

24/61
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"EL EFECTO ČERENKOV COMO UN PROBLEMA DE REACCION DE RADIACION"

T E S I S

PARA OBTENER EL TITULO DE

F I S I C O

PRESENTA:

MIRNA VILLAVICENCIO TORRES

MEXICO, D.F.

ABRIL DE 1988



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INTRODUCCION	iii
CAPITULO I: TRANSFERENCIA DE ENERGIA AL INTERACCIONAR UNA PARTICULA CARGADA CON UN MEDIO MATERIAL	
1.1 INTRODUCCION	1
1.2 PASO DE UNA PARTICULA CARGADA A TRAVES DE UN MEDIO DIELECTRICO DE DENSIDAD PEQUEÑA	2
1.3 ENERGIA PERDIDA POR UNA PARTICULA CARGADA AL CHOCAR CON UN OSCILADOR ARMONICO CARGADO	6
1.4 EFECTO DE DENSIDAD EN LA ENERGIA TRANSFERIDA POR UNA PARTICULA CARGADA AL VIAJAR A TRAVES DE UN MEDIO MATERIAL	12
CAPITULO II: EFECTO ČERENKOV	
2.1 INTRODUCCION	21
2.2 RADIACION ČERENKOV	21
2.3 EXPRESION PARA LA RADIACION ČERENKOV OBTENIDA A TRAVES DE UN BALANCE DE ENERGIA	24
CAPITULO III: ECUACION DE MOVIMIENTO PARA PARTICULAS CARGADAS CON ESTRUCTURA MOVIENDOSE EN UN MEDIO MATERIAL	
3.1 INTRODUCCION	30
3.2 ECUACION DE MOVIMIENTO PARA PARTICULA CARGADA CON ESTRUCTURA MOVIENDOSE EN EL VACIO	31
3.3 ECUACION DE MOVIMIENTO PARA UNA PARTICULA CARGADA MOVIENDOSE A TRAVES DE UN MEDIO MATERIAL	38

CAPITULO IV: EL EFECTO ČERENKOV COMO UN PROBLEMA DE
REACCION DE RADIACION

4.1 INTRODUCCION	43
4.2 PARTICULA CARGADA VIAJANDO CON VELOCIDAD CONSTANTE EN EL VACIO	45
4.3 PARTICULA CARGADA VIAJANDO CON VELOCIDAD CONSTANTE A TRAVES DE UN MEDIO MATERIAL	48
4.4 RADIACION ČERENKOV PARA DOS DISTRIBUCIONES DE CARGA	52
a) CASCARON ESFERICO	52
b) DISTRIBUCION YUKAWA	54
CONCLUSIONES	57
REFERENCIAS	59

INTRODUCCION

Es bien conocido que una partícula cargada que viaja con velocidad constante en el vacío no radia, si la partícula cargada se moviese con una velocidad mayor que la velocidad de la luz, el resultado sería diferente. Naturalmente ningún objeto puede viajar a una velocidad mayor que la de la luz en el vacío si su masa en reposo es finita. Sin embargo cuando la luz se propaga en un medio tiene una velocidad de fase dada por $v_{\text{fase}} = c/n$ (donde n es el índice de refracción de dicho medio y depende de la frecuencia de la onda), como $n > 1$ es posible tener una partícula cargada viajando a una velocidad mayor que la velocidad de la luz en dicho medio, por lo cual en este caso podremos observar radiación.

El fenómeno descrito anteriormente fué descubierto en los años treinta y es conocido como efecto Vavilov-^Xerenkov y a la radiación emitida se le llama radiación ^Xerenkov.

Así pues, nos interesa estudiar la forma en la cual la partícula interacciona con el medio y las condiciones bajo las cuales hay radiación.

Cuando una partícula cargada viaja a través de un medio de constante dieléctrica ϵ observamos un cambio en su energía y en su dirección de movimiento. Nuestro principal objetivo es la obtención de una expresión para dicho cambio en la energía en función de las características del medio.

En el capítulo I estudiamos el mecanismo mediante el cual una partícula que viaja a través de un medio transfiere energía. En esta primera parte nos enfocaremos a estudiar medios de densidad pequeña, como es el caso de los gases, luego estudiaremos el caso en que se tiene un medio muy denso, pero la partícula viaja con una velocidad tal que podemos suponer que tiene la posibilidad de interactuar a cada uno de los constituyentes del

medio; con los resultados obtenidos podemos recuperar en el límite adecuado los resultados para medios de densidad pequeña.

Estudiaremos luego el caso en que la partícula cargada viaja a través de un medio de densidad grande, ya sea un sólido o un líquido, e interactúa con varios átomos a la vez, de tal forma que desde el punto de vista macroscópico el cambio en la energía de la partícula es resultado de la polarización dieléctrica del medio debido al paso de ésta. En la parte final de este capítulo, el I, presentamos el análisis del problema desde un punto de vista macroscópico, partiendo de las ecuaciones de Maxwell en un medio material.

Una vez que hemos estudiado el mecanismo de transferencia de energía nos centramos en el capítulo II al estudio de la emisión de radiación Čerenkov. Puesto que, como ya dijimos, la condición para que esta radiación se presente es que la partícula viaje en el medio con velocidad mayor que la de la luz en ese medio presentamos también el análisis del caso en el que se satisface esta condición $v > c/n$ y llegamos a la célebre expresión para la radiación Čerenkov.

En el capítulo III, con el fin de obtener las herramientas necesarias para plantear al efecto Čerenkov como un problema de reacción de radiación, analizamos primero la ecuación de movimiento para una partícula cargada tomando en cuenta la reacción de radiación, tanto para el caso en el cual la partícula viaja en el vacío, como para el caso en que viaja con velocidad arbitraria a través de un medio material.

En el capítulo IV, bajo las hipótesis de que la partícula es puntual y viaja con velocidad constante, llegamos a la expresión para la radiación Čerenkov a través de las expresiones obtenidas en el capítulo anterior. Con esto mostramos que efectivamente el

efecto Čerenkov puede verse como un problema de reacción de radiación.

Como una prueba de validez para los resultados obtenidos, se muestra que cuando la partícula se mueve con velocidad constante a través del vacío no se presenta radiación.

Por último como complemento a lo estudiado, analizamos muy brevemente en forma cualitativa, la radiación Čerenkov emitida por dos tipos de distribuciones extensas de carga : el cascarón esférico y la distribución tipo Yukawa.

CAPITULO I "TRANSFERENCIA DE ENERGIA"

1.1 INTRODUCCION

Como mencionamos en la introducción general de este trabajo nuestro objetivo es estudiar el efecto Čerenkov y la forma en que la radiación Čerenkov se emite. Puesto que dicha radiación se presenta cuando la partícula viaja a través de un medio material, es conveniente comenzar analizando el problema de la interacción entre una partícula cargada y el medio a través del cual viaja con velocidad constante.

Estudiaremos el problema por etapas, partiremos de un modelo simple que iremos complicando, poco a poco, así pues la primera parte de este capítulo consistirá en analizar lo que sucede al interaccionar una partícula cargada con un medio de densidad pequeña, para esto comenzaremos analizando el caso de la colisión entre una partícula cargada y un electrón para después generalizar tratando de obtener una aproximación a lo que sería una partícula interaccionando con todo el medio. Con el fin de hacer una mejor aproximación a lo que constituiría la presencia de un medio como segundo paso procederemos a analizar el choque entre una partícula cargada y un oscilador armónico cargado, para después hacer la generalización a la consideración del medio de forma análoga a como se construye el modelo simple para la constante dieléctrica.

Ahora bien el suponer que tenemos medios de densidad pequeña podemos considerarlo equivalente a suponer que nuestra partícula viajera se mueve con velocidad pequeña, de tal forma que le es posible interaccionar individualmente con cada uno de los constituyentes del medio.

Tratando de formalizar el tratamiento de las primeras secciones, en la última del capítulo consideraremos que la partícula ve al medio como un continuo, por lo tanto partiremos de las ecuaciones de Maxwell en medios materiales, tomando en cuenta que nuestra partícula viaja a una velocidad menor que la de la luz

en dicho medio

Una vez que hagamos este análisis obtendremos un modelo que nos describe el mecanismo a través del cual se emite la radiación Čerenkov.

1.2 PASO DE UNA PARTICULA CARGADA A TRAVES DE UN MEDIO DE DENSIDAD PEQUEÑA

Para facilitar la comprensión de los conceptos implicados procederemos como primer paso al análisis de la colisión entre un electrón y una partícula cargada, de donde obtendremos una expresión para el cambio en la energía de la partícula y una relación entre el parámetro de impacto y el momento de la partícula, lo que nos permitirá establecer el intervalo de validez de los resultados obtenidos.

Consideremos una partícula de carga Ze y masa M trasladándose en el vacío en una línea recta con velocidad constante, \vec{v} cte.

En determinado momento esta partícula choca con un electrón atómico de masa $m \ll M$. Tomaremos en cuenta las siguientes aproximaciones, que son las más usuales:

- La velocidad de la partícula cargada es mucho mayor que la velocidad con la cual el electrón recorre su órbita, de tal forma que nos es posible considerar al electrón atómico durante la colisión, como si estuviese libre y en reposo.
- Dado que $M \gg m$ la partícula incidente transferirá una cantidad apreciable de energía al electrón atómico sin sufrir una deflexión significativa en su trayectoria, es decir consideraremos que la partícula continuará su movimiento con una velocidad constante a pesar de que cedió parte de su energía. JACKSON (1975) explica esto diciendo que la transferencia de energía es lo suficientemente pequeña para que no afecte el movimiento de la partícula apreciablemente.

Observemos que lo anterior es cierto cuando consideramos que nuestra partícula cargada choca con un solo electrón atómico, sin embargo cuando la partícula choca con todo un conjunto de electrones, es de esperarse que la energía total perdida por ésta ya no sea muy pequeña sino que tenga un valor significativo, lo cual influirá en su velocidad. De ésta forma vemos que el postular que nuestra partícula seguirá moviéndose con velocidad constante en el medio es una hipótesis muy fuerte, a la cual podríamos considerar como una suposición que nos facilitará la obtención de resultados o bien podríamos pensar en la existencia de una fuerza externa que permite que nuestra partícula, aunque pierda energía, siga moviéndose con velocidad constante.

Así pues al suponer que la partícula se mueve con velocidad constante estamos haciendo una primera aproximación.

- Puesto que supusimos que esta transferencia de energía es pequeña podemos considerar que el movimiento del electrón después de la colisión es muy pequeño.

Considerando lo anterior; para el cálculo de la energía transferida por la partícula incidente, solo necesitaremos calcular el campo eléctrico generado por dicha partícula en la posición del electrón, puesto que al considerar a este en reposo el campo magnético no jugará en el cálculo.

Suponiendo que la partícula viaja con una velocidad \bar{v} , una energía $E = \gamma mc^2$ y pasa a una distancia b (parámetro de impacto) del electrón, el campo eléctrico generado por ésta satisfecerá las relaciones:

$$E_1 = \frac{\gamma' z e b}{(b^2 + \gamma'^2 v^2 t^2)^{3/2}} \quad E_3 = - \frac{z \delta' e v t}{(b^2 + \gamma'^2 v^2 t^2)^{3/2}} \quad (1)$$

donde \bar{E}_1 y \bar{E}_3 denotan las componentes perpendicular y paralela a la velocidad \bar{v} respectivamente. Dado que \bar{E} es una función impar sobre t , el cambio en el momento de la partícula incidente

apuntará en la dirección perpendicular a \bar{v} y tendrá una magnitud

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{\infty} a E_1(t) dt = \frac{2Ze^2}{bv}$$

de donde es posible establecer que la energía transferida al electrón será:

$$\Delta E(b) = \frac{2Z^2e^4}{mb^2v^2} \quad (2)$$

Dado que obtuvimos una dependencia lineal con $(1/b^2)$ tendremos que conforme reduzcamos el parámetro de impacto la transferencia de energía será mayor, llegando a ser infinita cuando $b \rightarrow 0$, así pues será necesario imponer nuestra primera restricción: "Nuestros cálculos solo serán válidos para valores grandes del parámetro de impacto b ". Es por esto que surge ahora nuestro interés por conocer el valor mínimo permitido para b , el cual corresponderá al valor máximo para la energía transferida, dado que dicho valor máximo para la energía transferida corresponde a la energía con la cual incide la partícula se tendrá que: $b_{\min} = Ze^2/\gamma mv^2$

Puesto que la máxima energía transferida debe obtenerse para colisiones "de frente", es decir $b=0$, la expresión exacta para la energía transferida deberá ser:

$$\Delta E(b) = \frac{2Z^2e^4}{mv^2} \left(\frac{1}{b^2 + b_{\min}^2} \right) \quad (3)$$

Recordemos que hemos considerado al electrón libre y en reposo, lo que podríamos visualizarlo diciendo que la colisión fué muy rápida. El tiempo sobre el cual los campos son apreciables es $\Delta t \approx b/\gamma v$ (JACKSON 1975). Ahora bien, si el tiempo que dura la colisión es grande comparado con el período orbital del electrón, este dará algunas vueltas en su órbita mientras que la partícula pasa lentamente; en este caso el electrón será afectado adiabáticamente por los campos y por ende no habrá transferencia

de energía. Ya que Δt depende linealmente del parámetro de impacto, el valor máximo para b corresponderá a un tiempo de colisión comparable con el periodo orbital del electrón, es decir:

$$b_{\max} = \gamma v / \omega$$

Para parámetros mayores que esta b_{\max} podremos considerar una energía transferida muy pequeña. De esta forma hemos establecido un intervalo de validez para nuestra expresión (3):

$$\frac{Ze^2}{\gamma m v^2} < b < \frac{\gamma v}{\omega}$$

(4)

Puesto que $b \approx (1/p)$ donde p es el momento de la partícula el tener b_{\max} implica imponer una p_{\min} , así pues si nuestra partícula viene con una velocidad muy pequeña podremos considerar que no hubo transferencia de energía. Ahora bien el tener $b \gg b_{\max}$ implicaría también que al pasar la partícula muy lejos no hay interacción.

Nuestro primer intento por considerar al electrón moviéndose en un medio es suponer ahora que la partícula choca con muchos electrones situados a distintas distancias de su camino. Considerando que tenemos N átomos con Z electrones cada uno, la energía transferida por la partícula, por unidad de trayectoria se encuentra dada por:

$$\frac{dE}{dx} = \int dn \Delta E(b) db = \frac{4\pi N Z e^2 z^2}{m v^2} I_n B \quad (5)$$

donde dn es el número de electrones que "verá" la partícula con un parámetro de impacto entre b y $b+db$ y $B = b_{\max}/b_{\min} = \gamma^2 v^3 / \omega Z e^2$.

Esta ecuación nos lleva a considerar un hecho importante, notemos que si dE/dx es distinta de cero, existirá una fuerza de frenado dado que la partícula cede parte de su energía y su movimiento se ve afectado. Si este hecho lo relacionamos con la segunda ley de Newton nos lleva a pensar que velocidad de la partícula no puede ser constante a menos que exista una fuerza

externa actuando sobre ella. De aquí que el suponer que la partícula seguirá su trayectoria con una velocidad constante será una primera aproximación que simplifica nuestros cálculos y nos lleva a los resultados requeridos. Podríamos a su vez pensar en la existencia de una fuerza externa que actúa sobre la partícula y cuyo efecto consiste en mantener a ésta moviéndose con velocidad constante a pesar de que vaya cediendo energía.

