

2437

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

PROPIEDADES ELECTROMAGNETICAS DEL
MODELO DE SKYRME

T E S I S

Que para obtener el título de

F I S I C O

P R E S E N T A

MACORRA PETTERSON MORIEL, AXEL
RICARDO DE LA

México, D.F.

Abril, 1988



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INDICE

INTRODUCCION	1
CAPITULO I	
1.1 Introduccion	6
1.2 Teoria de homotopia	8
1.3 Teorema de Derrick	12
1.4 El kink	14
1.5 El instanton	17
1.6 La carga topologica	19
CAPITULO II	
2.1 Simetrias del lagrangiano del campo de Dirac	23
2.2 Rompimiento espontaneo de la simetria	27
2.3 Modelo σ	28
2.4 El modelo de Skyrme	31
2.5 Constante de acoplamiento del pión	32
2.6 Estabilización del solitón	34
2.7 Ansatz de Skyrme	35
2.8 Corriente y carga topologica	36
2.9 Energia estática del skyrmion	38
2.10 El termino de Wess-Zumino	41
CAPITULO III	
3.1 Invariancia global	43
3.2 Corrientes conservadas	44
3.3 Introduccion del campo electromagnetico	46
3.4 El modelo de Skyrme con acoplamiento electromagnetico	48

3.5	Interacción de los piones con el campo electromagnético	50
3.6	El skyrmión en rotación	56
3.7	Masa del nucleón y de la partícula delta	62
3.8	Cálculo de la corriente electromagnética con las variables colectivas	64
3.9	Decaimiento de la partícula delta en un protón y un fotón	65
3.10	Efecto Compton	70
CONCLUSIONES		83
APENDICE A		87
APENDICE B		93
APENDICE C		99
APENDICE D		105
BIBLIOGRAFIA		112

INTRODUCCION

Ondas y partículas han estado íntimamente ligadas desde la formulación de la mecánica cuántica. No obstante, en los últimos años se ha establecido otra conexión entre ambas que proviene del estudio de los solitones. Los solitones son paquetes de energía confinados a una cierta región del espacio y no pueden dispersarse.

La existencia de solitones no es nueva en la física, éstos ya se conocían en hidrodinámica y estado sólido. De hecho el primer reporte sobre la observación de un solitón se debe a John Scott Russell en un artículo publicado por la " British Association for the Advancement of Science " en 1845 (ver fig.1). Scott Russell vió en un canal una onda que se desplazaba a gran velocidad sin ninguna alteración de su forma durante varias millas. El propuso que la estabilidad de la onda se debía a propiedades intrínsecas del medio y no a las circunstancias como fue generada. Esta idea no fue aceptada sino hasta 1895 con el análisis de las ecuaciones no lineales de la hidrodinámica hecho por D.J. Korteweg y Hendrik de Vries. Ellos demostraron que las ecuaciones de la hidrodinámica podían tener como soluciones ondas localizadas no disipativas.

El estudio de los solitones en partículas elementales comenzó alrededor de 1974. Los solitones son soluciones estables no disipativas de energía finita de las ecuaciones de movimiento en teorías del campo. Para poder obtener soluciones de este tipo es necesario que el estado de mínima energía, es decir el vacío, esté degenerado. Normalmente los campos se anulan en el vacío pero no hay ninguna razón por la cual esto siempre deba de cumplirse. De hecho hay situaciones físicas en que no sucede así. Por ejemplo, el campo magnético producido por un ferromagneto es máximo en el estado de

Report on Waves. By J. SCOTT RUSSELL, Esq., M.A., F.R.S. Edin., made to the Meetings in 1842 and 1843.

Members of Committee { Sir JOHN ROBISON*, Sec. R.S. Edin.
J. SCOTT RUSSELL, F.R.S. Edin.

I believe I shall best introduce this phenomenon by describing the circumstances of my own first acquaintance with it. I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped—not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation, a name which it now very generally bears; which I have since found to be an important element in almost every case of fluid resistance, and ascertained to be the type of that great moving elevation of the sea, which, with the regularity of a planet, ascends our rivers and rolls along our shores.

fig.1 Reporte de John Scott Russell

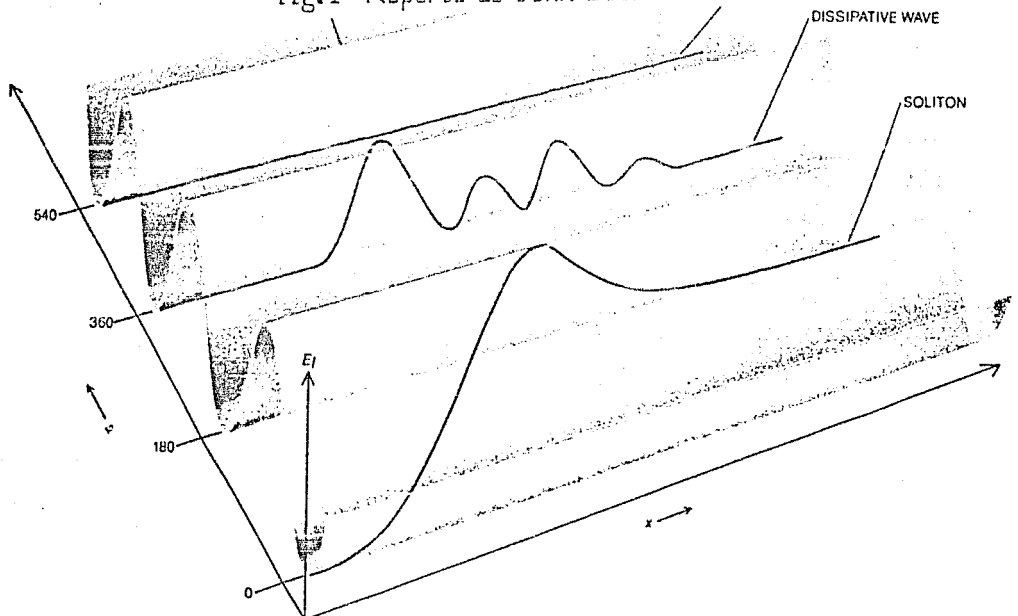


fig.2 Diferentes configuraciones para un campo

mínima energía. La degeneración del vacío en este ejemplo consiste en que la dirección del campo magnético para dicho estado sea arbitraria. En general se tiene que cuando el vacío está degenerado el campo toma en este estado más de un valor.

Para visualizar el concepto de solitón, observemos las diferencias entre las soluciones ondulatorias ordinarias y las tipo solitón. Con este fin consideremos el ejemplo de una teoría escalar en una dimensión. La energía de este sistema está dada por

$$H = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi) \right] .$$

Grafiquemos al campo ϕ como función de la posición "x" e incluyamos una dimensión extra que nos indique su energía potencial $V(\phi)$ (ver fig.2). Las posibles configuraciones para el campo ϕ son líneas continuas definidas para cualquier valor de la posición con la condición de que en el infinito estas líneas tomen uno de los valores del campo ϕ para el cual la energía potencial sea cero.

Como queremos tener un vacío degenerado vamos a permitir que la energía potencial se anule para diferentes valores de ϕ . De esta forma tendremos básicamente tres configuraciones distintas. La primera está representada por una línea recta paralela al eje x en un valor nulo de la energía potencial. Como la energía total del campo es cero esta situación nos representa al vacío. Otra posible configuración es cuando el campo tiene cierta energía potencial pero tiende al mismo valor para las dos direcciones del eje x. En este caso tenemos una onda ordinaria que se dispersará conforme transcurra el tiempo. Por último tenemos al solitón. Este está representado por un campo que tome valores diferentes cuando x tienda a más o menos infinito. A diferencia de un onda ordinaria el solitón no puede ser deformado al vacío, o lo que es lo mismo, no puede ser dispersado.

Al ser un solitón una onda estable y tener su energía confinada a una cierta región del espacio podemos identificarlo con una partícula. Es interesante observar que los solitones son soluciones de las ecuaciones clásicas de movimiento por lo cual tenemos que el concepto de partícula surge aún a nivel clásico. Se espera que al cuantizar la teoría las propiedades de los solitones no desaparezcan.

Por otro lado, actualmente creemos que las interacciones son descritas por teorías de norma también conocidas como teorías de Yang-Mills. En particular tenemos que la fuerza fuerte está descrita por la cromodinámica cuántica "QCD". Esta teoría describe la interacción de los cuarks via el intercambio de 8 partículas de masa nula llamadas gluones. Las simetrías internas que tiene QCD son $SU_R(N) \times SU_L(N) \times U_B(1) \times U_A(1)$. Las primeras dos ($SU(N) \times SU(N)$) corresponden a la simetría quiral (derecha e izquierda) del grupo de sabor y N esta dado por el número de cuarks. $U_B(1)$ representa la conservación del número bariónico, mientras que $U_A(1)$ la del número bariónico axial (no observado en la naturaleza).

Debido a la simetría quiral esperaríamos que los estados formaran multipletes irreducibles de $SU(N)$ degenerados en paridad. Por ejemplo el octete de mesones pseudoescalares debería estar acompañado por un octete de mesones escalares. Como no se encuentra esta degeneración en el espectro de partículas sueltas que hay un rompimiento espontáneo de la simetría que hace al vacío solo invariante ante $SU(N)$.

Debido al confinamiento de los cuarks la constante de acoplamiento de la QCD es grande a bajas energías y no se pueden utilizar las técnicas perturbativas usuales para hacer cálculos. Este hecho complica la posible descripción de las propiedades hadrónicas a partir de la aplicación directa de la QCD. Se cree que en el régimen de bajas energías la cromodinámica cuántica da lugar a efectos no perturbativos que son las causantes del confinamiento de los cuarks pero actualmente no sabemos como calcularlos. Debido a estas complicaciones han surgido teorías aproximadas que permiten describir las propiedades hadrónicas incorporando de manera fenomenológica algunos de los elementos esenciales de la QCD. Ejemplos de estas teorías son: i) la bolsa de MIT, ii) los modelos potenciales, iii) las reglas de suma, iv) el modelo de Skyrme. Es este modelo el que estudiaremos en esta tesis.

En 1962, una década antes de la formulación de QCD, T.H.R. Skyrme¹ escribió un artículo sobre: "*Una teoría de campo no lineal que describe tentativamente la interacción fuerte de las partículas*

¹ T.H.Skyrme, Nucl.Phys. 31 (1962) 556

elementales". Es en este artículo donde se presenta por primera vez el ahora conocido modelo de Skyrme.

El modelo de Skyrme es una generalización del modelo σ no lineal de mesones. En este modelo las soluciones perturbativas representan a los mesones, es decir a partículas con espín cero, mientras que las soluciones tipo solitón, llamadas skyrmiones, se pueden identificar como bariones. Es sumamente interesante el hecho de que a los skyrmiones se les pueda asignar espín semientero a pesar de que el lagrangiano original solo aparezcan campos pseudoescalares. Además, es posible hacerle corresponder a la carga topológica conservada de los solitones el número bariónico. También es importante señalar que las simetrías internas del modelo de Skyrme son precisamente las mismas que las de la QCD.

El interés en los skyrmiones resurgió en 1983 a raíz del trabajo de Witten en el que demostró que en el límite de bajas energías es factible que la cromodinámica cuántica pueda ser aproximada por una teoría escalar. La forma exacta de dicha teoría no es conocida pero sus propiedades deben ser similares a las del modelo de Skyrme. Este hecho ha reforzado el interés en el estudio de la fenomenología del modelo de Skyrme a la vez que ha dado lugar a intentos de obtener una deducción rigurosa de la teoría efectiva a bajas energías. El objetivo de esta tesis se inscribe dentro de la primera de estas líneas.

El propósito de esta tesis es acoplar el campo electromagnético al modelo de Skyrme. Además de estudiar el problema de la invarianza local del lagrangiano de Skyrme ante transformaciones del grupo $U(1)$ nos interesa obtener resultados que puedan ser verificados experimentalmente.

En el capítulo 1 presentaremos una introducción a la teoría de los solitones y sus propiedades topológicas. En el segundo daremos una motivación del modelo de Skyrme y estudiaremos algunas de sus simetrías. En el tercer capítulo incorporaremos el campo electromagnético al modelo de Skyrme y trabajaremos el problema de la cuantización semiclassical del skyrmión. Para la parte escalar del modelo determinaremos la interacción electromagnética con los piones al orden mas bajo en teoría de perturbaciones. En la sector de los solitones calcularemos el decaimiento de la partícula delta en un protón y un fotón, y el efecto Compton a bajas energías para los protones. Por último daremos las conclusiones obtenidas.

