



01181  
2 ej. 1

**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**  
**Facultad de Ingeniería**

ANALISIS SISMICO PROBABILISTICO DE SISTEMAS SIMPLES  
CON EFECTOS DE SEGUNDO ORDEN (P- $\Delta$ )

ORLANDO JAVIER DIAZ LOPEZ

**TESIS DOCTORAL**

PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE  
POSGRADO DE LA

**FACULTAD DE INGENIERIA**

DE LA

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

COMO REQUISITO PARA OBTENER

EL GRADO DE

**DOCTOR EN INGENIERIA**

( ESTRUCTURAS )

**CIUDAD UNIVERSITARIA**

MAYO 1988

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ANALISIS SISMICO PROBABILISTICO DE SISTEMAS SIMPLES  
CON EFECTOS DE SEGUNDO ORDEN (P- $\Delta$ )

TESIS DOCTORAL

INDICE

RESUMEN

SIMBOLOGIA

	1
1. Introducción	1
1.1 Antecedentes	2
1.2 Objetivos	8
2. Generalidades del modelo y del análisis	11
2.1 Modelo estructural	11
2.2 Elección de los parámetros estructurales	13
2.3 Temblores	15
2.4 Método de análisis	17
3. Análisis de incertidumbre	20
3.1 Análisis bayesiano	20
3.2 Análisis de los resultados de la muestra	22
3.3 Evaluación de las distribuciones de probabilidades y momentos	29
4. Análisis de confiabilidad	35
4.1 Aproximación de resultados	36
4.2 Probabilidad de falla	37
4.3 Probabilidad de excedencia de un desplazamiento dado	38
4.4 Aplicaciones a problemas de diseño	39
5. Ejemplos de aplicación	48
5.1 Ejemplo I	48
5.2 Ejemplo II	53
6. Conclusiones	56
7. Referencias	59
8. Agradecimientos	63

TABLAS

FIGURAS

APENDICE A

APENDICE B

## RESUMEN

Se estudia la influencia del efecto P- $\Delta$  en la respuesta sísmica de sistemas simples con comportamiento de entrepiso elastoplástico. Se realiza un análisis paramétrico en donde se analiza la influencia de diversos parámetros estructurales tales como el periodo de vibración, la altura y el nivel de fluencia de la estructura. El efecto P- $\Delta$  se toma en cuenta mediante un comportamiento de entrepiso bilineal con segunda pendiente negativa. El estudio se realiza para dos tipos de terreno: firme y compresible. Para terreno firme se utiliza como excitación una familia de temblores compuesta por el sismo de El Centro (1940) y cinco artificiales. Para terreno compresible se utilizan cinco sismos reales registrados en el Distrito Federal.

Con los resultados del estudio paramétrico se lleva a cabo un análisis de probabilidades, utilizando métodos de análisis bayesiano y se define una distribución de probabilidades del desplazamiento máximo normalizado en estas estructuras. Los resultados de este estudio se utilizan para realizar un análisis de confiabilidad, y se obtienen probabilidades de falla del sistema, así como probabilidades de que los desplazamientos excedan valores dados.

Se desarrolla un método de análisis y diseño de estos sistemas, en el cual se incluye el efecto de la carga vertical.

Del estudio se concluye que el efecto de la carga gravitacional sobre el comportamiento sísmico de las estructuras es de importancia, ya que puede incrementar considerablemente su probabilidad de colapso.

## ABSTRACT

The influence of P- $\Delta$  effects on the seismic response on single systems with elastoplastic story behavior is studied.

The influence of several structural parameters is considered: period of vibration, height and lateral design coefficient. The study covers ground motions corresponding to two different local ground conditions: firm ground and soft soil.

El Centro earthquake (1940) and five artificial accelerograms are used to represent the excitation on firm ground. Ground motion on soft soil was represented by a set of five accelerograms recorded in Mexico City.

Based on bayesian analysis methods a probabilistic distribution function of the normalized maximum displacement is defined. A reliability analysis is carried out to estimate some parameters of the probabilistic distributions of some response variables; for instance, mean values and coefficients of variation of maximum displacements, failure probabilities and probability distributions of maximum displacements.

A method is proposed to include the effect of P- $\Delta$  effects in the analysis and design of systems as those studied.

The results obtained show that the influence of P- $\Delta$  effects on the seismic response of structures is important, since it can considerable raise the probability of collapse.

The principal chapters of the thesis are:

1. Introduction
2. General description of the model and the methods of response analysis
3. Uncertainty analysis

4. Reliability analysis

5. Examples

6. Conclusions

## SIMBOLOGIA

A	Punto de inestabilidad estática en la curva fuerza-deformación bilineal con el efecto P-Δ incluido
a(t)	Aceleración del sismo en el instante t
$C_g = X/X_e$	Desplazamiento máximo normalizado del sistema
$C_g = X_f/X_e$	Desplazamiento a la falla normalizado del sistema
$C_g^Q$	Valor de $C_g$ correspondiente a una ductilidad Q dada
$C_k = k_2/k_1$	Parámetro estructural que representa la relación de rigideces en la curva fuerza-deformación bilineal con el efecto P-Δ incluido
$C_x = X_e/X_o$	Parámetro estructural que representa el valor del nivel de fluencia del sistema
$C_{xg}$	Valor de $C_x$ del nuevo sistema con efecto P-Δ
$C_{xr}$	Valor de $C_x$ en el sistema de referencia
$F_{LN}(\cdot)$	Función de distribución acumulada lognormal de ( $\cdot$ )
$F_R$	Fuerza restauradora
$F_{C_g}(u)$	Función de distribución acumulada a priori de $C_g$
$F_{C_g}(u)$	Función de distribución acumulada marginal de $C_g$
$f_{C_g}(u)$	Función de densidad de probabilidades a priori de $C_g$
$f_{C_g}(u)$	Función de densidad de probabilidades a posteriori de $C_g$
$f_{C_g}(u)$	Función de densidad de probabilidades marginal de $C_g$
H	Altura del sistema
$k_o$	Rigidez inicial del sistema sin efecto P-Δ incluido
$k_1$	Rigidez inicial del sistema con el efecto P-Δ incluido
$k_2$	Segunda rigidez negativa en la relación fuerza-deformación de entrepiso debido al efecto de la carga vertical
$L(\cdot \cdot)$	Función de verosimilitud

M	Masa del sistema actuando en el nivel de piso
$m_{C_g}$	Media de $C_g$
$m_{C_g}$	Media marginal de $C_g$
$P_e$	Probabilidad de excedencia
$P_{eQ}$	Probabilidad de exceder un valor dado de Q
Q	Factor de ductilidad
$Q_g$	Factor de ductilidad del nuevo sistema con efectos P- $\Delta$
$Q_r$	Factor de ductilidad del sistema de referencia
$T_1$	Periodo de vibración del sistema incluido el efecto P- $\Delta$
$\ddot{U}$	Aceleración del suelo
$V_{C_g}$	Coefficiente de variación de $C_g$
$V_{C_g}$	Coefficiente de variación marginal de $C_g$
W	Peso de la estructura actuando en el nivel de piso
X	Desplazamiento máximo del sistema
$X_e$	Desplazamiento elástico máximo esperado del sistema
$X_{er}$	Desplazamiento elástico máximo esperado del sistema de referencia
$X_f$	Desplazamiento a la falla del sistema con efecto P- $\Delta$
$X_g = C_x X_e$	Desplazamiento a la fluencia del nuevo sistema con efecto P- $\Delta$
$X_{max}$	Desplazamiento máximo permitido en el ejemplo.I
$X_o$	Desplazamiento a la primer fluencia del sistema original y con efecto P- $\Delta$
$X_p$	Desplazamiento máximo permitido en el sistema
$\dot{X}$	Velocidad de la masa del piso relativa a la base
$\ddot{X}$	Aceleración de la masa del piso relativa a la base
$\beta \quad \gamma$	Parámetros utilizados en el método de integración paso a paso de Newmark

$\xi$	Porcentaje de amortiguamiento
$\omega$	Frecuencia de vibración del sistema
$\sigma$	Varianza marginal de $C_g$
a,b,c,d, e,f y g	Parámetros probabilísticos que relacionan a $m_C$ y $V_C$ con $C_k$ y $C_x$
$\theta$	Variable con la cual se designa al conjunto de parámetros probabilísticos (a,b,c,d,e,f,g)

## 1. INTRODUCCION

La influencia de los momentos de segundo orden (efecto  $P-\Delta$ ) en la respuesta sísmica de las estructuras es de importancia, en especial cuando éstas son diseñadas para disipar la energía transmitida por los sismos mediante deformaciones inelásticas.

La mayor parte de los reglamentos de diseño sísmico existentes toman en cuenta el efecto  $P-\Delta$  mediante factores de amplificación que modifican las fuerzas que actúan en los miembros de las estructuras, cuando dichas fuerzas se obtienen por un análisis convencional que desprecia ese efecto. Dichos factores de amplificación se calculan a partir de expresiones que en su mayoría fueron obtenidas siguiendo criterios aproximados que consideran a las cargas actuantes como estáticas, y además un comportamiento elástico de las estructuras (ref 1).

La respuesta de una estructura con comportamiento elastoplástico ante cargas dinámicas, como las inducidas por un sismo, puede diferir considerablemente de la que predicen los anteriores criterios, ya que además de considerar el comportamiento no lineal de la estructura, en ella influyen factores que, por la naturaleza propia de los sismos, presentan características aleatorias.

### 1.1 Antecedentes.

Se han hecho varias investigaciones respecto a la influencia del efecto P- $\Delta$  en la respuesta sísmica de estructuras.

Los primeros estudios hechos sobre el efecto P- $\Delta$  se pueden considerar desde 1934 en que Ruge (ref 2) estudió el efecto de la carga gravitacional sobre una viga cantiliver vertical elástica. Su trabajo estuvo enfocado a estimar los cambios en el periodo y la deflexión de ese tipo de estructuras. Jacobsen (ref 3) también incluyó el efecto de la carga gravitacional al analizar una estructura simple con comportamiento no lineal, utilizando el método delta en el plano de fase. Encontró que la estructura presentaba una deformación permanente significativa cuando era sometida a un pulso horizontal. Rubinstein (ref 4) en una publicación presentó los resultados obtenidos en el estudio de la respuesta de edificios altos con comportamiento elástico, cuando en su análisis se incluye el efecto de la carga vertical, así como la deformación axial de las columnas. En sus resultados encuentra que dichos efectos alteran los periodos de vibración de la estructura y además incrementan el desplazamiento lateral hasta en un 10% respecto a los análisis en donde no se toman en cuenta esos efectos.

Más recientemente, en 1968, Jennings y Husid (ref 5) y Husid (ref 6),

hicieron uno de los primeros estudios más completos acerca de la influencia del efecto  $P-\Delta$  en el colapso de estructuras con comportamiento no lineal, cuando son sometidas a un movimiento sísmico. Estudian estructuras de un grado de libertad y suponen dos relaciones fuerza-deformación, histerética elastoplástica e histerética bilineal. realizan un análisis para definir los principales parámetros que afectan la respuesta y llevan a cabo un estudio paramétrico. Utilizan un conjunto de acelerogramas simulados con características estadísticas conocidas y a los cuales consideran como procesos aleatorios gaussianos estacionarios. Su estudio se centró principalmente en la obtención del tiempo promedio a la falla de estos sistemas. Obtienen expresiones para calcular el tiempo promedio al colapso, el cual aparece como independiente del periodo de vibración, siendo los parámetros más importantes la altura de la estructura, la relación del nivel de fluencia a la intensidad del sismo y la pendiente superior de la relación fuerza-deformación histerética bilineal.

En 1969, Goel (ref 7), hace un estudio sobre la influencia del efecto  $P-\Delta$  y la deformación axial de las columnas en marcos de 10 y 25 niveles. Supone un comportamiento elástico de las columnas y a las vigas les asigna un comportamiento no lineal, definido por la función de Ramberg-Osgood. Considera un análisis con comportamiento elástico y uno con comportamiento inelástico. Sus resultados mostraron que el efecto  $P-\Delta$  influye en la respuesta elástica de las estructuras, mientras que su efecto en la respuesta inelástica era insignificante.

Anderson y Bertero (ref 8), en 1973, estudiaron el efecto de la carga gravitacional en la respuesta sísmica de marcos de una cruzía de 10 niveles considerando la componente vertical del sismo. Suponen que los elementos tienen un comportamiento histerético bilineal. De sus

resultados, obtenidos al analizar los marcos ante dos componentes sísmicas, concluyen que la carga gravitacional y la componente vertical del sismo aumenta significativamente los requisitos de ductilidad de las vigas de los pisos superiores y los de las columnas de los pisos inferiores. Tanabashi, Nakamura e Ishida (ref 9), desarrollaron un método computacional eficiente para el análisis dinámico para grandes desplazamientos de marcos de varios niveles, incluido el efecto  $P-\Delta$  y el efecto de la disminución de las regiones de endurecimiento por deformación, el cual es capaz de predecir el proceso de deterioración y la tendencia del comportamiento al colapso dinámico. Aunque no obtuvieron ninguna conclusión cuantitativa, sus resultados numéricos indicaron que el efecto  $P-\Delta$  tenía una influencia significativa sobre el proceso de deterioro y el colapso de los marcos. Sun, Berg y Hanson (ref 10) presentaron un trabajo en el cual estudiaron la influencia del efecto  $P-\Delta$  en la respuesta sísmica de sistemas simples con comportamiento inelástico. Analizaron un conjunto de sistemas con diferentes periodos de vibración y magnitudes del efecto  $P-\Delta$ . Presentan resultados en los cuales comparan el desplazamiento máximo inelástico de la estructura contra el desplazamiento máximo elástico, considerando diferentes valores de la intensidad del sismo. Concluyen que el desplazamiento máximo inelástico no aumenta demasiado cuando se tienen relaciones altas del desplazamiento a la fluencia al desplazamiento máximo elástico, pero que aquél puede incrementarse considerablemente, hasta llegar a la falla, si esas relaciones son bajas.

Vanmarcke y Veneziano (ref 11), también presentan un trabajo en el cual realizan un análisis dinámico probabilístico sobre la respuesta de sistemas simples con comportamiento elastoplástico y bilineal, en el cual incluyen el efecto de la carga gravitacional. Suponen que los

movimientos sísmicos son procesos aleatorios estacionarios, caracterizados por una función de densidad espectral de banda ancha. A partir de modelos analíticos aproximados obtienen resultados respecto a la distribución de probabilidades de la deformación máxima esperada, del factor de ductilidad y del tiempo a la primera excedencia de una deformación plástica dada, para sistemas elastoplásticos. Además, proponen un modelo de Markov para estudiar la respuesta de los sistemas bilineales. De estos últimos resultados extraen probabilidades de falla y el tiempo esperado a la falla para sistemas con efecto  $P-\Delta$ . Utilizando los resultados anteriores, Veneziano (ref 12), estudió la respuesta sísmica de sistemas simples con comportamiento histerético bilineal, suponiendo que los movimientos sísmicos ocurren de acuerdo a un proceso de Poisson, con duración e intensidad aleatorias, pero igual densidad espectral normalizada. Utilizando un modelo analítico aproximado, estudia el progreso aleatorio del daño en sistemas bilineales con segunda pendiente negativa, basándose en conceptos de la teoría de vibraciones aleatorias y de Markov. Encuentra valores del factor de ductilidad esperado y de la probabilidad de falla de tales sistemas. Obtiene resultados aplicables a problemas de análisis y diseño en los cuales las restricciones son impuestas por el factor de ductilidad esperado y la probabilidad de falla.

En 1977, Tani y Soda (ref 13) presentan un trabajo en el cual estudian la influencia del efecto  $P-\Delta$  y de la componente sísmica vertical en la respuesta de una estructura de cortante de un grado de libertad con comportamiento histerético bilineal. Suponen que la excitación sísmica horizontal es un ruido blanco cuasi-estacionario y a la componente vertical la consideran estacionaria. Calculan la respuesta RMS para sistemas elásticos. Para el cálculo de la respuesta de los sistemas

inelásticos utilizan un método de linealización equivalente. Calculan la respuesta de cinco estructuras diferentes, con dos diferentes relaciones de rigideces bilineal. Encuentran que el efecto  $P-\Delta$  debido a la componente vertical del sismo es despreciable, pero que el efecto  $P-\Delta$  debido a la componente horizontal incrementa significativamente la respuesta, siendo este incremento dependiente del desplazamiento de fluencia y de la intensidad del sismo. Takizawa (ref 14), estudió la respuesta a la falla de sistemas simples sujetos a deformación lateral biaxial. Considera un modelo histerético cuadrilineal que toma en cuenta el efecto del agrietamiento, nivel de fluencia, aplastamiento, descascaramiento y degradación. Incluye el efecto  $P-\Delta$  para estudiar la desestabilización del sistema. Calcula la respuesta de un solo sistema ante la acción de tres sismos, variando la intensidad de los mismos. Los resultados que obtiene muestran que el efecto biaxial reduce la capacidad a la falla conforme aumenta la intensidad del sismo y que este efecto es más importante que el efecto de deterioro que sufre la estructura. Además encuentra que el margen de seguridad contra el colapso es muy pequeño cuando se combinan los efectos biaxial, deterioro de la ductilidad y  $P-\Delta$ .

En 1980, Takizawa y Jennings (ref 15), presentaron una formulación matemática para modelar el proceso de falla dinámico para una clase de estructura de concreto reforzado sujeta a un movimiento sísmico intenso. Aproximan un sistema de varios grados de libertad con un sistema equivalente de un solo grado de libertad. Para incluir el efecto  $P-\Delta$  en la ecuación de movimiento hacen una hipótesis en la cual suponen que cada componente de la estructura consiste de una barra rígida con dos resortes rotacionales en sus extremos adyacentes a las juntas. Con esto evitan tratar con la matriz de rigideces geométrica no lineal completa

en la configuración deformada. Para su estudio utilizan una familia de sismos reales de duración intermedia, otra de duración corta pero con aceleraciones máximas altas y dos movimientos artificiales de larga duración. En sus resultados encuentran que el efecto de la componente vertical del sismo es pequeño en la mayoría de los casos de interés práctico. Presentan resultados de la variación de la ductilidad máxima del sistema en función de la relación de la intensidad del sismo al nivel de fluencia de la estructura y para dos casos de valores de la magnitud del efecto P- $\Delta$ . Concluyen que la influencia del efecto P- $\Delta$  en la respuesta es poco significativa para valores bajos de la relación antes mencionada, pero que puede llegar a ser predominante para llevar a la estructura al colapso si se tienen valores altos de esa relación.

Westermo (ref 16), en 1981, publica un trabajo en el que estudia la influencia del efecto P- $\Delta$  en la respuesta sísmica de estructuras continuas lineales. Examina su respuesta ante movimientos estacionarios y transitorios. Efectúa un análisis paramétrico para diferentes valores del periodo de vibración y magnitudes del efecto P- $\Delta$ . Concluye que este efecto disminuye la frecuencia resonante de la respuesta estacionaria, sin ningún cambio significativo en la respuesta dinámica cualitativa de las frecuencias naturales más bajas. Para una excitación transitoria con componentes de frecuencia menores que la primer frecuencia resonante de la estructura, encuentra que el efecto P- $\Delta$  afecta la respuesta de tal forma que esta puede aproximarse corrigiendo únicamente la frecuencia de respuesta a partir de la respuesta sin efecto P- $\Delta$ .

Shi y Lin (ref 17), en 1982, desarrollan un método analítico para calcular las propiedades estadísticas de la respuesta de sistemas simples sometidos a un movimiento sísmico, con especial énfasis en el

efecto de la aceleración vertical del temblor. Modelan a la excitación sísmica como procesos aleatorios gaussianos de amplitud modulada, y suponen una relación fuerza-deformación de la estructura del tipo propuesto por Hata y Shibata. Analizan dos estructuras con diferentes valores en su relación de rigideces antes de la fluencia y después de la fluencia. Encuentran en su estudio que la aceleración vertical del suelo puede tener un efecto importante en la respuesta estructural, semejante al de la fuerza estática gravitacional. Ambos efectos incrementan significativamente la respuesta máxima debida solamente a la aceleración horizontal del suelo. Además, encuentran que la variación en el tiempo de la respuesta media cuadrada depende fuertemente de los valores de los parámetros estructurales (nivel de fluencia, rigidez, altura, etc.), y que las estructuras muy flexibles, con valores pequeños en su relación de rigideces antes de la fluencia y después de la fluencia, pueden presentar grandes deformaciones permanentes al término del movimiento.

En 1985, Ishida y Morisako (ref 18), investigaron el comportamiento al colapso dinámico de estructuras simples elastoplásticas, sometidas a una perturbación armónica y una fuerza estática. Estudia la variación de la amplitud de la excitación armónica bajo la cual el sistema vibra elásticamente dentro de un desplazamiento permisible dado. También, analiza el desplazamiento máximo tolerable en una estructura, cuando actúa una excitación armónica dada, a partir del cual el sistema llegará al colapso al continuar actuando la excitación.

## 1.2 Objetivos.

Aunque todos los estudios anteriores han dado importancia a la obtención de la respuesta máxima del sistema, así como al tiempo a la

falla, aún no se han estudiado las distribuciones de probabilidades de dichas variables.

Este trabajo es un primer paso para la obtención de la distribución de probabilidades de la respuesta máxima (desplazamiento), de sistemas simples con comportamiento elastoplástico, en los cuales se toma en cuenta el efecto  $P-\Delta$ , al ser sometidos a un sismo. Para ello se hace un estudio paramétrico en sistemas de un grado de libertad con comportamiento elastoplástico, estudiando algunos de los parámetros más importantes que influyen en su respuesta. Aunque para la obtención de la respuesta aleatoria se tiene incertidumbre tanto en los parámetros estructurales como en la sollicitación a la que es sometido el sistema, aquí solo se estudiará la segunda, considerándose a los primeros deterministas. El sistema se modela como uno del tipo de cortante y el efecto de la carga gravitacional se toma en cuenta mediante un comportamiento bilineal con segunda pendiente negativa, como se ha hecho en otros estudios (ref 11, 12 y 19). No se toma en cuenta la interacción suelo-estructura, ni los efectos de la componente vertical de la excitación sísmica. Debido a la escasez de información respecto al problema y para poder aprovechar la información de muestras pequeñas, el planteamiento probabilístico se hace utilizando conceptos de análisis bayesiano.

Los resultados que se obtienen se emplean para resolver problemas de diseño de sistemas elastoplásticos a los cuales se les desea incluir el efecto  $P-\Delta$ .

En el capítulo 2 se dan las características y parámetros del sistema estructural que se estudia, así como de los temblores que se utilizan. El capítulo 3 trata del planteamiento probabilístico bayesiano que se realiza y se dan los resultados de los parámetros probabilísticos que

definen la distribución de probabilidades buscada. En el capítulo 4 se analizan los resultados y se desarrolla una aplicación de ellos a problemas de diseño. En el capítulo 5 se presentan dos ejemplos de aplicación.

## 2. GENERALIDADES DEL MODELO Y EL ANALISIS

### 2.1 Modelo estructural

Para estudiar la respuesta de un sistema de un grado de libertad sometido a un movimiento sísmico incluyendo el efecto de la gravedad, se ha seleccionado un modelo estructural en el que se incluyen las características más importantes que influyen en su comportamiento. Esta estructura se idealiza como un sistema de cortante, con la masa concentrada en su nivel de piso, el cual se supone infinitamente rígido comparado con las columnas. Este modelo se discretizó en un sistema masa-resorte (figs 1a y 1b).

El comportamiento del sistema es elastoplástico y se simula suponiendo una relación fuerza-deformación histerética bilineal entre la fuerza cortante y el desplazamiento lateral del piso (fig 2a). Además,

al sistema se le asigna un amortiguamiento viscoso, para tomar en cuenta cualquier otra pérdida de energía, aparte de la disipada mediante la relación fuerza-deformación histerética.

El efecto de segundo orden ( $P-\Delta$ ) se representa mediante el momento adicional generado por la carga vertical al desplazarse la estructura; por lo que respecta a su influencia sobre los desplazamientos laterales, este momento adicional puede descomponerse en dos fuerzas cortantes que forman un par (fig 1c) y que modifican la rigidez de entrepiso original del sistema (ref 19). La figura 2b muestra la relación fuerza-deformación afectada de los efectos de la gravedad. La nueva relación fuerza-deformación del sistema, incluyendo el efecto de la carga vertical, se obtiene restando a la relación original del sistema, la debida a los efectos de la gravedad. Como aquí se estudian sistemas con comportamiento elastoplástico, la segunda pendiente de la relación bilineal resulta negativa al incluir el efecto  $P-\Delta$  (fig 2c). El punto A señalado en la figura 2c, correspondiente a la intersección de la segunda pendiente negativa con el eje de las deformaciones ( $F=0$ ), corresponde al punto de inestabilidad estática (en el sentido de que, para deformaciones mayores es necesario aplicar fuerzas laterales de sentido opuesto a la deformación a fin de poder mantener el equilibrio) y el evento de que se alcance equivale al colapso de la estructura estudiada.

Los resultados que se presentan aquí corresponden a sistemas ya afectados por la carga gravitacional; es decir, la rigidez inicial y el nivel de fluencia son los asociados al sistema modificado por dicho efecto. Esto deberá tenerse en cuenta al realizar estudios que comparen la respuesta de sistemas en los que se tome en cuenta o se ignoren los efectos de carga gravitacional.

En el apéndice A se dan algunos comentarios sobre los diferentes modelos que se utilizan en este trabajo.

## 2.2 Elección de los parámetros estructurales

En estudios anteriores (refs 2 a 18), que se han hecho sobre el efecto P- $\Delta$  se han identificado alguno de los parámetros más importantes que influyen en la respuesta sísmica de una estructura cuando se incluye dicho efecto. Estos parámetros son el periodo de vibración de la estructura, el nivel de fluencia en la relación fuerza-deformación, la altura de la estructura, el porcentaje de amortiguamiento crítico y la intensidad, contenido de frecuencias y duración de la excitación sísmica.

Aquí, se estudia la influencia de los primeros tres parámetros mencionados; no se considera la influencia de las características de los sismos y el porcentaje de amortiguamiento crítico. Para este último se toma un valor único del 5 por ciento en todo el trabajo.

En cuanto a los sismos, los estudios se clasifican de acuerdo con dos tipos de terreno: firme y compresible (blando). De ello se hablará en el siguiente subcapítulo.

Para los estudios con sismos en terreno firme, se escogen tres valores del periodo de vibración que se consideran apropiados para sistemas de un grado de libertad,  $T=1.0, 0.5$  y  $0.25$  seg. Para terreno compresible, sólo se toma un valor del periodo igual a  $1.0$  seg.

La altura de la estructura se toma en forma indirecta con el parámetro  $C_k$ , que es el cociente del valor absoluto de la segunda rigidez,  $k_2$ , de la relación fuerza-deformación bilineal que rige el comportamiento de la estructura, entre el valor de la rigidez inicial,  $k_1$ , de la misma

$$(C_k = k_2/k_1).$$

En la obtención de los resultados de la muestra, los valores de este parámetro se varió desde cero, correspondiente a comportamiento elastoplástico de la estructura sin tomar en cuenta el efecto de la gravedad, hasta 0.2. Los valores intermedios se fueron eligiendo de acuerdo con los resultados parciales de cada muestra en estudio. El valor máximo de 0.2 se seleccionó después de investigar cual límite de  $C_k$  sería más apegado a una estructura real. En la tabla 1, se muestra la relación entre la altura de la estructura y el parámetro  $C_k$ . En ella se dan los valores requeridos de altura para un sistema con un periodo y un valor de  $C_k$  dados. Se ve aún que el valor de  $C_k=0.15$  es muy grande, ya que las alturas necesarias para obtenerlo con los periodos estudiados no se presentan en estructuras reales. El valor de  $C_k=0.15$  fue el que se tomó finalmente como límite en la presentación de resultados para sistemas con periodo de 1.0 seg. Para sistemas con periodo de 0.5 y 0.25 seg el límite de  $C_k$  fue de 0.05 y 0.0125 respectivamente. Se decidió hacer la presentación de los resultados hasta los valores antes mencionados, para cubrir casos extremos y también poder realizar interpolaciones entre valores de  $C_k$  un poco mayores a los considerados típicos.

El nivel de fluencia se toma como un porcentaje del desplazamiento elástico máximo esperado. Se representa por el parámetro  $C_x$ , que es el cociente del desplazamiento máximo esperado de la estructura cuando tiene un comportamiento elástico lineal,  $X_e$ , entre el desplazamiento a la primera fluencia de la estructura con comportamiento elastoplástico,  $X_o$ , por lo que  $C_x = X_e/X_o$ . Para este estudio se han elegido tres valores de  $C_x$  iguales a 2.0, 4.0 y 6.0.

### 2.3 Temblores

En el problema en estudio juega un papel importante la incertidumbre asociada con las fuerzas a las que son sometidas las estructuras cuando son afectadas por un movimiento sísmico. Por su carácter aleatorio, la ocurrencia e intensidad de los sismos son difíciles de predecir, por lo que no es posible saber cual sería la condición más desfavorable que afectaría a la estructura durante su existencia.

Lo anterior nos lleva a utilizar la información de sismos que ya ocurrieron. Es poco probable que un mismo sismo vuelva a repetirse, por lo que es recomendable usar una familia de sismos, los cuales contengan las características de los movimientos que se pueden presentar en el sitio en que se desplante la estructura.

En este trabajo los movimientos sísmicos que se utilizan, se consideran como procesos estocásticos no estacionarios, a diferencia de otros estudios en los cuales se supone a los sismos como procesos estacionarios. La diferencia entre ambas suposiciones es que un proceso aleatorio  $y(t)$  se considera estacionario si para cualquier colección finita de tiempos  $t_k$  y cualquier traslación fija  $\Delta t$ , las variables aleatorias  $y(t_k)$  tienen la misma distribución conjunta que las variables aleatorias  $y(t_k + \Delta t)$ , es decir la distribución conjunta de las variables  $y(t)$  es independiente del tiempo. En cambio en un proceso aleatorio considerado no estacionario, aquella es dependiente de  $t_k$ , así como de  $\Delta t$ . Estudios anteriores (ref 20), han mostrado que una idealización de los sismos como procesos aleatorios no estacionarios, es mas realista y se apega más a las características que presentan los sismos reales, por lo cual se considera que las respuestas que se obtengan de los estudios se aproximará mas a las consideradas reales.

Los estudios se han dividido para dos tipos de terreno: firme y compresible. En el primero los movimientos son moderadamente largos y muy irregulares. En el segundo los movimientos son de larga duración y presentan periodos dominantes de vibración.

Para terreno compresible se utilizan cinco sismos reales registrados en el Distrito Federal. Las características originales de esos temblores se dan en la tabla 2. Estos sismos se normalizaron para que su intensidad, definida como  $\int_0^{\infty} a^2(t) dt$ , siendo  $a(t)$  la aceleración (ref 21), fuese igual para todos. Debido a que el tiempo de duración de los sismos era diferente y también por razones en el uso de tiempo de computadora, algunos de los sismos fueron reducidos en su duración. Los de menor duración (101.92 seg y 108.48 seg) se utilizaron completos; los demás se acortaron a una duración de 105 seg. Se decidió esta reducción por inspección de los acelerogramas. La parte del sismo que se eliminó correspondió a la parte final del registro, donde la intensidad del sismo ya era muy débil. En la mayoría de los casos que se estudiaron, no fue importante la duración del temblor para obtener la respuesta requerida (el desplazamiento máximo de la estructura).

En la tabla 3 se dan las características finales de los sismos ya modificados que se usan en el estudio. En las figuras 3 a 7 se muestran los acelerogramas de los cinco sismos utilizados ya modificados, así como su espectro de respuesta elástico respectivo para un amortiguamiento del 5 por ciento.

Los temblores que se utilizan para terreno firme son un sismo real y cinco artificiales que se generaron mediante un proceso de simulación. El modelo estocástico y el correspondiente procedimiento para simular acelerogramas que se usaron fueron los propuestos por Ruiz, Arias y Sandoval (ref 22), que sirven para generar acelerogramas artificiales

como procesos estocásticos no estacionarios, considerando el contenido de frecuencias y la amplitud del movimiento evolutivos con el tiempo. La densidad espectral de la aceleración se representa como función del cuadrado del logaritmo de la frecuencia circular, con parámetros que varían con el tiempo y que dependen de las energías de los procesos de velocidad, aceleración y derivada de la aceleración.

El temblor que sirvió como base para realizar la simulación fue la componente norte-sur del temblor de El Centro, California, del 18 de mayo de 1940 (fig 8). Se simularon cinco temblores; las figuras 9 a 13 muestran los acelerogramas obtenidos, así como su respectivo espectro de respuesta elástico para un porcentaje de amortiguamiento del 5 por ciento. En la tabla 4 se dan los valores máximos de la aceleración, tiempo de ocurrencia de la misma y duración e intensidad de cada uno de los temblores. El modelo de simulación genera acelerogramas con un alto contenido de frecuencias bajas y no muy buena reproducción de las frecuencias altas. Aún así dichos acelerogramas se consideraron suficientemente buenos para los fines de este trabajo, ya que lo que importa es ver el comportamiento de los sistemas a una cierta familia de sismos y el que el modelo de generación de sismos no reproduzca perfectamente las características del sismo base, no ofrece mayor restricción a los resultados, ya que estos corresponderán a la familia generada, cuyas características generales corresponden a movimientos en terreno firme.

#### 2.4 Método de análisis

El análisis dinámico del modelo estructural se hace resolviendo la ecuación diferencial de equilibrio dinámico

$$M \ddot{X} + C \dot{X} + F_R = - M \ddot{U}$$

donde

$M$  = Masa del sistema actuando en el nivel de piso

$C = 2 \xi \omega M$  = Constante de amortiguamiento

$F_R$  = Fuerza restauradora

$\ddot{X}, \dot{X}$  = Velocidad y aceleración de la masa del piso relativa a la base

$\ddot{U}$  = Aceleración del suelo

$\omega$  = frecuencia del sistema

$\xi$  = porcentaje de amortiguamiento crítico

La fuerza restauradora,  $F_R$ , está dada por la relación fuerza-deformación, que rige el comportamiento histerético bilineal de entrepiso del sistema, incluido el efecto  $P-\Delta$ .

La solución de la ecuación diferencial se resuelve mediante un método de integración paso a paso. Aquí se utiliza el método de Newmark (ref 23), con parámetros  $\beta = 1/4$  y  $\gamma = 1/2$  para evitar cualquier amortiguamiento numérico. El intervalo de integración,  $\Delta t$ , que se usó fue de 0.02 seg para todos los casos.

Durante el cálculo de la respuesta en un intervalo de integración es posible que suceda un cambio en la rigidez de la estructura, debido a su comportamiento bilineal. La forma de tomar en cuenta este cambio es importante para la precisión en los resultados del método. Existen diferentes formas de resolver esto, sin reducir demasiado el intervalo de integración. Aquí se utilizó un procedimiento (ref 24) en el cual se determina el instante en que se produce el cambio en la rigidez del entrepiso. En el apéndice B se desarrolla este procedimiento.

Para el cálculo numérico de la respuesta se utilizó un programa de computadora (ref 24), el cual analiza sistemas de cortante con

comportamiento histerético bilineal de entrepiso. Al programa se le adaptó el método de solución paso a paso de Newmark y el procedimiento para el cálculo del tiempo en que sucede el cambio de rigidez en el comportamiento bilineal, dado en el apéndice B.

### 3. ANALISIS DE INCERTIDUMBRE

#### 3.1 Análisis bayesiano

El objetivo de este estudio es la obtención de la distribución de probabilidades del desplazamiento máximo que sufre un sistema simple, cuando es sometido a un movimiento sísmico y son incluidos los efectos de la carga gravitacional. La incertidumbre aquí es dada únicamente por la naturaleza aleatoria de los temblores. Las propiedades y características del modelo estructural se consideran determinísticas.

Encontrar de manera directa esa distribución, como función de los parámetros estructurales que influyen en el comportamiento del sistema, solo en base a información estadística, es una forma muy larga y costosa, ya que la información requerida tendría que ser suficientemente grande, para lograr una estimación con la precisión adecuada. Eso nos

conduciría a analizar un grán número de casos para hacer el estudio paramétrico y también requeriría un número muy alto de temblores registrado.

Como aquí sólo es posible generar una parte de esa información, la cual sería insuficiente para efectuar un análisis estadístico convencional, se hace uso de los métodos bayesianos de inferencia estadística. El análisis bayesiano es un mecanismo formal, que nos permite incorporar a un proceso basado en un conjunto de hipótesis alternativas, a las cuales se les ha asignado una distribución de probabilidades de ser verdaderas (distribuciones a priori), nueva información resultado de un experimento, para modificarla y obtener probabilidades posteriores de esas hipótesis, dados los resultados del experimento.

En la revisión de trabajos anteriores (refs 3 a 18) sobre el efecto P- $\Delta$  en estructuras bajo carga sísmica, no se encontró ninguna referencia al tipo de distribución de probabilidades que pudiera tener la respuesta del desplazamiento máximo de tales estructuras ante sismo. Además no se dan en ellos resultados claros respecto a la respuesta buscada. Por lo anterior la principal hipótesis que se hace aquí, es sobre la forma de la distribución de probabilidades de esa respuesta, así como de los parámetros que la definen.

Para el análisis se supone una forma de la distribución de probabilidades fundamental de la respuesta normalizada del sistema que se estudia, y no se considera ninguna incertidumbre en la forma supuesta. Así sólo los parámetros probabilísticos que definen a la distribución (en este caso la media y la varianza) son desconocidos. Estos parámetros serán los que contendrán la incertidumbre del problema, y la cual se tomará tratándolos como variables inciertas.

Con lo anterior el problema puede tratarse de la siguiente manera: se dispone de información en la forma de una muestra aleatoria, obtenida de los resultados de un experimento; la muestra consta de  $n$  observaciones,  $x_i$ , consideradas independientes. Si suponemos la forma de la distribución fundamental del proceso,  $f'_X(x)$ , y tenemos una distribución a priori, llamémosla  $f'_\theta(\theta)$ , de los parámetros probabilísticos desconocidos que la definen, por el teorema de Bayes encontramos que (refs 25 y 26)

$$f''_\theta(\theta) = C L(\text{muestra} \mid \theta) f'_\theta(\theta)$$

donde  $f''_\theta(\theta)$  es la nueva distribución de probabilidades o probabilidad a posteriori de los parámetros  $\theta$  dados los resultados de la muestra,  $L(\text{muestra} \mid \theta)$  es la función de verosimilitud de la muestra que proporciona la probabilidad de observar la muestra dado  $\theta$ , y  $C$  es una constante de normalización que asegura que  $f''_\theta(\theta)$  constituye un conjunto apropiado de probabilidades (es decir, que su integral en el dominio de todos los valores posibles de  $\theta$  es igual a la unidad).

### 3.2 Análisis de los resultados de la muestra

Este subcapítulo trata sobre los resultados que se encontraron al obtener la muestra y la forma en que se aplicaron para efectuar el análisis bayesiano.

La variable básica empleada para describir la respuesta de una estructura es  $X$ , que se define como el desplazamiento máximo de la estructura elastoplástica con efectos  $P-\Delta$ , normalizado con respecto al desplazamiento máximo esperado de la estructura con comportamiento elástico y efectos  $P-\Delta$ ,  $X_e$ . A esta relación se le denominó  $C_g$ . La forma de su distribución probabilística se definió arbitrariamente, ya que no

se contaba con información. Se intentó obtener información sobre su forma a partir de los resultados de la muestra, pero eran demasiado pocos para concluir algo. Finalmente se decidió suponer una distribución del tipo lognormal. Entre las razones para esta elección debe recordarse que sólo importan valores absolutos de la respuesta y además que se trata de una distribución muy bien conocida y fácil de manejar. La forma de la distribución se toma independiente de la combinación de valores de los parámetros estructurales estudiados ( $T$ ,  $C_x$ ,  $C_k$  y  $\xi$ ) y estos influirán únicamente en el valor de los parámetros probabilísticos que la definen. Como en este estudio se considera que una estructura falla cuando alcanza el desplazamiento correspondiente al punto de inestabilidad estática, cualquier desplazamiento igual o mayor a él significará para nosotros el colapso de la misma. Por lo tanto la probabilidad de que tal evento suceda será igual a la probabilidad acumulada de que el desplazamiento exceda al punto de falla  $C_{g_f}$ . La información que nos dan los análisis de respuesta es de tipo mixto: si no tiene lugar el colapso, el análisis de respuesta nos proporciona el valor del desplazamiento; en caso contrario, solo nos dice que dicha variable es mayor que  $C_{g_f}$ . En el análisis bayesiano es necesario usar la función de verosimilitud de los resultados de una observación experimental (en este caso, los resultados de los análisis de respuesta) y esta función por lo tanto constará de factores proporcionales a la densidad de probabilidades de cada desplazamiento obtenido y otros proporcionales a la probabilidad de que el desplazamiento sea mayor que  $C_{g_f}$  (fig 14).

En las tablas 5 a 16 se dan los resultados de la muestra (desplazamientos máximos), obtenidos para todas las combinaciones de los valores de los parámetros estructurales que se tomaron, y para cada

promediando los desplazamientos máximos de los desplazamientos elásticos obtenidos con la muestra de sismos utilizados. En la tabla 17 se dan los valores de la respuesta, obtenida para cada uno de los temblores y para los diferentes periodos y tipos de terreno estudiados, así como el valor promedio de cada caso.

La variable  $C_g$ , cuya distribución de probabilidades interesa, depende de las características y propiedades del sistema, dadas en este estudio por los parámetros estructurales  $T$ ,  $C_x$ ,  $C_k$  y  $\xi$ . Por lo tanto los parámetros probabilísticos (media y varianza) de esa distribución dependerán también de ellos, por lo que para conservar el estudio paramétrico, es apropiado expresarlos como función de los mismos. Para encontrar la función que los relaciona, se hace uso de los resultados normalizados de la muestra para proponer una expresión.

Para evitar complicar demasiado el problema en el manejo de los parámetros, se hace un análisis por separado para cada uno de los periodos estudiados. Como el porcentaje de amortiguamiento se mantuvo constante, la media y la varianza quedan únicamente en función de los parámetros  $C_x$  y  $C_k$ . Se supone que la forma de las expresiones es igual para ambos tipos de terreno estudiados.

Los valores que se utilizaron para hallar la expresión de la media se obtuvieron calculando la media de la muestra normalizada de los resultados encontrados para los sismos estudiados y para todas las combinaciones de  $C_x$  y  $C_k$  analizados en la muestra. No se utilizaron los casos en los cuales los sistemas alcanzaron el punto de falla con uno o varios de los sismos. Las figuras 15 a 18 muestran los valores anteriores para cada periodo y tipo de terreno. A esos valores se les ajustó una curva de la forma

$$m_{C_g} = 1.0 + a (C_x - 1)^b / (c + (C_x - 1)^b + d (C_x - 1)^e C_k^f) \quad (1)$$

$m_{C_g}$  toma el valor de 1.0 en el caso en que el comportamiento de la estructura es elástico ( $C_x = 1.0$ ), el segundo miembro de la derecha representa el caso en que el sistema es elastoplástico ( $C_k = 0.0$ ) y el tercer miembro de la derecha toma en cuenta el efecto de la carga vertical.

Para el ajuste del segundo miembro de la derecha en la ecuación 1, se obtuvieron algunos resultados adicionales para sistemas elastoplásticos en terreno firme, con valores de  $C_x$  intermedios entre los valores estudiados. En la tabla 18 se dan los resultados encontrados para estos casos. La figura 19 muestra la variación de los valores medios de la muestra normalizados. Se nota que para valores de  $C_x$  bajos y periodos de 1.0 y 0.5 seg en terreno firme, la respuesta media de la muestra fue menor que la elástica. Esto también sucedió en algunos casos que tenían valores de  $C_k$  pequeños. En el ajuste de la forma de la curva que representa  $m_{C_g}$  no se trató de seguir totalmente este comportamiento, para evitar expresiones más complicadas. La expresión elegida supone que la respuesta elastoplástica con y sin efectos de carga vertical, siempre será mayor que la elástica, al limitar a los coeficientes a tomar únicamente valores positivos. Igual incertidumbre habría en esta expresión como en cualquier otra que se apegara más al comportamiento de la muestra, ya que el tamaño de la muestra que se utiliza es demasiado pequeño.

Para la varianza se consideró razonable suponer que el coeficiente de variación de  $C_g$  era independiente de  $C_x$  y  $C_k$ .

$$V_{C_g} = g \quad (2)$$

Esta suposición simplifica la solución del problema.

En las expresiones que relacionan a  $m_{C_g}$  y  $V_{C_g}$  con los parámetros estructurales  $C_x$  y  $C_k$ , intervienen unos coeficientes (a, b, c, d, e, f y

g) cuyos valores la definen. De esta forma, el análisis bayesiano que se haga estará enfocado a encontrar la distribución de probabilidades de estas nuevas variables. En lo siguiente, a estas variables se les llamará parámetros probabilísticos y se les representará con el símbolo  $\theta$ .

Con lo anterior la aplicación del análisis bayesiano se efectúa del siguiente modo:

Sea la distribución de probabilidades fundamental de  $C_g$

$$f_{C_g}(u) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} u \sigma_{\ln C_g}(\theta)} \text{EXP} \left[ -\frac{1}{2 \sigma_{\ln C_g}^2(\theta)} (\ln u - m_{\ln C_g}(\theta))^2 \right]$$

para  $u < C_{g_f}$  (3a)

y

$$P [C_g > C_{g_f}] = \int_{C_{g_f}}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} u \sigma_{\ln C_g}^2(\theta)} \text{EXP} \left[ -\frac{1}{2 \sigma_{\ln C_g}^2(\theta)} (\ln u - m_{\ln C_g}(\theta))^2 \right] du$$

(3b)

donde

$$m_{\ln C_g}(\theta) = \ln m_{C_g}(\theta) - 1/2 \sigma_{\ln C_g}^2(\theta)$$

(4)

y

$$\sigma_{\ln C_g}^2(\theta) = \ln (v_{C_g}^2(\theta) + 1)$$

(5)

La distribución bayesiana de probabilidades conjunta a posteriori de los parámetros  $\theta$  estará dada por

$$f''_{\theta}(\theta | \text{muestra}) = C L(\text{muestra} | \theta) f'_{\theta}(\theta)$$

(6)

Para un experimento donde las observaciones que forman la muestra constituyen un conjunto de variables aleatorias independientes ( $C_{g_1}, C_{g_2}$

, ...,  $C_g$ ), la función de verosimilitud es

$$L(\theta | C_{g_1}, C_{g_2}, \dots, C_{g_n}) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}r} \prod_{i=1}^r C_{g_i} \sigma_{\ln C_g}(\theta)} \text{EXP} \left[ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \left( \frac{\ln C_{g_i} - m_{\ln C_g}(\theta)}{\sigma_{\ln C_g}(\theta)} \right)^2 \right]$$

$$\left\{ \prod_{j=r+1}^n \left[ \int_{C_{g_{f_j}}}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} u \sigma_{\ln C_g}(\theta)} \text{EXP} \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln u - m_{\ln C_g}(\theta)}{\sigma_{\ln C_g}(\theta)} \right)^2 \right] du \right] \right\}$$

(7)

donde  $i=1, r$  corresponde a los casos de la muestra en que el sistema no llega a la falla, y  $j=r+1, n$  corresponde a los casos en que el sistema alcanza el punto de falla.

Para encontrar  $f''_{\theta}(\theta)$  una vez obtenida la función de verosimilitud de la muestra, solamente nos falta por definir cual sería la distribución de probabilidades conjunta a priori de las mismas.

Como no se tiene conocimiento ó información sobre la posible distribución de probabilidades de cada parámetro  $\theta$ , ni de la manera en que pudieran estar correlacionados, se decidió suponer que tenían cada uno de ellos la misma probabilidad de ocurrencia para todos los valores reales y además se les supuso independientes entre sí. Con esto, la distribución de probabilidades conjunta a priori de las variables  $\theta$  es

$$f'_{\theta}(\theta) = f'(a, b, c, d, e, f, g) = \text{constante}$$

Al suponer lo anterior se hace que la distribución de probabilidades a posteriori dependa únicamente de la información contenida en la muestra,

y su forma sea idéntica a la función de verosimilitud de la muestra. Por lo tanto la distribución a posteriori de  $\theta$  está dada por

$$f''_{\theta}(\theta) = C L(\theta | \text{muestra}) f'_{\theta}(\theta) \propto L(\theta | \text{muestra}) \quad (8)$$

El factor de proporcionalidad será el necesario para que  $f''_{\theta}(\theta)$  sea una función de distribución de probabilidades apropiada. Este factor será el recíproco de

$$\int L(\theta | \text{muestra}) d\theta$$

Una vez obtenida  $f''_{\theta}(\theta)$ , se pueden encontrar descripciones probabilísticas de los parámetros  $\theta$ , tales como la distribución marginal de cada uno de sus elementos y los correspondientes momentos. Además, utilizando esa información se puede calcular a la distribución marginal de  $C_g$ , así como su función acumulada

$$\tilde{f}_{C_g}(u) = \int f_{C_g}(u|\theta) f''_{\theta}(\theta) d\theta \quad (9)$$

$$\tilde{F}_{C_g}(u) = \int F_{C_g}(u|\theta) f''_{\theta}(\theta) d\theta \quad (10)$$

y sus momentos marginales

$$\tilde{m}_{C_g} = \int m_{C_g}(\theta) f''_{\theta}(\theta) d\theta \quad (11)$$

$$\tilde{\sigma}_{C_g}^2 = \int m_{C_g}^2(\theta) (1 + V_{C_g}^2(\theta)) f''_{\theta}(\theta) d\theta - \tilde{m}_{C_g}^2 \quad (12)$$

### 3.3 Evaluación de las distribuciones de probabilidades y momentos

Para obtener la distribución de probabilidades y los momentos de los parámetros  $\theta$  y de la variable  $C_g$ , es necesario hacer una integración múltiple sobre los parámetros probabilísticos  $\theta$ . Encontrar de manera analítica tales expresiones sería muy complicado, dada la forma de los integrandos que intervienen, sobre todo en la distribución de probabilidades conjunta a posteriori de los parámetros  $\theta$  (ec 8). Lo anterior sugeriría usar métodos de Montecarlo de integración numérica para evaluarlos, pero esto requeriría tiempos de cómputo excesivos. Una

manera más sencilla de tratar el problema es discretizándolo.

Al discretizar el problema, manejamos a las variables (parámetros  $\Theta$ ) como una serie de puntos discretos, a los cuales se les asigna una cierta probabilidad de ser ciertos. Los puntos que se tomen, así como el valor de su probabilidad, dependen del intervalo de valores más probables que tengan cada variable y de la posible forma de la distribución de probabilidades que cada una presente. Los puntos de discretización se proponen tomando en cuenta estimaciones puntuales de las variables que interesan.

En este caso, en que a los parámetros  $\Theta$  que se tienen se les ha supuesto una distribución de probabilidades conjunta a priori uniforme en todo el intervalo de valores reales, en congruencia con la hipótesis de ignorancia absoluta previa a la incorporación de datos estadísticos, la distribución a posteriori depende sólo de la función de verosimilitud de la muestra, por lo que en la discretización deberán ser incluidos los valores que proporcionen las verosimilitudes más grandes, para que los resultados reflejen adecuadamente al problema.

Como no es posible cubrir todo el intervalo de valores reales en forma discreta, se presenta el problema de elegir el intervalo de valores que debe tener cada variable  $\Theta$ , pues éste tendrá que cubrir lo mejor posible aquellos que sean más significativos. Además, al definirse cada intervalo es importante saber el número de puntos necesarios para representar convenientemente la distribución probabilística de la variable correspondiente. En este trabajo no se investigó a profundidad la influencia de la discretización de las variables sobre los resultados, sin embargo se hicieron algunos estudios para su elección. La forma como se eligieron los puntos discretos se explica a continuación, pero es recomendable un estudio más detallado.

La discretización de los parámetros se basó en la inspección de los resultados de la muestra. Se supuso que los valores medios de los parámetros probabilísticos  $\theta$ , no estarían muy alejados de los que tomaran al ajustar la expresión propuesta para la media de  $C_g$  (ec 1), a los valores promedios de la muestra mostrados en las figuras 15 a 18. Las curvas mostradas en dichas figuras representan este ajuste.

Los valores obtenidos sirvieron como referencia para hacer algunas pequeñas pruebas, en un intento de ubicar más claramente el intervalo de valores más adecuado de los parámetros  $\theta$ , así como para tener una ligera idea de su distribución. Estas pruebas consistieron en elegir un intervalo de valores para uno de los parámetros, manteniendo fijos para los demás, los valores obtenidos con el ajuste de los promedios de la muestra. Con esos valores supuestos se encontraba la distribución marginal de probabilidades del parámetro del que se había elegido el intervalo. Se analizaba la distribución obtenida y si se encontraba satisfactoria, se aceptaba el intervalo de valores supuesto para ese parámetro, en caso contrario, se modificaba y se volvía a obtener la distribución de probabilidades marginal, repitiéndose este proceso hasta lograr resultados satisfactorios. Este procedimiento se siguió para cada uno de los parámetros  $\theta$ . Basándose en los resultados del procedimiento anterior, la discretización se hizo como sigue: los parámetros a, b, c y d se discretizaron en cuatro puntos. Ellos fueron los que más incertidumbre presentaron por, lo que se tomó un intervalo de valores más amplio para su estudio. Los parámetros e y f se discretizaron en dos puntos cada uno. En las pruebas hechas se vió que sus valores más probables no variaban demasiado dentro de un intervalo pequeño. Del parámetro g se tenía menos información que de cualquier otro, pero se pudo observar de las pruebas realizadas que sus valores más

significativos no abarcaban un intervalo de valores muy grande, concentrándose generalmente muy cerca de un solo valor. Para este parámetro se tomaron tres puntos.

En la tabla 19 se dan los valores discretos de los parámetros, para cada periodo y tipo de suelo diferente que se estudiaron. También, en la figura 20 se muestra en forma gráfica las distribuciones de probabilidades discretas a priori que se tomaron para cada uno de los parámetros y casos estudiados. Estos valores se utilizaron para encontrar la distribución de probabilidades conjunta a posteriori discretizada de los parámetros  $\Theta$  dada por la ecuación 8. A partir de ésta se hicieron estimaciones de la media, varianza y tercer momento central marginales. Las tablas 20 a 23 muestran los valores obtenidos de esas estimaciones, así como de sus distribuciones de probabilidades marginales. En la figura 21 se muestran las distribuciones de probabilidades discretas a posteriori que resultaron después de efectuar el análisis bayesiano.

La misma distribución de probabilidades a posteriori de  $\Theta$  se utiliza para calcular la distribución de probabilidades de la variable  $C_g$ , así como de sus momentos dados por las ecuaciones 9 a 12. En las figuras 22 a 24 se muestra en forma gráfica los valores de la media, varianza y coeficiente de variación de  $C_g$ , para cada periodo y tipo de suelo estudiado. Los resultados se calcularon para valores de  $C_x$  de 1.0 a 6.0 con incrementos de 0.1, y valores de  $C_k$  iguales a 0.0, 0.0125, 0.025, 0.0375, 0.05, 0.075, 0.1, 0.125 y 0.15 para sistemas con periodo de vibración de 1.0 seg en terreno firme; en terreno compresible se tomaron dos valores adicionales de  $C_k$  iguales a 0.00625 y 0.01875. Para sistemas con periodo de vibración de 0.5 seg se calcularon resultados para valores de  $C_k$  iguales a 0.0, 0.0125, 0.025, 0.0375 y 0.05 y para

sistemas con periodo de vibración de 0.25 seg para valores de  $C_k$  de 0.0, 0.00625 y 0.0125.

Los resultados muestran que la media y la varianza de  $C_g$  se incrementan rápidamente conforme aumentan los valores de  $C_k$  y  $C_x$ . Para estructuras en terreno firme se puede notar la influencia del periodo en la respuesta. En general, los valores de la media y la varianza de  $C_g$  tienden a ser mayores conforme el periodo disminuye para un mismo valor de  $C_k$ , aunque para periodos de 1.0 y 0.5 seg con valores de  $C_x$  menores de 3.0 aproximadamente, el valor de la media para  $T=1.0$  seg es un poco mayor que para  $T=0.5$  seg. Lo anterior se explica si consideramos la variación de los espectros de respuesta elásticos de la familia de sismos generados (figs 8 a 13). En ellos se encuentra que en general todos los espectros muestran una parte ascendente para un periodo de vibración de 0.25 seg, teniendo su máximo cercano a los 0.5 seg y mostrando ya un descenso para un periodo de 1.0 seg. Tomando en cuenta lo anterior, cuando el sistema elastoplastico con periodo de vibración de 0.25 seg fluye, empieza a responder con un periodo mas grande que el inicial y que lo acerca al intervalo de periodos de máxima respuesta. Los sistemas con periodo de 0.5 seg en cambio, se encuentran al inicio en el intervalo de periodos de respuesta espectral máxima, con lo que al fluir responden con un periodo más grande que los empieza a alejar de la zona de periodos de respuesta máxima. En el caso de los sistemas con periodo de 1.0 seg, los cuales se encuentran ya en una zona donde las respuestas espectrales van disminuyendo, al fluir se mueven hacia la parte del espectro de respuestas aún menores.

Los resultados muestran que para un mismo periodo el coeficiente de variación es poco sensible a los parámetros  $C_x$  y  $C_k$ , teniendo una variación muy pequeña dentro del intervalo de valores de  $C_x$  y  $C_k$

estudiados. Aunque en la hipótesis a priori se estableció que el coeficiente de variación era independiente de  $C_x$  y  $C_k$ , los resultados de la distribución a posteriori de  $C_g$  muestran una ligera variación de dicho coeficiente con respecto a esos parámetros. Esta dependencia se debe a que para el cálculo del coeficiente de variación a posteriori se emplean las expresiones de la media y la varianza dadas por las ecuaciones 11 y 12. En estas expresiones vemos que la media marginal de  $C_g$  ( $\tilde{m}_{C_g}$ ) es igual al promedio ponderado de la media a priori de  $C_g$  ( $m_{C_g}(\theta)$ ) para los diferentes valores de  $\theta$ . En cambio, en la obtención de la varianza marginal de  $C_g$  ( $\tilde{\sigma}_{C_g}^2$ ), se nota que esta última no es únicamente un promedio ponderado de la varianza a priori de  $C_g$  ( $\sigma_{C_g}^2$ ), sino que también es función de la diferencia cuadrada entre la media a priori y la media a posteriori, ponderada sobre los diferentes valores de  $\theta$ . Es decir, en la varianza marginal del proceso se refleja tanto la incertidumbre del modelo como la de los parámetros que la definen. Por lo tanto, el valor de la varianza estará también afectado por la incertidumbre propia en la definición de la media de  $C_g$  y la misma será menor conforme la cantidad disponible de información sea más grande.

#### 4. ANALISIS DE CONFIABILIDAD

Con la obtención de la media y el coeficiente de variación marginales de la variable aleatoria  $C_g$ , tenemos finalmente definido el modelo probabilístico con el que se representa la respuesta máxima (desplazamiento) de un sistema elastoplástico, incluido el efecto de la carga vertical ( $P-\Delta$ ).

El análisis y aplicación de los resultados anteriores a problemas de diseño, depende del tipo de problema que se quiera resolver.

La adopción de un diseño específico estará influenciado por razones de costo y beneficio. Estos pueden tomarse en el diseño a través de especificaciones ó restricciones relativas al comportamiento del sistema, tales como su probabilidad de falla y la deformación máxima permitida asociada a una cierta probabilidad de que aquella sea excedida.

#### 4.1 Aproximación de resultados

Para el cálculo de los valores de la probabilidad de falla ó la probabilidad de excedencia para un problema en particular, es necesario efectuar la integral del segundo miembro de la ecuación 10 para evaluar  $\tilde{F}_{C_g}(C_g)$ . La integral citada es múltiple y debe tomarse con respecto a todos los valores de  $\theta$  discretizados. Efectuar esta integral para todos los casos que se querían presentar, significaba un gran gasto en tiempo de computadora, por lo que se buscó una forma más sencilla de evaluarla.

La solución analítica de la integral que aparece en la ecuación 10 es difícil, aún utilizando formas aproximadas de las funciones que intervienen. Por lo anterior, se estudio que tanto variaba la forma de la distribución de probabilidades acumulada a posteriori de  $C_g$ ,  $\tilde{F}_{C_g}(C_g)$ , de la supuesta a priori,  $F_{C_g}(C_g)$ . Para ello se calcularon con la ecuación 10 las probabilidades de excedencia,  $P_{e_Q}$ , para los casos de sistemas en terreno firme y compresible, para cada periodo estudiado y para valores de  $C_x$  de 1.5 a 6.0 con incrementos de 0.5 y valores de  $C_k$  iguales a 0.0, 0.025 y 0.05. Los resultados se comparan con los obtenidos al suponer a la distribución de probabilidades acumulada a posteriori,  $\tilde{F}_{C_g}(C_g)$ , de la misma forma que  $F_{C_g}(C_g)$ , pero con parámetros probabilísticos de media y varianza iguales a los obtenidos por las ecuaciones 11 y 12 (a posteriori).

Las tablas 24 a 27 muestran algunos de los resultados anteriores. Se ve que la suposición propuesta proporciona resultados que tienen una buena aproximación. Las diferencias más grandes en porcentaje respecto a la ecuación 10 se encontraron para sistemas en terreno compresible y no son mayores que 2 por ciento. Para terreno firme no rebasaron el uno por ciento para valores de  $C_x$  mayores de 1.5, aunque para sistemas con

periodo de 1.0 seg, en que se estudiaron valores de  $C_x$  menores de 1.5, se encontraron diferencias hasta de 3.5 por ciento. Se tuvo igual comportamiento en los tres valores de  $C_k$  estudiados.

Con base en esos resultados se consideró que la suposición de  $\tilde{F}_{C_g}(C_g)$  era adecuada, y se utilizó esa aproximación para el resto de los estudios.

#### 4.2 Probabilidad de falla

Un factor importante en el comportamiento de una estructura es la probabilidad de que llegue a fallar.

El criterio que se toma aquí para considerar que un sistema simple con efectos de segundo orden falla, es el de que alcance la deformación marcada con el punto A en la figura 2c. Este punto corresponde a la llamada condición de inestabilidad estática, ya que en un caso de carga estática cuando se alcance esa deformación, la fuerza restauradora que se opone el desplazamiento del sistema se anula, debido a que el momento adicional generado por la carga vertical y el desplazamiento de entrepiso es igual al máximo que puede oponer la rigidez del sistema. En un caso dinámico puede suceder que el movimiento de la fuerza excitadora logre regresar al sistema a un estado estable, pero eso es poco probable que ocurra. En todos los casos estudiados aquí, aquellos que alcanzaron ese punto se volvieron inestables.