Observemos que aunque hemos considerado velocidades relativistas el medio es tan poco denso que pudimos suponer que la partícula tiene la posibilidad de "ver" a cada uno de los electrones con los cuales choca. Hemos tomado en cuenta en el cálculo de (dE/dx) solo las colisiones que sufre nuestra partícula incidente con los electrones atómicos y nos hemos olvidado de los núcleos atómicos, esto se debe a que estos al ser masivos absorben muy poca energía, por lo que supusimos que toda la transferencia de energía se da a los electrones. Sin embargo deberemos notar que los núcleos atómicos al tener una carga muy grande serán los responsables de la deflexión en la trayectoria de la partícula incidente. Una vez más nos preguntamos como es posible que consideremos una velocidad constante para la partícula viajera. Así pues el imponer esta condición representa una hipótesis de planteamiento que nos facilita los cálculos para la obtención del resultado requerido o bien podríamos postular la existencia de una fuerza externa aplicada sobre nuestra partícula incidente que hace que ésta siga viajando a velocidad constante.

1.3 ENERGIA PERDIDA POR UNA PARTICULA CARGADA AL CHOCAR CON UN OSCILADOR ARMONICO CARGADO.

Hasta este momento hemos realizado una construcción un poco burda de lo que sería la interacción entre la partícula y el medio al considerar a este como un conjunto de electrones y suponer que solo hay interacciones individuales. Como siguiente paso nos proponemos acercarnos un poco más a la idea que se tiene del medio considerando a este como un conjunto de osciladores armónicos cargados.

De forma análoga a como se construye el modelo simple para $\epsilon(\omega)$ (JACKSON 1975) realizaremos el análisis de la interacción entre la partícula que viaja con una velocidad constante y el medio a través del cual viaja. Consideraremos como primer paso el choque entre una partícula cargada incidente con un electrón armónicamente ligado, para posteriormente, mediante la superposición, hacer la generalización al caso en cual la partícula interacciona con N cargas, armónicamente ligadas, por unidad de volumen, lo que equivaldrá a considerar el problema de una partícula viajera interaccionando con el medio.

Supongamos que se tiene una partícula cargada de carga Ze viajando con una velocidad \vec{v} ; esta partícula choca con una carga armónicamente ligada de masa m y carga e . En este caso haremos como es usual las mismas suposiciones que se hicieron en la sección anterior:

- . La partícula incidente se defleca solo ligeramente de su trayectoria de tal forma que consideraremos que continuará con una velocidad constante, aunque haya pérdida de energía.
- . La energía transferida por la partícula incidente es pequeña tal que el movimiento de la partícula ligada es no relativista durante la colisión.
- . Las amplitudes final e inicial de la carga ligada alrededor del origen O de la fuerza de ligadura son pequeñas comparadas con el parámetro de impacto b .
- . Utilizaremos la denominada aproximación dipolar según la cual la variación del campo eléctrico generado por la partícula incidente en la posición de la partícula ligada puede ser despreciado tomando como valor efectivo el medido en el origen O .

La ecuación de movimiento para la partícula ligada con las

aproximaciones antes mencionadas quedará dada por:

$$\ddot{\bar{x}} + \Gamma \dot{\bar{x}} + \omega_0^2 \bar{x} = \frac{e}{m} \bar{E}(t)$$

donde $\bar{E}(t)$ es el campo generado por la partícula incidente en 0, ω_0 es la frecuencia característica del electrón ligado armónicamente, mientras que Γ es un factor de atenuación, el cual se considera ya que la carga ligada al acelerarse debido al campo de la partícula incidente, radiará. Este término que es proporcional a la primera potencia de la velocidad se interpreta como una fuerza disipativa o de amortiguamiento a la cual se debe la pérdida instantánea de energía.

Así pues, vemos que no solo la partícula incidente perderá energía durante la colisión, sino que también la partícula ligada transfiere una cierta cantidad de energía. Si considerásemos todo el medio como un conjunto de osciladores armónicos cargados deberemos decir que la energía observada como radiación no solo proviene de la partícula incidente sino que también hay una contribución del medio. Por lo que habrá que tenerse en cuenta que se trata de un efecto colectivo en donde todas las partes contribuyen.

Utilizando la transformada de Fourier nos será posible la simplificación de los cálculos y llegar a que:

$$\bar{x}(\omega) = \frac{e}{m} \frac{\bar{E}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} \quad (6)$$

Puesto que lo que nos interesa es el cálculo de la energía transferida por la partícula incidente, calcularemos el trabajo realizado sobre el electrón ligado durante la colisión y así se tendrá que:

$$\Delta E = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int J \cdot \bar{E} d\bar{x}$$

donde \bar{J} es la densidad de corriente generada por la carga ligada y suponiendo que nuestra partícula es puntual podemos sustituir

simplemente $\vec{J} = e\vec{v}(t)\delta(\vec{x} - \vec{x}(t))$, donde $\vec{x}(t)$ corresponde a la trayectoria seguida por la partícula, con lo cual se tendrá que:

$$\Delta E = e \int_{-\infty}^{\infty} \vec{v} \cdot \vec{E}(t) dt$$

Trabajando siempre en el espacio de Fourier ω es posible llegar a la expresión:

$$\Delta E = ze \operatorname{Re} \int_0^{\infty} -i\omega \tilde{\Sigma}(\omega) \vec{E}^*(\omega) d\omega$$

Sustituyendo en esta ecuación la expresión (6) llegamos a la relación:

$$\Delta E = \frac{ze^2}{m} \pi |\vec{E}(\omega_0)|^2 \quad (7)$$

Si consideramos que $\vec{E}(t)$ está dado por las ecuaciones (1), aplicando la transformada de Fourier tendremos que:

$$E_1(\omega) = \frac{ze}{bv} \left(\frac{z}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{b\omega}{\gamma v}\right) K_1\left(\frac{b\omega}{\gamma v}\right) \quad E_3 = \frac{-i\gamma z e}{\gamma' b v} \left(\frac{z}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{b\omega}{\gamma v}\right) K_0\left(\frac{b\omega}{\gamma v}\right)$$

lo que nos conduce a la expresión que nos proporciona la energía cedida por una partícula cargada que viaja con una velocidad \vec{v} y choca con un electrón armónicamente ligado:

$$\Delta E(b) = \frac{2ze^2\gamma}{m\gamma'^2} \frac{1}{b^2} \left[\eta^2 K_1^2(\eta) + \frac{1}{\gamma^2} \eta^2 K_0^2(\eta) \right]$$

donde: $\eta = b\omega_0 / \gamma v = h / h_{\max}$

Cuando consideramos $b \ll h_{\max}$, es decir $\eta \ll 1$ la expresión (8) se reduce a la relación (2), mientras que al tomar $b \gg h_{\max}$ la relación (8) para la energía transferida decae exponencialmente a cero, lo que coincide con lo que habíamos mencionado en la sección anterior de que la energía transferida se hace lo suficientemente pequeña para no considerarla.

Ahora bien nuestro siguiente paso consistirá en generalizar la expresión (8) para encontrar la energía transferida por unidad de trayectoria por una partícula cargada que viaja a través de un medio de constante dieléctrica ϵ .

Supongamos que tenemos N átomos por unidad de volumen y que

cada uno de ellos posee Z electrones. Estos Z electrones pueden ser divididos en grupos denotados un un índice j donde f_j es el número de electrones que poseen una frecuencia de ligadura ω_j . De aquí que $\sum f_j = Z$. Así pues la energía transferida por la partícula al cruzar el medio tendrá la forma:

$$\frac{dE}{dx} = 2\pi N \sum_j f_j \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} b \Delta E_j(b) db$$

Dado que para $b \gg b_{\max}$ ΔE decae a cero, podemos extender el límite superior de b a ∞ y al realizar la integral tomando en cuenta que $b_{\min} \ll b_{\max}$ se llega al resultado tan esperado:

$$\frac{dE_c}{dx} = \frac{4\pi N Z z^2 e^4}{m v^2} \left[\ln B_c - \frac{v^2}{2c^2} \right]$$

(9)

donde:

$$B_c = \frac{1.238^2 v}{\langle \omega \rangle b_{\min}} = \frac{1.238^2 v^3 m}{z e^2 \langle \omega \rangle}$$

el subíndice c denota que se trata del resultado clásico.

Este resultado concuerda con el resultado (5) obtenido anteriormente a excepción de la presencia de un término adicional $v^2/2c^2$ que aún a grandes velocidades podrá considerarse muy pequeño. Era de esperarse que pudiesemos regresar al resultado de la sección anterior puesto que la construcción de este modelo simplificado para el paso de la partícula a través de un medio servirá para todo tipo de medio.

Los resultados obtenidos hasta ahora concuerdan perfectamente con los resultados experimentales cuando tenemos partículas incidentes pesadas como lo son partículas alfa lentas y núcleos pesados. Sin embargo cuando nuestra partícula incidente es ligera, como lo son electrones, partículas alfa rápidas, etc., la energía transferida es sobrestimada considerablemente.

El origen de este desacuerdo se encuentra en que para partículas ligeras deberemos considerar los efectos cuánticos:

- . La energía transferida toma valores discretos.
- . El principio de incertidumbre habrá de satisfacerse

El problema con la energía transferida en valores discretos se ilustra calculando la energía transferida a b_{min} la cual corresponderá a la energía más pequeña transferida en el proceso. Suponiendo una frecuencia característica ω_0 de los electrones ligados tendremos:

$$\Delta E(b_{\text{min}}) \approx \frac{e}{\gamma^{1/2}} z^2 \left(\frac{v_0}{v} \right)^4 \hbar \omega_0,$$

con $v_0 = c/137$, la velocidad de un electrón en el estado base del Hidrógeno.

Se tiene que ω_0 es del orden del potencial de ionización del átomo. Para una partícula rápida $v \gg v_0$ por lo que el cambio en su energía ΔE será menor que la energía de ionización. Ya que la energía es transferida en valores discretos, la energía cedida por la partícula no podrá ser absorbida. Podríamos concluir entonces que el resultado clásico falla en este caso. Sin embargo, podríamos establecer una reconciliación al tomar una interpretación estadística. Si consideramos un gran número de colisiones el promedio de la energía transferida es muy pequeña y solo en algunas ocurre una excitación apreciable.

Veamos ahora lo que sucede al considerar el principio de incertidumbre, para lo cual utilizaremos el carácter ondulatorio de las partículas. El principio de incertidumbre nos limitará el intervalo de validez de las suposiciones clásicas que hemos hecho. La trayectoria de la partícula incidente podrá ser determinada solo dentro de un intervalo $\Delta x \ll \hbar/p$, donde $p = \gamma m v$ es el momento de ésta.

Así pues nuestra partícula incidente no podrá pasar a parámetros de impacto $b \ll \hbar/p$ pues nuestros resultados no serían válidos, es de aquí que podemos definir que nuestro parámetro será del orden: $b_{\text{min}}^q = \hbar / \gamma m v$

Cuando se tenga que $b_{\text{min}}^q < b_{\text{min}}^c$ podremos utilizar la ecuación que obtuvimos clásicamente para ΔE , sin embargo cuando $b_{\text{min}}^q > b_{\text{min}}^c$ las modificaciones cuánticas deberán aparecer en la expresión para la energía transferida.

En este caso habrá de considerarse:

$$B_q = \frac{b_{\max}}{b_{\min}} = \frac{\gamma^2 m v^2}{\hbar \langle \omega \rangle}$$

Obteniéndose la fórmula de Bethe:

$$\frac{dE_q}{dz} = \frac{4\pi N Z^2 z^2 e^4}{m v^2} I_n \left(\frac{2 m v^2}{\hbar \langle \omega \rangle} \right) \quad (10)$$

La cual en el caso en que $\gamma \rightarrow 1$ se reduce a:

$$\frac{dE}{dz} = \frac{4\pi N z^2 Z^2 e^4}{m v^2} I_n \left(\frac{2 m v^2}{\hbar \langle \omega \rangle} \right) \quad (11)$$

La fórmula de Bethe nos proporciona aproximadamente el valor de la energía transferida por una partícula no "muy relativista" en todos los tipos de medio. De aquí que ahora nos interese ver lo que sucede cuando tenemos partículas moviéndose a velocidades ultrarelativistas, que es en esencia lo que tenemos en el Efecto Čerenkov.

1.4 EFECTO DE DENSIDAD EN LA ENERGIA TRANSFERIDA POR UNA PARTICULA CARGADA

Para partículas ultrarelativistas el resultado predicho por Bethe sobrestima aún la energía transferida por la partícula viajera sobre todo en medios densos. Esta reducción es conocida como "Efecto de Densidad". Para valores de γ muy grandes, el parámetro b crece igualmente, por lo cual, si se tiene un medio muy denso, como es el caso de un sólido o un líquido, no podemos suponer que la partícula interactúe individualmente con cada uno de los electrones y átomos que constituyen al medio, sino que por el contrario si b es comparable a b_{\max} la partícula "verá" muchísimos átomos en su trayectoria e interactuará con varios al mismo tiempo. Si lo vemos desde el punto de vista de momento la partícula irá tan rápido que no podrá distinguir a los constituyentes del medio sino que lo "verá" como un continuo. Los átomos afectados por el paso de la partícula cargada producirán campos perturbativos que modificarán la respuesta del medio al paso de ésta, es decir la polarización dieléctrica del

material altera el campo eléctrico generado por la partícula viajera cambiando su valor en el vacío para convertirse en aquellos característicos en un medio. Así pues para el cálculo de los campos producidos por la partícula en el medio será utilizada la aproximación de un medio macroscópico de constante dieléctrica ϵ .

Veamos ahora el problema desde un punto de vista más formal pues hasta el momento hemos atacado el problema de una forma muy simple que nos ha permitido visualizar lo que sucede a nivel microscópico, así pues partiremos de las ecuaciones de Maxwell en medios materiales.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= 4\pi\rho & \nabla \times \vec{H} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J} \end{aligned} \quad (12)$$

No es conveniente sustituir aquí la relación $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ (suponiendo que se trata de un medio lineal, homogéneo e isotrópico), pues esto presenta problemas de cálculo debido a la dependencia temporal de la constante dieléctrica ya que en la derivada temporal de \vec{D} habrá que tomar en cuenta dicha dependencia quedandonos un término que, por el momento, es molesto. Ahora bien podemos evitar fácilmente esta dificultad si nos trasladamos al espacio de Fourier k, ω donde \vec{D} y \vec{E} están relacionados a través de:

$$\vec{D}(\vec{k}, \omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega)$$

Observemos que la dependencia temporal de ϵ ha sido transformada a una dependencia sobre la frecuencia.

Ya que trabajaremos en el espacio de Fourier será conveniente expresar todas nuestras ecuaciones en este espacio con la aclaración de que para facilitar el cálculo trabajaremos en la norma de Coulomb.

Definiendo:

$$\vec{F}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} d\vec{k} d\omega \quad (13)$$

Tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{A} &= 0 \\ \vec{E}(\vec{x}, t) &= -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{A}(\vec{k}, \omega) &= 0 \\ \vec{E}(\vec{k}, \omega) &= i\omega \vec{A}(\vec{k}, \omega) - i\vec{k} \tilde{\phi}(\vec{k}, \omega) \\ \vec{B}(\vec{k}, \omega) &= i\vec{k} \times \vec{A}(\vec{k}, \omega) \end{aligned} \right.$$

Lo que nos conducirá a las soluciones para los potenciales electromagnéticos en el espacio de Fourier.

$$\tilde{\phi}(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi}{\epsilon(\omega)k^2} \tilde{\rho}(\vec{k}, \omega) \quad (14)$$

$$\vec{A}(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right]^{-1} \left[\vec{J}(\vec{k}, \omega) - \frac{\omega \vec{k}}{k^2} \tilde{\rho}(\vec{k}, \omega) \right]$$

Puesto que en la norma de Coulomb podemos considerar $\Phi=0$, el campo eléctrico y el magnético quedan determinados solo por el potencial vectorial $\vec{A}(\vec{k}, \omega)$ a través de las ecuaciones:

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = -\frac{i\omega}{c} \vec{A}(\vec{k}, \omega) \quad ; \quad \vec{B}(\vec{k}, \omega) = i\vec{k} \times \vec{A}(\vec{k}, \omega) \quad (15)$$

Así pues llegamos finalmente a :

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = -\frac{i\omega 4\pi}{c^2} \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right]^{-1} \left[\vec{J}(\vec{k}, \omega) - \frac{\omega \vec{k}}{k^2} \tilde{\rho}(\vec{k}, \omega) \right] \quad (16)$$

La ventaja de esta relación es que es exacta pues no hemos mencionado la forma explícita de la distribución de carga, por lo que podríamos considerar una distribución de carga arbitraria moviéndose a través del medio con velocidad arbitraria.

