de las Matemáticas cuyo objetivo es investigar matemáticamente los conceptos fundamentales de 'número', 'orden', y 'función', en su sencillez primitiva, y por esa razón desarrollar los fundamentos lógicos de toda la aritmética y el análisis; y de acuerdo con ésto constituye un componente indispensable de la Ciencia Matemática. En el momento presente, como sea, la simple existencia de esta disciplina parece ser amenazada por ciertas paradojas o 'antinomias', las cuales pueden ser derivadas a partir de lo que parecen ser sus principios esenciales y para los cuales hasta ahora no se ha encontrado una solución completamente satisfactoria..... En estas circunstancias nosotros no tenemos otra alternativa mas que tratar el camino inverso y, empezando en la 'Teoría de Conjuntos' históricamente existente, buscar los principios que son requeridos para esta disciplina matemática. Este problema debe ser resuelto de tal manera que los principios estén hecho suficientemente angostos para excluir todas las contradicciones, y aún hechos suficientemente anchos para preservar todo aquello que es valorable en esta teoría."[99]

Para crear su teoría axiomática supone:

(a) La existencia de un cierto dominio[100] $\mathfrak{M}$ de — elementos abstractos.

(b) La existencia de los elemtnos de este dominio, los cuales están representados por las letras a,b,c,.....

(c) Que cualquier argumento de igualdad, a = b, se entiende como la acerción de que los símbolos 'a' y 'b' designan — el mismo objeto.

(d) La existencia de una relación primitiva, a $\in$ b, la cual está definida para el dominio $\mathfrak{M}$. Si esta relación se mantiene para dos objetos particulares a y b, decimos que b es un conjunto y que a es un elemento de este conjunto. Por esto mismo, pero no necesariamente todos, los objetos de $\mathfrak{M}$ son conjuntos.

(e) Define también una relación entre conjuntos, la de los subconjuntos: Si M y N son dos conjuntos tales que para cada x $\in$ M implica x $\in$ N, entonces decimos que M es un subconjunto — de N.[101]

Los axiomas que él enuncia son los siguientes:[102]

<u>Z1.- Axioma de Determinación o Extensionalidad</u> (<u>Bestimmtheit</u>)[103].- "Si cada elemento de un conjunto M es también un elemento de N y viceversa, si, por lo tanto, ambos M $\underline{\in}$ N y N $\underline{\in}$ M, entonces siempre M = N; ó, más brevemente: Todo conjunto está de—terminado por sus elementos."

<u>Z2.- Axioma de Conjuntos Elementales</u> (Elementarmengen)[104].- "Existe un conjunto (ficticio), el 'conjunto vacío', $\emptyset$, el cual no contiene elementos. Si 'a' es cualquier objeto del dominio, entonces existe un conjunto $\{a\}$ el cual contiene a 'a' y solamente a 'a' como elemento; si 'a' y 'b' son cualesquiera dos obje-

tos del dominio, entonces existe un conjunto $\{a,b\}$ el cual contiene a 'a' y 'b' como elementos, pero ningún objeto x distinto de 'a' y 'b'."

Z3.- Axioma de Separación (Aussonderung)(105).- "Siempre que la función proposicional $\mathfrak{G}(x)$ está definida(106) para todos los elementos de un conjunto M, M posee un subconjunto $M_{\mathfrak{G}}$ que contiene como elementos precisamente aquellos elementos x de M para los cuales $\mathfrak{G}(x)$ es verdadera."

Z4.- Axioma del Conjunto Potencia (Potenzmenge)(107).- "A cada conjunto T corresponde otro conjunto $\mathfrak{U}T$, el 'conjunto potencia' de T, que contiene como elementos precisamente todos los subconjuntos de T."

Z5.- Axioma de la Unión (Vereinigung)(108).- "A cada conjunto T corresponde otro conjunto $\mathfrak{S}T$, la 'unión' de T, que contiene como elementos precisamente todos los elementos de los elementos de T."

Z6.- Axioma de Elección (Auswahl)(109).- "Si T es un conjunto cuyos elementos son todos conjuntos que son diferentes del $\emptyset$ y mutuamente disjuntos, su unión $\mathfrak{S}T$ incluye al menos un subconjunto S_1 que tiene uno y solamente un elemento en común con cada elemento de T."

Z7.- Axioma del Infinito (Unendlichen)(110).- "Existe en el dominio al menos un conjunto Z que contiene al conjunto vacío como elemento y está de tal forma constituido que a cada uno de sus elementos 'a' corresponde un elemento posterior de la forma $\{a\}$, en otras palabras, que con cada uno de sus elementos 'a' también contiene al conjunto correspondiente $\{a\}$ como un elemento."

Simbólicamente podemos expresar los axiomas de Zermelo de la siguiente manera:

Z1.- $(x)(y)[(z)(z \in x \equiv z \in y) \supset x = y]$.

Z2.- $(Ex)(y)(\neg y \in x) \& (x)(Ey)[x \in y \& (z)(z \in y \supset z = x) \& [(w)(z)(Ey)(w \in y \& z \in y) \& (x)[x \in y \equiv (x \in w \vee x = z)]])$.

Z3.- Si 'y' no aparece en 'F(x)':

$(z)(Ey)(x)(x \in y \equiv [x \in z \& F(x)])$.

Z4.- $(z)(Ey)(x)[x \in y \equiv [(w)(w \in x \supset w \in z)]$.

Z5.- $(z)(Ey)(x)[x \in y \equiv (Ew)(x \in w \& w \in z)]$.

Z6.- $(t)[(x)(x \in t \supset (Ez)(z \in x) \& (y)(y \in t) \& y \neq x \supset \neg(Ez)(z \in x \& z \in y))] \supset (Eu)(x)(x \in t \supset (Ew)(v)[v = w \equiv (v \in u \& u \in x)]))$.

Z7.- $(Ez)[\Phi \in z \& (x)(x \in z \supset \{x\} \in z)]$.

De cualquier forma, en el artículo original de Zermelo la formulación y discusión preliminar de sus axiomas sólo ocupa un pequeño espacio, es más, el mismo Zermelo se disculpa por no haber desmostrado que sus axiomas son consistentes. Zermelo estaba más interesado en discutir la equivalencia de conjuntos y mostrar que de estos siete axiomas se sigue la Teoría de los Números Cardinales Transfinitos de Cantor[111] mas no las paradojas y antinomias.

§ 4.- LA AXIOMATIZACION DE ZERMELO-FRAENKEL.-

Abraham Adolf Fraenkel nació en Alemania en 1891, llegó a ser Rector de la Universidad Hebrea de Jerasalen de 1938 a 1940, y se le reconoce como uno de los más grandes aportadores a la Fundamentación de la Matemática.

La axiomatización de Zermelo fue tomada por los Formalistas como la base para todos sus trabajos posteriores, pues el trabajo era bueno, y solamente había que aclarar o detallar conceptos como el de 'definitud' que Zermelo había dejado sin discutir. Zermelo decía que una afirmación está 'definida' cuando su veracidad o falsedad está 'decidida por las relaciones básicas del dominio $\mathfrak{U}$ por el significado de los axiomas y las leyes universales de la Lógica.'(112)

En un artículo publicado en 1925, con el mismo título del artículo original de Zermelo, Fraenkel elaboró la siguiente sugerencia:(113) que el concepto de 'definitud' podría ser precisado de una manera muy natural, identificando las afirmaciones definidas con las combinaciones de integrantes atómicos de las dos formas $a \in b$ y $a = b$; con ayuda de otro concepto, el concepto de 'función' referido a conjuntos. Fraenkel definió este concepto de la siguiente manera:

(a) El conjunto potencia de x, el conjunto unión de x, un par que depende de x, y también cualquier conjunto constante, todos son llamados <u>funciones de x.</u> Una función de una función de x es de nuevo llamada una función de x.

(b) Sean $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ funciones dadas de x, y sea 'o' uno de los símbolos primitivos $=, \neq, \in, \notin$. Entonces, si M y N son conjuntos tales que los elementos de N son precisamente los elementos 'y' de M para los cuales la relación $\varphi(y) o \psi(y)$ funciona, N es llamado un 'Aussonderungsmenge' de M que está determinado por o, en símbolos

$$(1) \qquad N = M_{\varphi(y) o \psi(y)}.$$

(c) Si (1), y si M es una función de la indeterminada x ó si la indeterminada x está envuelta en las funciones φ y ψ (apar te de la variable auxiliar y), entonces N (como dependiente general de x) es llamada una función de x.

Con estas ideas Fraenkel redactó el tercer axioma de Zermelo (Axiom der Aussonderung) de la manera siguiente: "Si M es cualquier conjunto, $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son cualesquiera dos funciones, y 'o' denota una de las relaciones primitivas $=, \neq, \in, \notin$, entonces existe el 'Aussonderunsmenge' $M_{\varphi(y)o\psi(y)}$.

Este nuevo desarrollo del concepto de 'definitud' es ahora parte de la Teoría de Conjuntos Estandar, y puede cumplir con los axiomas originales de Zermelo. Pero el mismo Zermelo no lo acepta porque dice que este argumento se basa en las propiedades de los números naturales, los cuales deben ser introducidos en una etapa posterior.

Fraenkel propusó más reformas a la Teoría de Zermelo para hacerla más formal. Por ejemplo, al interpretar Zermelo la relación a = b lo hacía semánticamente, pensando que a y b designaban el mismo 'objeto'. Fraenkel en cambio le daba un uso como constante primitiva con el mismo stato que 'ϵ' en el sistema. El mismo Fraenkel propusó un dominio básico de conjuntos, el cual funcionaba como un 'dominio de individuos' para su teoría axiomática.[114]

En un artículo previo publicado en 1922[115], Fraenkel había propuesto la introducción de un axioma adicional. Esto debido a que el axioma siete de Zermelo afirmaba la existencia de un conjunto infinito Z_0 con elementos $\Phi, \{\Phi\}, \{\{\Phi\}\}, \ldots\ldots$ y además el axioma cuatro hacía que los conjuntos

$$Z_1 = \mathfrak{U}Z_0,\ Z_2 = \mathfrak{U}Z_1,\ \ldots\ldots$$

tuvieran números cardinales cada vez mayores, pero no existía un a xioma que garantizara la existencia de un conjunto que fuera la u nión de todos estos conjuntos Z_1, Z_2, ...

Este axioma que propone Fraenkel es el Axioma de Reemplazamiento (Ersetzung): "Si M es un conjunto, y si cada elemento de M es reemplazado por un 'objeto del dominio $\mathfrak{M}$', entonces M es de nuevo un conjunto".

Si en la lista original de axiomas de Zermelo nosotros sustituimos el tercer axioma por la nueva versión que da Fraenkel en términos de funciones y añadimos el Axioma de Reemplazamiento nos encontramos con la Axiomatización de Teoría de Conjuntos que es conocida actualmente con el nombre de la 'Axiomatización de Zermelo-Fraenkel'.

Una buena versión de estos axiomas, aunque no es la original, se encuentra en: COHEN, Paul J. & HERSH, Reuben. "Teoría de Conjuntos No-Cantoriana." Scientific-American. Diciembre, 1967.

§5.- UNA NUEVA TENDENCIA (VON NEUMANN).-

Johann von Neumann nació en Budapest, Hungría, el 28 de diciembre de 1903 y murió en Washington, D.C. el 8 de febrero de 1957.

Von Neumann abandonó Hungría(116) en 1919 durante los desórdenes que siguieron a la derrota de Austria-Hungría en la Primera Guerra Mundial, y estudió en distintas Universidades de Alemania y Suiza. Hacía la mitad de los años veinte estaba en la Universidad de Götingen, donde conoció a J. Robert Oppenhimer (1904-1967).

En 1930 llegó a los Estados Unidos y enseñó Física y Matemáticas en la Universidad de Princeton.

Von Neumann realizó importantes trabajos en muchas ramas de las matemáticas avanzadas.[117] Por un lado, realizó un estudio meticuloso de la Mecánica-Cuántica, demostrando en 1944 que la Mecánica-Ondulatoria de Schrödinger y la Mecánica-Matricial de Heisenberg eran matemáticamente equivalentes.

Inclusó más importante fue su desarrollo de una nueva rama de las matemáticas llamada 'Teoría de Juegos'. Ya en el año de 1928 había escrito artículos sobre la materia, pero su libro definitivo "The Theory of Games and Economic Behavior" no apareció sino hasta 1944.

Von Neumann aplicó también sus habilidades matemáticas a la dirección de computadoras gigantes que realizaron, a su vez, cálculos enormemente veloces que ayudaron a la producción de la bomba-H.

En 1955 fue elegido miembro de la Atomic Energy Comission y en 1956 recibió el premio Fermi.

El primer trabajo matemático de von Neumann fue su tesis doctoral (Budapest, 1925) donde reconsideró los axiomas de Zermelo-Fraenkel. Su tesis trataba sobre la construcción axiomática de la Teoría de Conjuntos General.

Aunque la tesis fue oublicada en Húngaro, las partes esenciales de ésta fueron publicadas en Alemán en dos artícu--

los: (1) "Eine Axiomatisierung der Mengelehre" (J. reine angew. -- Math., **154** (1925) 219-240 pp.). En este primer artículo dió su sistema de axiomas en los cuales él basó su tratamiento de conjuntos, con una breve explicación de las razones por las que él tomó los axiomas de una forma particular y, también destacó en términos generales de que cualquier caracterización axiomática de la Teoría de Conjuntos puede ser categórica;(118) (2) "Die Axiomatisirung der Mengenlehre" (Math. Z., **27** (1928) 669-752 pp.). Aquí es donde de-- muestra en detalle como es que la Teoría de Conjuntos puede ser deducida de sus axiomas.

El tratamiento de conjuntos de von Neumenn es una - generalización del tratamiento Zermelo-Fraenkel, en el cual la vieja teoría es retenida sustancialmente, pero de una forma modificada. A primera vista los nuevos axiomas parecen ser muy diferentes de los anteriores, pero ésto es debido solamente al cambio de lenguaje. Cuando las nociones de la Teoría de Conjuntos son usadas en Matemáticas existen dos posibles lenguajes en los cuales pueden - ser expresadas: el lenguaje de conjuntos y sus miembros, y el lenguaje de funciones y sus argumentos; y los dos son equivalentes, - ya que cualquier función puede ser interpretada como un conjunto - de pares ordenados y cualquier conjunto puede ser especificado con la ayuda de una función característica. Obviamente el lenguaje preferido por Zermelo era el de conjuntos, sin embargo la idea de - 'función' estaba ya implícita en la noción de Aussonderung de Zermelo, y en la teoría de Fraenkel se convierte en una realidad ex-- plícita. El lenguaje de von Neumann es el opuesto al de Zermelo y, fundamenta sus axiomas en términos de funciones y argumentos.

Sin embargo la diferencia fundamental entre los sistemas de Zermelo-Fraenkel y von Neumann no es el lenguaje, sino la forma como tratan de erradicar las paradojas de la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Zermelo-Fraenkel habían tratado de eliminar las paradojas limitando el significado de la formulación de conjuntos a aquellos que eran indispensables en los propósitos matemáticos. Pero en el sistema de von Neumann las limitaciones son más severas(119) y privan a los matemáticos de modos de argumentar que algunas veces son útiles y que parecen estar libres de vicios de circularidad. Von Neumann toma las restricciones hechas por Zermelo-Fraenkel y además hace otras para totalidades en un sentido más extenso. Por lo que, si el sistema de Fraenkel está basado en un postulado singular de dominio de conjuntos entonces von Neumann postula dos dominios;(120) un dominio de argumentos y un dominio de funciones, y la intersección de ambos es un dominio de funciones-argumentos.

Si 'x' es una función y 'y' es un argumento, von Neumann denota 'el valor de la función x para el argumento y' por $[x,y]$. Para poder representar totalidades en su sistema por medio de funciones características, postula dos argumentos constantes A y B, y entonces llama una función 'a' un 'dominio' si es tal que, para cualquier argumento x, ó $[a,x] = A$ ó $[a,x] = B$. Una función tal corresponde intuitivamente a la totalidad de todos aquellos argumentos x para los cuales $[a,x] \neq A$, es decir, para los cuales $[a,x] = B$. Si un dominio, en este sentido especial, no es simplemente una función con la propiedad justificada, pero si una función-argumento, entonces von Neumann lo llama un conjunto.