El valor de  $C_g$  para el cual un sistema falla está dado por la expresión

$$C_{g_f} = (1 + 1/C_k) 1/C_x \quad (13)$$

En sistemas donde no existen requisitos limitantes en el desplazamiento máximo permitido, la probabilidad de alcanzar este punto

es:

$$P_f = 1 - \int_0^{C_{g_f}} f_{C_g}(C_g) dC_g = 1 - \tilde{F}_{C_g}(C_{g_f}) \quad (14)$$

Las figuras 25 a 27 muestran en forma gráfica la relación entre la probabilidad de falla de un sistema con efectos P- $\Delta$  y los parámetros estructurales  $C_x$  y  $C_k$ , de sistemas en terreno firme para los distintos periodos de vibración estudiados. En la figura 28 se muestra la misma relación para sistemas en terreno compresible.

#### 4.3 Probabilidad de excedencia de un desplazamiento dado

Es posible que antes de que una estructura llegue a la falla, tal como se define aquí, necesite soportar desplazamientos muy grandes. En sistemas elastoplásticos como los que aquí se estudian, lo anterior significa que los mismos deban tener que desarrollar ductilidades muy grandes a partir de la deformación a la primera fluencia. En sistemas donde los requisitos de ductilidad y desplazamiento no están limitados y el sistema tiene la capacidad para desarrollarlos, no existe ningún problema, pero en caso contrario, su análisis y diseño estará restringido por la capacidad de deformación que se pueda obtener de él.

Cuando se diseña adecuadamente un sistema, para que sea capaz de desarrollar un cierto factor de ductilidad, es de interés conocer la probabilidad de que durante su tiempo de servicio, se presenten condiciones en las cuales se exceda el desplazamiento máximo correspondiente a ese factor de ductilidad, es decir, interesa saber la confiabilidad del sistema para las condiciones para las que fue diseñado.

Haciendo uso de la función de distribución acumulada de  $C_g$  (ec 10), se puede calcular esa probabilidad. Para un sistema con cualquier

combinación de valores de  $C_x$ ,  $C_k$  y ductilidad,  $Q$ , dados, el valor de  $C_g$  correspondiente en la distribución de probabilidades del desplazamiento máximo normalizado es

$$C_{gQ} = Q/C_x \quad (15)$$

y la probabilidad de exceder el valor de  $C_{gQ}$  será

$$P_{eQ} = 1 - \tilde{F}_{C_g}(C_{gQ}) \quad (16)$$

En las figuras 29 a 56 se da la probabilidad de que un sistema exceda un desplazamiento dado, en función de su factor de ductilidad y de los parámetros  $C_x$  y  $C_k$ . Las figuras 29 a 45 corresponden a sistemas en terreno firme, con periodos de vibración de 1.0, 0.5 y 0.25 seg. Cada curva en cada gráfica pertenece a un valor distinto de  $Q$  que va de 1.0 a 6.0, con incrementos de 0.5. Cada figura representa a un valor distinto de  $C_k$ , incluyendo el caso elastoplástico en que no se toma en cuenta el efecto  $P-\Delta$ , pero la estructura tiene el mismo periodo de vibración que las estructuras anteriores afectadas por la carga gravitacional. Las figuras 46 a 56 corresponden a sistemas desplantados en terreno compresible para un periodo de vibración de 1.0 seg.

#### 4.4 Aplicaciones a problemas de diseño

Los resultados obtenidos son de utilidad para la solución de problemas en los que se quiere diseñar sistemas simples elastoplásticos. En el diseño de estos sistemas intervienen diversas variables que puede ser modificadas para obtener una solución apropiada, de acuerdo a las restricciones que se le quieran dar a su comportamiento estructural, que como se dijo, son dadas por criterios de utilidad. Entre tales variables se encuentran la rigidez, la masa, la altura, el amortiguamiento y el nivel de fluencia del sistema. Una aplicación directa de los resultados

se da en un ejemplo en el capítulo 5.

Comúnmente en la práctica, las estructuras se diseñan por sismo sin tomar en cuenta el efecto  $P-\Delta$ , ó incluyéndolo de manera indirecta aplicando criterios de análisis estático. En este trabajo se establece un método por medio del cual se puede tomar en cuenta ese efecto, modificando únicamente una de las variables consideradas de diseño del sistema.

El problema que se resuelve es el siguiente: si se tiene diseñado un sistema con comportamiento elastoplástico para que cumpla ciertas restricciones en su comportamiento estructural y en su diseño no se tomó en cuenta el efecto  $P-\Delta$ , encontrar como modificar ese diseño para tomar en cuenta ese efecto, de manera que dichas restricciones se conserven.

Para la obtención del nuevo sistema que incluya el efecto  $P-\Delta$ , se pueden modificar una o varias de las variables de diseño para satisfacer las condiciones requeridas. Sin embargo, en la práctica algunas de ellas no quedan completamente bajo el control del diseñador, pues son impuestas por los mismos fines para los que se construye la estructura, por lo que en muchas ocasiones no pueden modificarse, en tal caso se encontrarían la masa y la altura. Otras, como el amortiguamiento, son difíciles de controlar directa y fácilmente. La rigidez y el nivel de fluencia del sistema son más fáciles de modificar durante el proceso de análisis y diseño y pueden modificarse sin que se altere demasiado la funcionalidad de la estructura, hasta lograr un diseño satisfactorio.

De acuerdo con lo anterior, el problema lo podemos resolver modificando alguna de las dos variables de diseño mencionada o ambas. Modificar la rigidez del sistema, ya sea cambiando las dimensiones de los elementos estructurales o el material de construcción, implicaría modificar el periodo de vibración, y los resultados que se tienen no

permiten realizar eso fácilmente pues nos se estudian suficientes valores del período de vibración como para proponer alguna interpolación sobre él. Aquí se optó por modificar únicamente el nivel de fluencia del sistema, conservando fija la rigidez, pues los resultados obtenidos hasta el momento se prestan mejor a proceder de esa manera.

La restricción que se establece aquí en relación con el comportamiento estructural del sistema elastoplástico, se refiere a la probabilidad que tiene el sistema de exceder un desplazamiento permitido. Debido a la forma en que se obtuvieron los resultados en este estudio, no se cuenta con esa información de manera directa. Por eso, para hacer uso de ellos, la restricción que se impone al sistema se basa en un sistema elastoplástico de referencia, el cual tiene una rigidez inicial,  $k_1$ , igual a la rigidez modificada por el efecto  $P-\Delta$  del sistema elastoplástico original

$$k_1 = k_0 - W/H \quad (17)$$

En la expresión anterior,  $k_0$  es la rigidez inicial del sistema elastoplástico original. El nivel de fluencia del sistema de referencia será el mismo que el del sistema original.

De esta manera, el nuevo sistema elastoplástico con el efecto  $P-\Delta$  incluido, deberá cumplir con la restricción de tener la misma probabilidad de exceder un desplazamiento permitido que la del nuevo sistema elastoplástico de referencia para el mismo desplazamiento (fig 57).

Así, para encontrar el nuevo valor del nivel de fluencia del sistema con efecto  $P-\Delta$ , primero se obtienen las propiedades del sistema elastoplástico de referencia. Estas estarán dadas por su rigidez inicial,  $k_1$  (obtenida con la ecuación 17), y el valor del nivel de fluencia  $X_0$ . Con ellos se calculan los parámetros  $C_k$  y  $C_{x_r}$ . El

desplazamiento máximo elástico esperado para el cálculo de  $C_{x_r}$ ,  $X_{e_r}$ , corresponderá al del sistema de referencia con periodo de vibración

$$T_1 = 2 \pi / \sqrt{(k_o - W/H) / M} \quad (18)$$

Con los valores de  $C_{x_r}$  y  $C_k$ , así como con el valor del desplazamiento permitido, la solución del problema se puede encontrar como se explica más adelante. Debido a que en este trabajo sólo se tienen resultados para sistemas con periodo de vibración modificado por efecto de la carga vertical de 1.0, 0.5 y 0.25 seg para sistemas en terreno firme y 1.0 seg para sistemas en terreno compresible, la forma de encontrar el nuevo valor del nivel de fluencia buscado, con base en los resultados, se ilustrará para sistemas que tengan alguno de esos periodos de vibración.

Con los datos del sistema elastoplástico de referencia y utilizando los resultados de probabilidad de excedencia dados en la figuras 29 a 56, podemos encontrar en las gráficas correspondientes al periodo de vibración del sistema de interés y para un valor de  $C_k=0.0$ , la probabilidad,  $P_e$ , que se tiene de exceder el desplazamiento permitido,  $X_p = Q_r X_o$ , siendo  $Q_r$  el factor de ductilidad correspondiente al desplazamiento permitido en el sistema de referencia.

En la gráfica se busca el punto de intersección del valor de  $C_{x_r}$  con  $Q_r$  y se encuentra el valor de  $P_e$ . A continuación con el valor de  $P_e$  se localiza en la gráfica correspondiente al valor de  $C_k$  que tenga el sistema, el valor de  $C_x$ , al que llamaremos  $C_{x_g}$ , que necesita tomar el nuevo sistema de tal forma que tenga la misma probabilidad de exceder  $Q_r X_o$ . En la gráfica del  $C_k$  estudiado, se encuentra que para la probabilidad buscada,  $P_e$ , se tienen varias combinaciones de valores de  $C_{x_g}$  y  $Q$  que cumple con ella (fig 58). La combinación correcta es aquella que satisfaga la igualdad

$$Q_g / C_{x_g} = Q_r / C_{x_r} \quad (19)$$

ya que cada combinación de  $Q_g$  (ductilidad correspondiente al nuevo sistema con efecto P- $\Delta$ ) y  $C_{x_g}$  corresponden a un valor de desplazamiento  $Q_g X_g$ , en donde

$$X_g = X_e / C_{x_g} \quad (20)$$

y aquella que sea igual a  $Q_r X_o$  cumplirá con el desplazamiento permitido que se quiere. Como las curvas de las figuras 29 a 56 corresponden a valores discretos de  $C_x$  y  $Q$ , los valores intermedios con respecto a  $Q$  deben obtenerse por interpolación

El resultado que se encuentra de  $C_x$  será para un sistema con características modificadas por el efecto P- $\Delta$ , por lo cual tendrá que transformarse al de un sistema elastoplástico que no incluya dicho efecto. La rigidez de ese sistema será la misma que la del sistema elastoplástico original y su deformación de fluencia igual a  $X_g$ .

En los resultados anteriores se debe verificar si el sistema no alcanza el punto de colapso, antes de alcanzar el desplazamiento permitido. Esto se puede verificar calculando el desplazamiento de colapso con la expresión

$$X_f = X_g (1 + 1/C_x) \quad (21)$$

y comparándolo con el desplazamiento permitido. También puede suceder que el desplazamiento de fluencia,  $X_g$ , que se calcule sea mayor que el desplazamiento máximo elástico esperado para el nuevo sistema, con lo que obtendríamos un sistema con una cierta probabilidad de tener un comportamiento elástico.

Como una aplicación de lo anterior, en este trabajo se calculó en forma sistemática el valor de  $C_{x_g}$  necesario para sistemas elastoplásticos con periodos de vibración modificados por efecto de la carga vertical iguales a los valores estudiados aquí (1.0, 0.5 y 0.25 seg) y para distintos valores de  $C_x$  y  $C_k$  del sistema elastoplástico de

referencia. Se estudiaron sistemas que presentaban valores de  $C_x$  de 1.5 a 6.0, con incrementos de 0.5 y para todos los valores de  $C_k$  para los que se tenían resultados. El desplazamiento permitido se tomó en función del factor de ductilidad  $Q$ , cuyos valores se tomaron desde 1.0 hasta 6.0 con incrementos de 0.5. Los cálculos se hicieron con un programa de computadora utilizando los resultados de las figuras 29 a 56 e interpolando linealmente para evaluar valores intermedios.

En las tablas 28 a 31 se muestran algunos de los resultados obtenidos, para los distintos tipos de terreno y periodos estudiados. De estos resultados y todos los demás obtenidos que no se presentan en este trabajo, se encuentra que para un valor de  $C_x$  dado del sistema elastoplástico de referencia, el nuevo valor de  $C_{x_g}$  que se obtiene al tomar en cuenta el efecto  $P-\Delta$  es casi el mismo para cualquier valor de  $Q$  que se tome. La explicación a esto se apoya en dos razones. Una es la aproximación que tiene la distribución de probabilidades acumulada  $\tilde{F}_{C_g}(C_g)$ , con la distribución acumulada lognormal, como se vió en el subcapítulo anterior. La otra es que para un mismo periodo de vibración, el coeficiente de variación de  $C_g$ ,  $\tilde{V}_{C_g}$ , se mantiene casi constante con respecto a los parámetros  $C_x$  y  $C_k$ , en el rango de valores estudiados (fig 24). Así, conservando la suposición de que la forma de  $\tilde{F}_{C_g}(C_g)$  es del tipo lognormal, con parámetros media y varianza calculados por la ecuaciones 11 y 12, tenemos que una solución aproximada del problema es resolver la igualdad

$$F_{LN} \frac{\ln(Q_r/C_{x_r}) - \tilde{m}_{\ln C_g}(C_{x_r}, C_k=0.0)}{\tilde{\sigma}_{\ln C_g}(C_{x_r}, C_k=0.0)} = F_{LN} \frac{\ln(Q_g/C_{x_g}) - \tilde{m}_{\ln C_g}(C_{x_g}, C_k)}{\tilde{\sigma}_{\ln C_g}(C_{x_g}, C_k)} \quad (22)$$

donde  $F_{LN}(\cdot)$  es la función de distribución de probabilidades acumulada

lognormal. Para que esa igualdad se cumpla

$$\frac{\ln(Q_r/C_{x_r}) - \tilde{m}_{\ln C_g}(C_{x_r}, C_k=0.0)}{\tilde{\sigma}_{\ln C_g}(C_{x_r}, C_k=0.0)} = \frac{\ln(Q_g/C_{x_g}) - \tilde{m}_{\ln C_g}(C_{x_g}, C_k)}{\tilde{\sigma}_{\ln C_g}(C_{x_g}, C_k)} \quad (23)$$

como

$$\tilde{\sigma}_{\ln C_g}^2 = \ln(\tilde{V}_{C_g}^2 + 1) \quad (24)$$

y considerando que el valor de  $\tilde{V}_{C_g}$ , es casi el mismo para cualquier valor de  $C_x$  y  $C_k$  del sistema, tenemos que

$$\ln(Q_r/C_{x_r}) - \tilde{m}_{\ln C_g}(C_{x_r}, C_k=0.0) \pm \ln(Q_g/C_{x_g}) - \tilde{m}_{\ln C_g}(C_{x_g}, C_k) \quad (25)$$

Puesto que se busca que los desplazamientos sean iguales

$$\tilde{m}_{\ln C_g}(C_{x_r}, C_k=0.0) = \tilde{m}_{\ln C_g}(C_{x_g}, C_k) \quad (26)$$

La expresión anterior no es función del desplazamiento, por lo que el valor de  $C_{x_g}$  calculado es independiente del valor de  $Q$  que se quiere. Tratando el problema de esta forma, se puede encontrar el valor de  $C_{x_g}$  en forma aproximada por medio de las gráficas de la figura 22, que nos muestra el valor de la media marginal de  $C_g$ .

En algunos de los resultados que se dan en las tablas 28 a 31, los valores de  $C_{x_g}$  calculados para valores de  $Q$  pequeños, difieren un poco de los demás. Esto es debido a la aproximación en la interpolación que se utilizó para obtenerlos.

En las tablas 32 a 35 se dan los valores finales de  $C_{x_g}$  que se tomaron para cada caso. En las figuras 59 a 62 se presentan estos mismos resultados en forma gráfica, pero mostrando la relación de  $C_{x_r}/C_{x_g}$  con respecto a  $C_{x_r}$ , para los distintos valores de  $C_k$  estudiados. Los resultados muestran como la relación de  $C_{x_r}/C_{x_g}$  es mayor para periodos menores cuando se tiene una misma relación de  $C_k$ . Para sistemas con periodo de 0.25 seg en terreno firme y 1.0 seg en terreno compresible,

esta relación generalmente crece monotónicamente al incrementarse el valor de  $C_{x_r}$ . Este aumento es más rápido cuanto mayor es el valor de la relación de  $C_k$ . En el caso de los sistemas con periodo de 1.0 y 0.5 seg en terreno firme, se encuentra que para valores de  $C_{x_r}$  menores de 2.0, las estructuras tienen un rápido incremento en la relación de  $C_{x_r}/C_{x_g}$ , disminuyendo para valores de  $C_{x_r}$  entre 2.0 y 3.0, a partir del cual se presenta ya un incremento continuo al igual que para los sistemas con periodo de 0.25 seg. Este efecto es más pronunciado para los sistemas con periodo de 0.5 seg. Analizando los resultados anteriores en función de la variación de la respuesta media marginal de  $C_x$ , parámetro que presenta mayor influencia en la forma de la distribución de probabilidades de la respuesta, se encuentra que para los casos de sistemas con periodo de 0.25 seg en terreno firme y 1.0 seg en terreno compresible, la variación de la respuesta media para los diferentes valores de  $C_k$  incluido  $C_k=0.0$  (figs 22c y 22d) muestra en el intervalo de valores de  $C_x$  menores que 2.0, diferencias no muy grandes en el valor de las  $C_x$  correspondientes a cada  $C_k$ , para un mismo valor de  $m_{C_g}$ . En cambio en los sistemas con periodo de 1.0 y 0.5 seg en terreno firme, los sistemas con relación de  $C_k$  igual a 0.0 presentan una rápida disminución en la respuesta media (figs 22a y 22b), teniendo un valor de casi 1.0 a partir de relaciones de  $C_x$  menores que 2.0, mientras que para relaciones mayores de cero esta respuesta, aunque también es baja (valores cercanos a 1.0) se tiene una disminución menos rápida para valores de  $C_x$  menores que 2.0, de tal forma que para un mismo valor de  $m_{C_g}$ , las diferencias entre los valores correspondientes de  $C_x$  respecto al que se tiene para  $C_k=0.0$ , son más pronunciadas. Lo anterior provoca que para relaciones de  $C_{x_r}$  alrededor de 2.0 la disminución necesaria en la relación de  $C_x$ , para tomar en cuenta el efecto P- $\Delta$  ( $C_k>0.0$ ), respecto

a la del sistema elastoplástico de referencia ( $C_k=0.0$ ) y obtener la misma probabilidad de exceder un desplazamiento dado, sea mayor en proporción para las estructuras con periodo de 1.0 y 0.5 seg y que para valores de  $C_x$  mayores que 2.0 esta proporción muestre una disminución durante un intervalo para después mostrar ya un incremento continuo.

Debido al intervalo de valores que se estudió de  $C_x$ ,  $C_k$  y  $Q$ , ningún caso llegó al punto de falla antes de alcanzar el desplazamiento requerido. Al aplicar los resultados deberá tomarse en cuenta si el punto de falla es excedido cuando se tengan valores de  $Q$  altos. Para sistemas con valores de  $C_x$  y  $C_k$  intermedios entre los estudiados, se pueden interpolar los resultados.

## 5. EJEMPLOS DE APLICACION.

En este capítulo se presentan unos ejemplos de aplicación de los resultados anteriores. Primero se verá un problema en el cual se apliquen únicamente los resultados obtenidos sobre la distribución de probabilidades de la respuesta máxima normalizada, haciendo uso también de los valores de probabilidad de falla y probabilidad de excedencia calculadas. Después se verá un ejemplo en el que se utilice la solución de diseño dada en el subcapítulo 4.4.

### 5.1 Ejemplo I

Se quiere diseñar un sistema en el cual solo se conocen la masa y la altura, obtenidas a partir del uso que se le pretende dar al mismo. Por condiciones de servicio se requiere acotar la probabilidad de que el

desplazamiento lateral máximo del sistema ante un sismo sobrepase un valor estipulado. Se pide también que la probabilidad de falla del sistema sea menor que un valor dado. Se buscarán valores de la rigidez del sistema y de su nivel de fluencia, así como el factor de ductilidad necesario para evitar que se exceda la capacidad de deformación.

El sistema tiene una masa de  $4 \text{ ton s}^2/\text{m}$  y una altura de 7 m. El desplazamiento máximo permitido es de 0.016 veces la altura del sistema, con una probabilidad de excederlo menor o igual a 0.05. La probabilidad de falla deberá ser menor que 0.001.

Para la solución del ejemplo se estudian las características que deberán tener tres sistemas con diferente periodo de vibración. Los periodos que se toman son los correspondientes a aquellos para los cuales el sistema con el efecto P- $\Delta$  incluido proporcione periodos de 1.0, 0.5 y 0.25 seg. En la tabla 36 se dan los valores de la rigidez lateral inicial,  $k_1$ , que tiene cada sistema de acuerdo con su periodo de vibración y su masa. La segunda rigidez,  $k_2$ , por efecto de la carga vertical es la misma en todos los casos e igual a  $W/H$ . Con lo anterior, para cada sistema propuesto se obtiene el valor de la relación  $C_k$  a partir de  $k_1$  y  $k_2$  (tabla 36). El desplazamiento máximo permitido es igual a

$$X_{\max} = 0.016 H = 0.016 (700) = 11.2 \text{ cm}$$

El desplazamiento elástico máximo esperado para cada sistema, con el efecto P- $\Delta$  incluido,  $X_e$ , se encuentra en la tabla 17.

Para estos sistemas se pueden obtener los valores de  $C_x$  y  $Q$  que se requieren para cumplir las restricciones impuestas, utilizando las gráficas de las figuras 25 a 56 de probabilidades de falla y excedencia. Con las figuras 25 a 28 se encuentra el valor máximo de  $C_x$  que puede tener cada sistema para que su probabilidad de falla no sea mayor que

0.001. Para esto se toma la figura correspondiente al periodo de vibración estudiado y con el valor de la probabilidad de falla y el  $C_k$  que se obtuvo, se encuentra el valor de  $C_x$  que le corresponde. Cuando el valor de  $C_k$  no sea uno de los presentados en las gráficas puede calcularse interpolando linealmente con el logaritmo de  $C_k$ . El valor de  $C_x$  encontrado nos da un límite superior. En la tabla 36 se presentan los valores obtenidos para cada caso.

Para calcular el valor de  $C_x$  y  $Q$  necesarios para que el sistema cumpla con la condición del desplazamiento máximo permitido, se utilizan la figuras 29 a 56. Para cada caso de periodo estudiado se toman las gráficas correspondientes a ese periodo y al valor de  $C_k$  que se tiene. Se encuentra que para la probabilidad de excedencia dada se tienen muchas combinaciones de  $C_x$  y  $Q$  que la cumplen (fig 58). Los valores de  $C_x$  y  $Q$  correctos son aquellos que proporcionen el desplazamiento máximo buscado, o sea deben cumplir la relación

$$X_{\max} = (Q/C_x) X_e$$

donde  $X_{\max}$  es el desplazamiento máximo permitido y  $X_e$  es el desplazamiento elástico máximo esperado del sistema con su rigidez corregida por efecto P- $\Delta$ , ( $k_1$ ).

Al calcular lo anterior se puede presentar, tal como en el ejemplo que se tiene, que el valor de  $C_k$  que tiene un sistema dado no coincide necesariamente con alguno de los que se estudiaron. En tal caso el valor de  $C_x$  se puede calcular por interpolación a partir de los valores que se obtengan para valores de  $C_k$  entre los cuales este el  $C_k$  de interés. Una interpolación lineal con el logaritmo de  $C_k$  proporciona resultados suficientemente aproximados a los exactos.

Si con los resultados que se dan aquí, el  $C_k$  de interés se encuentra entre un valor de  $C_k$  para el cual es posible obtener el valor de  $C_x$  y

otro para el cual no se presenten resultados suficientes para calcularlo, la interpolación no se podrá realizar, pero se podría tratar de realizar una extrapolación si el valor de  $C_k$  que interesa se encuentra suficientemente cerca del conjunto de valores estudiados. Si tampoco la extrapolación se juzga adecuada puede procederse como se explica a continuación.

Calcúlese el valor de  $C_x$  que cumpla con la probabilidad que se quiere de exceder el desplazamiento máximo, para cualquier valor de  $C_k$  que se quiera elegir. A partir de esta pareja de valores calculada y elegida ( $C_x$  y  $C_k$ ) se calcula el correspondiente valor medio de  $C_g$ ,  $m_{C_g}$ , (fig 22). Con este valor se resuelve la ecuación no lineal

$$m_{C_g} = 1.0 + a(C_x - 1)^b / (c + (C_x - 1)^b) + d(C_x - 1)^e C_k^f \quad (1)$$

para  $C_x$ , donde a, b, c, d, e y f son los valores medios de las variables que definen la media de la respuesta máxima normalizada para el sistema con el periodo estudiado correspondiente y el valor de  $C_k$  corresponde al del  $C_k$  buscado para ese periodo.

El criterio anterior resulta del hecho de que si mantenemos la aproximación de la distribución lognormal con media y coeficiente de variación iguales a los marginales obtenidos con el análisis bayesiano, para una misma probabilidad de excedencia se cumple la misma igualdad dada por la ecuación 26 en el subcapítulo 4.4 para

$$\tilde{m}_{\ln C_g}(C_x, C_k) \text{ conocido} \cong \tilde{m}_{\ln C_g}(C_x, C_k) \text{ buscado} \quad (27)$$

por lo tanto la solución de esta ecuación nos proporciona el valor de  $C_x$  buscado.

En la tabla 36 se dan los resultados que se obtuvieron para el ejemplo dado. Se supusieron sistemas desplantados en los dos tipos de terreno estudiados (firme y compresible). Para el sistema con periodo de 0.25 seg (con efecto P-Δ incluido) en terreno firme no era posible calcular

el valor de  $C_x$  con las gráficas que se obtuvieron y que se presentan en las figuras 43 a 45, ya que ese valor cae fuera del rango de valores que se cubren en dichas figuras, por lo cual se obtuvieron puntos adicionales que permitieran calcularlo. Estos puntos adicionales no son incluidos en los resultados que se presentan aquí. En la misma tabla 36 se muestran los valores de  $C_k$ , con su respectivo valor de  $C_x$  calculado, que se utilizaron para interpolar el valor de  $C_k$  buscado en cada caso.

Las características de las estructuras dadas en la tabla 36 corresponden a las de un sistema con efecto P- $\Delta$  incluido, por lo cual deberán ser transformadas a las características del sistema original que las produce. Así, la rigidez del sistema original será

$$k_o = k_1 + W/H \quad (28)$$

el nivel de fluencia será el mismo e igual a

$$X_o = X_e / C_{x_g}$$

en donde  $X_e$  es el desplazamiento elástico máximo esperado para el sistema con efecto P- $\Delta$  y  $C_{x_g}$  el valor calculado para que tal sistema cumpla con las restricciones de desplazamiento máximo y colapso. En la tabla 37 se dan los resultados finales que se obtienen. En la figura 63 se presenta un diagrama de flujo en donde se dan los diversos pasos que son necesarios realizar para resolver este tipo de problemas.

De acuerdo con las tablas 36 y 37, para el sistema con periodo de vibración de 1.0 seg desplantado en terreno firme se encuentra que no es posible satisfacer los requisitos pedidos, ya que ningún valor de  $C_x$  cumple con la probabilidad de excedencia pedida para el desplazamiento máximo permitido. Ni siquiera el caso elástico lo satisface ya que el desplazamiento elástico máximo esperado es mayor que el permitido (12.52 cm).

Para los sistemas con periodo de 0.5 y 0.25 seg en terreno firme se

tienen resultados que pueden aplicarse para su diseño. La elección de uno de ellos dependerá de su costo y factibilidad estructural. En el sistema con periodo de 0.25 seg se ve que se requiere una ductilidad muy alta para que el sistema alcance el desplazamiento máximo permitido (71.84). Si no es posible desarrollar tal ductilidad sería necesario disminuir el valor de  $C_x$ .

## 5.2 Ejemplo II

En este ejemplo se verá la aplicación del método de diseño dado en el subcapítulo 4.4.

En este problema se tiene una estructura elastoplástica, la cual se ha diseñado sin tomar en cuenta el efecto P- $\Delta$ . Este sistema tiene una masa de 2 ton s<sup>2</sup>/m, una rigidez inicial igual a 319.75 ton/m, una altura de 5 m y un nivel de fluencia tal que  $C_x=4.0$ . El sistema puede desarrollar una ductilidad capaz de alcanzar el desplazamiento máximo permitido que es de 16 cm, con una cierta probabilidad de excederlo.

Se busca ahora ver cuanto se debe de modificar el nivel de fluencia del sistema si se quiere tomar en cuenta el efecto P- $\Delta$ , de tal forma que se tenga la misma probabilidad de exceder el desplazamiento máximo que el de un sistema elastoplástico de referencia.

El problema se resuelve utilizando las gráficas de las figuras 59 a 62. Para eso, se necesita encontrar las características estructurales del sistema elastoplástico de referencia. El periodo de vibración del sistema original es igual a 0.497 seg y su desplazamiento elástico máximo esperado es  $X_e=4.46$  cm (este valor se obtuvo interpolando los resultados conocidos de sistemas elásticos con periodos de 0.25 y 0.5 seg, tabla 17). El nivel de fluencia del sistema original se calcula

como

$$X_o = X_e / C_x = 4.46/4 = 1.115 \text{ cm}$$

y la ductilidad que puede desarrollar es igual a

$$Q = 16/1.115 = 14.35$$

Para el sistema elastoplástico de referencia la rigidez es igual a

$$k_1 = k_o - W/H = 319.75 - 19.62/5 = 315.83 \text{ ton/m}$$

siendo su periodo de vibración igual a

$$T_1 = 2 / (\sqrt{315.83/2}) = 0.5 \text{ seg}$$

El valor de  $C_{x_r}$  para este sistema es igual a

$$C_{x_r} = X_{e_r} / X_o = 4.5/1.115 = 4.04$$

El valor de  $X_{e_r}$  se obtuvo de la tabla 17 y es el valor de la respuesta elástica máxima esperada para un sistema con periodo de 0.5 seg.

La relación  $C_k$  del sistema de referencia es

$$C_k = W/(H k_1) = 19.62/((5)(315.83)) = 0.0124$$

De las gráficas de la figura 60, podemos encontrar el valor de  $C_x$  que debe tomar el sistema cuando se incluye el efecto P- $\Delta$ , para los valores de  $C_{x_r}$  y  $C_k$  que se tienen. Como los valores de  $C_k$  y  $C_x$  están muy próximos a uno de los estudiados aquí ( $C_x = 4.0$  y  $C_k = 0.0125$  respectivamente) se tomarán los resultados para esos valores. Cuando  $C_x$  ó  $C_k$  sea intermedio entre dos valores estudiados, una interpolación lineal proporciona buenos resultados. Así, el valor de  $C_x$  para el nuevo sistema de acuerdo a la figura 60 es

$$C_{x_g} = 3.55$$

y el nuevo nivel de fluencia será igual a

$$X_o = X_{e_r} / C_{x_g} = 4.5/3.55 = 1.27 \text{ cm}$$

Por lo tanto el nivel de fluencia que debe tener el sistema original para que se tome en cuenta el efecto P- $\Delta$ , y se mantenga la misma probabilidad de exceder un desplazamiento máximo de 16 cm, es de 1.27

cm, contra el valor de 1.115 cm que se tenía cuando el sistema se diseñó sin tomar en cuenta dicho efecto. En este problema la diferencia en los requisitos de resistencia se incremento en casi un 14 por ciento ( $((1.27/1.115)-1)*100=13.9$ ), demostrándose para este caso la influencia del efecto P- $\Delta$  en el comportamiento de las estructuras.

Es de notar que en este sistema con efecto P- $\Delta$  incluido, el factor de ductilidad requerido disminuye a 12.6.

Como se ve en el ejemplo, la aplicación de los resultados de las figuras 59 a 62 es sencilla. Al igual que en el ejemplo I, aquí también se escogió un problema en el cual el periodo de vibración del sistema correspondía a uno de los estudiados. Para sistemas con periodos de vibración intermedios, no se tiene ninguna relación directa y sencilla que pueda generalizarse para encontrar el valor de  $C_x$  en función de  $C_x$  y  $C_k$ , interpolando los resultados que se tienen. Para obtener el comportamiento de la respuesta del sistema en función del periodo de vibración es necesario obtener más resultados, sin embargo, la poca diferencia encontrada en los resultados para los diferentes periodos estudiados para una misma combinación de valores de  $C_x$  y  $C_k$  ( la más grande diferencia entre ellos es del orden de 0.83), pudiera hacer posible realizar una interpolación lineal, sin que los resultados que se obtengan esten demasiado apartados de los reales.

## 6. CONCLUSIONES.

En este trabajo se obtuvieron distribuciones de probabilidades de la respuesta máxima normalizada (desplazamientos), de sistemas simples elastoplásticos, incluyendo los efectos de segundo orden (efectos P- $\Delta$ ), sometidos a movimientos sísmicos representativos de terreno firme, del tipo del sismo de El Centro (1940), y de terreno compresible, como los registrados en el suelo blando del Distrito Federal, utilizando métodos de análisis bayesiano. Los resultados obtenidos muestran la importancia que puede llegar a tener ese efecto, ya que puede incrementar considerablemente la probabilidad de que la respuesta de un sistema sobrepase la resistencia para la que se diseña cuando no se toma en cuenta tal efecto.

Los resultados se presentaron mediante gráficas que dan el valor de la media, la varianza y el coeficiente de variación marginales de la

respuesta normalizada. Se dan también valores de la probabilidad de falla, así como de la probabilidad de que un sistema exceda un desplazamiento permitido dado en función de su factor de ductilidad  $Q$ . Estos resultados son útiles para la solución de problemas de diseño de sistemas y sirven como base para hacer un análisis de confiabilidad de los mismos.

Se presentó una aplicación para diseñar sistemas elastoplásticos tomando en cuenta el efecto  $P-\Delta$ , a partir de un diseño convencional que no lo incluye y que permite mantener las restricciones de funcionalidad estructural inalteradas. En este método solo es necesario modificar el nivel de fluencia del sistema para que el efecto  $P-\Delta$  se tome en cuenta.

De los resultados se encontró que la respuesta de un sistema crece rápidamente conforme aumenta su relación de rigideces  $C_k$ , así como el valor de la relación de desplazamientos  $C_x$ , es decir, el nivel de fluencia del sistema y el efecto de la carga vertical tienen gran influencia en la respuesta de los sistemas.

La distribución de probabilidades fundamental que se propuso como hipótesis de partida, no es necesariamente única. Es deseable efectuar más estudios para verificar si la misma es adecuada y además estudiar otras distribuciones con el fin de ver cual se ajusta mejor a los resultados. El análisis bayesiano no mostró una variación significativa en la forma de la distribución de probabilidades acumulada a posteriori,  $\tilde{F}_{C_g}(C_g)$ , respecto a la a priori propuesta,  $F_{C_g}(C_g)$ , con parámetros probabilísticos  $\tilde{m}_{C_g}$  y  $\tilde{V}_{C_g}$ , por lo que se tomó finalmente la forma de esta última como una función  $\tilde{F}_{C_g}(C_g)$  aproximada. Esto permitió un manejo más fácil del problema y simplificó la obtención de los resultados de probabilidad de falla,  $P_f$ , y probabilidad de excedencia,  $P_{eQ}$ , así como la aplicación del método de diseño que se propuso.

Estudios adicionales requiere la discretización que se hizo de los parámetros probabilísticos  $\theta$ , para conocer la influencia en los resultados de la elección del intervalo de valores, así como del número de puntos que se toman en él.

Para la realización de este estudio se utilizó una familia de sismos que mostraban ciertas características de intensidad, contenido de frecuencias y duración, para representar ciertos tipos de movimientos tanto en terreno firme como en terreno blando. La generalización de los resultados para movimientos con características diferentes no es directa, aunque sería posible realizarlo haciendo algunas simplificaciones adecuadas, pero en este trabajo no se trato ese problema.

Los resultados no permiten encontrar una relación fácil para interpolarlos a periodos de vibración distintos a los estudiados, en el caso de análisis sobre terreno firme, aunque en el método que se propone una interpolación lineal entre ellos parece posible.

El problema que se estudió puede ser tan extenso como se pretenda. Sería recomendable continuar su investigación para analizar mejor los puntos en los cuales no fue posible hacerlo aquí, así como incluir algunos otros parámetros y efectos que se sabe influyen en la respuesta de este tipo de estructuras, tales como la interacción suelo-estructura, la componente vertical del sismo y la degradación de la rigidez del sistema por carga cíclica. También sería de interés ampliar el estudio a sistemas de varios grados de libertad.

ESTO  
Tiene  
SALE  
AD  
BIBLIOTECA

7. REFERENCIAS.

1. Rosenblueth, E, "Efectos de esbeltez en edificios", Ingeniería, Vol. XXXV, No. 1, México DF, enero, 1965
2. Ruge, A C, "The determination of earthquake stresses in elastic structures by means of models", Bulletin of the Seismological Society of America, Vol 24, No. 3, julio, 1934
3. Jacobsen, L S, "Dynamic behavior of simplified structures up to the point of collapse", Proceedings of the Symposium on Earthquake and Blast Effects on Structures, Los Angeles, California, 1952
4. Rubinstein, M F, "Effects of axial deformation on the period of tall buildings", Bulletin of the Seismological Society of America, Vol 54, No. 1, febrero, 1964
5. Jennings, P C y Husid, R, "Collapse of yielding structures during earthquakes", ASCE, Vol 94, EM5, Proc. Paper 6154, octubre, 1968,

pp 1045-1065

6. Husid, R, "The effect of gravity on the collapse of yielding structures with earthquake excitation", Proceedings IV WCEE, Santiago, Chile, 1969, Vol 2, A4, pp 31-44
7. Goel, S, "P- $\Delta$  and axial column deformation in aseismic frames", ASCE, ST, Vol 95, agosto, 1969
8. Anderson, J C y Bertero, V V, "Effects of gravity loads and vertical ground acceleration on seismic response of multistory frames", Proceedings V WCEE, Vol 2, pp 2914-2923, Roma, Italia, 1973
9. Tanabashi, R, Nakamura, T e Ishida, S, "Gravity effect on the catastrophic dynamic response of strain-hardening multistory frames", Proceedings V WCEE, Vol 2, Roma, Italia, 1973
10. Sun, Ch K, Berg, G y Hanson, R, "Gravity effect on single-degree inelastic system", ASCE, EMI, Vol 99, Proc. Paper 9565, febrero, 1973, pp 183-200
11. Vanmarcke, E H y Veneziano, D, "Probabilistic seismic response of simple inelastic systems", Proceedings V WCEE, Vol 2, pp 2851-2863, Roma, Italia, junio, 1973
12. Veneziano, D, "Analysis and design of simple inelastic structures in a probabilistic seismic environment", MIT, Dept. of Civil Engineering, Research Report R73-6, enero, 1973
13. Tani, S y Soda, S, "Vertical load effect on structural dynamics", Proceedings VI WCEE, Vol 2, pp 1028-1033, Nueva Delhi, India, enero, 1977
14. Takizawa, H, "Biaxial and gravity effects in modeling strong-motion response of R/C structures", Proceedings VI WCEE, Vol 2, pp 1022-1027, Nueva Delhi, India, enero, 1977

15. Takizawa, H y Jennings, P C, "Collapse of a model for ductile reinforced concrete frames under extreme earthquake motions", Earthquake Engineering and Structural dynamics, Vol 8, pp 117-144, 1980
16. Westermo, B, "Gravity and dynamic response of vertical beams", ASCE, EM5, Vol 107, Proc. Paper 16544, octubre, 1981, pp 917-934
17. Shih, T Y y Lin, Y K, "Vertical seismic load effect on hysteretic columns", ASCE, EM2, Proc. Paper 16993, Vol 108, abril, 1982, pp 242-254
18. Ishida, S y Morisako, K, "Collapse of SDOF systems to armonic excitation", ASCE, EM3, Proc. Paper 19543, Vol 111, marzo, 1985, pp 431-448
19. Newmark, N M y Rosenblueth, E, Fundamentals of Earthquake Engineering, Prentice-Hall Inc, Nueva Jersey, 1971
20. Amin, M y Ang, A, "Nonstationary stochastic model of earthquake motions", Engineering Mechanics Division Specialty Conference, ASCE, Washington, D C, october, 1966, pp 197-241
21. Arias, A, "Earthquake intensity and smoothed earthquake spectra", Proceedings V WCEE, Roma, 1973, pp 208
22. Ruiz, S, Arias, A y Sandoval, H, "Simulación de temblores como procesos estocásticos no estacionarios", Instituto de Ingeniería, UNAM, No. 440, junio, 1981
23. Newmark, N M, "A method of computation for structural dynamics", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 85, No. EM3, Proc. Paper 2094, julio, 1959, pp 67-94
24. Guerra, O y Esteva, L, "Efectos del comportamiento no lineal en la respuesta sísmica de estructuras", Instituto de Ingeniería, UNAM, Informe interno, 1975

25. Benjamin, R y Cornell, C, Probability, Statistics and Decisions for Civil Engineers, McGraw-Hill Book Company, New York, 1970
26. Raiffa, H y Schlaifer, R, Applied Statistical Decision Theory, Graduate School of Business Administration, Harvard University, 1961, Student Ed. The MIT Press, 1968

## 8. AGRADECIMIENTOS

Mi agradecimiento al Dr. Luis Esteva, asesor de esta tesis, por sus consejos, críticas y comentarios durante el desarrollo de este trabajo, así como por su valiosa dirección durante todo este tiempo, que mucho ha servido en mi formación académica.

También agradezco al Instituto de Ingeniería de la UNAM el apoyo y las facilidades otorgadas para la elaboración de esta tesis.

A los sinodales del comité doctoral mi reconocimiento por sus comentarios y sugerencias en la revisión del trabajo.

Igualmente mi agradecimiento en especial a todas aquellas personas, familiares y amigos, que de una u otra forma me brindaron su apoyo para la realización de esta tesis.

$C_k$	T=1.0	T=0.5	T=0.25
0.00625	39.76	9.94	2.48
0.01250	19.88	4.97	1.24
0.01875	13.25	3.31	0.83
0.02500	9.94	2.48	0.62
0.03750	6.63	1.66	0.41
0.05000	4.97	1.24	0.31
0.07500	3.31	0.83	0.21
0.10000	2.48	0.62	0.15
0.12500	1.99	0.50	0.12
0.15000	1.66	0.41	0.10

$$T = 2 \pi / \omega \quad ; \quad \omega = \sqrt{k_1 / M} \quad ; \quad T = 2 \pi / \sqrt{k_1 / M}$$

$$T^2 = 4 \pi^2 M / k_1 \quad ; \quad k_1 = 4 \pi^2 M / T^2 \quad ; \quad W / H = k_2 = C_k / k_1$$

$$H = W / C_k k_1 \quad ; \quad H = W T^2 / C_k 4 \pi^2 M \quad ; \quad H = 0.2485 T^2 / C_k$$

TABLA 1. Valores de la altura del sistema, en metros, en función del periodo natural T y el parámetro  $C_k$ .

NOMBRE DEL SISMO	HIDALGO CIMENTACION	HIDALGO PATIO	GONZALEZ	ATIZAPAN CIMENTACION	ATIZAPAN PATIO
ACELERACION (%g)	0.0479	0.0442	0.0288	0.0449	0.0408
TIEMPO DE OCURRENCIA DE LA ACELERACION MAXIMA (SEG)	20.10	17.56	45.42	11.08	12.48
DURACION TOTAL (SEG)	183.52	188.26	134.22	108.48	101.92
INTENSIDAD $\int a^2 dt$ (%g <sup>2</sup> )	0.01515	0.01391	0.00661	0.00952	0.00662

TABLA 2. Características originales de los sismos en terreno compresible

NOMBRE DEL SISMO	HIDALGO CIMENTACION	HIDALGO PATIO	GONZALEZ	ATIZAPAN CIMENTACION	ATIZAPAN PATIO
ACELERACION (%g)	0.0479	0.0460	0.0441	0.0672	0.0509
TIEMPO DE OCURRENCIA DE LA ACELERACION MAXIMA (SEG)	20.10	17.56	45.42	11.08	12.48
DURACION TOTAL (SEG)	105.00	105.00	105.00	108.48	101.92
INTENSIDAD $\int a^2 dt$ (%g <sup>2</sup> )	0.01484	0.01484	0.01484	0.01484	0.01484
FACTOR DE NORMALIZACION	1.0000	1.0414	1.5313	1.2486	1.4968

TABLA 3. Características de los sismos en terreno compresible utilizados en el estudio

NOMBRE DEL SISMO	EL CENTRO	SIMULACION 1	SIMULACION 2	SIMULACION 3	SIMULACION 4	SIMULACION 5
ACELERACION (%g)	0.3143	0.3067	0.2712	0.2812	0.2312	0.2091
TIEMPO DE OCURRENCIA DE LA ACELERACION MAXIMA (SEG)	2.00	8.04	4.12	6.70	0.04	4.54
DURACION TOTAL (SEG)	29.14	29.14	29.14	29.14	29.14	29.14
INTENSIDAD $\int a^2 dt$ (%g <sup>2</sup> )	0.1194	0.1227	0.0986	0.1381	0.1053	0.1055

TABLA 4. Características de los acelerogramas real (El Centro) y simulados para terreno firme

$C_x$	$C_k$	EL CENTRO	SIMULACION 1	SIMULACION 2	SIMULACION 3	SIMULACION 4	SIMULACION 5	X PROMEDIO
	0.0000	9.20	11.38	11.15	10.38	11.18	13.83	11.19
	0.0125	9.21	11.42	11.76	10.09	11.27	14.31	11.35
	0.2500	9.22	11.46	12.51	9.89	11.37	14.86	11.55
	0.0500	9.25	11.96	14.44	10.12	11.56	16.20	12.55
2.0	0.1000	9.29	16.86	19.04	11.88	13.33	21.75	15.36
	0.1500	9.34	25.83	25.32	48.00*	15.33	35.23	---
	0.1700	9.36	34.38	31.65	43.09*	16.40	43.09*	---
	0.1800	9.37	41.04*	41.04*	41.04*	16.79	41.04*	---
	0.2000	9.67	37.56*	37.56*	37.56*	17.23	37.56*	---

TABLA 5. Resultados de la muestra del desplazamiento máximo, en cm, de sistemas en terreno firme con  $T=1.0$  seg y  $C_x=2.0$

$C_x$	$C_k$	EL CENTRO	SIMULACION 1	SIMULACION 2	SIMULACION 3	SIMULACION 4	SIMULACION 5	X PROMEDIO
	0.0000	12.02	15.29	10.95	24.67	11.45	15.35	14.96
	0.0100	12.13	15.48	11.05	27.70	11.67	18.50	16.09
	0.0125	12.16	15.52	11.09	28.26	11.73	19.43	16.36
	0.0167	12.21	16.21	12.16	29.11	11.84	21.03	17.09
4.0	0.0250	12.30	19.31	16.28	31.00	14.56	26.03	19.91
	0.0375	12.46	25.87	24.23	35.44	20.46	40.95	26.57
	0.0500	12.63	37.41	38.55	46.23	26.53	65.73*	---
	0.0750	31.77	44.86*	44.86*	44.86*	44.86*	44.86*	---
	0.1000	34.43*	34.43*	34.43*	34.43*	34.43*	34.43*	---

TABLA 6. Resultados de la muestra del desplazamiento máximo, en cm, de sistemas en terreno firme con  $T=1.0$  seg y  $C_x=4.0$

$C_x$	$C_k$	EL CENTRO	SIMULACION 1	SIMULACION 2	SIMULACION 3	SIMULACION 4	SIMULACION 5	X PROMEDIO
	0.00000	13.33	15.87	11.17	26.53	10.37	15.27	15.42
	0.00625	13.49	16.97	11.41	30.53	11.07	16.68	16.69
	0.01250	13.66	22.91	12.18	34.64	11.67	25.85	20.15
	0.01875	13.83	36.91	17.81	41.97	12.80	41.36	27.45
6.0	0.02500	14.65	58.57	28.31	55.84	16.57	74.74	41.45
	0.03000	19.38	71.65*	41.75	71.65*	20.11	71.65*	---
	0.03750	33.01	57.73*	57.73*	57.73*	24.27	57.73*	---
	0.04000	39.68	54.26*	54.26*	54.26*	25.05	54.26*	---
	0.04500	48.46*	48.46*	48.46*	48.46*	24.89	48.46*	---

TABLA 7. Resultados de la muestra del desplazamiento máximo, en cm, de sistemas en terreno firme con  $T=1.0$  seg y  $C_x=6.0$

$C_x$	$C_k$	EL CENTRO	SIMULACION 1	SIMULACION 2	SIMULACION 3	SIMULACION 4	SIMULACION 5	X PROMEDIO
2.0	0.0000	4.31	5.44	3.23	3.84	4.16	4.96	4.32
	0.0125	4.26	5.82	3.22	3.85	4.22	5.02	4.40
	0.0250	4.21	6.29	3.22	3.86	4.29	5.10	4.50
	0.0500	4.08	7.88	3.20	3.88	4.53	5.49	4.84
	0.1000	3.79	11.88	3.17	3.93	5.20	6.52	5.75
	0.1500	3.84	17.26 *	3.14	3.99	6.00	8.48	---
	0.1700	3.86	15.49 *	3.12	4.01	6.32	10.26	---
	0.2000	4.30	13.51 *	3.10	4.05	7.05	13.51 *	---

TABLA 8. Resultados de la muestra del desplazamiento máximo, en cm, de sistemas en terreno firme con  $T=0.5$  seg y  $C_x=2.0$

$C_x$	$C_k$	EL CENTRO	SIMULACION 1	SIMULACION 2	SIMULACION 3	SIMULACION 4	SIMULACION 5	X PROMEDIO
4.0	0.0000	4.02	8.11	4.45	3.79	4.72	6.61	5.28
	0.0100	4.00	12.25	4.55	4.10	5.37	8.10	6.40
	0.0125	3.99	14.01	4.57	4.23	5.56	8.74	6.85
	0.0167	3.98	17.65	4.62	4.48	5.92	10.30	7.83
	0.0250	3.96	32.74	4.73	5.26	7.30	14.99	11.49
	0.0375	5.12	31.14 *	4.89	10.87	17.60	31.14 *	---
	0.0500	8.37	23.64 *	5.05	23.64 *	23.64 *	23.64 *	---
	0.0750	16.13 *	16.13 *	16.13 *	16.13 *	16.13 *	16.13 *	---

TABLA 9. Resultados de la muestra del desplazamiento máximo, en cm, de sistemas en terreno firme con  $T=0.5$  seg y  $C_x=4.0$

$C_x$	$C_k$	EL CENTRO	SIMULACION 1	SIMULACION 2	SIMULACION 3	SIMULACION 4	SIMULACION 5	X PROMEDIO
6.0	0.00000	3.52	11.66	4.35	7.12	5.19	6.22	6.34
	0.00625	3.37	19.34	4.30	8.01	5.44	6.93	7.90
	0.01000	3.24	29.79	4.21	11.21	6.29	7.54	10.38
	0.01250	3.20	42.35	4.13	14.79	7.85	8.12	13.41
	0.01500	3.21	50.77 *	4.20	19.98	10.88	9.11	---
	0.01875	3.23	40.77 *	4.32	36.10	19.44	11.34	---
	0.02500	3.75	30.76 *	4.52	30.76 *	30.76 *	19.96	---
	0.03000	6.61	25.76 *	4.72	25.76 *	25.76 *	25.76 *	---

TABLA 10. Resultados de la muestra del desplazamiento máximo, en cm, de sistemas en terreno firme con  $T=0.5$  seg y  $C_x=6.0$

$C_x$	$C_k$	EL CENTRO	SIMULACION 1	SIMULACION 2	SIMULACION 3	SIMULACION 4	SIMULACION 5	X PROMEDIO
	0.0000	0.94	1.04	1.11	1.77	1.11	0.75	1.12
	0.0125	0.95	1.04	1.15	1.89	1.22	0.75	1.17
	0.0250	0.96	1.05	1.17	2.02	1.35	0.75	1.21
2.0	0.0500	1.02	1.05	1.21	2.40	1.91	0.74	1.39
	0.0750	1.32	1.07	1.41	3.16	7.10*	0.74	---
	0.1000	2.24	1.07	1.74	3.30	5.45*	0.73	---
	0.1500	3.80*	1.05	3.80*	3.80*	3.80*	0.71	---

TABLA 11. Resultados de la muestra del desplazamiento máximo, en cm, de sistemas en terreno firme con  $T=0.25$  seg y  $C_x=2.0$

$C_x$	$C_k$	EL CENTRO	SIMULACION 1	SIMULACION 2	SIMULACION 3	SIMULACION 4	SIMULACION 5	X PROMEDIO
	0.00000	2.82	3.11	2.91	2.02	1.62	1.18	2.28
	0.00625	4.58	4.51	3.13	2.81	1.72	1.20	2.99
	0.01000	8.01	6.74	3.27	5.07	1.78	1.24	4.35
	0.01125	9.89	8.30	3.31	7.23	1.81	1.29	5.30
4.0	0.01250	11.14	10.51	3.95	11.75	1.83	1.36	6.76
	0.01300	12.00	12.06	4.25	19.29*	1.84	1.39	---
	0.01670	15.07*	15.07*	7.81	15.07*	1.93	1.87	---
	0.01875	13.45*	13.45*	13.45*	13.45*	2.08	2.60	---
	0.02500	10.15*	10.15*	10.15*	10.15*	4.54	10.15*	---

TABLA 12. Resultados de la muestra del desplazamiento máximo, en cm, de sistemas en terreno firme con  $T=0.25$  seg y  $C_x=4.0$

$C_x$	$C_k$	EL CENTRO	SIMULACION 1	SIMULACION 2	SIMULACION 3	SIMULACION 4	SIMULACION 5	X PROMEDIO
	0.00000	2.27	4.43	4.63	3.03	2.74	2.05	3.19
	0.00200	2.60	4.98	4.81	3.22	3.08	2.15	3.47
	0.00400	3.78	5.00	4.99	3.91	3.58	2.89	4.03
6.0	0.00625	6.27	4.55	7.31	9.27	5.94	5.56	6.98
	0.00700	7.21	4.77	9.70	14.86	7.81	7.40	8.62
	0.00800	8.20	5.21	15.10	20.80*	11.91	12.05	---
	0.10000	9.91	16.67*	16.67*	16.67*	16.67*	16.67*	---
	0.12500	5.87	13.37*	13.37*	13.37*	13.37*	13.37*	---

TABLA 13. Resultados de la muestra del desplazamiento máximo, en cm, de sistemas en terreno firme con  $T=0.25$  seg y  $C_x=6.0$

$C_x$	$C_k$	HIDALGO PATIO	HIDALGO CIMENTACION	ATIZAPAN PATIO	ATIZAPAN CIMENTACION	GONZALEZ	X PROMEDIO
	0.0000	5.42	5.18	4.88	3.81	3.49	4.55
	0.0125	5.76	5.44	5.11	4.08	3.66	4.81
	0.0250	6.76	5.66	5.35	4.42	3.83	5.20
2.0	0.0500	10.90	6.18	6.07	5.41	4.77	6.67
	0.0625	23.67*	6.55	6.82	6.40	5.76	---
	0.0750	19.95*	7.06	8.26	7.98	7.18	---
	0.1000	15.31*	8.83	15.31*	15.31*	15.31*	---

TABLA 14. Resultados de la muestra del desplazamiento máximo, en cm, de sistemas en terreno compresible, con  $T=1.0$  seg y  $C_x=2.0$

$C_x$	$C_k$	HIDALGO PATIO	HIDALGO CIMENTACION	ATIZAPAN PATIO	ATIZAPAN CIMENTACION	GONZALEZ	X PROMEDIO
	0.00000	8.11	7.03	6.66	7.51	2.83	6.43
	0.00625	11.57	10.45	7.21	8.81	2.75	8.16
	0.01000	16.02	13.72	9.93	10.44	3.18	10.66
4.0	0.01250	24.25	17.33	15.90	15.93	3.93	15.47
	0.01670	42.37*	42.37*	42.37*	42.37*	6.31	---
	0.01875	37.82*	37.82*	37.82*	37.82*	8.55	---
	0.02500	28.54*	28.54*	28.54*	28.54*	28.54*	---

TABLA 15. Resultados de la muestra del desplazamiento máximo, en cm, de sistemas en terreno compresible, con  $T=1.0$  seg y  $C_x=4.0$

$C_x$	$C_k$	HIDALGO PATIO	HIDALGO CIMENTACION	ATIZAPAN PATIO	ATIZAPAN CIMENTACION	GONZALEZ	X PROMEDIO
	0.000000	4.89	5.97	12.19	8.22	5.44	7.34
	0.0031250	5.85	6.85	15.49	8.32	8.09	8.92
	0.0046875	8.16	7.25	26.75	14.39	14.39	13.12
6.0	0.0054688	9.88	7.42	38.34	19.77	19.77	17.01
	0.0062500	12.35	7.55	74.40*	28.58	28.58	---
	0.0100000	46.87*	12.38	46.87*	46.87*	46.87*	---
	0.0125000	37.59*	8.37	37.59*	37.59*	37.59*	---

TABLA 16. Resultados de la muestra del desplazamiento máximo, en cm, de sistemas en terreno compresible, con  $T=1.0$  seg y  $C_x=6.0$

SISMOS EN TERRENO FIRME	DESPLAZAMIENTO MAXIMO ELASTICO			SISMOS EN TERRENO COMPRESIBLE	DESPLAZAMIENTO MAXIMO ELASTICO
	T=1.0	T=0.5	T=0.25		
EL CENTRO	11.88	6.42	1.27	HIDALGO PATIO	2.78
SIMULACION 1	13.26	5.13	0.87	HIDALGO CIMENTACION	3.09
SIMULACION 2	10.26	3.47	0.92	ATIZAPAN PATIO	2.70
SIMULACION 3	15.98	3.66	1.02	ATIZAPAN CIMENTACION	2.42
SIMULACION 4	12.23	4.32	1.05	GONZALEZ	2.94
SIMULACION 5	11.51	4.02	0.81		
DESPALZAMIENTO MAXIMO PROMEDIO	12.52	4.50	0.99	DESPALZAMIENTO MAXIMO PROMEDIO	2.78

TABLA 17. Respuesta elástica individual y promedio de los sistemas estudiados, para los dos tipos de terrenos estudiados

$C_k$	T	$C_x$	EL CENTRO	SIMULACION	SIMULACION	SIMULACION	SIMULACION	SIMULACION	X PROMEDIO
				1	2	3	4	5	
0.0	1.0	1.5	11.68	10.41	10.46	14.20	11.03	12.14	11.65
		2.5	10.08	13.80	10.49	12.64	10.63	14.04	11.95
		3.0	10.81	14.96	9.37	17.92	11.72	14.38	13.19
0.0	0.5	1.5	5.56	4.76	3.53	3.51	4.03	4.23	4.27
		2.5	4.36	4.83	2.91	3.89	4.25	5.44	4.28
		3.0	4.29	5.51	3.42	4.93	3.43	6.17	4.63
0.0	0.25	1.5	1.16	0.90	0.98	1.25	1.04	0.84	1.03
		2.5	1.64	1.70	1.23	2.15	1.11	0.84	1.44
		3.0	2.36	2.47	1.92	1.77	1.34	1.00	1.81

TABLA 18. Respuesta del desplazamiento máximo, en cm, de sistemas elastoplásticos en terreno firme con periodo de vibración afectado por la carga vertical

PARAMETRO	TERRENO FIRME			TERRENO COMPRESIBLE
	T=1.0	T=0.5	T=0.25	T=1.0
a	0.20	0.40	1.20	2.10
	0.30	0.60	2.60	2.60
	0.40	0.80	4.00	3.10
	0.50	1.00	5.40	3.60
b	2.50	3.00	0.60	0.70
	4.50	5.00	2.00	0.90
	6.50	7.00	3.40	1.10
	8.50	9.00	4.80	1.30
c	10.00	50.00	1.00	0.50
	30.00	120.00	5.00	1.50
	50.00	190.00	9.00	2.50
	70.00	260.00	13.00	3.50
d	65.00	25.00	550.00	6500.00
	105.00	45.00	700.00	9500.00
	145.00	65.00	850.00	12500.00
	185.00	85.00	1000.00	15500.00
e	2.90	3.40	5.40	5.15
	3.10	3.60	5.60	5.25
f	2.40	2.20	2.68	3.10
	2.60	2.30	2.72	3.20
g	0.40	0.50	0.55	0.60
	0.50	0.70	0.75	0.70
	0.60	0.90	0.95	0.80

TABLA 19. Valores discretos de los parámetros  $\theta$  usados en el análisis bayesiano

PARAMETRO	VALORES DEL PARAMETRO	PROBABILIDAD MARGINAL	MEDIA	VARIANZA	TERCER MOMENTO CENTRAL
a	0.20	0.119160	0.3604	0.00851	-0.00003
	0.30	0.348124			
	0.40	0.342990			
	0.50	0.189726			
b	2.50	0.115539	5.7998	3.70506	-0.22033
	4.50	0.352861			
	6.50	0.297773			
	8.50	0.233828			
c	10.00	0.241239	40.3071	494.10341	-178.03853
	30.00	0.253677			
	50.00	0.253576			
	70.00	0.251508			
d	65.00	0.009729	129.9894	848.40668	13834.58923
	105.00	0.493985			
	145.00	0.358109			
	185.00	0.138178			
e	2.90	0.658166	2.9689	0.00900	0.00057
	3.10	0.341834			
f	2.40	0.499209	2.5002	0.01000	-0.00000322
	2.60	0.500791			
g	0.40	0.010085	0.4998	0.00018	-0.00000181
	0.50	0.981746			
	0.60	0.008169			

TABLA 20. Distribución de probabilidades y momentos marginales de los parámetros  $\theta$ , para sistemas en terreno firme con  $T=1.0$  seg

PARAMETRO	VALORES DEL PARAMETRO	PROBABILIDAD MARGINAL	MEDIA	VARIANZA	TERCER MOMENTO CENTRAL
a	0.40	0.197847	0.6608	0.03338	0.00157
	0.60	0.413718			
	0.80	0.274869			
	1.00	0.113566			
b	3.00	0.049659	6.7650	3.10643	-1.12036
	5.00	0.304995			
	7.00	0.358557			
	9.00	0.286790			
c	50.00	0.287898	147.2996	6152.19094	64232.78643
	120.00	0.255136			
	190.00	0.236039			
	260.00	0.220927			
d	25.00	0.005256	55.0615	152.34195	1296.15724
	45.00	0.546593			
	65.00	0.387925			
	85.00	0.060176			
e	3.40	0.463514	3.5073	0.00995	-0.00015
	3.60	0.536486			
f	2.20	0.505467	2.2495	0.00250	0.00000276
	2.30	0.494533			
g	0.50	0.000000	0.7062	0.00120	0.00023
	0.70	0.968951			
	0.90	0.031049			