CAPITULO I

SOLITONES

1.1 INTRODUCCION

Los solitones son soluciones estables no disipativas de energía finita de las ecuaciones clásicas de movimiento de teorías de campo. Usualmente en una teoría de campo lineal las ondas son dispersivas de tal manera que si inicialmente tenemos un pulso este perderá progresivamente su forma hasta desaparecer. En cambio en teorías de campo no lineales la dispersión de la onda puede ser contrarrestada por los efectos no-lineales dando lugar a un pulso que mantiene su forma indefinidamente, es decir a un solitón.

El solitón debe cumplir con las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange, que son obtenidas por el principio de mínima acción de Hámilton: $\delta S = 0$ y además deben de ser estables por lo que $\delta^2 S > 0$. Hay dos maneras diferentes de cumplir con las condiciones anteriores, por lo que se pueden clasificar los solitones en dos tipos distintos: los topológicos y los no topológicos. Los solitones no-topológicos adquieren su estabilidad por medio de un mecanismo dinámico por lo que en general dependen del tiempo.

Para que existan los solitones topológicos el vacío debe estar degenerado de tal forma que las condiciones de frontera en el infinito hagan al solitón topológicamente diferente del vacío. Esto lo pueden lograr teniendo los campos un grado de libertad interno. El cual puede ser discreto como una reflexión o continuo como el isoespín.

La estabilidad del solitón topológico depende de que la variedad del espacio interno pueda tener un mapeo no trivial a la variedad del

espacio real de la teoría. Un mapeo no trivial es aquel que no puede ser deformado por cambios continuos al mapeo trivial, el cual manda todos los puntos de una variedad a un solo punto de la otra.

La propiedad anterior da lugar a que el solitón tenga una carga topológica conservada que no se obtiene a partir del teorema de Noether. La carga topológica representa el número de veces que es cubierta la variedad del espacio real por el espacio interno. Al depender solo de la topología y no de la simetría del lagrangiano, esta carga conservada no es impuesta por una, es decir sale natural de la teoría.

Además tenemos que por ser las ecuaciones de movimiento covariantes, la solución estática nos sirve para generar el solitón en movimiento por medio de una transformación de Lorentz.

El lenguaje matemático para el estudio de los mapeos de una variedad en otra es el de la teoría de homotopía. Dado un lagrangiano clásico, se puede determinar por medio de la teoría de homotopía la existencia o no de soluciones tipo solitón. Desgraciadamente esta teoría no nos ayuda a encontrar explícitamente la solución tipo solitón. Debido a la no linealidad de las ecuaciones encontrar una solución de este tipo no es tarea fácil. Sin embargo es claro que es de gran utilidad tener un criterio para saber si podemos esperar la existencia o no de solitones en una teoría determinada antes de comenzar a buscarlos. Otro criterio importante proviene del teorema de Derrick que estudiaremos más adelante.

Además de los skyrmiones se han encontrado varias soluciones tipo solitón en algunas teorías de campo que son relevantes para la física de partículas elementales, éstos son :

- Kink $D = 1$
- Vortice $D = 2$
- Monopolo $D = 3$
- Instanton $D = 4$

donde D es la dimensión del espacio real.

En este capítulo presentaremos una breve introducción a la teoría de homotopía. También estudiaremos el teorema de Derrick y en particular lo utilizaremos para determinar la posibilidad o no de tener soluciones tipo solitón en el modelo de Skyrme. Por último se darán algunos ejemplos de solitones.

1.2 TEORIA DE HOMOTOPIA

Sean X, Y dos variedades y f un mapeo continuo de X a Y

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \\ f(x) &= y \quad \text{con } x \in X \quad y \in Y . \end{aligned} \quad (1.1)$$

Dos mapeos f_0 y f_1 son homotópicos si pueden ser deformados de manera continua el uno en el otro. Debe existir una familia de funciones $F(x,t)$ parametrizada por t con $0 < t < 1$ continua en x y t llamada homotopía tal que

$$\begin{aligned} F(x,0) &= f_0(x) \\ F(x,1) &= f_1(x) . \end{aligned} \quad (1.2)$$

Que f_0 sea homotópica a f_1 se denota por $f_0 \sim f_1$. Además si

$$F : f_0 \sim f_1 \quad \text{y} \quad G : f_1 \sim f_2$$

entonces

$$H : f_0 \sim f_2$$

$$\text{con } H = \begin{cases} F(x,2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x,2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} , \quad (1.3)$$

por lo que se tiene que los mapeos homotópicamente equivalentes forman una clase de equivalencia denotada por $\{f\}$.

Las clases de homotopía pueden formar un grupo. Veamos un ejemplo:

Sea X el intervalo cerrado $I = [0,1]$ con los puntos extremos identificados como el mismo. Esta variedad es topológicamente igual al círculo S^1 con un punto de referencia x_0 identificado con $0, 1$. Si nos

restringimos a mapeos continuos que cumplan con $f(1) = f(0) = y_0$, un punto fijo de Y , entonces las clases de equivalencia $\{f\}, \{g\} \dots$ de $S^1 \rightarrow Y$ forman un grupo.

El elemento identidad es la clase de mapeos homotópicos al mapeo constante C

$$C(x) = y_0 \quad \forall x \quad (1.4)$$

El inverso de $\{f\}$ es $\{f^{-1}\}$

$$f^{-1}(x) = f(1-x) \quad (1.5)$$

y que sea cerrado se ve de

$$\{f\} * \{g\} = \{f \cdot g\}$$

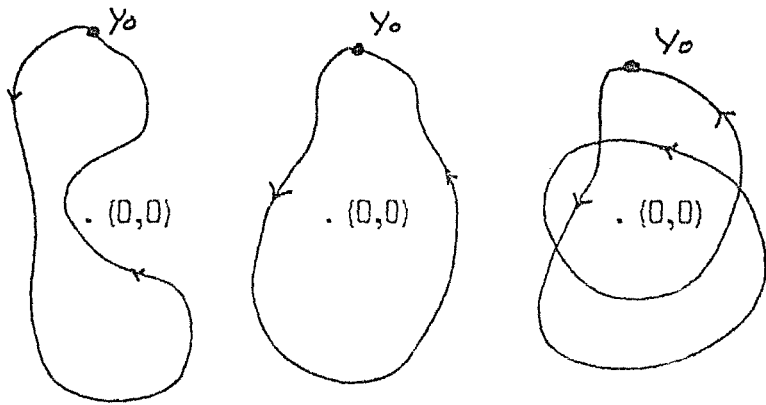
$$f \cdot g = \begin{cases} f(2x) & 0 \leq x < 1/2 \\ g(2x-1) & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (1.6)$$

Este ejemplo se llama el primer grupo de homotopía o grupo fundamental y se denota por

$$\pi_1(Y) \quad (1.7)$$

Una ilustración de este grupo fue dada por Shankar¹. En este ejemplo, $Y = \mathbb{R}^2 - (0,0)$ es el espacio euclidiano menos el origen y y_0 un punto arbitrario del plano. Los mapeos de S^1 a Y se pueden representar por curvas cerradas (ver fig.2). Las diferentes clases de homotopía están dadas por el número de veces que las curvas rodeen al origen.

¹ R.Shankar, Phys.Rev.D14 (1976) 1107



(a)

(b)

(c)

fig.3 Ilustración de mapeos homotópicamente diferentes

En la figura 3.a el rizo no encierra al origen por lo que puede ser deformado a un punto (y_0). Este rizo es un elemento de la clase de identidad. En la fig.3 .b el rizo le da una vuelta al origen y en la 3.c le da dos. Una curva no puede ser deformada en otra, a menos de que ambas le den el mismo número de vueltas al origen. Por lo que tenemos que las clases de equivalencia quedan determinadas por el número de revolución $\{n\}$, es decir

$$\prod_1 (\mathbb{R}^2 - (0,0)) = \mathbb{Z} \quad \text{con } \mathbb{Z} \text{ el conjunto de los } (1.8) \text{ enteros}$$

El número de revolución se va a relacionar con la carga topológica conservada por los solitones. De este ejemplo tenemos que si identificamos al vacío como la clase de equivalencia con $n = 0$ y al soliton con $n \neq 0$, este no va a poder deformarse al vacío es decir no podrá dispersarse.

Si en lugar de tener a $X = S^1$ generalizamos $X = S^n$ (la esfera en n-dimensiones) tendremos otra vez que el mapeo que deja un punto

fijo y_0 forma un grupo llamado el n -ésimo grupo homotópico designado por

$$\Pi_n(Y) \tag{1.9}$$

Podemos categorizar los diferentes $\Pi_n(Y)$ para distintas variedades Y . Esto es un tarea matemática complicada. A continuación se muestra una tabla¹ (fig.4) para algunos casos.

Y \	U(1)	SU(2)	$N > 3$ SU(N)	SO(3)	SO(4)	SO(5)	SO(6)	$N > 7$ SO(N)	Sp(N)
$\Pi_1(Y)$	Z	0	0	Z_2	Z_2	Z_2	Z_2	Z_2	0
$\Pi_2(Y)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\Pi_3(Y)$	0	Z	Z	Z	Z, Z	Z	Z	Z	Z
$\Pi_4(Y)$	0	Z_2	0	Z_2	Z_2, Z_2	Z_2	0	0	Z_2
$\Pi_5(Y)$	0	Z_2	Z	Z_2	Z_2, Z_2	Z_2	Z	0	Z_2

fig.4 Tabla de homotopías para algunas variedades

Quisiermos hacer notar algunos de los resultados. Por ejemplo

i) $\Pi_n(S^n) = Z$ (1.10)

ésto se debe a que las clases de equivalencia que hay entre una esfera n -dimensional y otra de la misma dimensión depende del número de veces que es mapeada una en la otra.

ii) $\Pi_3(SU(2)) = Z$ (1.11)

¹ Marciano y Pagels, Phys. Letters C (1978) 235

$SU(2)$ es el grupo que consta de todas las matrices unitarias 2×2 . Tiene tres parámetros independientes por lo que $SU(2)$ es topológicamente equivalente a S^3 y

$$\prod_2 (SU(2)) = \prod_3 (S^3) = Z$$

Este resultado permite la existencia de solitones en teorías de campo con un espacio interno $SU(2)$, teniendo al espacio real de tres dimensiones.

Para el modelo de Skyrme vamos a trabajar con el grupo $SU(2)$ como grupo interno de simetría y con un espacio real de tres dimensiones. Por lo que el resultado anterior (ec. 1.11) va a permitir la existencia de solitones en el modelo de Skyrme.

1.3 TEOREMA DE DERRICK

El teorema debido a G.H. Derrick¹ impone severas restricciones a las teorías de campo para la existencia de solitones topológicos.

Teorema de Derrick

No existen soluciones tipo solitón topológico estático (independientes del tiempo) para una teoría escalar descrita por:

$$I = \frac{1}{2} \int d^D x \partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi(x) - U(\phi) \quad (1.12)$$

con $U(\phi) > 0$ ($U(\phi) = 0$ para el vacío) excepto para $D = 1$. D es la dimensión del espacio real.

Demostración :

El hamiltoniano que le corresponde a la solución estática ϕ es:

$$H = V_1 + V_2 \quad (1.13)$$

con

$$V_1 = \int d^D x (\nabla \phi(x))^2 \quad (1.14)$$

¹ G.H. Derrick, J.Math.Phys. 5 (1964) 1252

$$V_2 = \int d^D x U(\phi) \quad (1.15)$$

Podemos construir un conjunto de funciones

$$\phi_\lambda(x) = \phi(x\lambda) \quad (1.16)$$

que se obtienen a partir de una dilatación.

Esta nueva configuración tiene una energía

$$H(\lambda) = \lambda^{D-2} V_1 + \lambda^D V_2 \quad (1.17)$$

que debido al principio de Hamilton debe de ser estacionaria en $\lambda = 1$

$$\left. \frac{\delta H(\lambda)}{\delta \lambda} \right|_{\lambda=1} = (D-2) V_1 + D V_2 = 0 \quad (1.18)$$

Como V_1 y V_2 son ambos positivos esta ecuación solo tiene solución para $D=1$.