Por lo que la distinción de von Neumann entre fun--

ciones y funciones-argumento sirve para proteger la Teoría de Conjuntos contra las paradojas, como la de Russell y la de Burali-Forti. Trabajando con una Teoría Axiomática de Conjuntos, en lugar de un Sistema Logístico, como el "Principia Mathematica", en el cual todas las nociones matemáticas están definidas en términos de unas pocas ideas primitivas que pertenecen a la Lógica. El evita la necesidad de una teoría completa de tipos y está en posibilidades de manejar con una estratificación mucho más simple de sus entidades dentro de dos impenetrables estratos.[121]

En este sentido el Axioma de Exclusión[122] de von Neumann es un principio muy fuerte, y de éste pueden ser deducidos el Axioma de Separación de Zermelo y el Axioma de Reemplazamiento de Fraenkel. Además, con la utilización de este Axioma en el Sistema Axiomático de von Neumann, el Teorema del Buen-Orden puede ser demostrado sin utilizar el Axioma de Elección.

En la presentación formal de su teoría, von Neumann utiliza una terminología neutra, y en lugar de decir: 'argumento' menciona 'I-objeto'; en lugar de decir 'función' dice 'II-objeto'; y en lugar de 'función argumento' llama 'I-II objeto'.

Los axiomas introducidos por von Neumann son los siguientes:

VN1.- A y B son I-objetos.

VN2.- $[x,y]$ tiene significado si y sólo si x es un II-objeto y 'y' es un I-objeto; 'y' es siempre I-objeto.

VN3.- (x,y) tiene significado si 'x' y 'y' son I-objetos; y es él mismo un I-objeto.[123]

VN4.- Sean a y b II-objetos; si $[a,x] = [b,x]$ para todos los I-objetos x, entonces a = b.

La forma como el sistema axiomático de von Neumann trata los conjuntos es a veces tosca y artificial. Pero una de las direcciones de más reciente investigación dentro de la Teoría de - Conjuntos es tomar las ventajas de los mejoramientos sustanciales hechos por von Neumann, y al mismo tiempo regresar al punto de vista más natural de Cantor.

§6.- LA UNIFICACION DE LA LOGICA MATEMATICA Y LA TEORIA DE CONJUNTOS.-

La Matemática actualmente está siendo concebida como el estudio de estructuras abstractas, de la cual su base natural es la Teoría de Conjuntos. Hemos visto como desde Zermelo hasta von Neumann se ha ido construyendo una Teoría de Conjuntos abstracta suficientemente completa y fuerte para servir de base a un tratamiento completamente riguroso de las matemáticas puras. El objetivo inmediato de todos estos estudios era ponerlos en una relación más estrecha con la Lógica Matemática. Esto fue hecho por - Paul Bernays en una serie de artículos publicados en el Journal of Symbolic Logic (véase bibliografía) y revisados y completados más tarde en su "Axiomatic Set Theory", Amsterdam, 1958.

Bernays siguiendo los pasos de Zermelo y Fraenkel, trata los conjuntos de una manera estrictamente matemática; postulándolos simplemente con sus propiedades básicas como entes primitivos, y no tratando de derivarlos de ideas más básicas de la Lógica. Pero, al mismo tiempo, no excluye de sus sistema la noción de extensión de un predicado.

Ahora, adoptando las ideas de von Neumann, el trabaja con 'conjuntos' y 'clases' en lugar de I-objetos y II-objetos. Los conjuntos[124] son las entidades esenciales (individuos) de la teoría, mientras que las clases[125] son entidades ideales[126]. Un conjunto, interpretado intuitivamente, es un agregado y, una clase es la extensión de un predicado.

Bernays toma las siguientes convenciones:

(1) Para dos conjuntos cualesquiera 'a' y 'b', ó $a \in b$ ó $a \notin b$; y para cualquier conjunto 'a' y cualquier clase 'A', ó $a \in A$ ó $a \notin A$, dependiendo si tienen o no la propiedad expresada en el predicado definido de A.

(2) Ninguna clase B puede ser considerada como miembro, ya sea de un conjunto o de otra clase, y las combinaciones de los símbolos de la forma $B \in a$ ó $B \in C$ no son permitidos.[127]

Los conceptos de 'clase' y 'conjunto' se corresponden más o menos a los conceptos de II-objeto y I-objeto, pero hablando estrictamente son cosas totalmente diferentes. En el sistema de Bernays puede suceder que un conjunto 'a' y una clase 'B' tengan los mismos miembros, en este caso se dice que la clase 'B' 'está representada' por el conjunto 'a'.

Lo primero que hace Bernays en la presentación formal de su sistema es especificar el cálculo lógico en que va a basar su sistema. Para especificar ésto, Bernays introduce sntáticamente el cálculo de predicados restringuido: formula sus axiomas y las reglas de derivación o de inferencia, en términos de variables sintácticas.[128]

De las expresiones simbólicas bien-formadas, algunas son términos[129] y otras son fórmulas, y éstas dos categorías pueden ser definidas sintácticamente por recursión.

La relación de 'identidad', a = b, es tomada como una relación primitiva[130], y siempre conecta dos 'conjuntos-términos'. Para las 'clases-término' existe una relación equivalente $A \sim B$[131] y puede ser definida simplemente como:[132]

$$A \sim B \equiv (x)(x \in A \equiv x \in B).$$

Las únicas fórmulas primitivas atómicas que suceden en el sistema son aquellas de la forma a = b, $a \in b$, y $a \in B$, donde 'a' y 'b' son conjuntos-término y B es una clase-término. Para el caso de las clases-término tenemos el "Esquema de Church":[133]

$$c \in \{ \xi \mid B(\xi) \equiv B(c) .$$

Bernays especifica paso a paso sus axiomas y para ésto se ayuda de varias definiciones. Los primeros axiomas que él enuncia son:

B1.- Axioma de Igualdad.-

$$a = b \supset (a \in A \supset b \in A).$$

B2.- Axioma de Extensionalidad.-

$$(x)(x \in a \equiv x \in b) \supset a = b.$$

Nosotros podríamos hacer más fuerte el axioma (B1), la doble implicación

$$a = b \equiv (x)(x \in a \equiv x \in b);$$

pero esta fórmula se puede derivar dentro del sistema y, dice que un conjunto está unívocamente determinado por sus elementos.(134)

Nosotros podemos definir algunos conceptos de clases como:

DB1.- El Complemento de una clase

$$A' \sim \{x \mid x \notin A\},$$

DB2.- La Unión de Clases.

$$A \vee B \sim \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

DB3.- La Intersección de Clases.

$$A \wedge B \sim \{x \mid x \in A \;\&\; x \in B\}.$$

DB4.- La Clase Universal.

$$U \sim \{x \mid x = x\}.$$

DB5.- La Clase Vacía.

$$\Phi \sim \{x \mid x \neq x\},$$

y desarrollar formalmente el álgebra booleana de clases.

Ahora, pasando a la Axiomatización de la Teoría de Conjuntos, Bernays considera los siguientes axiomas:

B3.- Axioma del Conjunto Vacío.- 'El conjunto vacío no contiene elementos, o sea,

$$a \notin \Phi \;.'$$

B4.- Axioma de Unión de Conjuntos Elementales.- 'En este axioma b;c corresponde a la unión de $b \vee \{c\}$ de los dos conjuntos b y $\{c\}$, en símbolos

$$a \in b;c \equiv (a \in b \vee a = c).'$$

B5.- Axioma de la Unión.- 'Aquí $\sum_{\xi}(m,t(\xi))$ corresponde a la unión $\bigcup_{\xi \in m} t(\xi)$, donde $t(\xi)$ es un conjunto que depende de ξ, es decir,

$$a \in \sum_{\xi}(m,t(\xi)) \equiv (E\xi)(\xi \in m \;\&\; a \in t(\xi)).$$

Otras definiciones que él da son:

DB6.- El conjunto unidad 'a'

$$[a] = \Phi;a.$$

DB7.- El par no-ordenado

$$[a,b] = [a];b.$$

DB8.- El par ordenado $\langle a,b\rangle$

$$\langle a,b\rangle = [[a],[b]].$$

Una cosa importante que hay que mencionar es que el Axioma de Separación no es necesario en este sistema, ya que existe un esquema derivable que formaliza la afirmación que, para cualquier conjunto b y cualquier predicado P(x), existe un conjunto que consiste de todos los elementos 'a' de 'b' que satisfacen P(a).

Además de los axiomas que hemos mencionado son necesarios, para el desarrollo completo de la Teoría de Conjuntos, los Axiomas del Conjuntos Potencia (B6), el Axioma de Elección (B7), y el Axioma del Infinito (B8), que corresponden a los Axiomas de Zermelo y Fraenkel.

§ 7.- LA TEORIA DEL ZIG-ZAG.-

El 16 de noviembre de 1936 se recibió en la American Mathematical Monthly[135] un artículo titulado "Nueva Fundamen tación de la Lógica-Matemática", escrito por un filósofo logocista llamado Willard van Orman Quine. En este artículo se intentaba dar una nueva axiomatización de la Teoría de Conjuntos, desde un punto de vista logicista, a pesar de los resultados publicados pocos años antes por Kurt Gödel (véase libro VII, §3).

Como cosa curiosa no se habían dado trabajos, dentro de la Escuela Logicista, que superaran o mejoraran los trabajos de Russell y Whitehead. Y digo curioso, porque el trabajo que Quine presentó intentando mejorar la Teoría de Tipos fue conociendo los teoremas de Gödel lo que le daba pocas posibilidades a esta superación o mejoría.

El sistema o teoría que presentó en su artículo es conocido actualmente con el nombre de 'Teoría del Zig-Zag', la que denotaremos por 'Q'.

Como apuntábamos en líneas anteriores esta 'Teoría del Zig-Zag' es un intento de generalización o ensachamiento de la Teoría de Tipos. El aspecto formal de dicho ensachamiento es muy simple, pero tiene modificaciones esenciales. La inovación principal de Quine es el empleo de un Principio de 'Estratificación de Clases' que permite eliminar los índices de los tipos.[136] Quine afirma que una frase está estratificada cuando es posible enumerar cada variable de tal manera que un número entero sea etiquetado a cada una de las apariciones de la misma variable, y además que la variable que sigue a '$\in$' toma el número entero consecutivo de aquel de la variable que precede a '$\in$'. Por ejmplo, la frase

$$(x \in y \mathbin{\&} y \in z) \vee (x \in w \mathbin{\&} w \in z)$$

está estratificada, porque podemos asignarles a las variables números enteros como el 1 a la 'x', el 2 a la 'w' y a la 'y', y el 3 a la 'z'. Pero

$$x \in y \ \& \ y \in z \ \& \ z \in x$$

ó

$$(x \in y \ \& \ y \in z) \vee x \in z$$

no están estratificadas porque no es posible encontrar una numeración que cumpla las condiciones.

Por otro lado, Quine no exige que todas las frases de Q estén estratificadas. De hecho la notación primitiva y el dominio de las frases de Q son exactamente los mismos que los del sistema de Zermelo (Z). El sistema Q, como el Z, contiene también la teoría de la Cuantificación para las variables generales 'x', 'y', etc. Además, el Principio de Estratificación no interviene mas que como una restricción sobre los axiomas que postulan existencia de conjuntos.(137)

Pasando a la teoría en sí vemos que Quine define la identidad en Q como sigue:

$$x = y \equiv (z)(x \in z \supset y \in z)$$

y los axiomas que postula son los siguientes:

<u>Q1.- Axioma de Extensionalidad.-</u>

'$(z)(z \in x \equiv z \in y) \supset x = y$.'

<u>Q2.- Axioma del Zig-Zag.-</u> 'Si 'F(x)' está estratificada y no contiene ninguna 'y' libre, entonces

$(Ey)(x)[x \in y \equiv F(x)$.'

Formalmente, Q2 es el mismo axioma T2 del sistema T pero sin índices de tipos, ya que está entendido que mientras los índices de los tipos no aparezcan, las variables distintas permanecerán distintas.[138]

A pesar de tal semejanza formal al sistema T, Q es completamente diferente de T. Por ejemplo, nosotros podemos probar en Q la existencia de un conjunto universal U tal que:

$$(x)(x \in U),$$

pero en particular

$$U \in U.$$

A pesar del Principio de Estratificación sobre el axioma Q2 existe en Q al menos un 'conjunto que es elemento de sí mismo', y ésto no sucede en T.[139] Por lo que, si nosotros tuviéramos un modelo aplicable a T éste no podría ser válido para el sistema Q.

Debido a este hecho y a que la Teoría de Números no podía desarrollarse dentro del sistema Q,[140] Quine propone ciertas mejoras a su axiomatización. Para ésto hace una generalización de su propio sistema y, ahora, la notación y el dominio de frases son exactamente iguales a los correspondientes de von Neumann.

Su nuevo sistema (lo denotaremos por 'NQ') tiene tres axiomas, donde:

<u>NQ1.-</u> Es una generalización de Q1, o sea,

$$(z)(z \in x \equiv z \in y) \supset (x \in Z \supset y \in Z).$$

NQ2.- Es el idéntico de Q2.[141]

NQ3.- Es el axioma que estipula la existencia de clases:

$$(Ey)(x)\left[x \in Y \equiv F(x)\right]$$

donde 'F(x)' es no importa que frase de NQ en la que 'Y' no aparece.

§8.- EL GRUPO NICOLAS BOURBAKI.-

Es sorprendente que, después de todos los trabajos realizados en la Lógica-Matemática con la intención de dar un instrumento lógico capaz de sostener la total complejitud de las matemáticas modernas con rigor y claridad, nos encontremos con un sistema increíblemente simple. Este sistema fue creado por Nicolás Bourbaki.

Pero lo más sorprendente de todo es que "su nombre es griego, su nacionalidad es francesa y su historia es curiosa. Es uno de los matemáticos más influyentes del siglo XX. Existen muchas leyenas acerca de él, y cada día va habiendo más. Casi cada uno de los matemáticos conoce unas pocas historias acerca de él y probablemente ha inventado también un par de ellas más. Sus trabajos se leen y se citan extensamente en todo el mundo. Existen jóvenes en Río de Janeiro cuya educación matemática ha sido basada casi enteramente en sus trabajos y existen famosos matemáticos en Berkeley y en Göttingen que piensan que su influjo es pernicioso. Tiene partidarios fervientes y detractores vociferantes en cualquier grupo de matemáticos que se reúna. El hecho más extraño sobre él, sin embargo, es que no existe.

Este francés no existente con nombre griego es Nicolás Bourbaki. El hecho es que Nicolás Bourbaki es un seudónimo colectivo utilizado por una corporación informal de matemáticos."(142)

El estudio de la Teoría de Conjuntos y Lógica-Matemática está contenido en la primera parte de la obra monumental de los Bourbaki: "Eléments de Mathématique", la cual se ha estado publicando desde 1939 (hasta la fecha se han publicado más de 30 volúmenes).

Pasando a su axiomatización vemos que los Bourbaki no introducen ningún formalismo para las clases, y en su sistema todos los términos son 'conjuntos-términos'. Pero ésto no es una diferencia de fundamental importancia entre su sistema y el de Bernays, ya que el Esquema de Church dice que las clases sirven solamente para proveer una forma alternativa de hacer argumentos que envuelvan predicados.

En los momentos en que Bernays dice que una clase A 'está representada' por un conjunto 'a', Bourbaki dice que un predicado(143) R(x) es 'conjuntable' (en francés coll_x).

Nosotros podemos definir la 'relación conjuntable' en nuestro simbolismo diciendo:

$$\mathrm{Coll}_x\, R(x) \equiv (Ey)(x)(x \in y \equiv R(x)).$$

Los axiomas de los Bourbaki son:

B01.- Axioma de Determinación o Extensión.-

$$(x)(y)((x \subseteq y \;\&\; y \subseteq x) \supset x = y).$$

BO2.- Axioma de los Conjuntos Elementales.-

$$(x)(y)\ \mathrm{Coll}_z\ (z = x \vee z = y).$$

BO3.- Axioma del Par Ordenado.-

$$(x)(u)(y)(v)\left[(x,y) = (u,v) \Rightarrow (x = u \ \&\ y = v)\right].$$

BO4.- Axioma del Conjunto Potencia.-

$$(x)\ \mathrm{Coll}_y\ (y \subseteq x).$$

BO5.- Axioma del Infinito.-

Existe un conjunto infinito.

Además de estos cinco axiomas, existe un fuerte esquema, llamado por Bourbaki el "Esquema de Selección y Reunión", el cual absorbe por completo los siguientes axiomas:

(1) Axioma de Separación,

(2) Axioma de la Unión, y

(3) Axioma de Sustitución de Fraenkel.

Finalmente, como es claro, el grupo Bourbaki apoya fuertemente la idea de que la fundamentación más apropiada para las Matemáticas puras es una combinación de la Lógica Simbólica y la Teoría Axiomática de Conjuntos. Como nosotros sabemos esta idea fue primeramente señalada por Paul Bernays.

Y, por otro lado, no cabe duda de que este intento de fundamentar la matemática es la empresa más grande y provechosa, dentro de las matemáticas, que se formularon y cuestionaron los matemáticos del presente siglo.

"Las generaciones posteriores considerarán la Teoría de Conjuntos como una enfermedad de la cual nos hemos restablecido."
Henri Poincaré (1908).