TABLA 21. Distribución de probabilidades y momentos marginales de los parámetros  $\theta$  , para sistemas en terreno firme con  $T=0.5$  seg

PARAMETRO	VALORES DEL PARAMETRO	PROBABILIDAD MARGINAL	MEDIA	VARIANZA	TERCER MOMENTO CENTRAL
a	1.20	0.000990	3.3260	0.94849	0.88679
	2.60	0.595625			
	4.00	0.287241			
	5.40	0.116144			
b	0.60	0.001075	2.9610	1.05063	0.59009
	2.00	0.470725			
	3.40	0.368877			
	4.80	0.159323			
c	1.00	0.000533	9.2613	9.27361	-3.31076
	5.00	0.257677			
	9.00	0.417731			
	13.00	0.324059			
d	550.00	0.132207	771.9815	17837.0151	217138.1046
	700.00	0.395084			
	850.00	0.333336			
	1000.00	0.139374			
e	5.40	0.456667	5.5087	0.00992	-0.00017
	5.60	0.543330			
f	2.68	0.515064	2.6994	0.00040	0.0000048
	2.72	0.484936			
g	0.55	0.000302	0.7513	0.00028	0.00005
	0.75	0.992984			
	0.95	0.006715			

TABLA 22. Distribución de probabilidades y momentos marginales de los parámetros  $\theta$ , para sistemas en terreno firme con  $T=0.25$  seg

PARAMETRO	VALORES DEL PARAMETRO	PROBABILIDAD MARGINAL	MEDIA	VARIANZA	TERCER MOMENTO CENTRAL
a	2.10	0.177404	2.9286	0.27971	-0.02707
	2.60	0.257300			
	3.10	0.295919			
	3.60	0.269376			
b	0.70	0.215702	1.0136	0.04765	-0.00082
	0.90	0.257729			
	1.10	0.269280			
	1.30	0.257290			
c	0.50	0.113487	2.0545	0.80881	0.04305
	1.50	0.385965			
	2.50	0.333148			
	3.50	0.167400			
d	6500.0	0.045772	771.9815	17837.0151	-2230199000
	9500.0	0.322581			
	12500.0	0.371242			
	15500.0	0.260405			
e	5.15	0.564769	5.1935	0.00246	0.00003
	5.25	0.435231			
f	3.10	0.374367	3.1626	0.00234	-0.00006
	3.20	0.625633			
g	0.60	0.066697	0.7319	0.00351	-0.00005
	0.70	0.547538			
	0.80	0.385763			

TABLA 23. Distribución de probabilidades y momentos marginales de los parámetros  $\theta$ , para sistemas en terreno compresible con  $T=1.0$  seg

$C_x$	0	PROBABILIDAD EXACTA	PROBABILIDAD APROXIMADA
$C_k=0.0$	1.0	0.89619046	0.89609887
	2.0	0.41800197	0.41795894
	2.0 3.0	0.14321050	0.14335789
	4.0	0.04698871	0.04704774
	5.0	0.01591920	0.01591914
	6.0	0.00568137	0.00566612
$C_k=0.025$	1.0	0.99998108	0.99998262
	2.0	0.99635246	0.99638705
	6.0 3.0	0.96680533	0.98668158
	4.0	0.89127194	0.89114353
	5.0	0.77803137	0.77779120
	6.0	0.64909552	0.64884559
$C_k=0.05$	1.0	0.90088327	0.90079661
	2.0	0.42835778	0.42830521
	2.0 3.0	0.14928107	0.14943086
	4.0	0.04964455	0.04970796
	5.0	0.01700354	0.01700523
	6.0	0.00612398	0.00610883
$C_k=0.15$	1.0	0.99999999	0.99999999
	2.0	0.99998919	0.99999009
	6.0 3.0	0.99967290	0.99968072
	4.0	0.99750555	0.99752257
	5.0	0.99037533	0.99038107
	6.0	0.97490724	0.97486327
$C_k=0.05$	1.0	0.91986135	0.91979629
	2.0	0.47491198	0.47479706
	2.0 3.0	0.17836727	0.17852403
	4.0	0.06296224	0.06304675
	5.0	0.02263683	0.02264841
	6.0	0.00849109	0.00847744
$C_k=0.05$	1.0	1.00000000	1.00000000
	2.0	1.00000000	1.00000000
	6.0 3.0	0.99999999	0.99999999
	4.0	0.99999994	0.99999996
	5.0	0.99999943	0.99999956
	6.0	0.99999663	0.99999715

TABLA 24. Comparación de resultados entre la función de probabilidades acumulada "exacta" y la aproximada para sistemas con  $T=1.0$  seg, en terreno firme

$C_x$	0	PROBABILIDAD EXACTA	PROBABILIDAD APROXIMADA
$C_k=0.0$	1.0	0.78319213	0.78242762
	2.0	0.37921035	0.37901581
	2.0 3.0	0.17201761	0.17232026
	4.0	0.08092974	0.08124095
	5.0	0.04009728	0.04029874
	6.0	0.02089247	0.02099768
$C_k=0.0$	1.0	0.99930366	0.99934787
	2.0	0.98397037	0.98388423
	6.0 3.0	0.93530732	0.93492774
	4.0	0.85824197	0.85723767
	5.0	0.76614843	0.76501266
	6.0	0.67109296	0.67003862
$C_k=0.05$	1.0	0.81072936	0.80992378
	2.0	0.41693825	0.41665174
	2.0 3.0	0.19812704	0.19843293
	4.0	0.09665016	0.09701196
	5.0	0.04930968	0.04956373
	6.0	0.02632988	0.02647443
$C_k=0.05$	1.0	0.99999999	1.00000000
	2.0	0.99999999	0.99999999
	6.0 3.0	0.99999985	0.99999992
	4.0	0.99999897	0.99999931
	5.0	0.99999556	0.99999643
	6.0	0.99998576	0.99998739
$C_k=0.15$	1.0	0.95106170	0.95031023
	2.0	0.71685788	0.71542528
	2.0 3.0	0.47585137	0.47526770
	4.0	0.30488977	0.30517282
	5.0	0.19515006	0.19576858
	6.0	0.12639041	0.12704309
$C_k=0.15$	1.0	1.00000000	1.00000000
	2.0	1.00000000	1.00000000
	6.0 3.0	1.00000000	1.00000000
	4.0	1.00000000	1.00000000
	5.0	1.00000000	1.00000000
	6.0	1.00000000	1.00000000

TABLA 25. Comparación de resultados entre la función de probabilidades acumulada "exacta" y la aproximada para sistemas con  $T=0.5$  seg, en terreno firme

$C_x$	Q	PROBABILIDAD EXACTA	PROBABILIDAD APROXIMADA
$C_k=0.0$	1.0	0.87124749	0.87096645
	2.0	0.54121674	0.54111313
	2.0 3.0	0.30911975	0.30915779
	4.0	0.17740253	0.17752859
	5.0	0.10449784	0.10461870
	6.0	0.06340819	0.06349944
$C_k=0.0$	1.0	0.99998854	0.99998891
	2.0	0.99937550	0.99936330
	6.0 3.0	0.99575230	0.99567123
	4.0	0.98637551	0.98616668
	5.0	0.96987020	0.96950929
	6.0	0.94629216	0.94579035
$C_k=0.025$	1.0	0.87957979	0.87930974
	2.0	0.55709794	0.55693077
	2.0 3.0	0.32330170	0.32333189
	4.0	0.18788835	0.18800980
	5.0	0.11182371	0.11194692
	6.0	0.06844528	0.06854117
$C_k=0.025$	1.0	1.00000000	1.00000000
	2.0	1.00000000	1.00000000
	6.0 3.0	1.00000000	1.00000000
	4.0	1.00000000	1.00000000
	5.0	1.00000000	1.00000000
	6.0	1.00000000	1.00000000
$C_k=0.05$	1.0	0.91573820	0.91552985
	2.0	0.63544183	0.63517556
	2.0 3.0	0.39876815	0.39876520
	4.0	0.24680654	0.24688669
	5.0	0.15474913	0.15487320
	6.0	0.09899840	0.09911248
$C_k=0.05$	1.0	1.00000000	1.00000000
	2.0	1.00000000	1.00000000
	6.0 3.0	1.00000000	1.00000000
	4.0	1.00000000	1.00000000
	5.0	1.00000000	1.00000000
	6.0	1.00000000	1.00000000

TABLA 26. Comparación de resultados entre la función de probabilidades acumulada "exacta" y la aproximada para sistemas con  $T=0.25$  seg, en terreno firme

$C_x$	Q	PROBABILIDAD EXACTA	PROBABILIDAD APROXIMADA
$C_k=0.0$	1.0	0.96066771	0.95947072
	2.0	0.76551188	0.76176386
	2.0 3.0	0.54497519	0.54295612
	4.0	0.37404465	0.37422121
	5.0	0.25542130	0.25673256
	6.0	0.17578341	0.17748396
$C_k=0.0$	1.0	0.99996116	0.99997331
	2.0	0.99851047	0.99865225
	6.0 3.0	0.99143484	0.99162584
	4.0	0.97515352	0.97503630
	5.0	0.94874543	0.94800350
	6.0	0.91333443	0.91185228
$C_k=0.05$	1.0	0.96685382	0.96582251
	2.0	0.78845991	0.78467343
	2.0 3.0	0.57492042	0.57245437
	4.0	0.40280009	0.40263969
	5.0	0.27983869	0.28098321
	6.0	0.19541666	0.19709923
$C_k=0.05$	1.0	1.00000000	1.00000000
	2.0	1.00000000	1.00000000
	6.0 3.0	1.00000000	1.00000000
	4.0	1.00000000	1.00000000
	5.0	1.00000000	1.00000000
	6.0	1.00000000	1.00000000
$C_k=0.05$	1.0	0.99021686	0.98995561
	2.0	0.90328530	0.90032108
	2.0 3.0	0.75390934	0.74998361
	4.0	0.59833141	0.59559218
	5.0	0.46383791	0.46285550
	6.0	0.35633550	0.35686183
$C_k=0.05$	1.0	1.00000000	1.00000000
	2.0	1.00000000	1.00000000
	6.0 3.0	1.00000000	1.00000000
	4.0	1.00000000	1.00000000
	5.0	1.00000000	1.00000000
	6.0	1.00000000	1.00000000

TABLA 27. Comparación de resultados entre la función de probabilidades acumulada "exacta" y la aproximada para sistemas con  $T=1.0$  seg, en terreno compresible

$C_k$	0	$C_x=2.0$		$C_x=4.0$		$C_x=6.0$		$C_k$	0	$C_x=2.0$		$C_x=4.0$		$C_x=6.0$	
		$C_{x_g}$	$Q_g$	$C_{x_g}$	$Q_g$	$C_{x_g}$	$Q_g$			$C_{x_g}$	$Q_g$	$C_{x_g}$	$Q_g$	$C_{x_g}$	$Q_g$
0.0125	1.5	1.98	1.48	3.32	1.24	-	-	0.075	1.5	1.44	1.08	-	-	-	-
	2.0	1.97	1.97	3.50	1.75	3.41	1.14		2.0	1.42	1.42	2.11	1.06	-	-
	3.0	1.96	2.94	3.51	2.64	3.83	1.92		3.0	1.40	2.10	2.12	1.59	2.16	1.08
	4.0	1.96	3.92	3.51	3.51	3.85	2.57		4.0	1.40	2.81	2.12	2.12	2.16	1.44
	5.0	1.96	4.91	3.50	4.38	3.86	3.21		5.0	1.40	3.51	2.12	2.65	2.17	1.81
	6.0	1.97	5.91	3.50	5.25	3.86	3.86		6.0	1.40	4.21	2.12	3.19	2.17	2.17
0.025	1.5	1.88	1.41	2.94	1.10	-	-	0.1	1.5	-	-	-	-	-	-
	2.0	1.86	1.86	3.00	1.50	3.08	1.03		2.0	1.34	1.34	-	-	-	-
	3.0	1.84	2.76	3.00	2.25	3.13	1.57		3.0	1.32	1.98	1.89	1.42	-	-
	4.0	1.84	3.68	3.00	3.00	3.14	2.09		4.0	1.31	2.63	1.90	1.90	1.94	1.29
	5.0	1.84	4.60	3.00	3.75	3.14	2.61		5.0	1.32	3.29	1.90	2.37	1.94	1.61
	6.0	1.85	5.54	3.00	4.50	3.13	3.13		6.0	1.32	3.96	1.90	2.85	1.94	1.94
0.0375	1.5	1.75	1.31	2.68	1.00	-	-	0.125	1.5	-	-	-	-	-	-
	2.0	1.71	1.71	2.68	1.34	-	-		2.0	1.29	1.29	-	-	-	-
	3.0	1.68	2.52	2.68	2.01	2.76	1.38		3.0	1.26	1.89	1.75	1.31	-	-
	4.0	1.68	3.35	2.68	2.68	2.77	1.84		4.0	1.26	2.53	1.75	1.75	1.78	1.19
	5.0	1.68	4.20	2.68	3.36	2.77	2.31		5.0	1.26	3.14	1.75	2.18	1.78	1.48
	6.0	1.69	5.08	2.69	4.03	2.77	2.77		6.0	1.26	3.78	1.75	2.62	1.94	1.78
0.05	1.5	1.63	1.22	-	-	-	-	0.15	1.5	-	-	-	-	-	-
	2.0	1.57	1.57	2.45	1.22	-	-		2.0	1.24	1.24	-	-	-	-
	3.0	1.56	2.33	2.45	1.84	2.50	1.25		3.0	1.22	1.83	1.65	1.23	-	-
	4.0	1.55	3.11	2.45	2.45	2.51	1.68		4.0	1.22	2.45	1.64	1.64	1.67	1.12
	5.0	1.55	3.88	2.46	3.07	2.52	2.10		5.0	1.22	3.05	1.64	2.05	1.67	1.39
	6.0	1.55	4.66	2.46	3.69	2.52	2.52		6.0	1.22	3.67	1.64	2.47	1.67	1.67

TABLA 28. Valores de  $C_{x_g}$  para sistemas con  $T=1.0$  seg en terreno firme

$C_k$	Q	$C_x=2.0$		$C_x=4.0$		$C_x=6.0$	
		$C_{xg}$	$Q_g$	$C_{xg}$	$Q_g$	$C_{xg}$	$Q_g$
0.0125	1.5	1.94	1.45	3.56	1.33	-	-
	2.0	1.93	1.93	3.56	1.78	3.85	1.28
	3.0	1.93	2.89	3.55	2.66	3.86	1.93
	4.0	1.93	3.85	3.55	3.55	3.86	2.58
	5.0	1.93	4.82	3.55	4.43	3.86	3.22
	6.0	1.93	5.78	3.55	5.32	3.86	3.86
0.025	1.5	1.81	1.36	3.14	1.18	-	-
	2.0	1.78	1.78	3.14	1.57	3.28	1.09
	3.0	1.75	2.63	3.13	2.35	3.28	1.64
	4.0	1.77	3.54	3.13	3.13	3.28	2.19
	5.0	1.75	4.38	3.13	3.92	3.28	2.73
	6.0	1.75	5.26	3.13	4.70	3.28	3.28
0.0375	1.5	1.68	1.26	2.87	1.07	-	-
	2.0	1.63	1.63	2.86	1.43	-	-
	3.0	1.61	2.43	2.86	2.15	2.96	1.48
	4.0	1.61	3.22	2.86	2.86	2.96	1.97
	5.0	1.61	4.02	2.87	3.58	2.96	2.47
	6.0	1.61	4.83	2.87	4.30	2.96	2.96
0.05	1.5	1.58	1.18	-	-	-	-
	2.0	1.51	1.51	2.66	1.33	-	-
	3.0	1.51	2.27	2.66	2.00	2.74	1.37
	4.0	1.51	3.02	2.66	2.66	2.74	1.83
	5.0	1.51	3.78	2.67	3.33	2.74	2.28
	6.0	1.51	4.53	2.67	4.00	2.74	2.74

TABLA 29. Valores de  $C_{xg}$  para sistemas con  $T=0.5$  seg en terreno firme

$C_k$	Q	$C_x=2.0$		$C_x=4.0$		$C_x=6.0$	
		$C_{xg}$	$Q_g$	$C_{xg}$	$Q_g$	$C_{xg}$	$Q_g$
0.00625	1.5	2.00	1.50	3.64	1.37	4.07	1.02
	2.0	2.00	2.00	3.66	1.83	4.08	1.36
	3.0	2.00	3.00	3.67	2.75	4.14	2.07
	4.0	2.00	4.00	3.66	3.66	4.15	2.76
	5.0	2.00	5.00	3.66	4.58	4.15	3.46
	6.0	2.00	6.00	3.67	5.50	4.15	4.15
0.0125	1.5	1.99	1.50	3.23	1.21	-	-
	2.0	1.99	1.99	3.25	1.63	3.45	1.15
	3.0	1.99	2.99	3.25	2.44	3.49	1.75
	4.0	1.99	3.99	3.25	3.25	3.50	2.33
	5.0	1.99	4.98	3.25	4.07	3.50	2.92
	6.0	1.99	5.98	3.25	4.88	3.50	3.50

TABLA 30. Valores de  $C_{xg}$  para sistemas con  $T=0.25$  seg en terreno firme

$C_k$	0	$C_x=2.0$		$C_x=4.0$		$C_x=6.0$		$C_k$	0	$C_x=2.0$		$C_x=4.0$		$C_x=6.0$	
		$C_{x_g}$	$Q_g$	$C_{x_g}$	$Q_g$	$C_{x_g}$	$Q_g$			$C_{x_g}$	$Q_g$	$C_{x_g}$	$Q_g$	$C_{x_g}$	$Q_g$
0.00625	1.5	2.03	1.52	3.35	1.26	-	-	0.05	1.5	1.75	1.31	-	-	-	-
	2.0	2.03	2.03	3.44	1.72	3.73	1.24		2.0	1.74	1.74	-	-	-	-
	3.0	2.01	3.01	3.48	2.61	3.88	1.94		3.0	1.74	2.60	1.97	1.48	2.03	1.01
	4.0	2.00	4.00	3.49	3.49	3.91	2.60		4.0	1.73	3.47	1.97	1.97	2.03	1.35
	5.0	1.99	4.97	3.49	4.36	3.92	3.27		5.0	1.73	4.33	1.97	2.46	2.03	1.69
	6.0	1.98	5.95	3.48	5.22	3.93	3.93		6.0	1.73	5.19	1.97	2.96	2.03	2.03
0.0125	1.5	2.01	1.51	2.85	1.07	-	-	0.075	1.5	1.63	1.22	-	-	-	-
	2.0	2.01	2.01	2.88	1.44	3.05	1.02		2.0	1.62	1.62	-	-	-	-
	3.0	1.99	2.99	2.90	2.18	3.09	1.54		3.0	1.62	2.44	1.78	1.34	-	-
	4.0	1.98	3.97	2.91	2.91	3.10	2.07		4.0	1.62	3.24	1.78	1.78	1.83	1.22
	5.0	1.98	4.94	2.91	3.63	3.11	2.59		5.0	1.62	4.04	1.78	2.23	1.83	1.52
	6.0	1.97	5.91	2.91	4.36	3.12	3.12		6.0	1.62	4.85	1.78	2.67	1.83	1.83
0.01875	1.5	1.98	1.48	-	-	-	-	0.1	1.5	1.55	1.16	-	-	-	-
	2.0	1.97	1.97	2.57	1.29	-	-		2.0	1.55	1.55	-	-	-	-
	3.0	1.96	2.94	2.59	1.94	2.71	1.35		3.0	1.54	2.31	1.67	1.26	-	-
	4.0	1.95	3.90	2.59	2.59	2.72	1.81		4.0	1.54	3.08	1.67	1.67	1.70	1.13
	5.0	1.94	4.86	2.59	3.23	2.73	2.27		5.0	1.54	3.85	1.67	2.09	1.70	1.42
	6.0	1.94	5.82	2.59	3.88	2.73	2.73		6.0	1.54	4.61	1.67	2.51	1.70	1.70
0.025	1.5	1.93	1.44	-	-	-	-	0.125	1.5	1.49	1.12	-	-	-	-
	2.0	1.92	1.92	2.37	1.19	-	-		2.0	1.49	1.49	-	-	-	-
	3.0	1.91	2.87	2.38	1.79	2.47	1.24		3.0	1.49	2.23	1.59	1.19	-	-
	4.0	1.91	3.81	2.38	2.38	2.48	1.66		4.0	1.48	2.97	1.59	1.59	1.63	1.08
	5.0	1.90	4.75	2.38	2.98	2.49	2.07		5.0	1.48	3.71	1.59	1.99	1.62	1.35
	6.0	1.90	5.69	2.38	3.57	2.49	2.49		6.0	1.48	4.45	1.59	2.39	1.62	1.62
0.0375	1.5	1.83	1.37	-	-	-	-	0.15	1.5	1.45	1.09	-	-	-	-
	2.0	1.82	1.82	2.12	1.06	-	-		2.0	1.45	1.45	-	-	-	-
	3.0	1.82	2.73	2.13	1.60	2.19	1.10		3.0	1.44	2.17	1.54	1.16	-	-
	4.0	1.81	3.62	2.13	2.13	2.20	1.46		4.0	1.44	2.88	1.54	1.54	1.57	1.05
	5.0	1.81	4.52	2.13	2.66	2.20	1.83		5.0	1.44	3.60	1.54	1.92	1.57	1.31
	6.0	1.81	5.42	2.13	3.19	2.20	2.20		6.0	1.44	4.32	1.54	2.31	1.57	1.57

TABLA 31. Valores de  $C_{x_g}$  para sistemas con  $T=1.0$  seg en terreno compresible

T = 1.0 seg

$C_x$

$C_k$	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00	5.50	6.00
0.0125	1.490	1.960	2.470	2.920	3.270	3.500	3.660	3.750	3.810	3.850
0.0250	1.390	1.840	2.360	2.700	2.890	3.000	3.060	3.100	3.120	3.140
0.0375	1.330	1.680	2.200	2.490	2.620	2.690	2.720	2.740	2.760	2.770
0.0500	1.240	1.560	2.030	2.290	2.400	2.450	2.480	2.500	2.510	2.510
0.0750	1.160	1.410	1.770	1.990	2.080	2.120	2.140	2.150	2.160	2.170
0.1000	1.130	1.320	1.610	1.790	1.860	1.900	1.920	1.926	1.932	1.940
0.1250	1.120	1.260	1.510	1.660	1.720	1.750	1.760	1.770	1.778	1.781
0.1500	1.110	1.220	1.430	1.560	1.620	1.640	1.660	1.666	1.670	1.673

TABLA 32. Valores finales de  $C_x$  para sistemas con T=1.0 seg en terreno firme

T = 0.5 seg

$C_x$

$C_k$	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00	5.50	6.00
0.0125	1.400	1.930	2.460	2.930	3.300	3.550	3.700	3.780	3.830	3.860
0.0250	1.290	1.760	2.350	2.770	3.000	3.140	3.200	3.240	3.270	3.260
0.0375	1.250	1.610	2.200	2.590	2.770	2.870	2.910	2.940	2.950	2.960
0.0500	1.180	1.510	2.050	2.430	2.590	2.670	2.700	2.720	2.730	2.740

TABLA 33. Valores finales de  $C_x$  para sistemas con T=0.5 seg en terreno firme

T = 0.25 seg

$C_x$

$C_k$	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00	5.50	6.00
0.00625	1.500	2.000	2.490	2.960	3.370	3.660	3.860	3.990	4.070	4.130
0.01250	1.499	1.990	2.460	2.840	3.090	3.250	3.360	3.420	3.470	3.500

TABLA 34. Valores finales de  $C_x$  para sistemas con T=0.25 seg en terreno firme

T = 1.0 seg

$C_x$

$C_k$	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00	5.50	6.00
0.00625	1.490	1.990	2.490	2.930	3.250	3.480	3.650	3.740	3.810	3.880
0.01250	1.490	1.980	2.390	2.640	2.800	2.900	2.970	3.030	3.060	3.100
0.01875	1.490	1.960	2.250	2.410	2.520	2.580	2.630	2.670	2.700	2.720
0.02500	1.490	1.910	2.140	2.260	2.330	2.380	2.420	2.450	2.470	2.480
0.03750	1.490	1.820	1.960	2.040	2.090	2.130	2.150	2.170	2.190	2.200
0.05000	1.480	1.740	1.850	1.910	1.950	1.970	1.990	2.010	2.020	2.030
0.07500	1.440	1.620	1.690	1.740	1.770	1.780	1.800	1.810	1.820	1.830
0.10000	1.410	1.540	1.600	1.630	1.660	1.670	1.680	1.690	1.696	1.700
0.12500	1.380	1.490	1.530	1.560	1.580	1.590	1.600	1.610	1.620	1.630
0.15000	1.350	1.440	1.480	1.510	1.530	1.540	1.550	1.560	1.563	1.570

TABLA 35. Valores finales de  $C_x$  para sistemas con T=1.0 seg en terreno compresible

EJEMPLO I	TERRENO FIRME			TERRENO COMPRESIBLE				
	$T_1=1.0$ seg	$T_1=0.5$ seg	$T_1=0.25$ seg	$T_1=1.0$ seg				
$k_1$	157.91	631.66	2526.62	157.91				
$k_2$	5.61	5.61	5.61	5.61				
$C_k$	0.0355	0.0088	0.022	0.0355				
$D_{max}$	11.20	11.20	11.20	11.20				
$X_e$	12.52	4.50	0.99	2.78				
$C_{x_{max}}$ ( $P_f=0.001$ )	3.87	6.00	6.00	2.00				
$C_x$ ( $P_e=0.05$ )	$C_k$	$C_x$	$C_k$	$C_x$	$C_k$	$C_x$	$C_k$	$C_x$
(para in- terpolar)	0.025	--	0.0	2.41	0.0	--	0.025	1.51
	0.0375	--	0.0125	2.38	0.0125	3.79	0.0375	1.51
$C_x$	----		2.381		6.35			1.51
Q	----		5.95		71.84			6.07

TABLA 36. Resultados del ejemplo I para los sistemas modificados por el efecto P- $\Delta$

EJEMPLO I	TERRENO FIRME			TERRENO COMPRESIBLE
	1.0	0.5	0.25	1.0
$T_1$ (seg)	1.0	0.5	0.25	1.0
$C_{x_g}$	---	2.39	6.35	1.51
T (seg)	0.983	0.498	0.2497	0.983
K (ton/m)	163.52	637.26	2532.22	163.52
$X_o$ (cm)		1.88	0.16	1.84

TABLA 37. Resultados del ejemplo I para los sistemas originales

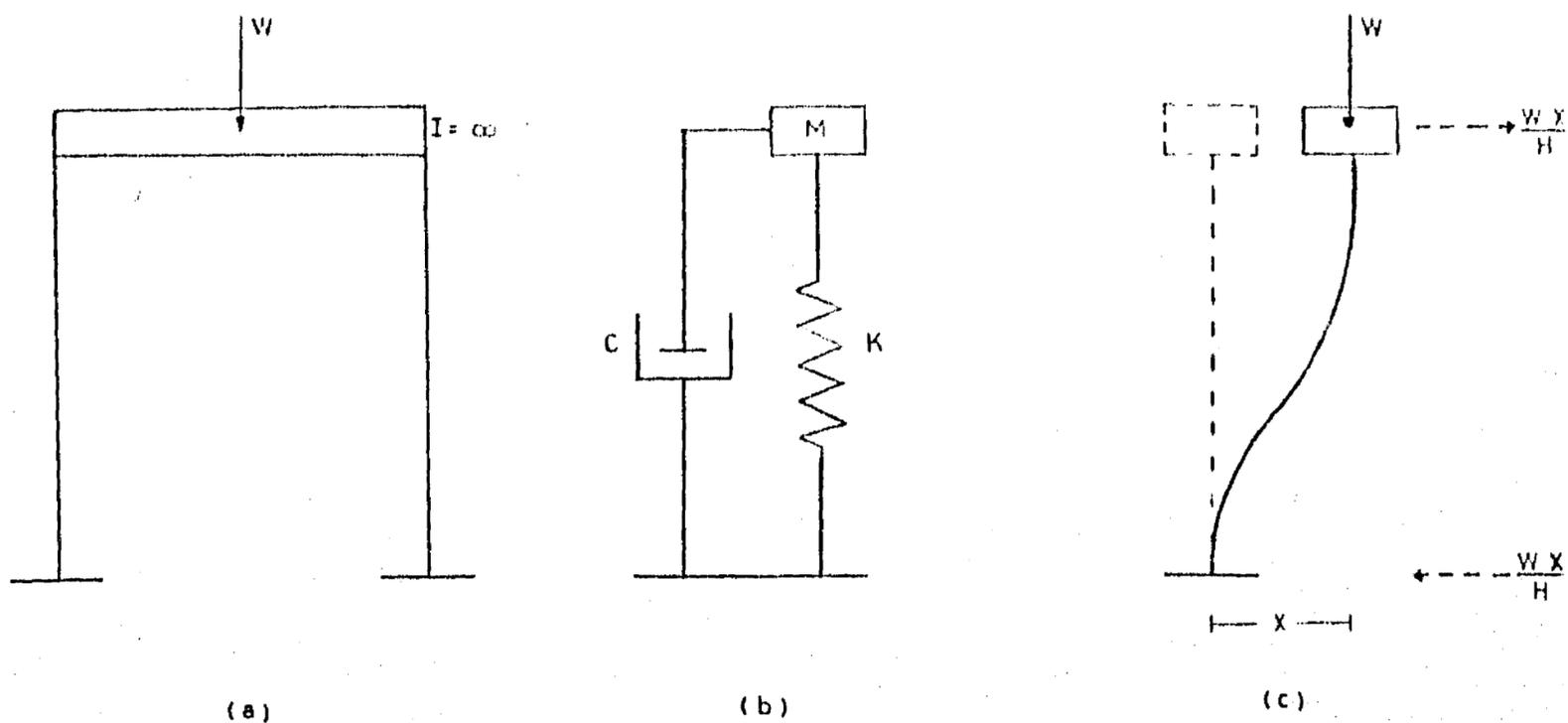


Fig 1. Modelo estructural del sistema simple con efectos de segundo orden (P- $\Delta$ )

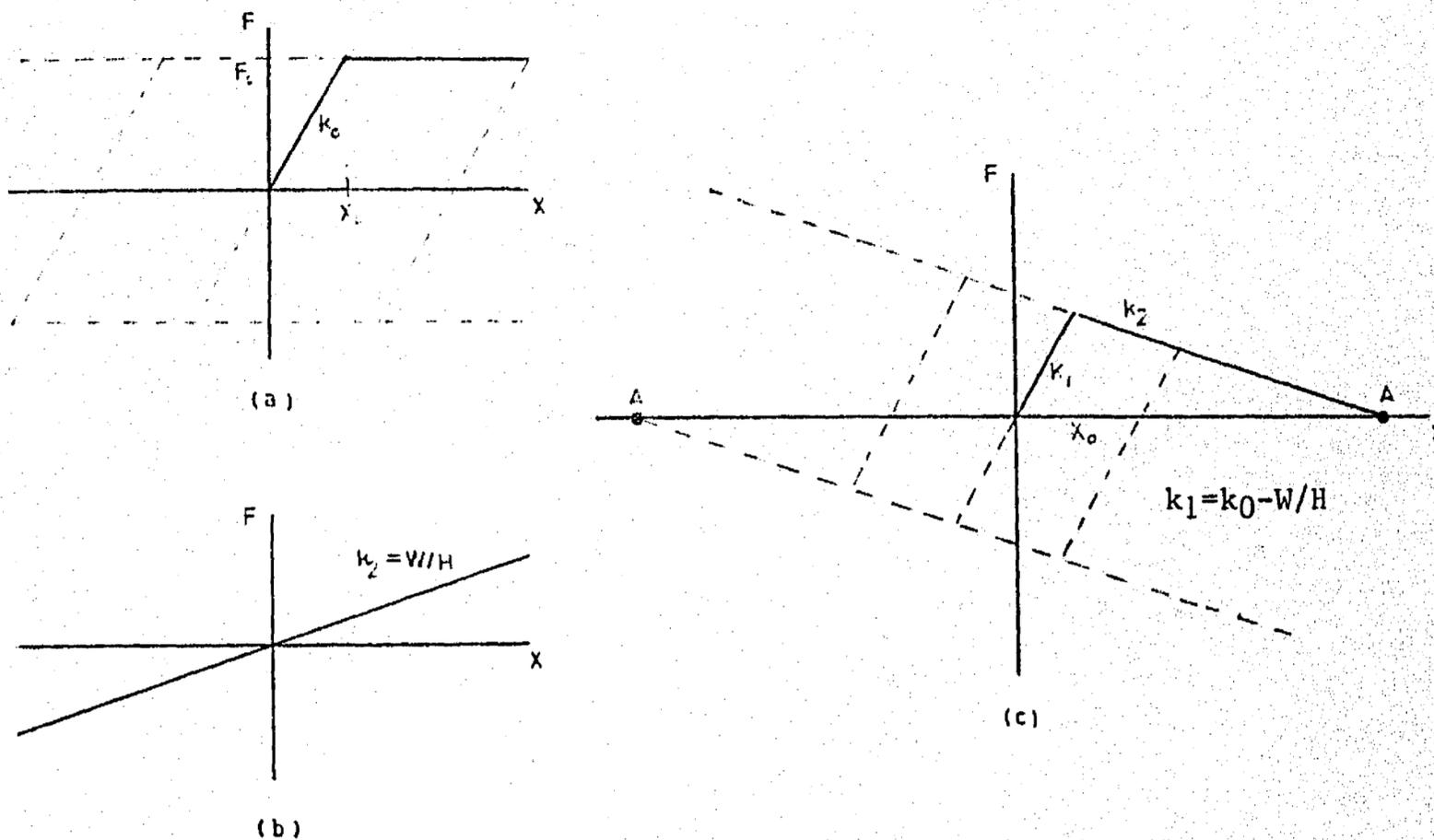


Fig 2. Relación fuerza-desplazamiento histerético bilineal que rige el comportamiento de entrepiso del modelo estructural  
 a) comportamiento de entrepiso sin efecto P- $\Delta$   
 b) efecto P- $\Delta$   
 c) comportamiento de entrepiso con efecto P- $\Delta$

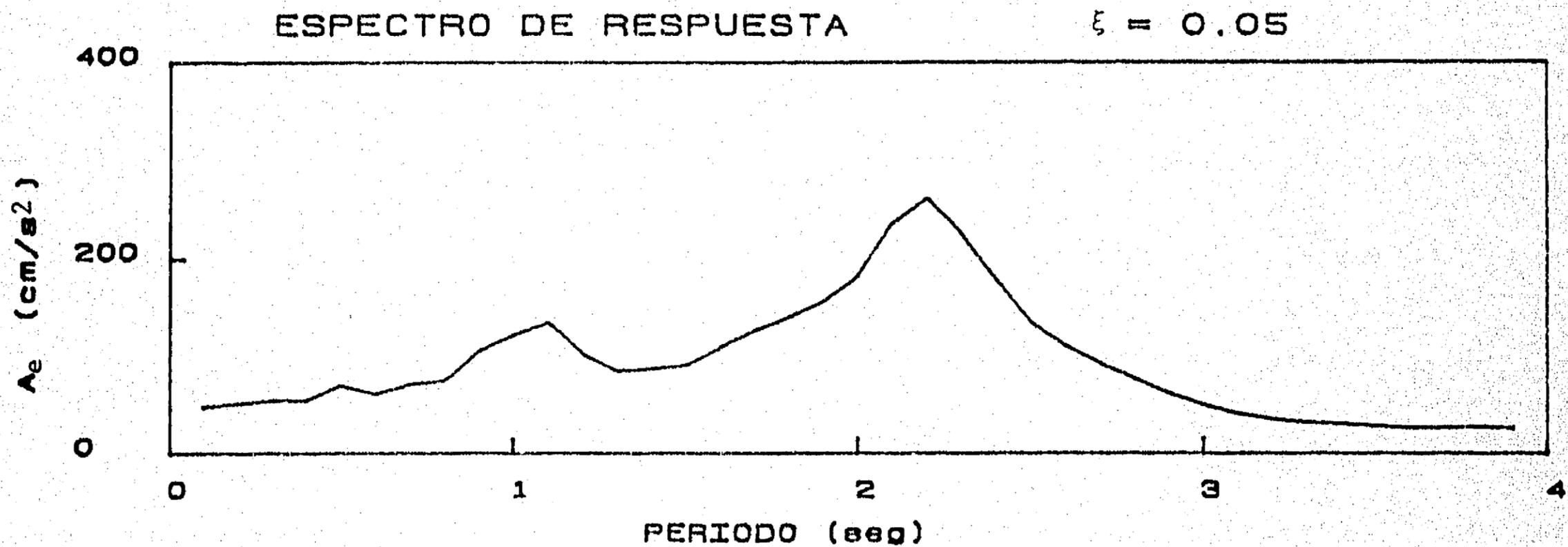
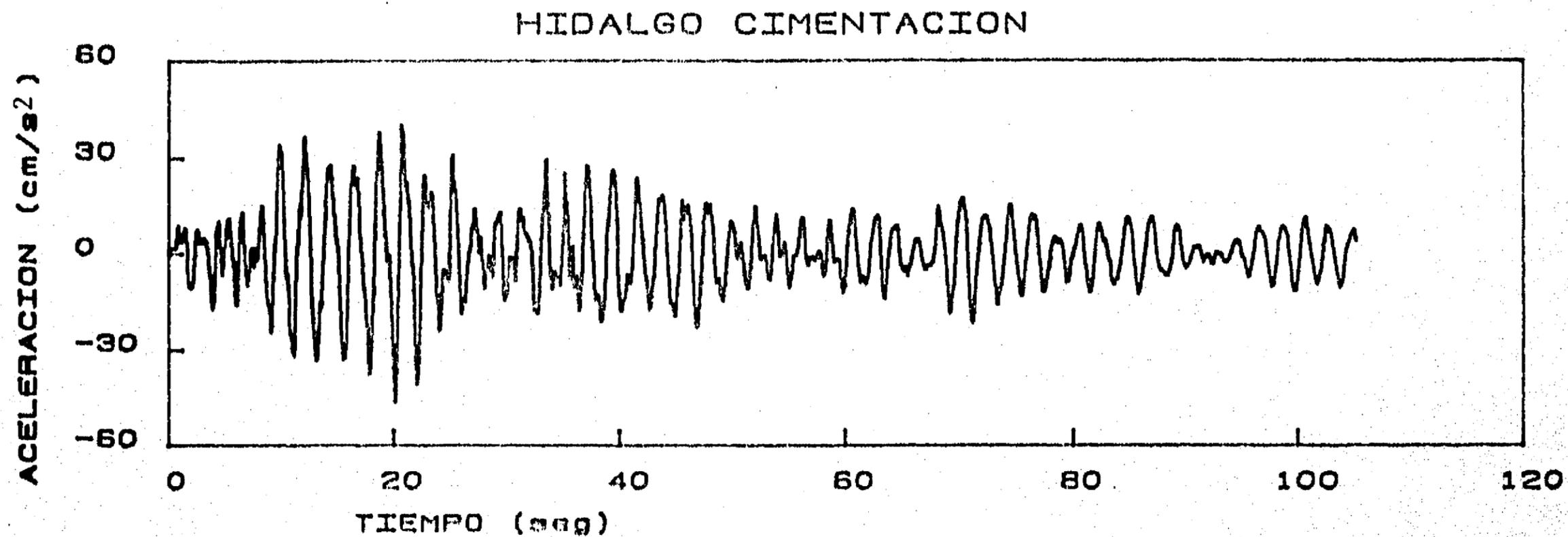


Fig 3. Acelerograma y espectro de respuesta del sismo Hidalgo Cimentación, componente E-W, 6 de julio de 1964.  $A_e$  = aceleración espectral.

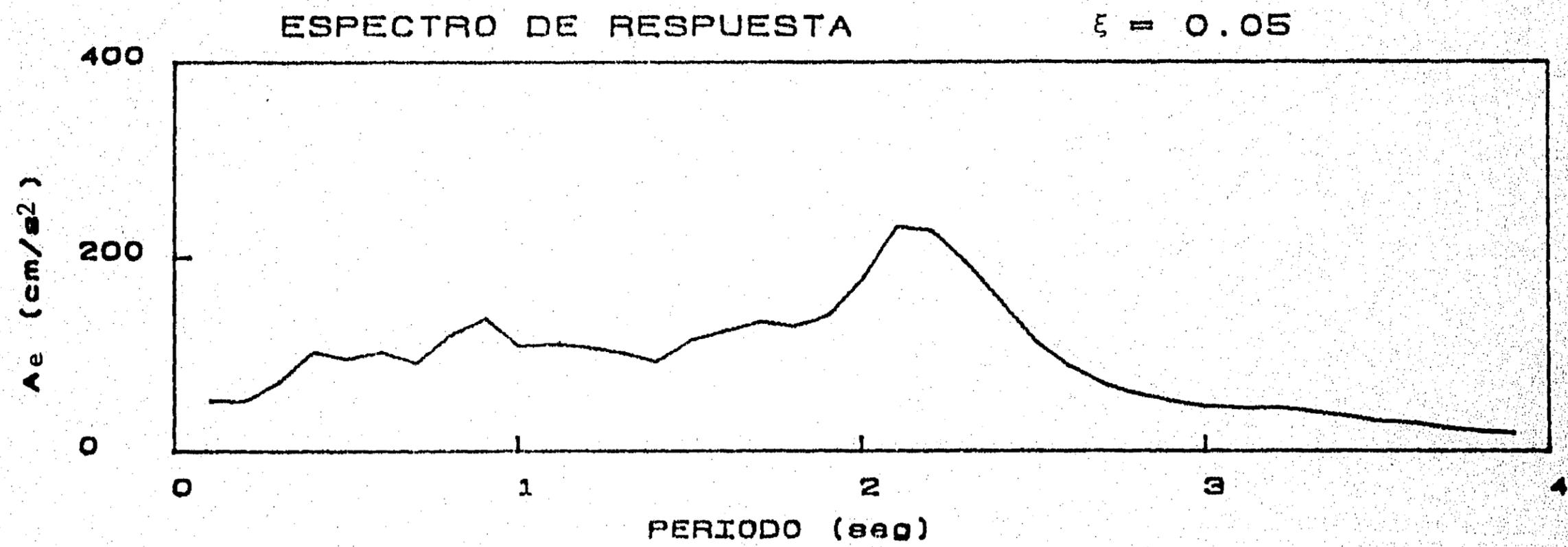
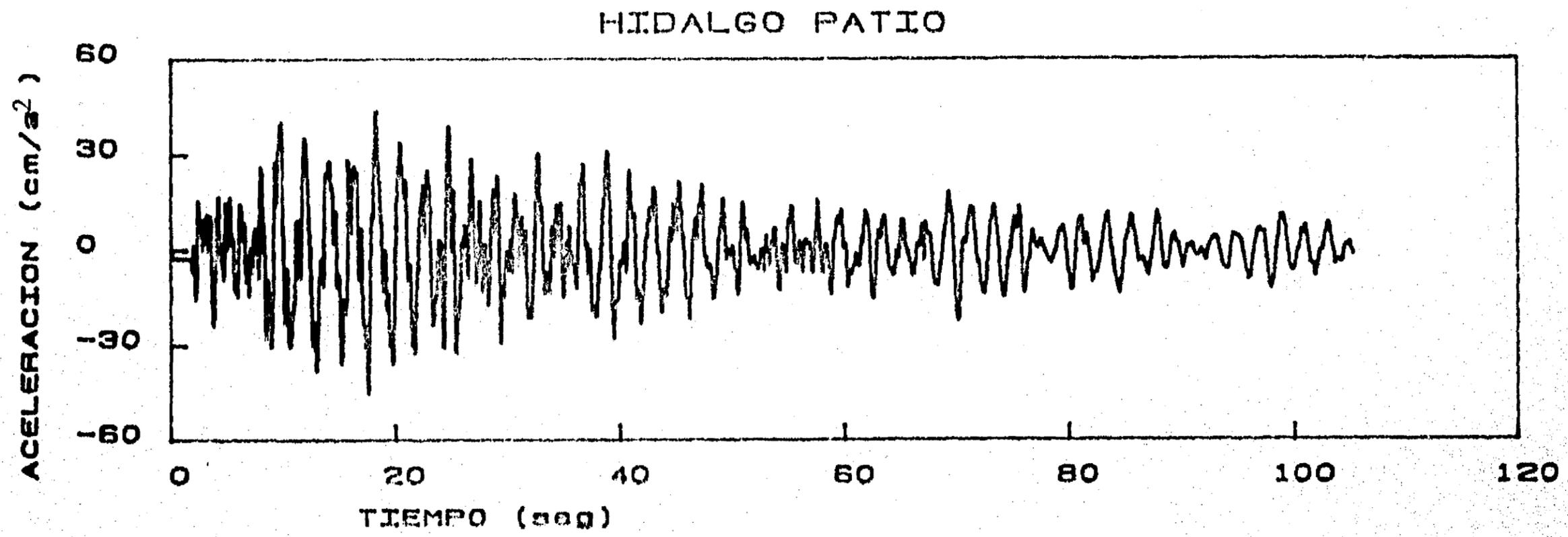


Fig 4. Acelerograma y espectro de respuesta del sismo Hidalgo Patio, componente E-W, 6 de julio de 1964. A<sub>e</sub> = aceleración espectral.

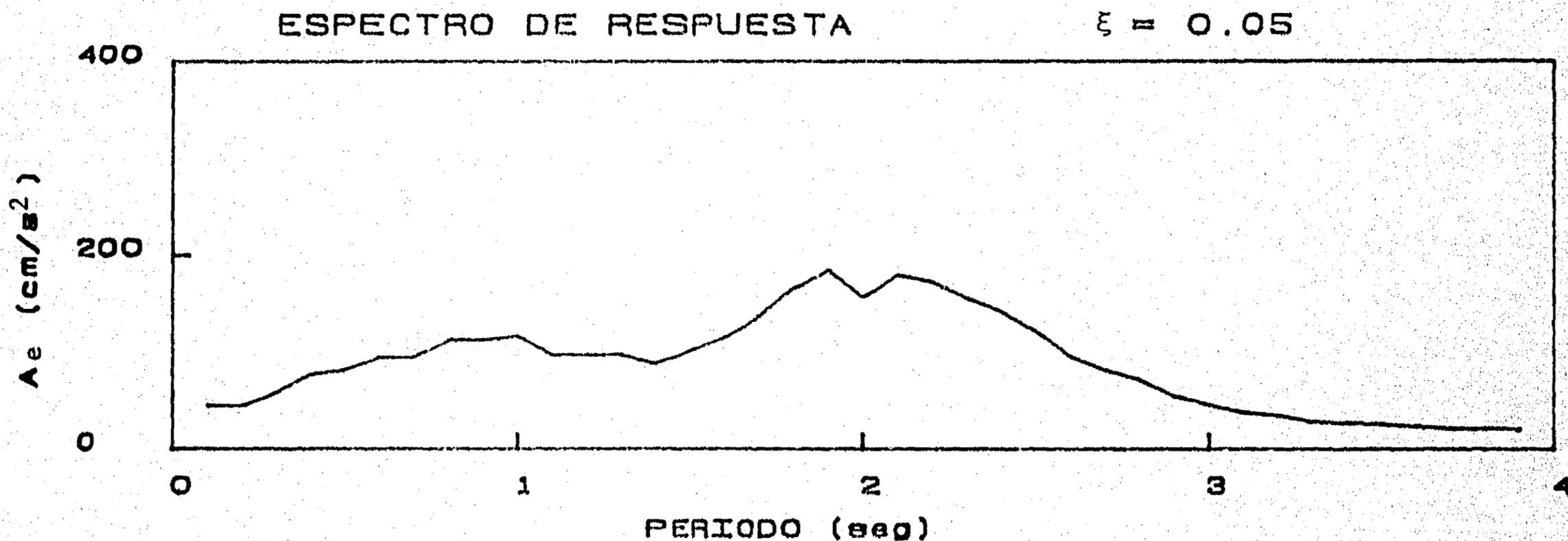
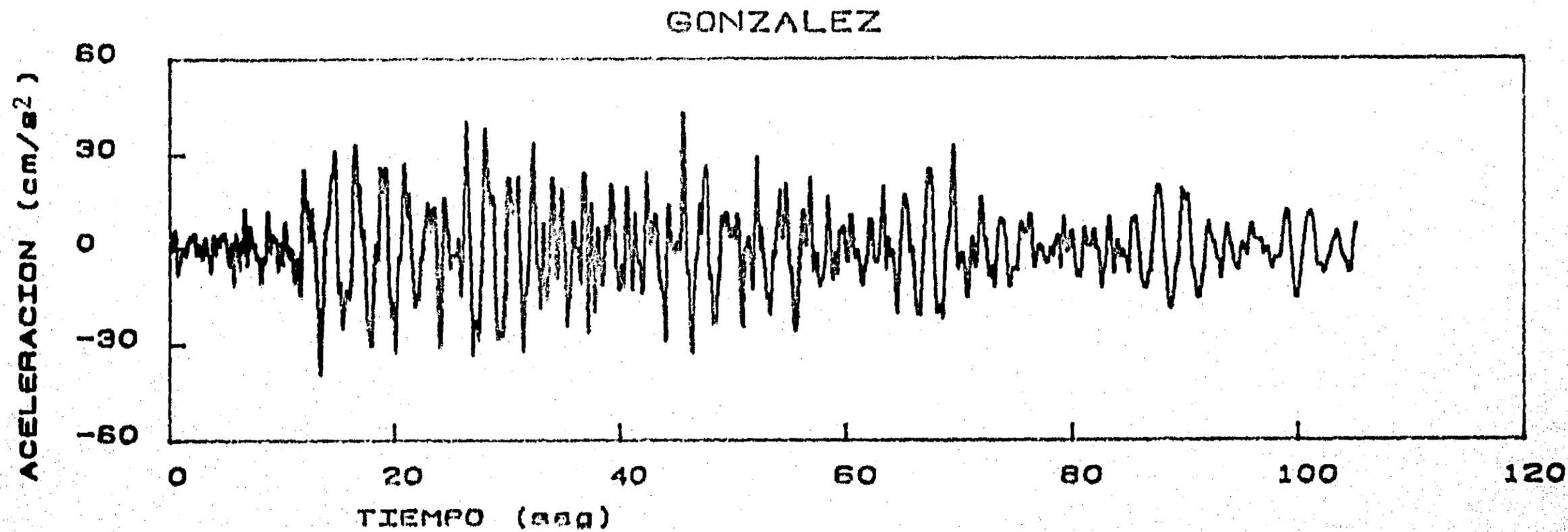


Fig 5. Acelerograma y espectro de respuesta del sismo Gonzalez, componente N-S, 6 de julio de 1964. A<sub>e</sub> = aceleración espectral.

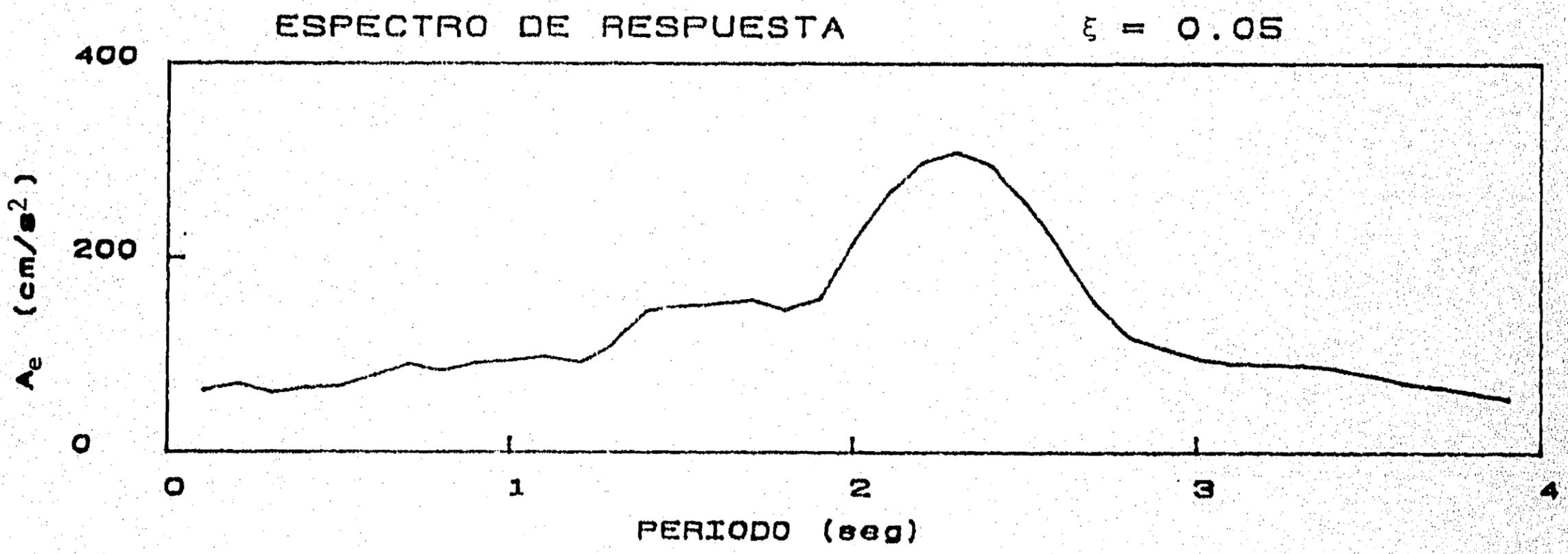
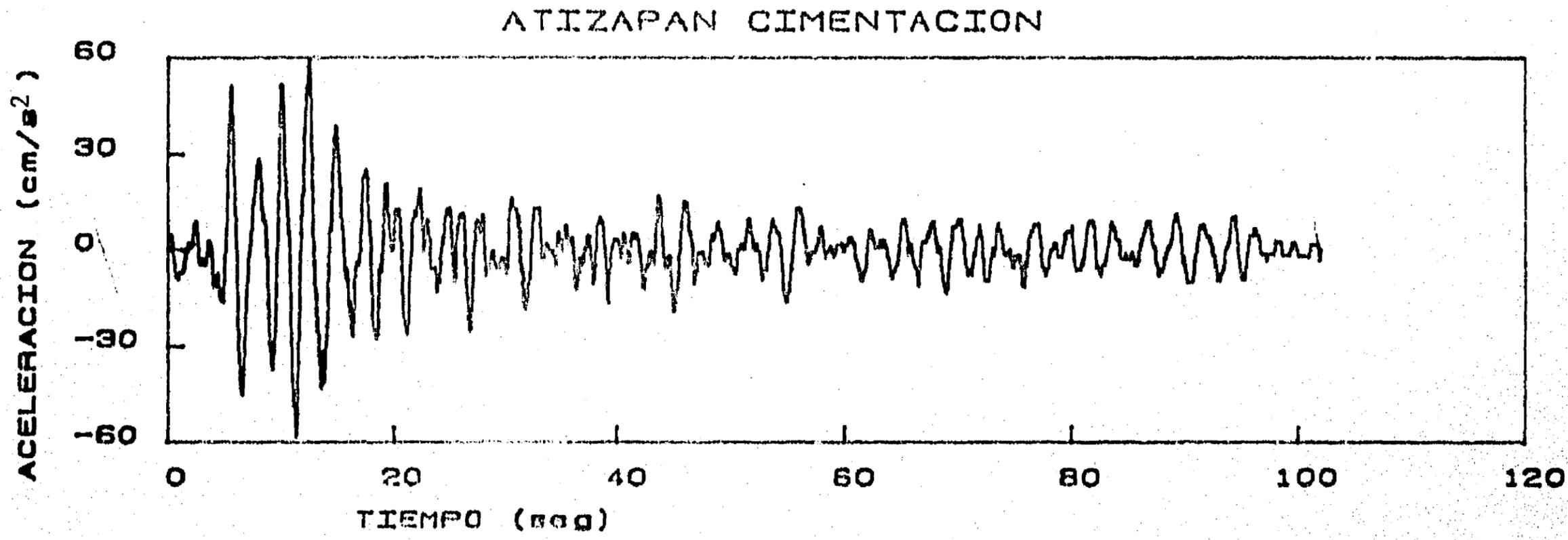


Fig 6. Acelerograma y espectro de respuesta del sismo Atizapán Cimentación, componente E-W, 2 de agosto de 1968.  $A_e$  = aceleración espectral.

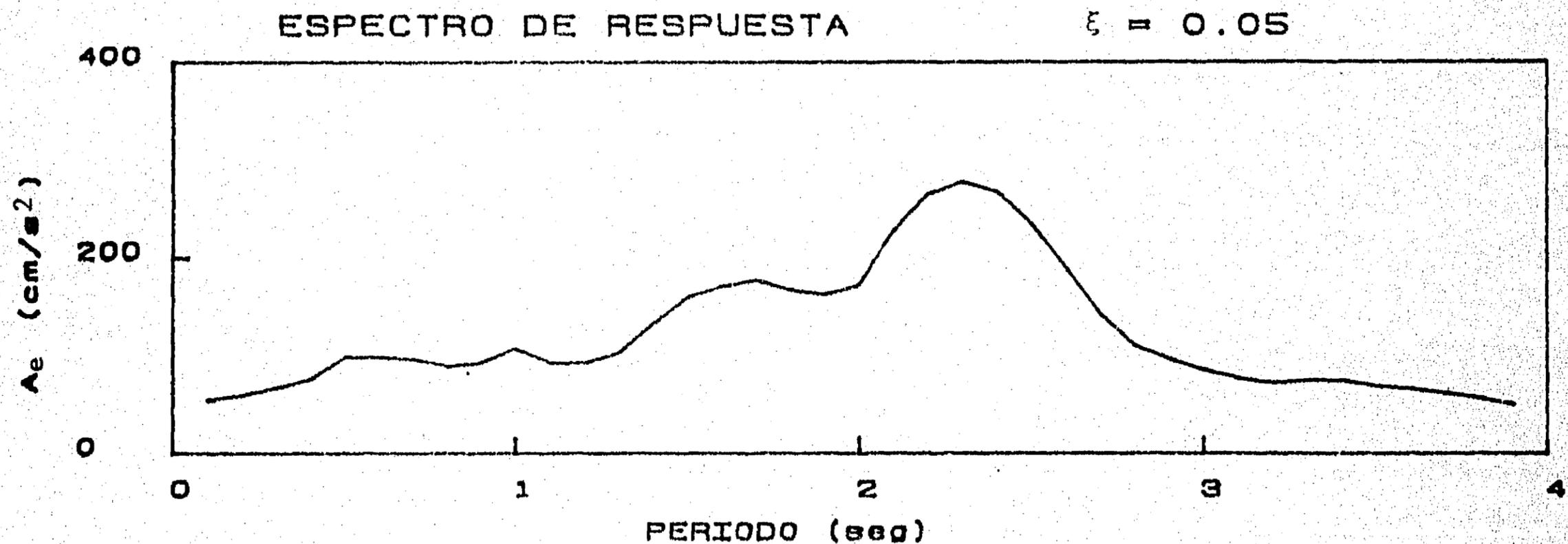
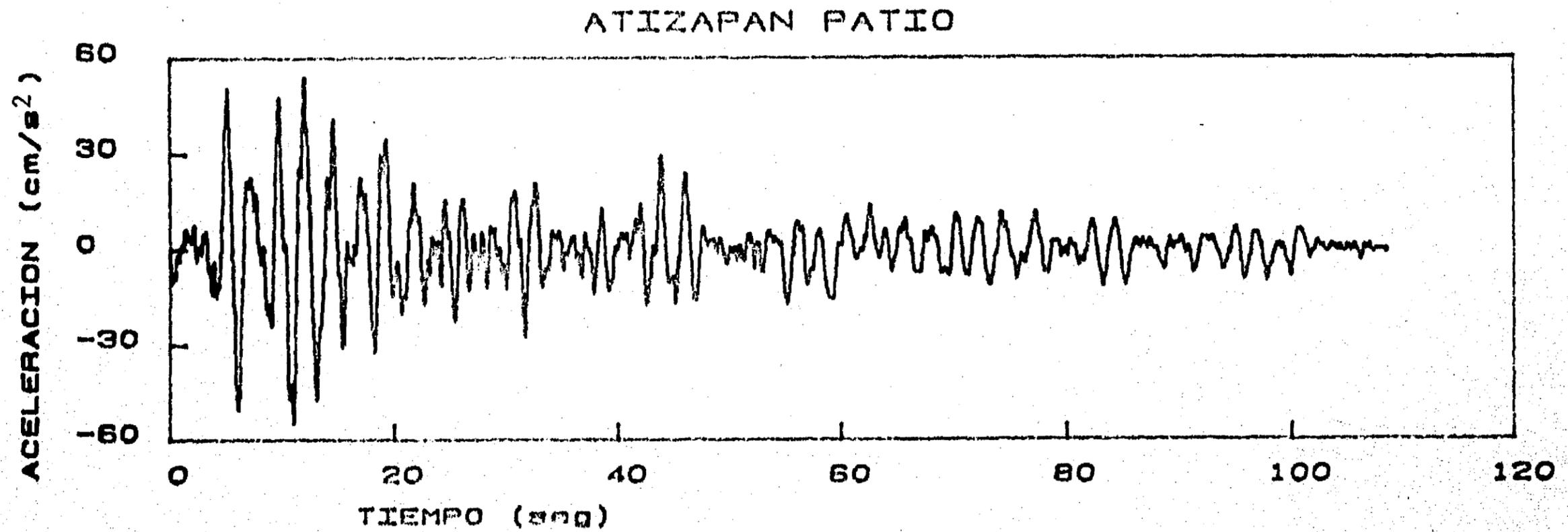


Fig 7. Acelerograma y espectro de respuesta del sismo Atizapán Patio, componente E-W, 2 de agosto de 1968.  $A_e$  = aceleración espectral.