Una variante de este teorema que resulta de interés para el modelo de Skyrme se presenta cuando el potencial no depende de ϕ sino de derivadas cuárticas de ϕ .

En este caso tenemos

$$V_1 = \int d^D x (\nabla \phi)^2 \quad (1.19)$$

$$V_2 = \int d^D x (\nabla \phi \cdot \nabla \phi)^2 \quad (1.20)$$

La energía para la solución con dilatación es

$$H(\lambda) = \lambda^{D-2} V_1 + \lambda^{D-4} V_2 \quad (1.21)$$

que debe de ser estacionaria. Al evaluar en $\lambda = 1$ obtenemos

$$(D-2) V_1 + (D-4) V_2 = 0$$

$$V_2 = - \frac{D-2}{D-4} V_1 \quad (1.22)$$

Tomando la segunda derivada de la ecuación (1.21) tenemos

$$\frac{d^2 H}{d\lambda^2} \Big|_{\lambda=1} = (D - 2) V_1 > 0 \quad (1.23)$$

que debe de ser mayor a cero para que la solución sea estable.

Tenemos que $D > 2$ por la condición de estabilidad y $D = 3$ por el principio de Hamilton. La única dimensión que cumple con ambas condiciones es $D = 3$. En este caso se cumple el teorema del virial

$$V_1 = V_2 \quad (1.24)$$

A continuación presentaremos unos ejemplos de solitones para diferentes dimensiones espaciales.

1.4 EL KINK

El kink es uno de los ejemplos mas estudiados para solitones en una dimensión. Dicha solución aparece en una teoría escalar con un potencial del tipo $\lambda\phi^4$ y con un término de masa negativa ($-\mu^2$) que por lo tanto da lugar a un vacío degenerado, lo cual es indispensable para tener soluciones tipo solitón. Debido al teorema de Derrick la dimensión espacial debe de ser uno. El lagrangiano esta dado por

$$L = \int dx \left\{ \frac{1}{2} [(\partial_0 \phi)^2 - (\partial_x \phi)^2] - V(\phi) \right\} \quad (1.25)$$

donde

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2} (\phi^2 - a^2)^2 \quad (1.26)$$

y

$$a^2 = \mu^2/\lambda \quad (1.27)$$

El hamiltoniano para una solución estática es

$$H = \int dx \left\{ \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + V \right\} \quad (1.28)$$

En el estado base (vacío) el campo ϕ toma los valores

$$\phi = \pm a = \pm (\mu^2/\lambda)^{1/2} \quad (1.29)$$

Para encontrar la ecuación de movimiento para el caso estático usamos el principio de mínima acción

$$\begin{aligned} \delta L &= - \delta \int dx \left\{ \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + V \right\} = 0 \\ &= - \int dx \left\{ \partial_x \phi \delta \phi' + \frac{\partial V}{\partial \phi} \delta \phi \right\} \end{aligned} \quad (1.30)$$

La ecuación de movimiento es

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} - V'(\phi) = 0 \quad (1.31)$$

con

$$V'(\phi) = 2\lambda\phi(\phi^2 - a^2)^2 \quad (1.32)$$

La ec.(1.31) la podemos integrar para dar lugar a

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = V(\phi) \quad (1.33)$$

La constante de integración la elegimos como cero ya que por (1.28) para obtener una solución de energía finita necesitamos que tanto $d\phi/dx$ como $V(\phi)$ se anulen en el infinito. La última condición requiere que

$$\phi \rightarrow \pm a \quad \text{si } x \rightarrow \pm \infty \quad (1.34)$$

Si queremos que la solución sea un solitón, tenemos que pedir que ϕ tome valores distintos en $+\infty$ y $-\infty$. En caso contrario siempre podríamos deformar la solución a un valor constante ya sea a o $-a$, es decir al vacío.

Integrando la ec.(1.33) tenemos

$$x = \pm \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi [2 V(\phi)]^{-1/2} \quad (1.35)$$

donde ϕ_0 es el valor que toma ϕ cuando $x = 0$.

Resolviendo la integral para el potencial $V = \frac{\lambda}{2} (\phi^2 - a^2)^2$

obtenemos

$$\phi_+ = a \tanh(\mu x) \quad (1.36)$$

$$\phi_- = -a \tanh(\mu x) \quad (1.37)$$

A la solución ϕ_+ se le denomina como el kink y a la otra como el anti-kink.

Sustituyendo las ec.(1.36) y (1.37) en (1.28) llegamos a que la energía del kink es

$$E = 4\mu^3/3\lambda \quad (1.38)$$

En la fig.5 se muestra el comportamiento del solitón y de su energía en función de la posición.

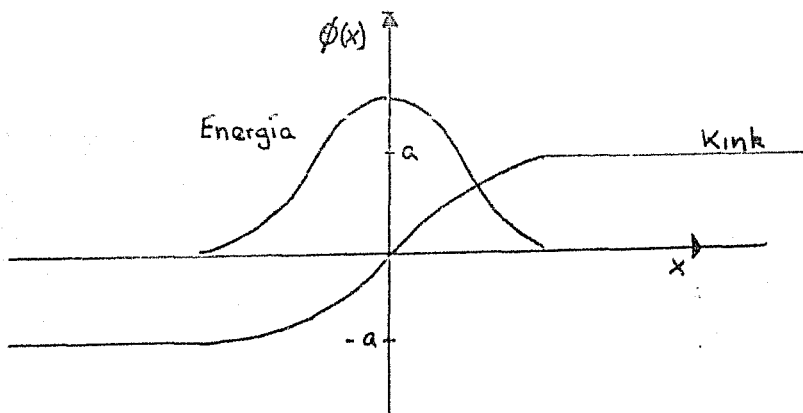


fig.4 El kink y su energía

El kink y el anti-kink son estables ante perturbaciones pequeñas, aunque no correspondan al mínimo absoluto de la energía. Su estabilidad es consecuencia de la degeneración del vacío. Las soluciones se interpolan entre dos soluciones del vacío y solamente en la vecindad del origen ($x=0$) difieren apreciablemente de esos valores. En este caso, el

mapeo homotópico es el que asocia los valores de $\phi = \pm a$ a los puntos $x = \pm \infty$.

1.5 EL INSTANTON

Otro ejemplo interesante que resulta de relevancia para la cromodinámica cuántica es el de los instantones. Estos solitones aparecen en teorías de norma no abeliana cuando la dimensión del espacio es cuatro, lo cual corresponde a un espacio Euclidiano. La solución explícita fue encontrada por Belavin¹, Polyakov, Schwartz y Tyupkin (BPST). La densidad lagrangiana para esta teoría es

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (1.39)$$

donde μ, ν son índices espaciales y corren de 1 a 4 y "a" de 1 a $(N^2 - 1)$ dependiendo el grupo de simetría en el que se trabaja.

Consideremos el caso particular de $SU(2)$, por lo tanto "a" va de 1 a 3.

El tensor $F_{\mu\nu}^a$ está dado por

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \epsilon^{abc} A_\nu^b A_\mu^c \quad (1.40)$$

con A_μ^a los campos de norma de $SU(2)$.

Bajo una transformación de norma U , A_μ se transforma como

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = U^{-1} A_\mu U + U^{-1} \partial_\mu U \quad (1.41)$$

Para una solución estática de energía finita se requiere que

$$F_{\mu\nu} \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad |x| \rightarrow \infty \quad (1.42)$$

y esto se cumple si

$$A_\mu = U^{-1} \partial_\mu U \quad (1.43)$$

¹ A.A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwartz y Y. Tyupkin, *Phy.Lett* 59B (1975) 85

En este caso tenemos que A_μ es un campo de norma puro (pure gage). Notamos que los puntos del infinito en 4 dimensiones forman una variedad S^3 por lo que tenemos un mapeo de $S^3 \rightarrow SU(2)$ y de acuerdo con el resultado obtenido anteriormente (ec.1.11) vamos a poder encontrar solitones.

Para encontrar la solución partimos del hecho de que

$$\text{tr} \int d^4x (F_{\mu\nu} \pm \tilde{F}_{\mu\nu})^2 \geq 0 \quad (1.44)$$

donde $F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \tau^a F^a_{\mu\nu}$

y $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$ el tensor dual de $F_{\mu\nu}$

y $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita.

Como $(F_{\mu\nu} \pm \tilde{F}_{\mu\nu})^2 = 2 (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \pm F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu})$ (1.45)

tenemos la desigualdad

$$\text{tr} \int d^4x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \geq \text{tr} \int d^4x F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = 16\pi^2 n \quad (1.46)$$

con n un entero. De hecho n es el numero de revolución de la configuración (ver ec.1.62).

De la ec.(1.46) vemos que la acción es mínima cuando

$$F_{\mu\nu} = \pm \tilde{F}_{\mu\nu} \quad (1.47)$$

por lo que obtenemos que la solución de mínima energía a la teoría clásica de Yang-Mills está dada por el campo dual o antidual. La solución trivial $A = 0$ que tiene carga topológica nula también cumple con esta condición.^μ

La energía de la acción Euclidiana (ec.1.39) tiene una cota inferior dada por la energía del instantón, ésta es

$$E = \frac{1}{2} \int d^4x \text{tr} (F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}) \geq 8\pi^2 n \quad (1.48)$$

Para encontrar la solución con $n = 1$ se propone un ansatz con la mayor simetría posible, en este caso

$$A_{\mu} = f(r) U^{-1} \partial_{\mu} U \quad \text{con } r = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad (1.49)$$

y
$$U(x) = (x_4 - ix_a \tau_a) / r$$

En el caso en el que $f(r) = 0$ recuperamos la solución del vacío.

Sustituyendo el ansatz (1.49) en (1.47) encontramos que la ecuación que debe cumplir f es

$$rf' = 2f(1 - f) \quad (1.50)$$

Esta ecuación tiene una solución no trivial

$$f(r) = \frac{r^2}{r^2 + \lambda^2} \quad (1.51)$$

que nos da precisamente la dependencia radial del instantón. Si sustituimos (1.51) en (1.49) obtenemos el campo de norma

$$A_{\mu} = \frac{r^2}{r^2 + \lambda^2} U^{-1} \partial_{\mu} U \quad (1.52)$$

El parámetro de escala λ tiene dimensión de longitud y se le interpreta como el tamaño del instantón. En particular notamos que

$$A_{\mu} \rightarrow U^{-1} \partial_{\mu} U \quad \text{si } r \rightarrow \infty$$

de acuerdo con (1.43).

1.6 LA CARGA TOPOLOGICA

La carga topológica es una cantidad conservada por los solitones gracias a sus propiedades topológicas. Como discutimos anteriormente, esta se puede relacionar con el número de revolución. A esta carga también se le llama en algunos casos índice de Pontrayagin.

La carga topológica resulta de :

i) Las condiciones de frontera. En este caso se tiene que el potencial $V(\phi)$ debe de anularse en el infinito para que la energía sea finita. Por lo que ϕ define un mapeo de los puntos del infinito a los ceros del potencial.

ii) Si el campo está restringido (ej. $\phi^2 = 1$) tenemos que, en este caso, las condiciones de frontera se cumplen de manera trivial. Las propiedades topológicas van a ser consecuencia del mapeo del campo ϕ del espacio interno a todo el espacio real.

Para los ejemplos estudiados anteriormente tenemos las siguientes cargas topológicas:

a) El kink

Por las condiciones de frontera tenemos:

$$\phi(\infty) - \phi(-\infty) = n \quad (2a) \quad (1.53)$$

$n=0$ corresponde al vacío, $n=1$ y $n=-1$ al kink y al antikink respectivamente.

La ec. (1.53) se puede escribir en la forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx (\partial_x \phi) = n \quad (2a) \quad (1.54)$$

Definimos una corriente $j_\mu = \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi$, donde ($\epsilon_{01} = -\epsilon_{10} = -1$ y $\epsilon_{00} = \epsilon_{11} = 0$)

Esta corriente se va a conservar automáticamente debido a la antisimetría de $\epsilon_{\mu\nu}$, por lo tanto

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (1.55)$$

La carga topológica conservada es

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} dx j_0 = n \quad (2a) \quad (1.56)$$

Es importante hacer notar que esta carga está cuantizada aún a nivel clásico y no es producto del teorema de Noether.

b) El instantón

Como habíamos visto antes el espacio interno $SU(2)$ es topológicamente equivalente a S^3 . Si el espacio real lo tomamos de 4 dimensiones, este tiene una frontera también equivalente a S^3 . Por lo que se tiene un mapeo con las propiedades homotópicas de la ec. (1.11).