LIBRO VII.-

CONCLUSIONES Y OTROS RESULTADOS

§1.- LA TEORIA DE CONJUNTOS CANTORIANA Y SUS IMPLICACIONES FILOSOFICAS

La teoría de conjuntos, en sus primeros años, tuvó un auge fuera de toda medida; abarcando por igual su desarrollo teórico y sus aplicaciones. Pero, posteriormente, surgieron algunas cuestiones que entorpecieron un alcance más profundo dentro de la misma teoría.(144)

Una de las cuestiones que entorpecieron este desarrollo fue el 'Axioma de Elección', el cual como ya habíamos mencionado, puede ser comparado, dentro de su marco histórico, al famoso quinto postulado de Euclides.

Ya, hacia 1880 y 1890 Cantor había hacho unas demostraciones con un argumento que es lógicamente equivalente al Axioma de Elección. Fue en 1902 cuando Bepo Levi se dió cuenta del uso de dicho axioma. En 1904, Zermelo lo utilizó explícitamente en la demostración del Teorema del Buen-Orden. Desde 1904 a 1910 se publicaron en varias revistas artículos donde se destacaba el eceptácismo hacía la demostración dada por Zermelo. Las críticas se separaban en dos grandes grupos: (a) aquellos que no aceptaban el axioma, pero aceptaban la demostración y, (b) aquellos que aceptaben el axioma pero no la demostración. En 1908, Zermelo demostró el -

mismo teorema por un método totalmente diferente, pero que también dependía del Axioma de Elección.

Los malentendidos y dudas que existían en torno del Axioma de Elección y del concepto del Infinito Actual dieron origen a tres diferentes escuelas filosóficas dentro de la matemática.[145]

1.- La Escuela Logicista.- Los logicistas consideran a la Lógica como la base de la matemática y, afirman que la lógica realiza la reducción de conceptos y métodos de inferencia matemática, o sea, consideran que la matemática es solamente una parte de la Lógica.

Aunque A.N. Whitehead y Bertrand Russell son considerados como los fundadores de esta escuela, ya algunos otros matemáticos y filósofos habían hecho estudios en este campo como son: R. Llull (1231-1315), J. Caramul (1606-1682), René Descartes, Godofredo Guillermo Leibniz,[146] Gottlob Frege[147] y el italiano G. Peano (1858-1932).[148]

Analizando la obra de Whitehead y Russell, "Principia Mathematica", vemos que ésta empieza como si fuera un tratado de Lógica y avanza paulatinamente mediante operaciones lógicas y definiciones para justificar todos los elementos fundamentales de la Matemática.

Para poder reducir todos los teoremas matemáticos a la Lógica, los logicistas admiten como verdaderos los axiomas de Infinitud, Elección y Reducibilidad (véase el § 2 del capítulo VI).

2.- La Escuela Formalista.- El fundador de esta escuela fue David Hilbert, quien en su libro "Fundamentos de la Geometría" (1899), fundamentó la geometría e hizó patente su consistencia relativa respecto a la Aritmética y al Análisis. Y, dejó ver la necesidad de fundamentar éstas, aunque para ésto es necesario hacer lo mismo primero con la Teoría de Números y la Teoría de Conjuntos.

Es aquí cuando Hilbert toma las ideas de Kant para el desarrollo de su Matemática en su intento de fundamemtar la Matemática. "La idea fundamental de Hilbert al crear la teoría formalista para la fundamentación de la matemática consiste en la intuición de que ha de ser posible establecer más allá de toda duda la validez de las matemáticas clásicas, incluso de las no constructivas, apelando al carácter finitista o finitario de las demostraciones matemáticas".(149)

Los formalistas, en las demostraciones y deducciones, nunca toman en cuenta el contenido material o intuición de los conceptos primitivos, o sea, el contenido esencial de los términos primitivos (punto, recta, etc.) es lo que está definido implícitamente por los axiomas. En un sistema formal no tiene sentido hablar de verdad o falsedad pues los términos, fórmulas, demostraciones y teoremas, son simples combinaciones de los elementos primitivos.

Si nosotros pretendemos fundamentar la matemática por medio de un sistema formal es necesario que sus elementos y axiomas tengan un carácter existencial. La diferencia esencial entre los sistemas axiomáticos de Hilbert y Russell es que el primero debe considerarse como existencial y el segundo como genético o material.

La opinión que tenían los dos fundadores de las otras escuelas es la siguiente:

"El formalista sostiene que la razón humana no dispone de imágenes exactas de las líneas rectas o de los números mayores que diez, por ejemplo...... Es cierto que a partir de ciertas relaciones entre entidades matemáticas que tomamos como axiomas, deducimos otras relaciones siguiendo reglas fijas, teniendo la convicción de que de esta manera derivamos verdades a partir de otras verdades por medio de un razonamiento lógico...... Pero para el formalista, la exactitud matemática reside solamente en el despliegue de la sucesión de relaciones, y es independiente de la significación que queramos dar a estas relaciones o a las entidades relacionadas con ellas."(150)

"Los formalistas son semejantes a un relojero que se halla tan absorbido por el deseo de que sus relojes tangan buen aspecto, que olvida que la misión de los mismos es la de señalar el tiempo, y descuida la máquina."(151)

Sin embargo, a pesar de estos comentarios y muchas otras críticas, son los formalistas los que más adeptos tienen en la actualidad.

3.- La Escuela Intuicionista.- Fue Leopold Kronecker el primero que criticó los trabajos de Dedekind y Cantor porque los objetos matemáticos que ellos manejaban no podían ser construidos y, que, por lo tanto, el contenido de sus teoremas era vacío y que todas sus especulaciones no tenían sentido. Posteriormen te, Henri Poincaré mencionó la importancia que tenía en la construcción la intuición del Principio Matemático de Inducción Completa (véase la demostración del teorema (5) de la nota 43). Entre los más conocidos intuicionistas están: E. Borel, Hermann Weyl, L.E.J. Brouwer quien es conocido como el fundador del Intuicionismo, A. Heyting, S.C. Klenne y P. Lorenzen.

El principio básico de los Intuicionistas es el Principio de 'Construcción Mental', el cual no puede ser reducido o fundado en algo más primitivo o radical. La matemática intuicionista comienza por construir los números naturales de una manera genética existencial.

Para ellos no es necesario discutir los conceptos de construcción mental e intuición matemática pues éstos se hallan en un campo pre-matemático o dentro de la Filosofía de la Matemática.

Los Intuicionistas sólo consideran como conjuntos existentes aquellos que son finitos, infinitos en potencia y, aquellos que son equivalentes a los naturales; pero para ellos es absurdo hablar de cualquier conjunto infinito actual. Tampoco aceptan los argumentos existenciales, a ellos hay que mostrarles el procedimiento de construcción y no solamente señalar la existencia del objeto.

Para los Intuicionistas no vale el Principio del Tercer Excluso(152) como tampoco es válido el uso de definiciones impredicativas.(153)

"La Escuela Intuicionista, cuyo recuerdo subsistirá únicamente a título de curiosidad histórica, habrá tenido al menos la utilidad de obligar a sus adversarios, es decir, a la inmensa mayoría de los matemáticos, a precisar sus posiciones y a tomar conciencia más claramente de las razones (de orden lógico unas, y sentimentales las otras) de su confianza en las Matemáticas."(154)

A partir del desarrollo de la Teoría de los Números Transfinitos de Cantor surgió otro problema: "El Problema del Continuo". Cantor supusó (Hipótesis del Continuo) que $2^{\aleph_0}$ era igual a $\aleph_1$ (inmediato sucesor de $\aleph_0$ en la sucesión de los números cardinales transfinitos), es decir que,

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Posteriormente, se generalizó la Hipótesis del Continuo y se supusó que

$$2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}.$$

Hilbert, por ejemplo, pensó que esto podría ser deducido de los axiomas de la teoría como un teorema.

Por otro lado, como el 'Axioma de Elección' era necesario en muchas ramas de la Matemática, los Matemáticos se plantearon dos preguntas:

(1) ¿Es independiente de los principios clásicos de la Lógica y Matemática, o puede ser probado a partir de otros axiomas? Esta pregunta fue contestada por Paul Cohen en ;1963;, (véase la bibliografía), quien demostró que el axioma era independiente y de esta manera sepultó todos los intentos de demostración que se hicieron del axioma a partir de 1922.

(2) ¿Es el axioma compatible con los principios lógi

cos o matemáticos, o el tomarlo en cuenta nos lleva a contradicción? La respuesta a esta pregunta fue afirmativa y la contestó Kurt Gödel en varios artículos a partir de 1938.

§2.- TEORIAS DE CONJUNTOS NO-CANTORIANAS.-

"La teoría abstracta de conjuntos se encuentra actualmente en un estado de cambio que es análogo en varios respectos a la revolución del siglo XIX de la Geometría."[155]

De la misma forma como aparecieron las Geometrías No-Euclidianas a partir de la negación del quinto postulado, así también aparecieron las Teorías de Conjuntos No-Cantorianas a partir de la negación del Axioma de Elección y de la negación de la Hipótesis del Continuo.

Aunque Kurt Gödel es más conocido por sus "Teoremas de Incompletez (véase el §3 de este mismo capítulo), también fue el causante de que surgieran diferentes teorías de conjuntos no-cantorianas.

Para crear este tipo de teorías demostró (1938) que: si la teoría de conjuntos sin el axioma de elección[156] es consistente[157] entonces también lo es la teoría de conjuntos con el axioma de Elección. Es decir, si nosotros encontramos una contradicción en la teoría amplificada, entonces la contradicción debe estar también dentro de la teoría que no considera el Axioma de Elección. En pocas palabras, el Axioma de Elección es tan peligroso como los otros axiomas.

Pero lo mismo demostró Gödel considerando la Hipótesis del Continuo como un axioma más de su sistema. O sea, que si la teoría de conjuntos típica (la cantoriana) contenía alguna contradicción considerando la Hipótesis del Continuo, entonces esta contradicción debería estar en el sistema que hemos restringuido es decir, la teoría de conjuntos sin la Hipótesis del Continuo. Es muy importante señalar que Gödel no ha demostrado que

$$(1) \qquad 2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

sino que solamente ha demostrado que (1) no puede ser demostrado como falso, es decir, en nuestras manos está el considerarlo o no dentro de la teoría. Como se ve éste no es el tipo de demostración que Hilbert había supuesto.

Sabemos nosotros que las dos posibles negaciones del quinto postulado de Euclides implican que: (i) la paralela trazada en un punto dado con respecto a una recta dada no es única y, que (ii) dada una recta y un punto fuera de ella, no existe ninguna recta paralela a la recta dada que pase por el punto.

Basándonos en este hecho nosotros podríamos formular teorías de conjuntos que consideraran como un axioma la negación del Axioma del Elección. Con este axioma nosotros podríamos crear una Teoría de Conjuntos totalmente distinta a la que hemos estudiado durante el desarrollo de la presente tesis.

Pero así como consideramos teorías de conjuntos en donde el Axioma de Elección no intervenga, nosotros también podríamos considerar teorías donde la Hipótesis del Continuo no tuviera valor.

§3.- LOS TEOREMAS DE INCOMPLETEZ DE GODEL Y SUS CONSECUENCIAS EN LA FUNDAMENTACION DE LA MATEMATICA

Desde un punto de vista estrictamente matemático, la Teoría Axiomática de Conjuntos que nosotros estudiamos en el último capítulo de una respuesta aceptable a la demanda de una fundamentación segura para la matemática pura. Las matemáticas pueden ser de hecho erigidas sobre esta fundamentación; y hasta la fecha no se ha dado ninguna demostración de la consistencia de la Teoría de Conjuntos; las contradicciones, paradojas o antinomias parecen haber sido excluidas de la teoría al aplicar las restricciones lógicas incorporadas al sistema. Sin embargo, cuando vemos la Teoría de Conjuntos desde un punto de vista filosófico apreciamos que quedan muchas preguntas abiertas.

El primero en señalar los graves errores y dificultades que presentaba la axiomatización de Zermelo fue Skolem en 1922 (véase nota 113). Algunos de los problemas que señaló fueron resueltos por los seguidores de Zermelo, como en el caso del concepto de 'definitud' que Fraenkel aclaró, pero otras de las cuestiones han quedado sin resolver. Por ejemplo, una de las objeciones que Skolem señalaba era una aprente circularidad en el sistema de Zermelo. Esto, debido a que Zermelo no le había dado mucha importancia a su 'dominio de individuos', y resultaba ser a partir de este hecho, que la teoría, presentada axiomáticamente, contenía ella misma parte de su base lógica. Otra de las objeciones que señaló del tratamiento de Zermelo es conocida actualmente como: "La Paradoja de Skolem".[158]

Todos los Formalistas estaban seguros de que pronto encontrarían la Teoría Axiomática de los Conjuntos perfecta que les permitiría fundamentar la Matemática por completo. Su desengaño vino con los resultados obtenidos por Kurt Gödel con sus famosos "Teoremas de Incompletez", demostrados en 1931.

Los teoremas de Gödel se pueden enunciar de la siguiente manera:(159)

Teorema 1.- "Si el sistema S es consistente, entonces es incompleto", o sea, siempre existe una fórmula indecidible.

Teorema 2.- "Si el sistema S es consistente y lo suficientemente rico para poder representar la aritmética elemental entonces la consistencia del sistema es imposible demostrarla dentro del sistema mismo".

Hermann Weyl sintetiza muy claramente las implicaciones de estos teoremas cuando dice: "Gödel demostró que en el formalismo de Hilbert, de hecho en cualquier sistema formal M que no sea demasiado restringuido suceden dos cosas raras: (1) se pueden encontrar proposiciones aritméticas de naturaleza relativamente (Φ) elemental que son evidentemente ciertas pero no deducibles dentro del formalismo. (2) La fórmula Ω que expresa la consistencia del sistema M, no es deducible dentro de M. Más precisamente, una deducción de Φ u Ω dentro del formalismo M llevaría directamenta a una contradicción en M."(160)

Como nosotros sabemos, Hilbert y la Escuela Formalista creían poder fundamentar las matemáticas clásicas por medio de una teoría de la demostración,(161) la cual se podría desarrollar en un marco estrictamente finitista; así como también, Hilbert esperaba reducir el tratameinto de los problemas de existencia a manipulaciones siempre efectuales;(162) y por último, Hilbert también consideraba que la matemática pertenecía al orden de lo deducible.

Si bien los teoremas de Gödel no acabaron de raíz las ideas de Hilbert, si como dice Hermann Weyl: "Las esperanzas de obtener una demostración finitista de la consistencia se han hecho verdaderamente tenues."(163)

§4.- CONCLUSIONES.

Hasta hoy en día sigue sorprendiendo el desarrollo de la Teoría de Conjuntos a todos los matemáticos. Es un hecho casí único en la Historia de la Ciencia el que un sólo hombre haya podido fundar una nueva rama de la ciencia en sólo dos decadas, y teniendo en contra todos los prejuicios y antagonismos de sus contemporáneos.

Ya el mismo Cantor lo señalaba a finales del siglo pasado: "La descripción de mis investigaciones en la Teoría de los Agregados ha alcanzado un estado donde la continuación de esas investigaciones han venido a depender de la generalización del concepto de entero positivo real más allá de los límites actuales; una generalización que toma una dirección que, hasta donde yo sé, nadie ha considerado aún.

Dependo de esta generalización del concepto de número en tal medida que sin ella no podría lograr libremente ni siquiera pequeños avances en la Teoría de los Agregados. Espero que esta situación llegue a justificar, o a excusar de ser necesario, la introducción en mis argumentos de ideas aparentemente extrañas. De hecho el propósito no es otro que el de generalizar o extender la serie de los enteros reales más allá del infinito. Por atrevido que esto pudiera parecer, expreso no sólo la esperanza sino también la firme convicción de que a su tiempo esta generalización será reconocida como un paso natural, apropiado y bien sencillo. Con todo tengo plena conciencia que al adoptar tal procedimeinto me coloco en oposición de los criterios más extendidos respecto al infinito en las matemáticas, así como a las opiniones en boga sobre la naturaleza del número."(164)

Pero lo más sorprendente de todo es que esta nueva rama de la Matemática se haya convertido en la piedra angular de la fundamentación de varias ramas de la Matemática y, más aún, que ha sido la forma de unión más fuerte que ha existido entre la Matemática y la Lógica.

Actualmente es imposible hablar de la Teoría de las Funciones Reales, de la Teoría de la Medida, de las Integrales de Riemann, de la Topología y, en general del Análisis Matemático sin mencionar la Teoría de Conjuntos, principalmente la Teoría de Conjuntos de Puntos. Además, no hay que olvidar que lo primero que llevó a Cantor a la investigación de la Teoría de Conjuntos fueron los problemas analíticos.