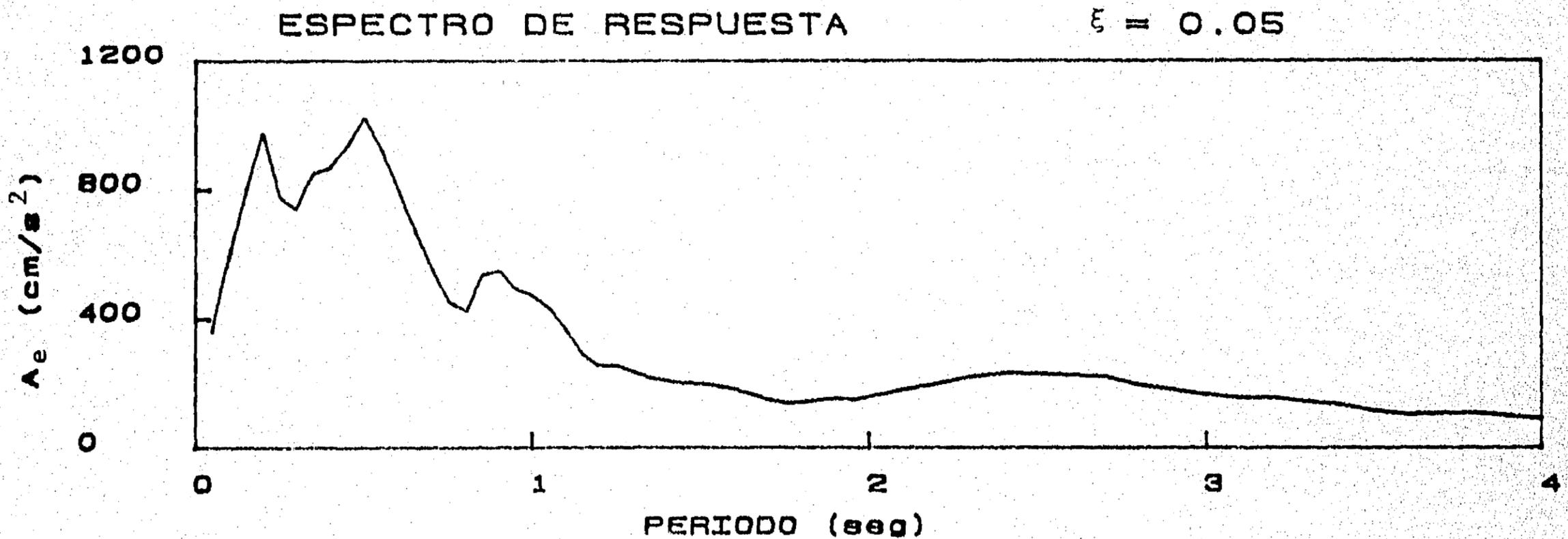
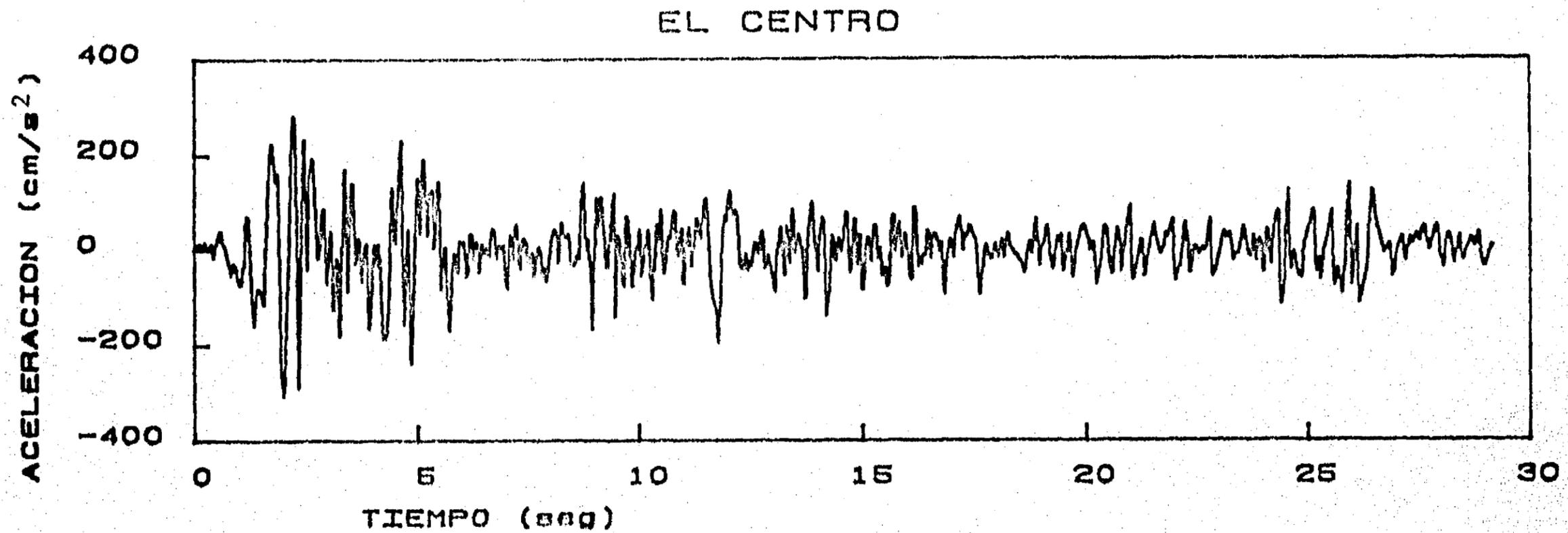


Fig 8. Acelerograma y espectro de respuesta del sismo El Centro, componente N-S, 18 de mayo de 1940. A<sub>e</sub> = aceleración espectral.

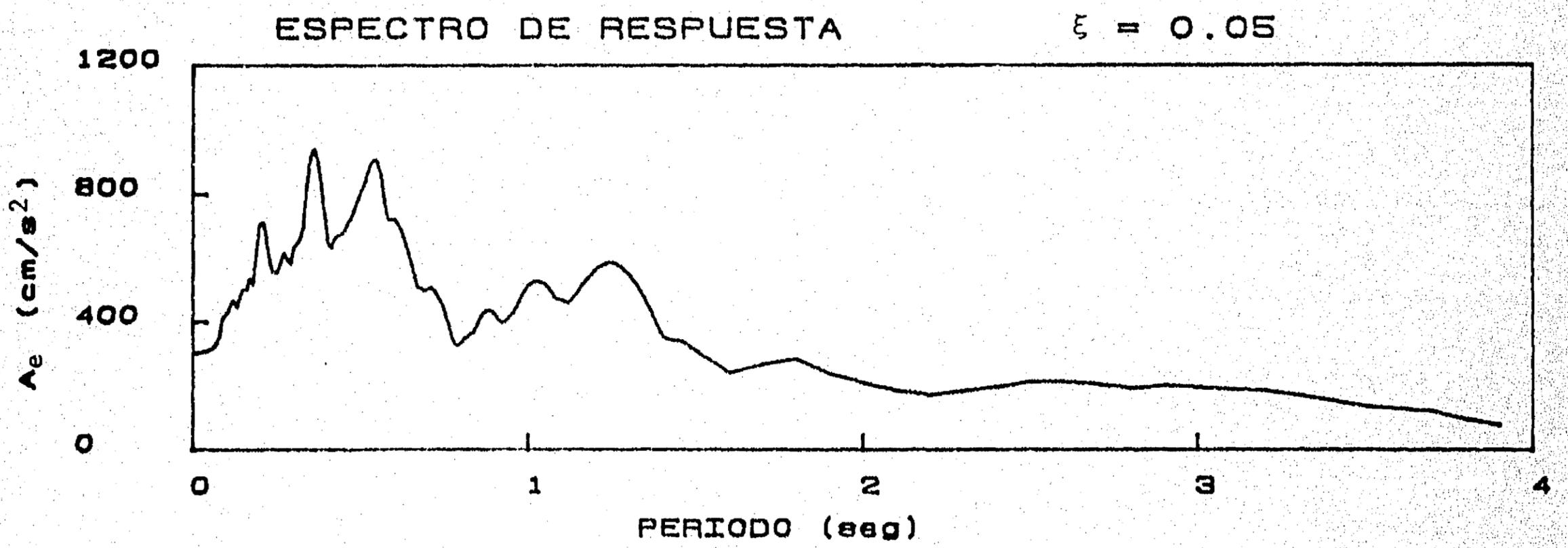
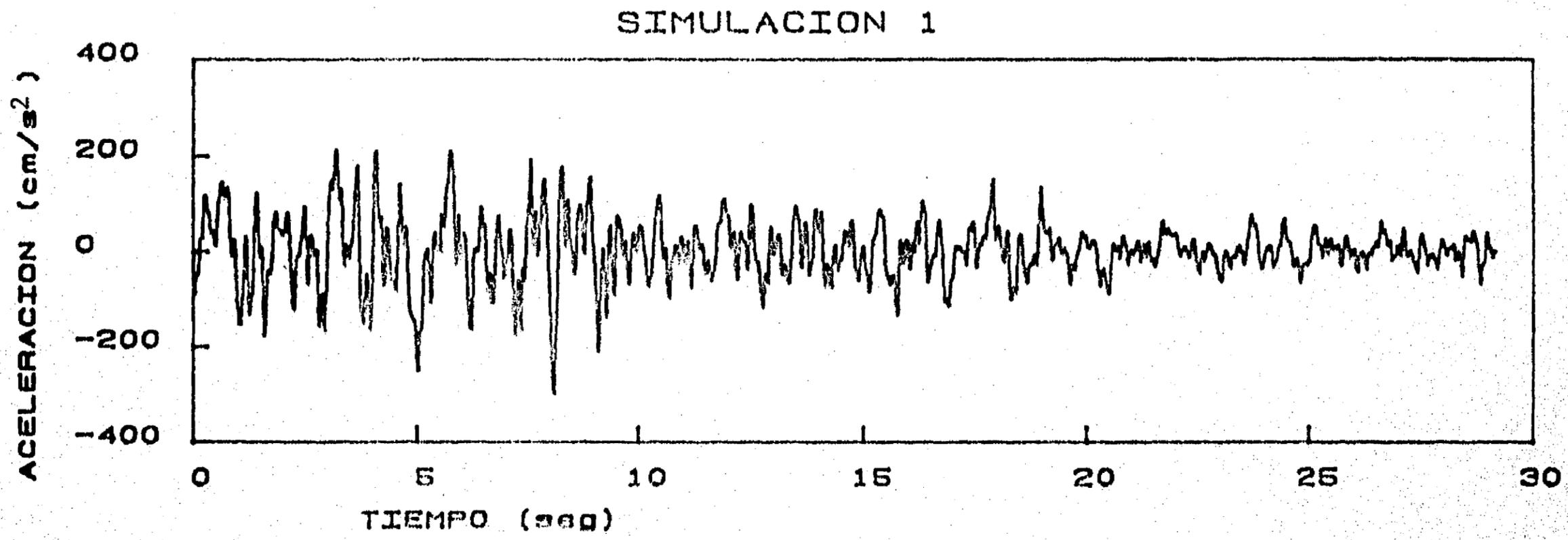


Fig 9. Acelerograma y espectro de respuesta del sismo simulado Simulación 1, para terreno firme. A<sub>e</sub> = aceleración espectral.

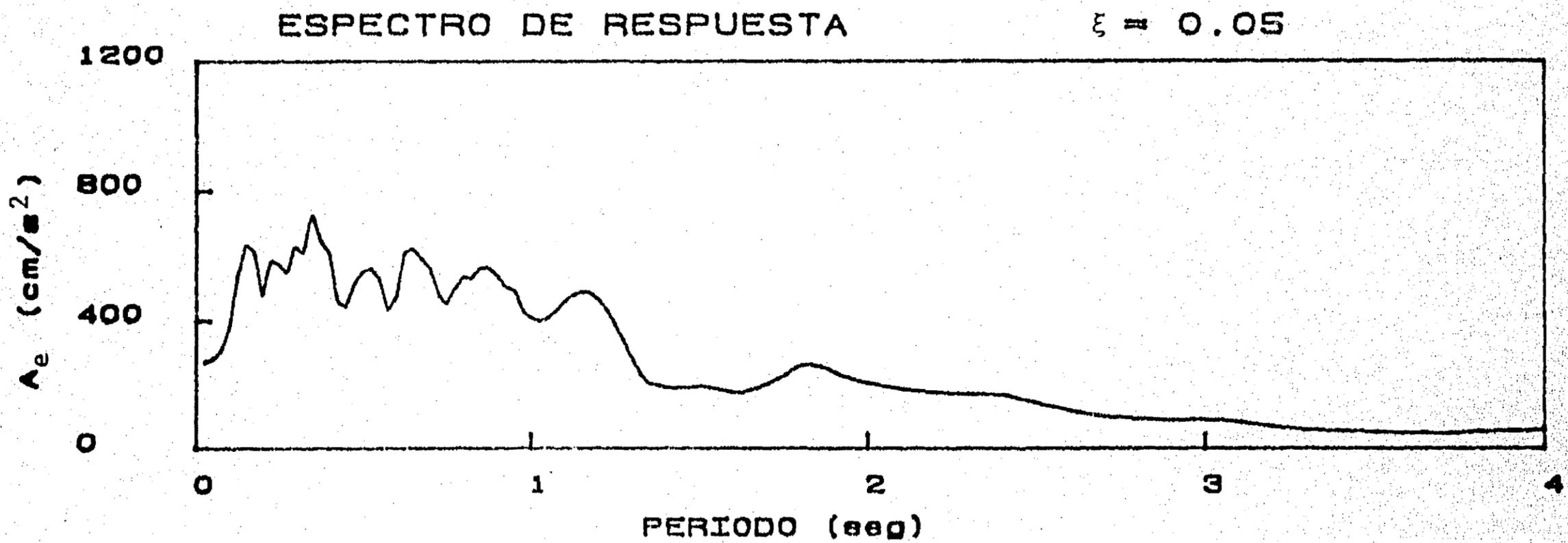
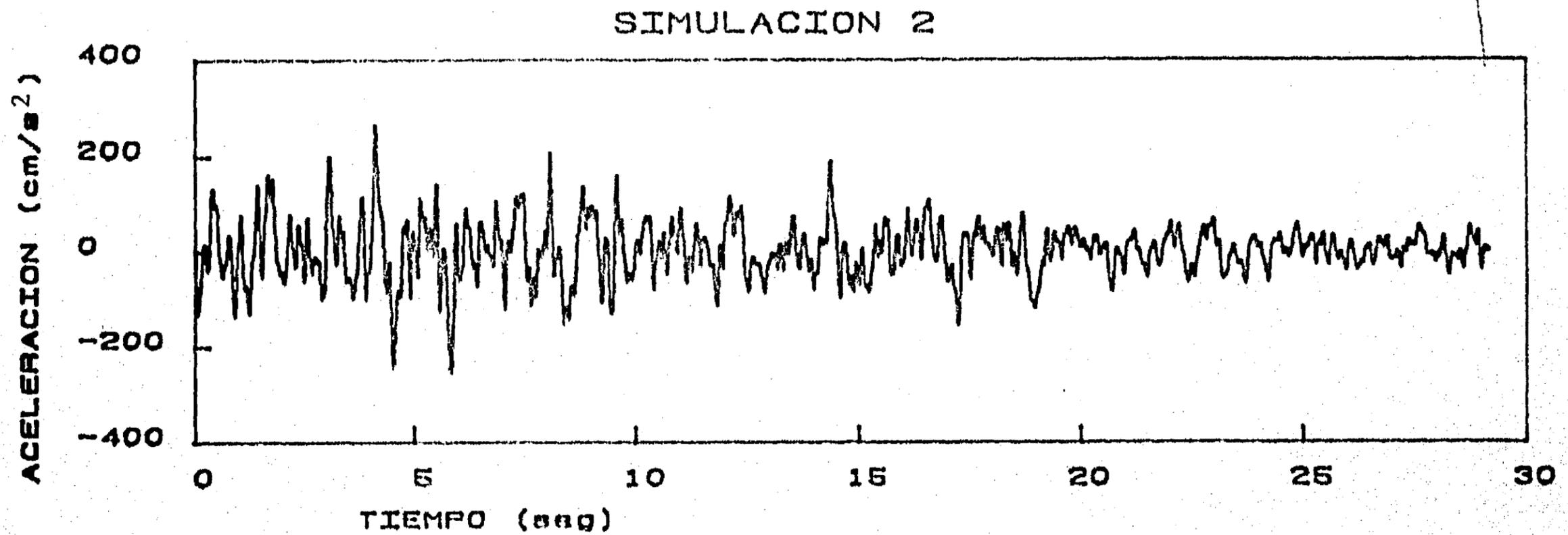


Fig 10. Acelerograma y espectro de respuesta del sismo simulado Simulación 2, para terreno firme. A<sub>e</sub> = aceleración espectral.

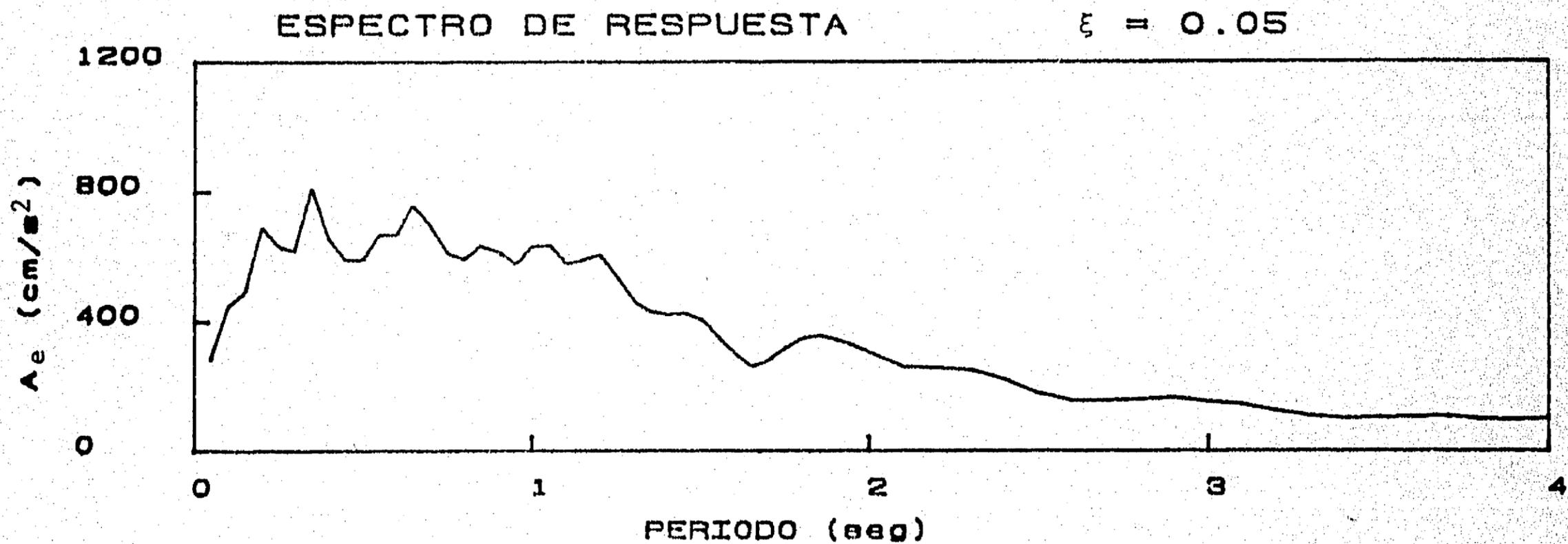
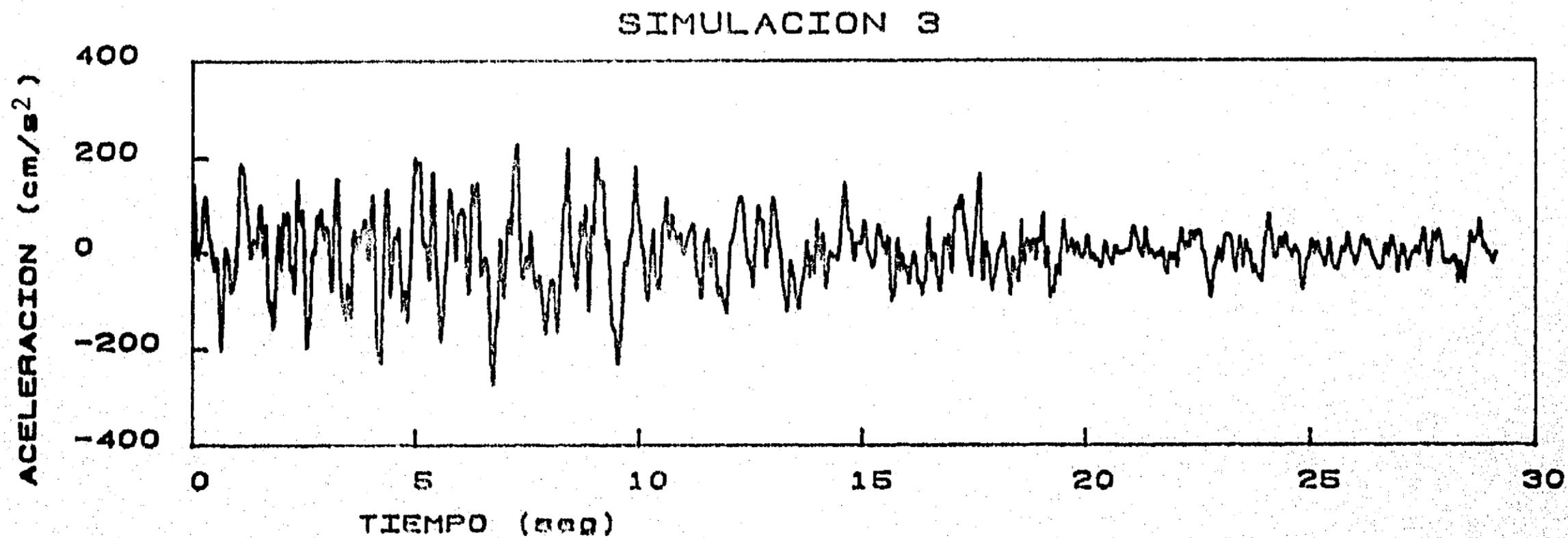


Fig 11. Acelerograma y espectro de respuesta del sismo simulado Simulación 3, para terreno firme. A<sub>e</sub> = aceleración espectral.

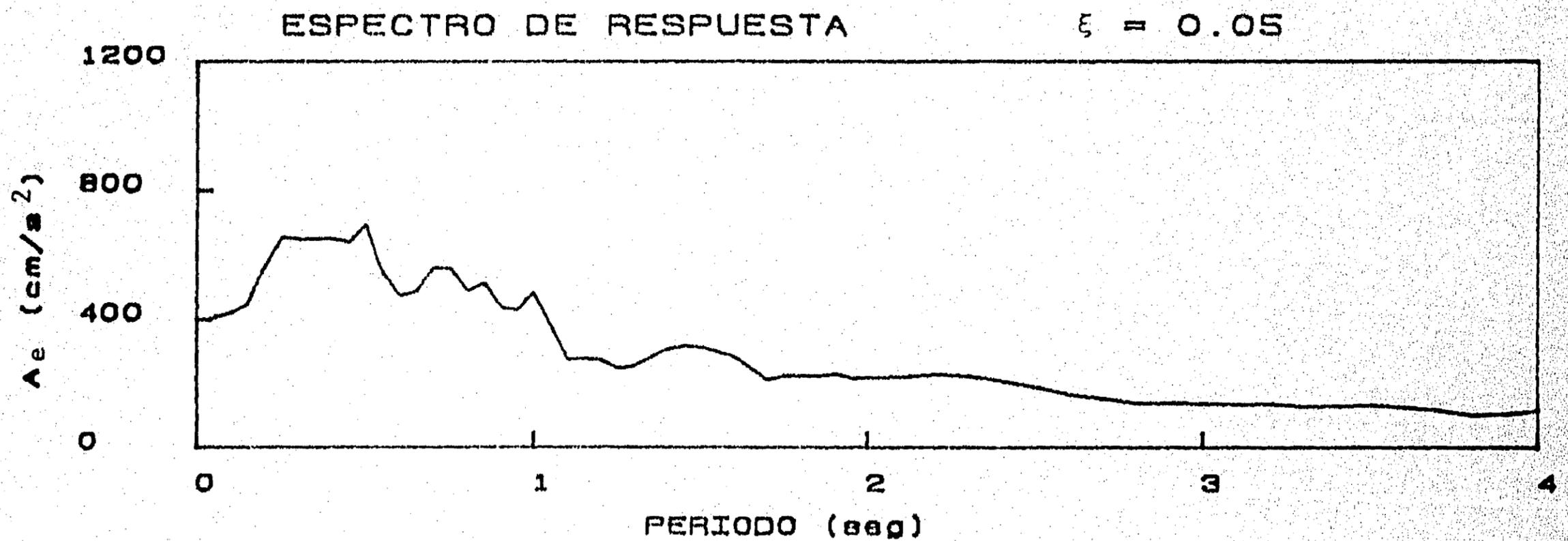
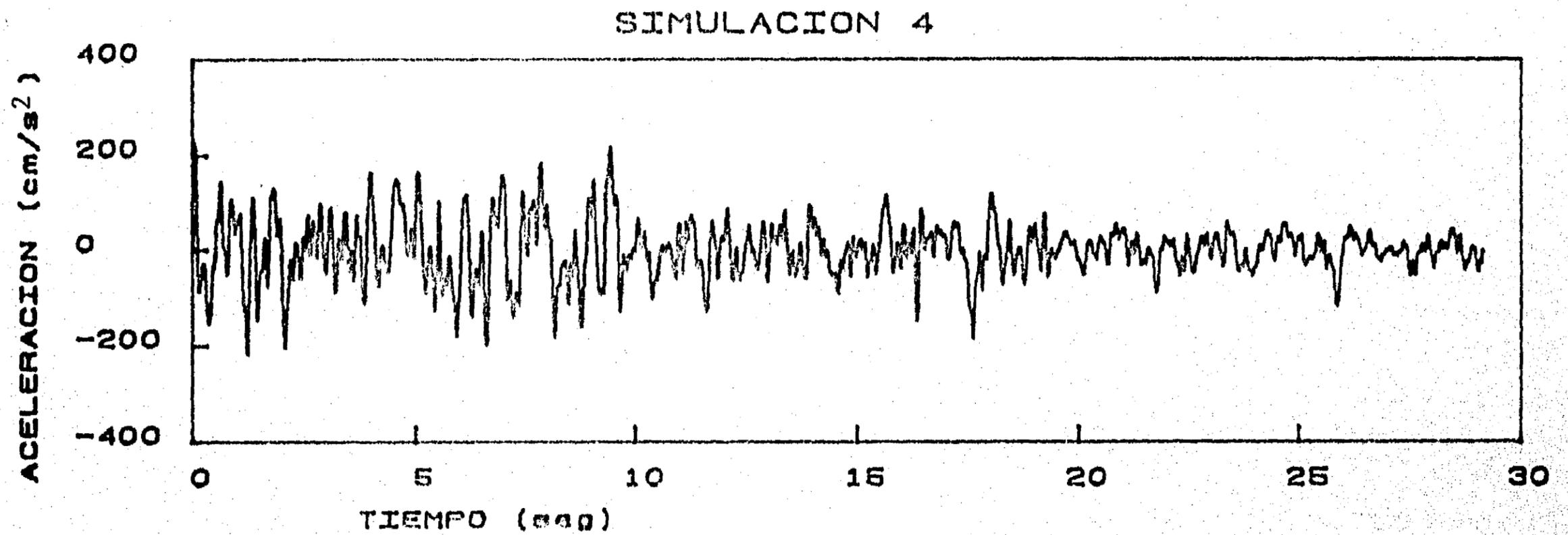


Fig 12. Acelerograma y espectro de respuesta del sismo simulado Simulación 4, para terreno firme. A<sub>e</sub> = aceleración espectral.

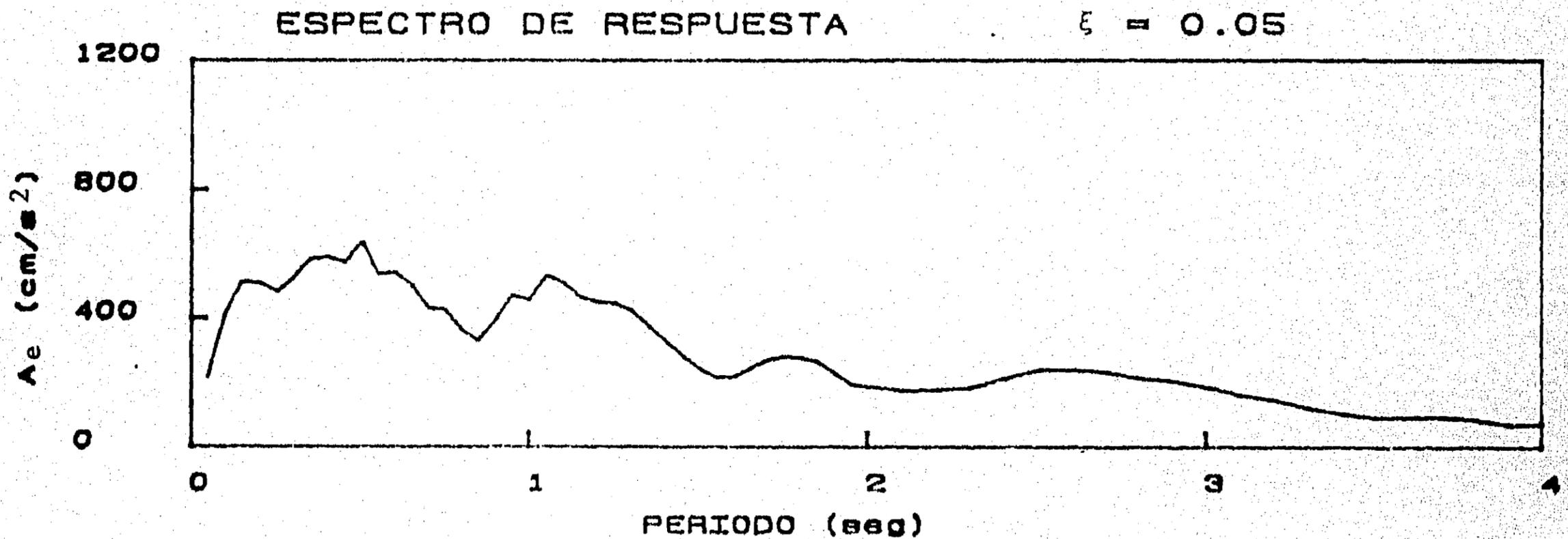
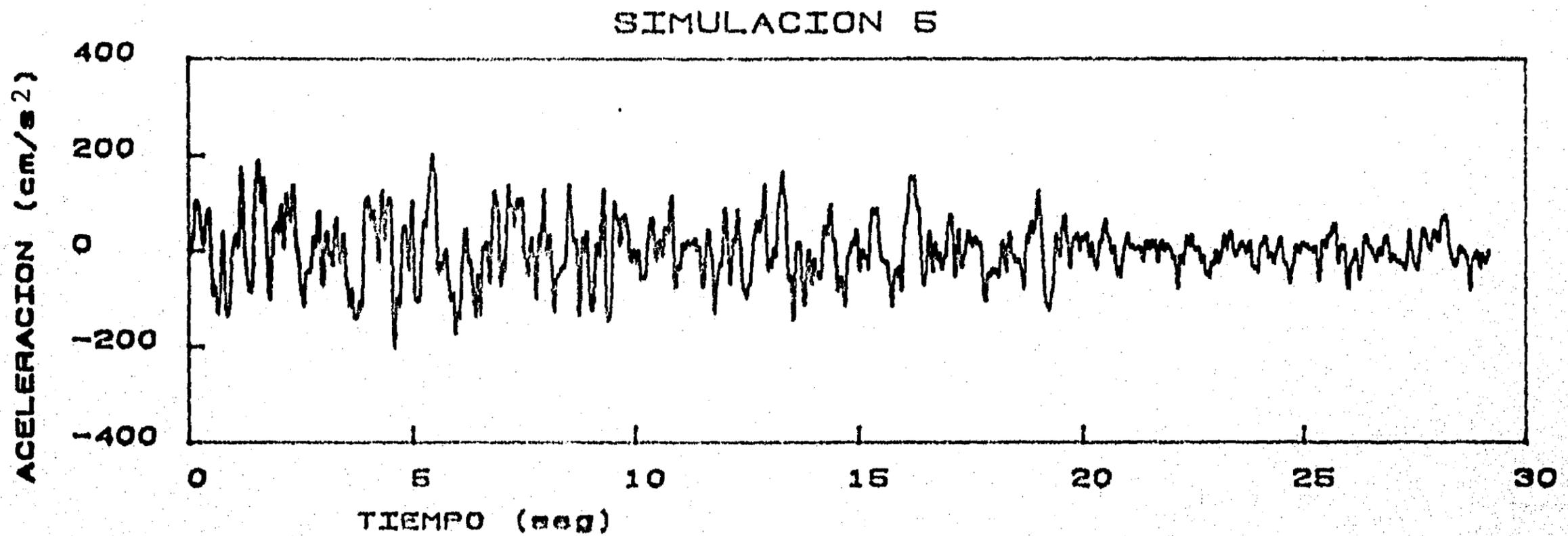


Fig 13. Acelerograma y espectro de respuesta del sismo simulado Simulación 5, para terreno firme.  $A_e$  = aceleración espectral.

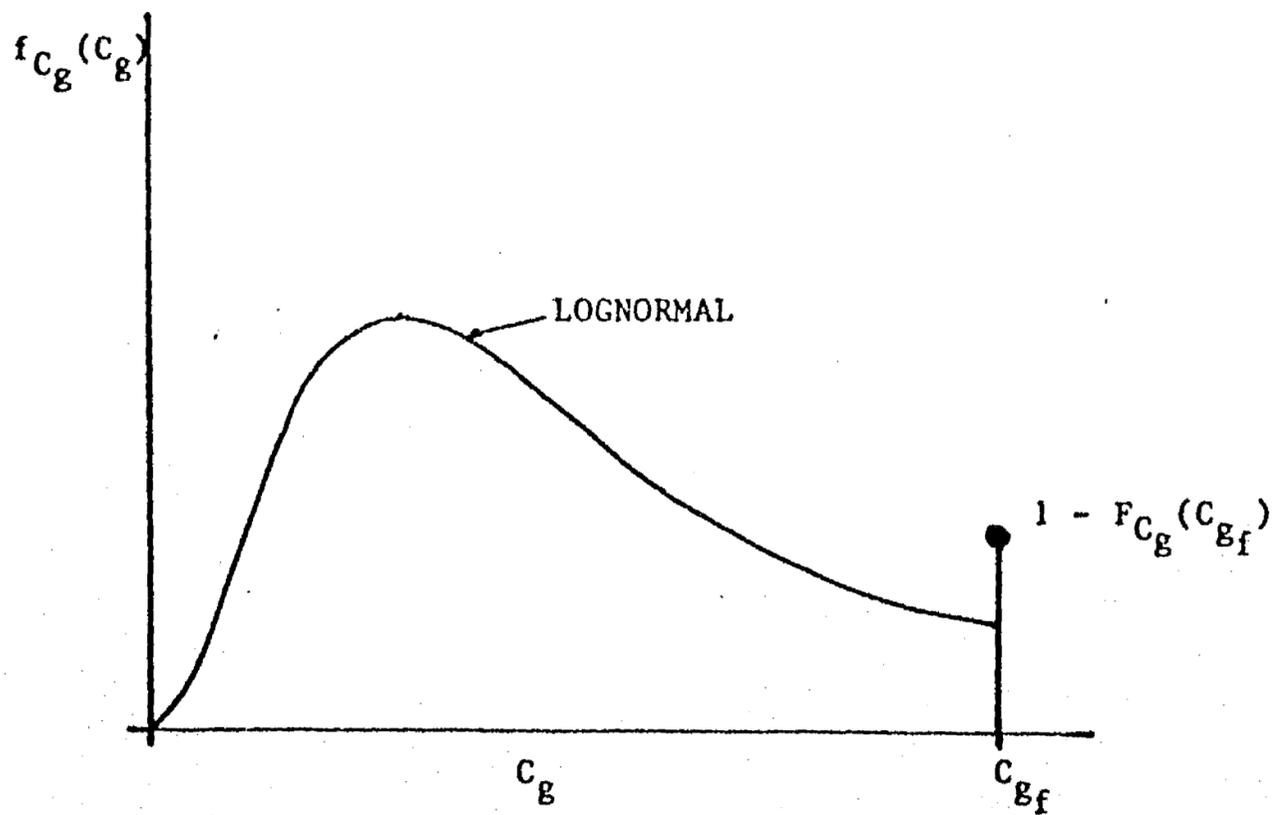


Fig 14. Distribución de probabilidades fundamental de frecuencias mixta de  $C_g$

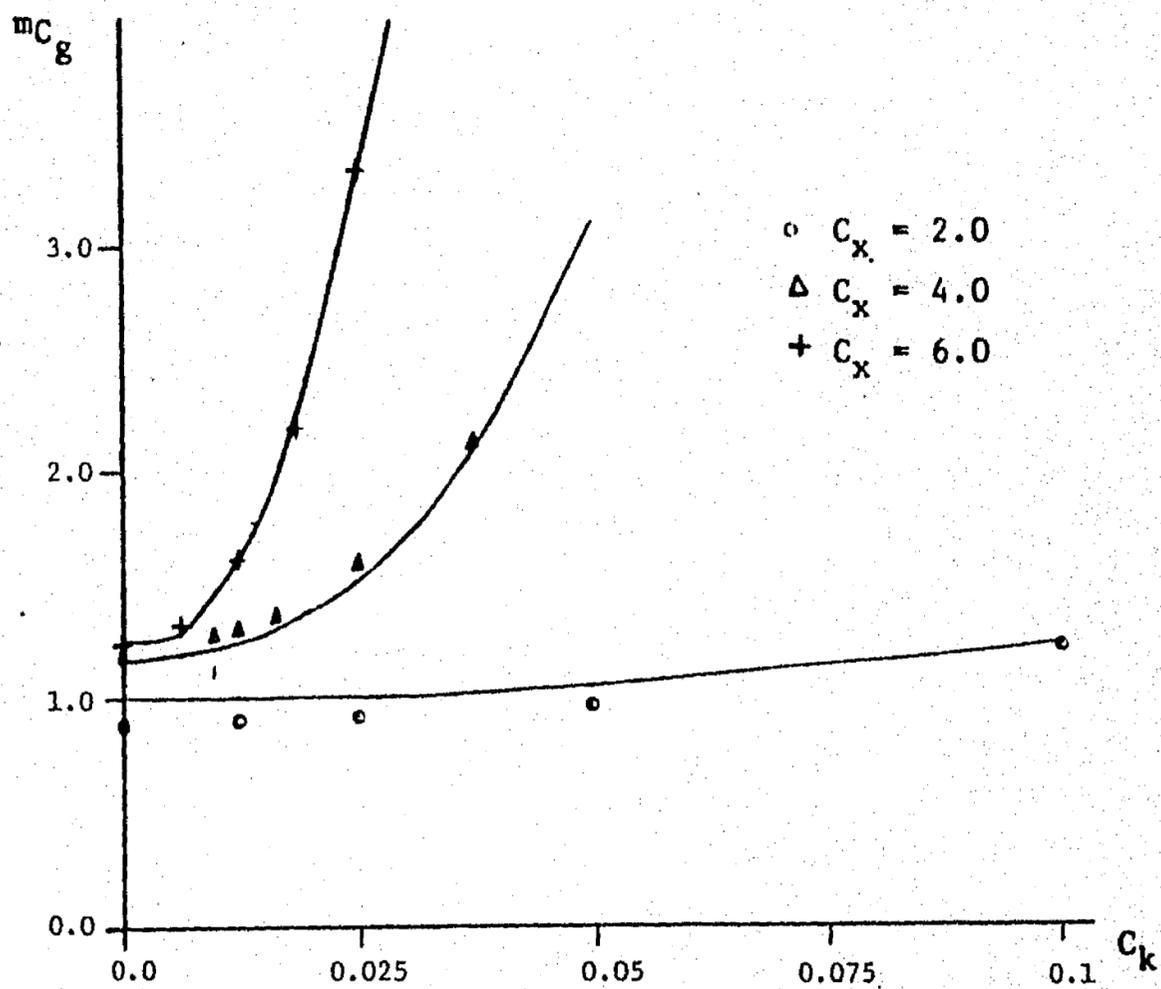


Fig 15. Valores medios muestrales utilizados en el ajuste de la expresión de la media de  $C_g$  ( $m_{C_g}$ ), para sistemas en terreno firme con  $T=1.0$  seg

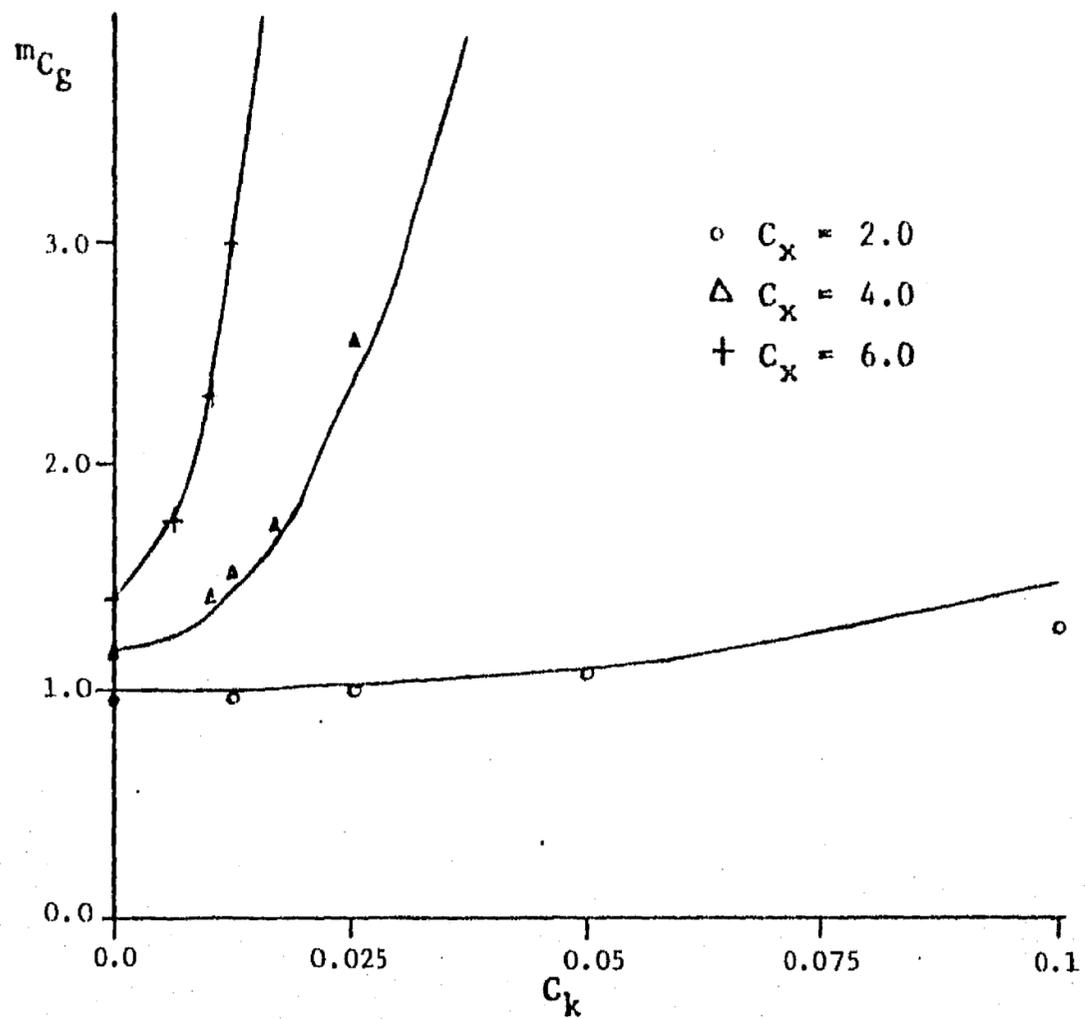


Fig 16. Valores medios muestrales utilizados en el ajuste de la expresión de la media de  $C_g$  ( $m_{C_g}$ ), para sistemas en terreno firme con  $T=0.5$  seg.

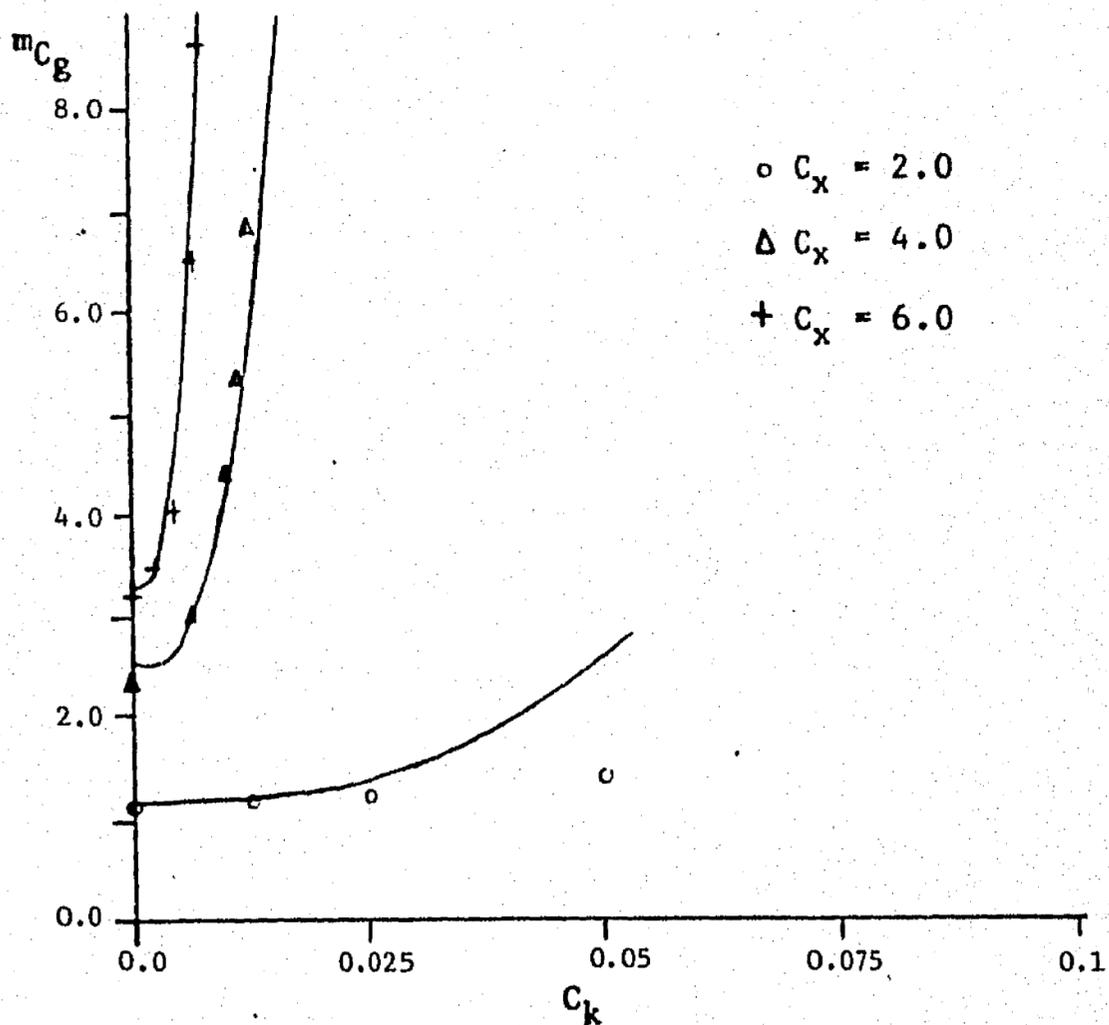


Fig 17. Valores medios muestrales utilizados en el ajuste de la expresión de la media de  $C_g$  ( $m_{C_g}$ ), para sistemas en terreno firme con  $T=0.25$  seg.

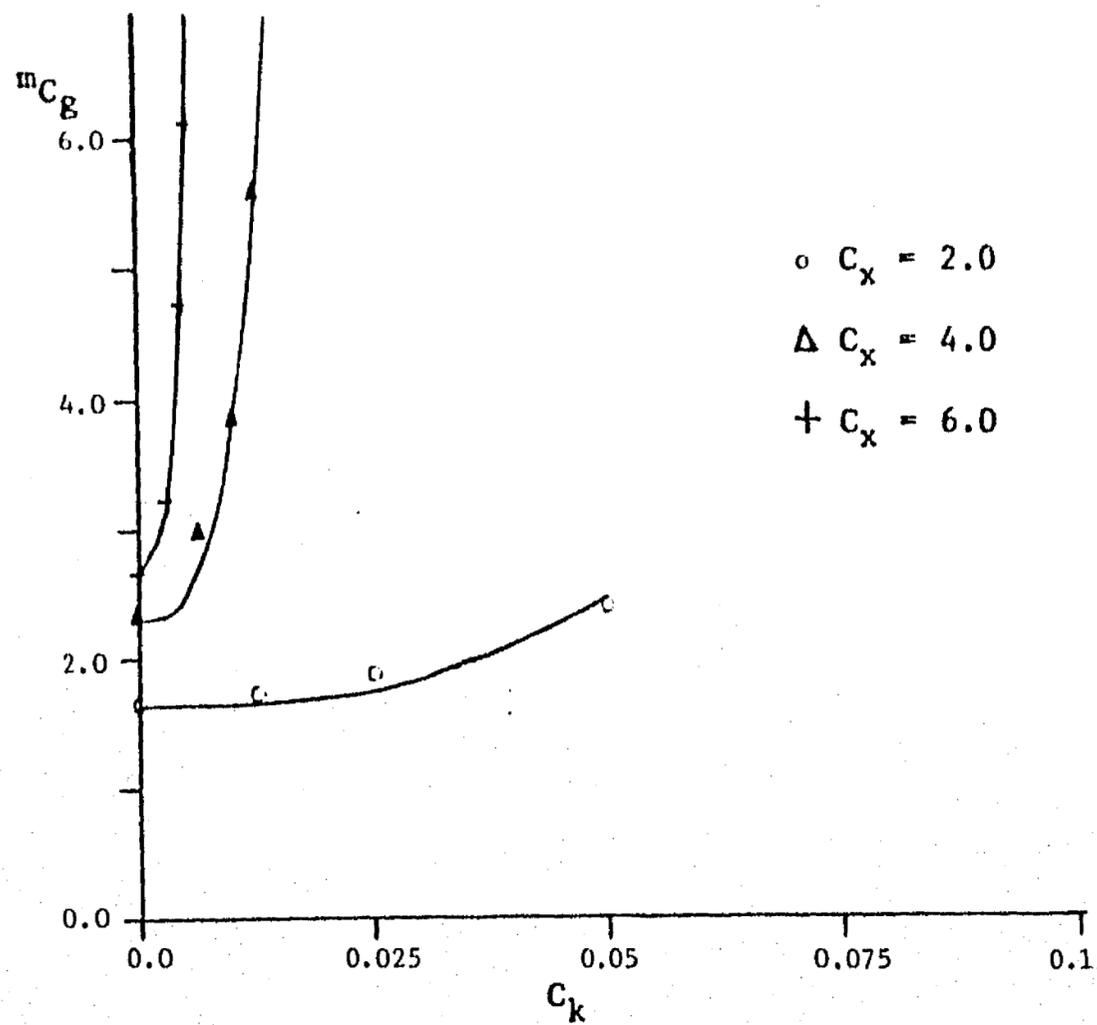


Fig 18. Valores medios muestrales utilizados en el ajuste de la expresión de la media de  $C_g$  ( $mC_g$ ), para sistemas en terreno compresible con  $T=1.0$  seg

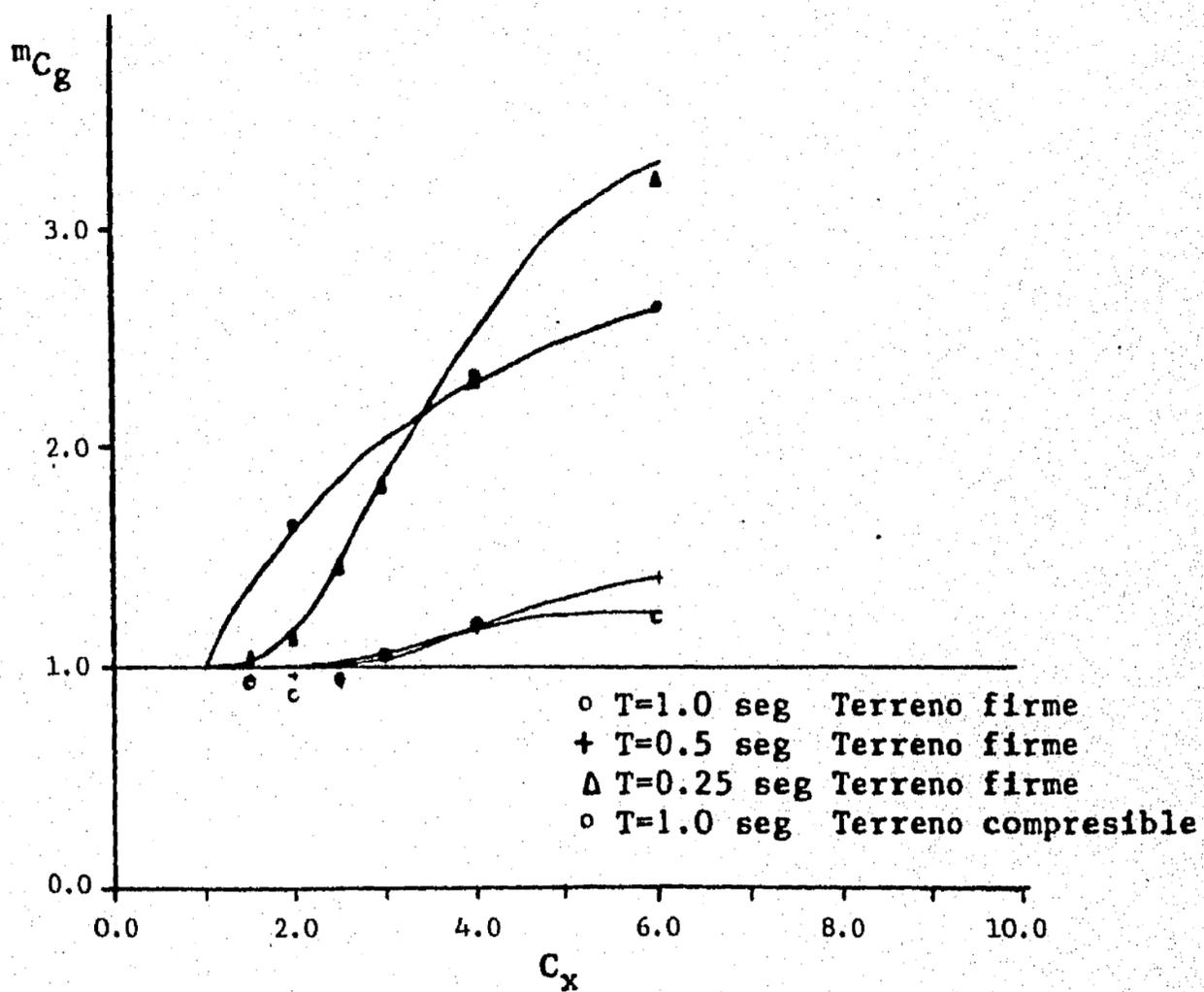


Fig 19. Valores medios muestrales utilizados en el ajuste de la expresión de la media de  $C_g$  ( $mC_g$ ), para la parte que representa el comportamiento elástoplástico del sistema

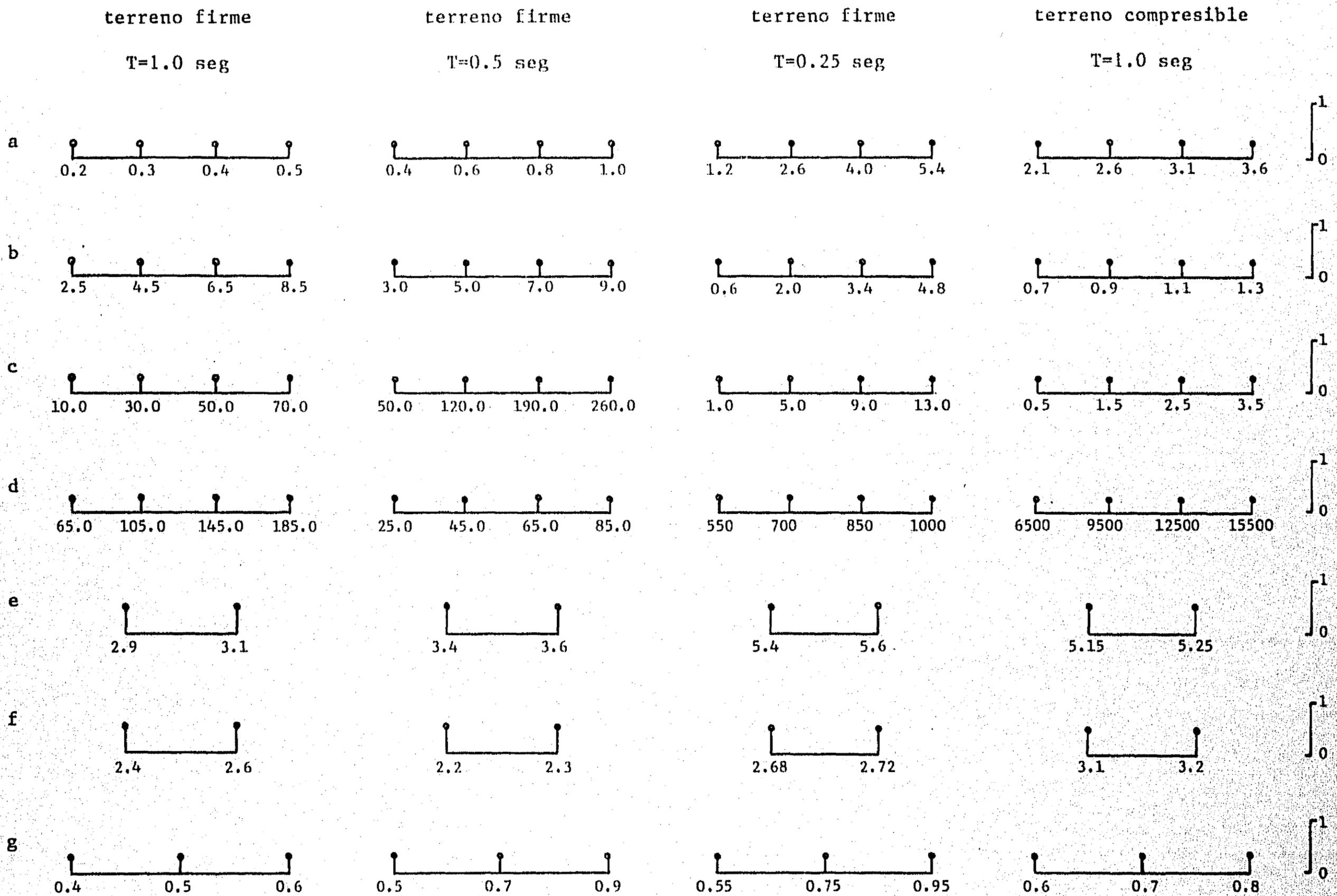


Fig 20. Distribuciones de probabilidades discretas a priori de los parámetros  $\theta$

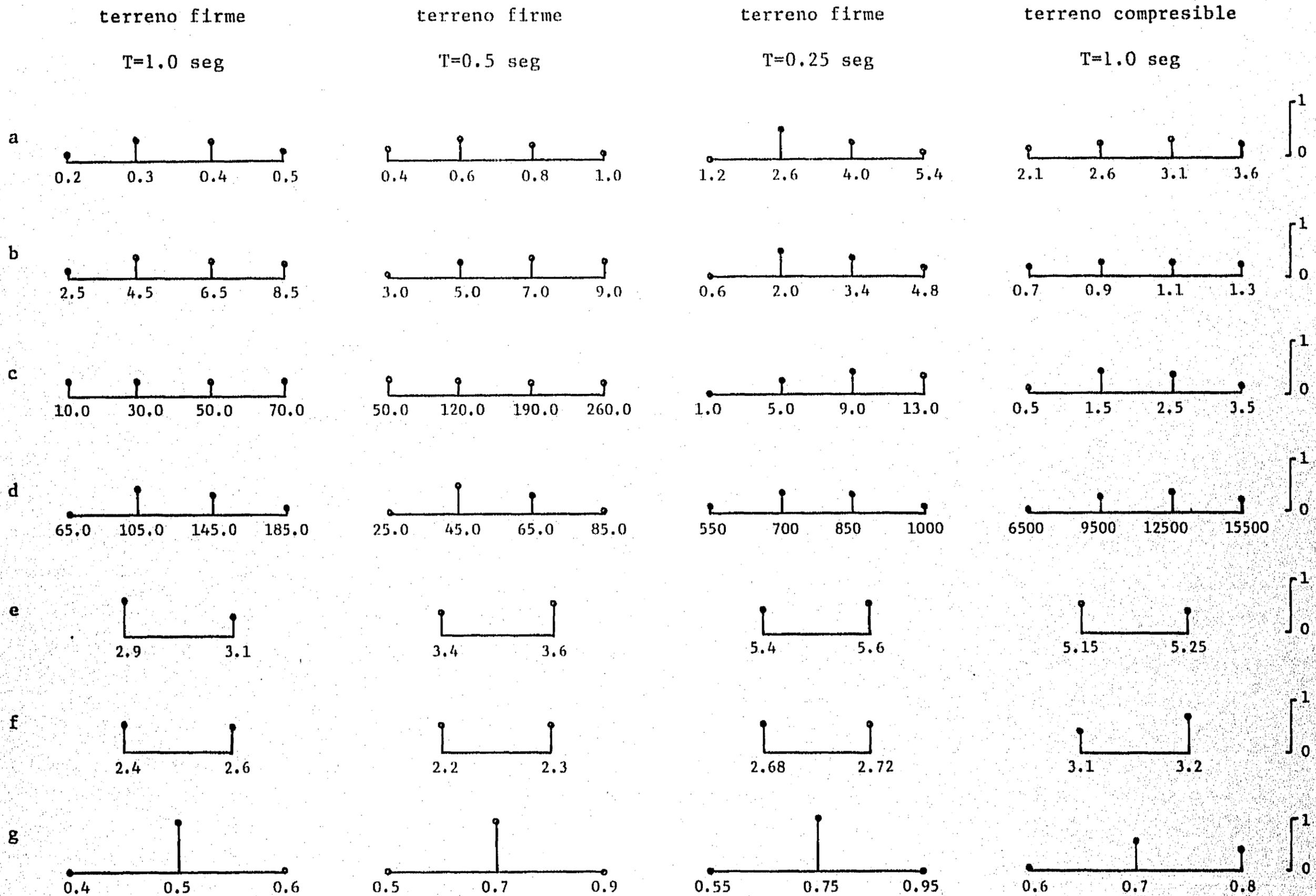


Fig 21. Distribuciones de probabilidades discretas a posteriori de los parámetros  $\theta$