Pero, por el momento, con el objeto de estudiar el efecto Čerenkov nos enfocaremos en especial al caso que nos interesa y que es el de una partícula puntual moviéndose con velocidad constante, para lo cual la densidad de carga y la de corriente quedarán dadas a través de una función delta de Dirac, la cual simplifica enormemente los cálculos.

$$\rho(\vec{x}, t) = e \delta(\vec{x} - \vec{v}t)$$

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = e\vec{v}(t)\delta(\vec{x} - \vec{v}t)$$

Considerando que:

$$\bar{E}(\bar{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(\bar{k}, \omega) e^{i\bar{k} \cdot \bar{x} - i\omega t} d\bar{k} d\omega \quad (17)$$

llegamos a que el campo eléctrico generado por la partícula viajera satisface la relación:

$$\bar{E}(\bar{x}) = \frac{ie}{2\pi^2} \int \frac{(\bar{k} \cdot \bar{v}) \left[\frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{\epsilon(\bar{k} \cdot \bar{v})} \right]}{[k^2 - \frac{\omega^2 \epsilon(\bar{k} \cdot \bar{v})}{c^2}]} d\bar{k} \quad (18)$$

La dependencia temporal de ϵ vendría dada por la velocidad de la partícula pero como tenemos una velocidad constante no se tendrá dicha dependencia.

Una vez que hemos encontrado la expresión para el campo eléctrico producido por la partícula viajera tenemos los elementos necesarios para calcular la energía cedida por ésta.

LANDAU (1960) deduce esta expresión tomando como hipótesis básica que la energía transferida por la partícula al moverse a través de un medio con velocidad constante será el trabajo realizado por la fuerza $e\bar{E}$ ejercida sobre la partícula, donde \bar{E} es el campo generado por la partícula misma. Tomando el valor del campo en el punto ocupado por la partícula. El campo magnético no se considera puesto que no realizará trabajo alguno sobre la partícula.

Landau parte del hecho de considerar que la partícula se mueve con velocidad constante durante todo el tiempo, por lo que una vez más nos preguntamos si esta no es más que una hipótesis de planteamiento o habrá de considerarse, como mencionamos en la página 4, que se tiene una fuerza externa que actúa sobre la partícula viajera y permite que ésta continúe con su movimiento a velocidad constante aunque radie.

Como podemos observar Landau parte de la idea de considerar que la pérdida de energía por parte de la partícula es resultado de una fuerza que actúa sobre ella. Podemos interpretar por la forma en que la plantea, que esta fuerza no es más que una fuerza de autointeracción, pues es la producida por el campo generado por la partícula misma.

Esta idea es la que da pie a nuestro interés por analizar el efecto Čerenkov como un problema de reacción de radiación, lo cual se verá con mayor detalle en el capítulo IV. Es de esperarse que los resultados obtenidos en este capítulo puedan ser reconstruidos utilizando la ecuación de movimiento clásica para partícula cargada, obtenida a partir de la idea de autointeracción.

La deducción de Landau se basa en que la fuerza que actúa sobre la partícula es simplemente $e\bar{E}$ donde \bar{E} es el campo producido por la partícula cambiando su valor en el vacío para convertirse en aquel característico en un medio.

De nuestra expresión para \bar{E} observemos que dicha fuerza, al ser analizada por componentes, solo será distinta de cero en la dirección de la velocidad. Así pues la magnitud de \bar{F} se calcula a través de la relación:

$$F = \frac{\bar{F} \cdot \bar{v}}{v}$$

donde F representa la energía cedida por la partícula por unidad de trayectoria. De aquí que:

$$F = \left(\frac{dE}{dx} \right) = \frac{ie^2}{2\pi^2} \int \frac{(\bar{k} \cdot \bar{v}) \left[v^2 - \frac{c^2}{\epsilon(\bar{k} \cdot \bar{v})} \right]}{c^2 k^2 - (\bar{k} \cdot \bar{v})^2 \epsilon(\bar{k} \cdot \bar{v})} d\bar{k} \quad (19)$$

Por simplicidad supongamos que la partícula se mueve en la dirección x . Considerando la simetría del problema pasemos a utilizar coordenadas cilíndricas, definiendo $\bar{k} \cdot \bar{v} = \omega$ y $q^2 = ky^2 + kz^2$ obteniéndose:

$$F = \frac{ie^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\omega q}{c^2 k^2 - \omega^2 \epsilon(\omega)} \left[1 - \frac{c^2}{\omega(\omega) v^2} \right] dq d\omega \quad (20)$$

Vamos ahora a discutir el significado de estos límites de integración. La resolución del campo producido a una distancia r de la trayectoria de la partícula que se mueve con una velocidad v consiste principalmente de términos cuya frecuencia va como v/r (el recíproco del tiempo de colisión). Un campo puede ionizar a un

átomo cuando la frecuencia de sus componentes $\omega \approx \omega_0$, donde ω_0 es la frecuencia promedio correspondiente a la mayoría de los electrones en el átomo. La partícula interactuará con muchos átomos si b es mayor que la distancia interatómica, en sólidos y líquidos estas distancias son del orden de las dimensiones atómicas.

Así pues en estos medios la condición para el tratamiento macroscópico es $v/\omega_0 \gg a$ que en términos de la velocidad nos impone la condición $v \gg \omega_0 a$, es decir que la velocidad de la partícula tiene que ser mayor que la del electrón en su órbita, recordemos ahora que esta condición ya había sido impuesta en el tratamiento anterior.

La componente de Fourier del campo cuyo vector de onda es \vec{k} , transmite a un electrón ligado un momento \vec{k} . Ahora bien ya que $k^2 = q^2 + \omega^2/v^2$, si suponemos que $q^2 \gg \omega_0^2/v^2$ se tendrá que $q^2 \approx k^2$, el momento transferido es aproximadamente \vec{q} , es decir como anteriormente comentamos en la sección 2 la mayor contribución en la transferencia de momento se encuentra en la dirección perpendicular a la velocidad de la partícula viajera. Ahora bien el parámetro de impacto b va como el inverso del momento, por lo cual en estas últimas secciones del capítulo la condición para hacer el tratamiento macroscópico será impuesta a través del momento de la partícula incidente.

Lo que pretendemos hacer es establecer el intervalo de validez de nuestros resultados ahora en términos del momento y mostrar que esto es equivalente a imponer condiciones sobre el parámetro de impacto como hicimos en las secciones precedentes.

El decir que $1/q \gg a$ es totalmente equivalente a pedir que el parámetro de impacto $b \gg a$. En las secciones anteriores la integración se hace sobre el parámetro de impacto tomando como límites de integración b_{\min} y ∞ , puesto que para $b \gg b_{\max}$ la energía transferida decae a cero. Ahora, la integración se llevará a cabo sobre la variable q que nos determina al momento de la partícula, y así pues el límite superior q_0 corresponderá al parámetro b_{\min} , mientras que el límite inferior $q=0$ corresponde a $b=\infty$, aquí vemos que el intervalo de integración es exactamente el

mismo. La integración sobre frecuencias en este caso equivaldrá a la integración sobre el tiempo de las primeras secciones pues solo habríamos de aplicar una transformada de Fourier sobre el tiempo.

De acuerdo con lo anterior el límite superior en la integración es tal que:

$$\frac{\omega_0}{v} \ll q_0 \ll \frac{1}{a} \quad b_{\text{máx}} \gg a \quad b_{\text{mín}} \ll \frac{v}{\omega_0}$$

Regresando a nuestra ecuación para F ésta puede expresarse como:

$$F = \frac{ic^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{q_0} \frac{\left[\frac{1}{v^2} - \frac{\epsilon(\omega)}{c^2} \right] \omega dq d\omega}{\epsilon(\omega) \left[q^2 + \omega^2 \left(\frac{1}{v^2} - \frac{\epsilon(\omega)}{c^2} \right) \right]} \quad (21)$$

Podemos calcular la integral utilizando el método de polos sobre ω . Recordando que ϵ es un número complejo, tomaremos como superficie de integración un semicírculo de radio R tendiendo a infinito y utilizaremos las relaciones de Kramers-Kronig para obtener:

$$F(q_0) = \frac{4\pi N Z e^4}{mv^2} \frac{I_n q_0 v^2}{\Omega} - \frac{2\pi N e^4}{mc^2} + \frac{c F^2}{2v^2 v^2} \quad (22)$$

donde definimos:

$$F = \frac{\omega_0(\epsilon)}{i} \quad I_n \Omega = \frac{1}{2} \langle I_n(\omega^2 + F^2) \rangle$$

y $\langle \rangle$ indica un promedio tomando como función de peso $\pm |\eta^k(x)|$

donde:

$$\eta^k(x) = I_n \frac{1}{\epsilon(\omega)}$$

Dada la forma de nuestra ecuación tenemos dos casos por considerar. El primero de ellos es cuando la velocidad de la partícula es menor que la velocidad de la luz en el medio a través del cual viaja. El segundo caso corresponde a tener a la partícula viajando con velocidad mayor que la velocidad de la luz en dicho medio.

Puesto que en este capítulo nuestro principal interés se encuentra en analizar el mecanismo por el cual se emite

radiación, nos limitaremos a analizar el primer caso dejando el segundo, que es en si nada menos que el Efecto Čerenkov para nuestro siguiente capítulo.

Consideremos que la velocidad de la partícula satisface la siguiente condición:

$$v^2 < \frac{c^2}{\epsilon(\omega)}$$

donde $\epsilon(\omega)$ es la constante dieléctrica del medio a $\omega=0$.

Sobre el eje imaginario $\epsilon(\omega)$ decrece monótonamente de $\epsilon(0)$ para $\omega=0$ a $\epsilon=1$ para $\omega=i\infty$. Se tiene que $\omega(\eta)$ es tal que para $q=0$, $\omega=0$ por lo que $\xi=0$ y $\Omega=\omega$ y por lo tanto (22) se reduce a:

$$F(q_0) = \frac{4\pi N e^4}{m v^2} \left[\ln \frac{q_0 v \beta^2}{\langle \omega \rangle} - \frac{v^2}{c^2} \right] \quad (23)$$

Considerando: $E_1 = \frac{k^2 \beta^2}{2m}$

$$F(E_1) = \frac{2\pi N e^4}{m v^2} \left[\ln \frac{2m v^2 E_1 \beta^2}{k^2 \langle \omega \rangle^2} - \frac{v^2}{c^2} \right]$$

de acuerdo a la teoría de colisiones la energía perdida con transferencias de energía entre E' y $E'+dE'$ es:

$$\frac{2\pi N e^4}{m v^2} \frac{dE'}{E'}$$

La energía máxima transferida por una partícula pesada es: $E_{1\text{máx}} = 2m v^2 \beta^2$ (LANDAU 1960) por lo que con la corrección relativista esta energía perdida en el intervalo entre E_1 y $E_{1\text{máx}}$ es:

$$\frac{2\pi N e^4}{m v^2} \left(\ln \frac{2m v^2 \beta^2}{E_1} - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

por lo que la ecuación exacta para (23) es:

$$F = \frac{dE}{dz} = \frac{4\pi N e^4}{m v^2} \left(\ln \frac{2m v^2 \beta^2}{k \langle \omega \rangle} - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (24)$$

la cual es, nada más ni nada menos que, la fórmula de Bethe.

Hemos obtenido de nuevo nuestra ecuación (10) que nos proporciona la expresión para la energía cedida por unidad de trayectoria. Era de esperarse que regresásemos a este resultado pues nuestra primera condición es equivalente a decir que la partícula va con

velocidad tal que le es posible "ver" a los constituyentes del medio.

Una vez que hemos analizado de una forma simple y desde un punto de vista microscópico el mecanismo de transferencia de energía para velocidades no "muy relativistas" nuestro siguiente paso será analizar el caso en el cual la partícula se mueve con velocidad mayor que la velocidad de la luz, lo que equivale a analizar el caso en el cual se presenta radiación Čerenkov.

CAPITULO II

"EFECTO ČERENKOV"

2.1 INTRODUCCION

En el capítulo anterior nos enfocamos a analizar y construir paso a paso el mecanismo por el cual la partícula transfiere energía al viajar a través de un medio dieléctrico.

Sin embargo solo analizamos el caso en el cual se tienen medios de densidad pequeña o bien la partícula se mueve con una velocidad menor que la velocidad de la luz en dicho medio.

Ya que nuestro propósito es analizar la radiación Čerenkov, en este capítulo estudiaremos lo que sucede al considerar que nuestra partícula se mueve con una velocidad mayor que la velocidad de fase de la luz en un medio dieléctrico.

La primera parte de este capítulo se concretará a continuar la última sección de nuestro capítulo I, considerando el segundo caso, para el cual nuestra partícula satisface la condición $v > c/\bar{\epsilon}$, obteniendo así la expresión que buscamos para la radiación Čerenkov.

En la última sección obtendremos esa misma expresión a través de un camino diferente.

2.2 RADIACION ČERENKOV.

Continuemos el desarrollo iniciado en la sección I.4 y partamos de la ecuación I.22.

$$F(q_0) = \frac{4\pi N Z e^4}{m v^2} \ln \frac{q_0 v^2}{\Omega} - \frac{2\pi N e^4}{m c^2} + \frac{e^2 \bar{\epsilon}^2}{4\pi^2 v^2} \quad (I.22)$$

Consideremos el caso en el cual la velocidad de la partícula satisface la condición:

$$v^2 > \frac{c^2}{\epsilon(\omega)}$$

En este caso la función $q^2 - \omega^2 \left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right)$ tiene dos ceros, uno en $\omega=0$ y el otro en el eje imaginario en $\omega=i\xi$, tal que $\epsilon(i\xi) = v^2/c^2$. En el intervalo de 0 a $i\xi$ la expresión $\omega^2 \left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right)$ es negativa y para $\omega > \xi$ toma valores positivos de 0 a ω . Conforme $q \rightarrow 0$ el cero de la ecuación (I.21) tiende a ser ξ . Si ξ es muy pequeña comparada con $\omega_0 \Rightarrow \Omega \approx \bar{\omega}$ y obtenemos la ecuación (I.24). Ahora bien si $\xi \gg 0$ la función $\epsilon(i\xi)$ tiende a 1 pues recordemos que $\epsilon(i\xi) \rightarrow 1$ y puesto que $\epsilon(i\xi) = c^2/v^2$ esta $\xi \gg 0$ corresponderá a velocidades ultrarelativistas.