La Teoría de las Probabilidades está fundamentada en los conceptos y métodos conjuntistas, o sea, que se podría pensar que no sólo las matemáticas puras como son el álgebra, la geometría, etc, han utilizado esta nueva rama de las matemáticas para fundamentarse, sino que también lo han hecho las que podríamos considerar como matemáticas aplicadas.

Es por ésto que Fraenkel dice: "Debiéramos, por ésto, incluir la Teoría de los Conjuntos entre las grandes revoluciones científicas que han transformado nuestra visión del mundo tan profunda y sorprendentemente desde finales del siglo XIX."(165)

Por último, quisiera señalar que como dijo Hermann Weyl: "Los fundamentos últimos y el sentido último de las matemáticas permanecen como problema abierto; no sabemos en qué dirección se encuentra la solución, ni siquiera sabemos si puede esperarse una respuesta objetiva final."(166) Y según Fraenkel: "La teoría de los conjuntos ha resultado ser el instrumento con el cual pueden definirse y anlizarse metódicamennte los conceptos primarios de las matemáticas vistos como una totalidad. La teoría de los conjuntos parece predestinada a este propósito."(167) Sin embargo, a últimas fechas los matemáticos han aceptado como cierta la afirmación de Weyl y como falsa la de Fraenkel y, ahora parece ser que están intentado la fundamentación de la matemática en una nueva rama llamada 'Teoría del Topoi'.

N O T A S

LIBRO I.- "BOSQUEJO HISTORICO".

(1).- No discutiremos en este trabajo si deberíamos llamarla 'Matemática' o 'Matemáticas', por no considerarlo de fundamental importancia para su desarrollo. Y mencionaremos indistintamente 'la Matemática' o 'las Matemáticas'.

(2).- BABINI, José. "Historia Sucinta de la Matemática". Espasa-Calpe. pág 19.

(3).- La demostración original del teorema se ha perdido. Aunque probablemente halla sido alguna de las dos siguientes:

a) Cualquier cuadrado ABCD (fig. 1) puede ser dividido, en dos cuadrados BK y DK y dos rectángulos iguales AK y CK, esto es, es igual al cuadrado sobre FK, al cuadrado sobre EK y cuatro veces el triángulo AEF. Pero, si tomamos los puntos

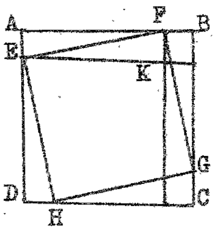


fig 1.

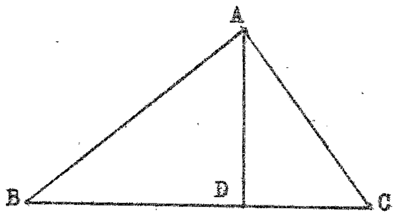


Fig 2.

G sobre BC, H sobre CD, y E sobre DA, tal que BG, CH y DE son cada uno iguales a AF, pueden ser fácilmente mostrado que EFGA es un cuadrado, y que los triángulos AEF, BFG, CGH y DHE son iguales: así el cuadrado ABCD es también igual al cuadrado sobre EF y cuatro veces el triángulo AEF. De aquí que el cuadrado sobre EF es igual a la suma de los cuadrados sobre FK y EK.

b) Sea ABC un triángulo rectángulo (fig. 2), siendo A el ángulo recto. Dibújese AD perpendicular a BC. Los triángulos ABC y DBA son semejantes. Por lo tanto

$$BC : AC = AB : BD,$$

análogamente

$$BC : AC = AC : DC.$$

De aquí que

$$AB^2 + AC^2 = BC\ (BD + DC) = BC^2.$$

Hacia el año 300 A.C., aproximadamente, se conocían veinte demostraciones distintas del teorema. Actualmente hay más de 700. Un compedio de éstas se encuentra en E.L. Loomis. "The Phithagorean Proposition." National Council of Teachers of Mathematics. U.S.A.

(4).- BABINI, José. "Origen y Naturaleza de la Ciencia." Espasa-Calpe. pág 58.

(5).- VERA, Francisco. "Puntos Críticos de la Matemática Contemporánea." Losada. págs. 9-10.

(6).- RUSSELL, Bertrand. "Los Principios de la Matemática." Espasa - Calpe. págs 395-6.

(7).- Ibidem. pág 399.

(8).- BURNET, John. "La Aurora del Pensamiento Griego." Argos. págs 388-9.

(9).- GARCIA BACCA, Juan David. "Elementos de Geometría." U.N.A.M. pág 11. El subrayado es mío.

(10).- Ibidem. pág 11. El autor traduce 'al infinito', pero considerando la opinión de otros autores me parece más correcto 'indefinidamente'. El subrayado también es mío.

(11).- "Def 23.- Líneas paralelas son aquellas líneas que, estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambas direcciones, no se encuentran una a otra en ninguna dirección." HEATH, Sir Thomas. "The Thirteen books of Euclid's Elements." pág 154. (El subrayado dentro de la nota es mío).

(12).- Importantes estudios sobre la función de los ojos y de la vista se han hecho en las diferentes escuelas o épocas de la Matemática Griega. Recordemos, por ejemplo, que Edipo en lugar de suicidarse (al conocer su pecado) se saca los ojos por considerarlo un castigo más cruel.

(13).- Esta decadencia o caída vertical de la Matemática Griega se ve claramente en el estudio de la Escuela Helenística. En ella ya no figuran creadores, sino epígonos, glosadores y comentaristas.

(14).- No analizaremos la concepción del infinito que tenían los filósofos como: San Agustín, Santo Tomás de Aquino, etc., por salirse del contexto de nuestro trabajo.

(15).- GALILEI, Galileo. "Dialogues Concerning Two New Sciences." Dover. pág 31.

(16).- Ibidem. pág 31.

(17).- BELL, Eric Temple. "Mathematics: Queen and Servant of Science." McGraw-Hill. pág 400.

(18).- Este concepto no ha sido aceptado de la misma manera por todos los matemáticos. Hay quienes alegan que la recta no está dada completamente, sino que solamente se determina el segmento unido por los dos puntos.

(19).- El Cálculo estaba basado en ideas obscuras y poco fundamentadas. Se tenían demostraciones de algunos casos particulares. Esto fue visto por George Berkeley (1684-1753) quien inició una crítica profunda a los fundamentos del Cálculo. Hay quienes intentaron imitar a los griegos en sus demostraciones como Abraham de Moivre (1667-1754) pero fracasó en sus intentos. Esta cuestión se salvaría con la obra de hombres como Bernhard Bolzano (1781-1848), Augustin Louis Cauchy (1789-1857), Niels Henrik Abel (1802-1829), Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) y Karl Weiestrass (1815-1897).

(20).- MEDA VIDAL, Manuel. "El Problema del Infinito." Revista Matemática. Segunda Serie. Número 7. pág 17. La nota original no he podido encontrarla.

(21).- VOLTAIRE, Francois Marie Arouet. "A Dictionary of Philosophy." Artículo 'Infinito'. Boston. 1884. (Recopilada por MORITZ, Robert. "On Mathematics." Dover. pág 336).

(22).- Ibidem. (Recopilada por MORITZ, Robert. Op.Cit. pág 337).

(23).- KORNER, Stephan. "Introducción a la Filosofía de la Matemática." Siglo XXI. pág 31.

(24).- GAUSS, J.K.F. "Brief an Schumacker." Werke. Bd 8. 1831. pág 216. (Recopilada por MORITZ, Robert. Op. Cit. pág 337).

(25).- CANTOR, Georg. "Zum Problem des Actualem Unendliehen." Nature und Offenborung. Bd 32. 1886. pág 226. (Recopilada por - MORITZ, Robert. Op. Cit. pág 337).

LIBRO II.- "¡UN DEMENTE.....GEORG CANTOR¡

(26).- Era una institución sin ninguna importancia.

(27).- Profesor que vive de las colegiaturas de sus alumnos.

(28).- La demostración es la siguiente: Cualquier raíz de la ecuación algebráica de grado positivo n,

$$(1) \quad a_0x^n+a_1x^{n-1}+.....+a_{n-1}x+a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0)$$

con coeficientes enteros a_k es llamada un número algebráico. Por simplicidad nos restringuiremos a números algebráicos - reales. Sabemos que (1) tiene a lo más n raíces reales.

Arreglamos todas las ecuaciones de la forma (1) pero no tomando su grado n o la magnitud de sus coeficientes, sino de acuerdo a la magnitud del entero positivo

$$(2) \quad h = (n-1) + |a_0| + |a_1| + ... + |a_n|,$$

al cual le llamamos la altura de la ecuación. h está definida de una manera única por (1), y además sólo una finidad de ecuaciones (1) con altura h corresponden a una h dada. Arreglando las ecuaciones de una altura dada de una forma arbitraria y aquellas de diferentes alturas h mediante valores crecientes de h, obtenemos una sucesión que contiene todas las ecuaciones (1), cada una en un lugar determinado. Finalmente cada ecuación (de raíces reales) es reemplazada por su finidad de raíces, las cuales pueden ser arregladas arbitrariamente. Así obtenemos una enumeración de todos los números algebráicos reales (de los cuales, para abolir la repetición, omitimos aquellos que estén con anterioridad) De aquí que, el conjunto de todos los números algebráicos reales sea numerable, o sea, los podemos poner en correspondencia uno-a-uno con el conjunto de los números naturales.

Otra demostración análoga es la siguiente: Sea como antes (1) y

$$h = n + |a_0| + |a_1| + ... + |a_n|,$$

es evidente que exite solamente un número finito de polinomios de coeficientes enteros de una altura dada h: designemos este conjunto medinate M_k. Designemos también con M_0 el conjunto formado por el cero solamente. El conjunto de to dos los polinomios de coeficientes enteros es la unión del conjunto numerable de los conjuntos finitos

$$M_0, M_1, M_2, \ldots\ldots, M_k, \ldots\ldots,$$

o sea, es numerable, ya que, la unión de un conjunto numerable de conjuntos finitos, que no tienen elementos comunes, es un conjunto numerable.

De aquí, ya que todo subconjunto infinito B de un conjunto numerable A es numerable, se deduce que el conjunto de todos los polinomios irreductibles de coeficientes enteros también es numerable. Sabemos que todo número algebráico es raíz de un polinomio irreductible de coeficientes enteros y solamente de uno. Por consiguiente, reuniendo todas las raíces de todos los polinomios de este tipo, o sea, tomando la unión de un conjunto numerable de conjuntos finitos, obtenemos el conjunto de todos los números algebráicos de aquí que, el conjunto de todos los números algebráicos reales es numerable.

Obsérvese que la diferencia esencial entre las dos demostraciones es que en la primera demostración mostramos que los números algebráicos reales son numerables, mientras que en la segunda demostramos que el conjunto de <u>todos</u> los números algebráicos es numerable.

(29).- BELL, Eric Temple. "<u>Los Grandes Matemáticos.</u>" Ed. Losada. - Pág 600. No menciona la nota original (de ésto se disculpa el autor en el prólogo de su libro).

<u>LIBRO III.- "CONTRIBUCION A LA FUNDAMENTACION DE LA TEORIA DE LOS NUMEROS CARDINALES TRANSFINITOS.-</u>

(30).- La definición original de Cantor es la siguiente: "Unter einer 'menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen."

Un agregado puede ser llamado conjunto, colección, clase, dominio o totalidad. Es importante hacer mención que la idea de 'una colección dentro de un todo' no contribuye mucho a aclarar la idea de conjunto. La idea debe ayudar a decidir si un elemento pertenece o no a un conjunto.

El conjunto contiene sus elementos o los elementos pertenecen al conjunto. Los elementos de un conjunto no deben repetirse. También se vió la necesidad de definir el conjun to vacío o nulo, aún antes de la creación de la Teoría de Conjuntos. Este conjunto se denota por Φ.

(31).- La unión de dos conjuntos M y N es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a M o a N o a ambos. La unión 'corresponde' a la operación lógica 'o'. Cantor no define la intersección de conjuntos, que 'corresponde' a la operación lógica 'y' (conjunción). La intersección de los conjuntos M y N es el conjunto de todos los elementos que son comunes a M y N.

(32).- Si M y N son conjuntos y si cada elemento de M también pertenece a N, entonces M es llamado un subconjunto de N. En particular, M es un subconjunto propio de N si contiene al menos un elemento el cual no pertenece a M.

Los conjuntos M y N son llamados iguales (M = N) si cada uno es subconjunto del otro. La relación '=' denota solamente igualdad de extensión y no de ideantidad.

(33).- Como podemos ver Cantor no define lo que es un número cardinal, sino el <u>tener</u> número cardinal. Bertrand Russell (1872-1970) lo definió, al igual que Gottlob Frege (1848-1925) de la siguiente manera: "El número cardinal de S es el conjunto de todos los conjuntos que son equivalentes a S". Más tarde veremos (Libro V, §4) porque está mal esta definición. El número cardinal o potencia de un conjunto está definido implícitamente.

(34).- Dos conjuntos se llaman equivalentes si es posible encontrar una correspondencia uno-a-uno entre sus elementos: y de aquí que, una correspondencia uno-a-uno de los elementos de M con los elementos de N es también llamada un mapeo de M en (dentro de) N, o entre N y M. Por lo que podemos decir que, M es equivalente a N si existe un mapeo del conjunto M en el conjunto N.

Una observación importante que debe hacerse es que hasta el momento para nada se ha mencionado que los conjuntos sean finitos o infinitos.

(35).- Si los conjuntos tienen n elementos entonces existen n-factorial maneras de modificar o hacer esta regla. En el caso que contengan un número infinito de elementos entonces existe un número infinito de maneras de hacer estas reglas.

(36).- Además, si $M \sim P$ entonces $P \sim M$ de acuerdo a la simetría del mapeo. La condición (5) expresa que la relación es reflexiva y la (6) dice que la relación es transitiva. Cantor fue el primero en hablar, de una manera clara, de lo que es una relación de equivalencia.

(37).- Otra formulación natural podría ser: "Conjuntos equivalentes tienen iguales números cardinales e, inversamente, todos los conjuntos con iguales números cardinales son equivalentes."

(38).- Sabemos que

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \overline{\overline{(M,N)}} \sim (M,N) \sim (N,M) \sim \overline{\overline{(N,M)}} = \mathfrak{b}+\mathfrak{a}.$$

(39).- Sean M,N,P tres conjuntos cualesquiera con números cardinales $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ respectivamente, entonces

$$\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \overline{\overline{(M,(N,P))}} \sim (M,(N,P)) \sim (M,N,P) \sim ((M,N),P) \sim \overline{\overline{((M,N),P)}} = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}.$$

(40).- Se ve a simple vista que, los Axiomas de Peano, se pueden considerar como consecuencias de la definición de los números cardinales finitos dada por Cantor. Es obvio, también, que tienen las mismas características y propiedades.

(41).- Cantor definió los conjuntos infinitos de una manera negativa, se pueden definir de una forma positiva y definir los conjuntos finitos de un modo negativo. (hubo gente que rechazó la teoría de Cantor porque éste definió negativamente los conjuntos infinitos).

Sabemos que existe una infinidad de números naturales, o que, dado un conjunto de números naturales y lo seguimos generando éste nunca se agotará. Este tipo de conjuntos (infinitos) sólo los puede generar o producir el hombre en su mente pues, aparentemente, en la naturaleza no existen conjuntos infinitos.

Teniendo el conjunto infinito de los números naturales ($\mathbb{N}$), es fácil crear diferentes conjuntos infinitos, por ejemplo:

(1) $\mathbb{N} - \{1,2,3,4,5\}$.
(2) El conjunto de los números primos. $\{2,3,5,7,\ldots\ldots\}$
(3) El conjunto de los números pares. $\{2,4,6,8,\ldots\ldots\}$
(4) El conjunto de las potencias de 4. $\{1,4,16,64,\ldots\ldots\}$

Analicemos algunas propiedades de $\mathbb{N}$:

<u>Teorema 1.-</u> "Cualquier subconjunto infinito N_o de un conjunto N de números naturales (enteros positivos) es equivalente a N."

Demostración.- Sabemos que cualquier conjunto de números naturales tiene un elemento mínimo. Sea n_1 el mínimo número en N_o, y sea n_2 el mínimo número en el residuo.

$$N_1 = N_o - \{n_1\}$$

$$N_2 = N_1 - \{n_2\} = N_o - \{n_1, n_2\}, \text{ etc.}$$

por n_{k+1} denotamos el residuo del conjunto

$$N_k = N_{k-1} - \{n_k\} = N_o - \{n_1, n_2, n_3, \ldots\ldots, n_k\}.$$

Los residuos no pueden acabarse porque ésto implicaría que el conjunto N_o es finito. Entonces podemos seguir seleccionando elementos indefinidamente. Sea,

$$N_o' = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\ldots, n_k, \ldots\ldots\}$$

el cual es un subconjunto de N, pero $N_o' = N_o$, porque cada elemento n de N_o está en N_o' y viceversa. Por otro lado, $N_o' \sim N$ en vista de que la función que asocia a cada elemento n_k de N_o' el elemento k de N. Por lo tanto, $N_o \sim N$.