Para encontrar la carga topológica partimos de

$$I = \text{tr} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \quad (1.57)$$

I se puede escribir como

$$\begin{aligned} I &= 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left(\left[\partial_{\mu} A_{\nu} + iA_{\mu} A_{\nu} \right] \left[\partial_{\rho} A_{\sigma} + iA_{\rho} A_{\sigma} \right] \right) \\ &= 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left[\partial_{\mu} A_{\nu} \partial_{\rho} A_{\sigma} + i2 A_{\nu} A_{\mu} \partial_{\rho} A_{\sigma} \right] \end{aligned}$$

En la última ecuación eliminamos el término AAAA por la propiedad cíclica de la traza.

$$\text{Como } \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} (A_{\mu} A_{\nu} \partial_{\rho} A_{\sigma}) = \frac{1}{3} \partial_{\mu} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} (A_{\nu} A_{\rho} A_{\sigma}) \quad (1.58)$$

llegamos a que

$$I = 2 \partial_{\rho} \left\{ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left[A_{\sigma} \partial_{\mu} A_{\nu} + \frac{2i}{3} A_{\sigma} A_{\mu} A_{\nu} \right] \right\} \quad (1.59)$$

Como $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_{\rho} \partial_{\mu} A_{\nu} = 0$ tenemos que

$$I = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} (F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}) = 2 \partial_{\mu} W^{\mu} \quad (1.60)$$

$$\text{con } W^{\mu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left\{ A_{\sigma} \partial_{\mu} A_{\nu} + \frac{2i}{3} A_{\sigma} A_{\mu} A_{\nu} \right\} \quad (1.61)$$

Si integramos (1.60) sobre todo el espacio real (4-D) obtenemos que el resultado solo depende del valor de W (es decir de A_{μ}) sobre la superficie.

$$\int d^4x I = 2 \int d^4x \partial_{\mu} W^{\mu} = 2 \int d^3a_{\mu} W^{\mu} \quad (1.62)$$

Definimos a la carga topológica Q como

$$Q = \frac{1}{16\pi^2} \int d^4x I \quad (1.63)$$

Como habíamos pedido que en la superficie A_{μ} tomara la forma

$$A_{\mu} = U^{-1} \partial_{\mu} U$$

y la ec.(1.63) queda como

$$Q = \frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \int d^3a_\mu \operatorname{tr} (U^{-1} \partial_\nu U U^{-1} \partial_\rho U U^{-1} \partial_\sigma U) \quad (1.67)$$

Esta carga conservada nos da el número de revolución, es decir el número de veces que es cubierto el espacio interno por el mapeo del espacio real.

Como vimos en el presente capítulo la teoría de homotopía y el teorema de Derrick nos permiten determinar la posibilidad de la existencia de solitones estables en una teoría de campo. Estos criterios son de gran utilidad para la formulación del modelo de Skyrme y para el estudio de solitones en dicho modelo.

EL MODELO DE SKYRME

En este capítulo vamos a presentar al modelo de Skyrme a partir del lagrangiano del campo de Dirac y sus simetrías. Posteriormente calcularemos la corriente y carga topológica así como la energía en reposo del solitón (skyrmión).

2.1 SIMETRÍAS DEL LAGRANGIANO DEL CAMPO DE DIRAC

Las partículas con espín un medio como los electrones, protones y cuarcos se pueden describir por medio del lagrangiano del campo de Dirac Ψ . Para cuarcos de masa cero el lagrangiano que describe dicho sistema sin interacción es

$$L = i \bar{\Psi}^a \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_a \quad , \quad (2.1)$$

γ^μ son las matrices de Dirac¹ y el índice μ es un índice espacio-temporal. Este toma valores de 0 a 3, 0 representa la coordenada temporal y 1,2,3 las espaciales. El índice "a" va de 1 hasta N dependiendo del número de campos de Dirac que se tengan. Estos campos pueden formar una representación irreducible de algún grupo.

La ecuación de movimiento para cada campo Ψ_a que se obtiene del principio de Hamilton es

$$\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_a = 0 \quad , \quad (2.2)$$

que es precisamente la ecuación de Dirac de la mecánica cuántica relativista para una partícula de masa nula.

El lagrangiano (2.1) es invariante ante diferentes transformaciones, entre las cuales se encuentran las transformaciones de Lorentz y de fase $U(1)$ ². Además si los campos de Dirac forman una representación irreducible del grupo $SU(N)$ entonces el lagrangiano (2.1) también es invariante ante una transformación de dicho grupo.

^{1,2} Ver apéndice A

En la transformación usual de fase del grupo $U(1)$ cada campo Ψ se transforma como

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\alpha} \Psi \quad (2.3)$$

con α una constante. Debido a la invarianza del lagrangiano (2.1) ante esta transformación vamos a tener una corriente conservada, que se puede obtener por medio del teorema de Noether¹. Esta corriente² es

$$J_{\mu}^B = i\bar{\Psi}\gamma_{\mu}\Psi. \quad (2.4)$$

El lagrangiano (2.1) tiene otra simetría $U(1)$ que corresponde a la transformación de los campos

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\beta\gamma^5}\Psi \quad (2.5)$$

con β una constante. En este caso la corriente conservada es

$$J_{\mu}^A = i\bar{\Psi}\gamma_{\mu}\gamma^5\Psi. \quad (2.6)$$

La corriente J^B (ec.2.4) nos da una carga^A conservada que se interpreta como el número bariónico mientras que J^A (ec.2.6) se relaciona con el número bariónico axial.

Otra simetría de gran relevancia para la presentación del modelo de Skyrme es la debida a la transformación del grupo $SU(N)$. Como estamos interesados en el estudio de hadrones sin extrañeza nos limitaremos a trabajar con el grupo $SU(2)$. En este caso podemos representar a Ψ por el vector

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix},$$

donde Ψ^1 representa al cuaro up y Ψ^2 al down. El lagrangiano es entonces invariante ante las transformaciones

$$i) \quad \Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\alpha\tau^j/2} \Psi \quad (2.7)$$

$$ii) \quad \Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\gamma^5\beta\tau^j/2} \Psi \quad (2.8)$$

donde τ son las matrices de Pauli³ y $j=1,2,3$. Las correspondientes corrientes y cargas conservadas son:

$$i) \quad V_{\mu}^j = \frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma_{\mu}\tau^j\Psi \quad \text{corriente vectorial}, \quad (2.9)$$

¹ Ver Apéndice A.

² Ver Apéndice C para las detalles de las ecuaciones de este capítulo.

³ Ver Apéndice B

$$Q^j = \int d^3x V_0^j \quad \text{carga vectorial} \quad (2.10)$$

$$ii) A_\mu^j = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma^5 \tau^j \Psi \quad \text{corriente axial} \quad , \quad (2.11)$$

$$Q^{5j} = \int d^3x A_0^j \quad \text{carga axial} \quad . \quad (2.12)$$

La corriente de la ec.(2.9) es una corriente vectorial debido a las propiedades de transformación del campo y matrices de Dirac ante una transformación de paridad, mientras que la corriente (2.11) es una corriente axial. Estas corrientes de Noether son de fundamental importancia debido a que son a su vez corrientes físicas y aparecen en las interacciones electromagnéticas y débiles. Las cargas (ec.2.10 y 2.12) se obtienen al integrar la divergencia de las corrientes. Estas cargas también se conservan y son independientes del tiempo.

En 1964 Gell-Mann¹ propuso que las corrientes que aparecen en los lagrangianos de interacción de los hadrones para las fuerzas electromagnéticas y débiles deberían dar lugar a cargas Q^j y Q^{5j} conservadas que cumplieran con la siguiente álgebra

$$[Q^i, Q^j] = i \epsilon^{ijk} Q^k \quad (2.13a)$$

$$[Q^i, Q^{5j}] = i \epsilon^{ijk} Q^{5k} \quad (2.13b)$$

$$[Q^{5i}, Q^{5j}] = i \epsilon^{ijk} Q^k \quad (2.13c)$$

con ϵ^{ijk} el tensor de Levi-Civita totalmente antisimétrico.

En el modelo de cuarks Q^j y Q^{5j} están dadas por (2.10) y (2.12) y el álgebra anterior es resultado de las relaciones de anticonmutación de los campos de Dirac, es decir

$$\{\Psi_{ai}(x,t), \Psi_{bj}^\dagger(y,t)\} = \delta_{ij} \delta_{ab} \delta^3(x-y) \quad . \quad (2.14)$$

Las relaciones de conmutación dadas en (2.13) corresponden al álgebra quiral del grupo $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Para convencernos de que efectivamente tenemos dos grupos $SU(2)$, definimos cargas izquierdas y cargas derechas de la siguiente forma

$$Q_L^i = \frac{1}{2} (Q^i - Q^{5i}) \quad (2.15)$$

¹ Ver por ejemplo *Gauge Theories of weak interactions*. J.C.Taylor Cambridge Monographs on Mathematical Physics.

$$y \quad Q_R^i = \frac{1}{2} (Q^i + Q^{\bar{5}i}) \quad (2.16)$$

Estas cargas cumplen con los siguientes conmutadores

$$[Q_L^i, Q_L^j] = i \epsilon^{ijk} Q_L^k \quad (2.17a)$$

$$[Q_R^i, Q_R^j] = i \epsilon^{ijk} Q_R^k \quad (2.17b)$$

$$[Q_L^i, Q_R^j] = 0 \quad (2.17c)$$

Tenemos que tanto las cargas izquierdas Q_L como las derechas Q_R cierran por separado el algebra del grupo $SU(5)$, por lo cual cada una genera a un grupo $SU(5)$. Estos grupos se les denomina grupo izquierdo $SU(5)_L$ y derecho $SU(5)_R$. El lagrangiano (2.1) es invariante no solo ante la transformación de un grupo $SU(5)$ sino ante la de los grupos $SU(5)_L$ y $SU(5)_R$.

Como ejemplo calcularemos el conmutador de la ecuación (2.17a)

$$\begin{aligned} [Q_L^i, Q_L^j] &= \frac{1}{4} [Q^i - Q^{\bar{5}i}, Q^j - Q^{\bar{5}j}] \\ &= \frac{1}{4} ([Q^i, Q^j] + [Q^{\bar{5}i}, Q^{\bar{5}j}] - [Q^i, Q^{\bar{5}j}] - [Q^{\bar{5}i}, Q^j]) \\ &= \frac{1}{4} (2i \epsilon^{ijk} Q^k - 2i \epsilon^{ijk} Q^{\bar{5}k}) \\ &= i \epsilon^{ijk} \frac{1}{2} (Q^k - Q^{\bar{5}k}) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$[Q_L^i, Q_L^j] = i \epsilon^{ijk} Q_L^k$$

Como los cuarks son masivos debemos introducir en el lagrangiano (2.1) un término extra. Usualmente el término de masa es

$$\mu^3 \bar{Q} Q$$

pero esta no es invariante ante la transformación quiral, con lo cual la corriente axial A^J (ec.2.11) ya no se conservara. Si exigimos que el lagrangiano no pierda la simetría quiral tenemos que buscar un término de masa alternativo. Por otro lado esperaríamos que las partículas

formaran representaciones irreducibles del grupo $SU(2) \times SU(2)$, por lo que deberían estar degeneradas en paridad. Por ejemplo, además del triplete de partículas pseudoescalares (piones) debería haber un triplete de partículas escalares y los bariones deberían tener compañeros de paridad opuesta. Como estas partículas adicionales no se observan en la naturaleza, surge la idea de que la simetría $SU(2) \times SU(2)$ se rompe espontáneamente. El modelo σ , que presentaremos mas adelante, permite resolver estos problemas. Antes de presentarlo quisiéramos introducir el concepto de rompimiento espontáneo de la simetría.

2.2 ROMPIMIENTO ESPONTANEO DE LA SIMETRIA

El rompimiento espontáneo de la simetría esta intimamente ligado con la degeneración del vacío. Si el lagrangiano o hamiltoniano es invariante ante una transformación pero el estado base no lo es, entonces se dice que hay un rompimiento espontáneo de la simetría.