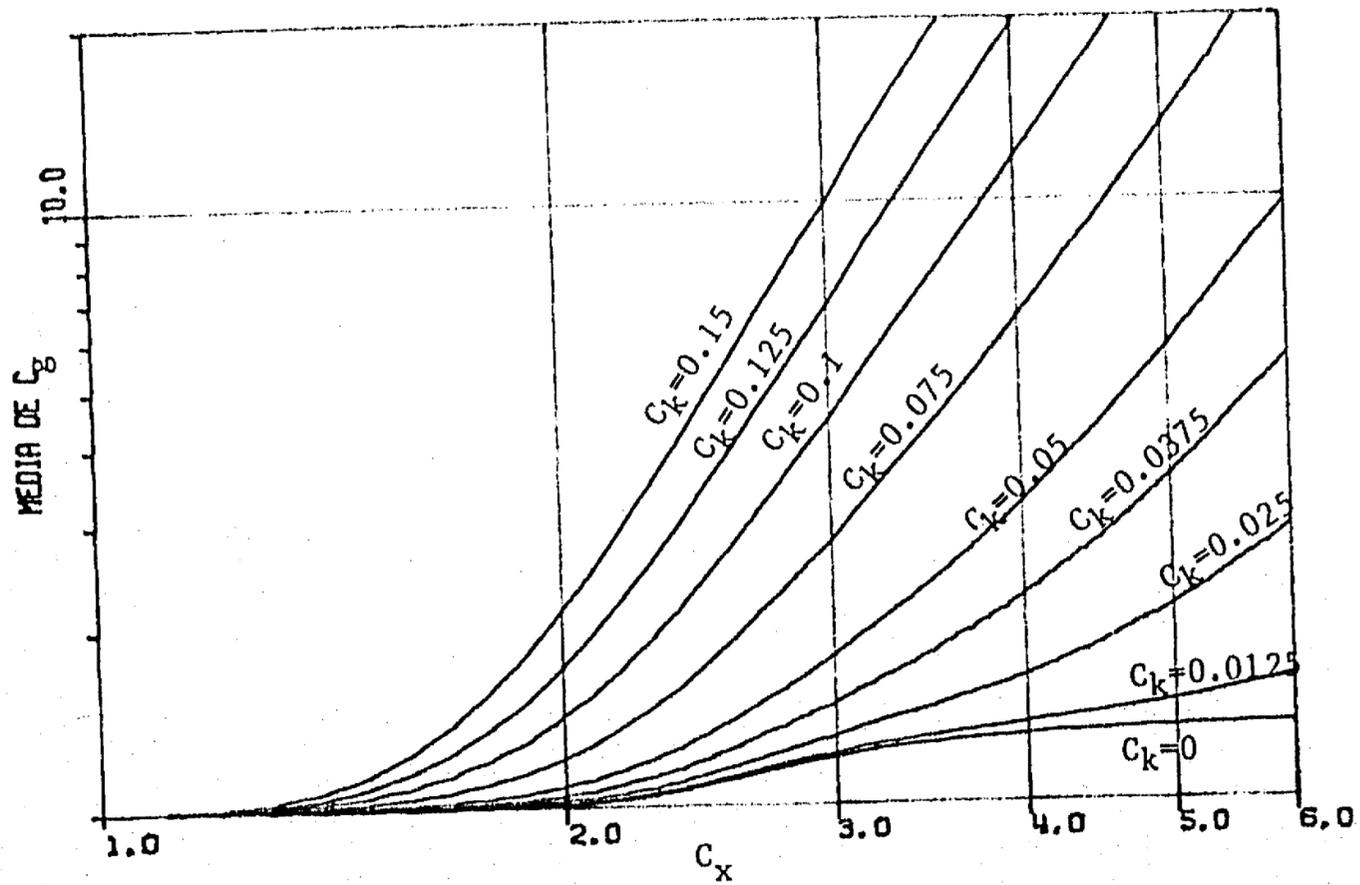


Fig 22a. Valor medio de  $C_g$  para sistemas en terreno firme con  $T=1.0$  seg

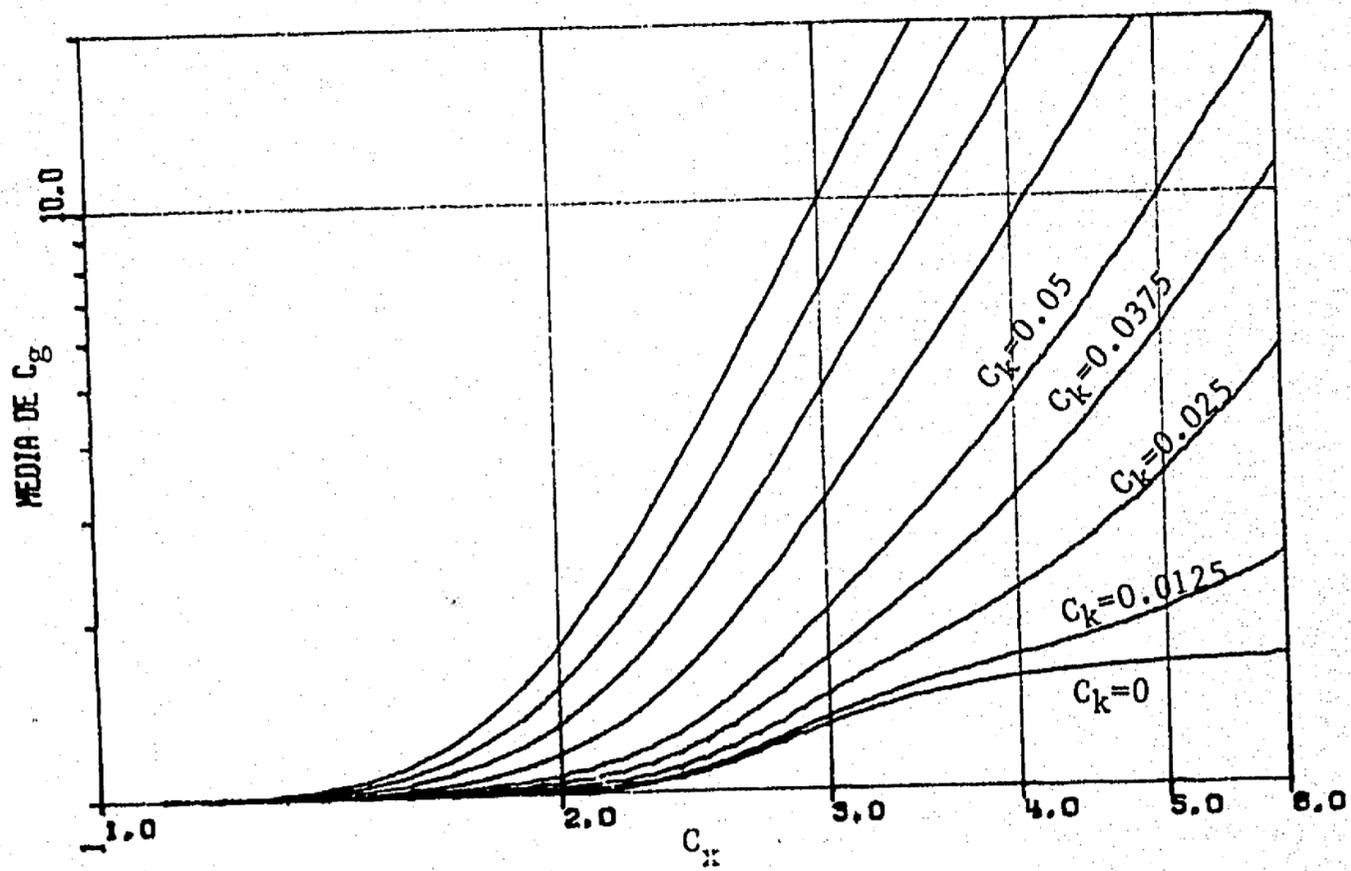


Fig 22b. Valor medio de  $C_g$  para sistemas en terreno firme con  $T=0.5$  seg

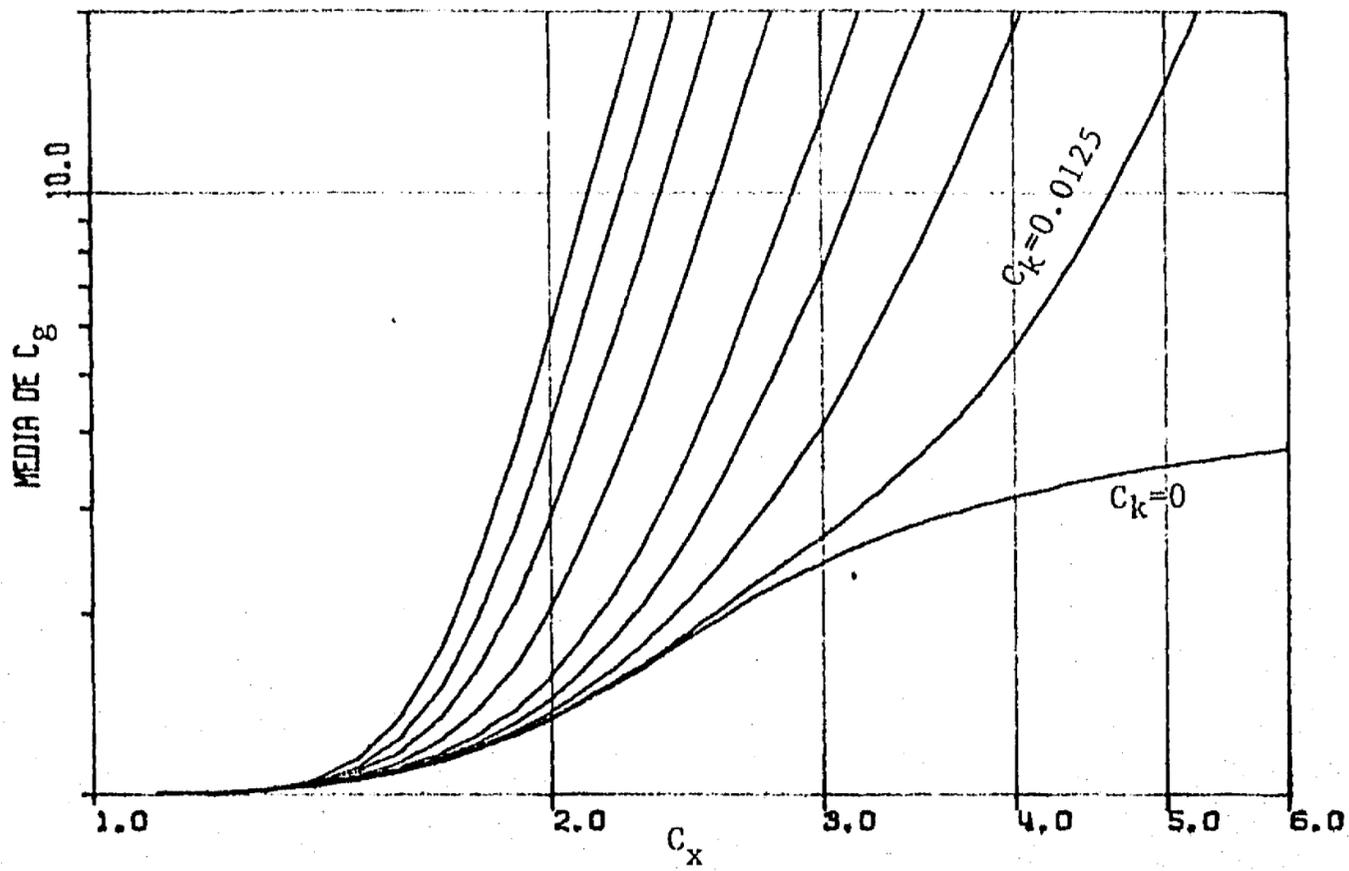


Fig 22c. Valor medio de  $C_g$  para sistemas en terreno firme con  $T=0.25$  seg

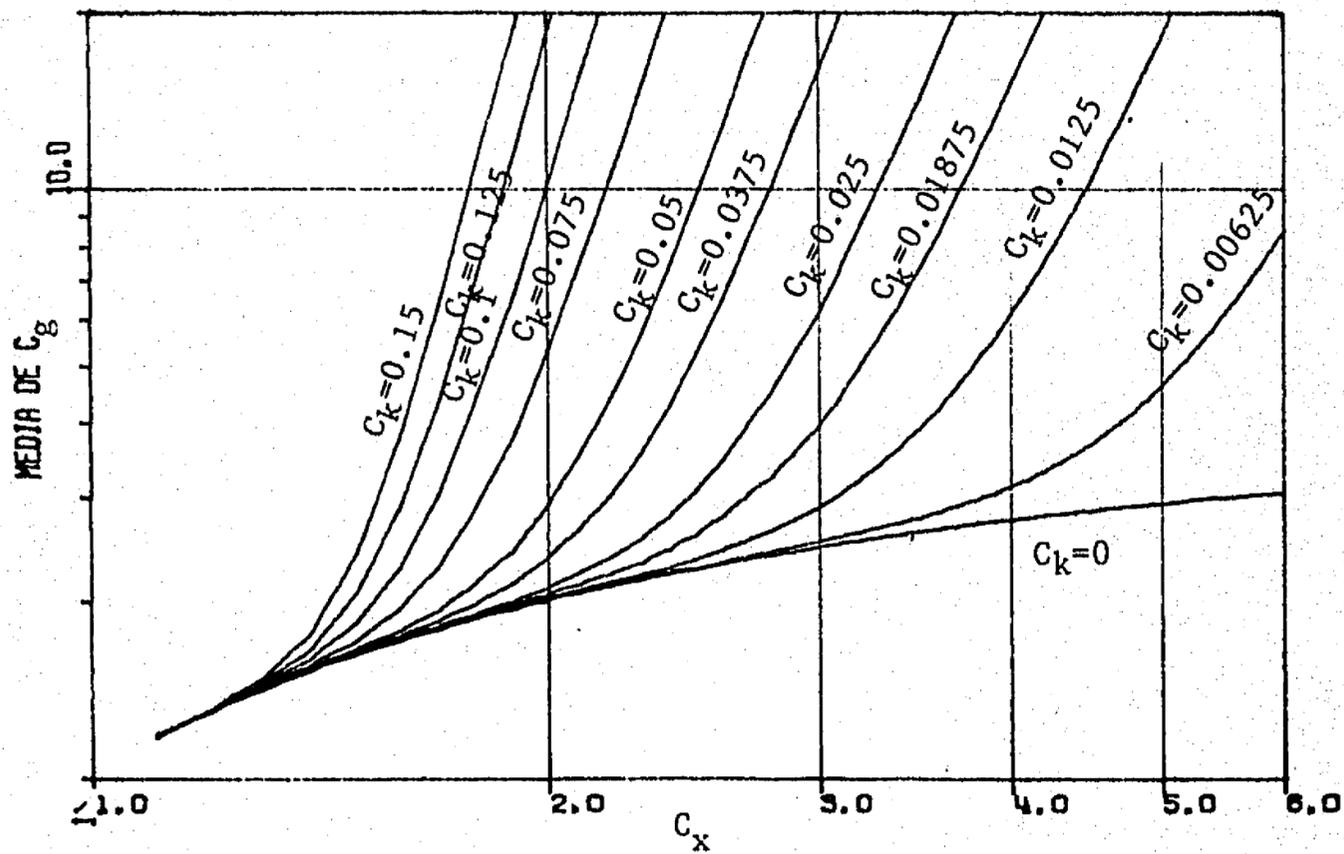


Fig 22d. Valor medio de  $C_g$  para sistemas en terreno compresible con  $T=1.0$  seg

z

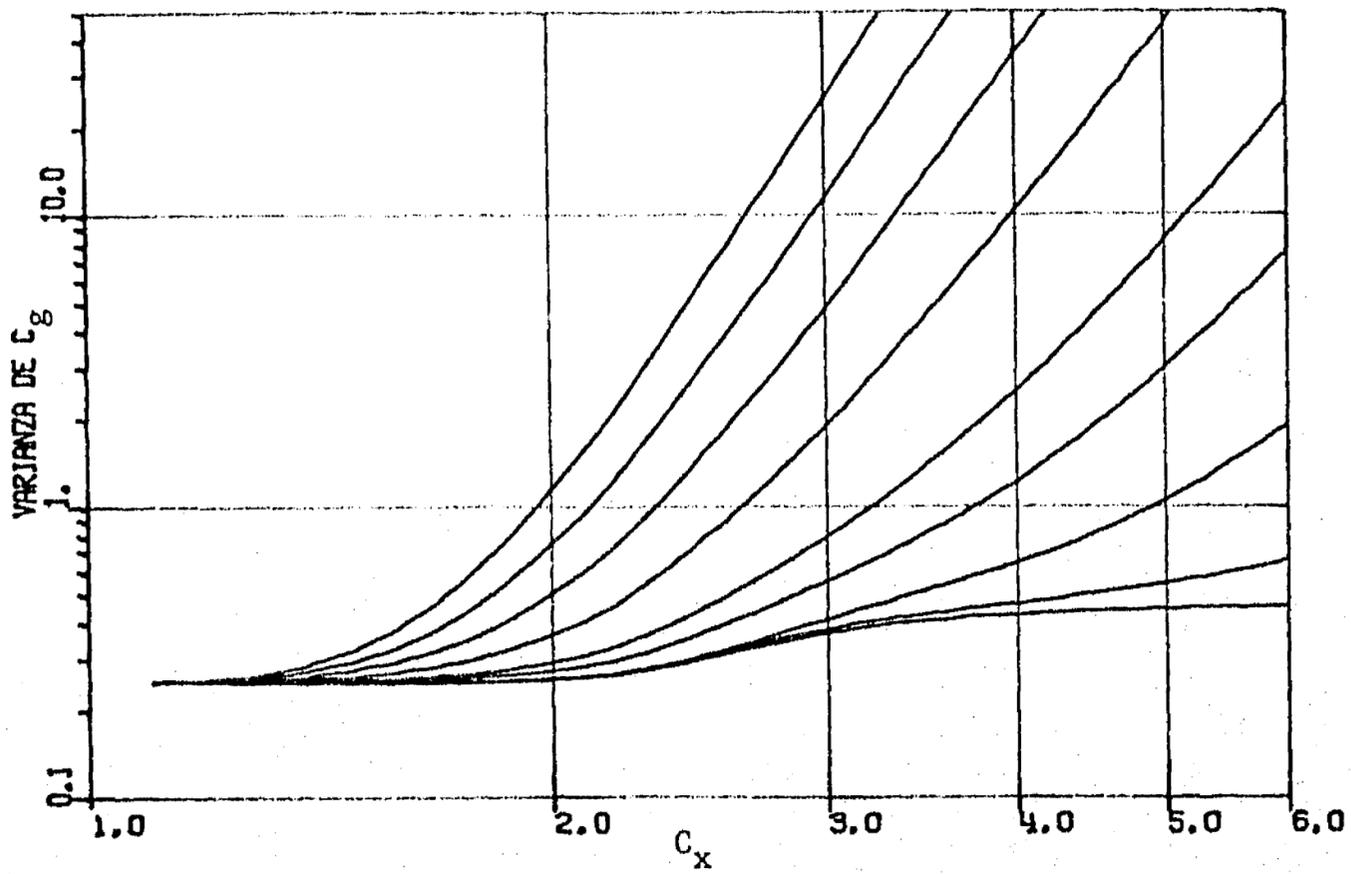


Fig 23a. Varianza de  $C_g$  para sistemas en terreno firme con  $T=1.0$  seg

x

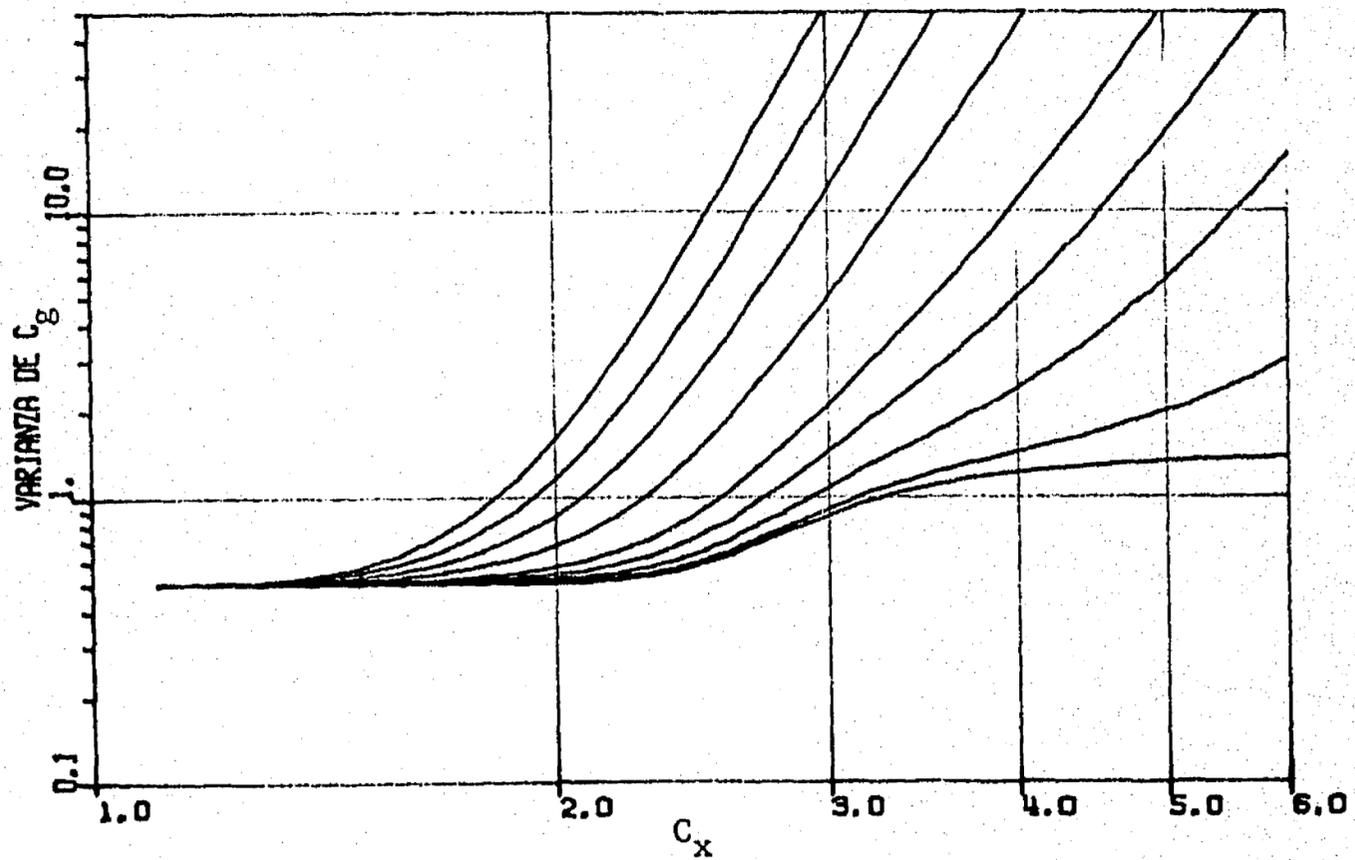


Fig 23b. Varianza de  $C_g$  para sistemas en terreno firme con  $T=0.5$  seg

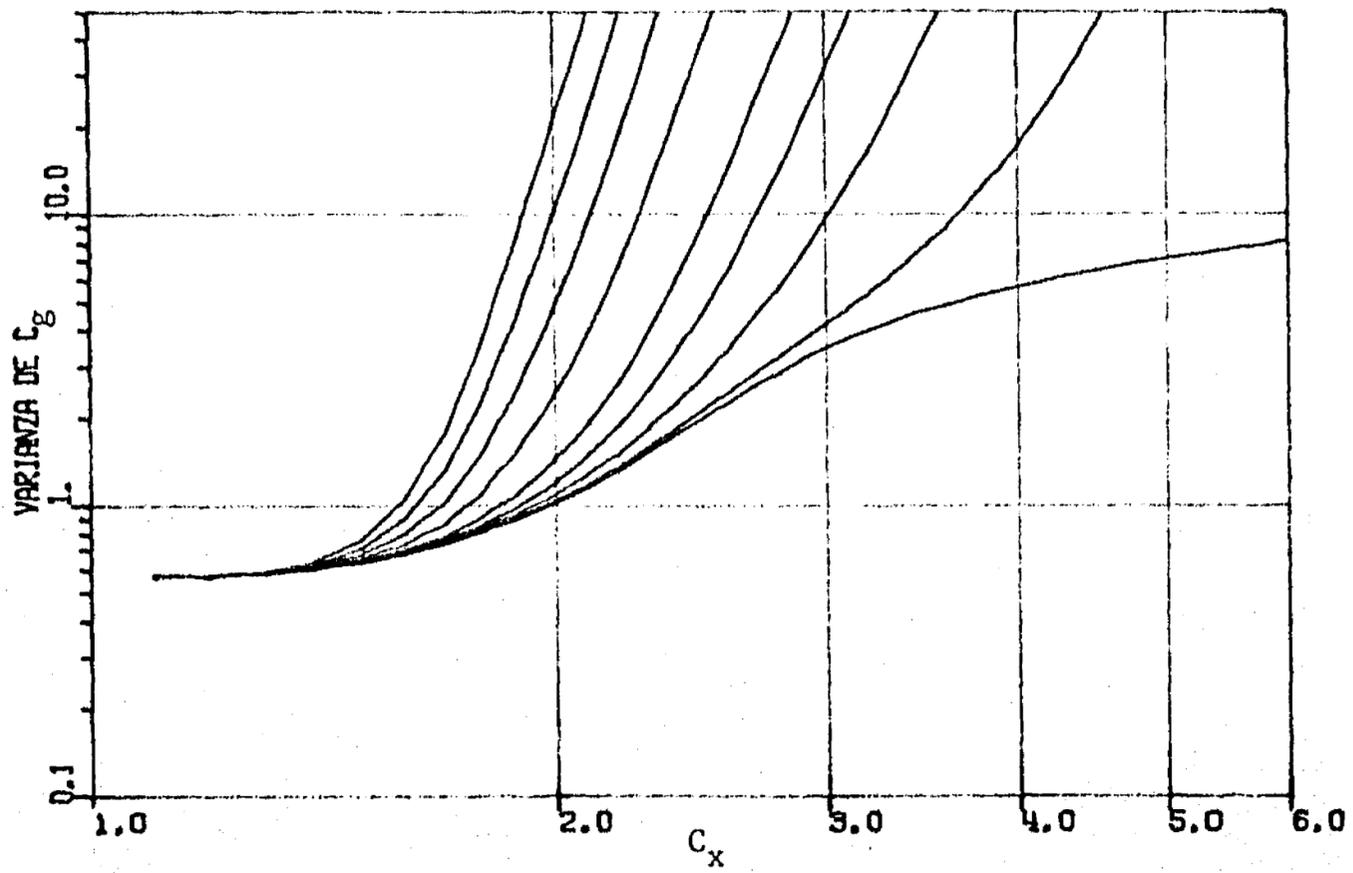


Fig 23c. Varianza de  $C_g$  para sistemas en terreno firme con  $T=0.25$  seg

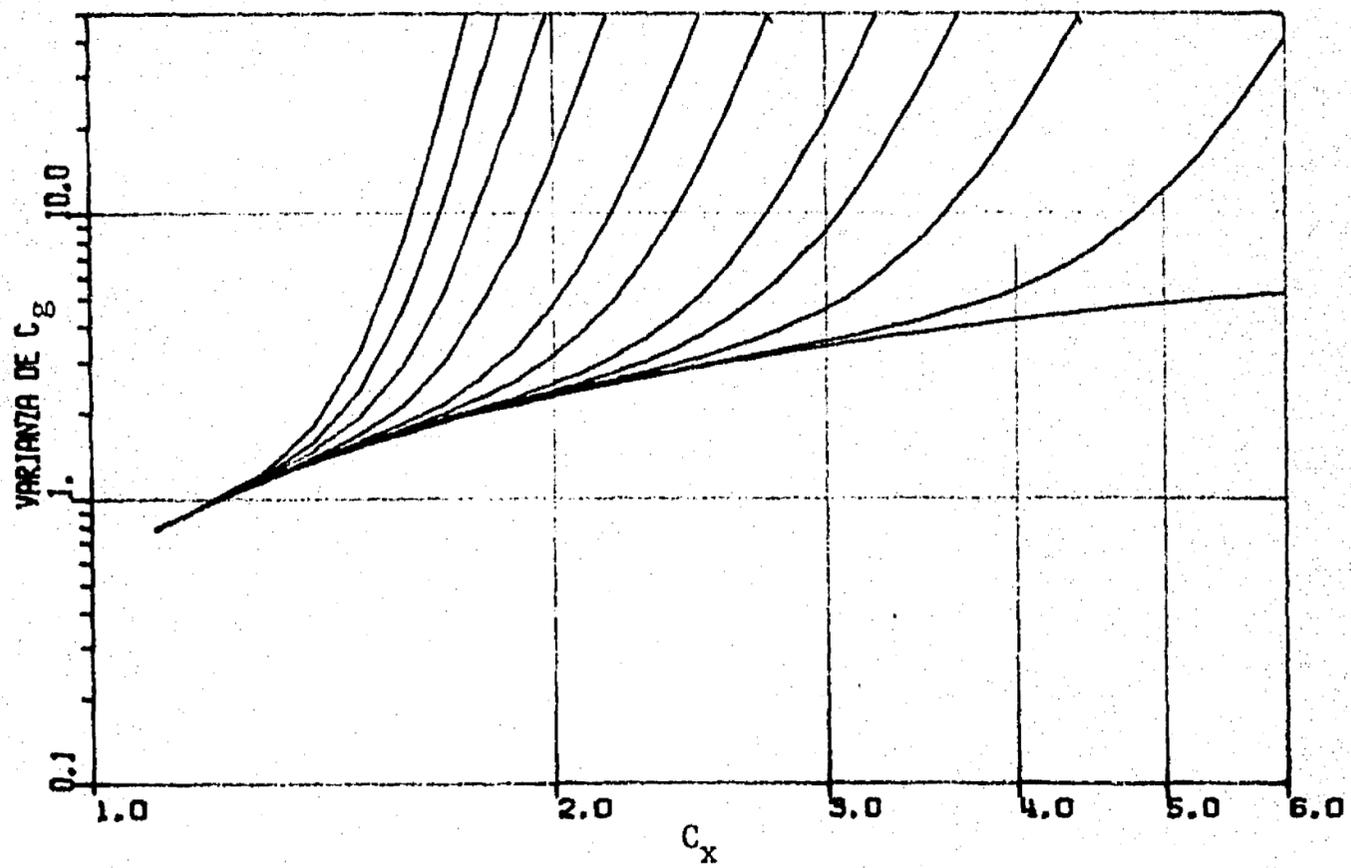


Fig 23d. Varianza de  $C_g$  para sistemas en terreno compresible con  $T=1.0$  seg

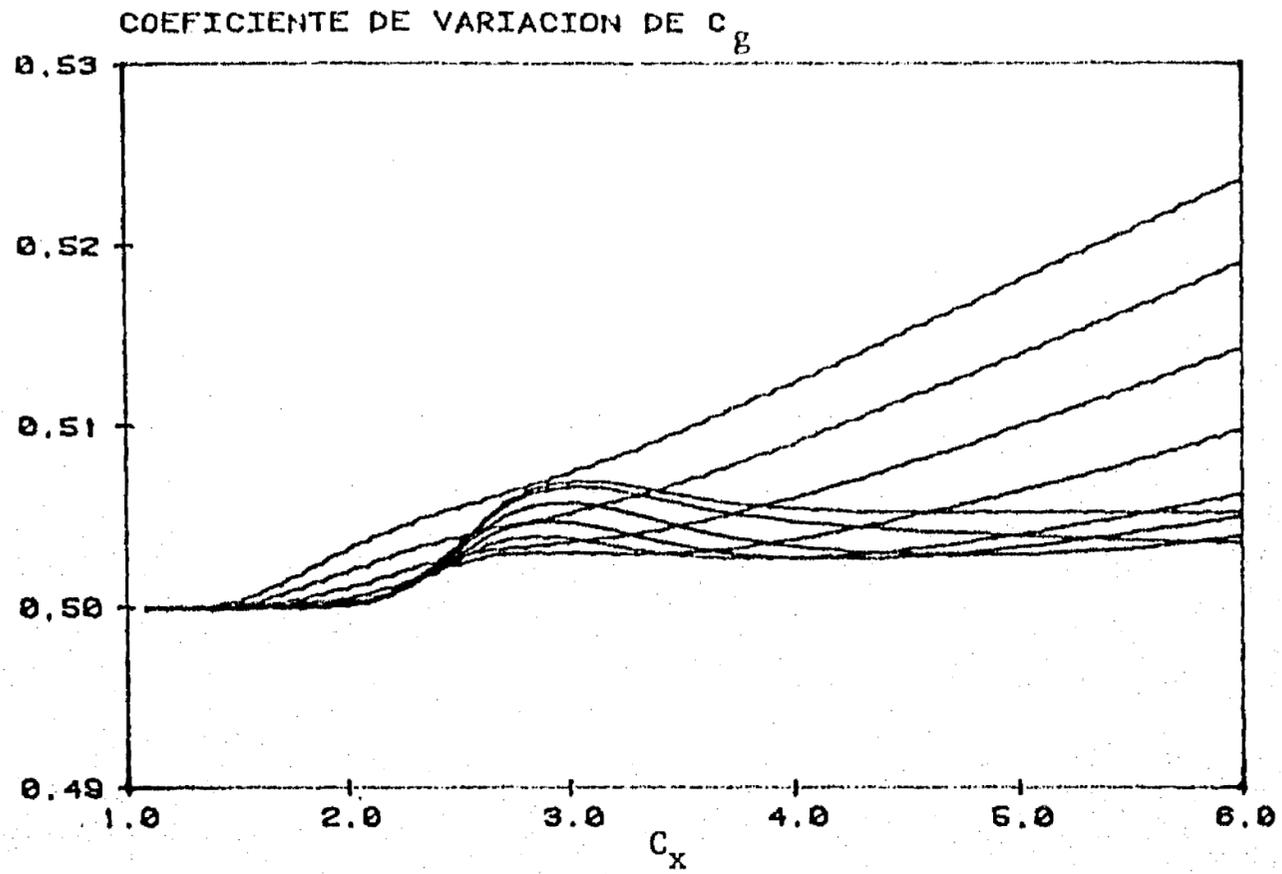


Fig 24a. Coeficiente de variación de  $C_g$  para sistemas en terreno firme con  $T=1.0$  seg

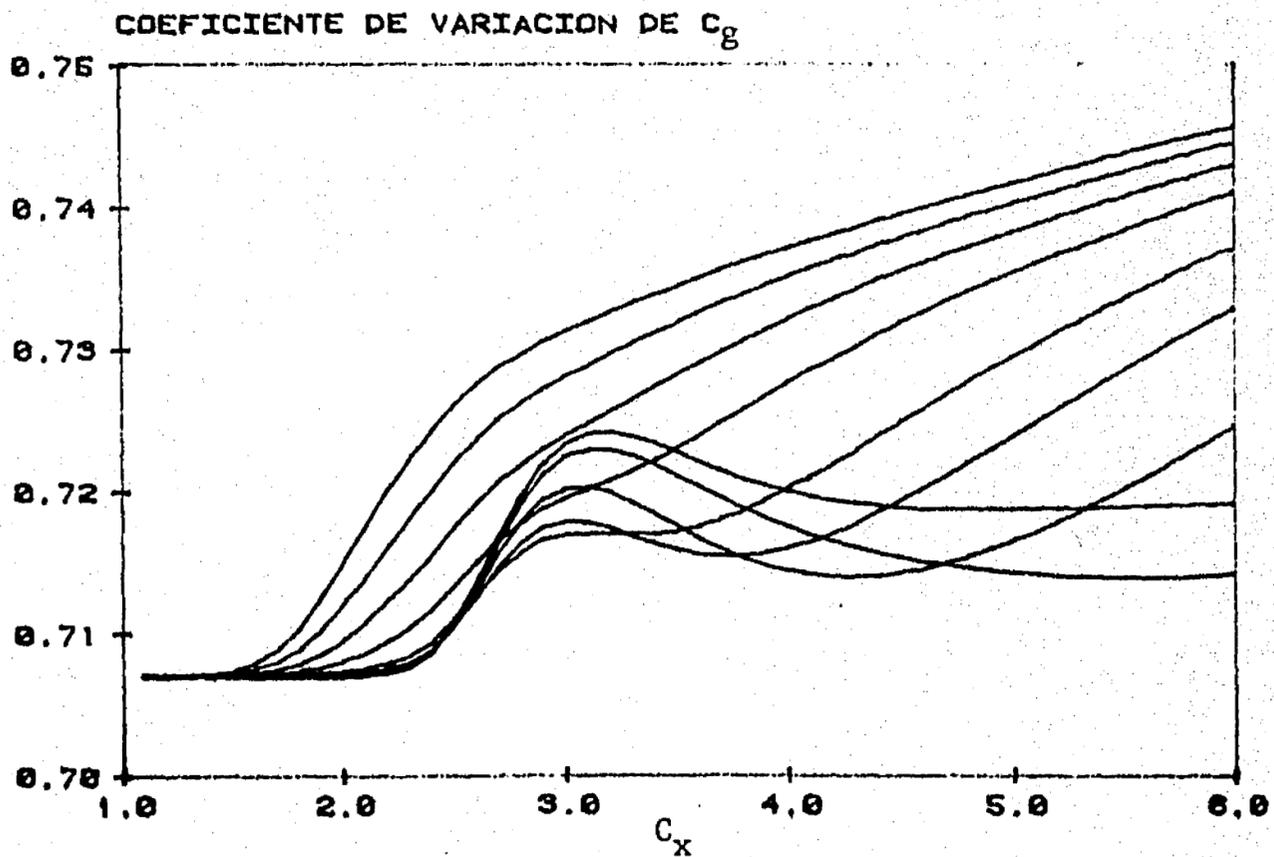


Fig 24b. Coeficiente de variación de  $C_g$  para sistemas en terreno firme con  $T=0.5$  seg

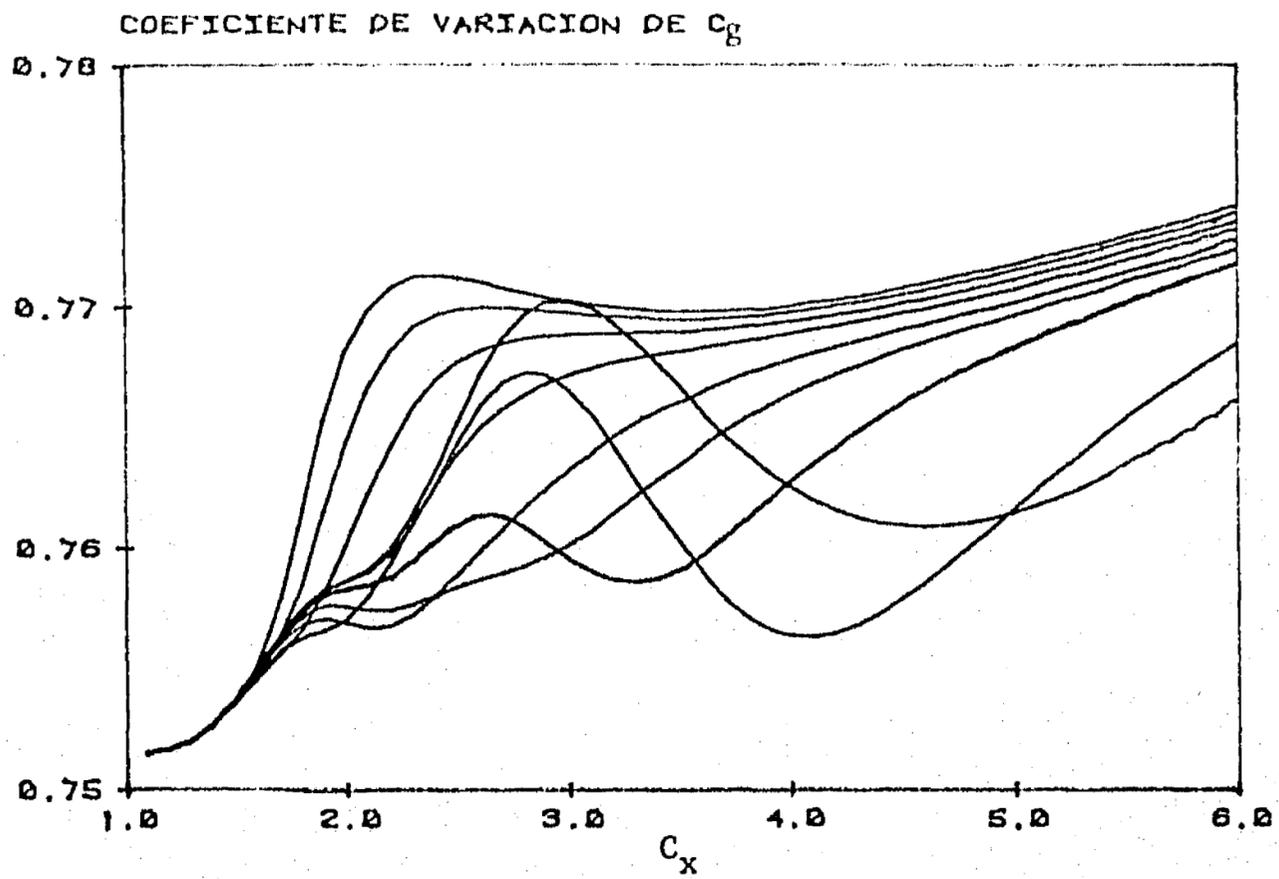


Fig 24c. Coeficiente de variación de  $C_g$  para sistemas en terreno firme con  $T=0.25$  seg

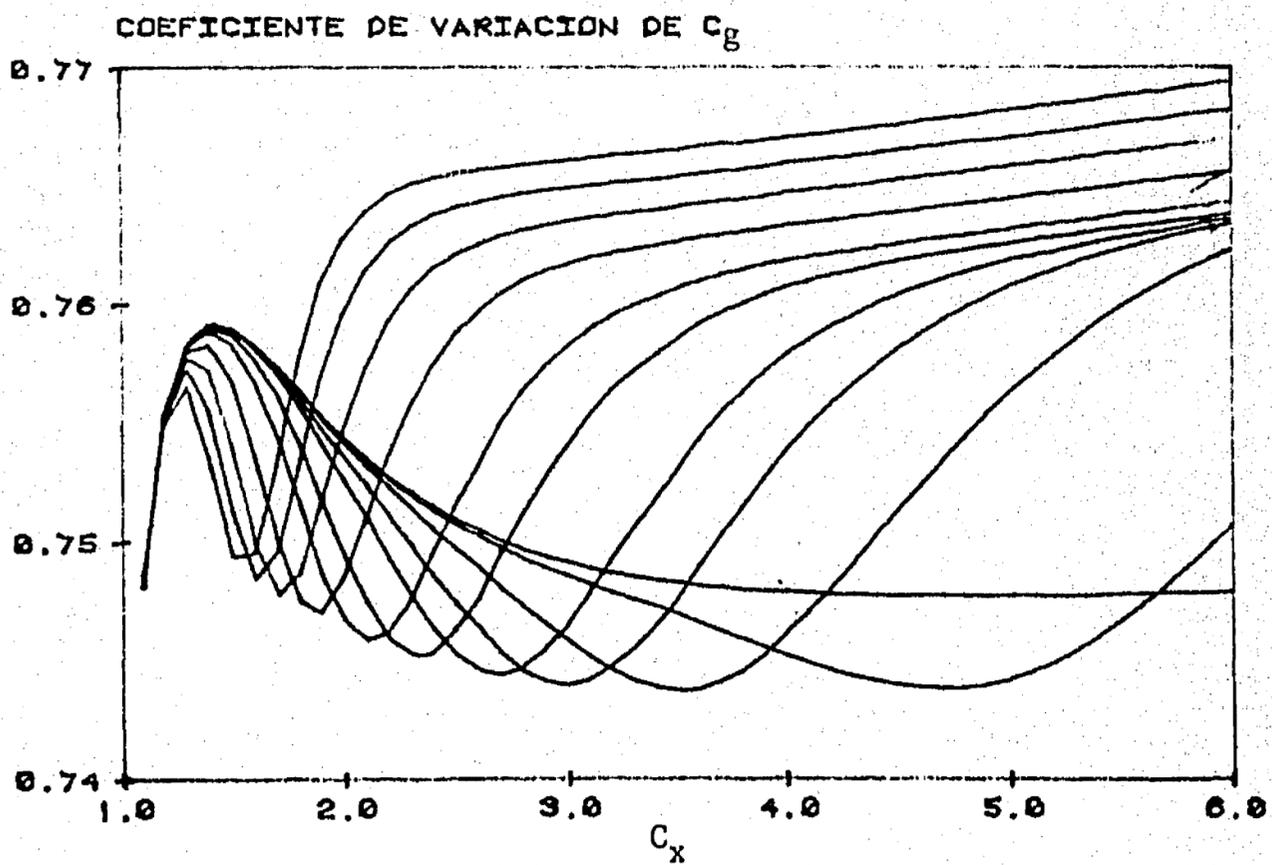


Fig 24d. Coeficiente de variación de  $C_g$  para sistemas en terreno compresible con  $T=1.0$  seg

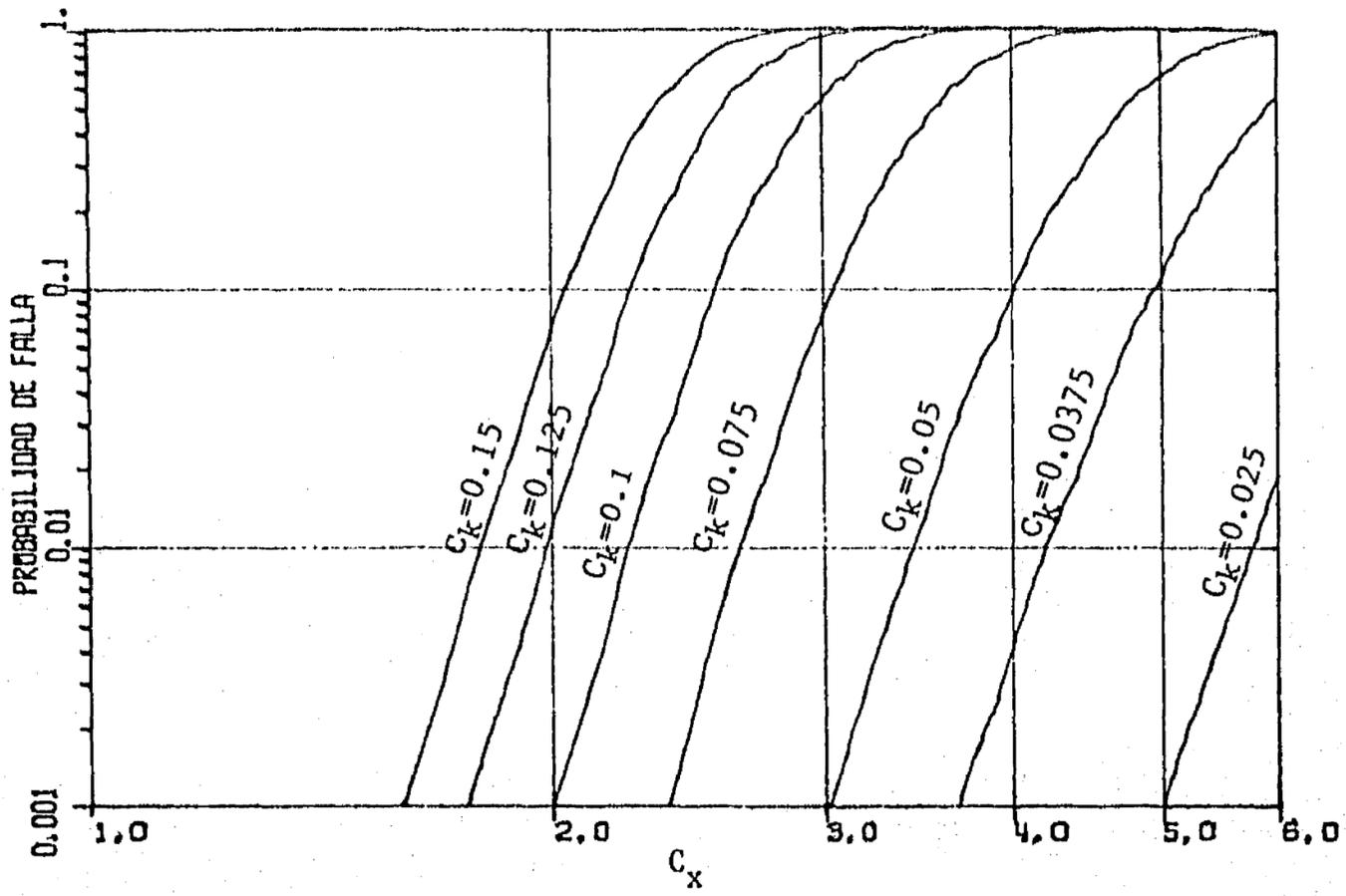


Fig 25. Probabilidad de falla para sistemas con  $T=1.0$  seg en terreno firme

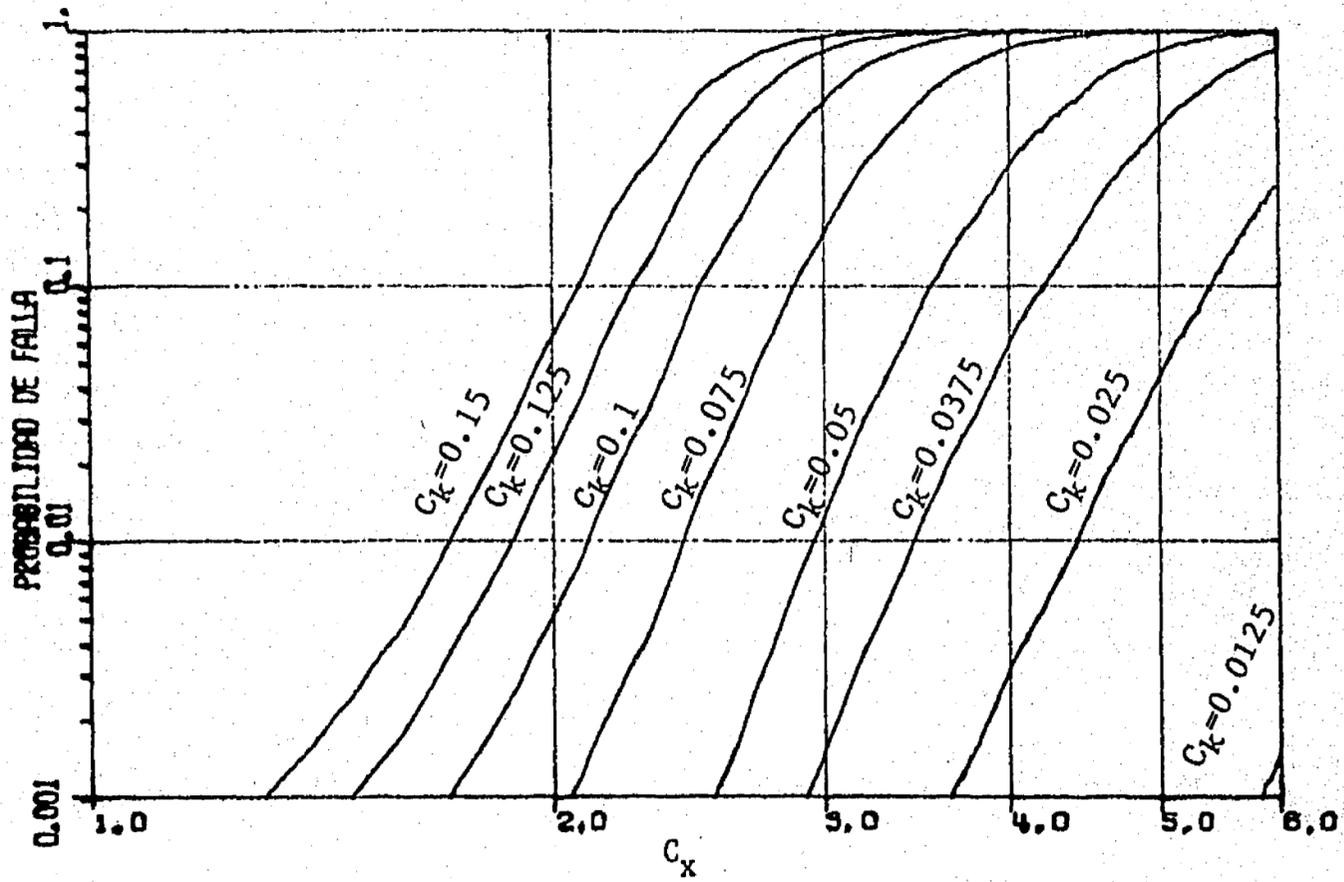


Fig 26. Probabilidad de falla para sistemas con  $T=0.5$  seg en terreno firme

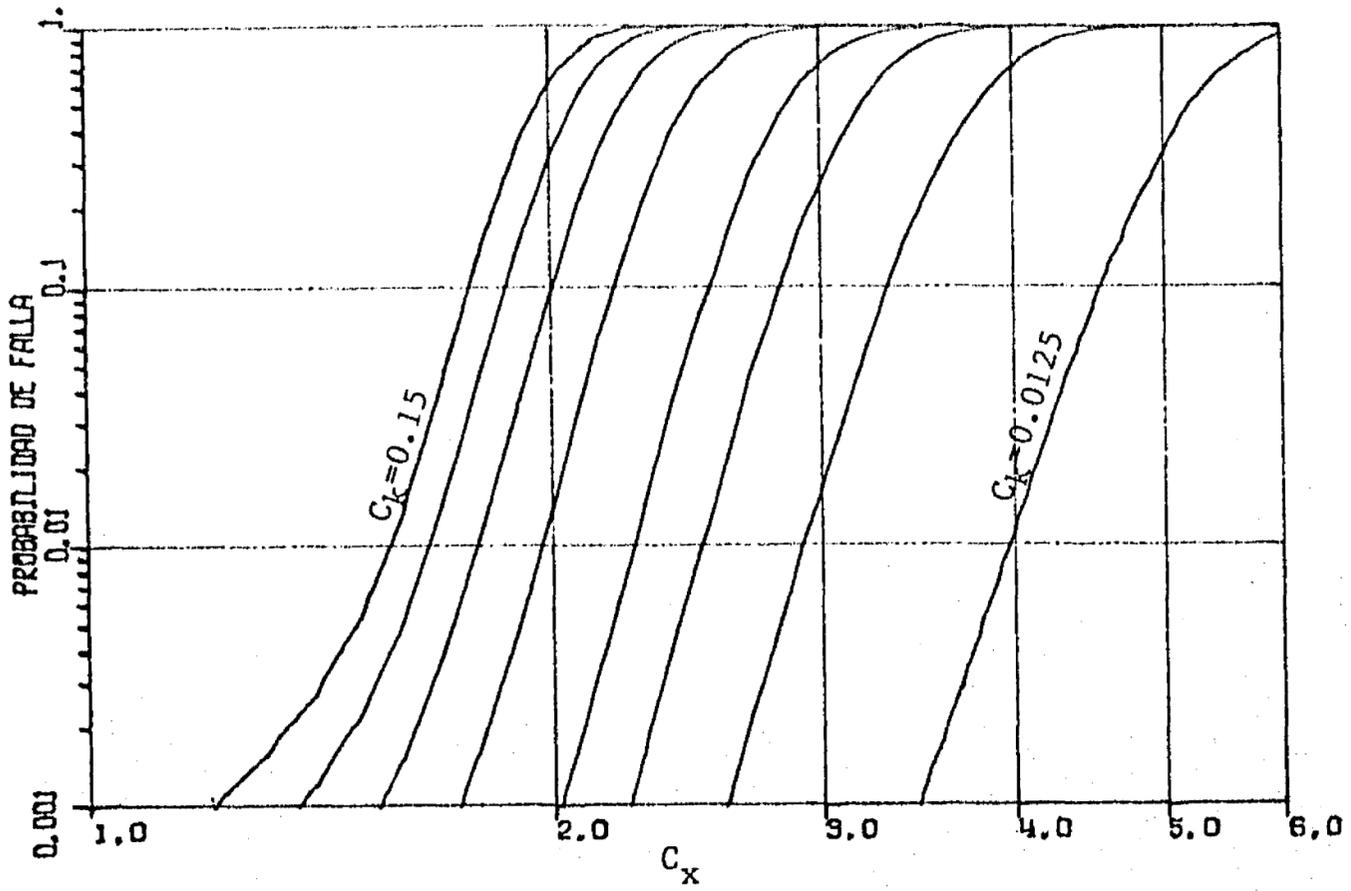


Fig 27. Probabilidad de falla para sistemas con  $T=0.25$  seg en terreno firme

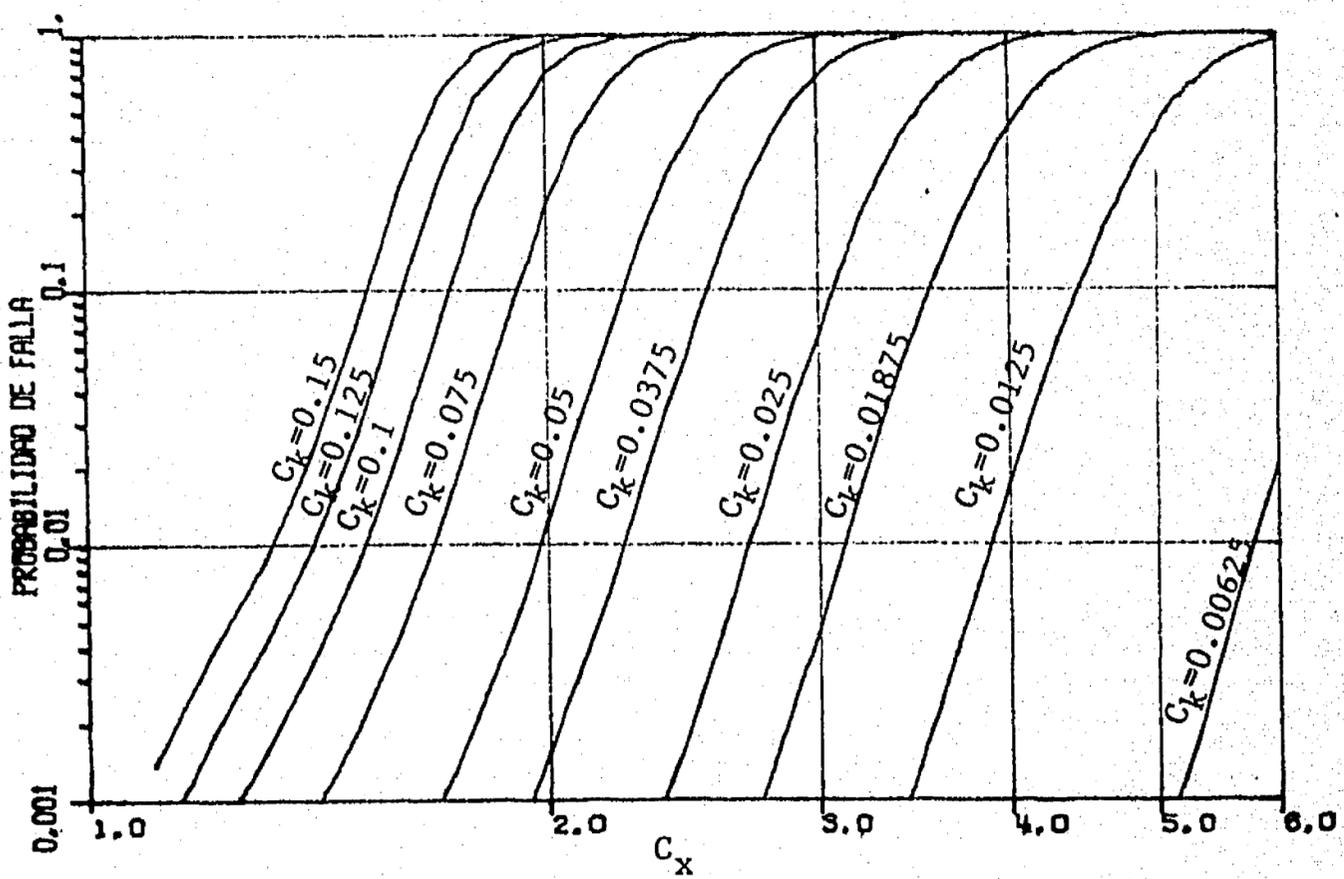


Fig 28. Probabilidad de falla para sistemas con  $T=1.0$  seg en terreno compresible

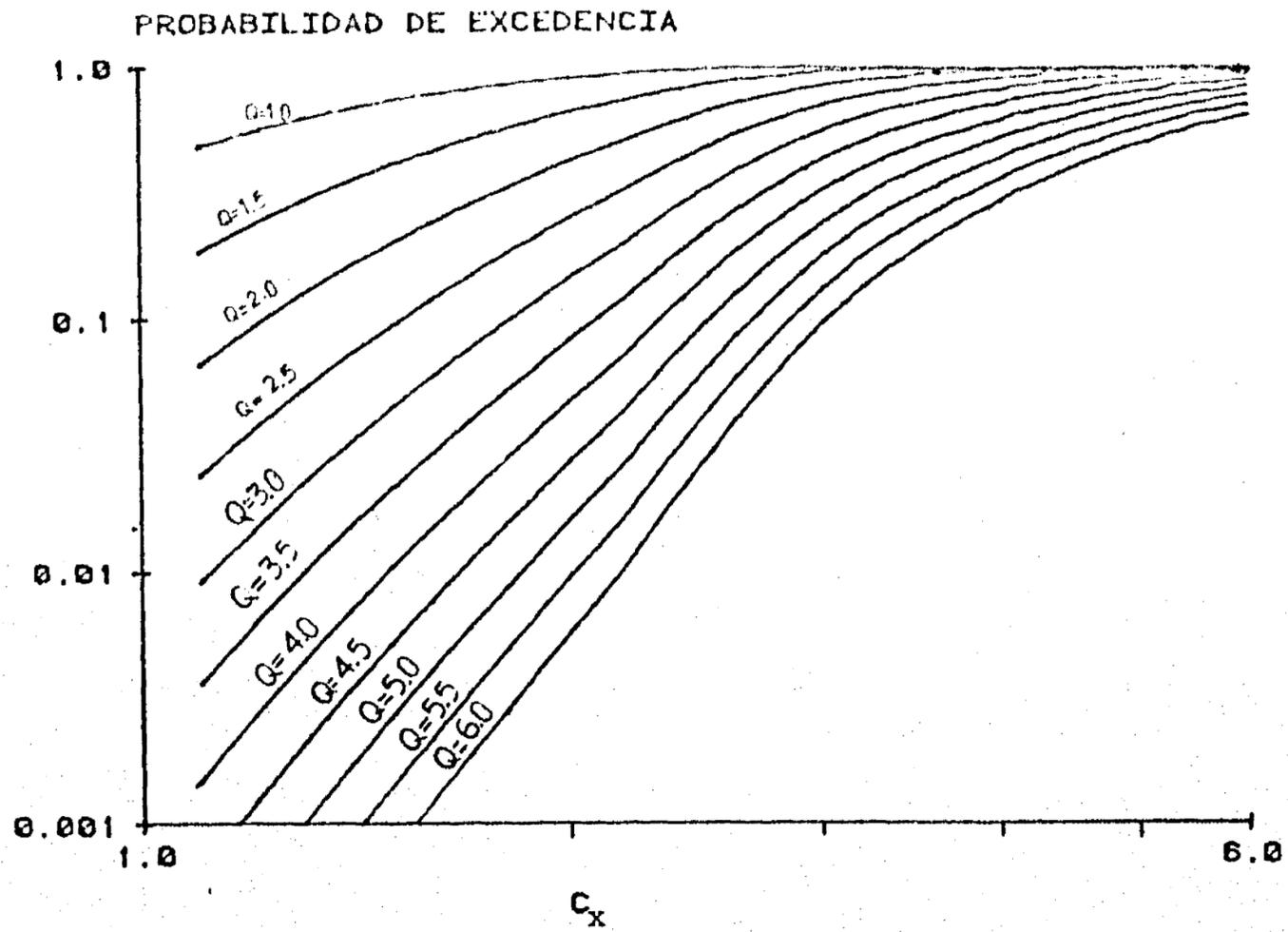


Fig 29. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno firme con  $T=1.0$  seg y  $C_k=0.0$