Q.E.D.

Demos ahora la siguiente definición: "Cualquier conjunto que es equivalente al conjunto N de los números naturales es llamado numerable."

Por ejemplo, el conjunto de los números pares es numerable, ya que se puede poner en correspondencia uno-a-uno con los números naturales, por medio de la función $f(x) = 2x$. Puede verse de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & \ldots\ldots & x & \ldots\ldots \\
\updownarrow & | & | & | & & | & \\
2 & 4 & 6 & 8 & \ldots\ldots & 2x & \ldots\ldots
\end{array}$$

Una propiedad de los conjuntos numerables es que todos sus subconjuntos son infinitos o numerables.

<u>Teorema 2.-</u> "Un conjunto que contiene los elementos de una infinidad numerable de conjuntos numerables es también numerable."

Demostración.- Lo haremos para el caso particular de los números racionales. Sea el conjunto de todos los racionales q/s, donde q/s puede ser reducido a fracciones más simples. Si restringuimos q y s a valores naturales, entonces para cada s dada obtenemos un conjunto numerable de racionales q/s $(q = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$; de aquí que si s toma todos los valores naturales, obtenemos un conjunto numerable de conjuntos numerables. Para demostrar que estos conjuntos - juntos contienen una infinidad de miembros numerables, los arreglamos primero en una sucesión de renglones de acuerdo con sus denominadores s de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \cdots\cdots \\[2em]
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \cdots\cdots \\[2em]
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \cdots\cdots \\[2em]
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \cdots\cdots \\[2em]
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Los insertamos como se ilustra en el esquema, entonces obtenemos todos los racionales q/s como elementos de una sucesión símple. Finalmente, consideramos tres modificaciones:

1.- Antes de 1/1 ponemos o/1 = o.

2.- Cada q/s debe estar seguido por el racional negativo -(q/s).

3.- Omitimos todos los racionales que sean iguales a un racional dado con anterioridad en la sucesión.

De aquí que todos los racionales distintos están arreglados en una sucesión, lo cual demuestra que el conjunto de todos los racionales es numerable.

Q.E.D.

La numerabilidad de los números reales algebráicos fue demostrada en la nota 28.

Generalizando, podemos decir que la suma de conjuntos finitos o numerables es también finita o numerable, siempre y cuando la suma sea finita o numerable.

(42).- Sean A y B dos conjuntos tales que A y B no tienen elementos comunes, entonces:

1.- Si A y B son finitos entonces A + B es finito.

2.- Si A es finito y B es numerable entonces A + B es numerable.

3.- Si A y B son numerables, entonces A + B es numerable.

De los teoremas (1) y (2) podríamos deducir:

I.- Que cualquier conjunto infinito es equivalente a un subconjunto propio de él mismo (verdadero).

II.- Que cualesquiera dos conjuntos infinitos son equivalentes entre sí (falso).

<u>Teorema 3.-</u> "Cualquier conjunto numerable es equivalente a un subconjunto infinito propio de el mismo."

Demostración.- Sea

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$$

numerable. Entonces por el teorema (1) conjuntos tales como:

$$\{b_2, b_3, \ldots\} \ , \ \{b_k, b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots\},$$

son también numerables, o sea, equivalentes a B.

Q.E.D.

La conjetura (I) también puede ser tomada como definición de conjunto infinito: "Un conjunto es infinito cuando es equivalente a un subconjunto propio de él mismo".

Esto contradice el famoso principio formulado por los griegos (tanto filósofos como matemáticos) de que "el todo es mayor que cualquiera de sus partes", Noción Común 5 de Euclides. De la misma manera que contradice el diálogo de Galileo (ver Libro 1). Al llegar Bolzano a este resultado pensó que había llegado a una contradicción que no se podía salvar.

Demostraremos que la conjetura (II) es falsa, o sea, que existen conjuntos infinitos que no son equivalentes entre sí. Porque de otra manera, no tendría ningún interés la teoría si todos los conjuntos infinitos fueran iguales, ya que sería una teoría paralela a la de los conjuntos finitos.

Vamos a considerar segmentos de líneas rectas, considerándolas como los conjuntos de todos los puntos que caen sobre los segmentos de las líneas.

Ejemplo 1.- Sean los segmentos AB y CD tales que AB es menor que CD (fig 3). Afirmamos que el conjunto de todos los puntos del segmento AB es equivalente al conjunto de todos los puntos del segmento CD. Para demostrarlo dibujamos los segmentos paralelos uno a otro. Unimos los puntos A, C y B,D, y prolongándolas se intersectan en un punto E debido a la diferencia de longitudes. Si trazamos un rayo desde el

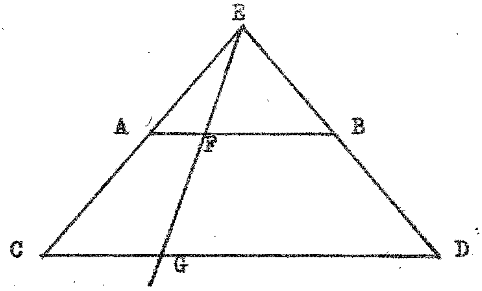


fig 3.

punto E éste intersecta ambos segmentos o ninguno de ellos. Sea el rayo EF que intersecta a AB en F y a CD en G: a la intersección del rayo con AB le asignamos la intersección del rayo con CD, e inversamente, de esta forma obtenemos una correspondencia uno-a-uno entre los dos segmentos, lo que demuestra que son equivalentes.

Ejemplo 2.- Podemos generalizar el hacho anterior afirmando que el conjunto de todos los puntos de un segmento de recta es equivalente al conjunto de todos los puntos de la recta completa, o sea, infinita.

Sean AB (excluyendo los extremos A, B) y CD dos rectas tales que AB es un segmento finito y CD infinito (en cuanto magnitud). Sea E el centro de AB, doblamos el segmento en E y lo ponemos sobre la línea CD de tal forma que E llegue a ser un punto de ésta (fig. 4), tomando en cuenta que A y B caen en el mismo lado de la recta y a igual distancia de E. Y, sea F el punto medio entre A y B en sus nuevas posiciones.

Cualquier rayo trazado desde F intersecta ambos segmentos, o no intersecta ninguno (excluimos los extremos pues los rayos FA y FB son paralelos a la recta). Al punto E lo asignamos a él mismo. Ahora, al punto p ó q de la recta AE

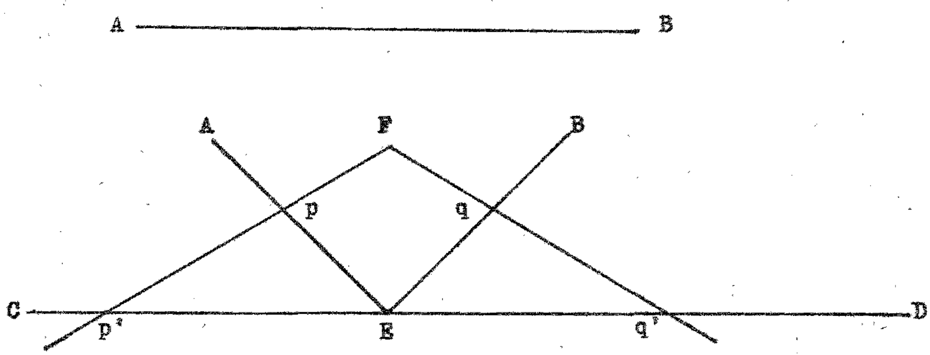


fig 4.

ó EB le asignamos el punto p' ó q' de la recta CE ó ED, e inversamente. De esta forma demostramos que ambos conjuntos se corresponden uno-a-uno.

Ejemplo 3.- Podríamos mostrar otros ejemplos de tipo geométrico como el de la fig. 5, donde se ve la misma idea. También existen ejemplos de tipo trigonométrico donde por medio de composición de funciones se pueden hacer ejemplos del mismo tipo.

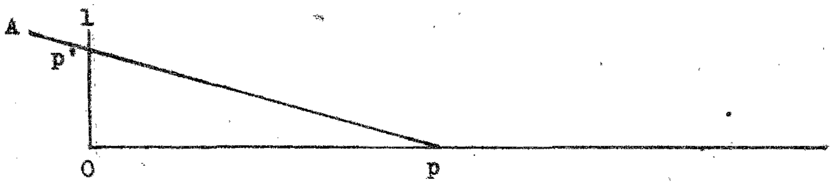


fig 5.

Bertrand Russell quizo mostrar este tipo de ideas por medio de situaciones de la 'vida real', como lo demuestra su mención a Tristán Shandy. "La paradoja de Tristán Shandy, es inversa a la de Aquiles y demuestra que la tortuga, a condición de que se le dé tiempo, llegará exactamente tan lejos como Aquiles. Tristán Shandy, como se sabe, invirtió dos años para hacer la crónica de los dos primeros días de su vida, y se lamentaba de que a ese ritmo el material se le acumularía más rápidamente de lo que él era capaz de elaborarlo, de suerte que con el paso de los años cada vez estaría más lejos del final de su relato. Ahora bien, yo sostengo que si él hubiese vivido eternamente sin sentirse cansado de su trabajo, entonces, aún en el caso de que su vida hubiese estado tan repleta de acontecimeintos como cuando empezó, ninguna parte de su biografía habría quedado sin escribirse..... Esta proposición paradójica, pero perfectamente verdadera, depende del hecho de que el número de días de todo el tiempo no es mayor que el número de los años." (RUSSELL, Bertrand. "Misticismo y Lógica." Ed. Paidos. pág. 109). El mismo Russell expone esta paradoja de una manera muy formal en "Los Principios de la Matemática." pág. 407.

En 1873, Cantor demostró la no-numerabilidad de los números reales, al publicar el hoy llamado "Teorema Fundamental." Para hacer ésto llamó al conjunto de todos los números reales de un intervalo (se corresponden con todos los puntos del mismo intervalo) "el continuo" (en particular del intervalo 0,1), el cual es equivalente a cualquier segmento finito o infinito (en cuanto a su magnitud), a ésta conclusión habíamos llegado en los ejemplos (1),(2) y (3).

Teorema 4.- "Teorema Fundamental".- El conjunto **N** de todos los números naturales no es equivalente al continuo, pero si lo es a un subconjunto propio del continuo, o sea, el continuo es más que un conjunto infinito numerable.

Demostración.- Sea el 'continuo' el conjunto de puntos o números del intervalo $[0,1]$ y lo denotamos por **C**. Debemos representar sus elementos (números reales) de una manera conveniente. La forma más conveniente es representarlos en forma de decimales (fracciones decimales). Sabemos que todo número real positivo puede ser extendido en una y sólo una forma de decimal infinito. (En un decimal que después de cualquier dígito contiene otro dígito distinto de cero. Existen reales que admiten una expansión en decimal terminal por ejemplo, $1/2 = 0.5$, pero también acepta una expansión infinita, también $1/2 = 0.4999.....$). Todas las fracciones deciamles de **C** comienzan con 0.·····, debemos incluir el número $1 = 0.999.....$ en **C**, pero no debemos incluir el número cero, por lo que **C** es el conjunto de todas las fracciones decimales infinitas que empiezan con 0.·····.

El teorema asegura que un conjunto numerable no puede contener todos los decimales de **C**. Lo demostraremos por reducción al absurdo, o sea, supondremos que **C** es numerable y llegaremos a una contradicción.

Si **C** fuera numerable, podríamos escoger una regla de correspondencia uno-a-uno entre **C** y **N**, la cual convierte a cada decimal de **C** en un natural n de **N**, e inversamente. Llamamos al decimal relacionado a n el 'n-ésimo decimal' y hablamos del primero, segundo, ...decimal. Debido a nuestra hipótesis podemos escribir los elementos de **C** como una sucesión:

$$o.n_{11}n_{12}n_{13}n_{14}\ldots\ldots$$

$$o.n_{21}n_{22}n_{23}n_{24}\ldots\ldots$$

$$o.n_{31}n_{32}n_{33}n_{34}\ldots\ldots$$

$$o.n_{41}n_{42}n_{43}n_{44}\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

donde los n_{ik} (i, k = 1,2,.....,9) son dígitos. Quitemos el cero inicial común, nos quedará un cuadrado infinito de dígitos con el vértice n_{11}, el cual se extiende de derecha hacía abajo. Como todos los decimales son infinitos ningún renglón puede consistir de ceros solamente.

Sea 'd' un decimal infinito (definido unívocamente) - construido de la manera siguiente: Consideremos la diagonal del cuadrado que pasa a través de los dígitos

$$n_{11}, n_{22}, n_{33}, \ldots\ldots, n_{ii}, \ldots\ldots$$

Sea 'd' el decimal infinito

$$d = o.d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots\ldots d_i \ldots\ldots$$

cuyos dígitos están definidos de tal forma que: para cada i para la cual n_{ii} es diferente del número 1, hacemos d_i = 1; para los cuales $n_{ii} = 1$, hacemos $d_i = 2$, etc. De aquí que siempre, $d_i \neq n_{ii}$, o sea, para cada i, d_i es diferente del dígito i-ésimo del decimal i-ésimo.

El elemento 'd' de **C** es distinto de cualquier elemento de **C** y, por lo tanto, no está contenido en nuestro cuadrado, el cual habíamos supuesto contenía todos los decimales infi nitos empezando con el cero. Esto contradice nuestra hipótesis, lo que demuestra que **C** no es equivalente a **N**.

Q.E.D.

Con ésto hemos demostrado que la conjetura (II) es falsa, y de esta manera hemos mostrado que existen conjuntos infinitos mayores que otros.

Cuando hicimos notar el hecho de que un conjunto es infinito cuando es equivalente a una parte de él mismo, no tomamos en consideración las críticas que ha recibido el método de correspondencia entre el conjunto y una parte de él mismo por parte de los filósofos y algunos matemáticos. La crítica consiste en afirmar que al hacer nosotros el mapeo deberíamos asignar al elemento del conjunto total el mismo elemento considerado en el subconjunto, tomando en cuenta que el elemento debe pertenecer al subconjunto. En el caso en que aceptáramos esta crítica hasta el más simple ejemplo que hemos dado, el que el conjunto de los números naturales es equivalente al conjunto de los números pares, estaría mal, porque al primer elemento del primer conjunto no le corresponde su 'idéntico' en el segundo. Con ésto se rescataría la negación de la quinta noción común de Euclides.

El no aceptar este hecho es algo arbitrario. Lo que debemos hacer para mostrar que dos conjuntos no son equivalentes es demostrar que cualquier regla o mapeo nos lleva a mostrar una omisión o falta de algún elemento.

Estamos conscientes de que esta correspondencia uno-a-uno no es evidente por sí misma, y está basada en dos hechos muy importantes: a) en el análisis completo de la naturaleza geométrica de la recta y b) en la definición aritmética de los números irracionales y reales.

(43).- Cuando Cantor demostró que aleph-Cero es el menor de los números cardinales transfinitos utilizó un hecho tan sutil que ni él mismo se dió perfectamente cuenta del hecho. Este es conocido hoy día como el "Axioma de Elección". Por considerarlo un hecho de mucha importancia lo discutiremos más profundamente. Demostraremos primero otros teoremas donde este axioma se ve más claramente.

<u>Teorema 5.-</u> "Todo conjunto infinito P contiene un subconjunto numerable."

Demostración.- El teorema lo demostraremos por 'Inducción Matemática'. (El Principio de Inducción Matemática se enuncia de la siguiente manera: Si el primer elemento de un conjunto **N** tiene una propiedad y se demuestra que si teniéndola otro elemento cualquiera (n), también la tiene el consecutivo de éste (n+1), todos los elementos del conjunto tienen la misma propiedad. El Principio de Inducción Transfinita es la generalización del Principio de Inducción Matemática (véase Libro IV, 3, teorema 15). "Los lógicos admiten para el principio de inducción completa lo que admito para el postulado de Euclides, pero no quieren ver en ello más que una definición disfrazada." (POINCARE, Henri. "Ciencia y Método." Espasa-Calpe. pág 117)).