Sea U un elemento de un grupo unitario que deja invariante al hamiltoniano H^0 , entonces

$$[H^0, U] = 0 \quad . \quad (2.18)$$

Además U conecta estados de una misma representación irreducible, es decir

$$U|A\rangle = |B\rangle \quad . \quad (2.19)$$

Calculamos la energía de estos estados,

$$\begin{aligned} E_a &= \langle A|H^0|A\rangle \\ &= \langle B|U^\dagger H^0 U|B\rangle \\ &= \langle B|H^0|B\rangle = E_b \quad . \end{aligned}$$

Debido a este resultado tenemos que la simetría del hamiltoniano se manifiesta en una degeneración de estados. Pero, de manera implícita, usamos en esta deducción que el estado base (vacío) es invariante ante esa transformación. En general los estados $|A\rangle$ y $|B\rangle$ deben de estar relacionados con el vacío por medio de operadores de creación a y b , respectivamente. Es decir,

$$|A\rangle = a|0\rangle \quad |B\rangle = b|0\rangle \quad . \quad (2.20)$$

Como

$$UaU^\dagger = b$$

entonces

$$U|A\rangle = UU^\dagger bU|0\rangle = bU|0\rangle \quad . \quad (2.21)$$

La ec. (2.19) es válida solo si

$$U|0\rangle = |0\rangle \quad (2.22)$$

Si $U|0\rangle \neq |0\rangle$ el vacío no es invariante y ya no habrá degeneración de estados. Una forma equivalente de expresar este hecho es que exista algún operador de campo que tenga un valor de expectación del vacío distinto de cero,

$$\langle 0|\phi|0\rangle \neq 0 \quad (2.23)$$

Quisieramos hacer notar que el hecho de tener un rompimiento espontáneo de la simetría en una teoría de campo no lineal, nos va a permitir tener soluciones tipo solitón ya que la condición necesaria para que existieran era que el vacío estuviera degenerado.

Un teorema de suma importancia es el Teorema de Goldstone¹. En este teorema se demuestra que el rompimiento espontáneo de una simetría continua implica la existencia de partículas con espín y masa cero, llamadas bosones de Goldstone.

2.3 MODELO σ

El modelo σ para $SU(2)_L \times SU(2)_R$ (Schwinger 1958; Polkinghore 1958; Gell-Mann y Lévy 1960) es un modelo no abeliano que consta de un isotriplete de piones $\pi = (\pi^1, \pi^2, \pi^3)$ un isoescalar σ y un isodoublete de nucleones $\Psi = (p, n)$.

Consideremos el término

$$L^1 = g\bar{\Psi}(\sigma + i\gamma^5 \tau \cdot \pi) \Psi \quad (2.24)$$

El término (2.24) es invariante ante las transformaciones de los grupos $SU(2)_L \times SU(2)_R$ y de paridad, si los campos σ, π se transforman de la siguiente forma:

i) para $SU(2)$ axial

$$\begin{aligned} \sigma &\rightarrow \sigma' = \sigma + \beta \cdot \pi \\ \pi &\rightarrow \pi' = \pi - \beta \sigma \end{aligned} \quad (2.25)$$

si

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\gamma^5 \beta \cdot \tau / 2} \Psi$$

con β una constante,

¹ Para una demostración ver *Gauge Theory of Elementary Particles*: T.P.Cheng & L.F.Li . Oxford University Press.

ii) para SU(2)

$$\begin{aligned} \sigma &\rightarrow \sigma' = \sigma, \\ \pi &\rightarrow \pi' = \pi + \alpha \times \pi \end{aligned} \quad (2.26)$$

si

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\alpha \cdot \tau / 2} \Psi$$

con α una constante,

iii) para la transformación de paridad

$$\begin{aligned} \sigma &\rightarrow \sigma' = \sigma \\ \pi &\rightarrow \pi' = -\pi \end{aligned} \quad (2.27)$$

si

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \gamma^0 \Psi$$

Las primeras dos transformaciones corresponden al grupo SU(2) axial (ec.2.25) y SU(2) (ec.2.26) respectivamente mientras que la tercera es la transformación de paridad. De esta última observamos que el campo σ es un campo escalar mientras que π es pseudoscalar.

Podemos hacer a σ y π campos dinámicos sumándole al lagrangiano un término cinético. Además, notamos que $\sigma^2 + \pi^2$ es un término que respeta las tres transformaciones anteriores (2.25, 2.26, 2.27). Por lo tanto la expresión

$$L^2 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial_\mu \sigma + \partial_\mu \pi \partial_\mu \pi) + V(\sigma^2 + \pi^2) \quad (2.28)$$

con V un potencial arbitrario, también es invariante ante las transformaciones anteriores.

Con estos resultados llegamos por fin al modelo σ

$$L = L^0 + L^1 + L^2 \quad (2.29)$$

$$L = i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + g\bar{\Psi}(\sigma + i\tau \cdot \pi \gamma^5)\Psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial_\mu \sigma + \partial_\mu \pi \partial_\mu \pi) + V(\sigma^2 + \pi^2)$$

Por construcción el lagrangiano L es invariante ante transformaciones del grupo SU(2) y SU(2) axial. Las corrientes y cargas conservadas son:

i) SU(2)

$$J_{\mu}^i = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma_{\mu} \tau^i \Psi + \varepsilon^{ijk} \pi^j \partial_{\mu} \pi^k \quad \text{corriente, (2.30)}$$

$$Q^i = \int d^3x J_0^i \quad \text{carga; (2.31)}$$

ii) SU(2) axial

$$A_{\mu}^i = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma_{\mu} \gamma^5 \tau^i \Psi + \partial_{\mu} \sigma \pi^i - \partial_{\mu} \pi^i \sigma \quad \text{corriente axial, (2.32)}$$

$$Q^{5i} = \int d^3x A_0^i \quad \text{carga axial. (2.33)}$$

Las cargas Q^i (ec.2.31), Q^{5i} (ec.2.33) cumplen con los conmutadores de las ec.(2.13) por lo que son los generadores del álgebra de $SU(2)_L \times SU(2)_R$.

Si el potencial $V(\sigma^2 + \pi^2)$ está dado por

$$V = -\frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4!} (\sigma^2 + \pi^2)^2 \quad (2.34)$$

entonces tenemos un mínimo del potencial para $\sigma^2 + \pi^2 = (\mu^2/\lambda)$. En el mínimo del potencial, los campos σ, π no se anulan simultáneamente.

Escogemos los valores de expectación del vacío de estos campos como

$$\langle 0 | \pi^i | 0 \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle 0 | \sigma | 0 \rangle = v \quad (2.35)$$

con $i=1,2,3$

$$\text{y} \quad v = (\mu^2/\lambda)^{\frac{1}{2}}.$$

Según el teorema de Goldstone debido al rompimiento espontáneo de la simetría vamos a tener la existencia de partículas de masa nula que en este caso van a ser los piones π y ya no habrá degeneración de estados. El espectro de partículas mostrará solo la simetría del grupo SU(2) (que es el grupo de isoespín).

Por otro lado si hacemos una translación del campo σ de la forma

$$\sigma' = \sigma - v \quad (2.36)$$

el valor de expectación del vacío para σ' será cero. Con esta translación el campo de Dirac adquiere una masa m , con

$$m = (v)^{\frac{1}{2}} = \mu^2/\lambda \quad (2.37)$$

Cabe señalar que de hecho este modelo es solo una aproximación ya que los piones tienen, aunque pequeña, una masa distinta de cero. Por lo tanto se va a necesitar romper explícitamente la simetría quiral en el lagrangiano (2.29).

El modelo σ constituye una realización explícita en términos de campos del álgebra quiral (2.13) además de que ejemplifica como el rompimiento espontáneo de la simetría puede resolver algunos de los problemas mencionados anteriormente. Sin embargo hoy en día se cree que la cromodinámica cuántica (QCD) es la teoría fundamental de las interacciones fuertes. En esta teoría los cuarks interactúan intercambiando gluones que son los bosones de norma de la teoría. Es importante hacer notar que el lagrangiano de la QCD respeta la simetría quiral $SU(2) \times SU(2)$ y se cree que ésta está rota como resultado de un proceso dinámico.

2.4 EL MODELO DE SKYRME

El modelo de Skyrme¹ es una generalización del modelo σ presentado anteriormente. Este modelo utiliza solo la parte escalar del modelo σ . Skyrme notó que al agregar un término con derivadas cuárticas en los campos aparecían soluciones estables tipo solitón que él interpretó como bariones.

El interés en el modelo de Skyrme resurgió en 1983 gracias al trabajo de E. Witten², quien demostró que el modelo de Skyrme puede representar una aproximación razonable para la descripción de las propiedades hadrónicas en el régimen de bajas energías. Dos aspectos fundamentales son que la corriente topológica conservada se puede identificar como corriente bariónica y que el solitón se puede cuantizar como fermión. El último punto es particularmente interesante ya que en el lagrangiano original solo aparecen campos escalares.

Dentro de este esquema podemos visualizar a la QCD como la teoría general, que resulta ser extremadamente complicada en el dominio de bajas energías en el cual el modelo de Skyrme, como teoría efectiva, puede proporcionar un puente entre la QCD y el espectro bariónico.

¹ T.H. Skyrme, *Nucl. Phys.* 31(1962)556.

² E. Witten, *Nucl. Phys. B* 223, 422 y *Nucl. Phys. B* 223, 433.

Consideremos la parte mesónica del modelo σ (ec. 2.29)

$$L^2 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial_\mu \sigma + \partial_\mu \pi \partial_\mu \pi) + V(\sigma^2 + \pi^2)$$

e introduzcamos la siguiente restricción para los campos σ, π

$$\sigma^2(x,t) + \pi^2(x,t) = \frac{c^2}{4} \quad (2.38)$$

válida para todo x y t . El campo σ dejará de ser independiente y será una función no lineal de los campos π . El potencial V lo vamos a suprimir por ser una constante. La condición (2.38) la podemos tomar en cuenta si combinamos los campos σ, π en una matriz unitaria U 2×2 de la forma

$$U = e^{i\tau \cdot \bar{\phi}(x,t)} = \cos \phi + i \tau \cdot \hat{\phi} \sin \phi \quad (2.39)$$

con τ las matrices de Pauli y $\bar{\phi} = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$, $\phi = |\bar{\phi}|$, $\hat{\phi} = \bar{\phi}/\phi$. Ahora solo tenemos como variable dinámica independiente al isovector $\bar{\phi}$. Los campos σ, π quedan expresados como

$$\sigma = \frac{c}{2} \cos \phi, \quad \pi = \frac{c}{2} \hat{\phi} \sin \phi \quad (2.40)$$

El lagrangiano (ec.2.28) se puede escribir como

$$L^2 = \frac{c^2}{16} \text{tr} (\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U) \quad (2.41)$$

con μ un índice que va de 0 a 3 siendo $\mu = 0$ la componente temporal, $\mu = 1, 2, 3$ las componentes espaciales y c una constante por determinar. La traza es tomada sobre las matrices de Pauli.

2.5 CONSTANTE DE DECAIMIENTO DEL PION

En esta sección vamos a determinar el valor de la constante c que aparece en el modelo Skyrme.