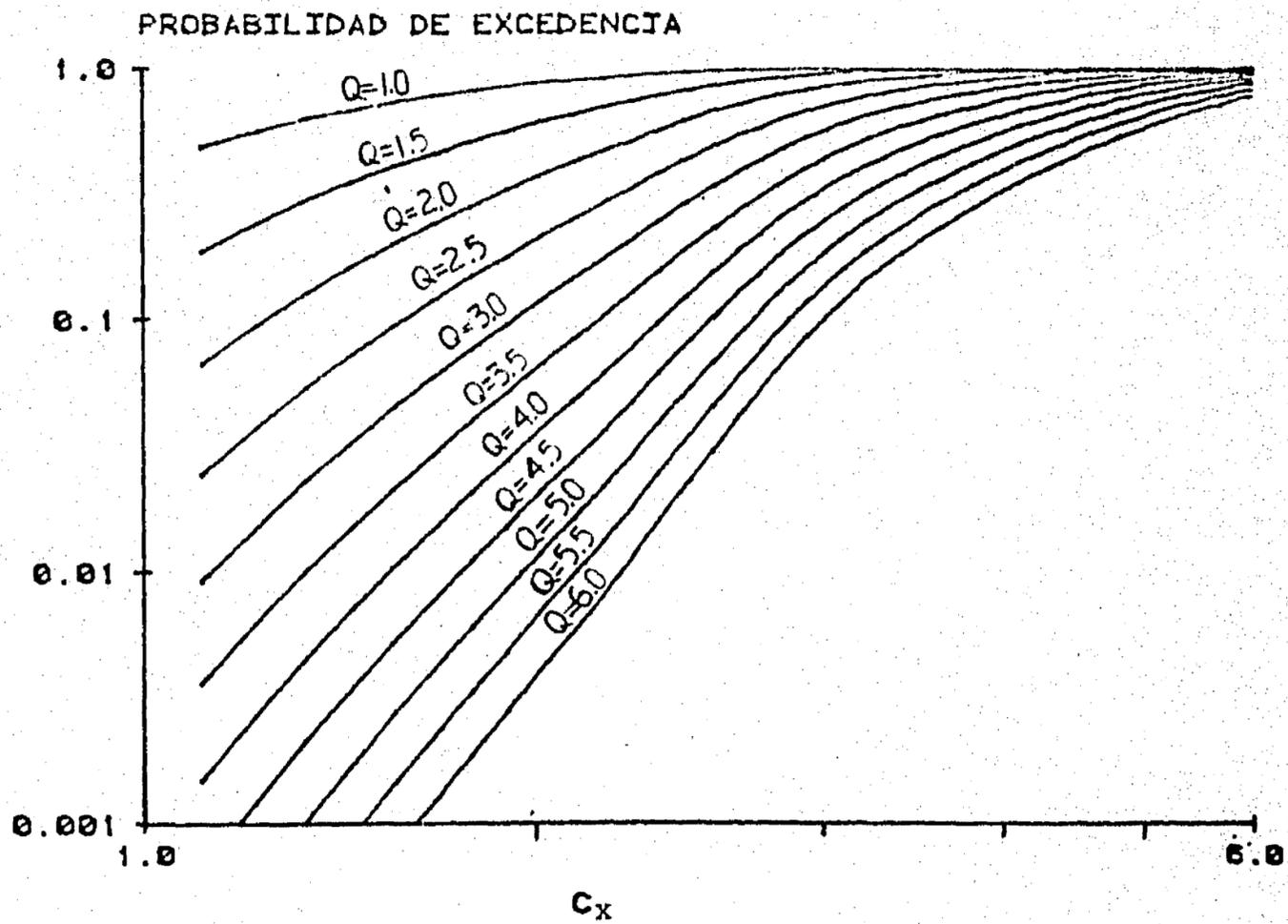


Fig 30. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno firme con  $T=1.0$  seg y  $C_k=0.0125$

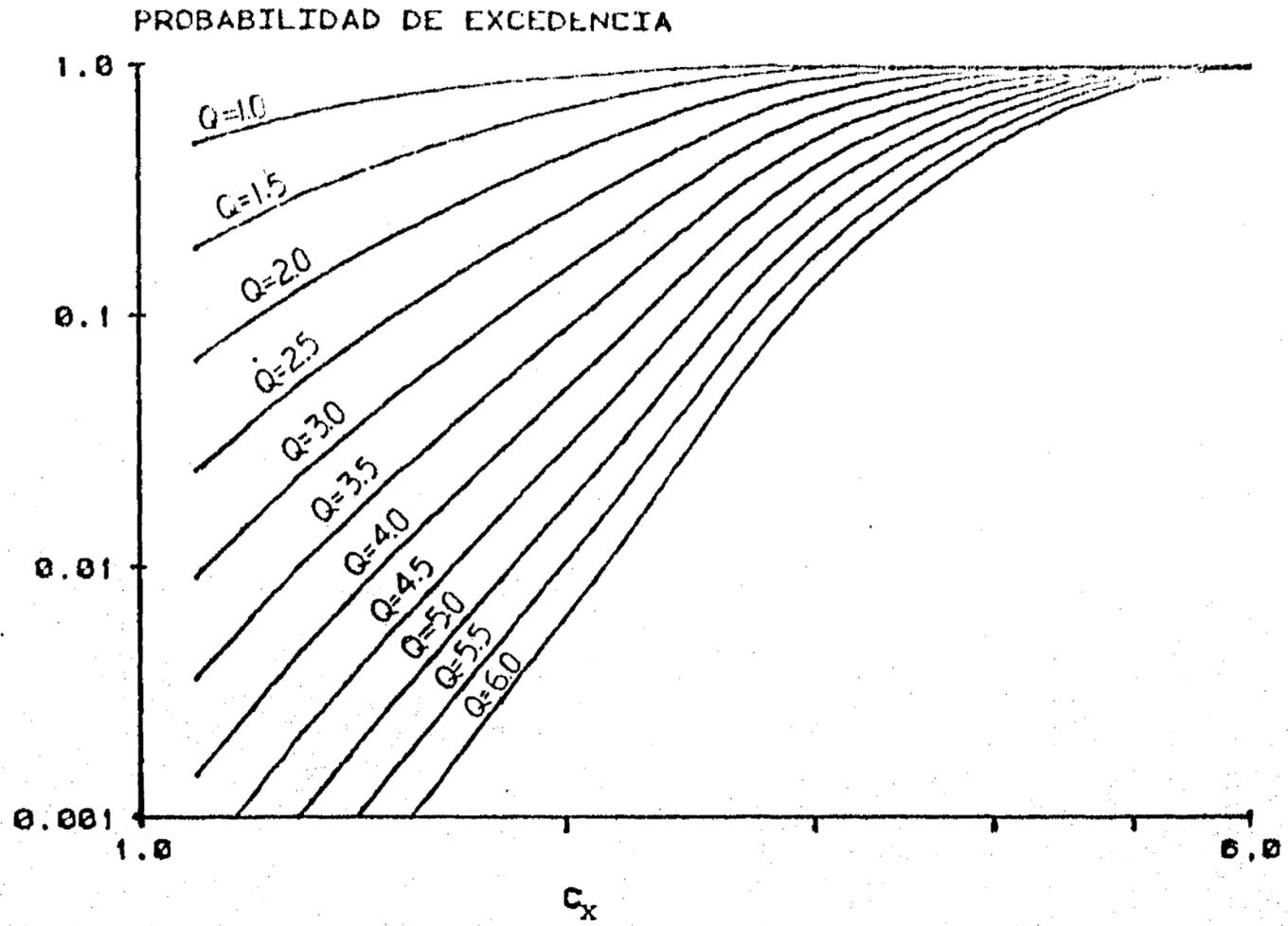


Fig 31. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno firme con  $T=1.0$  seg y  $C_k=0.025$

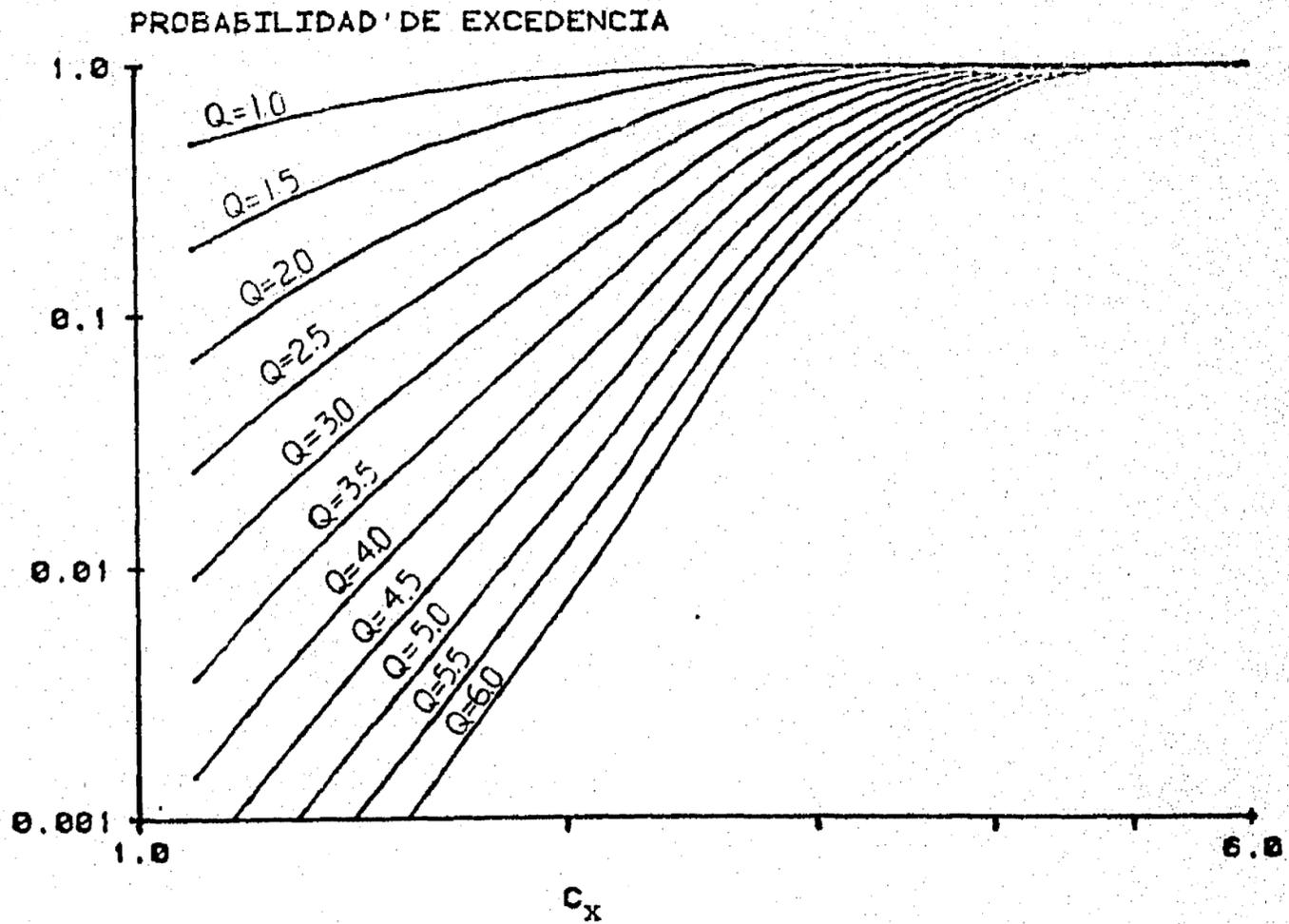


Fig 32. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno firme con  $T=1.0$  seg y  $C_k=0.0375$

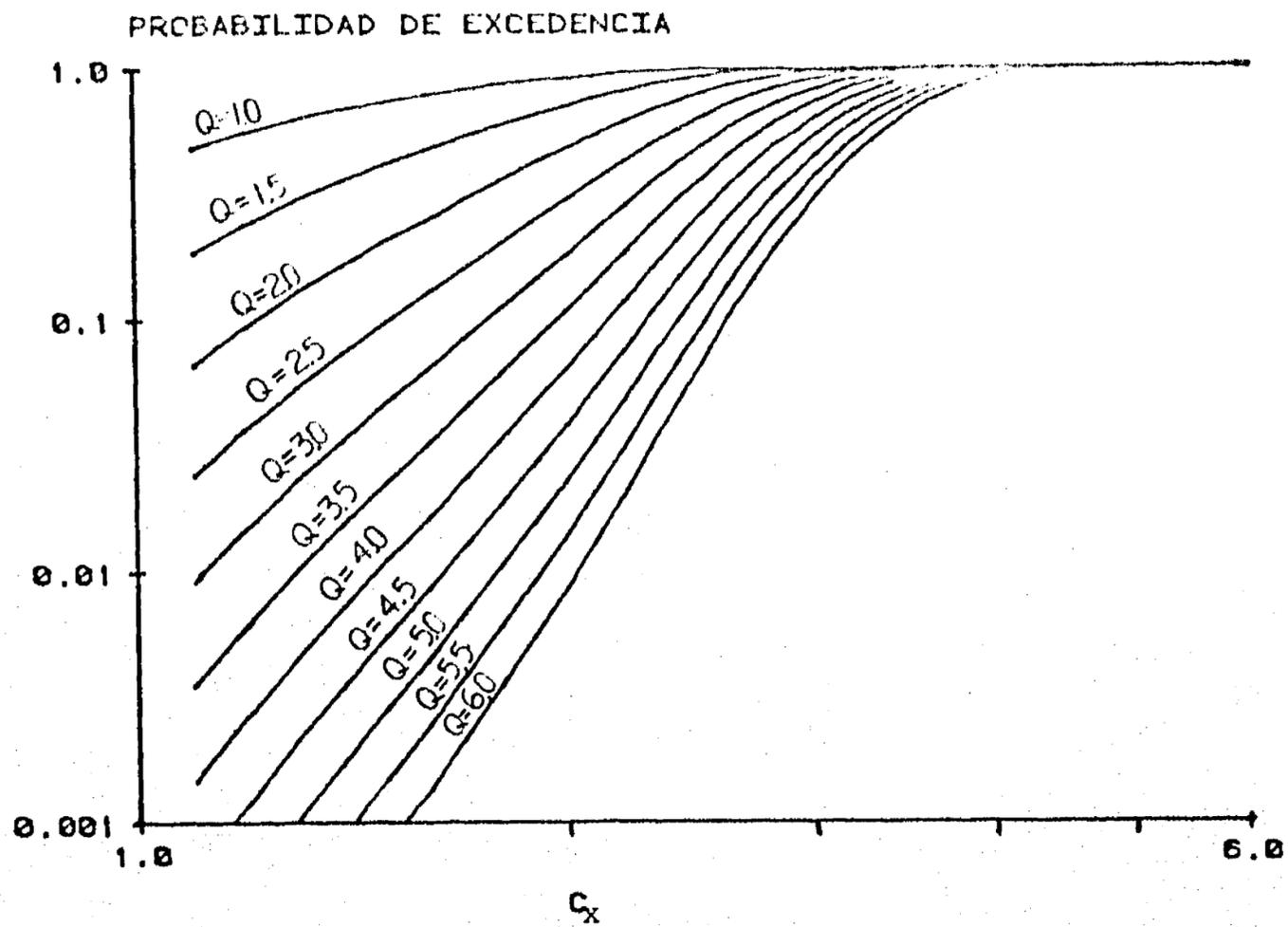


Fig 33. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno firme  
co  $T=1.0$  seg y  $C_k=0.05$

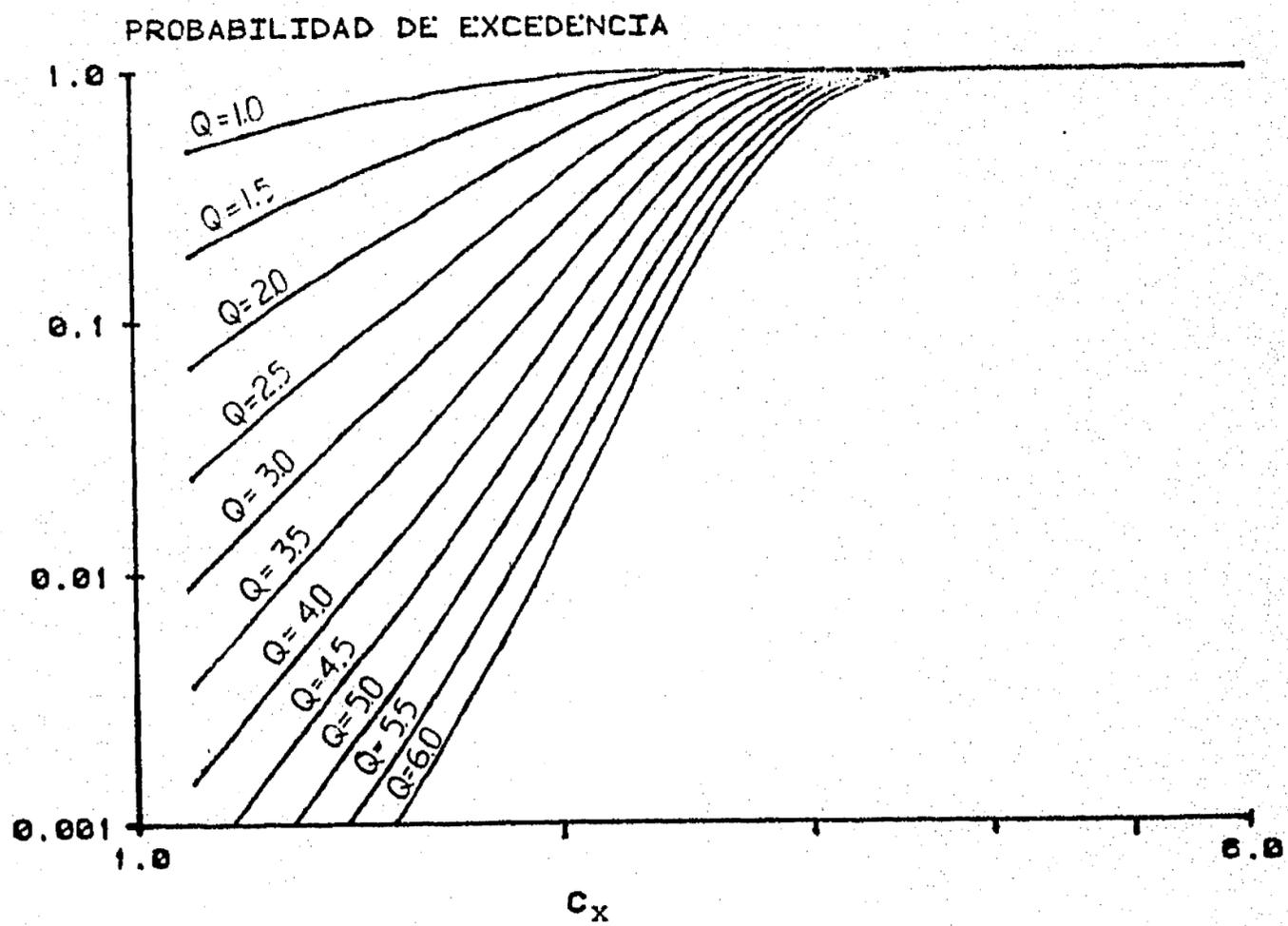


Fig 34. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno firme  
con  $T=1.0$  seg y  $C_k=0.075$

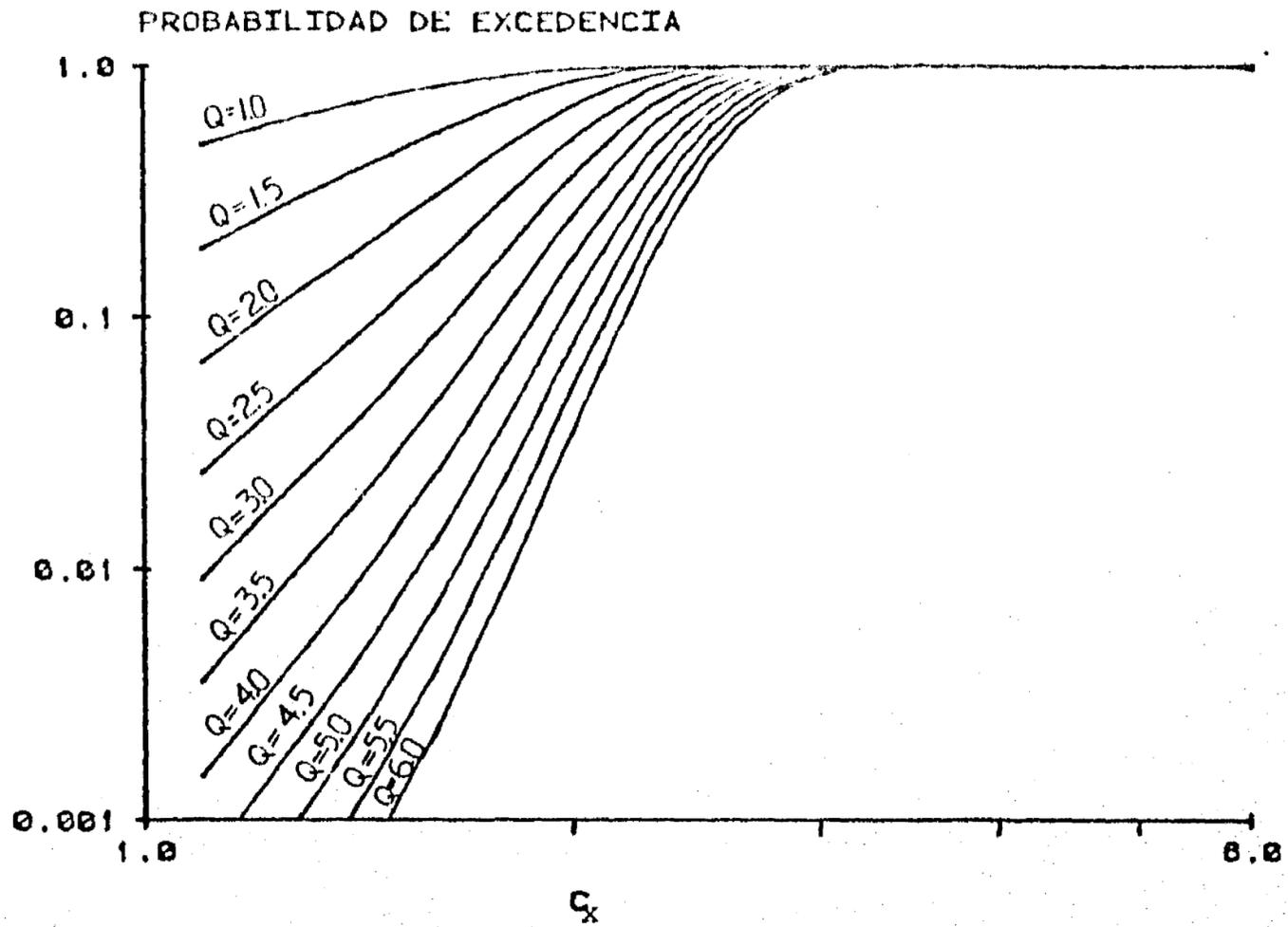


Fig 35. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno firme con  $T=1.0$  seg y  $C_k=0.1$

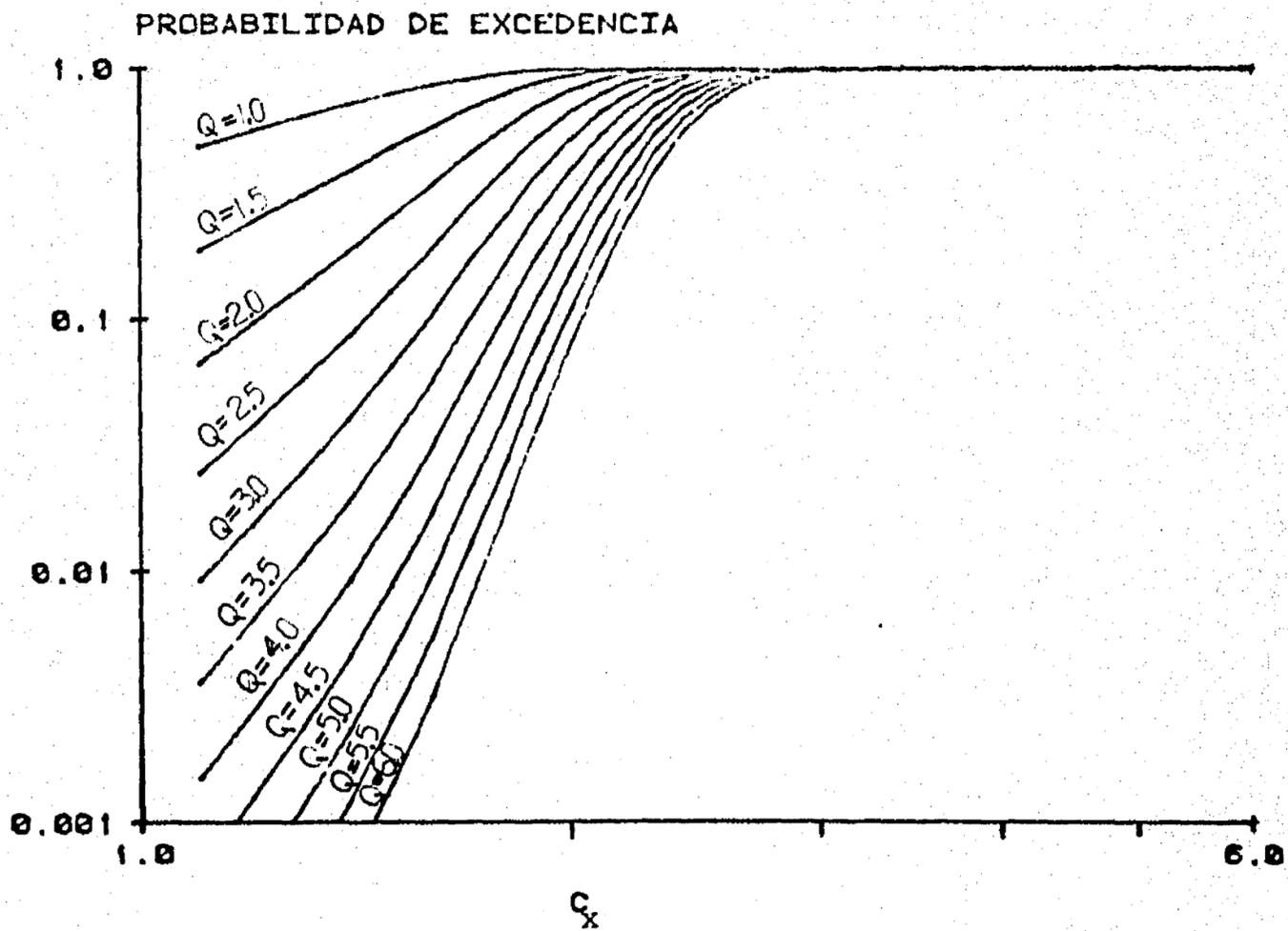


Fig 36. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno firme con  $T=1.0$  seg y  $C_k=0.125$

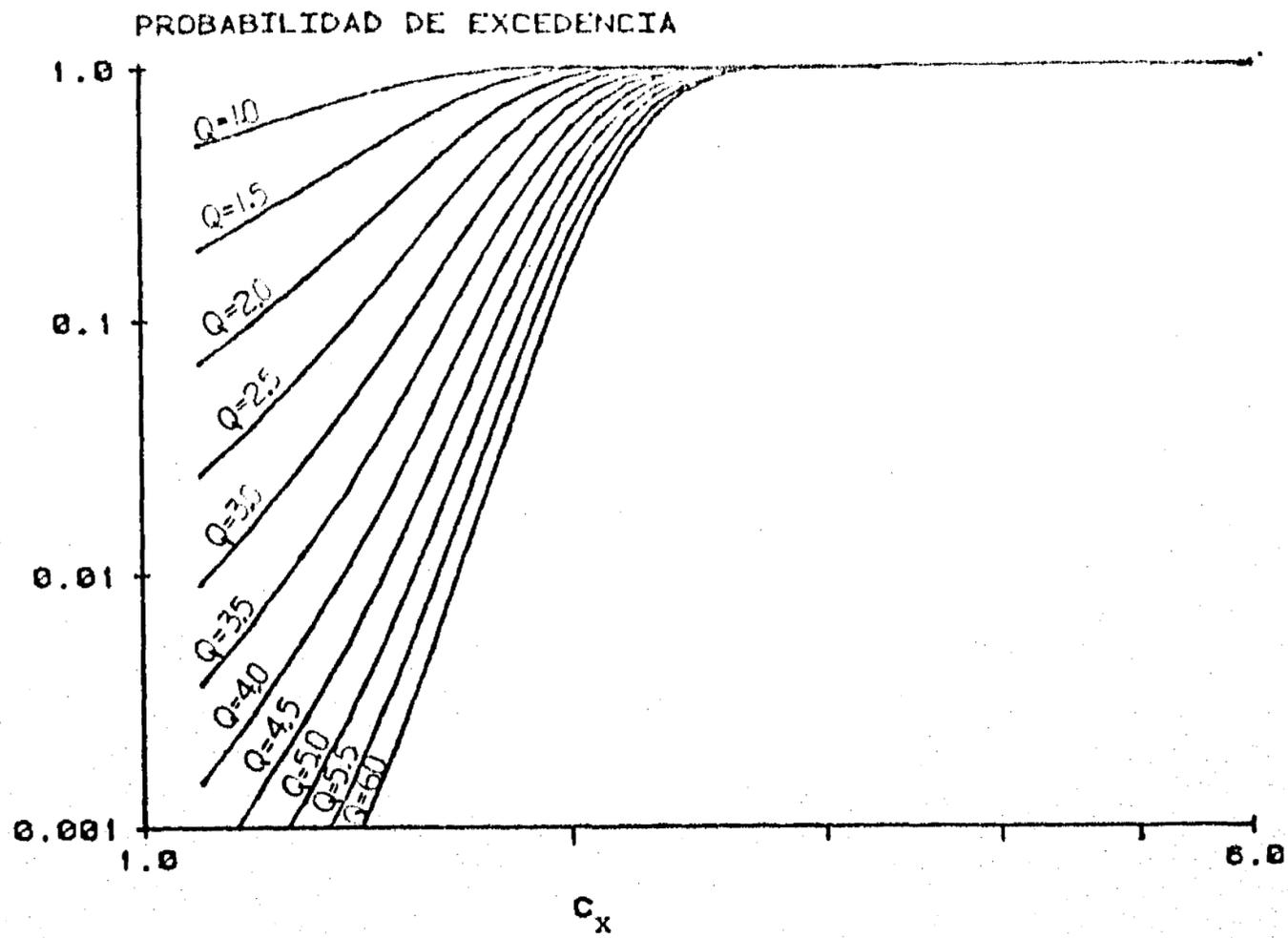


Fig 37. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno firme con  $T=1.0$  seg y  $C_k=0.15$

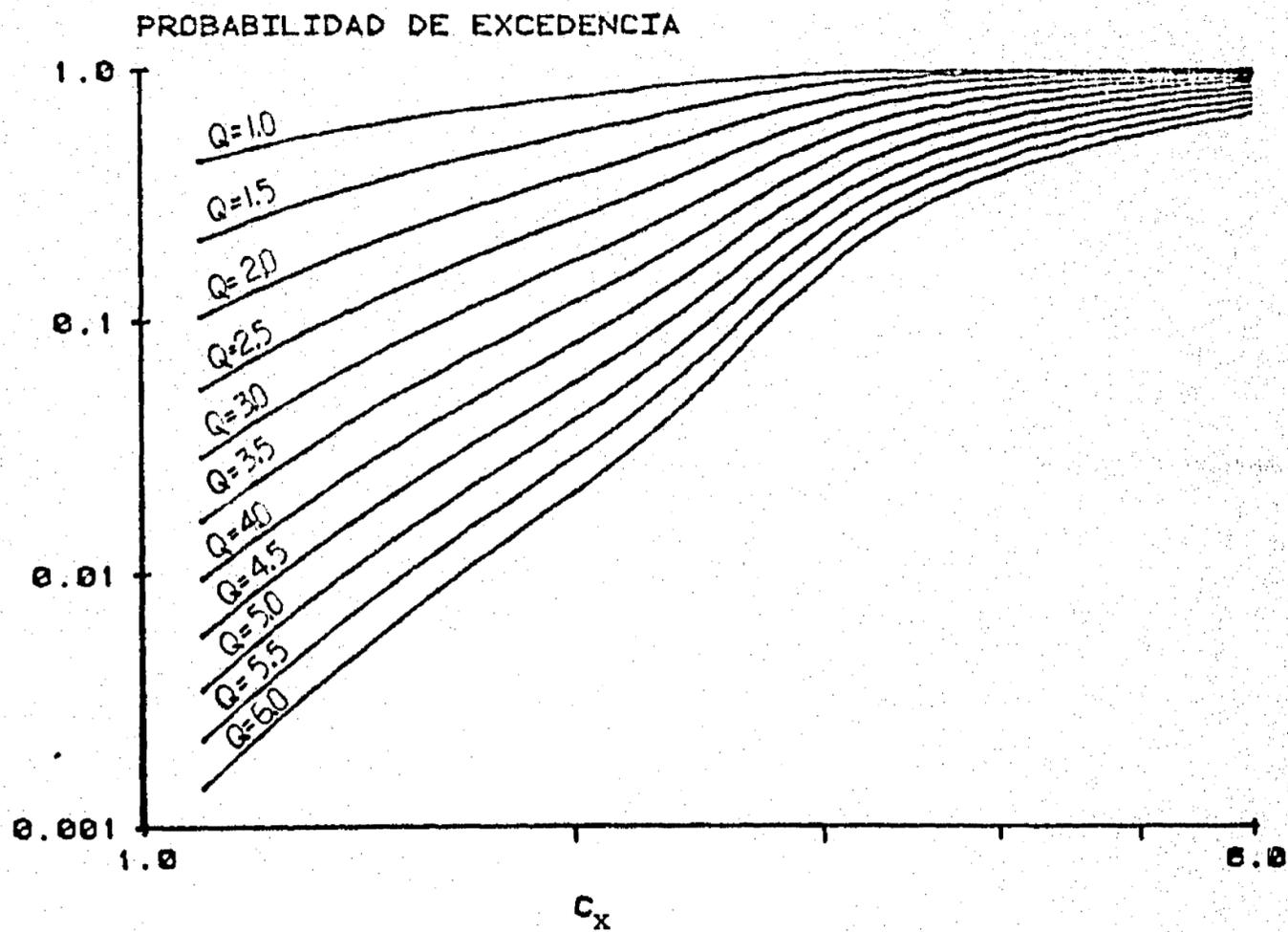


Fig 38. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno firme con  $T=0.5$  seg y  $C_k=0.0$

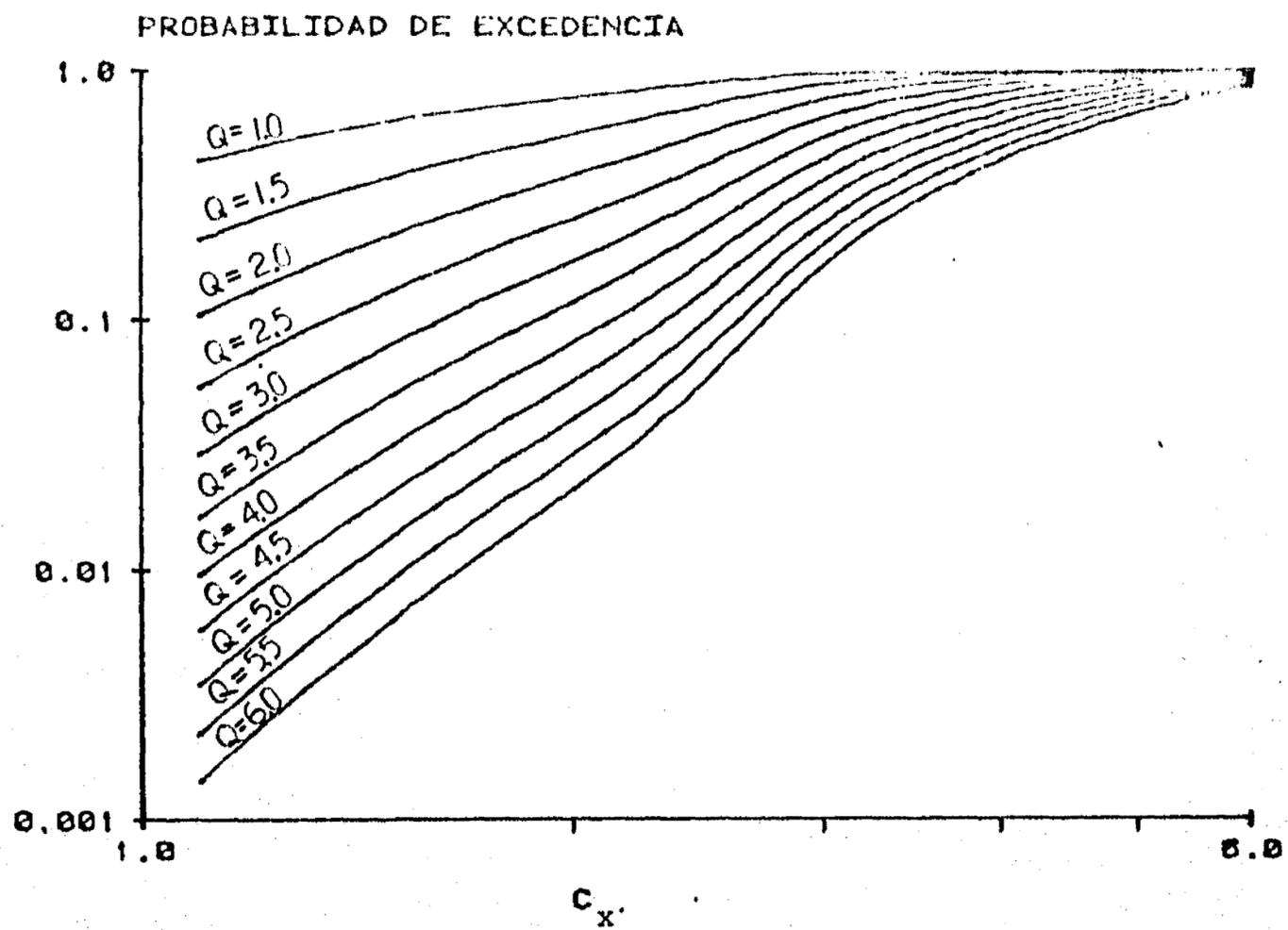


Fig 39. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno firme con  $T=0.5$  seg y  $C_k=0.0125$

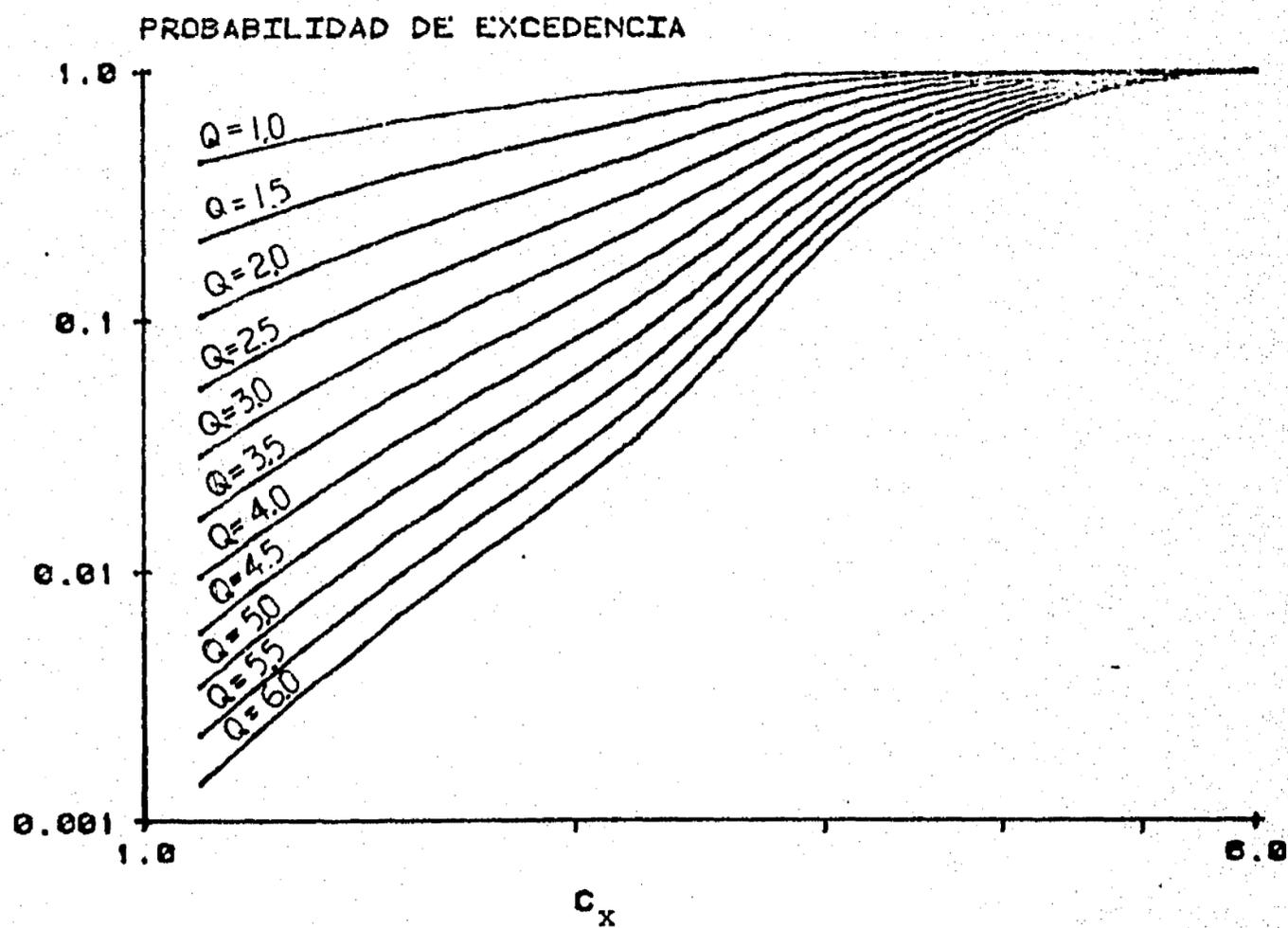


Fig 40 . Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno firme con  $T=0.5$  seg y  $C_k=0.025$

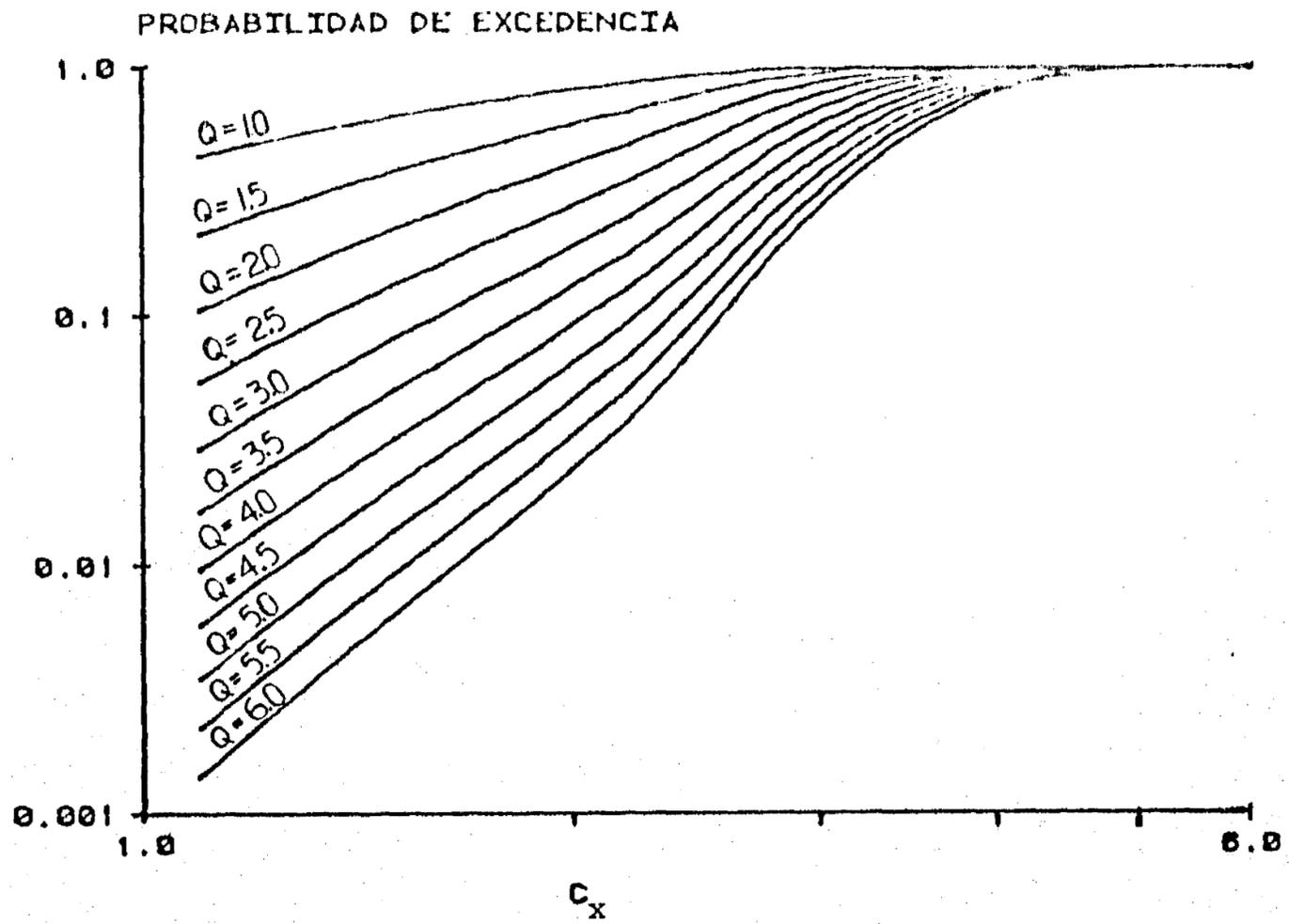


Fig 41. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno firme con  $T=0.5$  seg y  $C_k=0.0375$

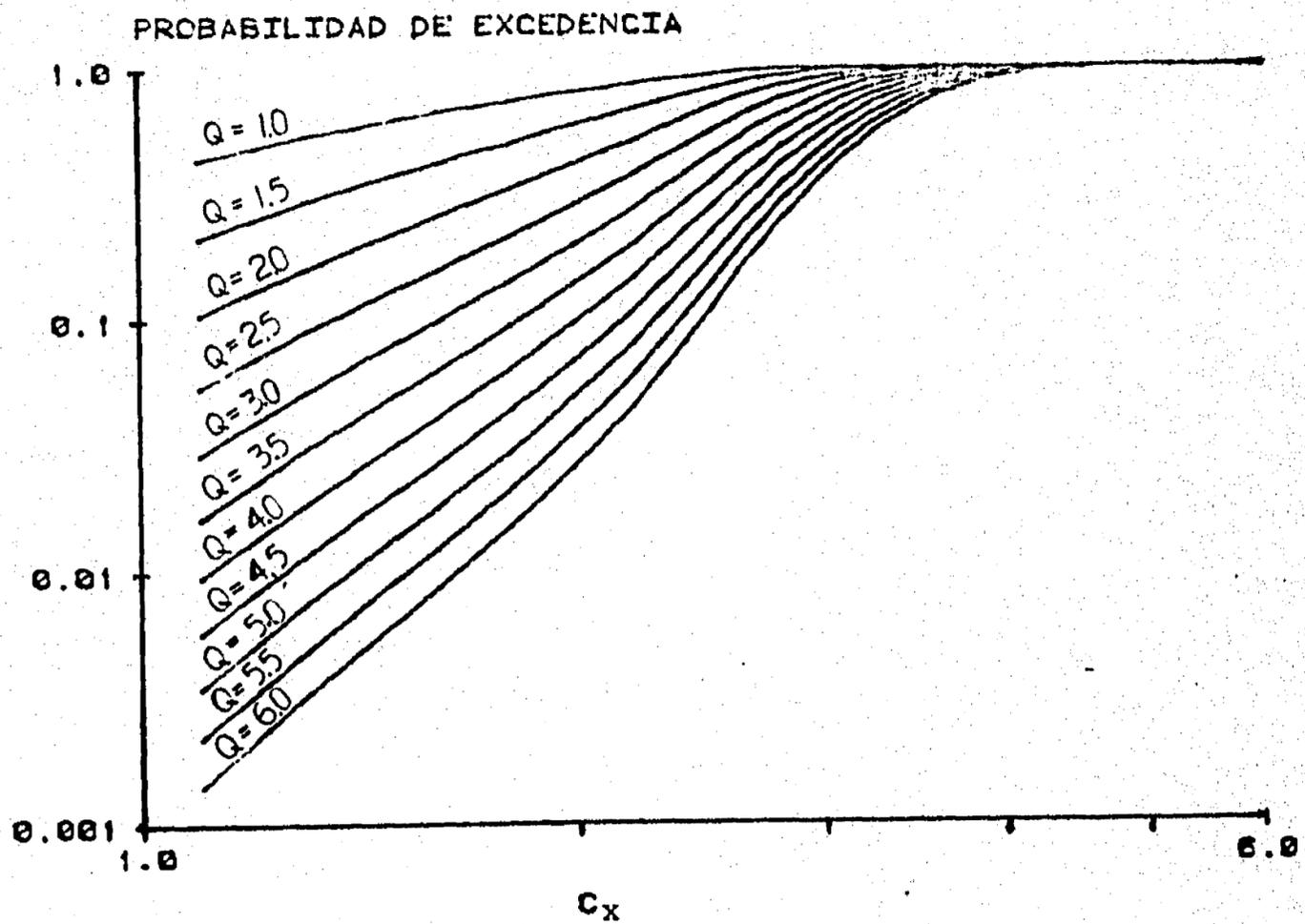


Fig 42. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno firme con  $T=0.5$  seg y  $C_k=0.05$

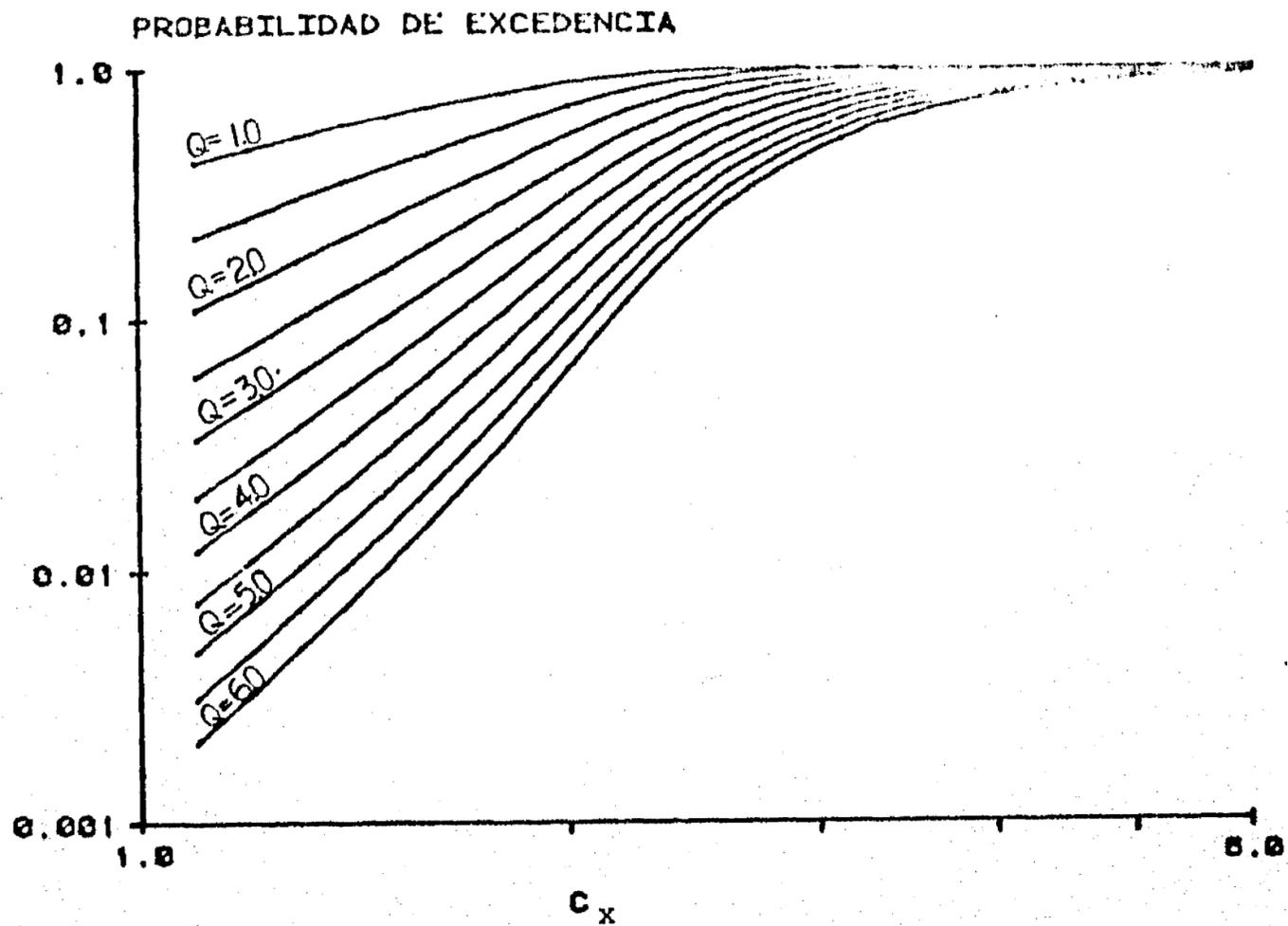


Fig 43. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno firme con  $T=0.25$  seg y  $C_k=0.0$

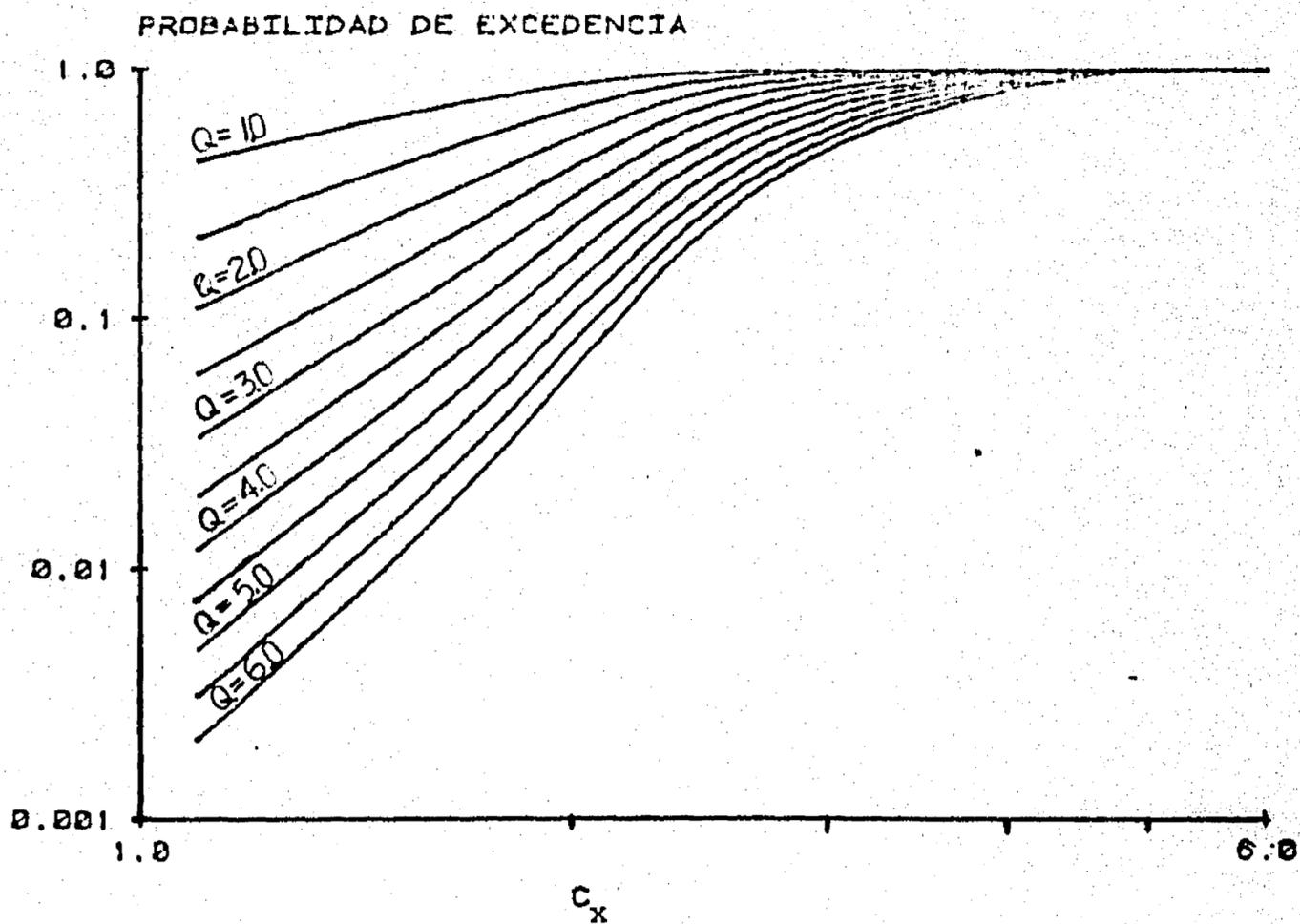


Fig 44. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno firme con  $T=0.25$  seg y  $C_k=0.00625$

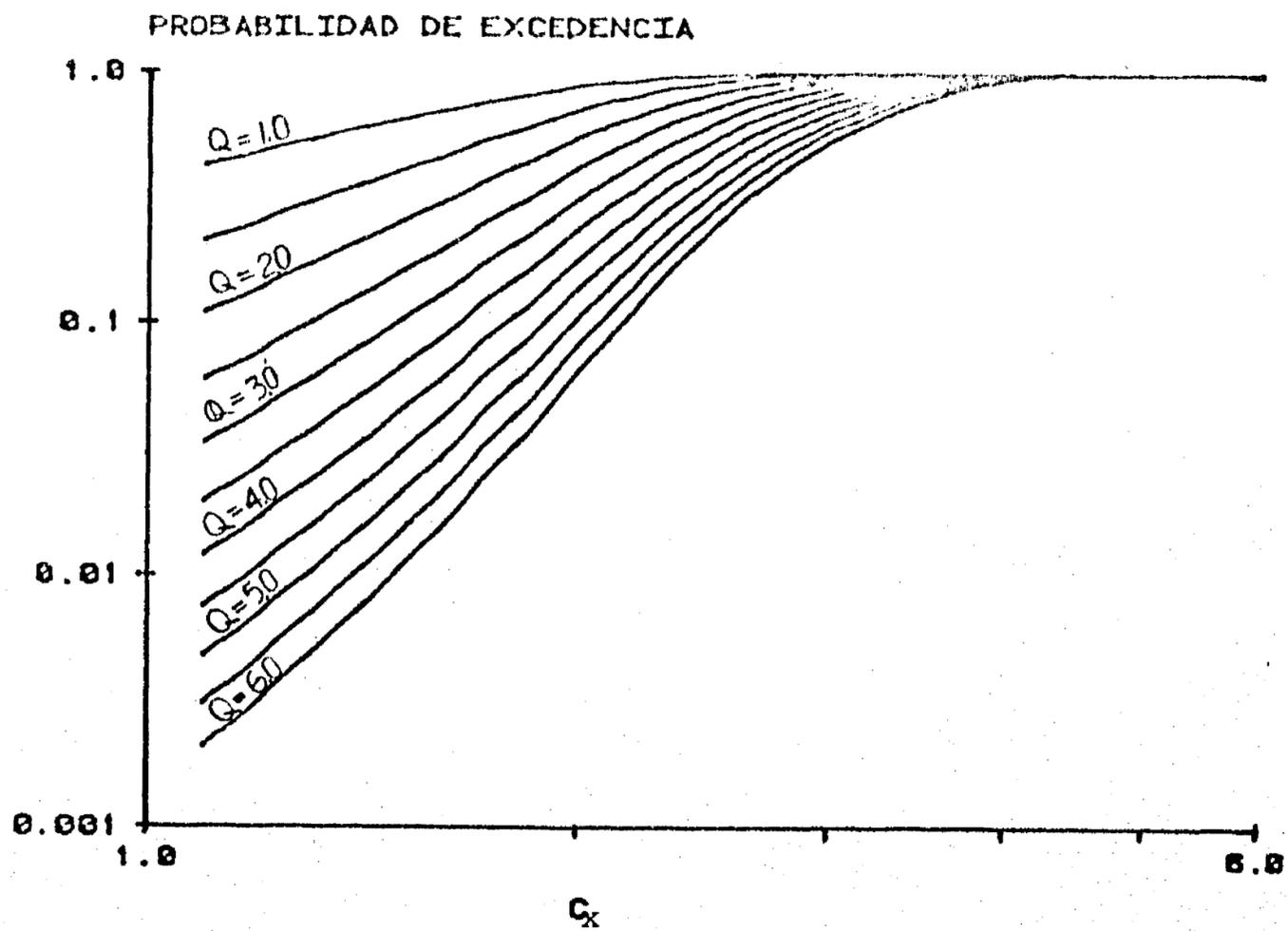


Fig 45. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno firme con  $T=0.25$  seg y  $C_k=0.0125$