Empecemos por escoger un elemento arbitrario p_1 del conjunto no vacío P, y formamos el subconjunto

$$S_1 = \{p_1\}$$

de P el cual contiene un elemento singular. El restante,

$$P_1 = P - S_1,$$

es no vacío, porque de otra manera P estaría formado por un elemento y no por una infinidad; por lo tanto podemos escoger un elemento arbitrario p_2 de P_1 y formamos el subconjunto

$$S_2 = \{p_1, p_2\}$$

de P el cual contiene dos elementos. Debemos ahora suponer inductívamente que después de tales n pasos (denotando por n un natural) que hemos llegado al subconjunto

$$S_n = \{p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n\}$$

de P el cual contiene n elementos. Desde que el restante,

$$P_n = P - S_n,$$

sigue siendo infinito, podemos escoger un elemento arbitrario p_{n+1} de P_n; y añadiéndolo a los elementos de S_n obtenemos el subconjunto

$$S_{n+1} = \{p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n, p_{n+1}\}$$

de P el cual contiene n+1 elementos. Se sigue que, por el principio de inducción, para cualquier natural n existe un subconjunto S_n de P el cual contiene n elementos justamente, estos subconjuntos forman una sucesión infinita

$$(S_1, S_2, \ldots\ldots, S_n, \ldots\ldots).$$

Es más, han sido construidos de tal manera que cualquier S_n contiene a los que lo proceden, o sea, $S_m \subset S_n$ para $m < n$.

Finalmente, la unión $\underline{P}$ de todos los conjuntos S_n contiene muchos (posiblemente todos) miembros numerables de P, llamémosle

$$\underline{P} = \{ p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n, \ldots\ldots \}.$$

Hemos construido un subconjunto numerable de un conjunto infinito.

Q.E.D.

<u>Teorema 6.-</u> "Cualquier conjunto infinito P es equivalente a un subconjunto infinito propio de P."

Demostración.- Por el teorema anterior, existe $\underline{P}$ un subconjunto numerable de P. Denotamos la diferencia, $P - \underline{P}$, por P'; si $\underline{P}$ coincide con P, entonces P' es el conjunto vacío. En cualquier caso, tenemos

$$P = (\underline{P}, P'),$$

$\underline{P}$ y P' no tienen elementos comunes (estamos utilizando la notación cantoriana para la unión). Ahora omitimos el elemento p_1 del conjunto numerable

$$\underline{P} = \{ p_1, p_2, \ldots\ldots \}$$

y denotamos el restante $\underline{P} - p_1$ por $\underline{P_1}$, entonces

$$P_1 = (\underline{P_1}, P')$$

es un subconjunto propio de P, porque P_1 no contiene el elemento p_1 de P. Aún más, $\underline{P_1}$ y P' son ajenos.

Ahora construimos la correspondencia uno-a-uno de

$$P = (P', \underline{P}),$$

dentro de su subconjunto propio

$$P_1 = (\underline{P_1}, P')$$

de la siguiente manera: Como no sabemos si P' es vacío, finito o infinito a cada elemento de P' le asignamos su idéntico. Por otro lado, la correspondencia uno-a-uno entre $\underline{P}$ y $\underline{P_1}$ la damos como ejemplificamos en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccccc}
\underline{P} = & p_1 & p_2 & \ldots\ldots & p_{n-1} & p_n & \ldots\ldots \\
 & | & | & & | & | & \\
\underline{P_1} = & p_2 & p_3 & \ldots\ldots & p_n & p_{n+1} & \ldots\ldots
\end{array}$$

La demostración está completa, ya que las dos correspondencias uno-a-uno hacen una sola correspondencia uno-a-uno entre P y P_1.

Q.E.D.

Señalaremos una vez más un teorema dado por Cantor.

Teorema 7.- "Un conjunto finito A no puede ser equivalente a un subconjunto propio de él mismo."

Demostración.- La demostración es evidente por sí misma si suponemos que A contiene un sólo elemento, suponemos el teorema válido para cualquier conjunto A que contiene n elementos, y fácilmente concluimos que es verdadero para cualquier conjunto A con n+1 elementos.

Q.E.D.

Russell llama 'reflexivo' cualquier conjunto que es equivalente a un subconjunto propio de él mismo.

Examinando con detalle la demostración del teorema cinco encontramos una diferencia notable entre los procedimientos matemáticos tradicionales y los aquí mencionados. Por lo general, en las matemáticas tradicionales los conceptos usados están determinados unívocamente. Aunque también se tienen otros casos, cuando se postula algún concepto es porque se supone que tal concepto ha sido demostrado existente en nuestro caso, nosotros podemos 'escoger' un elemento arbitrario de un conjunto A cuando hemos demostrado que el conjunto A es diferente del vacío, o sea, estamos suponiendo que los argumentos que siguen son independientes del elemento particular escogido. De la misma manera, cuando nosotros procedemos a escoger un número finito (n) de elementos del conjunto A debemos preveer que el conjunto A contenga al menos n elementos.

Lo que se afirma es que para uno no está permitido tomar una infinidad de pasos escogiendo elementos que no están determinados por una ley definida. Aunque los procedimientos lógicos y matemáticos son más fuertes hoy que a finales del siglo pasado, esta postura se sigue defendiendo sin tomar en consideración que el proceso del pensamiento no puede ser medido por una longitud de tiempo definida.

Imaginemos un conjunto numerable cuyos elementos son 'pares de zapatos': un primero, segundo,......, n-ésimo,......, par para cada natural n. Una pregunta que nos podríamos formular es la siguiente: ¿Es el conjunto de todos estos 'pares' equivalente al conjunto de los 'zapatos' contenidos en los pares? Asignemos al primer par, el zapato izquierdo del primer par; al segundo par, el zapato derecho del primer par; al tercer par, el zapato izquierdo del segundo par, y así sucesivamente. De esta manera hacemos corresponder al zapato izquierdo del n-ésimo par el (2n-1)-ésimo par y al zapato derecho del n-ésimo par el 2n-ésimo par. Hemos mostrado una correspondencia uno-a-uno entre el conjunto de todos los pares de zapatos y el conjunto de todos los zapatos, y por lo tanto, ambos tienen cardinalidad aleph-cero - (habíamos supuesto que el conjunto de pares de zapatos era numerable).

Bueno, ahora cambiemos los 'zapatos' por 'calcetines', o sea, tenemos una infinidad de calcetines. Como todos sabemos los productores de calcetines no hacen diferencias entre el calcetín derecho e izquierdo. Por lo que nosotros sólo podremos asignar calcetines 'arbitrarios' al hacer nuestro mapeo, ésto lo podemos hacer una finidad de veces, a menos que, no tengamos nosotros el prejuicio de no poder hacerlo una infinidad de veces. Si sólo consideramos una finidad posible de asignaciones nosotros no podemos concluir que ambos conjuntos tienen el mismo número cardinal aleph-cero. (El ejemplo es de Bertrand Russell, pero la nota original me ha sido imposible encontrarla).

Como vemos de aquí surgió un nuevo principio, el cual fue descubierto a principios del siglo XX, sin el cual nos sería imposible demostrar algunos de los resultados más asombrosos de la Teoría de Conjuntos Transfinitos. Este principio fue llamado 'Axioma de Elección' por E. Zermelo - (1904), más tarde llamado 'Axioma Multiplicativo' por B. Russell (1906).

Zermelo lo enunció de ls siguiente manera en 1908: "Para cualquier conjunto S, cuyos elementos son conjuntos no - vacíos, corresponde al menos una función f(x) univalente - tal que para cada elemento x de S, f(x) es un elemento del conjunto x. En tal caso, f es llamada una función selectora."

Russell lo enunció de la siguiente manera: "Dado un - conjunto de clases mutuamente excluyentes, ninguna de las cuales sea nula, existe por lo menos una clase consistente en un representante de cada clase del conjunto." (RUSSELL, B. "Los Principios de la Matemática." Espasa-Calpe. pág 11). En otras palabras: "Si S es un conjunto tal que cualesquiera dos conjuntos de S no tienen elementos comunes y son no vacíos, entonces existe al menos una clase P la cual contiene un elemento singular de cada elemento de S."

(44).- A este hecho se le conoce como el "Teorema de Cantor." 'Dado cualquier cardinal finito o transfinito, existe uno mayor.' Es decir, si A es cualquier conjunto, entonces el conjunto P(A) (conjunto potencia de A) cuyos elementos son todos los subconjuntos de A tiene un cardinal mayor que A. Por lo tanto, además de los cardinales finitos, existen una infinidad de cardinales transfinitos.

(45).- Se dice que un conjunto A está ordenado si además de la relación de igualdad '=', una relación que satisface las siguientes tres relaciones está definida en A:

1.- Para cualesquiera elementos diferentes a_1, a_2 de A al menos uno de los argumentos $a_1 \prec a_2$ ("a_1 precede a a_2"), $a_2 \prec a_1$ se verifica.

2.- Si $a_1 \prec a_2$ entonces $a_1 \neq a_2$.

3.- Si $a_1 \prec a_2$, y $a_2 \prec a_3$ entonces $a_1 \prec a_3$.

Sabemos que si $a_1 = a_1$, se sigue de (2) que $a_1 \not\prec a_1$ y además que nunca es cierto que

$$a_1 \prec a_2 \text{ y } a_2 \prec a_1$$

sean compatibles. Por lo tanto, concluimos que una y solamente una de las tres relaciones de orden siguientes

$$a_1 = a_2, \; a_1 \prec a_2, \; a_2 \prec a_1$$

se verifica para cualesquiera dos elementos a_1, a_2 de un conjunto ordenado.

Si omitimos la condición (1) de la definición anterior obtenemos los conjuntos parcialmente-ordenados. Como se ve claramente, el orden definido anteriormente no define una relación de equivalencia ya que no puede ser que:

(1) $$a_1 \prec a_1$$

y que

(2) Si $a_1 \prec a_2$ entonces $a_2 \prec a_1$.

Debe pensarse que el significado del símbolo $\prec$ puede cambiar de conjunto a conjunto, unas veces puede coincidir con el símbolo $<$ y otras con el símbolo $>$. Por ejemplo,

1.- Sea $A = \{\ldots\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$. Aquí $\prec$ coincide con $<$.

2.- Sea $B = \{\ldots\ldots, 3, 2, 1\}$. Aquí $\prec$ coincide con $>$.

3.- Sea $C = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\ldots\}$. En este caso el símbolo $\prec$ coincide en partes con $<$ y en partes con $>$.

Es obvio que los subconjuntos de un conjunto ordenado también están ordenados.

Se dice que dos conjuntos ordenados son iguales, en - símbolos $A = B$, si contienen los mismos elementos, y si la relación de orden $a \prec b$ válida para A invariablemente implica la relación $a \not\prec b$ válida para B. Recíprocamente, entonces, se sigue obviamente que $a \not\prec b$ siempre implica $a \prec b$.

(46).- También se puede decir 'proyección'.

(47).- Un conjunto ordenado A es llamado 'similar' a un conjunto ordenado B si existe un mapero de A dentro de B que preserve el orden. Es decir, si a, a' son elementos distintos de A y b, b', son los elementos de B asignados a ellos por el mapeo, respectivamente, entonces $a \prec a'$ debe implicar que $b \prec b'$. Cada uno de dichos mapeos es llamado 'mapeo similar'

Sean por ejemplo, el conjunto de todos los números naturales y el conjunto de todos los números pares. Tenemos, con sus ordenenes de magnitud correspondientes, un mapeo f que asigna a cada natural su doble, es decir, $f(x) = 2x$. Este mapeo preserva el orden entre los dos conjuntos y además es una correspondencia uno-a-uno. Por lo que los números pares (positivos) y los números naturales son similares ~~y, además~~, equivalentes.

Ahora, conjuntos similares, y sólo tales conjuntos, - tienen el mismo tipo de orden.

Tenemos cuatro propiedades fundamentales que resultan de la definición:

(1) $A \simeq A$, todo conjunto ordenado es similar a sí mismo.

(2) Si $A \simeq B$ entonces $B \simeq A$.

(3) Si $A \simeq B$ y $B \simeq C$, entonces $A \simeq C$.

(4) $A \simeq B$ implica $A \sim B$.

Señalaremos algunos resultados importantes:

1.- Si un conjunto ordenado B es equivalente a un conjunto ordenado A, entonces B puede ser ordenado de tal manera que $B \simeq A$.

2.- Si dos conjuntos son similares, entonces o ambos - tienen primero (último) elemento o ninguno de los dos conjuntos tienen tales elementos.

(48).- En general, $^*\alpha$ denota el tipo de orden que resulta de α cuando el orden de la sucesión de los elementos está invertido.

(49).- Este puede ser un ejemplo de la gran cantidad de discusiones y polémicas que tuvó Cantor con otros matemáticos como consecuencias de su teoría.

(50).- Sean A y B dos conjuntos ordenados ajenos. Definamos una relación ordenadora para los elementos c de la unión C como sigue: sean c y c' dos elementos de la unión. Si ambos pertenecen a A, dejamos a $\prec$ a' ó a' $\prec$ a en la unión, de acuerdo si la primera o la segunda de estas relaciones se cumple para estos elementos en A. Si ambos elementos pertenecen a B, entonces la relación que es válida para ellos en B debe cumplirse de nuevo en la unión. Pero si uno de los elementos pertenece a A, y el otro pertenece a B, digamos c está en A y c' está en B, entonces dejamos c $\prec$ c' en la unión. - La relación ordenadora así definida para la unión es obviamente transitiva, y por lo tanto ordena a C.

(51).- El ejemplo que se da en la memoria original es muy claro, - pero también se podrían considerar los siguientes:

(1) $$n + w = w,$$

porque tenemos

$$n = \{1,2,3,\ldots\ldots,n\},$$

y

$$w = \{n+1,n+2,n+3,\ldots\ldots\}$$

y de aquí que

$$n + w = \{1,2,3,\ldots\ldots,n,n+1,n+2,n+3,\ldots\ldots\} = w.$$

De la misma manera se puede mostrar que:

(2) $$^*w + n = {^*w}$$

porque

$$^*w = \{\ldots\ldots,n+3,n+2,n+1\},$$

y

$$n = \{n,\ldots\ldots,3,2,1\}.$$

Por lo que

$$^*w + n = \{\ldots\ldots,n+2,n+1,n,\ldots\ldots,3,2,1\} = {^*w},$$

y de estos ejemplos podemos deducir que

$$w,\ w+1,\ w+2,\ w+3,\ \ldots\ldots$$

son distintos tipos de orden.

(3) El tipo $^*w + w$ pertenece al conjunto

$$\{\ldots\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\ldots\}$$

y el tipo $w + {}^*w$ al conjunto

$$\{1,2,3,\ldots\ldots,-3,-2,-1\}.$$

Tomando en consideración los resultados anteriores podemos obtener:

(4) $n + w + w = (n + w) + w = w + w;$

(5) $w + n + w = w + (n + w) = w + w;$

(6) $w + w + n = w + w + n,$

y por el otro lado

(7) $^*w + n + w = (^*w + n) + w = {}^*w + w;$

(8) $n + {}^*w + w \neq {}^*w + w + n.$

(52).- El producto de dos tipos ordinales también puede ser definido de la siguiente manera:

Sean dados dos tipos de orden, α y β, distintos de cero. Representando por $\alpha = \overline{A}$ y $\beta = \overline{B}$. Formamos el conjunto de todos los pares de elementos (a,b), donde a está en A y b está en B, y definimos un orden para estos pares estipulando que:

$$(a_1,b_1) \prec (a_2,b_2),$$

para $a_1 \prec a_2$, así como también para $a_1 = a_2$, $b_1 \prec b_2$.
Por C denotamos el conjunto de todos los pares de elementos (a,b) ordenados de esta manera. Entonces el producto $\alpha\cdot\beta$ debe ser igual a $\overline{C}$.

(53).- En la versión en inglés dice: "Every equation between ordinal types wich procedes from the two elementary operations remains correct, therefore, if we replace in it all the types by their cardinal numbers." (CANTOR, Georg. "<u>Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers</u>" Dover. pág 122.) No seguí literalmente la traducción en este párrafo, pero sólo fue con la idea de que fuera más claro.

(54).- Si dos elementos a y a' de un conjunto ordenado A tiene la propiedad que ningún elemento de A cae entre ellos, entonces son llamados elementos contiguos o consecutivos. Si estos elementos satisfacen la relación $a \prec a'$, entonces a es llamado el inmediato predecesor de a', y a' es llamado el inmediato sucesor de a. Un conjunto ordenado es llamado 'denso' si contiene al menos dos elementos y no tiene elementos contiguos.

Como todo conjunto finito tiene al menos dos elementos contiguos todo conjunto 'denso' es infinito.

Dados dos números racionales, digamos a y b, su promedio (ó valor medio) a+b/2 es racional también. De aquí que entre dos números racionales cualesquiera cae siempre otro número racional. De aquí se sigue entonces que entre cualesquiera dos números racionales siempre existe una infinidad de racionales. Vemos claramente, debido a esta propiedad de los racionales, que nunca podemos hablar del inmediato sucesor de un número racional dado.