Con este fin notamos que la corriente axial (ec.2.32)

$$A_{\mu}^i = \partial_{\mu} \sigma \pi^i - \sigma \delta_{\mu} \pi^i \quad (2.42)$$

tiene el siguiente elemento de matriz

$$\begin{aligned} \langle 0 | A_{\mu}^i(x) | \pi^j(p) \rangle &= \langle 0 | \partial_{\mu} \sigma \pi^i - \sigma \delta_{\mu} \pi^i | \pi^j(p) \rangle \\ &= \langle 0 | \sigma | 0 \rangle i p_{\mu} e^{i p x} \delta^{ij} \end{aligned} \quad (2.43)$$

La última igualdad es consecuencia de que el valor de expectación de $\partial_{\mu} \sigma$ es cero y de la siguiente normalización del pión

$$\langle 0 | \pi^i(x) | \pi^j(p) \rangle = \delta^{ij} e^{i p x} \quad (2.44)$$

Por construcción ((2.25) y (2.38)) tenemos que

$$\langle 0 | \sigma | 0 \rangle = \frac{c}{Z} \neq 0 \quad (2.45)$$

y la ec.(2.43) queda como

$$\langle 0 | A_{\mu}^i(0) | \pi^j \rangle = \frac{i c}{Z} p_{\mu} \delta^{ij} \quad (2.46)$$

Para $i=j$ el elemento de matriz (2.46) es diferente de cero y como habíamos visto anteriormente (ec.2.23) esto implica que la simetría está espontáneamente rota. Además usualmente se define

$$\langle 0 | A_{\mu}^i(0) | \pi^j(p) \rangle = i \frac{F_{\pi}}{Z} p_{\mu} \delta^{ij} \quad (2.47)$$

con $F_{\pi} = 186 \text{ MeV}$ la constante de decaimiento del pión. Si comparamos (2.46) y (2.47) tenemos que la constante de decaimiento del pión está dada, en el modelo de Skyrme, en términos del valor de expectación del vacío del campo σ . Por lo tanto la constante "c" del modelo de Skyrme no es más que la constante de decaimiento del pión,

$$c = F_{\pi} \quad (2.48)$$

Si tomamos la divergencia de la ec. (2.47), debido a la conservación de la corriente axial, tenemos que

$$p_{\mu} p_{\mu} = m_{\pi}^2 = 0 \quad (2.49)$$

Es decir la mass de los piones es cero y vienen a ser los bosones que predice el teorema de Goldstone. Para darle mass a los piones tendríamos que agregarle al lagrangiano un término que rompiera explícitamente la simetría axial.

2.6 ESTABILIZACION DEL SOLITON

Desgraciadamente el lagrangiano (2.41) no contiene solitones estables como se demostró en el capítulo anterior (sección 1.3), por lo que vamos a buscar un término que los estabilice. Si exigimos que el lagrangiano solo contenga términos con primeras derivadas en los campos, los de menor número de derivadas posibles son

$$L^1 = \text{tr} (\partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U)^2 \quad \text{y} \quad L^{1'} = \text{tr} (\partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U) (\partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U) \quad (2.50)$$

Podríamos usar cualquiera de los dos pero la diferencia de ambos solo contiene términos cuadráticos en las derivadas temporales, lo cual va a ser conveniente en el momento de cuantizar.

Por lo tanto tomamos
$$L^4 = \frac{2}{32 e^2} (L^{1'} - L^1) \quad (2.51)$$

con e una constante por determinar.

Haciendo un poco de álgebra escribimos (2.51) como

$$L^4 = \frac{1}{32 e^2} \text{tr} ([U^\dagger \partial_\mu U, U^\dagger \partial_\nu U] [U^\dagger \partial^\mu U, U^\dagger \partial^\nu U]) \quad (2.52)$$

El lagrangiano del modelo de Skyrme queda entonces como

$$L = L^2 + L^4 \quad (2.53)$$

y si definimos $l_\mu = U^\dagger \partial_\mu U$ podemos escribir el lagrangiano anterior como

$$L = -\frac{c^2}{16} \text{tr} (l_\mu l^\mu) + \frac{1}{32 e^2} \text{tr} ([l_\mu, l_\nu]^2) \quad (2.54)$$

donde $[l_\mu, l_\nu]^2$ se debe interpretar como

$$[l_\mu, l_\nu] [l^\mu, l^\nu] = (l_\mu l_\nu - l_\nu l_\mu) (l^\mu l^\nu - l^\nu l^\mu)$$

Como vimos en el capítulo anterior (sección 1.3) el teorema de Derrick nos dice que solo puede haber soluciones estables para un espacio real de tres dimensiones, pero es justamente en esa dimensionalidad que queremos trabajar.

2.7 ANSATZ DE SKYRME

El lagrangiano de Skyrme (2.54) contiene un sector escalar que describe a los mesones, pero también puede describir a los bariones como solitones de la teoría. De acuerdo con el teorema de Derrick podemos esperar la existencia de solitones estables para este lagrangiano. Por otro lado, la teoría de homotopía estudiada en el capítulo anterior nos dice que, para que una solución particular $U = U_0$ de las ecuaciones de movimiento tenga una energía finita se requiere que U tienda a una constante cuando $|r| \rightarrow \infty$. Podemos elegir sin falta de generalidad a esta constante como la unidad, por lo que tenemos que:

$$U_0 \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 1 \quad . \quad (2.55)$$

Notamos que la solución $U = 1$ para todo r tiene energía cero por lo cual se le identifica con el vacío. La condición (2.55) nos indica que para tener energía finita una configuración de solitón deberá tender al vacío cuando $|r| \rightarrow \infty$. Ahora bien, como a todos los puntos del infinito se les asigna el mismo valor de U_0 , podemos identificarlos como uno solo, esto nos permite identificar al espacio real con la 3-esfera S^3 . De esta manera una solución particular U_0 que cumpla con (2.55) da lugar a un mapeo $S^3 \rightarrow SU(2)$. Como se vio en el capítulo anterior, este mapeo pertenece a la tercera clase de homotopía (ver ec.1.11). Por lo tanto para el lagrangiano (2.54) podemos esperar solitones con número de revolución que coincida con los enteros. Una configuración con número de revolución igual a uno fue encontrada por Skyrme usando el siguiente ansatz:

$$U = e^{i\hat{r} \cdot \hat{r} F(r)} \quad (2.56)$$

$$U = \cos F + i\hat{r} \cdot \hat{r} \sin F \quad .$$

Con este ansatz el isovector ϕ tiene dirección radial y su magnitud depende solo de la distancia al origen (e.d. del radio). Este ansatz nos asegura que $U(x,t)$ cubra totalmente a la 3-esfera S^3 . Por lo tanto el mapeo del espacio real al espacio interno puede ser no trivial. El objeto que resulta de este ansatz tiene una estructura geométrica peculiar (ver fig.6). En cada punto del espacio, el vector $\phi(x)$ asociado está en la dirección radial, siendo el origen el centro del objeto. Es por esta estructura que se le dice al ansatz de Skyrme el erizo.

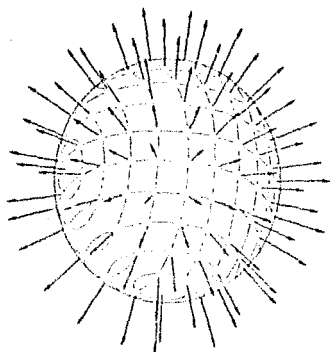


fig.6 El erizo

Ahora nos falta determinar que tipo de condiciones debe cumplir la función $F(r)$. Como queremos que la solución sea de energía finita U debe de ser constante en la frontera, y por lo tanto $F(r)$ debe de tomar valores multiples de π ,

$$F(r) \rightarrow m\pi \quad \text{si} \quad r \rightarrow \infty \quad . \quad (2.57)$$

Por otro lado el origen espacial ($r = 0$) debe de ser mapeado a un solo punto, por lo que tenemos de nuevo la misma condición $F(0) = -n\pi$ (n entero). Para que el mapeo no pueda ser deformado al mapeo trivial escogemos valores de n, m distintos. En particular tomamos $m = 0$

$$F(0) = -n\pi \quad \text{y} \quad F(\infty) = 0 \quad . \quad (2.58)$$

2.8 CORRIENTE Y CARGA TOPOLOGICA

Ya en el capítulo anterior habíamos estudiado el tercer grupo homotópico (ec.1.11) y es el mismo que corresponde para el estudio del modelo de Skyrme. La diferencia con el ejemplo anterior (sección 1.6) es que ahora vamos a trabajar con 3 y no 4 dimensiones espaciales y ya no son las condiciones de frontera las generadoras de la carga

topológica sino el mapeo de todo el espacio. En analogía con la ecuación (1.60) definimos la corriente topológica como

$$B^\mu = \frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{24\pi^2} \text{tr} (l_\nu l_\alpha l_\beta) \quad (2.59)$$

Esta corriente se va conservar, lo cual implica que su divergencia debe ser cero. Tomamos la divergencia de (2.59)

$$\partial_\mu B^\mu = \frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{24\pi^2} \partial_\mu \text{tr} (l_\nu l_\alpha l_\beta)$$

y notamos que

$$\partial_\nu \ln U = U^\dagger \partial_\nu U = U^\dagger \partial_\nu U$$

Usamos este hecho y la propiedad antisimétrica del tensor ϵ para ver que

$$\partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} l_\nu = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\nu \ln U = 0$$

Por lo tanto llegamos a que efectivamente la divergencia de la corriente topológica se anula.

Dado que los solitones serán interpretados como bariones la corriente topológica B^μ es la corriente bariónica. De esta corriente obtenemos una carga conservada que se identifica con el número bariónico y por lo cual tenemos que el modelo de Skyrme predice la conservación del número bariónico. La carga topológica B la obtenemos al integrar la corriente (2.59) sobre todo el espacio,

$$\begin{aligned} \int_V d^3x \partial_\nu B^\nu &= - \int_V d^3x \partial_i B^i \\ &= - \int_S da_i B^i \\ &= 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto la carga bariónica es

$$B = \int d^3x B^0 = \text{constante en el tiempo}$$

$$B = \frac{\epsilon^{ijk}}{24\pi^2} \int d^3x \text{tr} (l_i l_j l_k) \quad (2.60)$$

Ahora vamos a calcular B para el ansatz de Skyrme. Si usamos coordenadas esféricas y la propiedad cíclica de la traza tenemos que

$$\epsilon^{ijk} \text{tr} (l_i l_j l_k) = 3 \text{tr} (l_r l_\theta l_\phi - l_r l_\phi l_\theta) \quad (2.61)$$

con

$$l_r = U^+ \delta_r U$$

$$l_\theta = \frac{1}{r} U^+ \delta_\theta U \quad (2.62)$$

$$l_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} U^+ \delta_\phi U$$

Introducimos el ansatz de Skyrme (2.56) en (2.61) y obtenemos

$$\text{tr} (l_r l_\theta l_\phi) = \frac{2 \sin^2 F F'}{r^3} \quad (2.63)$$

y

$$\text{tr} (l_r l_\phi l_\theta) = - \frac{2 \sin^2 F F'}{r^3}$$

Por lo tanto la ec.(2.61) queda dada por

$$\epsilon^{ijk} \text{tr} (l_i l_j l_k) = 12 \frac{\sin^2 F F'}{r^3} \quad (2.64)$$

Con este resultado la carga topológica (2.60) es

$$B = \frac{1}{2\pi^2} \int d\Omega \sin^2 F F' \quad (2.65)$$

Debido a que el integrando no tiene dependencia angular, la integral angular nos da 4π y la ec.(2.65) queda como

$$B = \frac{2}{\pi} \int dr \sin^2 F F'$$

$$B = \frac{2}{\pi} \frac{F(\omega)}{F(0)} \int dF \sin^2 F \quad (2.66)$$

Si escogemos $F(\omega) = 0$ y $F(0) = -\pi n$ llegamos a que la carga bariónica es

$$B = n \quad (2.67)$$

y a que está cuantizada, aún a nivel clásico. Este resultado nos indica que el skyrmión posee propiedades características de las partículas a pesar de que no ha sido cuantizado.