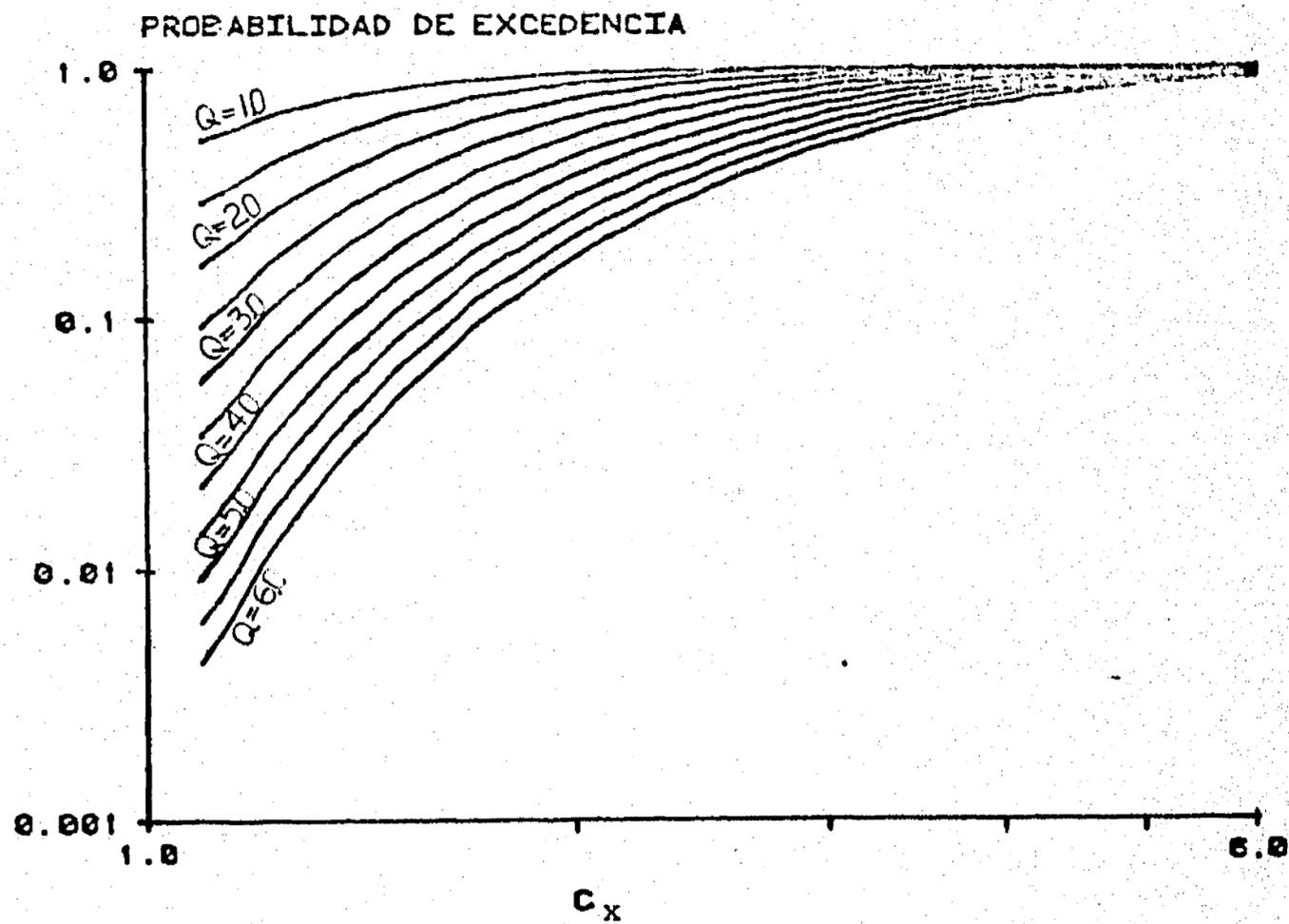


Fig 46. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno compresible con  $T=1.0$  seg y  $C_k=0.0$

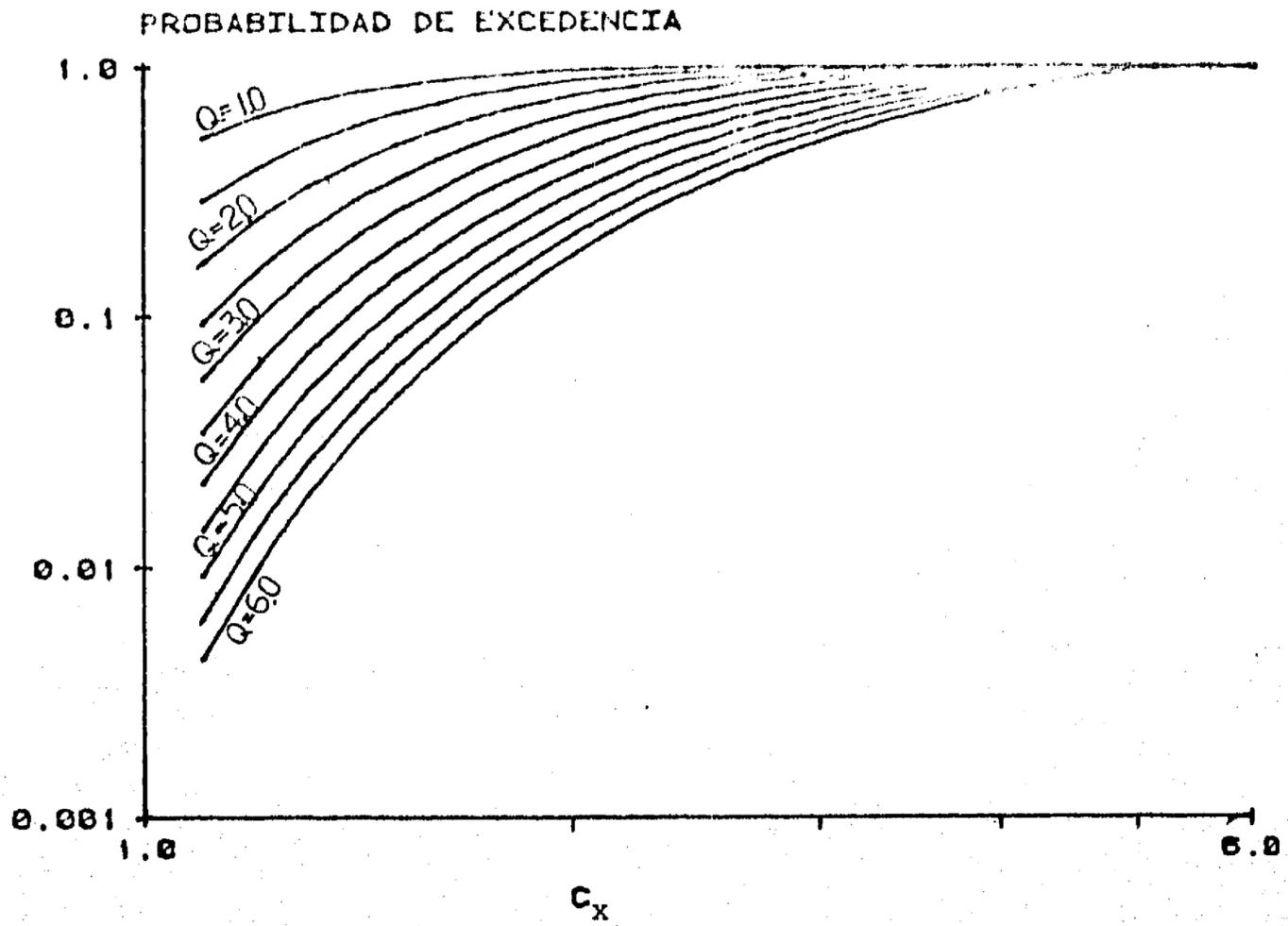


Fig 47. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno compresible con  $T=1.0$  seg y  $C_k=0.00625$

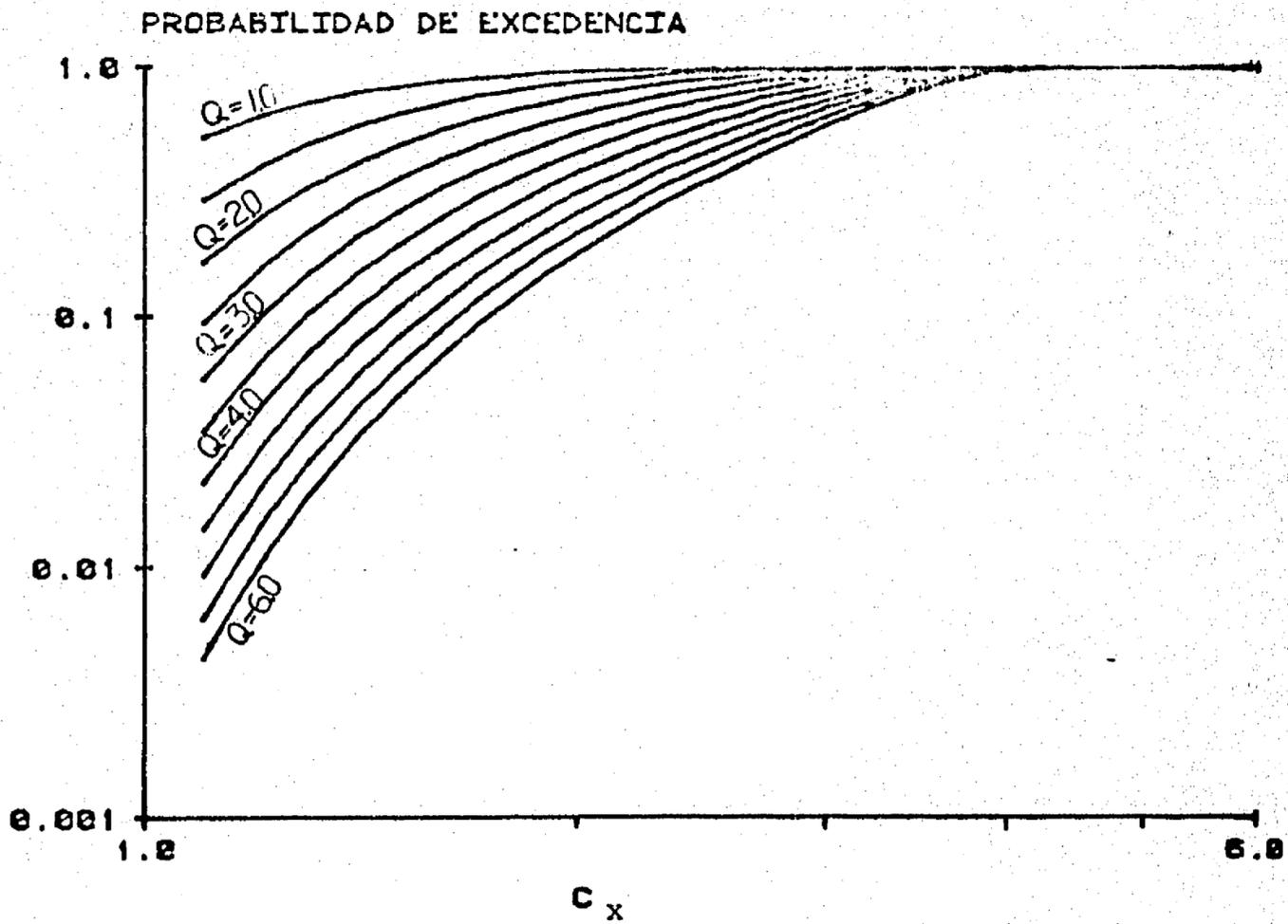


Fig 48. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno compresible con  $T=1.0$  seg y  $C_k=0.0125$

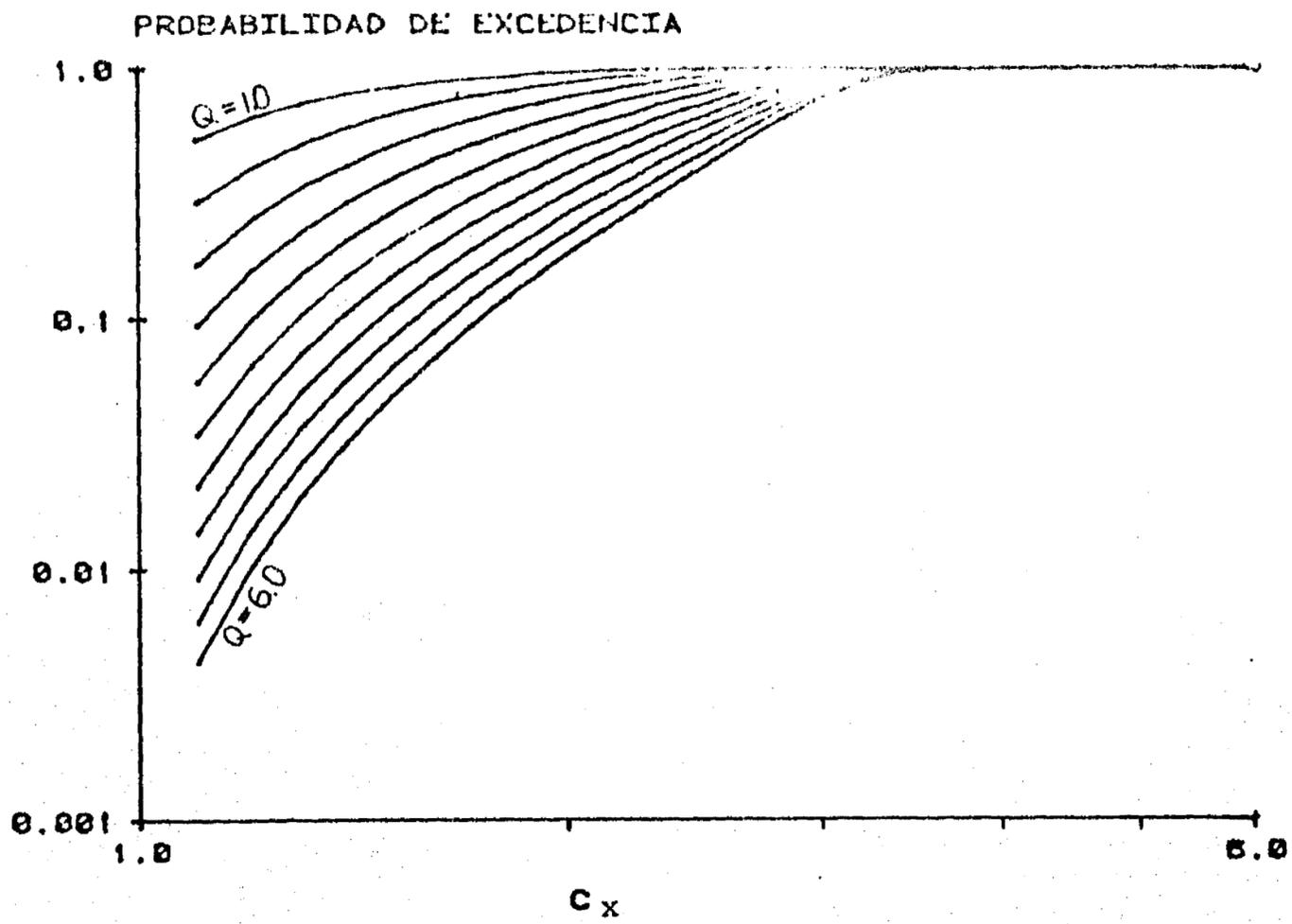


Fig 49. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno compresible con  $T=1.0$  seg y  $C_k=0.01875$

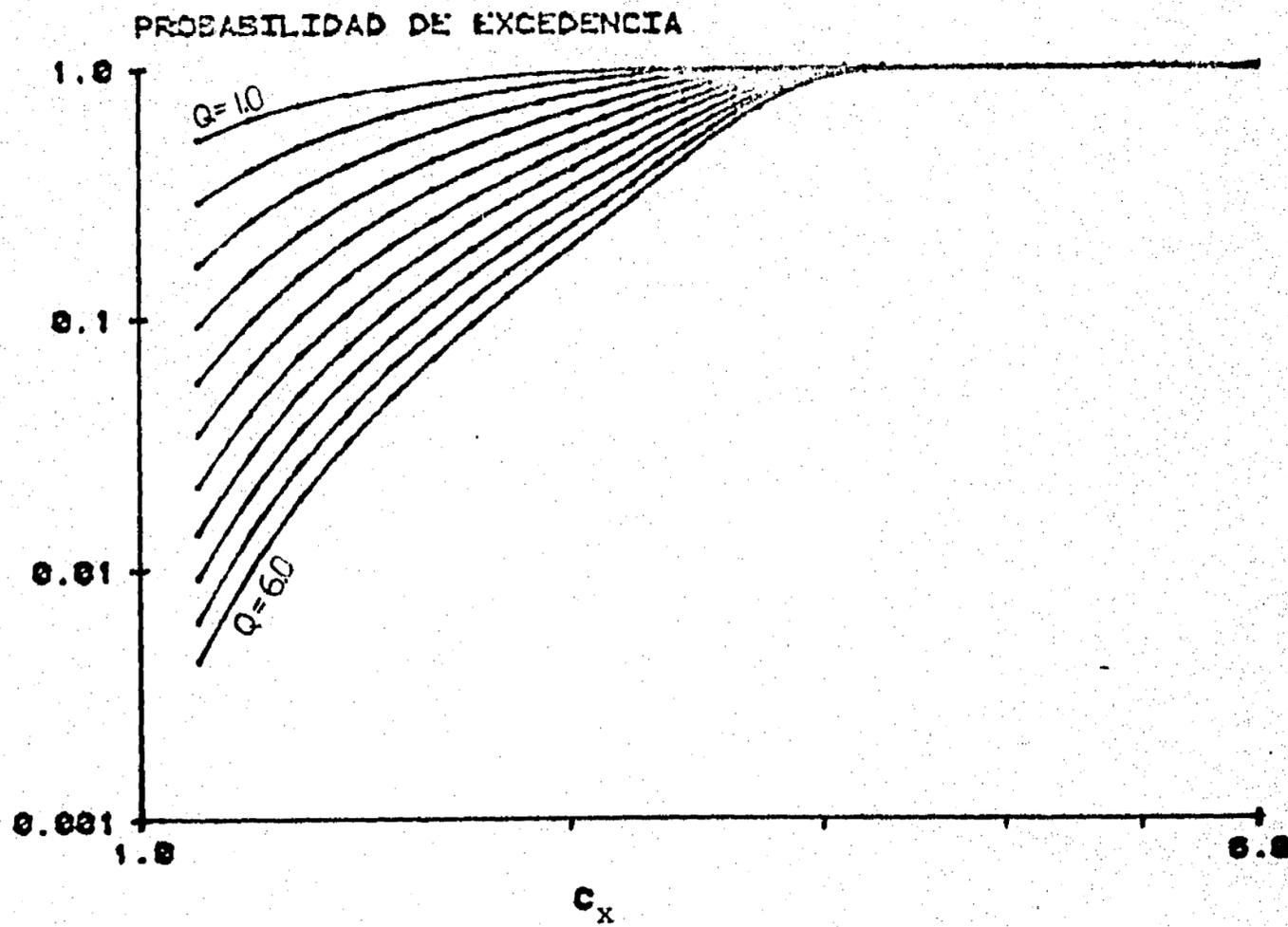


Fig 50 . Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno compresible con  $T=1.0$  seg y  $C_k=0.025$

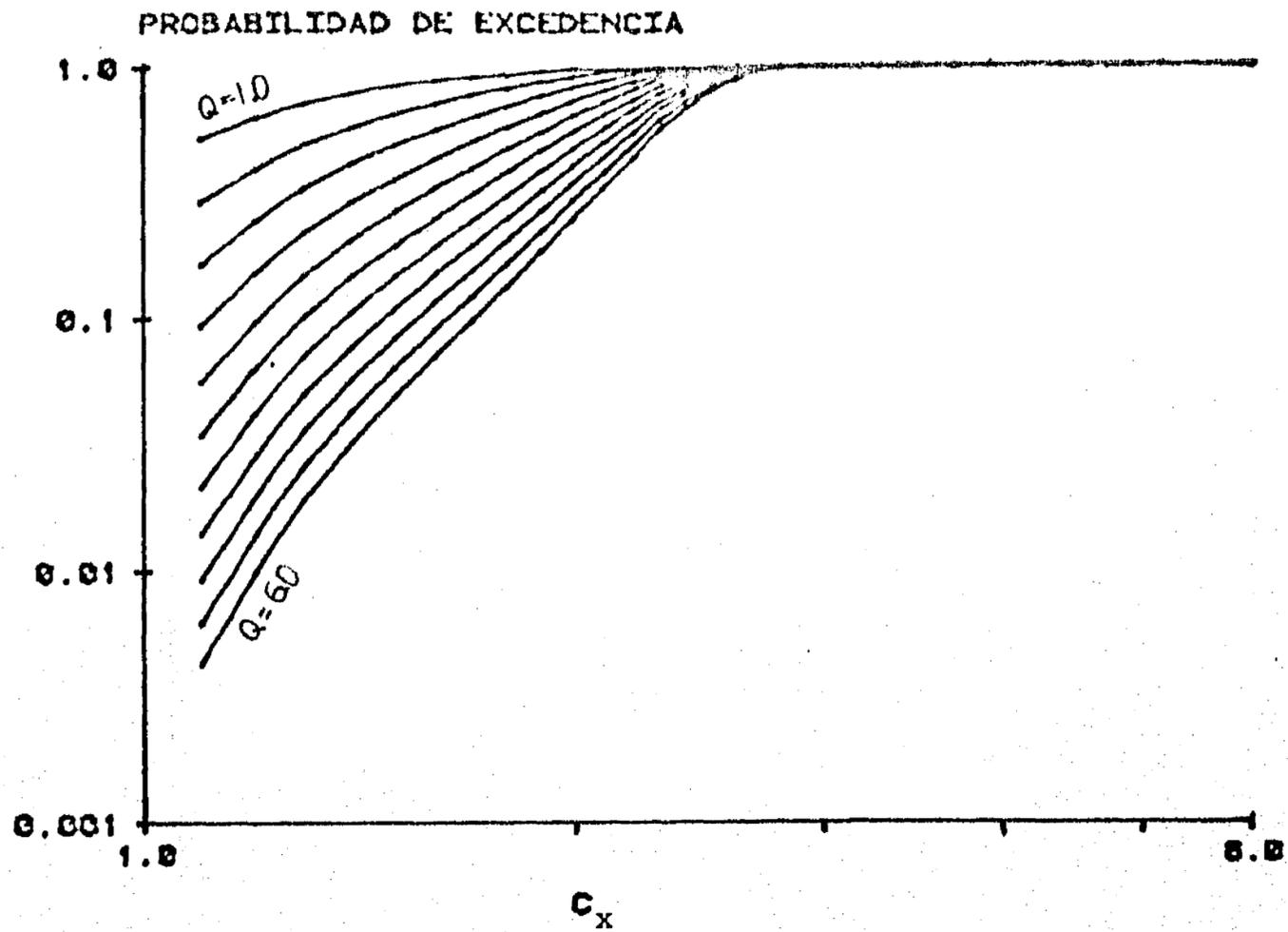


Fig 51. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno compresible con  $T=1.0$  seg y  $C_k=0.0375$

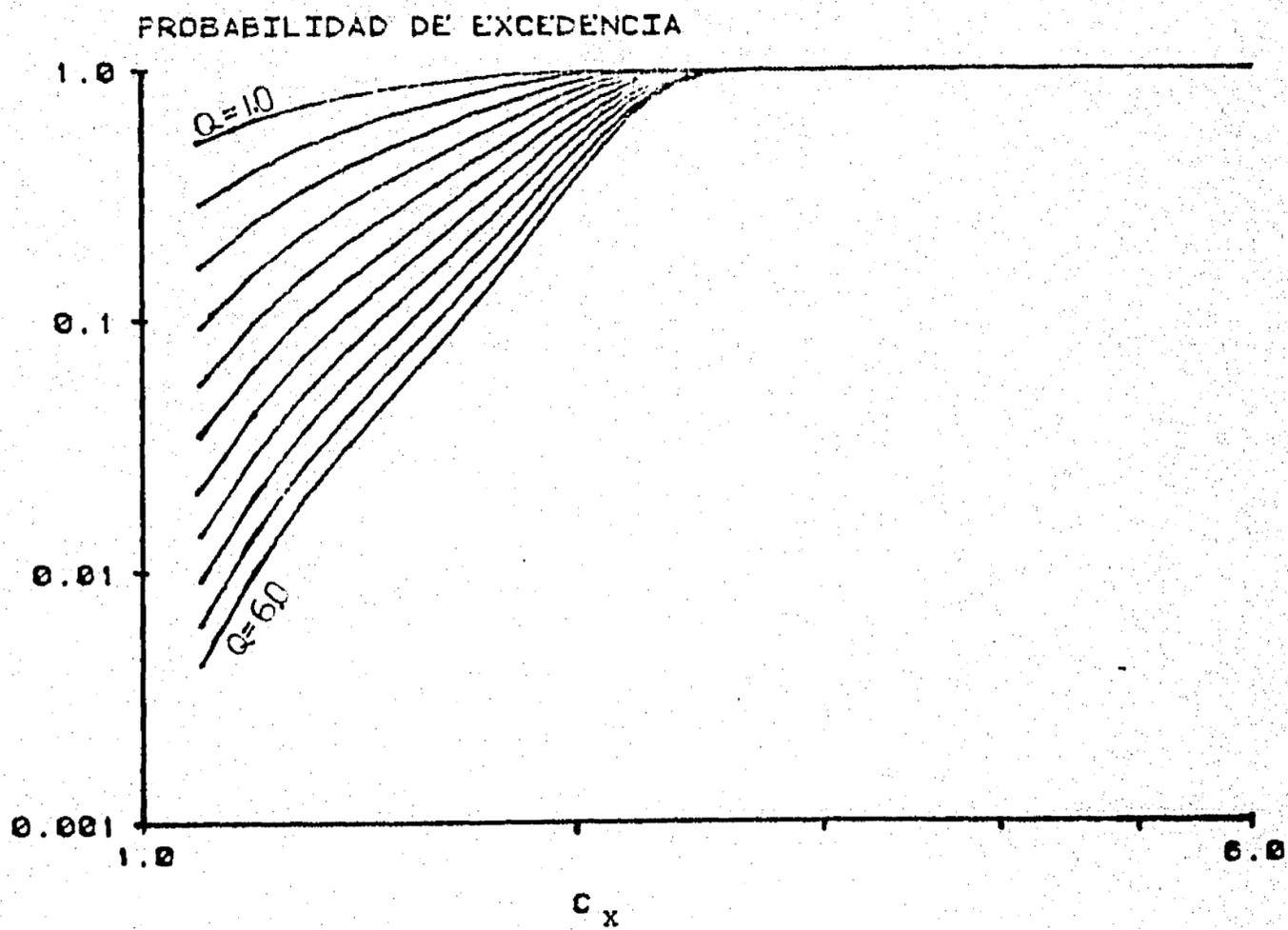


Fig 52. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno compresible con  $T=1.0$  seg y  $C_k=0.05$

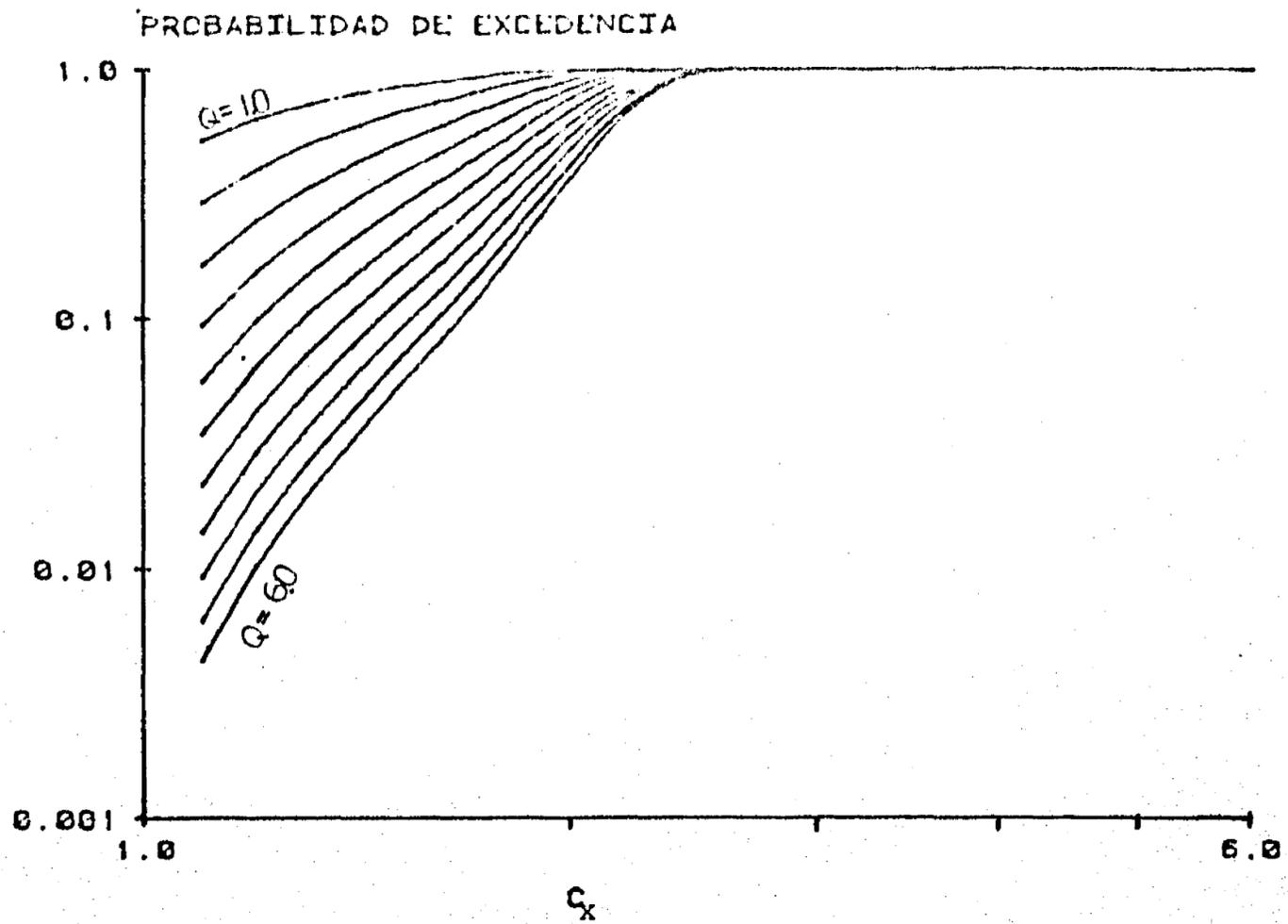


Fig 53. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno compresible con  $T=1.0$  seg y  $C_k=0.075$

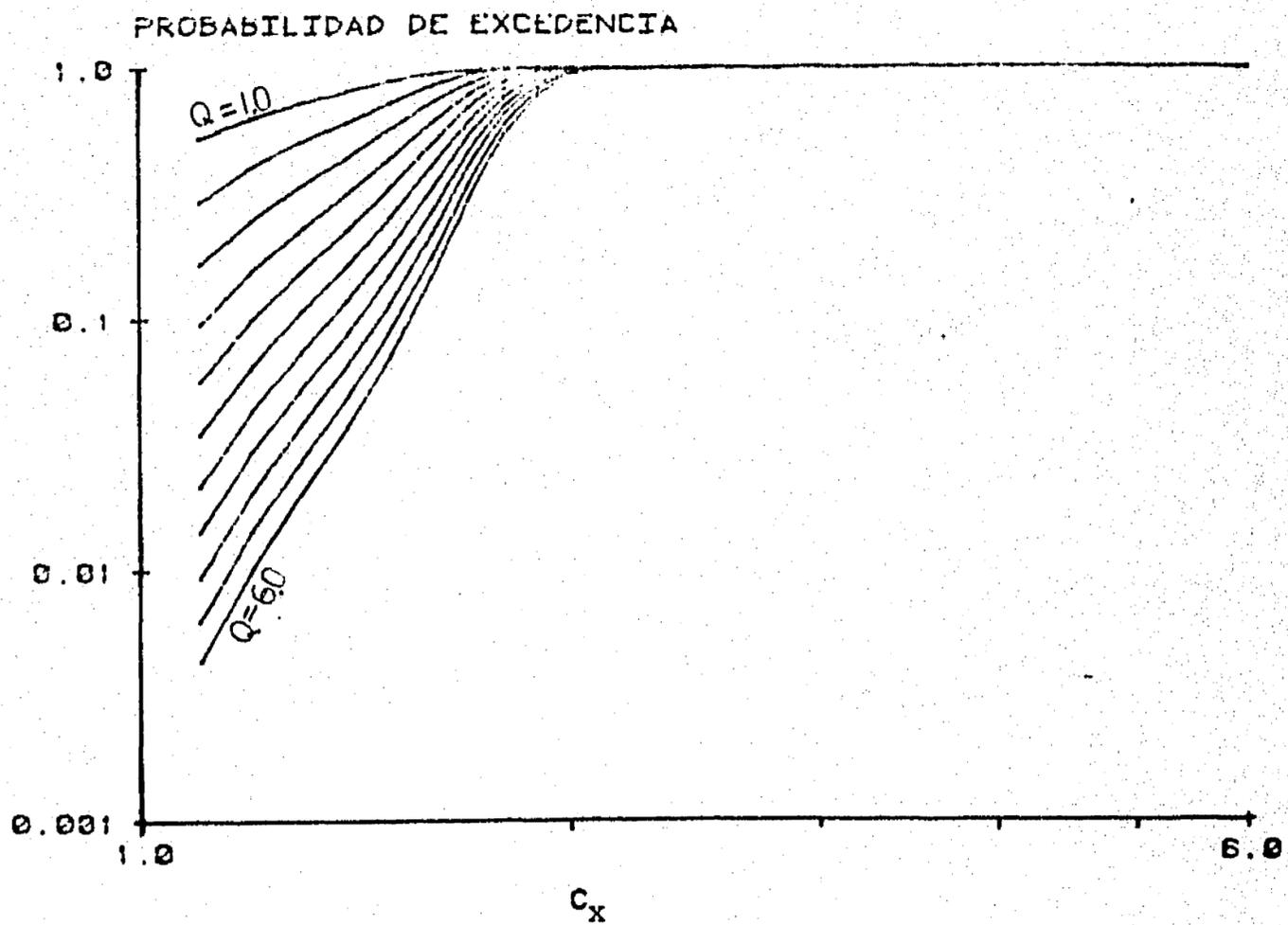


Fig 54. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno compresible con  $T=1.0$  seg y  $C_k=0.1$

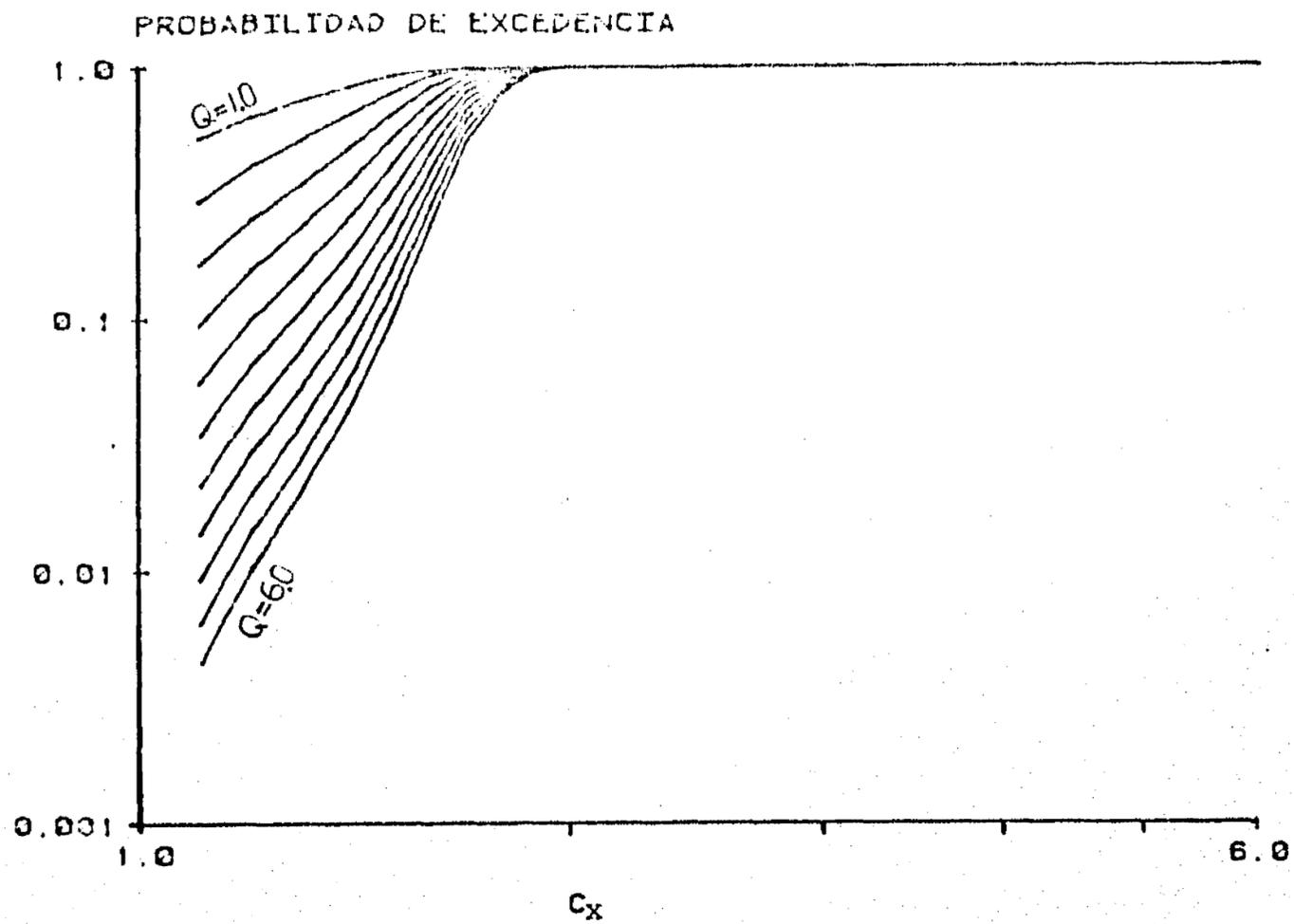


Fig 55. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno compresible con  $T=1.0$  seg y  $C_k=0.125$

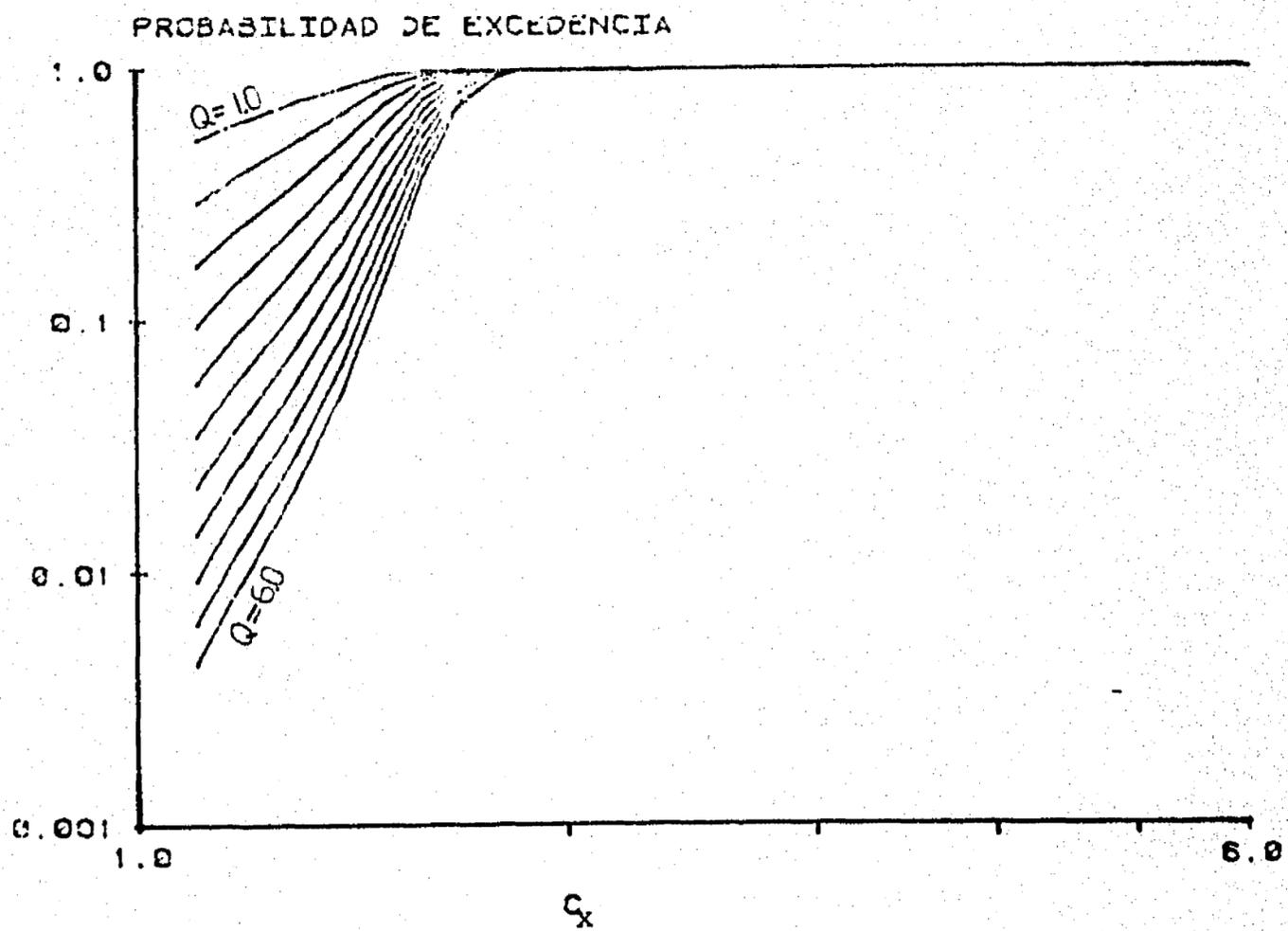


Fig 56. Probabilidad de excedencia para sistemas en terreno compresible con  $T=1.0$  seg y  $C_k=0.15$

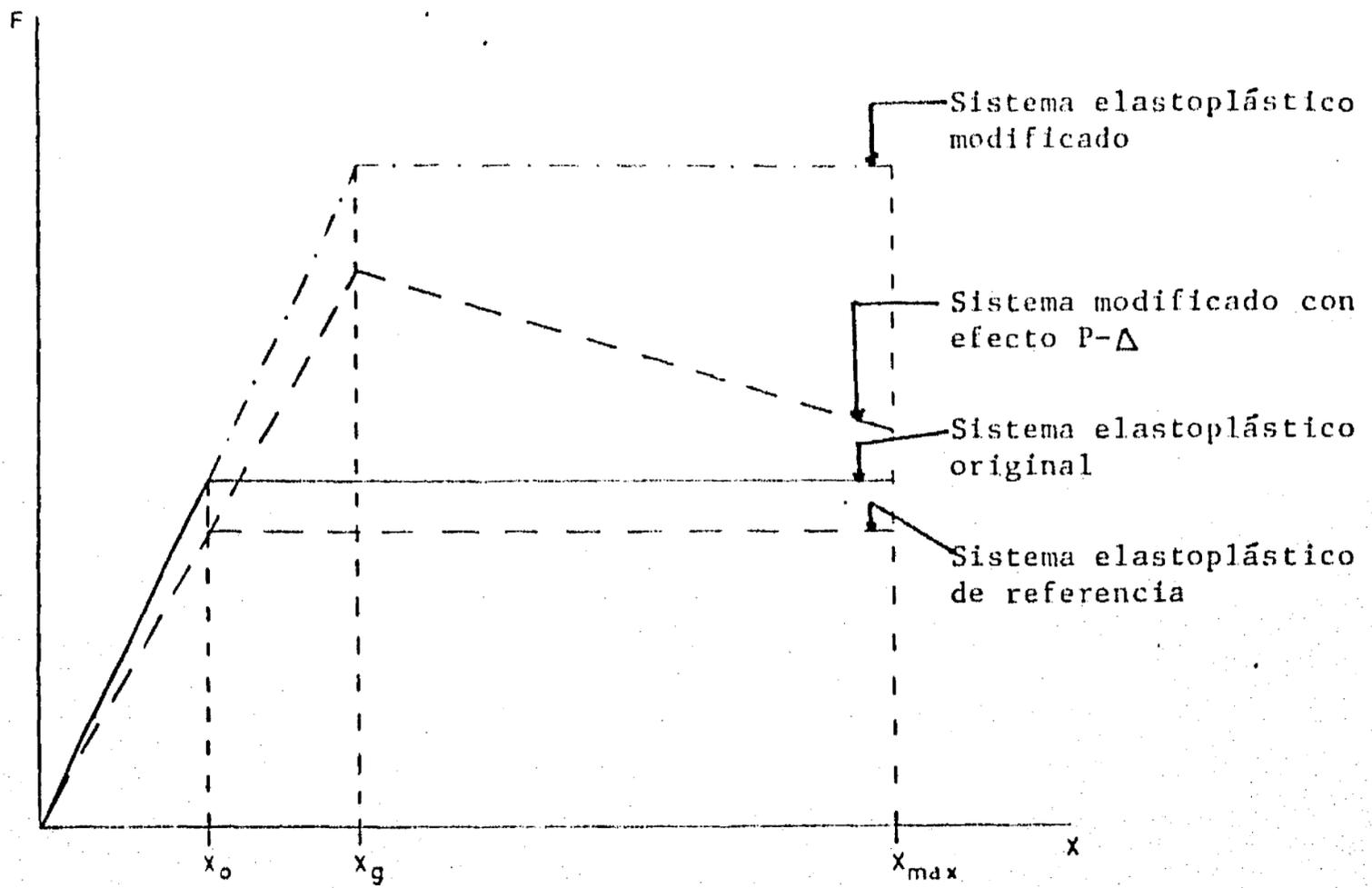


Fig 57. Obtención del nuevo sistema modificado con efecto P- $\Delta$  a partir del sistema elastoplástico original

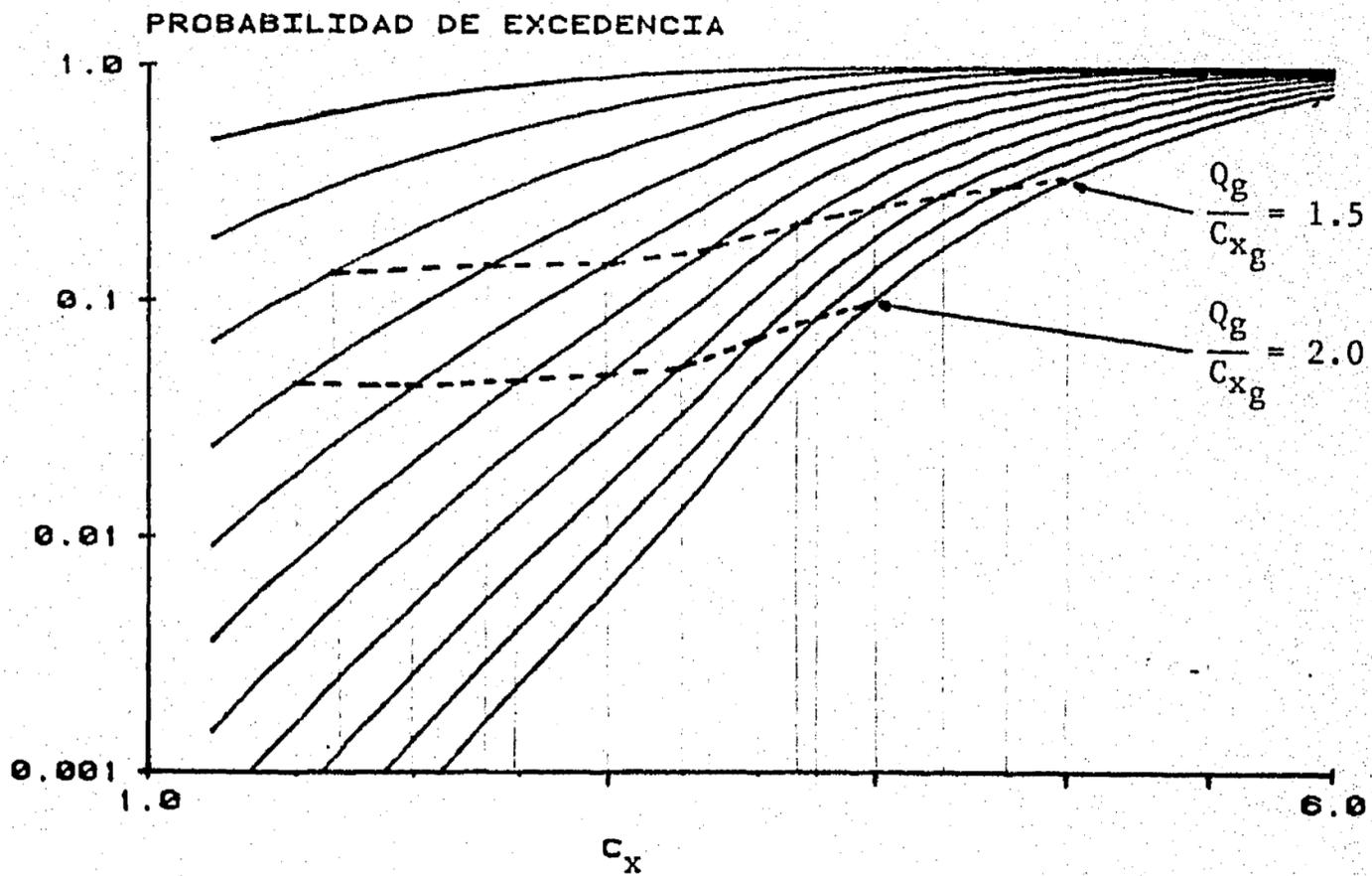


Fig 58. Trayectoria de la curva que relaciona a  $Q_g$  con  $C_{xg}$

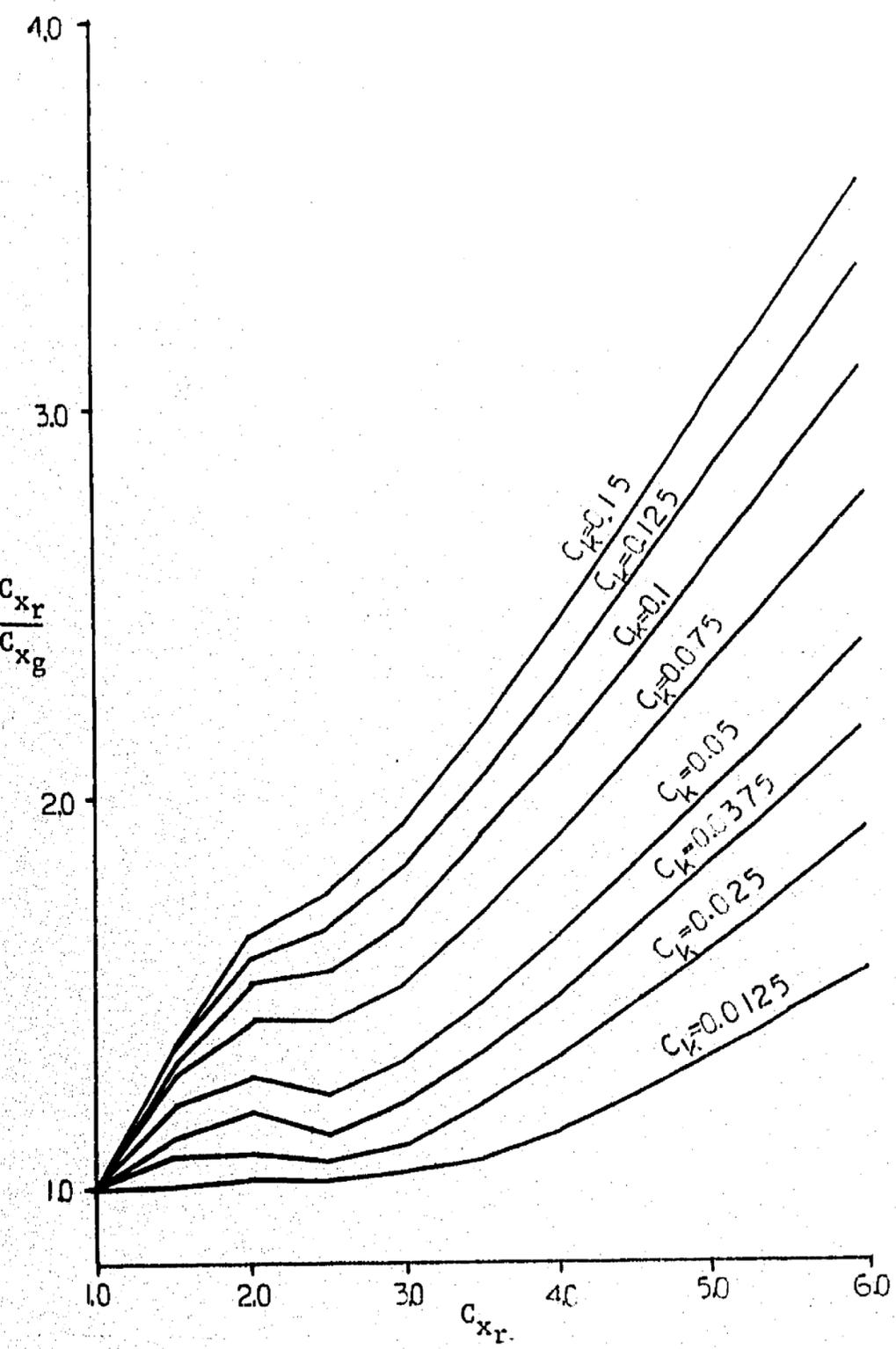


Fig 59. Valores de  $C_{xg}$  para sistemas con  $T=1.0$  seg en terreno firme

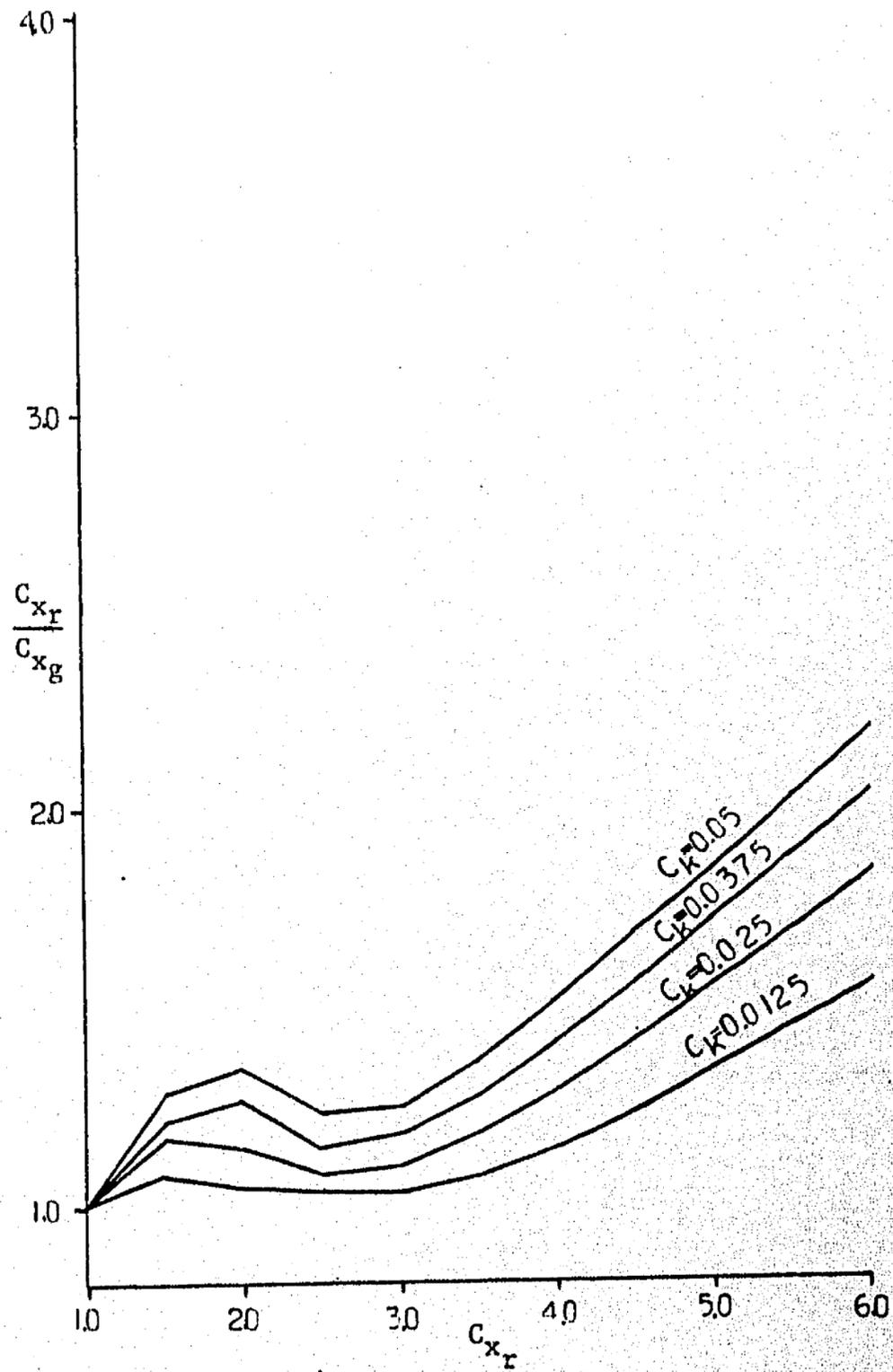


Fig 60. Valores de  $C_{xg}$  para sistemas con  $T=0.5$  seg en terreno firme

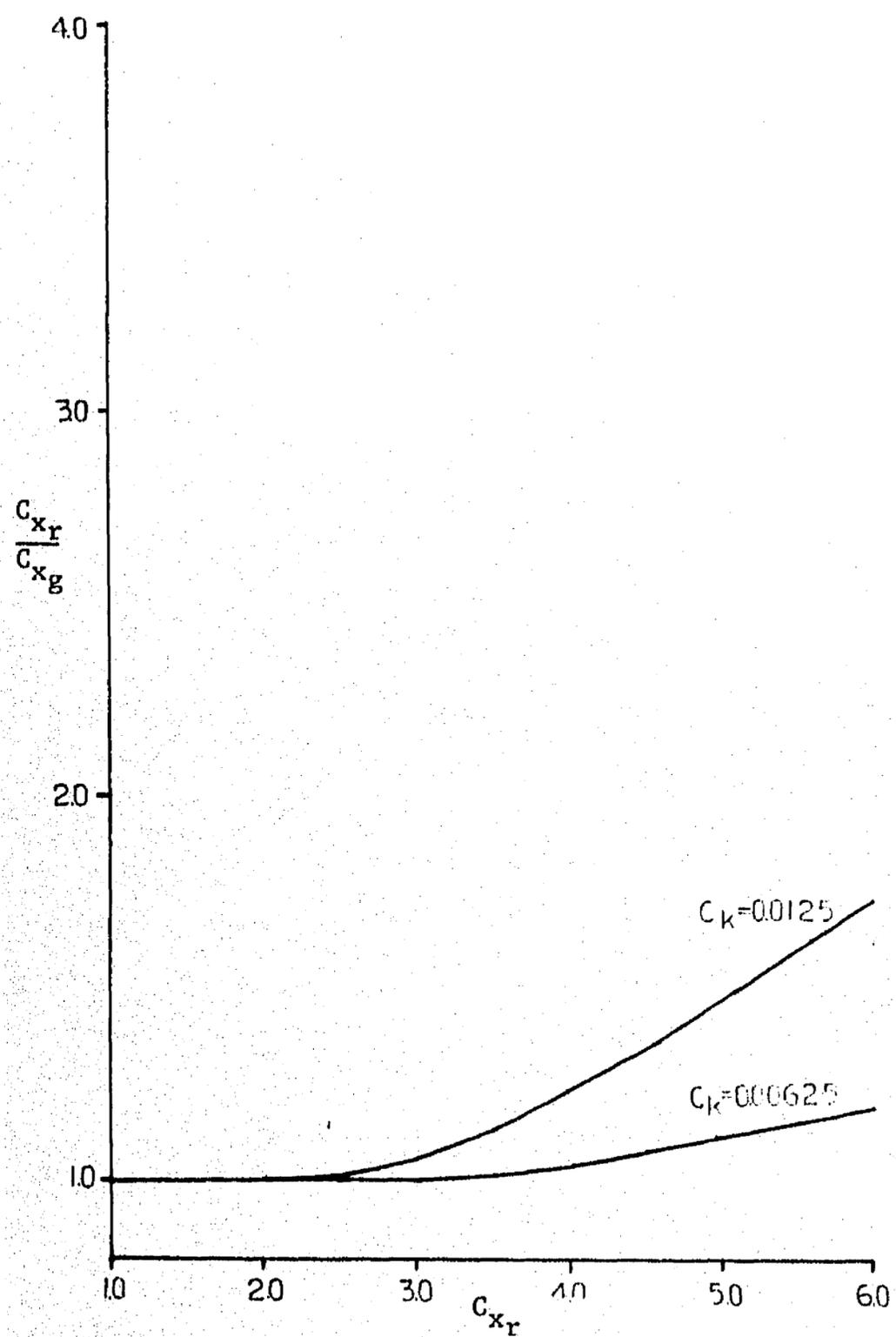


Fig 61. Valores de  $C_{x_g}$  para sistemas con  $T=0.25$  seg en terreno firme

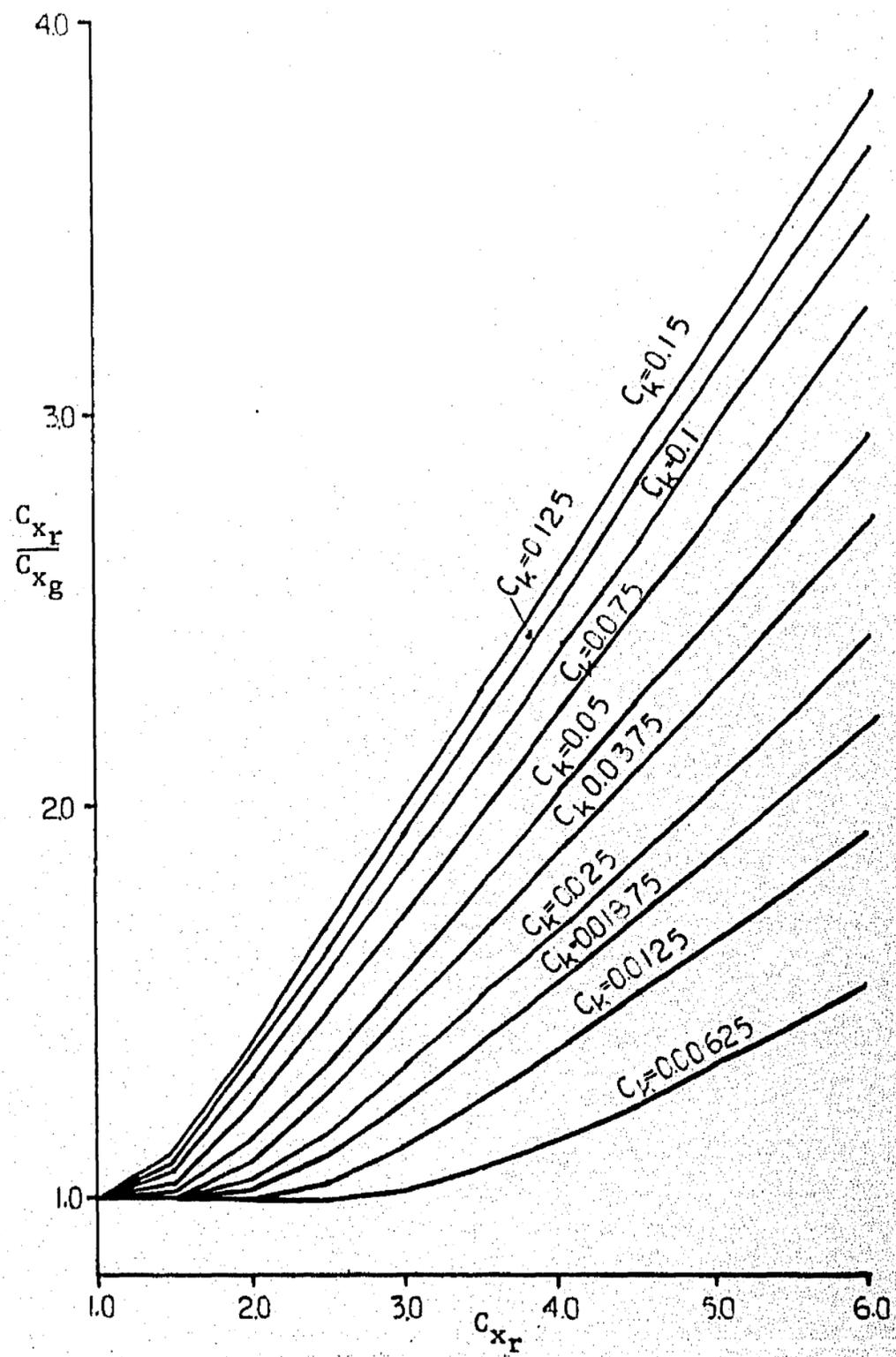


Fig 62. Valores de  $C_{x_g}$  para sistemas con  $T=1.0$  seg en terreno compresible