(55).- Las 'series fundamentales' pueden ser estudiadas como equivalentes a las sucesiones. Se puede ver esta analogía entre las series fundamentales coherentes y las sucesiones 'monótonas', tanto crecientes como decrecientes. Y fijarnos como se definen los conceptos de 'cota de una sucesión', 'límite de una sucesión'; y los conceptos de 'elemento límite' y 'elemento principal'.

Para ver una introducción realmente intuitiva al tema de 'Series y Sucesiones', véase el BANACH, Stephan. "Cálculo Diferencial e Integral." UTEHA.

(56).- Si un conjunto de puntos A está dado, un punto a (el cual puede pertenecer o no a A) es llamado un 'punto límite' de A si toda vencidad de a contiene una infinidad de puntos de A.

Una definición equivalente es la siguiente: "Sea A un conjunto y a un punto, no necesariamente en A. Entonces a es llamado un 'punto límite' de A si toda vecindad de a contiene al menos un punto de A distinto de a." (Por una vecindad de radio e del punto a, entiéndase el conjunto de puntos del interior del círculo de radio e y centro en a).

Sea A' el conjunto de todos los puntos límite de un conjunto A. Entonces decimos que el conjunto A es 'cerrado' si A' A.

Al conjunto A se le llama 'denso en sí mismo' si $A \subset A'$ y $A \neq \Phi$. Y se le llama 'perfecto', si $A' = A$ y $A \neq \Phi$.

Ahora, todo conjunto finito A es cerrado porque A' es vacío, y el vacío es un subconjunto de cualquier conjunto. Y, como todo conjunto finito no es denso en sí mismo no puede ser perfecto.

(57).- La intención de Cantor no es realmente estudiar las Series Fundamentales en sí, sino definirlas simplemente para poder usarlas en el estudio del tipo ordinal θ.

(58).- Ya sabemos que toda la recta real es equivalente al segmento $[0,1]$ (véase nota 42).

(59).- Y por medio del Continuo Lineal X podemos identificar todos los conjuntos con tipo ordinal θ, lo que nos daría la clase de tipos ordinales $[\theta]$.

LIBRO IV.- "EL TEOREMA DE ZERMELO".

(60).- El conjunto vacío se considera bien-ordenado.

(61).- Bajo el orden prescrito para él por A.

(62).- También es llamado 'sección'.

(63).- Esto es debido a que el elemento que determina al segmento no está en el segmento.

(64).- Se obtiene reemplazando cada $a \prec b$ por $b \prec a$ (véase Libro - III, §7).

(65).- α es el inmediato sucesor de los elementos de $A(\alpha)$.

(66).- Este resultado se debe a la suposición de que ambos, γ_1 y γ_2 son menores que el mismo tipo ordinal .

(67).- Teorema de Equivalencia.- "Si cada uno de los conjuntos es equivalente a un subconjunto del otro, entonces los conjuntos son equivalentes. De aquí que si A es equivalente a un subconjunto de B, el cardinal de A es igual o menor que el cardinal de B, es decir, obtenemos $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$.

(68).- Por la forma como se demuestra el teorema el mejor enunciado para éste es: "Dado un conjunto S (ordenado o sin ordenar) existe un conjunto bien-ordenado W que contiene exactamente los elementos de S."

LIBRO V.- "LAS PARADOJAS."

(69).- La mayoría de los autores utilizan estas dos palabras como sinónimos.

(70).- QUINE, W.V.O. "Paradoja." Scientific American. (Recopilado: KLINE, Morris. "Matemáticas en el Mundo Moderno." Ed. Blume. pág 226).

(71).- Esto es un error muy grave en mi opinión, nunca se ha sabido de un niño que se pregunte: ¿Qué es un número? Sabemos que lo necesario y fundamental es que sólo maneje sus propiedades.

(72).- Arnaud Denjoy (1884 - ?). Profesor de la Soborna. Generalizó el concepto de integral de Lebesque.

(73).- VERA, Fco. Op. Cit. pág 13.

(74).- Cantor le escribió una carta a Hilbert, en 1896, donde muestra que esta observación ya la había notado él.

(75).- RUSSELL, Bertrand. "Mathematical Logic as based on the theory of Types." pág 223-4.

(76).- El conjunto potencia de un conjunto es el conjunto de todos sus subconjuntos (véase nota 44).

(77).- Es el conjunto que contiene todos los conjuntos.

(78).- Está paradoja fue descubierta independientemente por Zermelo en 1908.

(79).- Un conjunto de conjuntos de primera clase es un conjunto de primera clase. Un conjunto de segunda clase siempre contiene entre sus elementos conjuntos de segunda clase.

(80).- RUSSELL, Bertrand. Op. Cit. pág 222.

(81).- Es el nombre de las clases a que se reducen las cosas que se pueden decir del sujeto, o sea, son propiedades que se aplican a sí mismas. Por ejemplo, la palabra esdrújula es esdrújula, la palabra abstracta es abstracta.

(82).- Son propiedades que no se aplican a sí mismas. Por ejemplo, la palabra concreta no es concreta, la palabra blanca no es blanca.

(83).- FRAENKEL, Abraham y otros. "Foundations of Set Theory." North Holland. pág 7.

(84).- Algunas son muy anteriores a las de la Teoría de Conjuntos, pero nunca se habían estudiado dentro del campo matemático.

(85).- KLEENE, S.C. Op. Cit. pág 45.

(86).- Bertrand Russell fue el primero en publicarla en: "On some difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types."

(87).- KLEENE, S.C. Op. Cit. pág 46.

(88).- Más que todo es una leyenda, pues no es posible encontrar dicha situación en la obra de Cervantes. Aunque en el Cap. LI del tomo II aparece un hecho parecido.

(89).- POINCARE, Henri. "Ciencia y Método." Espasa-Calpe. pág 117.

(90).- Y por ésto se le llama también a la Matemática Formalista como la 'Ciencia de lo Posible'.

LIBRO VI.- LA AXIOMATIZACION DE LA TEORIA DE CONJUNTOS.-

(91).- Supondremos conocida la Lógica Elemental, pero al mismo tiempo, no es necesario que el lector maneje la Lógica Formal para la lectura de este capítulo.

(92).- RUSSELL, Bertrand. "Mathematical-Logic as based on the Theory of Types." pág 236.

(93).- Que según Cantor estamos capacitados para pensar (véase el Libro III, §5).

(94).- Por 'T' entiéndase el campo donde se cumplen los axiomas. Una Teoría Formal T está definida cuando se cumplen las siguientes condiciones:

(1) Un conjunto numerable de símbolos está dado como los símbolos de T. Una sucesión finita de símbolos de T es llamada una expresión de T.

(2) Existe un subconjunto de las expresiones de T llamadas fórmulas-bien-formadas (fbf) de T.

(3) Un conjunto de fbf es puesto aparte y llamado el conjunto de Axiomas de T.

(4) Existe un conjunto finito $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de relaciones entre las fbf llamadas reglas de inferencia.

Posteriormente hablaremos de 'Z' (Zermelo), 'ZF' (Zermelo-Fraenkel), etc.

(95).- RUSSELL, B. y WHITEHEAD, A.N. "Principia Mathematica." Introducción.

(96).- WEYL, Hermann. "Mathematics and Logic: A brief survey serving as preface to a review of the 'Philosophy of Bertrand Russell.'"

(97).- POINCARE, Henri. Op.Cit. pág 127.

(98).- Está traducido al inglés en: HEIJENOORT, Jean van. "From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical-Logic, 1879-1931." North-Holland. pág 199-215.

(99).- HEIJENOORT, Jean van. Op.Cit. pág 200. El subrayado es mío.

(100).- Por 'dominio' entiéndase el campo donde son válidas estas proposiciones. Además, el dominio no es un conjunto, pues caeríamos de nuevo en la falacia de suponer un conjunto universal.

(101).- Zermelo utiliza la notación $M \notin N$ para denotar que M es un subconjunto de N. Esta notación fue desarrollada por Schröder en su "Algebra der Logik." 1890.

(102).- Los axiomas que mencionamos son los originales de Zermelo. Pero la interpretación simbólica, que les damos a los axiomas es mía, no está muy formalizada.

(103).- Este axioma define la relación de igualdad.

(104).- Este axioma admite la existencia del conjunto vacío y de los conjuntos formados por uno y dos elementos.

(105).- Este axioma afirma que dado un conjunto y un predicado existe un subconjunto del conjunto formado por los elementos para los cuales el predicado es verdadero.

(106).- En este axioma entendemos que una proposición está definida cuando podemos establecer su validez por medio de las leyes lógicas universales.

(107).- Este axioma admite la existencia del conjunto de las partes de un conjunto.

(108).- Admite la existencia del conjunto unión formado por los elementos de los elementos de un conjunto.

(109).- Se puede interpretar como el hecho que garantiza que el producto no es vacío cuando alguno de sus factires no es vacío.

(110).- Este axioma admite la existencia de un conjunto infinito que contiene al conjunto vacío. Este axioma sirve para representar la progresión 0,1,2,...... de los números naturales.

(111).- Si se quieren estudiar desarrollos axiomatizados de la Teoría de Conjuntos véase: FRAENKEL, A.A. y otros. "Foundations of Set Theory." North-Holland.; SUPPES, Patrick. "Axiomatic Set Theory." Dover.; BERNAYS, Paul. "Axiomatic Set Theory." North-Holland.

(112).- Zermelo consideraba como afirmaciones definidas $a \in b$ y $M \in N$.

(113).- Esta sugestión ya había sido hecha por Skolem en su artículo: "Einige Bemerrungen zur Axiomatischen Begründung der Mengenlehre.", leído en el Congreso de Matemáticas Escandinavas en 1922, sólo que Skolem no consideraba despúés el concepto de función.

(114).- De esta forma eliminaba los conjuntos que no son elementos de sí mismos.

(115).- FRAENKEL, A.A. "Zu den Grundlagen der Cantor-Zermelo chen Mengenlehre." Math. Annalen 86 (1922) 230-237 pp.

(116).- Posteriormente se naturalizaría americano.

(117).- Se dedicó a la Teoría de Conjuntos, Ecuaciones Diferenciales, Análisis Matemático, Computación, Análisis Numérico, Investigación de Operaciones, Topología, etc.

(118).- O sea, que todas sus realizaciones son categóricas.

(119).- Estas limitaciones más severas son innecesarias, pues las paradojas no se pueden dar, ya que estaban eliminadas desde antes. Además, restringuen más el campo de trabajo.

(120).- Von Neumann supone que la intersección de estos dos dominios no es vacía.

(121).- No hay que olvidar que cuando la Teoría de Tipos fue formulada nosotros hicimos mención de la necesidad de una jerarquización de los tipos, y que éste era infinita.

(122).- El axioma por medio del cual él impide las funciones que podrían definir totalidades demasiado grandes a partir de argumentos establece que una función 'a' llega a ser una función-argumento si y sólo si existe una función 'b' (en el dominio de funciones postuladas por la teoría) tal que, para cada argumento 'x', existe un argumento 'y' para el cual $[a,y] \neq A$ y $[b,y] = x$.

(123).- Léase el 'par (ordenado) x,y'.

(124).- Los conjuntos los denota mediante letras latinas minúsculas. Nosotros utilizaremos las letras minúsculas de nuestro alfabeto.

(125).- Las clases están denotadas por letras latinas mayúsculas.

(126).- Cuando mencionamos que Kant (véase Libro I) afirmaba que las proposiciones se dividen en analíticas y sintéticas, mencionamos superficialmente las 'ideas de razón' que también considera. Kant consideraba que existían ciertas proposiciones que no eran ni analíticas ni sintéticas: sino que pertenecían a un grupo muy especial llamado por él 'ideas de razón'. Según Kant, existen ciertas proposiciones que dependen solamente de la formación del individuo, como la 'Fé'. Porque, la fe no agrega nada nuevo a nuestro conocimiento, pero cuando tenemos fe no se debe tampoco a la experiencia.

Cuando Hilbert publicó su 'programa' también aceptó el concepto de 'ideas de razón' y afirmaba que el concepto de 'infinito actual' era una de ellas.

Ahora, en el caso de Paul Bernays y sus clases, parece ser que éste está tomando también las ideas de Kant, para de esta forma considerar sus 'clases' como entes ideales.

(127).- No son fórmulas-bien-formadas (fbf) del sistema que Bernays ha creado.

(128).- En lugar de ponerlos en variables del mismo sistema.

(129).- Pueden ser 'conjuntos-términos' o 'clases-términos'.

(130).- Esto lo hace basándose en A.A. Fraenkel y no en la concepción semántica de E. Zermelo.

(131).- Léase 'A es equivalente a B'. Bernays utiliza la notación A ≡ B, pero nosotros utilizaremos la notación convencional (cantoriana).

(132).- Como las clases son tratadas simplemente como extensiones de predicados, esta relación puede ser definida explícitamente en términos de la relación lógica de la doble implicación.

(133).- Este esquema formaliza el 'Principio de Comprensión', pero solamente puede ser aplicado a clases y no a conjuntos.

(134).- Este principio fue tomado por Zermelo y Fraenkel como el 'Axioma de Determinación'.

(135).- Se encuentra en: QUINE, Willard van Orman. "Desde un punto de vista lógico." Ariel.

(136).- Que como habíamos apuntado con anterioridad, era un defecto de la Teoría de Tipos, pues se estaba utilizando el concepto de iteración. Además el trabajar con los índices es demasiado laborioso, pues a niveles superiores es difícil situarse en el tipo en que uno está trabajando.

(137).- Esto parece ser hecho con la intención de que los intuicionistas no rechacen de principio sus axiomas.

(138).- Debemos acordarnos que Whitehead y Russell se habían disculpado de no justificar la validez del axioma T2 dentro del sistema T.

(139).- Este hecho fue cuidado con gran esmero por Russell y Whitehead ya que daba pie a ciertas paradojas, que el mismo Russell había descubierto.

(140).- Aún existiendo este conjunto U, Quine no tenía un axioma que postulara la existencia de un conjunto infinito como era T3 en T.

(141).- Para que el sistema sea no contradictorio es muy importante que las variables de 'F(x)' sean minúsculas.

(142).- HALMOS, Paul R. "Nicolás Bourbaki." Scientific American. - Mayo. 1957. (Recopilado por: KLINE, Morris. Op. Cit. pág. 89).

(143).- El les llama relaciones a los predicados.

LIBRO VII.- "CONCLUSIONES Y OTROS RESULTADOS".

(144).- A algunos de los hechos que entorpecieron este desarrollo teórico, como son las paradojas, ya no las analizaremos, por haberles dedicado un espacio muy grande en capítulos anteriores.

(145).- No haremos un análisis profundo de estas escuelas por no considerarlo de fundamental importancia para el desarrollo del trabajo, solamente mencionaremos sus principales características.

(146).- Fue el primero que formuló sus principios.

(147).- Frege fue el primero que la extendió.

(148).- G. Peano fue el primer matemático que la desarrollo aún más.

(149).- DOU, Alberto. "Fundamentos de la Matemática." Losada. pág. 76.

(150).- BROUWER, L.E.J. "Intuitionism and Formalism." pág. 83.

(151).- RUSSELL, Bertrand. "Los Principios de la Matemática." Espasa-Calpe. pág 8.

(152).- Establece lo siguiente: De dos juicios contradictorios, uno es verdadero y otro es falso, no habiendo otra posibilidad, sin decidir cuál es verdadero y cuál es falso. Este principio se utiliza para establecer las demostraciones por 'Reducción al absurdo'.

(153).- "Cuando un conjunto M y un objeto particular m son definidos de manera que, por un lado m es un miembro de M, y por otro, la definición de m depende de M, decimos que el procedimiento (o la definición de m, o la definición de M) es impredicativo." KLEENE, S.C. Op. Cit. pág 48.

(154).- BOURBAKI, Nicolás. "Elementos de Historia de las Matemáticas." Alianza Ed. pág 62. El subrayado es mío.

(155).- COHEN, Paul J. & HERSH, Ruben. "Teoría de Conjuntos No-Cantoriana." pág 238. (Recopilado por: KLINE, Morris. Op.Cit. 238-247 pp).

(156).- O sea, no se está suponiendo que el axioma sea verdadero o falso.

(157).- Es decir, que dentro del sistema no se puede demostrar A y $\neg$A.

(158).- La cual no mostraremos por no estar al nivel de esta tesis.

(159).- Estos no son los enunciados originales. Para esto véase: LADRIERE, Jean. "Limitaciones Internas de los Formalistas." Tecnos. pág 370.

(160).- WEYL, Hermann. "Filosofía de las Matemáticas y de la Ciencia Natural." U.N.A.M. pág 251-2.

(161).- También llamada 'Metamatemática'.

(162).- Para ésto identificaba la existencia matemática con la no contradicción (véase el final del §4, capítulo V).

(163).- WEYL, Hermann. Op. Cit. pág 252.