2.9 ENERGIA ESTÁTICA DEL SKYRMION

Estamos interesados en encontrar la energía en reposo del solitón del modelo de Skyrme. Con este fin consideramos la ec.(2.54)

$$L = -\frac{c^2}{16} \text{tr} (l_\mu l^\mu) + \frac{1}{32e^2} \text{tr} ([l_\mu, l_\nu]^2) .$$

Para una solución estática la derivada temporal de U se anula

$$\partial_t U = 0, \quad l_0 = 0 \quad (2.68)$$

Para determinar la energía primero calculamos el hamiltoniano, este es

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L$$

pero $\dot{q} = \partial_t U = 0$, por lo tanto el hamiltoniano queda como

$$H = -\frac{c^2}{16} \text{tr} (l_i l_i) - \frac{1}{32e^2} \text{tr} ([l_i, l_j]^2) \quad (2.69)$$

Introducimos el ansatz de Skyrme (2.56) en la ecuación anterior y usamos los siguientes resultados

$$i) \quad \text{tr} (l_i^2) = \text{tr} (l_r^2 + l_\theta^2 + l_\phi^2) \quad (2.70a)$$

$$\text{tr} (l_r^2) = -2 F'^2 \quad (2.70b)$$

$$\text{tr} (l_\theta^2) = \text{tr} (l_\phi^2) = -\frac{2 \text{sen}^2 F}{r^2} \quad (2.70c)$$

y

$$ii) \quad \text{tr} ([l_i, l_j]^2) = 4 \text{tr} (l_r l_\theta l_r l_\theta + l_r l_\phi l_r l_\phi + l_\theta l_\phi l_\theta l_\phi - l_r l_\theta l_\theta l_r - l_r l_\phi l_\phi l_r - l_\theta l_\phi l_\phi l_\theta) \quad (2.71a)$$

$$\text{tr} (l_r l_\theta l_r l_\theta) = \text{tr} (l_r l_\phi l_r l_\phi) = -\frac{2 \text{sen}^2 F}{r^2} F'^2 \quad (2.71b)$$

$$\text{tr} (l_r l_r l_\theta l_\theta) = \text{tr} (l_r l_r l_\phi l_\phi) = \frac{2 \text{sen}^2 F}{r^2} F'^2 \quad (2.71c)$$

$$\text{tr} (l_\theta l_\phi l_\theta l_\phi) = -\text{tr} (l_\theta l_\theta l_\phi l_\phi) = -\frac{2 \text{sen}^4 F}{r^2} F'^2 \quad (2.71d)$$

El hamiltoniano (2.69) nos da la energía en reposo del solitón. Haciendo uso de los resultados anteriores escribimos la energía en reposo ec.(2.69), que no es más que la masa, como

$$M = H = 4\pi \int dr r^2 \left\{ \frac{c^2}{8} (F'^2 + \frac{2\text{sen}^2 F}{r^2}) + \frac{\text{sen}^2 F}{2r^2 e^2} (\frac{\text{sen}^2 F}{r^2} + 2F'^2) \right\} \quad (2.72)$$

Para encontrar la solución de mínima energía calculamos la variación funcional de M y exigimos que se anule, e.d. $\delta_F M = 0$.

En general la variación de un funcional M, donde M es de la forma

$$M = \int dr G(r, F(r), F'(r))$$

está dada por

$$\delta_F M = \int dr \left(\frac{\partial G}{\partial F} \delta F + \frac{\partial G}{\partial F'} \delta F' \right) \quad (2.73)$$

donde

$$\delta F' = \delta \left(\frac{dF}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \delta F$$

Si integramos por partes el segundo término de la ec.(2.73) y usamos que la variación de F sobre la frontera es cero ($\delta F = 0$) llegamos a las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial G}{\partial F} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial G}{\partial F'} \right) = 0 \quad (2.74)$$

Identificamos a G con el integrando de la ec.(2.72) y calculamos las derivadas funcionales de G con respecto a F y F'

$$\frac{\partial G}{\partial F} = \frac{c^2 \text{sen} 2F}{4} + \frac{\text{sen} 2F}{2e^2} \left(\frac{\text{sen}^2 F}{r^2} + 2F'^2 \right) + \frac{\text{sen}^2 F \text{sen} 2F}{2e^2 r^2} \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial G}{\partial F'} = \frac{c^2 r^2 F'}{4} + \frac{2 \text{sen}^2 F F'}{r^2} \quad (2.76)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial G}{\partial F'} \right) = \frac{c^2 r F'}{2} + \left(\frac{c^2 r^2}{4} + \frac{2 \text{sen}^2 F}{e^2} \right) F'' + \frac{2 \text{sen}^2 F F'}{e^2} \quad (2.77)$$

Sustituimos los resultados anteriores en la ecuación de Euler - Lagrange (2.74) y obtenemos

$$F'' \left(\frac{c^2 e^2 r^2}{4} + 2 \sin^2 F \right) + \frac{c^2 e^2 r}{2} F' + \sin 2F F'^2 - \frac{c^2 e^2 \sin 2F}{4} - \frac{\sin^2 F \sin 2F}{r^2} = 0 \quad (2.78)$$

Esta es la ecuación diferencial que debe cumplir la función radial F del skyrmión con las condiciones de frontera $F(0) = -\pi$, $F(\infty) = 0$. Esta ecuación la podemos expresar en términos de la variable adimensional $r^2 = \rho r$,

$$F'' \left(\frac{1}{4} r^2 + 2 \sin^2 F \right) + \frac{1}{2} r F' + \sin 2F F'^2 - \frac{1}{4} \sin 2F - \frac{\sin^2 F \sin 2F}{r^2} = 0 \quad (2.79)$$

El comportamiento de esta función se muestra en la fig. 6 (Witten '83). Para determinar el comportamiento asintótico de (2.79) solo debemos considerar términos lineales. Estos cumplen con la ecuación

$$r^2 F'' + 2r F' - 2F = 0 \quad (2.80)$$

por lo que obtenemos que el comportamiento asintótico de $F(r \rightarrow \infty)$ es proporcional al inverso del cuadrado del radio,

$$F(r^2) \propto 1/r^2 \quad \text{si } r^2 \rightarrow \infty \quad (2.81)$$

El valor numérico de la masa del skyrmión (ec.2.72) lo calcularemos en el próximo capítulo y en lugar de resolver la ecuación (2.79) numericamente utilizaremos un método variacional.

Por último quisieramos brevemente mencionar que si trabajamos con un grupo interno más grande (por ejemplo $SU(3)$) necesitamos tomar en cuenta el término de Wess-Zumino.

2.10 EL TERMINO DE WESS-ZUMINO

El lagrangiano del modelo de Skyrme tiene una simetría discreta adicional que no se observa en la naturaleza. Bajo una transformación de paridad P los piones por ser pseudoescalares deben transformarse como

$$P\pi(x,i) = -\pi(-x,i) \quad (2.82)$$

En el modelo de Skyrme esto se logra definiendo al operador de paridad como

$$P: x \rightarrow -x, t \rightarrow t, U \rightarrow U^+ \quad (2.83)$$

Pero el lagrangiano (2,54) es invariante ante $x \rightarrow -x, t \rightarrow t$ y $U \rightarrow U^+$ por separado ($U \rightarrow U^+$ es la transformación de conjugación de carga).

Como el decaimiento de dos kaones en tres piones

$$K^+K^- \rightarrow \pi^+\pi^0\pi^- \quad (2.84)$$

no satisface las tres simetrías anteriores por separado, debemos de evitar que el modelo de Skyrme las tenga.

Witten ¹ propuso introducir al modelo de Skyrme un término extra que rompiera con la simetría no deseada. Lo interesante es que demuestra que este término es único si uno se restringe al menor número de derivadas posibles. El término extra se le llama término de Wess-Zumino ya que es igual al encontrado por Wess y Zumino² en el álgebra de corrientes. Este término tiene cinco matrices independientes que anticonmutan. Como en $SU(2)$ solo hay tres matrices que anticonmutan el término de Wess-Zumino se anula.

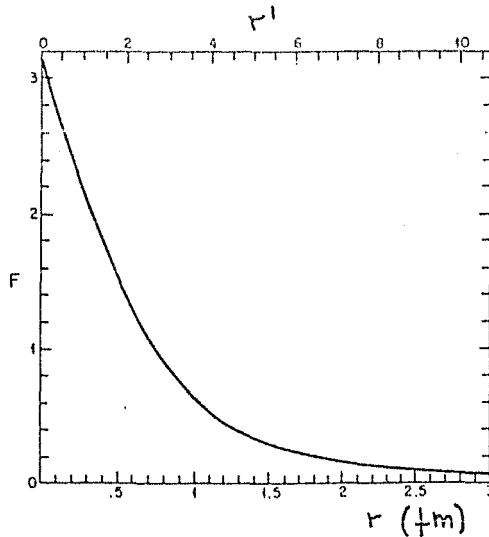


fig.6 Comportamiento de la función radial del skyrmión.

¹ E.Witten, *Nuclear Phys. B* 223 (1983) 422-432

² J.Wess y B.Zumino, *Phys Lett.* 37B (1971) 95

CAPITULO 3

INTERACCION CON EL CAMPO ELECTROMAGNETICO

En este capítulo vamos a estudiar la invariancia del modelo de Skyrme ante la transformación del grupo $U(1)$. Posteriormente incorporaremos el campo electromagnético por medio de una transformación de norma y calcularemos la interacción electromagnética de los piones. También introduciremos unas variables colectivas que nos generarán al skyrmión en rotación y las cuantizaremos. Por último calcularemos el decaimiento de la partícula delta en un protón y un fotón, y el efecto Compton de los protones.

3.1 INVARIANCIA GLOBAL

El modelo de Skyrme conserva además de la corriente topológica las corrientes usuales derivadas de las simetrías del lagrangiano por medio del teorema de Noether¹.

Para una transformación donde el campo U varíe en δU y deje invariante al lagrangiano de Skyrme la corriente de Noether asociada es

$$J^\mu = \text{tr} \left(\frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu U)} \delta U + \frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu U^\dagger)} \delta U^\dagger \right) \quad , \quad (3.1)$$

con $\delta U^\dagger = -U^\dagger \delta U U^\dagger$ (por ser U unitaria).

Esta corriente se va a conservar y tendremos una carga conservada

$$Q = \int d^3x J^0$$

Vamos a estudiar la invariancia del modelo de Skyrme ante la

¹ Ver Apéndice B.

transformación del grupo $SU(2)$. El lagrangiano de Skyrme (ec.2.52) es invariante ante la transformación

$$U \rightarrow U' = LUR^{-1} \quad (3.2)$$

con L y R matrices de $SU(2)$ independientes de x^μ .

Como el operador derivada no actúa sobre estas matrices, tenemos

$$\partial_\mu U \rightarrow \partial_\mu U' = L \partial_\mu U R^{-1}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} I_\mu^a \rightarrow I_\mu^{\prime a} &= U^{\prime\dagger} \partial_\mu U' = R U^\dagger L^{-1} L \partial_\mu U R^{-1} \\ &= R U^\dagger \partial_\mu U R^{-1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

por lo observamos que al realizar la transformación anterior en

$$L = -\frac{c^2}{16} \text{tr} \left(\frac{1}{\mu} J^\mu \right) + \frac{1}{32g^2} \text{tr} \left([l_\mu, l_\nu]^2 \right) \quad (2.52)$$

llegamos a que L es invariante.

Esta transformación siempre la podemos escribir como

$$U \rightarrow U' = V A U A V^{-1} \quad (3.4)$$

con V y A matrices de $SU(2)$. La transformación V deja invariante al estado base $U=1$ por lo que la identificamos con rotaciones en el espacio de isospín, mientras que A va a generar la simetría quiral ($SU(2)$ -axial). Por lo anterior vemos que el modelo de Skyrme conserva isospín y carga axial pero no vamos a tener una degeneración de estados (partículas escalares \leftrightarrow pseudoescalares) debido al rompimiento espontáneo de la simetría axial que es introducido de una manera muy simple en este modelo.