Utilizando $\epsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}$ podemos llegar a que $\xi^2 = \frac{4\pi N e^2}{m\rho^2}$ y $\Omega \approx \xi$. Bajo estas consideraciones la energía perdida por una partícula ultrarelativista con una transferencia de energía que no exceda $E_1 \leq E_{\text{max}}$ será:

$$F(E_1) = 2\pi N e^4 m c^2 \ln \frac{m^2 c^2 E_1}{4\pi N e^2 k^2} \quad (1)$$

Ahora bien sabemos que el número de onda k y la frecuencia de una onda que se propaga en un medio deben estar relacionadas a través de la expresión:

$$k = \frac{n\omega}{c}$$

donde $n = \sqrt{\epsilon}$ es el índice de refracción para el medio, n será un real suponiendo que tenemos un medio isotrópico y no magnético.

A su vez nosotros relacionamos ω y k_x a través de:

$$\vec{k} \cdot \vec{v} = k_x v = \omega$$

Dado que $k > k_x$ deberemos tener:

$$v > \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$$

Así pues para que exista radiación a una frecuencia ω deberá satisfacerse que la velocidad de la partícula excede la velocidad de fase de las ondas de esa frecuencia en el medio en cuestión.

Dado que en la ecuación (I.21) calculamos la energía total cedida por la partícula, en la cual no deberemos de olvidar mencionar que el medio también tiene una contribución en este efecto como anteriormente comentamos en la sección 1.3. Ahora nos interesa calcular solamente la parte de la energía que es observada como radiación y que viene a ser la que llamamos

radiación Čerenkov. Esta energía podrá apreciarse como radiación para aquellas frecuencias ω para las cuales $\epsilon(\omega)$ sea real, es decir para aquellas en las cuales no hay absorción.

De acuerdo con esto la parte de la energía total cedida como radiación corresponderá a

$$dF = -d\omega \frac{ie^2}{\pi} \sum \omega \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\epsilon v^2} \right) \int \frac{q dq}{q^2 - \omega^2 \left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right)} \quad (2)$$

donde se suma sobre las ω para las cuales $\epsilon(\omega) \in \mathbb{R}$. Hagamos un cambio de variable que nos permita simplificar el cálculo.

Definiendo:

$$\eta = q^2 - \omega^2 \left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right)$$

Tendremos:

$$dF = -d\omega \frac{ie^2}{2\pi} \sum \omega \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\epsilon v^2} \right) \int \frac{d\eta}{\eta}$$

que nos lleva a que:

$$dF = \frac{e^2}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \epsilon} \right) \omega d\omega$$

y de aquí a que:

$$F = \left(\frac{dF}{dx} \right) = \frac{e^2}{c^2} \int \omega \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \epsilon} \right) d\omega \quad (3)$$

que es la célebre expresión para la radiación Čerenkov si consideramos a esta como la pérdida de energía observada como radiación debido al paso de una partícula a velocidad constante a través de un medio. Esta expresión difiere de nuestra expresión (I.21) en que aquella considera la energía total perdida para todo el espectro de frecuencias y en esta última solo consideramos la que es observada como radiación.

Con el fin de complementar la deducción de Landau presentaremos a continuación otra deducción, la de JACKSON (1975), para la energía cedida por una partícula que viaja a velocidad constante a través de un medio de donde se obtiene la misma expresión para la radiación Čerenkov.

2.3 EXPRESION PARA LA RADIACION ČERENKOV OBTENIDA A TRAVES DE UN BALANCE DE ENERGIA.

Trabajaremos como anteriormente lo hemos hecho en el espacio de Fourier \vec{k}, ω con la diferencia de que ahora por comodidad trabajaremos en la norma de Lorentz, en la cual tendremos:

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega) \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right] \vec{\phi}(\vec{k}, \omega) &= 4\pi \vec{\rho}(\vec{k}, \omega) \\ \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right] \vec{A}(\vec{k}, \omega) &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{k}, \omega) \\ \vec{E}(\vec{k}, \omega) &= i\frac{\omega}{c} \vec{A}(\vec{k}, \omega) - i\vec{k} \vec{\phi}(\vec{k}, \omega) \end{aligned} \quad (4)$$

Considerando a nuestra partícula viajera puntual y viajando con una velocidad $\vec{v} = c\beta \hat{z}$.

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}, t) &= ze \delta(\vec{x} - \vec{v}t) \\ \vec{J}(\vec{x}, t) &= \vec{v} \rho(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

puesto que $\vec{r}(t)$ en este caso será simplemente $\vec{r}(t) = \vec{v}t$. En el espacio de Fourier se tendrá

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = i \left[\frac{\omega \epsilon(\omega) \vec{v} - \vec{k}}{c^2} \right] \vec{\phi}(\vec{k}, \omega) \quad (5)$$

Mientras que para el campo magnético es posible obtener la relación:

$$\vec{B}(\vec{k}, \omega) = i\epsilon(\omega) \vec{k} \times \frac{1}{\omega} \vec{\phi}(\vec{k}, \omega) \quad (6)$$

Considerando a los campos en componentes obtendremos que:

$$\begin{aligned} E_1(\omega) &= -\frac{iz\epsilon\omega}{\omega^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{1}{\epsilon(\omega)} - \beta^2 \right] K_0(\lambda b) & E_z(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{ze}{v\epsilon(\omega)} \lambda K_1(\lambda b) \\ \lambda &= \frac{\omega^2}{v^2} [1 - \beta^2 \epsilon(\omega)] \end{aligned} \quad (7)$$

Para el campo magnético se tiene que sólo una componente sobrevive:

$$B_3(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{ze}{v\epsilon(\omega)} \lambda K_1(\lambda b) \quad (8)$$

Recordemos que en la sección 1.3 en el caso de colisión entre una partícula cargada y un electrón ligado armónicamente

$$\Delta E = 2e \operatorname{Re} \int_0^\infty -i\omega \vec{x}(\omega) \cdot \vec{E}^*(\omega) d\omega \quad (9)$$

generalizando ahora al caso en el cual se tiene a todo el medio:

$$\Delta E = 2e \sum_j F_j \operatorname{Re} \int_0^{\infty} i \omega \bar{x}_j(\omega) \cdot \bar{E}^*(\omega) d\omega \quad (10)$$

Ahora bien la polarización eléctrica del medio está dada por:

$$\bar{P}(\bar{x}) = - \sum_j F_j \alpha \bar{x}_j(\omega)$$

pero por otro lado también se tiene la siguiente relación:

$$\bar{P}(\bar{x}) = \chi_e \bar{E}(\omega) = \frac{\epsilon(\omega) - 1}{4\pi N} \bar{E}(\omega)$$

Igualando ambas expresiones obtendremos que:

$$- \alpha \sum_j F_j \bar{x}_j(\omega) = \frac{1}{4\pi N} [\epsilon(\omega) - 1] \bar{E}(\omega)$$

Con lo cual nuestra expresión para la energía transferida por la partícula se reduce a:

$$\Delta E(b) = \frac{1}{2\pi N} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} -i \omega \epsilon(\omega) |\bar{E}(\omega)|^2 d\omega$$

y ya que $\left(\frac{dE}{dx}\right) = 2\pi N \int_0^{\infty} \Delta E(b) db$ podemos calcular con la expresión obtenida para $\bar{E}(\omega)$ que:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = \frac{2\pi Z_e}{\pi v^2} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} i \omega \lambda^* \alpha K_1(\lambda^* a) K_0(\lambda a) \left(\frac{1}{\epsilon(\omega)} - \beta^2\right) d\omega \quad (11)$$

la cual es conocida como la expresión de Fermi y fué deducida a través de una generalización de la que ya conocíamos.

Ahora bien, esta energía perdida por la partícula puede ser calculada de una forma más rápida, calculando simplemente con ayuda del vector de Poynting el flujo de energía a través de un cilindro de radio a alrededor de la trayectoria de la partícula. Por conservación de la energía ésta debe ser igual a la energía que pierde la partícula incidente por unidad de tiempo dividida entre v : $\frac{dE}{dx} = \frac{1}{v} \frac{dE}{dt}$

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = - \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi a B_z E_t dt \quad (12)$$

Tomando la transformada de Fourier sobre t llegamos a:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right) = -ca \operatorname{Re} \int_0^{\infty} B_z^*(\omega) E_t(\omega) d\omega \quad (13)$$

Si sustituimos las expresiones (7) y (8) para los campos obtenemos de nuevo la fórmula de Fermi. Así pues Jackson sigue el camino directo y sin más preámbulo se va al cálculo de la energía perdida por la partícula incidente mediante el cálculo del vector de Poynting. Veamos ahora un poco más sobre este resultado. Cuando se tiene $\beta \ll 1$, $\lambda \approx \omega/v$ y las funciones Bessel serán reales por lo que la única parte de la integral (11) que sobrevivirá es la parte imaginaria de $1/\epsilon(\omega)$ obteniéndose el resultado de Bohr (I.B). Sin embargo a altas energías las funciones Bessel tienen argumento complejo, lo que contribuye a la integral. Y de esta forma aparece el efecto de densidad.

Resolver la fórmula de Fermi es bastante complicado por lo que podemos tomar el límite $\beta \approx 1$, lo cual nos llevará a una integral fácil de calcular utilizando el teorema de Cauchy. Así pues para $\beta \rightarrow 1$:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{Z^2 e^2}{c^2} \omega_p^2 \operatorname{Im} \left(\frac{1.1236}{\alpha \omega_p} \right) \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi N Z e^2}{m}$$

con ω_p la frecuencia de plasma del medio.

Considerando en el resultado (9) que tenemos $\beta \approx 1$ obtenemos

$$\left(\frac{dE}{dx} \right) = \frac{Z^2 e^2}{c^2} \omega_p^2 \left[\operatorname{Im} \left(\frac{1.1236}{\alpha \omega_p} \right) - \frac{1}{2} \right]$$

Puesto que esta relación fue obtenida para velocidades no muy relativistas el efecto de densidad no ha sido considerado. El factor de corrección debido a este efecto puede ser obtenido simplemente restando estas dos últimas expresiones. Así pues si consideramos la corrección:

$$\frac{dE}{dx} \longrightarrow \frac{Z^2 e^2 \omega_p^2}{2c^2} \operatorname{Im} \left(\frac{2mc^2 \gamma}{k^2 \omega_p^2} \right)$$

donde γ corresponde al valor de la energía de la partícula incidente.

Ahora bien quedémonos con la expresión (13) para la energía cedida por la partícula viajera. Obviamente el variar el parámetro α y obtener el límite cuando $\alpha \rightarrow \omega$ nos permite ver si la energía cedida por la partícula puede ser medida a una distancia muy lejana de esta. Para esto es necesario considerar la forma

asintótica de las funciones Bessel $x \gg 1 \Rightarrow K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$ que rigen el comportamiento de los campos.

Se toma este comportamiento asintótico puesto que para $\alpha \rightarrow \omega$ se tiene $\lambda b \gg 1$, pues siempre $b \gg a$.

Considerando los límites, nuestros campos tendrán el siguiente comportamiento:

$$E_1(\omega, b) \rightarrow \frac{i\omega e}{c^2} \left[1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon} \right] \frac{e^{-\lambda b}}{\sqrt{\lambda b}} \quad B_3(\omega, b) \rightarrow \rho \epsilon(\omega) E_2(\omega, b)$$

$$E_2(\omega, b) \rightarrow \frac{ze}{ve(\omega)} \sqrt{\frac{\lambda}{b}} e^{-\lambda b} \quad (14)$$

Veamos ahora que sucede con el integrando de (dE/dx) , el cual nos llevará al valor de la energía perdida por la partícula:

$$-ca B_3^* E_1 \rightarrow \frac{ze^2}{c^2} \left(-i \sqrt{\frac{\lambda^*}{\lambda}} \right) \omega \left[1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)} \right] e^{-\alpha(\lambda + \lambda^*)}$$

Consideremos dos casos:

a) Si consideramos que λ un número real positivo.

Cuando tomamos $\alpha \rightarrow \omega$ la energía perdida por la partícula decae exponencialmente a cero por lo que aparte de que la partícula cede poca energía esta es absorbida por el medio, es decir para ciertas frecuencias se presenta absorción por lo que no podremos observar radiación.

b) Si ahora consideramos λ un número puramente imaginario, el factor exponencial del integrando desaparece quedandonos el integrando independiente de α .

Así pues al considerar $\alpha \rightarrow \omega$ se medirá una cierta energía que escapa a infinito como radiación.

Ahora bien veamos que es lo que implica que λ sea puramente imaginario

$$\lambda = \frac{\omega}{v} \left[1 - \beta^2 \epsilon(\omega) \right]^{1/2}$$

Veamos que λ puede ser puramente imaginario si $\epsilon(\omega)$ es real, es decir, no hay absorción. Esta condición nos lleva a que la velocidad con que la partícula se mueve a través del medio deberá ser tal que:

$$v > \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$$

Así pues para que exista lo que se denomina radiación Čerenkov a la frecuencia ω será necesario que la velocidad de la partícula sea mayor que la velocidad de la luz en ese medio.

Con esto nos quedará finalmente:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{(ze)^2}{c^2} \int_{\epsilon(\omega)^{1/2}} \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon}\right) d\omega$$

La cual es la expresión para la radiación Čerenkov que obtuvimos siguiendo el método de Landau.

Una de las características sobresalientes de la radiación Čerenkov es el ángulo en el cual se emite. A distancias grandes los campos se vuelven campos de radiación en donde la dirección de propagación estaría dada por $\vec{E} \times \vec{B}$. Así pues el ángulo de emisión para la radiación Čerenkov será:

$$\tan \theta_c = - \frac{E_1}{E_2}$$

y en términos de la velocidad de la partícula:

$$\cos \theta_c = \frac{1}{\beta \sqrt{\epsilon(\omega)}}$$

para que tengamos un ángulo aceptable tal que su coseno sea menor que la unidad deberá satisfacerse una vez más la relación:

$$v > \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$$

A lo largo de este capítulo presentamos dos caminos que nos llevan a la deducción de la expresión para la radiación Čerenkov. Nuestro objetivo fué construir la relación que nos expresa la energía cedida por una partícula cargada que interactúa con un medio, atacando el problema desde un punto de vista más formal, enfocándonos en el caso de partículas que viajan a velocidades ultrarrelativistas. Presentamos dos deducciones diferentes para la expresión de la radiación Čerenkov. La deducción de Jackson es más clara en su formalismo matemático y calcula directamente a través del vector de Poynting la energía cedida por la partícula viajera, por lo que nos proporciona un método directo de cálculo complementando las ideas de Landau. La deducción de Landau nos lleva a pensar que el efecto Čerenkov puede verse como un problema

de reacción de radiación. Lo cual da pie a nuestro capítulo IV .

Ya que pretendemos atacar el problema desde el punto de vista de autointeracción nuestro siguiente paso consistirá en expresar en forma general la ecuación de movimiento de una partícula cargada con estructura en el vacío para después generalizar y ver lo que sucede al considerar que nuestra partícula se mueve a través de un medio.

CAPÍTULO III

" ECUACION DE MOVIMIENTO PARA PARTICULAS CARGADAS CON ESTRUCTURA MOVIENDOSE EN UN MEDIO MATERIAL "

3.1 INTRODUCCION

Como vimos en el capítulo I Landau deduce la expresión para la energía perdida por una partícula que viaja a velocidad constante a través de un medio haciendo la siguiente suposición: "La energía perdida por la partícula viajera es exactamente el trabajo hecho por la fuerza $e\vec{E}$ ejercida sobre la partícula, donde \vec{E} es el campo producido por ella misma".

Como anteriormente mencionamos la deducción de Jackson complementa el trabajo de Landau pues nos ayuda a dar otro enfoque al cálculo de la radiación Čerenkov. Sin embargo es la hipótesis básica de la deducción de Landau la que nos hace concebir la idea de que el mismo resultado para la energía cedida por la partícula viajera y por ende para la radiación Čerenkov puede obtenerse a través del cálculo de la ecuación de movimiento para una partícula cargada tomando en cuenta la reacción de radiación.