(164).- FRAENKEL, A.A. "Teoría de los Conjuntos y Lógica." U.N.A.M. pág 12. Según él se puede encontrar esto en: CANTOR, Georg. "Gesammlte Abhandlungen Mathematischen und Philosophischen Inhalts." Ed. por E. Zermelo. Berlín. 1932. (reim. 1961). pág 165.

(165).- FRAENKEL, A.A. Op. Cit. pág 127.

(166).- WEYL, Hermann. Op. Cit. pág 251.

(167).- FRAENKEL, A.A. Op. Cit. pág 126.

B I B L I O G R A F I A

APOSTOL, Tom M.

(1) "Mathematical Analysis." (2da.ed.) Addison-Wesley. U.S.A. 1965. 559 pp.

ASIMOV, Isaac.

(2) "Enciclopedia Biográfica de Ciencia y Tecnología." Revista de Occidente. Madrid. 1973. 782 pp.

BABINI, José.

(3) "Historia Sucinta de la Matemática." (3a.ed.) Espasa-Calpe. España. 1969. 144 pp.
Col. Austral #1142.

(4) "Origen y Naturaleza de la Ciencia." Espasa-Calpe. Argentina. 1947. 312 pp.
Historia y Filosofía de la Ciencia (Serie Menor).

BALL, Rouse W.W.

(5) "A Short Account of the History of Mathematics." Dover. New York. 1960. 544 pp.

BANACH, Stephan.

(6) "Cálculo Diferencial e Integral." (2da.ed.) UTEHA. México. 1969. 387 pp.

BELL, Eric Temple.

(7) "Development of Mathematics." (2da.ed.) McGraw-Hill. New York. 1945. 637 pp.

(8) "Los Grandes Matemáticos." Losada. Buenos Aires. 1948. 682 pp.

(9) "Mathematics: Queen and Servant of Science." McGraw-Hill. New York. 1951. 437 pp.

BERNAYS, Paul

(10) "A System of Axiomatic Set Theory." Journal of Symbolic Logic 2 (1937) 65-77 pp; 6 (1941) 1-17 pp; 7 (1942) 65-89, 133, 145 pp; 8 (1943) 89-106 pp.

(11) "Review of Gödel." Journal of Symbolic Logic 11 (1946) 75-79 pp.

BERNAYS, Paul & FRAENKEL, A.A.
(12) "Axiomatic Set Theory." North-Holland. Amsterdam. 1968. -- 226 pp.
Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.

BLACK, Max.
(13) "Critical Thinking." (2da.ed.) Prentice Hall. U.S.A. 1952 459 pp.

BLANCHE, Robert.
(14) "La Axiomática." U.N.A.M. México. 1965. 88 pp.
Problemas Científicos y Filosóficos. Cuaderno #21.

BOURBAKI, Nicolás.
(15) "Elementos de Historia de las Matemáticas." Alianza Ed. Madrid. 1972. 342 pp.
Alianza Universidad #18.

(16) "Eléments de Mathématique." Ed. Hermann. París. 1960.
Actualités Scientifiques et Industrielles #1212, 1243 y -- 1258.

(17) "Foundations of Mathematics for the working Mathematician". Journal of Symbolic Logic 14 (1949) 1-8 pp.

BOYER, Carl B.
(18) "A History of Mathematics." John Wiley & Sons. U.S.A. 1968. 717 pp.

BROUWER, L.E.J.
(19) "Intuitionism and Formalism." Bulletin of the American Mathematical Society 20 (1914) 81-96 pp.

BURNET, John.
(20) "La Aurora del Pensamiento Griego." Ed. Argos. México. -- 1944. 462 pp.

CAJORI, Florian.
(21) "A History of Mathematical Notations." Open Court. U.S.A. 1951 (2 vol.)

CANTOR, Georg.
(22) "Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers." Dover. New York. 1958. 241 pp.

COHEN, Paul J.
(23) "The Independence of the Continuum Hypothesis." Proceedings of the Natural Academy of Sciences 50 (1963) 1143-1148 pp.: 51 (1964) 105-110 pp.

(24) & HERSH, Reuben. "Teoría de Conjuntos No-Cantoriana." Scientific American. Diciembre. 1967. (Recopilado por: KLINE, Morris. "Matemáticas en el Mundo Moderno." Ed. Blume. España. 238-247 pp.)

COOLIDGE, J.L.
(25) "The Mathematics of Great Amateurs." Dovera New York. 1963. 211 pp.

COUTURAT, Luis.
(26) "La Filosofía de las Matemáticas en Kant." U.N.A.M. México. 1960. 126 pp.
Filosofía y Letras #48.

CHURCH, A.
(27) "The Richard Paradox." American Mathematical Monthly 41 - (1943) 356-361 pp.

(28) & KLEENE, S.C. "Formal Definition in the Theory of Ordinal Numbers." Fundamenta Mathematicae 28 (1937) 11-21 pp.

DEANO, Alfredo.
(29) "Introducción a la Lógica Formal." Alianza Ed. Madrid. - 1974 (2 vol).
Alianza Universidad #s 64 y 142.

DODGE, Clayton.
(30) "Sets, Logic and Numbers." Prindle, Weber and Schmidt. U.S.A. 1969. 346 pp.

DOU, Alberto.
(31) "Fundamentos de la Matemática." Labor. España. 1970. 139 p
Nueva Colección Labor #117.

ENRIQUEZ, Federico.
(32) "Para la Historia de la Lógica." Espasa-Calpe. Argentina. 1948. 280 pp.
Historia y Filosofía de la Ciencia (Serie Menor).

EVES, Howard & NEWSON, Carroll V.
(33) "An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics." Holt, Rinehart, Winston. U.S.A. 1966. 358 pp.

FRAENKEL, Abraham A.
(34) "Abstract Set Theory." North-Holland. Amsterdam. 1968. - 295 pp.
Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.

(35) "Foundations of Set Theory." (2da.ed.) North-Holland. Amsterdam. 1973. 404 pp.
Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.

(36) "Set Theory and Logic." Addison-Wesley. U.S.A. 1966. 102 - pp. (Está traducido al español por la U.N.A.M.)

FREGE, Gottlob.
(37) "Conceptografía. Los Fundamentos de la Aritmética. Otros - Escritos Filosóficos." U.N.A.M. México. 1972. 270 pp.
Instituto de Investigaciones Filosóficas.

GARCIA BACCA, Juan David.
(38) "Elementos de Geometría." U.N.A.M. México. 1944-1946 (2 - vols).
Biblioteca Scritorum Graecorum Romanorum Mexicana # 9.

GODEL, Kurt.
(39) "What is the Cantor Continuum Problem?" American Mathematical Monthly **54** (1947) 515-525 pp.

(40) "The Consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis." Proceedings of the National Academy of Sciences **24** (1938) 556-557 pp.

GUTHRIE, E.R.
(41) "The Paradoxes of Mr. Russell with a brief account of their History." Journal of Philosophy **13** (1916) 152-158 pp.

HALMOS, Paul R.
(42) "Teoría Intuitiva de los Conjuntos." C.E.C.S.A. México. - 1973. 151 pp.

HAHN, Hans.
(43) "El Infinito." (Recopilado por NEWMAN, J.R. "El Mundo de - las matemáticas." Ed. Grijalbo. 1974. España. vol IV. 384-401 pp.)

HARDY, G.H.
(44) "A Course of Pure Mathematics." Cambridge University Press. Gran Bretaña. 1967. 509 pp.

HEATH, Sir Thomas.

(45) "Greek Mathematics." Dover. New York. 1963. 552 pp.

(46) "The Thirteen Books of Euclid's Elements." Dover. New York. (3 vols.)

HEYTING, A.

(47) "Intuitionism. An Introduction." North-Holland. Amsterdam. 1971. 133 pp.
Studies in Logic and the Foundatios of Mathematics.

HEISEMBERG, Werner.

(48) "El Humanismo en la Filosofía de la Ciencia." U.N.A.M. México. 1967. 50 pp.
Problemas Científicos y Filosóficos. Suplementos III/4.

HILBERT, David.

(49) "On the Foundations of Logic and Aritmetic." (Recopilado por: HEIJENOORT, Jean van. "From Frege to Gödel: A source book in Mathematical-Logic, 1879-1931." Cambridge University Press. Mass. 1967. 129-138 pp.)

(50) "The Foundations of Mathematics." (Ibidem. 464-479 pp.)

(51) & ACKERMAN, W. "Elementos de Lógica-Teórica." Tecnos Madrid 1968. 213 pp.
Estructura y Función.
"El Porvenir Actual de la Ciencia." # 6.

KAMKE, Dr. E.

(52) "Theory of Sets." Dover. New York. 1950. 144 pp.

KLEENE, Stephen C.

(53) "Introducción a la Metamatemática." Tecnos. Madrid. 1974.
Estructura y Función.
El Porvenir Actual de la Ciencia # 42.

(54) "The Foundations of Intuitionistic Mathematics." North-Holland. Amsterdam. 1965. 206 pp.
Stdies in Logic and the Foundations of Mathematics.

KNEEBONE, G.T.

(55) "Mathematical-logic and the Foundations of Mathematics." - Van Nostrand. Gran Bretaña. 1963. 435 pp.

KORNER, Stephan.
(56) "Introducción a la Filosofía de la Matemática." (2da.ed.) Siglo XXI. México. 1969. 250 pp.
Teoría y Crítica.

(57) "La Matemática Gödeliana y sus Implicaciones Filosóficas." U.N.A.M. México. 1972. 34 pp.
Problemas Científicos y Filosóficos. Suplementos III/11.

KURATOWSKI, C.
(58) "Sur la Notion de l'ensemble Fini." Fundamenta Mathematicae **1** (1920) 129-131 pp.

(59) "Sur la Notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles." Fundamenta Mathematicae **2** (1921) 161-171 pp.

LEVY, A.
(60) "On von Neumann's Axiom System for Set Theory." American - Mathematical Monthly **75** (1968) 762-763 pp.

LIGHTSTONE, A.H.
(61) "The Axiomatic Method." Prentice-Hall. U.S.A. 1964. 246 pp.

MIRIMANOFF, D.
(62) "Les Antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problé me Fondamental de la Théorie des Ensembles." Enseignement Mathématique **19** (1917) 37-52 pp.

MONDOLFO, Rodolfo.
(63) "El Infinito en el Pensamiento de la Antigüedad Clásica." (2da.ed.) EUDEBA. Buenos Aires. 1971. 446 pp.
Temas: Filosofía.

MONTAGE, R.
(64) "Zermelo-Fraenkel Set Theory is not a finite extention of Zermelo Set Theory." Bulletin of the American Mathematical Society **62** (1956) 260 pp.

MORITZ, Robert.
(65) "On Mathematics." Dover. New York. 1958. 410 pp.

NAGEL, E. & NEWMAN, J.R.
(66) "El Teorema de Gödel." Tecnos. España. 1970. 140 pp.
Estructura y Función.
El Porvenir Actual de la Ciencia # 31.

PIERPONT, James.

(67) "Mathematical Rigor, Past and Present." Bulletin of the American Mathematical Society 34 (1928) 23-53 pp.

POINCARE, Henri.

(68) "Ciencia y Método." (3a.ed.) Espasa-Calpe. España. 1963. 218 pp.
Col. Austral # 409.

(69) "El Valor de la Ciencia." (3a.ed.) Espasa-Calpe. España. 1964. 166 pp.
Col. Austral # 628.

(70) "La Ciencia y la Hipótesis." (3a.ed.) Espasa-Calpe. España. 1963. 217 pp.
Col. Austral # 379.

QUINE, Willard van Orman.

(71) "Desde un Punto de Vista Lógico." Ariel. Barcelona. 1962. 248 pp.
Col. Zetein. Estudios y Ensayos # 7.

(72) "Filosofía de la Lógica." Alianza Ed. Madrid. 1973. 187 pp.
Alianza Universidad # 43.

(73) "Los Métodos de la Lógica." (2da.reim.) Ariel. Madrid. 1969. 362 pp.
Col. Zetein. Estudios y Ensayos # 9.

(74) "On the Theory of Types." American Mathematical Monthly 3 (1938) 125-139 pp.

(75) "Russell's Paradox and Others." Tecnology Review 44 (1941) 16-17 pp.

(76) "Los Fundamentos de la Matemática." Scientific American. Septiembre. 1964. (Recopilado por: KLINE, Morris. Op. Cit. 215-223 pp.)

(77) "Paradoja." Scientific American. Abril. 1962. (Recopilado por: KLINE, Morris. Op. Cit. 224-233 pp.)

RUSSELL, Bertrand.

(78) "Introduction to the Mathematical Philosophy." Simon & Schuster. Londres. 1920. 206 pp.

(79) "Los Principios de la Matemática." (2da.ed.) Espasa-Calpe. Madrid. 1967. 619 pp.
Historia y Filosofía de la Ciencia (Serie Mayor).

RUSSELL, Bertrand.

(80) "Mathematical Logic as based on the Theory of Types." American Journal of Mathematics 30 (1908) 222-262 pp.

(81) "Misticismo y Lógica." Paidos. Buenos Aires. 1967. 169 pp. Biblioteca de Filosofía # 9. (Serie Menor).

(82) "On Some difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types." Proceedings of the London Mathematical Society 4 (1906) 29-53 pp.

(83) & WHITEHEAD, A.N. "Principia Mathematica." Cambridge. Inglaterra. 1925-7. (3 vols).

SIERPINSKI, W.

(84) "L'Hypothese Généralisée du Continu et l'Axiome du Choix." Fundamenta Mathematicae 34 (1947) 1-5 pp.

SMITH, David Eugene.

(85) "History of Mathematics." Dover. New York. 1958. (2 vols.)

STRUICK, Dirk J.

(86) "A Concise History of Mathematics." Dover. New York. 1967. 195 pp.

SUPPES, Patrick.

(87) "Axiomatic Set Theory." Dover. New York. 1972. 267 pp.

TARSKY, Alfred.

(88) "Introducción a la Lógica." Espasa-Calpe. Madrid. 1968. 285 pp.
Nueva Ciencia-Nueva Técnica.

(89) "On Well-Ordered Subsets of any Set." Fundamenta Mathematicae 32 (1939) 176-183 pp.

(90) "Sur quelques Théorems qui équivalent a l'Axiome du Choix." Fundamenta Mathematicae 5 (1924_a) 147-154 pp.

(91) "Sur les Ensembles Finis." Fundamenta Mathematicae 6 (1924_b) 45-95 pp.

TURBULL, Herbert W.

(92) "The Great Mathematicians." (2da.ed.) Simon & Shuster. New York. 1962. 141 pp.

VERA, Francisco.

(93) "Matemática." (2da.ed.) Lexicón Kapelusz. Argentina. 1967. 734 pp.
Col. Universitaria. Serie Diccionarios.

(94) "Puntos Críticos de la Matemática Contemporánea." Losada. Argentina. 1942. 204 pp.
Biblioteca 'Teoría e Historia de las Ciencias.'

WANG, Hao.

(95) "A Survey of Mathematical Logic." Science Press. China. - 1964. 651 pp.

(96) "On Zermelo's and von Neumann's Axioms for Set Theory." - Proceedings of the National Academy of Sciences 35 (1949) 150-155 pp.

(97) "Remarks on the comparison of Axiom Systems." Proceedings of the National Academy of Sciences 36 (1950) 448-453 pp.

(98) "The Formalization of Mathematics." Journal of Symbolic Logic 19 (1954) 241-266 pp.

(99) & McNAUGHTON, R. "Les Systemes Axiomatiques de la Thérorie des Ensembles." París. 1953. 55 pp.

WEYL, Hermann.

(100) "Filosofía de las Matemáticas y de la Ciencia Natural." U.N.A.M. México. 1965. 354 pp.
Filosofía Contemporánea. Centro de Estudios Filosóficos.

(101) "Mathematics and Logic. A Brief Survey Serving as Preface to a Review of 'The Philosophy of Bertrand Russell.'" American Mathematical Monthly 53 (1946) 2-13 pp.

WILDER, R.L.

(102) "Introduction to the Foundations of Mathematics." (3a.ed.) John Wiley & Sons. New York. 1958. 305 pp.

(103) "El Sistema Axiomático." (Recopilado por: NEWMAN, J.R. Op. Cit. Vol V. 35-56 pp.)

ZERMELO, Ernst.

(104) "Proof that every Set can be Well-Ordered." (Recopilado - por: HEIJENOORT, Jean van. Op. Cit. 139-141 pp.)

(105) "A New Proof of the Possibility of a Well-Ordering." (Ibidem. 199-215 pp.)

ZERMELO, Ernst.
(106) "Investigations in the Foundations of Set Theory, I." (Ibidem. 199-215 pp.)

ZORN, M.
(107) "Idempotency of Infinite Cardinals." University of California. Mathematical New Series 2 (1944) 9-12 pp.