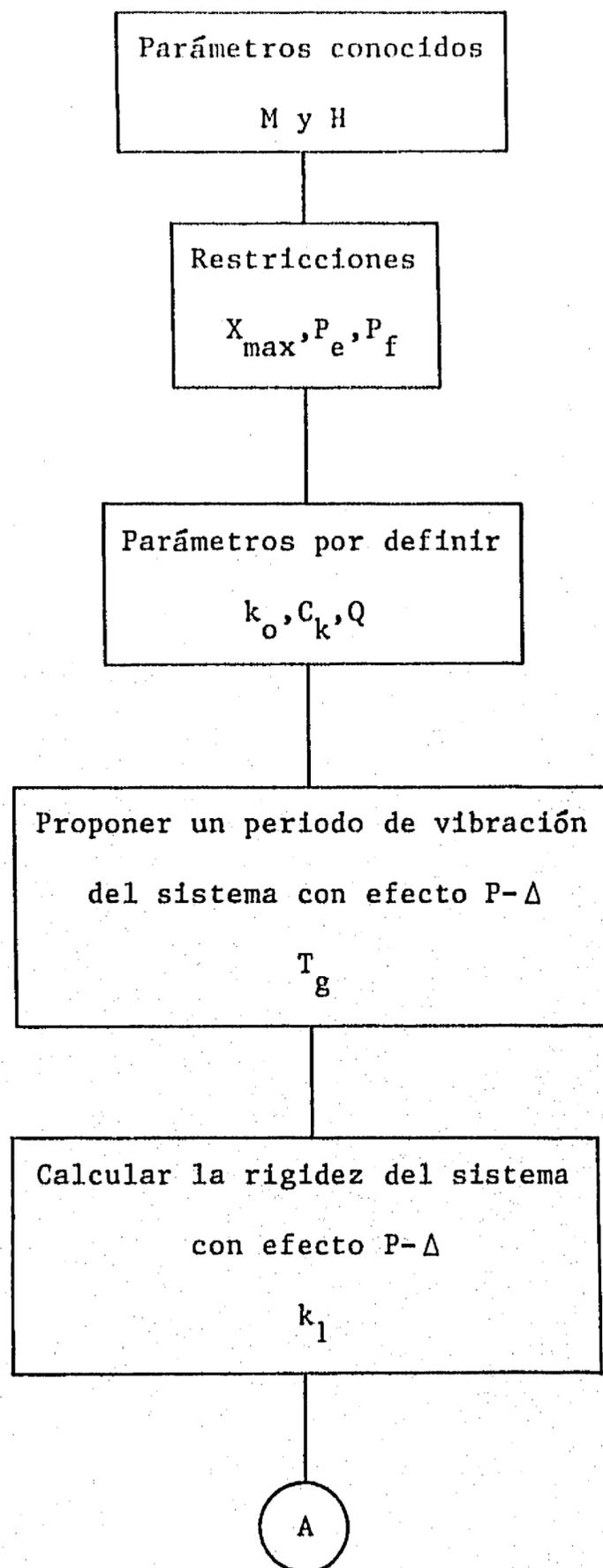


Fig 63. Diagrama de flujo para la solución del problema del ejemplo I

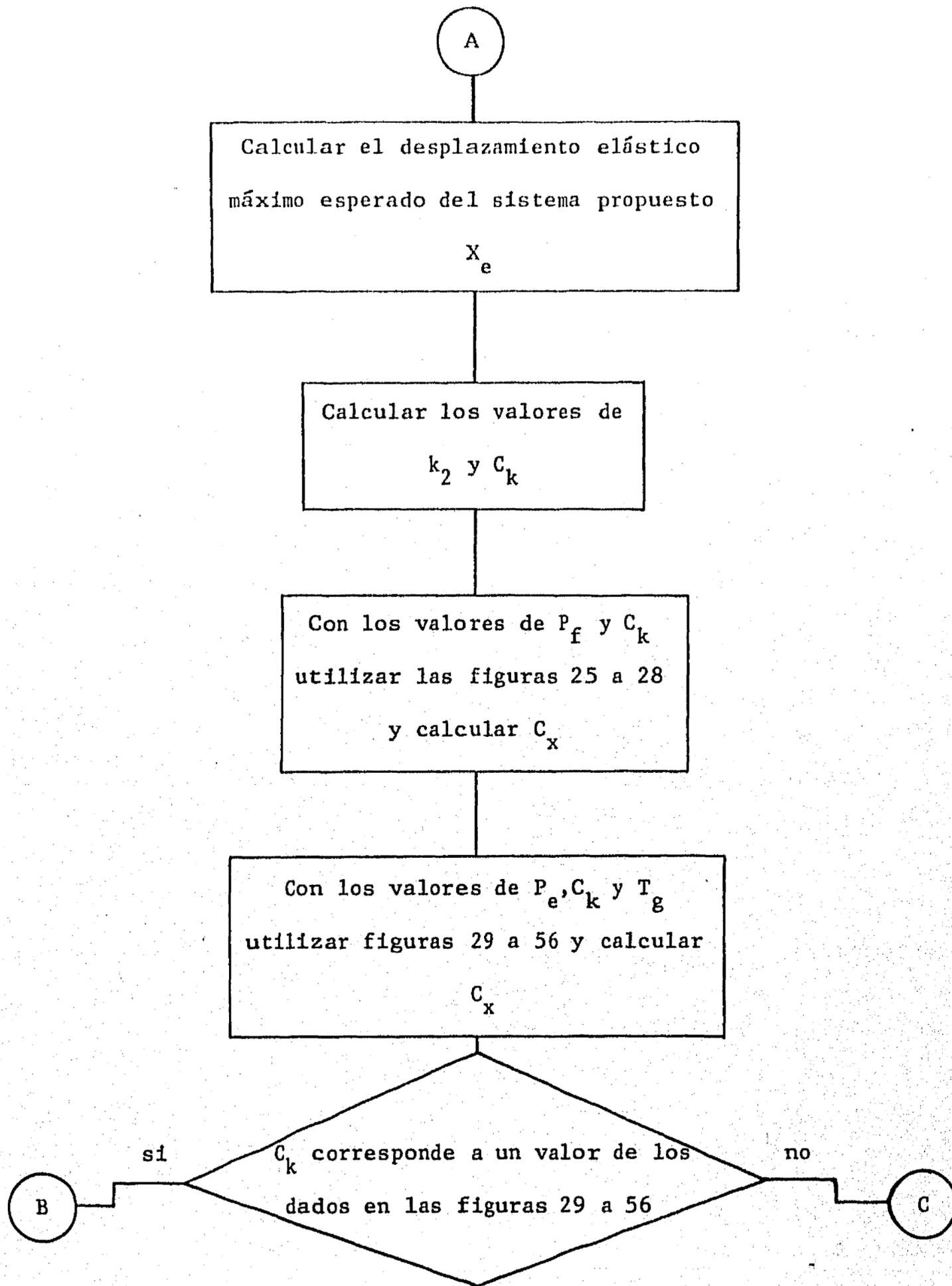


Fig 63. (continuación)



## APENDICE A

### 1. Efecto P- $\Delta$

En este estudio el efecto P- $\Delta$  se toma en cuenta mediante una segunda pendiente negativa. Esta forma de representar la influencia de la carga vertical ya ha sido usada anteriormente en otros trabajos (refs 11, 12 y 19), y es una idealización simple la cual no esta muy alejada del comportamiento real en las estructuras. En el subcapítulo 2.1 se da una explicación de las simplificaciones que se toman para llegar al modelo del efecto de la carga vertical que aquí se usa, basado en la referencia 19.

El modelo obtenido de esa forma se apega adecuadamente a los resultados experimentales hechos por algunos investigadores, en pruebas de marcos de acero y concreto, sometidos a cargas laterales y verticales estáticas y dinámicas, y en la cuales comparan sus resultados con análisis teóricos donde suponen una aproximación del efecto de la carga vertical semejante a la usada en este estudio.

Entre los trabajos encontrados al respecto esta un estudio hecho por Wakabayashi, Nonaka y Matsui (ref A.1), los cuales hicieron pruebas experimentales del comportamiento de modelos de marcos rectangulares de una crujía, con uno y dos niveles. En sus pruebas aplicaron una carga vertical constante en las columnas y una fuerza horizontal incremental en la parte superior del marco. Esta pruebas consistieron de dos series de modelos de marcos cruciforme. Los resultados del análisis experimental se compararon con los resultados de un análisis teórico en el cual se consideraron dos tipos de comportamiento: rígido-perfectamente plástico y elastoplástico, considerando además el

endurecimiento por deformación. En las figuras A.1 y A.2 se muestran algunos de los resultados obtenidos para el caso de modelos de marcos completos y marcos cruciformes respectivamente. En el caso de los marcos completos (fig A.1), los resultados en marcos de un nivel (fig A.1(a)) presentan una sobrestimación de la fuerza, efecto que no es visible en el caso de los marcos de dos niveles (fig A.1(b)). Se considera que esta diferencia de efectos se deba a una indeterminación de los marcos de un nivel, aunque no lo consideran una conclusión definitiva. En el caso de los marcos cruciformes (fig A.2), las características de la relación deformación-fuerza restauradora, son razonablemente predichas por la teoría en la cual se tomó en cuenta además del efecto de endurecimiento por deformación, la deformación por cortante.

Popov y Bertero (ref A.2) también realizaron un estudio experimental sobre el comportamiento de modelos a escala de sistemas viga-columna cruciformes de concreto reforzado, sometidos a carga vertical y una carga horizontal cíclica. Aunque su estudio estuvo enfocado principalmente al problema de la degradación de la rigidez y la adherencia en los elementos estructurales, presentan en sus resultados la comparación de la relación fuerza lateral-deformación calculada, con la experimental. En su estudio consideran el efecto de la carga vertical como una parte de la fuerza horizontal e igual a  $P\delta/h_{col}$ , en donde P es la carga vertical actuante,  $\delta$  la deformación lateral y  $h_{col}$  la altura de la columna. En la figura A.3 se presentan los resultados que se obtuvieron con un espécimen, al cual se le aplicó un ciclo de carga horizontal. La figura muestra la comparación de la relación fuerza lateral-deformación calculada y experimental. En la misma se ve que la suposición del efecto de la carga vertical concuerda adecuadamente con los resultados experimentales.

## 2. Modelo de histéresis

El modelo de histéresis que se utilizó en este trabajo tiene una relación fuerza-deformación bilineal histerética. Este modelo también es una idealización simple con la cual se trata de representar el comportamiento histerético de las estructuras. En la literatura se encuentran estudios sobre el comportamiento que presentan las estructuras y los elementos estructurales ante carga cíclica. Las relaciones fuerza-deformación obtenidas en pruebas con modelos de marcos completos o subestructuras, tienen un comportamiento histerético que presentan ciertos aspectos que no son tomados completamente con el modelo que aquí se utiliza.

En el caso de estructuras de acero, las pruebas experimentales muestran relaciones fuerza-deformación como la mostrada en la figura A.4 (ref A.3). En ella se ve que para este tipo de estructuras, los ciclos de histéresis son muy estables aún para deformaciones muy grandes. También se nota que la forma de los ciclos es afectada por una reducción de la rigidez del marco sometido a una carga cíclica, debido a la fluencia que se tiene cerca de la zona de la articulación plástica y al efecto Bauschinger en el material.

En estructuras de concreto las pruebas experimentales muestran relaciones fuerza-deformación histeréticas más complicadas, cuyas características principales son (ref A.4):

- a) Cambio de la rigidez debido al agrietamiento por flexión del concreto y la fluencia a tensión del acero de refuerzo.
- b) Disminución de la rigidez en la recarga en ciclos posteriores al primero, aunque con una resistencia máxima casi igual. Esta disminución se atribuye a la formación de grietas y a una reducción

de la rigidez del refuerzo longitudinal debido al efecto Bauschinger.

c) La rigidez promedio en un ciclo completo disminuye con el desplazamiento máximo anterior.

d) Las características histeréticas dependen de la historia de cargas. Otros efectos que producen cambios en la forma de la curva fuerza-deformación son la presencia de esfuerzos cortantes altos y el deslizamiento del refuerzo longitudinal dentro del área de anclaje.

En las figuras A.3 y A.5 se presentan los resultados experimentales de modelos a escala de sistemas viga-columna cruciformes de concreto reforzado (ref A.2), en los cuales se ve el efecto de la degradación del material en los ciclos de histéresis.

Existen diversos modelos de histéresis con los cuales se trata de representar el comportamiento de este tipo de estructuras. Estos modelos tratan de reproducir las características principales de rigidez y resistencia ante cualquier historia de desplazamientos. En la figura A.6 se presentan algunos de los modelos existentes. Sus diferentes efectos en la respuesta sísmica de estructuras dependen principalmente de las propiedades de rigidez para definir la curva primaria y de su capacidad para disipar energía histerética en un ciclo de histéresis.

El estudio de la influencia de los efectos anteriores, que se ha visto se presentan en el comportamiento histerético de las estructuras, deberá ser realizado con el fin de mejorar el conocimiento de la respuesta estructural.

### 3. Amortiguamiento

Un amortiguamiento viscoso constante del 5 por ciento, se ha supuesto

en los análisis de las estructuras. Diferentes estudios (ref A.5 y A.6 por ejemplo) han mostrado que las estructuras presentan una capacidad de amortiguamiento función de la amplitud máxima del desplazamiento. Esta capacidad de amortiguamiento de la estructura puede ser evaluada a partir de los ciclos de histéresis de la relación fuerza-deformación, si se supone que los efectos de la velocidad de la carga son despreciables.

Existen diversos criterios para la evaluación de esta capacidad, un esquema de estos criterios se dan en la figura A.7. En la figura A.8 se muestran los resultados de un estudio (ref A.5) sobre una columna de acero perteneciente a un marco como el mostrado en esa figura. Los resultados muestran la variación de la capacidad de amortiguamiento en función de la amplitud del desplazamiento. En general esa capacidad se incrementa al aumentar la amplitud mas alla de la fluencia, cualquiera que sea el criterio con el que se evalúe.

Por lo tanto la elección del modelo de histéresis que se tenga influirá en la capacidad de disipación de energía histerética que muestre la estructura. en la figura A.6 se da el índice de disipación de energía histerética que se obtiene con cada uno de los modelos de histéresis. El índice expresa la cantidad de energía histerética disipada  $\Delta W$  por ciclo durante un ciclo de desplazamiento de igual amplitud en la dirección positiva y negativa

$$E_h = \Delta W / (2 \pi F_m D_m)$$

en donde  $F_m$  es la resistencia en el desplazamiento máximo  $D_m$ .

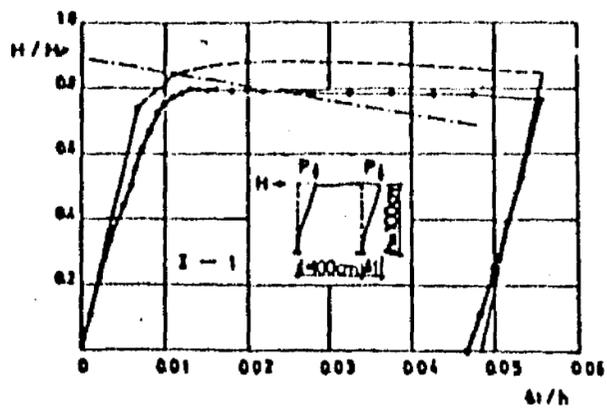
Para el caso del modelo de histéresis elastoplástico que se utiliza aquí se tiene un índice de disipación de energía histerética igual a

$$E_h = 2(\mu - 1) / \pi \mu$$

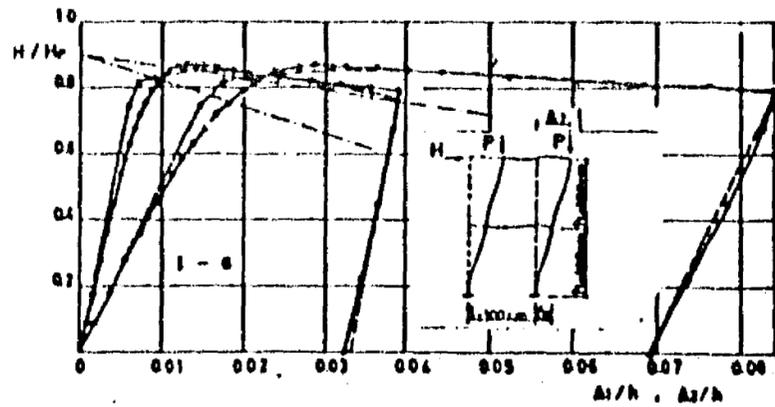
donde  $\mu$  es la ductilidad desarrollada por la estructura.

#### 4. Referencias

- A.1. Wakabayashi, M, Taijiro, N y Matsui, Ch, "An experimental study on the horizontal restoring forces in steel frames under large vertical loads", Proceedings IV WCEE, Vol 1, B-2, pp 177-193, Santiago de Chile, Chile, 1969
- A.2. Popov, E P y Bertero, V V, "On seismic Behavior of two R/C structural systems for tall buildings", Structural and Geotechnical Mechanics, edited by W. J. Hall, Prentice-Hall, 1977, pp 117-140
- A.3. Carpenter, L y Le-Wu Lu, "Repeated and reversed load test on full-scale steel frames", Proceedings IV WCEE, Vol 1, B-2, pp 125-136, Santiago de Chile, Chile, 1969
- A.4. Otani, S, "Hysteresis models of reinforced concrete for earthquake response analysis", Journal of the Faculty of Engineering, The University of Tokyo, Vol XXXVI, No 2, 1981
- A.5. Rea, D, Clough, R W, Bouwkamp, J G y Vogel, U, "Damping capacity of a model steel structure", Proceedings IV WCEE, Vol 1, B-2, pp 63-73, Santiago de Chile, Chile, 1969
- A.6. Jerat, N, Udwadia, F y Kapsarov, H, "Experimental and theoretical studies of time variations of structural properties during strong ground shaking", Proceedings VI WCEE, Vol II, pp 2085-2092, Nueva Delhi, India, 1977



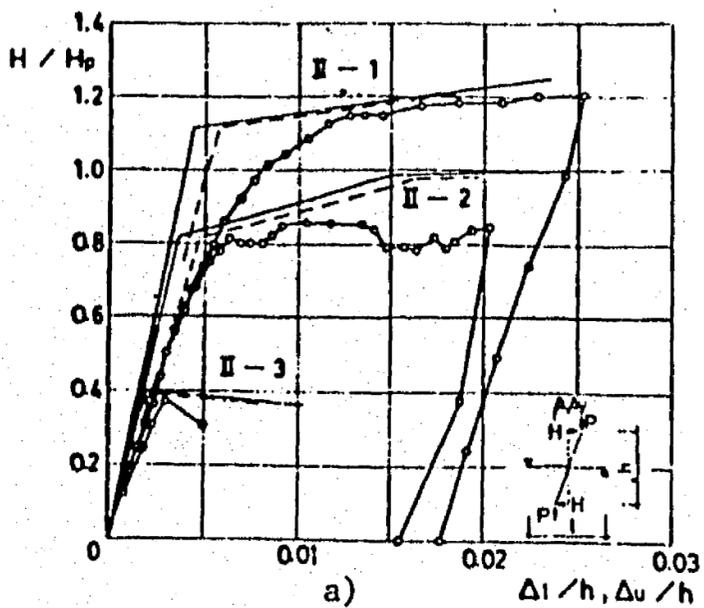
a)



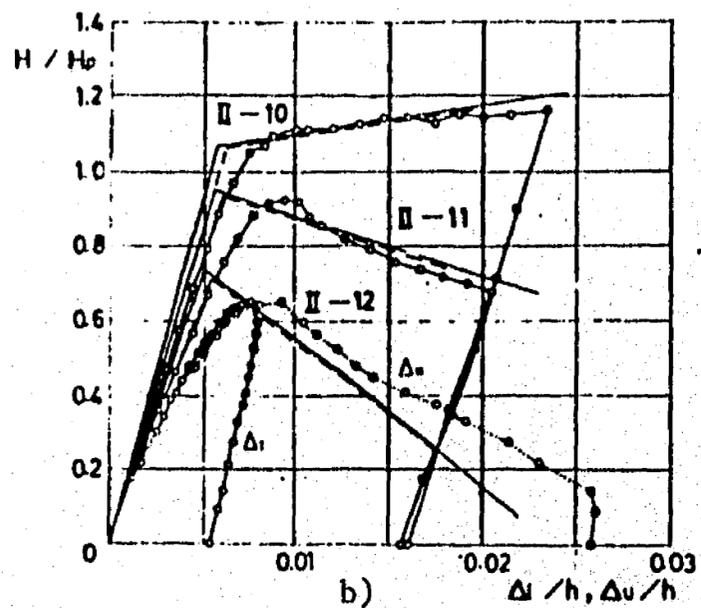
b)

Fig A.1. Resultados experimentales del comportamiento de modelos de marcos de acero, sometidos a carga vertical y carga horizontal.

- o modelo experimental
- modelo teórico, comportamiento elastoplástico
- .-.- modelo teórico, comportamiento rigido-perfectamente plástico.



a)



b)

Fig A.2. Resultados experimentales de pruebas en modelos de marcos de acero cruciformes, sometidos a carga vertical y carga lateral

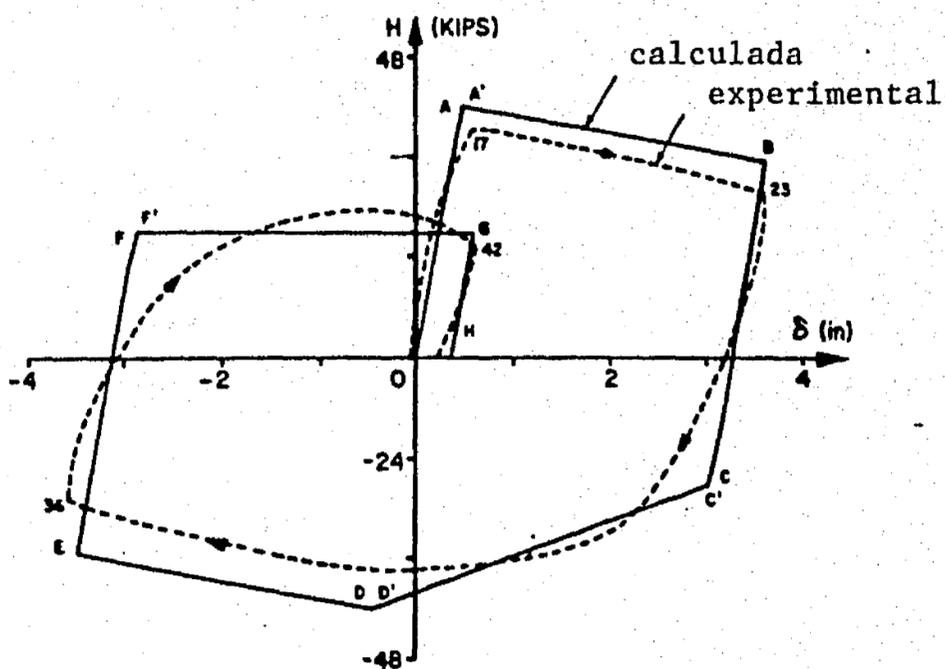


Fig A.3. Resultados experimentales del comportamiento de modelos a escala de sistemas viga-columna cruciformes de concreto reforzado, sometidos a carga vertical y carga horizontal cíclica

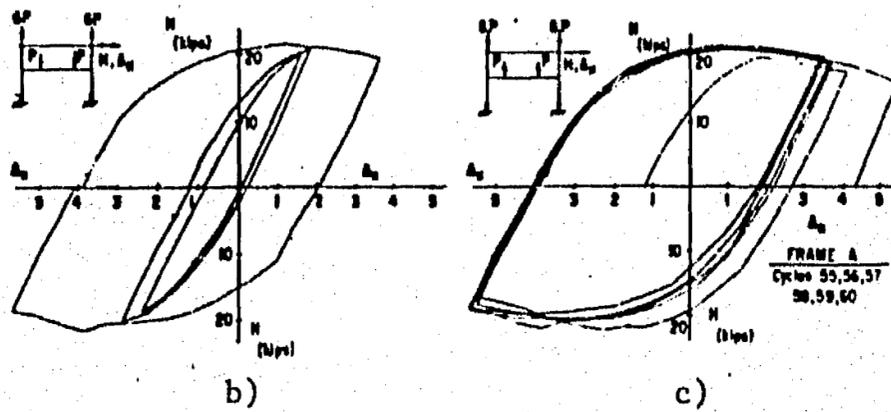
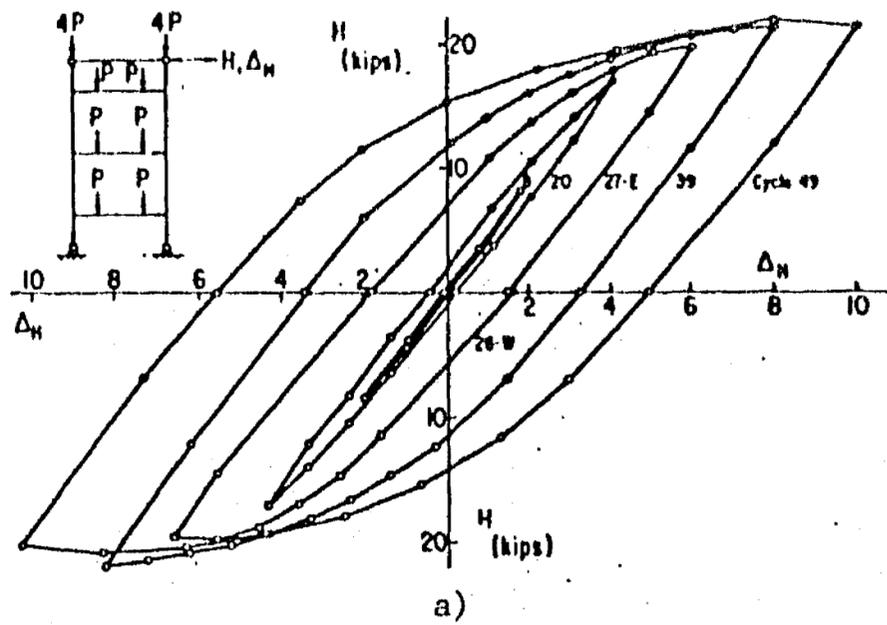


Fig A.4. Relaciones fuerza lateral-deformación obtenida en pruebas de modelos de marcos de acero, sometidos a carga vertical y carga lateral cíclica

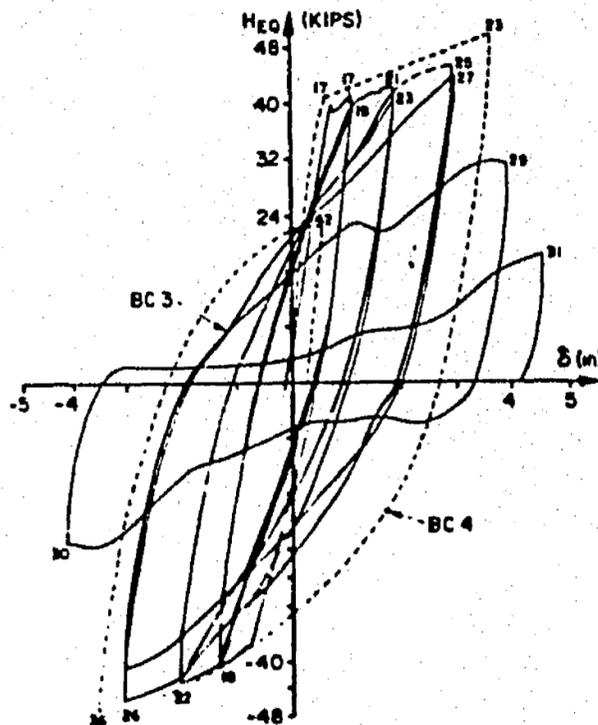
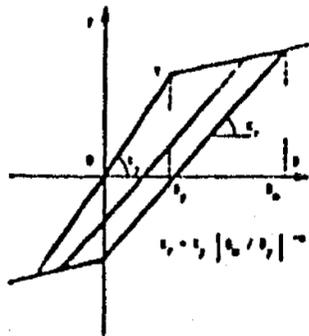


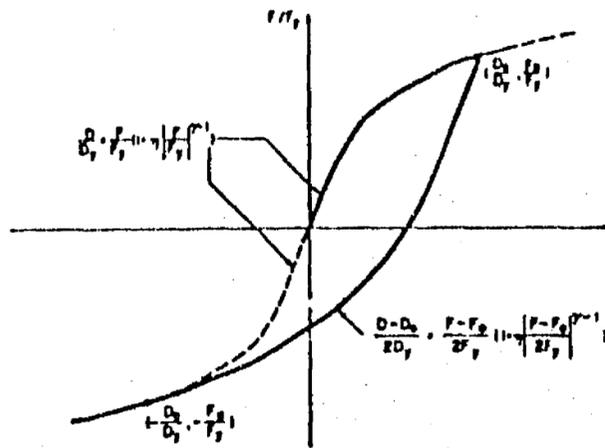
Fig A.5. Relación fuerza lateral-deformación de modelos de sistemas viga-columna de concreto reforzado, obtenida de pruebas de carga vertical y carga lateral cíclica



$$E_h = \frac{2(1-\beta)(\mu - \mu^2(1-\beta + \mu\beta))}{\pi\mu(1-\beta + \mu\beta)(1-\beta\mu^2)}$$

$\beta$  = relación de la rigidez después de la fluencia a la rigidez inicial  
 $\mu$  = factor de ductilidad

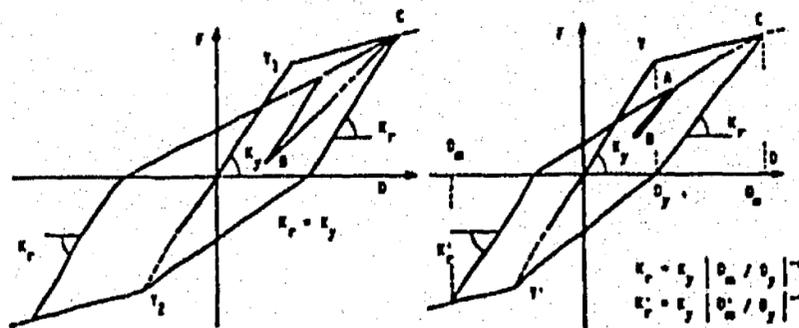
a) Modelo de histéresis bilineal con degradación



$$E_h = \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{2\eta}{\eta+1}\right) \left(1 - \frac{D_y}{F_y} \frac{F_m}{D_m}\right)$$

$\eta$  = exponente del modelo de Ramberg-Osgood  
 $\nu$  = parámetro introducido por Jennings

b) Modelo de Ramberg-Osgood



a) Modelo original

b) modelo modificado

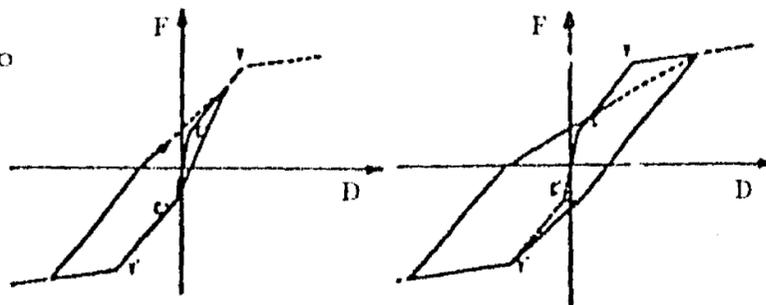
$$E_h = \frac{1}{\pi} (1 - (1 - \beta + \mu\beta) \mu^2 / \mu)$$

$\beta$  = relación de la rigidez después de la fluencia a la rigidez inicial  
 $\mu$  = factor de ductilidad

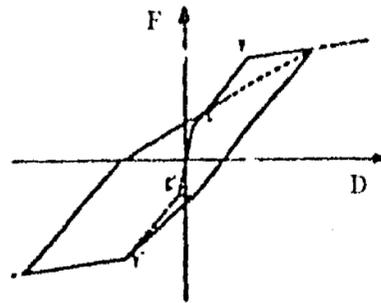
c) Modelos de Clough con degradación de rigidez

Fig A.6. Modelos de histéresis para representar el comportamiento de estructuras y miembros de concreto reforzado

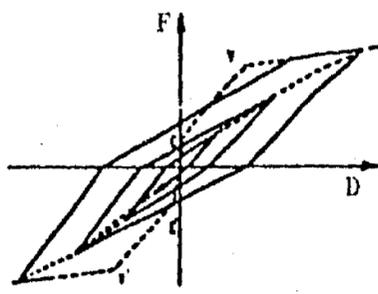
a) Descarga después del agrietamiento en una dirección



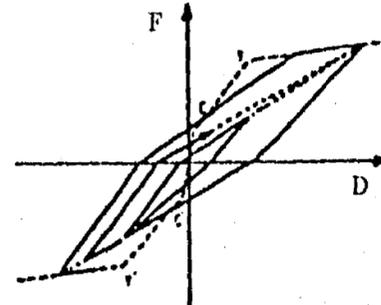
b) Descarga después de la fluencia en una dirección



c) Comportamiento para amplitudes pequeñas



d) Comportamiento para amplitudes pequeñas



$$E_h = \frac{1}{\pi} \left[ 1 - \frac{1+(D_c/D_y)}{1+(F_c/F_y)} \frac{\mu^\alpha (1-\beta + \mu\beta)}{\mu} \right]$$

$\alpha$  = parámetro de degradación de la rigidez a la descarga

$D_m$  = desplazamiento máximo anterior en la dirección de interés

$D_c$  = desplazamiento al agrietamiento

$D_y$  = desplazamiento a la primer fluencia

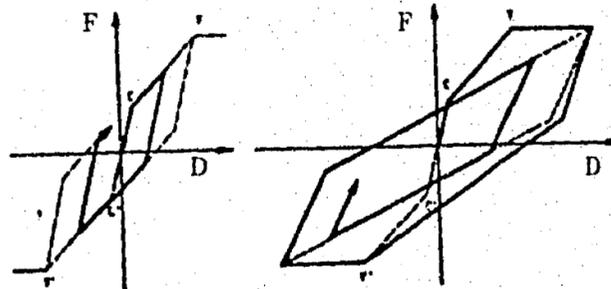
$F_c$  = resistencia al desplazamiento al agrietamiento

$F_y$  = resistencia a la primer fluencia

$\beta$  = relación de la rigidez después de la fluencia a la rigidez inicial

$\mu$  = factor de ductilidad

d) Modelo de histéresis de Takeda



a) antes de la fluencia

b) después de la fluencia

$$E_h = \frac{2}{\pi} (1 - (K_y/K_c)) F_c/F_y$$

$K_y$  = rigidez hasta la fluencia ( $F_y/D_y$ )

$K_c$  = rigidez elástica inicial ( $F_c/D_c$ )

e) Modelo de histéresis trilineal con degradación

Fig A.6.(continuación) Modelos de histéresis para representar el comportamiento de estructuras y miembros de concreto reforzado

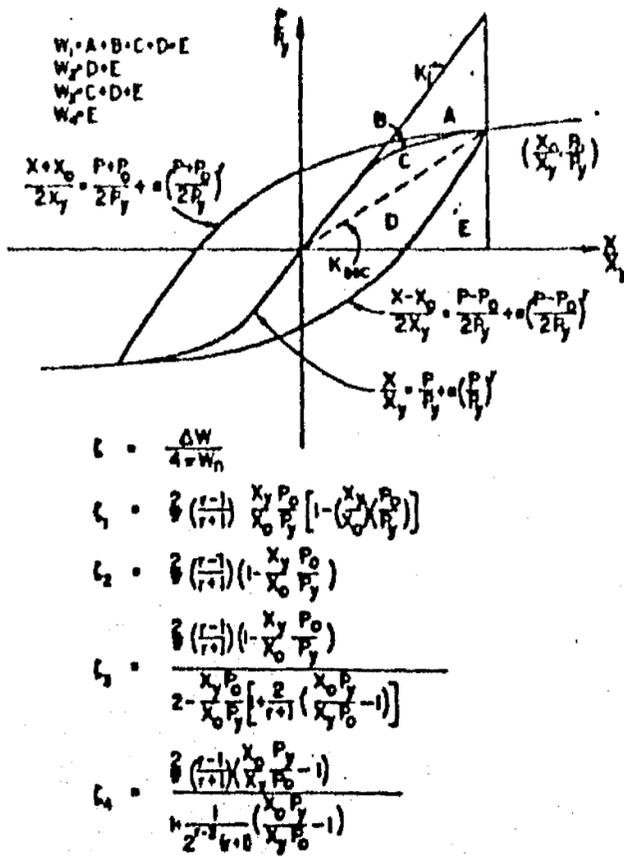


Fig A.7. Criterios para evaluar la capacidad de disipación de energía, a partir de los ciclos de histéresis de la relación fuerza-deformación

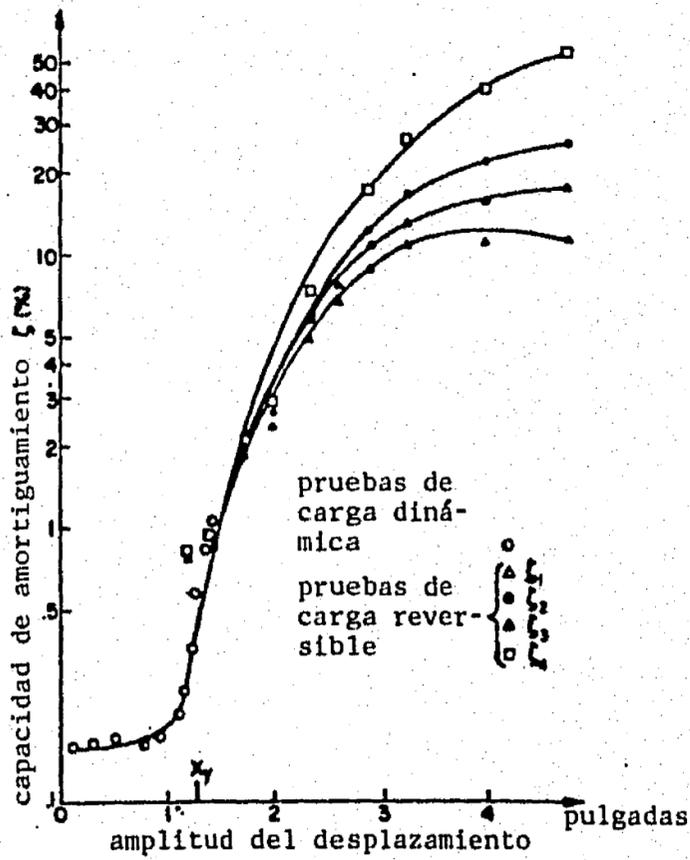


Fig A.8. Variación de la capacidad de amortiguamiento en modelos de estructuras de acero, en función de la amplitud del desplazamiento

## APENDICE B

### 1. Método de Newmark para la solución de la ecuación de movimiento.

Sea

$$F_I + F_A + F_R = F_S \quad (1)$$

la ecuación de equilibrio dinámico de un sistema de un grado de libertad en un instante cualquiera, cuando es sometido a un movimiento sísmico, en donde

$$F_I = M \ddot{X} = \text{Fuerza de inercia}$$

$$F_A = C \dot{X} = 2 \xi \omega \dot{X} = \text{Fuerza de amortiguamiento}$$

$$F_R = \text{Fuerza restauradora}$$

$$F_S = -M \ddot{U} = \text{Fuerza externa debido a la excitación sísmica}$$

$$\dot{X}, \ddot{X} = \text{Velocidad y aceleración relativa del suelo}$$

$$\ddot{U} = \text{Aceleración del suelo}$$

$$M = \text{Masa de la estructura}$$

La ecuación (1) puede expresarse como

$$M \ddot{X} + C \dot{X} + F_R = -M \ddot{U} \quad (2)$$

En un sistema de cortante donde el comportamiento de entrepiso no es lineal, la ecuación (2) puede expresarse para un tiempo  $t+\Delta t$  como

$$M X_{t+\Delta t} + C X_{t+\Delta t} + F_{R_{t+\Delta t}} = -M \ddot{U}_{t+\Delta t} \quad (3)$$

Newmark propone unas expresiones para encontrar la respuesta del sistema al final de un intervalo comprendido entre los tiempos  $t$  y  $t+\Delta t$ , las cuales dependen de la respuesta al inicio del intervalo y de dos parámetros adimensionales  $\gamma$  y  $\beta$ . El valor de  $\gamma$  deberá ser igual a 0.5 si se quiere evitar introducir un amortiguamiento espurio. El parámetro  $\beta$ , define la aceleración durante ese intervalo. Aquí se utiliza un valor de  $\beta=0.25$ , correspondiente a un valor constante de la aceleración durante

el intervalo y el cual es igual a la media de los valores inicial y final de la aceleración.

Newmark propone las siguientes expresiones

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = \dot{X}_t + \left[ (1-\gamma) \ddot{X}_t + \gamma \ddot{X}_{t+\Delta t} \right] \Delta t \quad (4)$$

y

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \dot{X}_t \Delta t + \left[ (1/2-\beta) \ddot{X}_t + \beta \ddot{X}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (5)$$

despejando  $\ddot{X}_{t+\Delta t}$  de (5)

$$\ddot{X}_{t+\Delta t} = \frac{X_{t+\Delta t}}{\beta \Delta t^2} - \frac{X_t}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{X}_t}{\beta \Delta t} - \frac{(1/2-\beta) \ddot{X}_t}{\beta} \quad (6)$$

sustituyendo (6) en (4)

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = \frac{\gamma X_{t+\Delta t}}{\beta \Delta t} - \frac{\gamma X_t}{\beta \Delta t} + (1-\gamma/\beta) \dot{X}_t + (1-\gamma/2\beta) \Delta t \ddot{X}_t \quad (7)$$

sustituyendo (6) y (7) en (3)

$$\begin{aligned} & M \left[ \frac{X_{t+\Delta t}}{\beta \Delta t^2} - \frac{X_t}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{X}_t}{\beta \Delta t} - \frac{(1/2-\beta) \ddot{X}_t}{\beta} \right] + \\ & C \left[ \frac{\gamma X_{t+\Delta t}}{\beta \Delta t} - \frac{\gamma X_t}{\beta \Delta t} + (1-\gamma/\beta) \dot{X}_t + (1-\gamma/2\beta) \Delta t \ddot{X}_t \right] + \\ & F_{R_{t+\Delta t}} = - M \ddot{U}_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (8)$$

si la fuerza restauradora se obtienen en forma incremental y se toma la rigidez al inicio del intervalo, su valor será

$$F_{R_{t+\Delta t}} = F_{R_t} + K_t (X_{t+\Delta t} - X_t) \quad (9)$$

así, sustituyendo (9) en (8) y reorganizando términos tenemos que

$$\begin{aligned} & \left( \frac{M}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} + K_t \right) X_{t+\Delta t} = \\ & \left( \frac{M}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} + K_t \right) X_t + \left( \frac{M}{\beta \Delta t} - (1-\gamma/\beta) C \right) \dot{X}_t + \\ & \left( \frac{(1/2-\beta) M}{\beta} - (1-\gamma/2\beta) \Delta t C \right) \ddot{X}_t - (F_{R_t} + M \ddot{U}_{t+\Delta t}) \end{aligned} \quad (10)$$

Resolviendo la ecuación (10) para  $X_{t+\Delta t}$ , se tiene el desplazamiento del sistema en el tiempo  $t+\Delta t$  y por las ecuaciones (6) y (7) se calculan  $\ddot{X}_{t+\Delta t}$  y  $\dot{X}_{t+\Delta t}$ .

## 2. Comportamiento de entrepiso.

Los sistemas que se estudian en este trabajo tienen un comportamiento de entrepiso elastoplástico, el cual se idealiza como bilineal histerético y al que al incluirle el efecto P- $\Delta$ , presenta una segunda pendiente negativa.

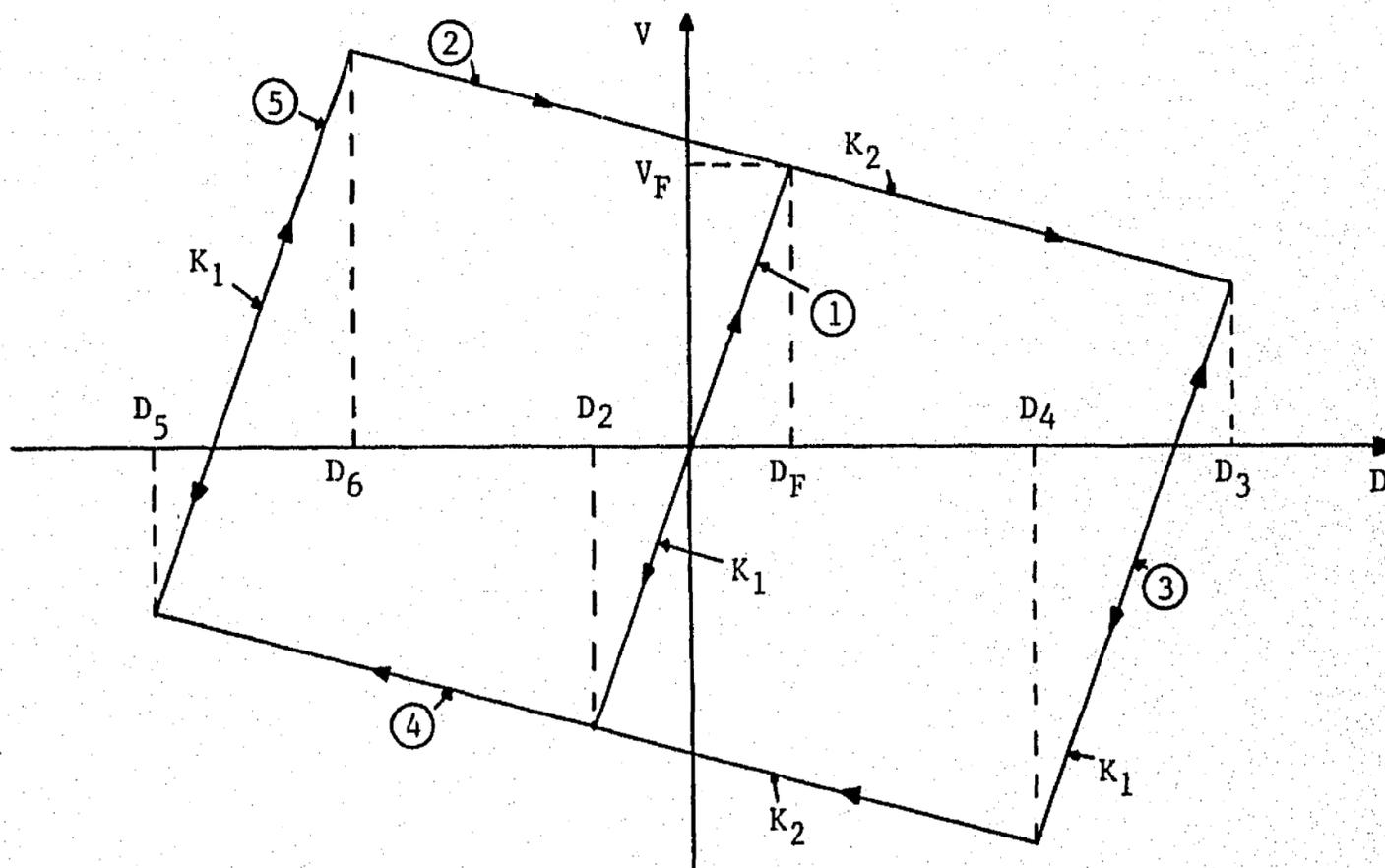


Figura 1.

La figura 1 nos representa un ciclo de histéresis del entrepiso donde

$V$  = Fuerza cortante de entrepiso

$V_F$  = Fuerza cortante de fluencia

$D$  = Desplazamiento de entrepiso

$D_F$  = Desplazamiento de fluencia

$K_1$  = Rigidez inicial

$K_2$  = Rigidez final

$D_3$ ,  $D_4$ ,  $D_5$  y  $D_6$  son variables, estando  $D_3$  relacionada con  $D_4$  y  $D_5$  con  $D_6$ .

Teniendo como dato a  $K_1$ ,  $K_2$  y  $V_F$  y siendo  $D_n$  el desplazamiento predicho, se presentan los siguientes casos

a) El entrepiso esta en la rama 1, entonces

$$D_F = V_F / K_1$$

$$D_2 = D_F$$

si  $D_n > D_F$  cambia a la rama 2

si  $D_n < D_2$  cambia a la rama 4

b) El entrepiso esta en la rama 2

si la velocidad de deformación cambia de mayor a menor que cero, se cambia a la rama 3, siendo  $D_3 = D_n$  y  $D_4 = D_3 - 2D_F$ .

c) El entrepiso esta en la rama 3

si  $D_n > D_3$  cambia a la rama 2

si  $D_n < D_4$  cambia a la rama 4

d) El entrepiso esta en la rama 4

si la velocidad de deformación cambia de menor a mayor que cero, se cambia a la rama 5, siendo  $D_5 = D_n$  y  $D_6 = D_5 + 2D_F$ .

e) el entrepiso esta en la rama 5

si  $D_n > D_6$  cambia a la rama 2

si  $D_n < D_5$  cambia a la rama 4

De lo anterior se ve que si el entrepiso esta en la rama 2, solo puede cambiar a la rama 3 y si esta en la rama 4 solo puede cambiar a la rama 5. Además, si el entrepiso esta en la rama 1, 3 y 5, cambia a la rama 2

si el desplazamiento predicho es mayor que  $D_F$ ,  $D_3$  ó  $D_6$  respectivamente, o bien a la rama 4 si es menor que  $D_2$ ,  $D_4$  ó  $D_5$  respectivamente. Así, el comportamiento total del entrepiso puede resumirse en 3 casos posibles:

Nombrando a  $D_F$  ó  $D_3$  ó  $D_6$  como  $D_{\max}$  y a  $D_2$  ó  $D_4$  ó  $D_5$  como  $D_{\min}$

1) El entrepiso esta en la rama 1, 3 ó 5

si  $D_n > D_{\max}$  cambia a la rama 2

si  $D_n < D_{\min}$  cambia a la rama 4

2) El entrepiso esta en la rama 2

si la velocidad de deformación cambia de mayor a menor que cero, se cambia a la rama 1, 3 ó 5 y se determina

$$D_{\max} = D_n$$

y

$$D_{\min} = D_n - 2 D_F$$

3) El entrepiso esta en la rama 4

si la velocidad de deformación cambia de menor a mayor que cero, se cambia a la rama 1, 3 ó 5 y se determina

$$D_{\max} = D_n + 2 D_F$$

y

$$D_{\min} = D_n$$

Las deducciones anteriores son aplicables, tanto para un sistema elastoplástico, como para un sistema con segunda pendiente positiva ó negativa.

### 3. Determinación del tiempo de cambio de rigidez.

Si al predecir la respuesta en un tiempo  $t+\Delta t$ . con base en la respuesta conocida en el tiempo  $t$ , se detecta que durante el intervalo entre los tiempos  $t$  y  $t+\Delta t$  sucede un cambio de rama del entrepiso, una

manera conveniente para tomarlo en cuenta, sin que sea necesario usar intervalos de integración muy pequeños es determinar el instante en que se produce dicho cambio.

A continuación se da un procedimiento para calcular el tiempo en que sucede el cambio de rama en el entrepiso. El procedimiento se generalizará a sistemas de varios grados de libertad, aunque es aplicable al sistema de un grado de libertad de nuestro estudio.

Sea  $T$  el tiempo en que el cambio de rama ocurre en el entrepiso  $i$ , y sea  $H$  el lapso comprendido entre los tiempos  $t$  y  $T$ . Si el entrepiso  $i$  se encuentra en la rama 1, 3 ó 5 en el instante  $t$ , cambiará a la rama 2 si  $D_n \geq D_{n \max}$  ó a la rama 4 si  $D_n \leq D_{n \min}$ , de acuerdo al punto 2 de este apéndice. La ecuación 5 predice el desplazamiento en  $t+\Delta t$  con base en la respuesta conocida en  $t$  y es función de  $\Delta t$ ; si mantenemos que esta ecuación se cumple para cualquier valor intermedio entre  $t$  y  $t+H$ , el desplazamiento en un tiempo  $t+H$  del nivel  $i$  será

$$X_i(t+H) = X_i(t) + H \dot{X}_i(t) + (1/2-\beta) \ddot{X}_i(t) + \beta \ddot{X}_i(t+\Delta t) H^2 \quad (11)$$

donde  $X_i(t)$ ,  $\dot{X}_i(t)$  y  $\ddot{X}_i(t)$  son el desplazamiento, velocidad y aceleración respectivamente del nivel  $i$  en el tiempo  $t$  y  $\ddot{X}_i(t+H)$  es la aceleración en el tiempo  $t+H$ .

Si el entrepiso  $i$  se encuentra entre el nivel  $i-1$  y el nivel  $i$ , la deformación para la cual se produce el cambio de rama es

$$E = X_i(t+H) - X_{i-1}(t+H) \quad (12)$$

sustituyendo  $t+h$  por  $T$  y de acuerdo a la ecuación 11, el desplazamiento de los niveles  $i$  e  $i-1$  en  $T$  está dado por

$$X_i(T) = X_i(t) + H \dot{X}_i(t) + H^2 (1/2-\beta) \ddot{X}_i(t) + \beta H^2 \ddot{X}_i(t+\Delta t) \quad (13)$$

$$X_{i-1}(T) = X_{i-1}(t) + H \dot{X}_{i-1}(t) + H^2 (1/2-\beta) \ddot{X}_{i-1}(t) + \beta H^2 \ddot{X}_{i-1}(t+\Delta t) \quad (14)$$

sustituyendo (13) y (14) en (12)

$$E = X_{i-1}(t) + H \dot{X}_{i-1}(t) + H^2 (1/2-\beta) \ddot{X}_{i-1}(t) + \beta H^2 \ddot{X}_{i-1}(t+\Delta t) \\ - X_i(t) - H \dot{X}_i(t) - H^2 (1/2-\beta) \ddot{X}_i(t) - \beta H^2 \ddot{X}_i(t+\Delta t) \quad (15)$$

Al tomar a  $\beta=1/4$  suponemos aproximadamente que la aceleración de los niveles durante el intervalo  $t$  y  $t+\Delta t$  es igual al valor promedio de las aceleraciones en el tiempo  $t$  y  $t+\Delta t$ , por lo que

$$\ddot{X}_i(T) = 1/2 [\ddot{X}_i(t+\Delta t) + \ddot{X}_i(t)] \quad (16)$$

$$\ddot{X}_{i-1}(T) = 1/2 [\ddot{X}_{i-1}(t+\Delta t) + \ddot{X}_{i-1}(t)] \quad (17)$$

Sustituyendo  $\beta=1/4$  en la ecuación (15) obtenemos que

$$E = X_i(t) - X_{i-1}(t) + H (\dot{X}_i(t) - \dot{X}_{i-1}(t)) + H^2/4 (\ddot{X}_i(t) - \ddot{X}_{i-1}(t)) \\ + H^2/4 (\ddot{X}_i(t+\Delta t) - \ddot{X}_{i-1}(t+\Delta t)) \quad (18)$$

sea

$$A = 1/4 (\ddot{X}_i(t+\Delta t) - \ddot{X}_{i-1}(t+\Delta t) + \ddot{X}_i(t) - \ddot{X}_{i-1}(t)) \quad (19)$$

$$B = \dot{X}_i(t) - \dot{X}_{i-1}(t) \quad (20)$$

$$C = X_i(t) - X_{i-1}(t) - E \quad (21)$$

sustituyendo (19) a (21) en (18)

$$A H^2 + B H + C = 0 \quad (22)$$

con lo que obtenemos una ecuación cuadrática en  $H$ , cuya solución nos da el incremento en el tiempo en que sucede el cambio de rama.

Ahora bien, si el entrepiso  $i$  se encuentra en la rama 2 ó 4 en el tiempo  $t$ , de acuerdo con el punto 2 del apéndice, el tiempo  $H$  en que se produce el cambio a la rama 1, 3 ó 5 ocurre cuando la velocidad de deformación es igual a cero, por lo tanto

$$\dot{X}_i(T) - \dot{X}_{i-1}(T) = 0 \quad (23)$$

de la ecuación 4 se deduce que

$$\dot{X}_i(T) = \dot{X}_i(t) + 1/2 [\ddot{X}_i(t) + \ddot{X}_i(t+\Delta t)] H \quad (24)$$

$$\dot{X}_{i-1}(T) = \dot{X}_{i-1}(t) + 1/2 [\ddot{X}_{i-1}(t) + \ddot{X}_{i-1}(t+\Delta t)] H \quad (25)$$

sustituyendo en (23)

$$\dot{X}_i(t) - \dot{X}_{i-1}(t) + H/2 [\ddot{X}_i(t) + \ddot{X}_i(t+\Delta t) - \ddot{X}_{i-1}(t) - \ddot{X}_{i-1}(t+\Delta t)] = 0 \quad (26)$$

sea

$$A = 1/2 [\ddot{X}_1(t) + \ddot{X}_1(t+\Delta t) - \ddot{X}_{1-1}(t) - \ddot{X}_{1-1}(t+\Delta t)] \quad (27)$$

$$B = \dot{X}_1(t) - \dot{X}_{1-1}(t) \quad (28)$$

sustituyendo (27) y (28) en (26)

$$A H + B = 0 \quad (29)$$

La solución de la ecuación lineal anterior, nos proporciona una aproximación a el incremento en el tiempo en que sucede el cambio de rama.

Si se detecta que entre  $t$  y  $t+\Delta t$  varios entresijos cambian de rama, para cada uno de ellos se calcula el  $H_j$  correspondiente. El valor  $H_j$  que sea el positivo menor ( $H^*$ ), cualquiera que sea el cambio de rama que ocurra, será el que se tome para obtener la respuesta en el tiempo  $T^* = t + H^*$  utilizando las ecuaciones 16, 13 y 24, para todos los niveles.

Con la respuesta conocida en  $T^*$ , se puede predecir la correspondiente a  $T^* + \Delta t$ , utilizando nuevamente el algoritmo de Newmark.

#### 4. Digitización de los temblores

Para la obtención de la respuesta del sistema en un instante  $t+\Delta t$  cualquiera, es necesario conocer el valor de la excitación en ese instante. Dado que los temblores que aquí se utilizan están digitizados a un intervalo constante  $\Delta t$ , se pueden presentar los siguientes casos en la determinación de la excitación

- a) Cuando aún no a ocurrido ningún cambio de rama y entre el intervalo  $t$  y  $t+\Delta t$  no ocurre ningún cambio de rama se toma el el valor de la excitación siguiente a ese intervalo ( $\ddot{U}_{t+\Delta t}$ ).
- b) Cuando entre el tiempo  $t$  y  $t+\Delta t$  ocurre un cambio de rama de

histéresis en el tiempo  $T^*$ , la respuesta en  $T^*$  se obtiene como se mencionó en el punto 3. A partir de esta respuesta se requiere predecir la correspondiente a  $T^* + \Delta t$ . Para obtener la aceleración del suelo en ese tiempo se pueden presentar tres casos:

b.1) si  $H_A + H_P < \Delta t$

$$\ddot{U}_{T+\Delta t} = \ddot{U}_{t+\Delta t} + (\ddot{U}_{t+2\Delta t} - \ddot{U}_{t+\Delta t}) (H_A + H_P) / \Delta t$$

b.2) si  $H_A + H_P = \Delta t$

$$\ddot{U}_{T+\Delta t} = \ddot{U}_{t+2\Delta t}$$

b.3) si  $H_A + H_P > \Delta t$

$$\ddot{U}_{T+\Delta t} = \ddot{U}_{t+2\Delta t} + (\ddot{U}_{t+3\Delta t} - \ddot{U}_{t+2\Delta t}) (H_A + H_P - \Delta t) / \Delta t$$