Este capítulo lo dividiremos en dos partes. En la primera parte, con el fin de ver las cosas en una forma más general y que nos dará la técnica a seguir, haremos la deducción de la ecuación de movimiento para una partícula cargada con estructura moviéndose en el vacío con una velocidad $\vec{v}(t)$ arbitraria. En la segunda parte que es la más importante del capítulo, pues contiene la información que requerimos, haremos lo análogo solo que ahora consideraremos a la partícula viajando a través de un medio dieléctrico lineal, homogéneo e isotrópico de constante dieléctrica ϵ .

3.2 ECUACION DE MOVIMIENTO PARA PARTICULA CARGADA CON ESTRUCTURA EN EL VACIO.

Suponiendo que nos encontramos en el vacío obtendremos la ecuación de movimiento para una partícula cargada con estructura sin situarnos en el sistema de referencia en el cual la partícula se encuentra instantáneamente en reposo, sino que consideraremos que nos encontramos en un sistema de referencia (Laboratorio) desde el cual observamos a la partícula moviéndose con una velocidad arbitraria $\vec{v}(t)$.

Consideremos que tenemos una partícula con estructura dotada de una distribución de carga $\rho(|\vec{x}-\vec{r}(t)|)$ donde $\vec{r}(t)$ denota la posición del centro de carga.

Hemos considerado dicha distribución tal que:

$$\int \rho(|\vec{x}-\vec{r}(t)|) d\vec{x} = q$$

Suponiendo que el momento de la partícula es de origen puramente electromagnético y que este se conserva, la ecuación de conservación de momento se expresa por la ecuación:

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = 0$$

la cual, en términos de la fuerza de Lorentz, queda dado por:

$$\int (\rho \vec{E}_r + \frac{\vec{j}}{c} \times \vec{B}_r) d\vec{x} = 0 \quad (1)$$

donde \vec{E}_r y \vec{B}_r denotan los campos electromagnéticos totales, los cuales están compuestos por los campos electromagnéticos externos, \vec{E}_{ext} y \vec{B}_{ext} , en los cuales la partícula se encuentra y por los campos electromagnéticos propios, \vec{E}_{auto} y \vec{B}_{auto} , generados por ella misma.

Al considerar los campos propios estamos suponiendo que la partícula interacciona consigo misma, es decir, cada punto de la distribución de carga interacciona con los demás. De la ecuación

(1) tenemos:

$$\int (\rho \bar{E}_{ext} + \frac{\bar{J}}{c} \times \bar{B}_{ext}) d\bar{x} + \int (\bar{\rho} \bar{E}_{auto} + \frac{\bar{J}}{c} \times \bar{B}_{auto}) d\bar{x} = 0$$

$$\bar{F}_{ext} + \bar{F}_{auto} = 0$$

De aquí que la razón de cambio del momento de la partícula pueda escribirse como:

$$\bar{F}_{ext} = \frac{d\bar{P}}{dt} = \int (\bar{\rho} \bar{E}_{auto} + \frac{\bar{J}}{c} \times \bar{B}_{auto}) d\bar{x} \quad (2)$$

donde, como mencionamos anteriormente \bar{E}_{auto} y \bar{B}_{auto} denotan los campos generados por la partícula en movimiento.

Para evitar cargar muchos subíndices consideraremos $\bar{E}_{auto} = \bar{E}$, $\bar{B}_{auto} = \bar{B}$. En el cálculo de la autofuerza supondremos que la partícula solo tiene movimiento traslacional y que posee una distribución de carga rígida.

Dado que nos encontramos en el sistema de referencia del laboratorio la contribución del campo magnético a F_{auto} deberá tomarse en cuenta, a diferencia del tratamiento seguido cuando se hace la consideración de que nos encontramos instantáneamente en el sistema propio de la partícula.

Con el fin de facilitar los cálculos es conveniente que trabajemos en la norma de Coulomb (JIMENEZ, MONTEMAYOR 1983), pues aquí los campos electromagnéticos generados por la partícula están dados simplemente a través del potencial vectorial \bar{A} , satisfaciendo las siguientes relaciones:

$$\nabla^2 \phi(\bar{x}, t) = -\nabla \cdot \pi \rho(\bar{x}, t)$$

$$\nabla^2 \bar{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \bar{J}_T(\bar{x}, t) \quad (3)$$

$$\bar{J} = \bar{J}_T + \bar{J}_L$$

$$\bar{J}_L = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int \frac{\bar{J}(\bar{x}', t')}{|\bar{x} - \bar{x}'|} d^3x'$$

y dado que siempre podemos escoger $\bar{\Phi} = 0$, en ella se tendrá:

$$\bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$$

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$$

(4)

Dada la simplicidad de los cálculos en el espacio de Fourier, resolveremos la ecuación de onda inhomogénea para el potencial vectorial en dicho espacio y en lo sucesivo trabajaremos en él.

La ecuación de onda para \vec{A} en este espacio quedará dada a través de la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} + k^2 \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_1(\vec{r}, t)$$

Cuya solución particular es de la forma:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi}{k} \sin ck(t-t') \vec{J}_1(\vec{r}, t') dt'$$

donde t' juega el papel de un tiempo retardado. Utilizando la función de Heaviside definida por:

$$\Theta(t-t') = \begin{cases} 1 & t-t' > 0 \\ \frac{1}{2} & t=t' \\ 0 & t-t' < 0 \end{cases}$$

podemos escribir la solución para el potencial vectorial extendiendo los límites de integración a infinito:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ck(t-t')}{k} \Theta(t-t') \vec{J}_1(\vec{r}, t') dt' \quad (5)$$

Ahora bien la densidad de corriente generada por la partícula puede escribirse como:

$$\vec{J}(\vec{x}', t') = \rho(1, \vec{x}' - \vec{r}(t')) \vec{v}(t')$$

Utilizando la transformada de Fourier es posible demostrar que:

$$\vec{J}_1(\vec{k}, t) = \tilde{\rho}(k) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}(t)} \hat{k} \times [\vec{v}(t) \times \hat{k}]$$

lo que nos conduce a que la solución en la norma de Coulomb para el potencial vectorial es la siguiente:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\rho}(k)}{k} \sin ck(t-t') \hat{k} \times [\vec{v}(t) \times \hat{k}] e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}(t)} \Theta(t-t') dt \quad (6)$$

Expresión que coincide con los resultados de FRANÇA (1978).

Esta ecuación presenta la forma de un potencial retardado donde se exhibe un comportamiento causal.

Utilizando la ecuación (4) obtenemos:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\rho}(k)}{k} \hat{k} \times [\vec{v}(t) \times \hat{k}] e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}(t)} \frac{\partial}{\partial t} [\sin ck(t-t') \Theta(t-t')] dt'$$

Recordando que la función de Heaviside y la función delta de Dirac están relacionadas por:

$$\frac{d\Theta(x)}{dx} = \delta(x)$$

se tiene que, integrando respecto a la variable t' , se llega a:

$$\tilde{E}(\vec{k}, t) = -4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(k) \hat{k} \times [\vec{v}(t') \times \hat{k}] e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}(t')} \frac{e^{-\cos\theta(t-t')} \Theta(t-t')}{\cos\theta(t-t')} dt' \quad (7)$$

De forma análoga a como obtuvimos esta expresión obtendremos la componente de Fourier de \vec{B} en el espacio \vec{k} :

$$\tilde{B}(\vec{k}, t) = i\vec{k} \times \tilde{A}(\vec{k}, t)$$

por lo que substituyendo la relación (6) llegaremos a que:

$$\tilde{B}(\vec{k}, t) = 4\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(k) \hat{k} \times \vec{v}(t') e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}(t')} \frac{e^{-\cos\theta(t-t')} \Theta(t-t')}{\cos\theta(t-t')} dt' \quad (8)$$

Ahora bien la densidad de carga en el espacio de Fourier queda definida por:

$$\rho(\vec{x} - \vec{r}(t)) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(k) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{r}(t))} d^3k$$

lo cual nos permite encontrar que la contribución del campo eléctrico a la autofuerza es:

$$\int \rho E d\vec{x} = -4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int |\tilde{\rho}(k)|^2 \hat{k} \times [\vec{v}(t') \times \hat{k}] e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}(t) - \vec{r}(t'))} \frac{e^{-\cos\theta(t-t')} \Theta(t-t')}{\cos\theta(t-t')} d^3k dt' \quad (9)$$

Mientras que la contribución del campo magnético a la autofuerza es:

$$\int \frac{d}{dt} \times \vec{B} d\vec{x} = -\frac{4\pi i}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \int |\tilde{\rho}(k)|^2 e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}(t) - \vec{r}(t'))} \vec{v}(t) \times [\hat{k} \times \vec{v}(t')] \frac{e^{-\cos\theta(t-t')} \Theta(t-t')}{\cos\theta(t-t')} d^3k dt' \quad (10)$$

lo que al ser substituido en la relación (2) nos lleva a que:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\rho}(k)|^2 \hat{k} \times [\vec{v}(t') \times \hat{k}] e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}(t) - \vec{r}(t'))} \frac{e^{-\cos\theta(t-t')} \Theta(t-t')}{\cos\theta(t-t')} d^3k dt' \quad (11)$$

lo cual podemos escribir como:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ext} &= 4\pi \int v_j(t') h(t-t') dt' + \frac{4\pi i}{c} \int v_k(t') f(t-t') dt' \\ h(t-t') &= \int \epsilon_{mns} \epsilon_{ajk} k_n k_r |\tilde{\rho}(k)|^2 \cos ck(t-t') e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}(t) - \vec{r}(t'))} \Theta(t-t') d^3k \\ f(t-t') &= \int \epsilon_{mns} \epsilon_{ajk} v_n(t) k_j \frac{|\tilde{\rho}(k)|^2}{k} \sin ck(t-t') e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}(t) - \vec{r}(t'))} \Theta(t-t') d^3k \end{aligned} \quad (12)$$

Y de esta forma hemos obtenido la ecuación integrodiferencial que describe el movimiento de una partícula cargada (en el dominio clásico); observemos que se trata de una ecuación con memoria pues el comportamiento de la partícula dependerá de la historia de ésta hasta el tiempo actual t . Observemos que esta ecuación es general puesto que conserva la contribución del campo magnético y estamos situados en el sistema desde el cual la partícula tiene una velocidad $\vec{v}(t)$ arbitraria.

Dada la generalidad de la ecuación de movimiento que obtuvimos, es de esperarse que podamos obtener los resultados ya conocidos para la Ecuación Integrodiferencial de Abraham-Lorentz (EIDL) y la ecuación de movimiento de A-1 en los límites adecuados, lo cual representará una prueba de validez para nuestra ecuación.

Coloquemos en un sistema de referencia tal que la partícula en este se encuentra instantáneamente en reposo. Bajo esta consideración $\vec{v}(t)$ es nula y la contribución del campo magnético \vec{F}_{ext} será muy pequeña en comparación con la contribución del campo eléctrico, por lo que solo nos quedamos con el término:

$$\vec{F}_{ext_0} = -4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int |\tilde{\rho}(k)|^2 \hat{k} [\vec{v}(t) \times \hat{k}] e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}(t) - \vec{r}(t'))} \cos ck(t-t') \Theta(t-t') d^3k dt' \quad (13)$$

Tomando $\cos ck(t-t') = -\frac{1}{ck} \frac{\partial \sin ck(t-t')}{\partial t'}$ en (13) podemos integrar por partes sobre t' , considerando que nuestro punto de partida es a $t=-\infty$ tiempo para el cual la partícula se encontraba en reposo.

Después de una integración angular llegamos a que:

$$\vec{F}_{\text{auto}} = -\frac{2}{3} \frac{16\pi^2}{c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k |\tilde{\rho}(k)|^2 \tilde{\alpha}(t') \Theta(t-t') \sin ck(t-t') dk dt' \quad (14)$$

donde hemos considerado el desarrollo en serie de Taylor de $\vec{r}(t')$ alrededor de t , con el fin de quitarnos los tiempos retardados y solo trabajar con el tiempo t presente.

$$\vec{r}(t') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t'-t)^n}{n!} \frac{d^n \vec{r}(t)}{dt^n} \approx \vec{r}(t) - (t'-t) \vec{v}(t) + \frac{(t'-t)^2}{2} \ddot{\vec{r}}(t) + \dots$$

Ahora bien hemos cortado la serie hasta primer orden bajo la suposición de que dado que estamos en el sistema en el cual la partícula se encuentra instantáneamente en reposo $\vec{v}(t)$ es muy pequeña y el tiempo $(t-t')$ será pequeño también, así pues podemos aproximar la exponencial $e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}(t) - \vec{r}(t'))} \approx 1$, es decir nos quedamos con una ecuación lineal.

De nuestra expresión (14) es posible obtener la ecuación integrodiferencial de Abraham-Lorentz presentada en el trabajo de DE LA PEÑA, JIMENEZ AND MONTEMAYOR (1982).

Reacomodando (14):

$$\vec{F}_{\text{auto}} = -\frac{2}{3} \frac{m}{mc^3} 16\pi^2 z^2 \int_{-\infty}^{\infty} k |\tilde{\rho}(k)|^2 \sin ck(t-t') dk \int_{-\infty}^t \tilde{\alpha}(t') dt' \quad (15)$$

Considerando:

$$g(c(t-t')) = \int_{-\infty}^{\infty} k |\tilde{\rho}(k)|^2 \sin ck(t-t') dk$$

tendremos:

$$\vec{F}_{\text{auto}} = -16\pi^2 m c^2 z \int_{-\infty}^t g(c(t-t')) \tilde{\alpha}(t') dt' \quad (16)$$

Ahora bien de igual forma partiendo de (14) es posible llegar a la ecuación de Abraham-Lorentz en el límite de partícula puntual.

En el límite de partícula puntual la densidad de carga queda dada por:

$$\rho(\vec{x} - \vec{r}(t)) = e \delta(\vec{x} - \vec{r}(t)) \quad ; \quad \tilde{\rho}(k) = \frac{e}{(2\pi)^{3/2}}$$

así pues en este caso (14) se reduce a:

$$\vec{F}_{\text{auto}} \approx -\frac{4e^2}{3\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k \tilde{\alpha}(t') \sin ck(t-t') \Theta(t-t') dt' dk \quad (17)$$

Observemos que

$$k \sin ck(t-t') = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \cos ck(t-t')$$

así pues haciendo el cambio de variable $k' = ck$ podemos reducir (17) a la expresión:

$$\vec{F}_{\text{auto}} \approx -\frac{4e^2}{3\pi c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\alpha}(t') \Theta(t-t') dt' \frac{\partial}{\partial t'} \int_0^{\infty} \cos k'(t-t') dk' \quad (18)$$

Puesto que:

$$\int_0^{\infty} \cos k'(t-t') dk' = \pi \delta(t-t')$$

tendremos :

$$\vec{F}_{\text{auto}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^2} \ddot{\alpha}(t) - \frac{4}{3} \frac{e^2}{c^2} \delta(\vec{r}) \delta(t)$$

es decir :

$$\vec{F}_{\text{ext}} = m_e \ddot{\alpha}(t) - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^2} \ddot{\alpha}(t) \quad (19)$$

donde hemos identificado $m_e = (4e^2/3c^2) \delta(\vec{r})$ recuperando la ecuación de movimiento de Abraham-Lorentz para partícula cargada con todo y sus dificultades:

La masa electromagnética en el límite de partícula puntual es divergente. No existe fuerza de frenado para el caso en el cual se tiene aceleración constante, etc.

Ya que recuperamos todos los resultados conocidos podemos decir que nuestra expresión para la fuerza de autointeracción para partícula con estructura lleva a resultados correctos y podemos tener algo de confianza en ella. La ventaja de la expresión que obtuvimos es que es más general pues toma en cuenta la contribución del campo magnético y todo es visto desde un marco de Laboratorio distinto a aquel en el cual la partícula se encuentra instantáneamente en reposo lo cual nos proporcionará mayor información.

3.3 ECUACION DE MOVIMIENTO PARA UNA PARTICULA CARGADA MOVIENDOSE A TRAVES DE UN MEDIO MATERIAL.

Ahora bien una vez que hemos construido la ecuación de movimiento para una partícula cargada con estructura viajando a una velocidad arbitraria $\vec{v}(t)$ en el vacío, nuestro siguiente paso consistirá en generalizar nuestra expresión al considerar el movimiento de la partícula dentro de un medio de constante dieléctrica ϵ . Dicha expresión como mencionamos al inicio de este capítulo nos permitirá calcular la energía cedida por una partícula al viajar dentro de dicho medio, y al hacer las aproximaciones de partícula puntual y velocidad constante podremos obtener la tan esperada ecuación para la radiación Čerenkov.

En este caso al calcular los campos generados por la partícula deberemos considerar el hecho de que tenemos la presencia de un medio. Dichos campos bajo la consideración de que la partícula "ve" al medio como un continuo satisfacen las ecuaciones de Maxwell para medios materiales presentadas en las ecuaciones (I.12)

El desarrollo que presentaremos es la continuación del que presentamos en el capítulo I, solo que ahora analizaremos el caso general. Igual que lo hicimos antes trabajaremos en el espacio de Fourier y con la norma de Coulomb para evitar complicaciones en los cálculos.

Consideremos que nuestra partícula se mueve con velocidad arbitraria $\vec{v}(t)$ y el medio tiene constante dieléctrica ϵ . Partamos del resultado obtenido en el capítulo I para $\tilde{A}(\vec{k}, \omega)$

$$\tilde{A}(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi}{\epsilon} \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right]^{-1} \left[\tilde{J}(\vec{k}, \omega) - \frac{\omega \vec{k}}{k^2} \tilde{\rho}(\vec{k}, \omega) \right] \quad (\text{I.14})$$

Ahora bien de la ecuación de continuidad encontramos que las componentes de Fourier de la densidad de carga y de la densidad de corriente deben estar relacionadas a través de la igualdad

$$i\omega \tilde{\rho}(\vec{k}, \omega) = i\vec{k} \cdot \tilde{J}(\vec{k}, \omega)$$

lo que nos lleva a que la dependencia en ω de la constante dieléctrica puede escribirse como :

$$\epsilon = \epsilon(\vec{k}, \omega(t))$$

Sustituyendo las expresiones para $\tilde{J}(\vec{k}, \omega)$ y $\tilde{\rho}(\vec{k}, \omega)$ y aplicando la transformada inversa de Fourier sobre ω llegamos a que el potencial vectorial en el espacio de Fourier k está dado por:

$$\tilde{A}(\vec{k}, t) = \frac{2}{c} \iint \tilde{\rho}(k) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}(t') + i\omega t'} \left[\tilde{v}(\omega) - \frac{(\vec{k} \cdot \tilde{v}(\omega) \vec{k})}{k^2} \right] \left[k^2 - \frac{\omega^2 \epsilon}{c^2} \right]^{-1} e^{-i\omega t} dt' d\omega \quad (20)$$

Y una vez que integramos nos lleva a que la solución particular para el potencial vectorial en el espacio de Fourier es:

$$\tilde{A}(\vec{k}, t) = 4\pi \int \frac{\tilde{\rho}(k)}{k\sqrt{\epsilon}} \frac{\sin \frac{ck}{\sqrt{\epsilon}}(t-t')}{\sqrt{\epsilon}} \hat{k} \times [\tilde{v}(t') \times \hat{k}] e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}(t')} \Theta(t-t') dt' \quad (21)$$

donde t' juega el papel de un tiempo retardado como mencionamos anteriormente.

Puesto que en la norma de Coulomb se tiene que:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

en el espacio de Fourier esto quedará expresado por:

$$\vec{E}(\vec{k}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{A}(\vec{k}, t)}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B}(\vec{k}, t) = i\vec{k} \times \tilde{A}(\vec{k}, t)$$

Los campos propios generados por la partícula serán:

$$\vec{E}(\vec{k}, t) = -\frac{4\pi}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\rho}(k)}{k\sqrt{\epsilon}} \hat{k} \times [\tilde{v}(t') \times \hat{k}] \frac{ck}{\sqrt{\epsilon}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}(t')} \Theta(t-t') \cos \frac{ck}{\sqrt{\epsilon}}(t-t') dt' \quad (22)$$

mientras que el campo magnético queda expresado por:

$$\vec{B}(\vec{k}, t) = 4\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\rho}(k)}{k\sqrt{\epsilon}} \sin \frac{ck}{\sqrt{\epsilon}}(t-t') \hat{k} \times \tilde{v}(t') e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}(t) - \vec{r}(t'))} \Theta(t-t') dt' \quad (23)$$

Ahora bien calculemos la contribución del campo eléctrico y del magnético a la autofuerza:

$$\int \rho \vec{E} d\vec{x} = -4\pi \iint \frac{1}{a} \frac{\tilde{\rho}(k)^2}{a} \hat{k} \times [\tilde{v}(t') \times \hat{k}] \frac{ck}{\sqrt{\epsilon}} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}(t) - \vec{r}(t'))} \Theta(t-t') d^3k dt'$$

Mientras que:

$$\int \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B} \, d\vec{z} = -\frac{4\pi i}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{|\vec{p}(k)|^2}{k\sqrt{\epsilon}} \delta(t) \times [\hat{k}_\lambda \delta(t')] \frac{\sin \frac{ck}{\sqrt{\epsilon}}(t-t')}{\sqrt{\epsilon}} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}(t) - \vec{r}(t'))} \odot (t-t') \, d^3k \, dt'$$

Así pues de esta forma \vec{F}_{auto} queda dada por:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_{\text{auto}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{|\vec{p}(k)|}{\epsilon} \hat{k}_\lambda \delta(t) \times \hat{k} \cos \frac{ck}{\sqrt{\epsilon}}(t-t') e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}(t) - \vec{r}(t'))} \odot (t-t') \, d\vec{k} \, dt' \quad (24)$$

$$+ 4\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{|\vec{p}(k)|^2}{\epsilon} \delta(t) \times \hat{k} \times \delta(t') \frac{\sin \frac{ck}{\sqrt{\epsilon}}(t-t')}{\sqrt{\epsilon}} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}(t) - \vec{r}(t'))} \odot (t-t') \, d\vec{k} \, dt'$$

la cual es la ecuación que describe el movimiento de una partícula cargada con estructura que se mueve con velocidad $\vec{v}(t)$ arbitraria a través de un medio de constante dieléctrica ϵ .

Tenemos como antes una ecuación con memoria donde está contenida toda la historia del movimiento de la partícula. La presencia explícita de la constante dieléctrica ϵ , nos implica que el medio juega un papel importante en el movimiento de nuestra partícula y como veremos más adelante en la energía cedida por ella.

Si consideramos nuestra ecuación (11) en componentes esta puede escribirse como:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = 4\pi \int v_j(t') h_j(t-t') \, dt' + \frac{4\pi i}{c} \int v_k(t') f_k(t-t') \, dt'$$

$$h_j(t-t') = \int \epsilon_{nmk} \epsilon_{ijk} k_n k_l \frac{|\vec{p}(k)|^2}{\epsilon} \cos \frac{ck}{\sqrt{\epsilon}}(t-t') e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}(t) - \vec{r}(t'))} \odot (t-t') \, d^3k \quad (25)$$

$$f_k(t-t') = \int \epsilon_{nmk} \epsilon_{ijk} v_m(t) k_j \frac{|\vec{p}(k)|^2}{k\sqrt{\epsilon}} \frac{\sin \frac{ck}{\sqrt{\epsilon}}(t-t')}{\sqrt{\epsilon}} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}(t) - \vec{r}(t'))} \odot (t-t') \, d^3k$$

De igual forma a como hicimos en el vacío nos interesa conocer la forma de la ecuación integrodiferencial y en el límite de partícula puntual el análogo de la ecuación de movimiento de Abraham-Lorentz.

Situándonos en el sistema de referencia en el cual la velocidad $\vec{v}(t)$ de la partícula es muy pequeña y la contribución del campo magnético a \vec{F}_{auto} es pequeña comparada con la

contribución debida al campo eléctrico podemos quedarnos solo con el término:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{|\vec{p}(k)|^2}{\epsilon} \hat{k} \times \vec{v}(t') \times \hat{k} \frac{\cos k(t-t')}{v} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}(t) - \vec{r}(t'))} \Theta(t-t') d^3k \quad (26)$$

Haciendo un desarrollo en serie de Taylor de $\vec{r}(t')$ alrededor de t , bajo la suposición de que la distancia $\vec{r}(t) - \vec{r}(t')$ es muy pequeña es posible aproximar el término exponencial a la unidad de igual forma a como hicimos en la sección anterior en el caso en el cual la partícula se mueve en el vacío. Integrando por partes llegamos a la expresión:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = -\frac{2}{3} \frac{16\pi}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{|\vec{p}(k)|^2}{k\epsilon} [\delta(\omega) + i(\vec{k} \cdot \vec{v}(t)) \delta(\omega)] \Theta(t-t') \frac{\sin k(t-t')}{v} d^3k d\bar{\omega}$$

lo que de nuevo aproximando se reduce a:

$$\vec{F}_{\text{ext}} \approx -\frac{8}{3} \frac{\pi}{c} (4\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k \frac{|\vec{p}(k)|^2}{c} \vec{a}(t') \Theta(t-t') \frac{\sin k(t-t')}{v} dk dt' \quad (27)$$

Ahora bien esto puede escribirse como:

$$\vec{F}_{\text{ext}} \approx -16\pi^2 m c^2 \tau \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{c}{v}(t-t')\right) \vec{a}(t') dt' \quad (28)$$

donde:

$$g\left(\frac{c}{v}(t-t')\right) = \int_{-\infty}^{\infty} k \frac{|\vec{p}(k)|^2}{\epsilon} \frac{\sin k(t-t')}{v} dk$$

es el factor de estructura y obtenemos así la ecuación integrodiferencial de Abraham-Lorentz con la diferencia de que hemos considerado la presencia de un medio. Cuando tomamos $\epsilon=1$ obtenemos el resultado ya conocido y que presentamos en la ecuación (16).

Ahora bien veamos como quedará la ecuación de movimiento de Abraham Lorentz en este caso. Partiendo de (27) podemos escribir tomando el límite de partícula puntual:

$$\vec{F}_{\text{ext}} \approx -\frac{4}{3\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k \vec{a}(t')}{\epsilon} \frac{\sin k(t-t')}{v} \Theta(t-t') d^3k dt'$$

Dado que:

$$\frac{\partial}{\partial t'} \cos \frac{ck}{\sqrt{\epsilon}} (t-t') = \frac{ck}{\sqrt{\epsilon}} \sin \frac{ck}{\sqrt{\epsilon}} (t-t')$$

Por lo que podemos tomar haciendo el cambio de variable: $k' = kc/\sqrt{\epsilon}$

$$\vec{F}_{\text{rad}} \approx -\frac{4}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{a}(t')}{c^2} \odot (t-t') dt' \frac{\partial}{\partial t'} \int_0^{\infty} \cos k'(t-t') dk'$$

pero no olvidemos que k' lleva implícita una ϵ , así pues

$$\vec{F}_{\text{rad}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\vec{a}}(t) - \frac{4}{3} \frac{e^2}{c^3} S(\epsilon) \vec{a}(t)$$

donde si identificamos $\frac{4}{3} \frac{e^2}{c^3} S(\epsilon)$ con la masa electromagnética tendremos que la ecuación de movimiento de Abraham-Lorentz en presencia de un medio queda dada por:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = m_e \ddot{\vec{a}}(t) - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\vec{a}}(t)$$

En este caso la presencia del medio se encuentra implícita en la masa electromagnética.

Una vez que hemos visto la forma general de la ecuación de movimiento para una partícula cargada moviéndose a través de un medio, nuestro siguiente paso será sustituir las aproximaciones necesarias con el fin de obtener el resultado esperado para la radiación Čerenkov.

CAPITULO IV

"EL EFECTO ČERENKOV COMO UN PROBLEMA DE REACCION DE RADIACION "

4.1 INTRODUCCION

En los capítulos I y II presentamos dos métodos para la deducción de la expresión que nos proporciona la energía radiada por una partícula que viaja a través de un medio material.

El primero de ellos, el de Landau, consistió en suponer que la energía radiada por la partícula es igual al trabajo realizado por una fuerza $e\vec{E}$ sobre la partícula, donde \vec{E} es el campo generado por ella misma. Como mencionamos anteriormente esta idea sugiere enfocar al problema como un problema de reacción de radiación.

El segundo método, el de Jackson, complementa el punto de vista de Landau y parte de un balance de energía, donde la energía cedida por la partícula viajera será simplemente igual al flujo de energía a través de un cilindro de radio a alrededor de la trayectoria de la partícula, calculado con ayuda del vector de Poyntig. La elección de dicha superficie de integración se debe a la simetría del problema.

Así pues la idea fundamental en estos análisis se sintetiza a través de las siguientes ecuaciones:

Landau: $P_{rad} = \vec{F}_{auto} \cdot \vec{v}$

Jackson: $\oint \vec{S} \cdot \vec{n} da = P_{rad}$

Analicemos estos resultados utilizando el conocido Teorema de Poynting, que nos dice que la razón de cambio de la energía electromagnética dentro de cierto volumen más la energía que

fluye a través de la superficie de dicho volumen por unidad de tiempo es igual al negativo del trabajo realizado por los campos sobre la fuente. Esto es:

$$-\int \vec{J} \cdot \vec{E} \, d\vec{z} = \frac{dW}{dt} + \oint \vec{S} \cdot \hat{n} \, da \quad (1)$$

en donde W denota la energía del campo electromagnético total del sistema y $\oint \vec{S} \cdot \hat{n} \, da$ la energía cedida por la partícula por unidad de tiempo.

El método presentado por Jackson, como ya mencionamos, sigue el camino directo y se va sin más preambulos al cálculo del flujo de energía. Ahora bien notemos que si escribimos:

$$P_{\text{rad}} = -\vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v} - \frac{dW}{dt} \quad (2)$$

al comparar con la suposición de Landau se observa que que este no menciona que en el cálculo de la energía cedida habrá que tomarse en cuenta necesariamente a la razón de cambio de la energía electromagnética. Esta inconsistencia conceptual será discutida más adelante cuando demostramos que en el caso que nos interesa, que es el de la partícula viajando con una velocidad constante, este término se anula y por lo tanto si igualamos el teorema de Poynting con el resultado de Landau la fuerza externa que actúa sobre la partícula y que es la responsable que se mueva con velocidad constante a pesar de que ceda parte de su energía es precisamente \vec{F}_{auto} , ya que se tendrá:

$$P_{\text{rad}} = -\vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v} = \vec{F}_{\text{auto}} \cdot \vec{v} \quad \rightarrow \quad \vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_{\text{auto}}$$

Puesto que nuestro objetivo es la obtención de la expresión para la radiación Čerenkov presentaremos a lo largo de este capítulo la forma en que este resultado se obtiene de las expresiones del capítulo anterior.

Con el fin de comprobar nuestros cálculos y de fijar ideas, comenzaremos analizando lo que sucede cuando la partícula viaja a través del vacío con velocidad constante para posteriormente, de forma análoga, analizar el caso de interés que es en el cual tenemos la partícula viajando a través de un medio material

4.2 PARTICULA CARGADA VIAJANDO A VELOCIDAD CONSTANTE EN EL VACIO

Recordemos que en el vacio una partícula que viaja a velocidad constante no radia, por lo que deberemos tener:

$$\vec{F}_{ext} \cdot \vec{v} + \frac{dW}{dt} = 0$$

Como una prueba de consistencia para los resultados que presentamos en el capítulo III, veamos que este resultado puede obtenerse a partir de ellos tomando las hipótesis necesarias. Si en la ecuación (III.11) sustituimos $\vec{v}(t) = \vec{v}(t') = \text{constante}$ la expresión para la fuerza externa se reduce a:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{auto} &= 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{p}(k)|^2 \hat{k} \times \vec{v} \times \hat{k} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{v}(t-t')} \cosh(t-t') \Theta(t-t') d^3k dt' \\ &= 4\pi i \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{p}(k)|^2 \vec{v} \times \hat{k} \times \vec{v} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{v}(t-t')} \sinh(t-t') \Theta(t-t') d^3k dt' = -\vec{F}_{ext} \end{aligned} \quad (3)$$

Dado que en el vacio siempre tenemos que la velocidad de la partícula es menor que la velocidad de la luz esta integral no presenta ningún problema de cálculo y directamente podemos ver que se anula. Esto concuerda con nuestra idea de que si \vec{F}_{auto} representa una fuerza de frenado debida a la radiación emitida por la carga acelerada esta fuerza debe ser nula para un movimiento con velocidad constante.

Ahora bien es conveniente que sigamos adelante y no nos conformemos con este resultado pues podemos obtener un resultado que es de gran importancia para lo que nos proponemos.

Calculemos el trabajo realizado sobre la partícula por los campos externos:

$$\vec{F}_{auto} \cdot \vec{v} = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int |\vec{p}(k)|^2 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{v}(t-t')} \cosh(t-t') \Theta(t-t') [v^2 - (\vec{k} \cdot \vec{v})^2] d^3k dt' \quad (4)$$

Tomemos el cambio de variable $\eta = t - t'$ e integremos sobre η utilizando la expresión exponencial para el $\cos ck(t-t')$. De esta forma llegaremos a que:

$$\vec{F}_{\text{auto}} \cdot \vec{v} = -\vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v} = 4\pi \int \frac{|\vec{\rho}(k)|^2 [v^2 - (\vec{k} \cdot \vec{v})^2] (\vec{k} \cdot \vec{v}) d^3k}{[(\vec{k} \cdot \vec{v})^2 - c^2 k^2]} \quad (5)$$

Supondremos por simplicidad que la partícula viaja en la dirección x , aunque podríamos tomar una dirección arbitraria y llegar al mismo resultado. Por la simetría del problema pasaremos a coordenadas cilíndricas en donde:

$$\vec{F}_{\text{auto}} \cdot \vec{v} = 8\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{|\vec{\rho}(k)|^2}{[\omega^2 - c^2 k^2] v} [v^2 - \frac{\omega^2}{k^2}] \omega q dq d\omega \quad (6)$$

Ahora bien observemos que k^2 es una función par sobre ω , por lo que el integrando de (6) será una función impar sobre ω . Así pues al integrar sobre el intervalo simétrico obtendremos que:

$$\vec{F}_{\text{auto}} \cdot \vec{v} = -\vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_{\text{auto}} = 0$$

que era un resultado inmediato pues como demostramos $\vec{F}_{\text{auto}} = 0$, pero observemos un hecho interesante y que es la base de nuestro interés por calcular $\vec{F}_{\text{auto}} \cdot \vec{v}$. Si reescribimos de nuevo nuestra ecuación (6) como:

$$\vec{F}_{\text{auto}} \cdot \vec{v} = 8\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{|\vec{\rho}(k)|^2 [\frac{\omega^2}{k^2} - v^2] \omega q d\omega dq}{\omega^2 (\frac{c^2}{v^2} - 1) + q^2} = -\vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v} \quad (7)$$

observamos que cuando $v/c > 1$, es decir cuando la velocidad de la partícula es mayor que la de la luz tendremos un polo en el eje imaginario del espacio ω , lo que nos lleva a que la integral es distinta de cero. Así pues, si la partícula pudiese viajar a velocidad mayor que la de la luz tendríamos que existe al menos una contribución al flujo de energía, pero esto en el vacío es imposible si consideramos que la partícula tiene una masa en reposo finita. Ahora bien recordemos que en un medio podemos tener a una partícula viajando con una velocidad mayor que la velocidad de la luz en dicho medio, de esta forma es de esperarse que si considerásemos que la partícula viaja con una velocidad constante dentro de un medio el término $\vec{F}_{\text{auto}} \cdot \vec{v}$ será distinto de cero, por lo

que se tendrá al menos una contribución a P_{rad} (si es que el término $d\mathbf{W}/dt$ no la anula), es decir la partícula radiará.

De esta manera nos fué posible obtener de una forma natural la condición sobre la velocidad de la partícula para que se presente Radiación Čerenkov.

Pero volvamos de nuevo a nuestro cálculo en el vacío y veamos lo que sucede con la energía electromagnética pues esta también contribuye a P_{rad} como se muestra en (7).

Utilizando las relaciones (II.7) y (II.8) que nos proporcionan la forma del campo calcularemos la expresión para la energía electromagnética del sistema, la cual resulta ser:

$$W(t) = -\frac{2}{\pi} \int \frac{|\hat{p}(k)|^2}{(c^2k^2 - \omega^2)^2} [\omega^2(\hat{h} \times \hat{v} \times \hat{k}) - ck^2[v^2 - \omega^2]] d^3k \quad (8)$$

Puesto que \bar{v} es constante la energía electromagnética no tendrá dependencia temporal lo que nos lleva a que:

$$P_{rad} = 0 \quad (9)$$

por lo que una partícula que viaja a velocidad constante en el vacío no radia. Ahora bien si consideramos el caso en el que \bar{v} no es constante y calculamos P_{rad} , el resultado obtenido será distinto de cero, pues si observamos la expresión para W , ésta depende de t a través de la velocidad.

Una vez que hemos visto que podemos obtener $\bar{F}_{ext} \neq 0$ y por ende $P_{rad} \neq 0$ para una partícula que se mueve con velocidad constante siempre y cuando $v > c$. Nuestro siguiente paso es encontrar la energía radiada por una partícula cargada que viaja a velocidad constante a través de un medio de constante dieléctrica ϵ , donde dicha condición puede satisfacerse.

4.3 PARTICULA CARGADA VIAJANDO CON VELOCIDAD CONSTANTE A TRAVES DE UN MEDIO MATERIAL.

Partamos de la ecuación de movimiento de una partícula cargada viajando en un medio material (III.24). Suponiendo que la partícula viaja a velocidad constante esta ecuación toma la forma:

$$\vec{F}_{\text{auto}} = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{\rho}(k)|^2}{\epsilon(\omega)} \hat{k}_x \hat{v} \times \hat{k} \cos \frac{ck}{v\epsilon} (t-t') e^{-i\vec{k} \cdot \vec{v}(t-t')} \Theta(t-t') d^3k dt' \\ - 4\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{\rho}(k)|^2}{\sqrt{\epsilon(\omega)}} \hat{v} \times \hat{k} \times \hat{v} \sin \frac{ck}{v\epsilon} (t-t') e^{-i\vec{k} \cdot \vec{v}(t-t')} \Theta(t-t') d^3k dt' = -\vec{F}_{\text{ext}} \quad (10)$$

Así pues el trabajo realizado sobre la partícula por los campos externos es:

$$\vec{F}_{\text{auto}} \cdot \vec{v} = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{|\tilde{\rho}(k)|^2}{\epsilon(\omega)} [v^2 - (\hat{k} \cdot \vec{v})^2] \cos \frac{ck}{v\epsilon} (t-t') e^{-i\vec{k} \cdot \vec{v}(t-t')} \Theta(t-t') d^3k dt' \quad (11)$$

De igual forma a como lo hicimos cuando estudiamos el problema de la partícula moviéndose en el vacío, buscamos eliminar la dependencia temporal y hacemos el cambio de variable $\eta = t-t'$ e integramos sobre η , obteniendo así:

$$\vec{F}_{\text{auto}} \cdot \vec{v} = -4\pi i \int \frac{|\tilde{\rho}(k)|^2 [v^2 - (\hat{k} \cdot \vec{v})^2] (\hat{k} \cdot \vec{v})}{[(\hat{k} \cdot \vec{v})^2 \epsilon - c^2 k^2]} d^3k \quad (12)$$

Podemos suponer que \vec{v} apunta en una dirección arbitraria, sin embargo por simplicidad de cálculo y con el fin de poder comparar con los resultados del capítulo II supondremos que la partícula viaja en la dirección x , por lo que dada la simetría del problema utilizamos coordenadas cilíndricas tomando $\vec{k} \cdot \vec{v} = \omega$, $q^2 = k_y^2 + k_z^2$ como anteriormente hicimos.

Ahora bien la ecuación (12) presenta todavía un rasgo que le da generalidad pues como se ve, aún no hemos mencionado la forma explícita de la distribución de carga, y esta se mantiene presente en el factor $|\tilde{\rho}(k)|^2$.

Pues lo que el resultado con el que nos interesa comparar es el de una carga puntual en este caso habremos de sustituir $\tilde{\rho}(k) = e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_0} \delta(\omega)$ no olvidando que en este caso:

$$\rho(\vec{x}, t) = e \delta(\vec{x} - \vec{v}t)$$

Bajo estas consideraciones la expresión (12) se reduce a:

$$\vec{F}_{\text{out}} \cdot \vec{v} = \frac{ie^2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{v_0} \frac{\omega q}{c^2 k^2 - \omega^2 \epsilon} \left[v^2 - \frac{c^2}{\epsilon v} \right] dq d\omega \quad (13)$$

Sin embargo si comparamos con la ecuación (2) vemos que este no es el único término que hay que considerar en el cálculo de la energía cedida por la partícula, habrá entonces que ver que sucede con la razón de cambio de la energía electromagnética

El cálculo de la energía electromagnética total lo haremos utilizando los campos que obtuvimos en el capítulo III:

$$W(t) = (4\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\vec{p}(k)|^2 [\hat{k} \times \vec{v} \times \hat{k}] (\hat{k} \cdot \vec{v})^2 \epsilon(\omega) d^3k}{[c^2 k^2 - \omega^2 \epsilon(\omega)]^2} - (4\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\vec{p}(\omega)|^2 [v^2 - (\hat{k} \cdot \vec{v})^2] \epsilon^2 k^2 d^3k}{[c^2 k^2 - \omega^2 \epsilon(\omega)]} \quad (14)$$

Dado que la velocidad es constante, W no tiene dependencia temporal teniéndose entonces que:

$$P_{\text{rad}} = -\vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v} = F_{\text{out}} \cdot \vec{v} \quad \rightarrow \quad \vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_{\text{out}}$$

lo cual en esencia es la suposición básica en el resultado de Landau y con esto mostramos una vez más que la fuerza externa necesaria para que la partícula viaje a velocidad constante aunque radie es precisamente \vec{F}_{out} . Hemos demostrado que el término de la energía electromagnética en este caso muy especial, en el cual la velocidad es constante, no contribuye en el cálculo de P_{rad} . Sin embargo si considerásemos una velocidad arbitraria $\vec{v} = \vec{v}(t)$ podríamos asignarle una dependencia temporal a W y entonces el resultado obtenido se vería de una forma distinta.

Así pues llegamos finalmente a que:

$$P_{\text{rad}} = \frac{ie^2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{v_0} \frac{\omega q}{c^2 k^2 - \omega^2 \epsilon} \left[v^2 - \frac{c^2}{\epsilon v} \right] dq d\omega \quad (15)$$

Esta ecuación presenta la misma forma funcional que la ecuación (6) salvo que ahora tenemos explícitamente la presencia del medio a través de la constante dieléctrica ϵ . Sobra decir que recuperamos dicha ecuación tomando simplemente $\epsilon=1$.

Este resultado es fundamental en nuestros cálculos pues a

diferencia del caso en el cual la partícula viaja en el vacío nuestra expresión ahora no se anula, por lo que tendremos que la partícula radiará aún y cuando vaya a velocidad constante con la única restricción de que v deberá ser mayor que c en ese medio, por lo que esperamos que dicha radiación la podamos identificar con la radiación Čerenkov.

Ahora bien P_{rad} representa la transferencia de energía de la partícula por unidad de tiempo, dE/dt , y lo que queremos es comparar este resultado con el obtenido en el capítulo I, que es la transferencia de energía por unidad de longitud, por lo que por tomando:

$$\frac{dE}{dz} = \frac{1}{v} \frac{dE}{dt}$$

obtenemos:

$$\frac{dE}{dz} = \frac{q^2 a^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\theta_0} \frac{\omega q}{c^2 k^2 - \omega^2 \epsilon(\omega)} \left[1 - \frac{c^2}{v^2 \epsilon(\omega)} \right] dq d\omega \quad (16)$$

Resultado que coincide con la ecuación I.20 para la energía transferida por una partícula viajando con velocidad constante a través de un medio material de constante dieléctrica ϵ . Dado que llegamos a la misma expresión aunque por un camino diferente podemos decir que los cálculos necesarios para llegar a la expresión final de dE/dz y de la radiación Čerenkov serán iguales a los que presentamos en el capítulo II y es por esto que en este capítulo nos basta con llegar a la expresión (16).

De esta forma vemos que la radiación Čerenkov puede verse como un problema de reacción de radiación, pues partiendo de la ecuación de movimiento para una partícula cargada con estructura en un medio de constante dieléctrica ϵ y haciendo las suposiciones de velocidad constante y partícula puntual llegamos a través de un balance de energía a la expresión presentada en los textos.

Deberemos hacer hincapie en que la idea de autointeracción de una partícula inmersa en un medio material cambia en el sentido de que ahora el campo producido por la partícula y que interactúa con ella misma se encuentra modificado por la presencia del medio.

Así pues el medio viene a resultar un mediador en el proceso de autointeracción. Y en este caso volvemos a recalcar que la energía observada como radiación no puede considerarse como una pérdida solo por parte de la partícula viajera sino que hay que considerar que el medio también contribuye, tratándose de un efecto colectivo.

Hemos visto que nuestra hipótesis de que la radiación Čerenkov puede ser estudiada como un problema de reacción de radiación era correcta. Los cálculos a lo largo de este capítulo se han realizado considerando que tenemos a la partícula moviéndose con velocidad constante, sin embargo como un complemento a lo estudiado presentaremos a continuación el resultado que se obtiene cuando se considera a la partícula moviéndose con velocidad arbitraria a través del medio material.

De la ecuación para la energía electromagnética (14) observamos que ésta dependerá del tiempo debido a la dependencia temporal de \bar{v} , de esta forma el término dW/dt contribuirá forzosamente en la expresión (2) para la energía radiada.

$$W(t) = e^2 \omega^2 2\pi \iiint d^3x d^3k \frac{|\tilde{\rho}(k)|^2}{c^2 \tilde{v}(\tilde{v} \cdot \tilde{k})} e^{-i\tilde{k} \cdot (\tilde{R}(t) - \tilde{R}(t'))} [\tilde{v}(t) \cdot \tilde{v}(t') - (\tilde{v} \cdot \tilde{v}(t))(\tilde{k} \cdot \tilde{v}(t'))] \left[\cos \frac{k c (t-t')}{\sqrt{c^2 - \tilde{v}^2}} \times \right. \\ \left. \times \frac{\cos k c (t-t')}{\sqrt{c^2 - \tilde{v}^2}} \right] \mathcal{O}(t-t') \mathcal{O}(t-t') + 2\pi e^2 \iiint d^3x d^3k \frac{|\tilde{\rho}(k)|^2}{\sqrt{c^2 - \tilde{v}^2}} \frac{-i\tilde{k} \cdot (\tilde{R}(t) - \tilde{R}(t'))}{c} [\tilde{v}(t) \cdot \tilde{v}(t') - (\tilde{v} \cdot \tilde{v}(t))(\tilde{k} \cdot \tilde{v}(t'))] \times \\ \times \frac{\sin k c (t-t')}{\sqrt{c^2 - \tilde{v}^2}} \frac{\sin k c (t-t')}{\sqrt{c^2 - \tilde{v}^2}} \mathcal{O}(t-t') \mathcal{O}(t-t') \quad ; \quad \tilde{v}' = \tilde{v}(t') \quad \tilde{R}(t') = \tilde{R}(t) - \tilde{v}(t') \\ \tilde{v}'' = \tilde{v}(t'') \quad \tilde{R}(t'') = \tilde{R}(t) - \tilde{v}(t'')$$

El término Fauto \bar{v} en este caso queda dado por:

$$\bar{F}_{\text{auto}} \cdot \bar{v} = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{\rho}(k)|^2}{c} [\tilde{v}(t) \cdot \tilde{v}(t) - (\tilde{k} \cdot \tilde{v}(t))(\tilde{k} \cdot \tilde{v}(t))] \cos \frac{k c (t-t)}{\sqrt{c^2 - \tilde{v}^2}} e^{-i\tilde{k} \cdot (\tilde{R}(t) - \tilde{R}(t))} \mathcal{O}(t-t) d^3k d^3t = -\bar{F}_{\text{ext}} \cdot \bar{v}$$

Por lo que la expresión para la energía total radiada por la partícula al viajar con una velocidad arbitraria a través del medio material quedará dada por:

$$P_{\text{rad}} = \bar{F}_{\text{ext}} \cdot \bar{v}(t) - \frac{dW(t)}{dt}$$

Observemos que los integrales son difíciles de calcular pues no tenemos explícita la dependencia temporal de la velocidad. Por el momento nos limitaremos a decir que este es uno de los puntos de los cuales se podría partir para un trabajo posterior, donde analizamos el movimiento general pues es sin duda un problema importante.

Si nos fijamos en la expresión obtenida para la energía electromagnética observamos que cuando se tiene $\vec{v}=\text{cte}$, esta no tendrá dependencia temporal independientemente de la forma de la distribución de carga, así pues $dW/dt=0$ y la expresión para la energía radiada solo tendrá la contribución debida al término $\vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}$.

Como un complemento a lo que hemos desarrollado a lo largo de este capítulo analizaremos de una forma cualitativa lo que sucede con la radiación Čerenkov cuando se toman dos distribuciones de carga distintas a la de partícula puntual.

4.4 RADIACION ČERENKOV PARA DOS DISTRIBUCIONES DE CARGA

Hasta el momento hemos trabajado con el caso de partícula puntual y obtuvimos la expresión para la radiación Čerenkov, la cual presenta ciertas características definidas. De la forma en que planteamos el problema nos es posible analizar diferentes distribuciones de carga y ver cuales de las propiedades mencionadas son inherentes al modelo de partícula puntual.

Puede resultar que al considerar otras distribuciones de carga una vez que se calcule la radiación emitida se obtenga una característica que nos permita hacer alguna estimación del tamaño de la partícula cargada.

Dos modelos que resultan sencillos de trabajar son el cascarón esférico y una distribución tipo Yukawa, por lo tanto vamos a obtener la radiación Čerenkov con ellas. Esto puede darnos una guía acerca de lo que podemos esperar para distribuciones de carga más complejas.

a) CASCARON ESFERICO DE CARGA

Como primer ejemplo consideremos un cascarón esférico, en este caso tendremos una distribución de carga dada por :

$$\rho(\vec{x}-\vec{v}(t)) = \frac{q}{4\pi a^2} \delta(|\vec{x}-\vec{v}(t)|-a) \quad (17)$$

Si pasamos al espacio de Fourier, que es en el cual hemos

venido trabajando, esta expresión toma la forma:

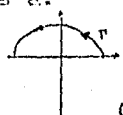
$$\tilde{\rho}(k) = \frac{e \sin ka}{(2\pi)^{3/2} k a} \quad (18)$$

observemos que en el límite en el cual $a \rightarrow 0$ obtenemos de nuevo nuestro resultado para partícula puntual, por lo que la comparación con el resultado obtenido en dicho caso será inmediata.

Sustituylamos este resultado en la ecuación (12), la cual nos proporcionará la energía cedida por esta distribución de carga al viajar a velocidad constante a través de un medio de constante dieléctrica ϵ :

$$\vec{F}_{\text{auto}} \cdot \vec{v} = \frac{-4\pi i e^2}{(2\pi)^3 a^2} \int \frac{\sin^2 ka [v^2 - \omega^2] \omega d^3k}{k^2 [v^2 \epsilon - c^2 k^2]} \quad (19)$$

Haremos el cálculo de forma análoga a como se desarrolló en el capítulo I para partícula puntual, notando que en este caso nuestra expresión presenta el mismo polo, pero la forma funcional de la expresión se ve afectada por la forma de la distribución de carga. Esto nos conducirá a obtener un resultado diferente para la emisión de radiación. Calculando por polos llegamos a:

$$\vec{F}_{\text{auto}} \cdot \vec{v} = \frac{e^2}{a^2} z \int_0^{\beta_0} \frac{\sin^2 \left(\frac{\omega_0 \sqrt{\epsilon} a}{c} \right) \left(\frac{1}{v^2} - \frac{\epsilon_0}{c^2} \right) q dq}{\frac{\omega_0 \epsilon_0}{c^2} \left[q \frac{dz}{d\omega_0} \right]} - \int_{\Gamma} \frac{i e^2 \left[\frac{1}{v^2} - \frac{\epsilon}{c^2} \right] \omega q d^3 \omega}{a^2 k^2 \epsilon \left[\omega^2 \left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right) - q^2 \right]} \quad (20)$$


la cual, en el límite de partícula puntual $a \rightarrow 0$, se reduce al resultado conocido.

Como mencionamos anteriormente en este caso este último término es la única contribución a la expresión de la radiación Čerenkov, pues cuando tenemos el caso de velocidad constante el término de la energía electromagnética en (2) se anula, pues ésta no depende del tiempo independientemente del tipo de distribución que se tenga.

Veamos ahora un hecho interesante que surge directamente de nuestros cálculos. Analicemos lo que sucede con el cono Čerenkov. Sabemos que el vector de onda y la frecuencia de una onda que se propaga a través de un medio están relacionados a través de:

$$k = \frac{n\omega}{c}$$

donde:

$$n = \sqrt{\epsilon}$$

En nuestros cálculos supusimos por simplicidad que la partícula se mueve con velocidad constante a lo largo del eje x , por lo que la frecuencia de la componente de Fourier del campo está relacionada con la componente x del vector de onda por:

$$\omega = k_x v$$

Si esta componente es una onda que se propaga libremente estas dos últimas relaciones deben ser consistentes. Si llamamos θ_c al ángulo que forman la dirección de movimiento de la partícula y la dirección de emisión tendremos que:

$$k_x = k \cos \theta$$

lo que nos conduce a:

$$\cos \theta_c = \frac{c}{n v}$$

donde θ_c es el denominado ángulo Čerenkov y nos limita la dirección de emisión de radiación a un cono de ángulo vertical $2\theta_c$ (Cono Čerenkov).

Ya que esta deducción del cono Čerenkov es independiente de la distribución de carga que tomemos, la relación entre el ángulo de emisión de la radiación y la velocidad de la partícula será independiente de la distribución de carga que describe a la partícula.

Hemos visto que el tomar una distribución de carga distinta a la puntual no afecta la dirección de emisión de la radiación sin embargo esta afectará la expresión para dE/dx , obviamente haría falta estimar la magnitud de este cambio y determinar a partir de que radio resulta significativo.

Veamos ahora un ejemplo más:

b) DISTRIBUCION YUKAWA DE CARGA.

Ahora bien calculemos lo que sucede cuando nuestra densidad de carga tiene la forma de una distribución Yukawa.

Aquí tendremos que la densidad de carga se encontrará dada por:

$$\rho(x - \bar{x}(t)) = \frac{\gamma^2}{4\pi} \frac{\exp[-\gamma(x - \bar{x}(t))]}{(x - \bar{x}(t))} \quad (21)$$

lo cual en el espacio de Fourier toma la forma:

$$\tilde{\rho}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\xi^2}{4\pi} \frac{1}{\xi^2 + k^2}$$

Si sustituimos esta expresión en nuestra ecuación (12) llegamos a que:

$$\vec{F}_{\text{auto}} \cdot \vec{v} = -P_{\text{rad}} = -\frac{4\pi e^2}{(2\pi)^3} \xi^4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[v^2 - (\vec{k} \cdot \vec{v})^2] [\vec{k} \cdot \vec{v}] d^3k}{(\xi^2 + k^2)^2 [(\vec{k} \cdot \vec{v})^2 - c^2 k^2]} \quad (23)$$

Si comparamos esta expresión con la que obtuvimos en la sección anterior en el caso de partícula puntual observamos que tenemos la presencia de un polo más, polo que nos da una nueva contribución a la energía radiada que habíamos calculado.

Haciendo los cálculos de forma análoga a como procedimos en el capítulo I llegamos a que:

$$\vec{F}_{\text{auto}} \cdot \vec{v} = c^2 \xi^4 \left\{ \int_{\omega_1(\vec{q})}^{\omega_2(\vec{q})} \frac{[\dot{y}_1 - \frac{v_1}{c}] \omega_1 d\omega_1}{[\omega_1^2 - \frac{v_1^2}{c^2}]^2} - \int_{\omega_1(\vec{q})}^{\omega_2(\vec{q})} \frac{[\dot{y}_1 - \frac{v_1}{c}] \omega_1 d\omega_1}{\epsilon_1 [\xi^2 + \omega_1^2 - \frac{v_1^2}{c^2}]^2} \right\} \cdot \left. \begin{array}{l} \omega_1^2 = v^2 [q^2 - \xi^2] \\ \omega_1^2 (\frac{\epsilon_1}{c^2} - \frac{1}{v^2}) = q^2 \end{array} \right\} \quad (24)$$

De esta expresión observamos, al igual que en el ejemplo anterior, que la magnitud de la radiación se verá afectada al tomar una distribución de carga distinta de la de partícula puntual. Sin embargo como mencionamos anteriormente el ángulo de emisión de la radiación será el mismo que en el caso de partícula puntual pues este es independiente de la distribución de carga que tomemos.

Nuestras expresiones (20) y (24) que nos proporcionan la magnitud de la radiación emitida por la distribución de carga pueden ser calculadas para llegar al resultado final tomando diversas aproximaciones, ya sea sustituyendo la expresión de ϵ para frecuencias grandes como hicimos en el capítulo I, o considerando a esta una constante, etc.

Sin embargo en este momento el resultado relevante es considerar que el cono Čerenkov no se verá afectado por la forma de la distribución de carga, mientras que la magnitud de la radiación Čerenkov sí. Este hecho nos permitirá, una vez que hayamos medido la radiación Čerenkov, decir algo sobre el tamaño de la partícula viajera.

A lo largo de este capítulo hemos cumplido con nuestro objetivo y se ha demostrado que el efecto Čerenkov puede ser estudiado como un problema de reacción de radiación. Por otra parte hemos hecho un balance correcto de energía y encontramos que, en este caso, toda la potencia suministrada a la partícula por los campos es cedida como radiación. Por otra parte analizamos el caso en que la partícula no es puntual y encontramos, en dos casos particulares, que el cono Čerenkov es independiente de la distribución de carga, mientras que la radiación Čerenkov presenta una corrección.

CONCLUSIONES

Es bien conocido que el efecto Čerenkov se presenta cuando una partícula cargada viaja en un medio dieléctrico con velocidad mayor que la velocidad de la luz en dicho medio. Existen en la literatura varias formas de atacar este problema, por lo que nuestro primer paso fué hacer una breve revisión de los trabajos al respecto de Landau y Jackson, trabajos que, como mostramos, son complementarios.

El trabajo de Landau nos llevó a pensar que el efecto Čerenkov puede plantearse como un problema de reacción de radiación, pues este calcula la energía radiada por la partícula a través del trabajo hecho por la fuerza $e\mathbf{E}$ ejercida sobre la partícula por el campo que ésta misma produce. Tomando el valor del campo perturbado por el dieléctrico en el punto ocupado por la partícula.

Entre las hipótesis básicas que se consideran para atacar este problema destaca la de suponer que la partícula en ausencia de fuerzas externas viaja con velocidad constante a pesar de que radía parte de su energía. Este hecho fué el que más nos sorprendió y preocupó puesto que viola la conservación de la energía. Nuestro problema se resuelve si consideramos, como una primera aproximación, a esta suposición como una hipótesis que nos permitirá simplificar los cálculos para la deducción de la expresión para la energía transferida por la partícula. Sin embargo, de una forma más formal, mostramos mediante el teorema de Poynting que nuestra preocupación era fundada y que si la partícula radía debe existir necesariamente una fuerza externa que actúe sobre ella o de lo contrario no podrá moverse con velocidad constante. Así pues la potencia suministrada por dicha fuerza sobre la partícula se transforma en radiación.

Puesto que nuestro interés radicaba en atacar el problema de la radiación Čerenkov como un problema de reacción de radiación planteamos la ecuación de movimiento para una distribución de carga arbitraria en medios materiales y, utilizando el teorema de

Poynting, mostramos que de ella puede obtenerse que hay radiación cuando la carga viaja con velocidad constante y entonces se presenta el efecto Čerenkov. Una de las líneas inmediatas que podría seguirse de este trabajo es el estudio del movimiento arbitrario de una partícula cargada dentro de un medio material, pues las expresiones que hemos obtenido no son muy transparentes.

Un hecho que debe resaltarse es que la radiación que se observa no solo proviene de la partícula viajera sino que habrá de considerarse necesariamente al medio, pues los constituyentes de este son afectados por el campo de la partícula y contribuirán a la radiación. Así pues no podemos considerar a la radiación como un proceso individual sino, necesariamente, como un proceso colectivo donde intervienen tanto la partícula como el medio.

REFERENCIAS

BUTKOV, E.

"Mathematical Physics"

Addison-Wesley, Massachusetts, 1968.

CAMPOS, I. AND JIMENEZ, J.L.

Am. J. Phys., 55, 1017, 1987.

DE LA PEÑA, L., JIMENEZ, J.L. AND MONTEMAYOR, R.

Nuovo Cimento 69B, 71 (1982)

FRANÇA, H. N., MARQUEZ, G. C. AND DA SILVA, A. J.

Nuovo Cimento 49A, 65 (1978)

GRADSHTEYN, I. S. Y HYZSHIK, I.M.

"Tables of Integrals, Series and Products"

Academic, New York, 4th edition, 1965

JACKSON, J. D.

"Classical Electrodynamics"

John Wiley and Sons, New York, 2nd edition, 1975.

JIMENEZ, J. L. AND MONTEMAYOR, R.

Nuovo Cimento, 73B, 246 (1983)

LANDAU, L. D.

"Electrodynamics of Continuous Media"

Pergamon Press, New York, 1960

PANOFSKI, W. K. H. AND PHILLIPS, M.

"Classical Electricity and Magnetism"

Addison-Wesley, Massachusetts, 2nd edition, 1962.