3.2 CORRIENTE VECTORIAL CONSERVADA

Estamos interesados en calcular la corriente vectorial debida a la transformación

$$U \rightarrow U' = V U V^{-1} \quad (3.5)$$

Escribimos a la matriz V como

$$V = e^{i\epsilon Q} \quad (3.6)$$

con ϵ un parámetro constante y Q una matriz 2×2 . Para una transformación infinitesimal tenemos que

$$\delta U = i\epsilon [Q, U] \quad \text{y} \quad \delta U^\dagger = i\epsilon [Q, U^\dagger] \quad (3.7)$$

El término cuadrático del lagrangiano (2.52) tiene una corriente j^2 asociada

$$j^2_\mu = \frac{c^2}{2} \text{tr} (\partial_\mu U \delta U^\dagger) = \frac{c^2}{2} \text{tr} (\partial_\mu U i [Q, U^\dagger]) \quad (3.8)$$

Para encontrar la corriente asociada al término cuártico L^4 (ec. 2.52) hay que tener cuidado al momento de tomar la variación con respecto a $\partial_\nu U$ ya que los términos no conmutan. L^4 está dada por

$$L^4 = \frac{1}{32\epsilon^2} \text{tr} ((U_\mu U_\nu)^\dagger)^2 = \frac{1}{16\epsilon^2} \text{tr} (\partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U \partial^\mu U^\dagger \partial^\nu U - \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U \partial_\nu U^\dagger \partial^\nu U) \quad (2.52)$$

Tomamos la variación con respecto a $\delta_\nu U$ y $\delta_\nu U^\dagger$:

$$\text{tr} \left(\frac{\delta L^4}{\delta \partial_\nu U} \delta U \right) = \frac{1}{16\epsilon^2} \text{tr} \left(\partial_\mu U^\dagger \delta U \partial^\mu U^\dagger \partial^\nu U + \partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U \partial^\mu U^\dagger \delta U - \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U \partial_\nu U^\dagger \delta U - \partial_\mu U^\dagger \partial^\nu U \partial_\mu U^\dagger \delta U \right) \quad (3.9)$$

$$\text{tr} \left(\frac{\delta L^4}{\delta \partial_\nu U^\dagger} \delta U^\dagger \right) = \frac{1}{16\epsilon^2} \text{tr} \left(\delta U^\dagger \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \partial^\nu U + \delta_\nu U^\dagger \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \delta U - \delta U^\dagger \partial_\nu U \partial^\mu U^\dagger \delta U - \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U \delta U^\dagger \partial_\nu U \right) \quad (3.10)$$

Sumando las ecs. (3.9) y (3.10) llegamos a que la contribución a la corriente vectorial del término cuártico es

$$j^4_\mu = -\frac{1}{8\epsilon^2} i \text{tr} \left((\partial_\nu U \partial^\mu U^\dagger \partial^\nu U - \partial^\nu U \partial_\mu U^\dagger \partial^\nu U) [Q, U^\dagger] + (\partial^\mu U^\dagger \partial_\nu U \partial^\mu U^\dagger - \partial^\nu U^\dagger \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) [Q, U] \right) \quad (3.11)$$

La corriente total conservada J_μ es la suma de la ec. (3.8) y la ec. (3.11)

$$J_\mu = j^2_\mu + j^4_\mu \quad (3.12)$$

3.3 INTRODUCCION DEL CAMPO ELECTROMAGNETICO

El acoplamiento con el campo electromagnético se implementará al exigir que el lagrangiano de Skyrme sea invariante ante una transformación de norma del grupo $U(1)$. En la transformación anterior (3.5) el parámetro ϵ era independiente de x^μ , ahora vamos a dejar que dependa de las coordenadas, es decir $\epsilon = \epsilon(t, x)$. Al pedir que el lagrangiano siga siendo invariante ante esta transformación local será necesario introducir un campo de norma A_μ que posteriormente lo interpretaremos como el campo electromagnético. Debido a que el campo U que aparece en el lagrangiano son matrices el formalismo siguiente tendrá cierta similitud con el de las teorías no-abelianas de Yang-Mills.

La transformación global (3.5) la podemos interpretar como una rotación global de carga si tomamos a Q como la matriz de carga de los cuarks:

$$Q = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Para $SU(3)$ y $SU(2)$

Si $|u\rangle = (1, 0, 0)$, $|d\rangle = (0, 1, 0)$ y $|s\rangle = (0, 0, 1)$ representan los cuarks up, down y strange respectivamente, se puede ver fácilmente que

$$Q|u\rangle = 2/3 |u\rangle \quad Q|d\rangle = -1/3 |d\rangle \quad Q|s\rangle = -1/3 |s\rangle$$

que es la carga que tiene cada uno.

Lo que queremos ahora es hacer el lagrangiano de Skyrme invariante ante la transformación de norma

$$U \rightarrow U' = e^{i\epsilon(t,x)Q} U e^{-i\epsilon(t,x)Q} \quad (3.14)$$

con $\epsilon(t,x)$ una función escalar arbitraria.

Introducimos el operador de derivada covariante D_μ de tal forma que se transforme como

$$D_{\mu} U \rightarrow (D_{\mu} U)' = e^{i\epsilon Q} D_{\mu} U e^{-i\epsilon Q} \quad (3.15)$$

con lo cual aseguramos que el nuevo lagrangiano (sustituyendo todas las derivadas por derivadas covariantes) sea invariante ante la transformación local (3.14). Cómo debe de ser la derivada covariante? Para determinar su forma proponemos el siguiente ansatz para D_{μ}

$$D_{\mu} U = \partial_{\mu} U + iq [K_{\mu}(t,x), U] \quad (3.16)$$

con K_{μ} un operador por determinar y q una constante. Escribimos a K_{μ} como

$$K_{\mu} = A_{\mu} Q \quad (3.17)$$

donde Q es la matriz de carga (3.13) y A_{μ} un campo auxiliar. Sustituimos el ansatz (3.16) en la ec. (3.15) y obtenemos:

$$\begin{aligned} (D_{\mu} U)' &= \partial_{\mu} (e^{i\epsilon Q} U e^{-i\epsilon Q}) + iq A'_{\mu} [Q, e^{i\epsilon Q} U e^{-i\epsilon Q}] \\ &= e^{i\epsilon Q} \partial_{\mu} U e^{-i\epsilon Q} + i\partial_{\mu} e^{i\epsilon Q} [Q, U] e^{-i\epsilon Q} + iq A'_{\mu} e^{i\epsilon Q} [Q, U] e^{-i\epsilon Q} \end{aligned} \quad (3.18)$$

que de acuerdo a (3.15) debe de ser igual a

$$e^{i\epsilon Q} D_{\mu} U e^{-i\epsilon Q} = e^{i\epsilon Q} (\partial_{\mu} U + iq A_{\mu} [Q, U]) e^{-i\epsilon Q}$$

Por lo que obtenemos la relación

$$iq A'_{\mu} e^{i\epsilon Q} [Q, U] e^{-i\epsilon Q} = iq A_{\mu} e^{i\epsilon Q} [Q, U] e^{-i\epsilon Q} - i\partial_{\mu} e^{i\epsilon Q} [Q, U] e^{-i\epsilon Q} \quad (3.19)$$

La ecuación anterior impone la siguiente transformación de norma para el campo A_{μ}

$$A'_{\mu} = A_{\mu} - \frac{1}{q} \partial_{\mu} \epsilon \quad (3.20)$$

Esta es justamente la transformación de norma del campo electromagnético. Además notamos de (3.16) que A_{μ} tiene las mismas dimensiones que ∂_{μ} y debe de cambiar ante transformaciones de Lorentz igual que ∂_{μ} , para que el lagrangiano sea escalar, por lo que A_{μ} es un campo vectorial. Por lo tanto vamos a interpretar al campo A_{μ} como el campo electromagnético.

3.4

EL MODELO DE SKYRME
CON ACOPLAMIENTO ELECTROMAGNETICO

A continuación mostraremos explícitamente los términos que aparecen al escribir el lagrangiano de Skyrme (ec.2.52) en función de las derivadas covariantes (3.16).

Calculamos primero el término cuadrático L^2

$$\begin{aligned}
 L^2 &= \frac{c^2}{16} \text{tr} (D_\mu U^\dagger D_\mu U) \\
 &= \frac{c^2}{16} \text{tr} ((\partial_\mu U^\dagger + iqA_\mu [Q, U^\dagger]) (\partial_\mu U + iqA_\mu [Q, U])) \\
 L^2 &= \frac{c^2}{16} \text{tr} (\partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U + iqA_\mu (\partial_\mu U^\dagger [Q, U] + [Q, U^\dagger] \partial_\mu U) \\
 &\quad - q^2 A_\mu A^\mu [Q, U^\dagger] [Q, U]) \\
 &= \frac{c^2}{16} \text{tr} (\partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U + 2iqA_\mu \partial_\mu U [Q, U^\dagger] - q^2 A_\mu A^\mu [Q, U^\dagger] [Q, U])
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

La primera contribución que aparece en la ecuación anterior coincide con el término cuadrático original, la segunda nos da el acoplamiento del campo A con la corriente global conservada j^μ (ec.3.8) y la última es un término cuadrático en la constante de acoplamiento electromagnético. De una forma mas compacta podemos escribir (3.21) como

$$L^2 = L_0^2 + qa_\mu j^\mu - q^2 A_\mu A^\mu D \tag{3.22}$$

donde L_0^2 es el término cuadrático original (2.41) y

$$D = \frac{c^2}{16} \text{tr} \{ [Q, U^\dagger] [Q, U] \} \tag{3.23}$$

Consideremos ahora el término cuártico L^4 ,

$$\begin{aligned}
 L^4 &= \frac{1}{32e^2} \text{tr} ([1_\mu, 1_\nu]^2) \\
 &= \frac{1}{32e^2} \text{tr} ([1_\mu, 1_\nu] 1^\mu 1^\nu)
 \end{aligned}$$

Primero introducimos las derivadas covariantes en:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu^2} &= -D_\mu U^\dagger D_\nu U \\
&= -(\partial_\mu U^\dagger + iq A_\mu [Q, U^\dagger])(\partial_\nu U + iq A_\nu [Q, U]) \\
&= -(\partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U + iq A_\nu \partial_\mu U^\dagger [Q, U] + iq A_\mu [Q, U^\dagger] \partial_\nu U \\
&\quad - q^2 A_\nu A_\mu [Q, U^\dagger][Q, U]) \quad (3.24)
\end{aligned}$$

y sustituimos esta expresión en la ecuación para el término cuártico L^4 . El resultado¹ que obtenemos es

$$\begin{aligned}
L^4 &= \frac{1}{16e^2} \text{tr} (\partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U \partial^\mu U^\dagger \partial^\nu U - \partial_\nu U^\dagger \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \partial^\nu U \\
&\quad + 2iqA^\nu \{ \partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U \partial_\mu U^\dagger - \partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger \} [Q, U] \\
&\quad + 2iqA^\nu \{ \partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger \partial^\mu U - \partial_\nu U \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U \} [Q, U^\dagger] \\
&\quad + 2q^2 A_\nu A^\nu \{ \partial_\mu U^\dagger [Q, U] [Q, U^\dagger] \partial^\mu U - \partial_\mu U^\dagger [Q, U] \partial^\mu U^\dagger [Q, U] \} \\
&\quad + 2q^2 A_\nu A^\mu \{ \partial^\nu U^\dagger [Q, U] \partial_\mu U^\dagger [Q, U] - \partial_\mu U^\dagger [Q, U] [Q, U^\dagger] \partial^\nu U \} \quad (3.25)
\end{aligned}$$

La primer contribución nos da el término cuártico que teníamos anteriormente (ec.2.52), la segunda el acoplamiento del campo A_μ con la corriente cuártica j^4 (ec.3.11) mientras que las otras nos dan términos a segundo orden en la constante de acoplamiento. El lagrangiano (3.25) lo reescribimos como

$$L^4 = L_0^4 + q A_\mu j^{4\mu} + q^2 A_\nu A^\mu N + q^2 A_\nu A^\mu M_\mu{}^\nu, \quad (3.26)$$

donde L_0^4 es el término cuártico original y

$$N = \frac{1}{8e^2} \text{tr} (\partial_\mu U^\dagger [Q, U] [Q, U] \partial^\mu U - \partial_\mu U^\dagger [Q, U] \partial^\mu U^\dagger [Q, U]) \quad (3.27)$$

$$M_\mu{}^\nu = \frac{1}{8e^2} \text{tr} (\partial^\mu U^\dagger [Q, U] \partial_\mu U^\dagger [Q, U] - \partial_\mu U^\dagger [Q, U] [Q, U^\dagger] \partial^\mu U) \quad (3.28)$$

Juntando los resultados de la ec.(3.22) y ec. (3.26) llegamos al modelo de Skyrme con acoplamiento electromagnético

$$L = L^2 + L^4$$

¹ Ver apéndice D para las deducciones de este capítulo.

$$L = L_0 + A_\mu J^\mu + A_\mu A_\nu (N - D) + A_\nu A^\mu M_\mu{}^\nu \quad (3.29)$$

con

$$L_0 = \frac{c^2}{16} \text{tr} (l_\mu l^\mu) + \frac{1}{32e^2} \text{tr} ((l_\mu l_\nu)^2)$$

$$J_\mu = \frac{c^2}{8} i \text{tr} (\partial_\mu U [Q, U^\dagger])$$

$$- \frac{1}{8e^2} i \text{tr} \left\{ (\partial^\nu U^\dagger \partial_\nu U \partial_\mu U^\dagger - \partial^\nu U^\dagger \partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger) [Q, U] \right. \\ \left. + (\partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger \partial^\mu U - \partial^\nu U \partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U) [Q, U^\dagger] \right\} \quad (3.30)$$

y D, N, M están dados en las ec. (3.23), (3.27) y (3.28) respectivamente.

Tenemos que la corriente conservada (3.12) debida a la transformación $U \rightarrow U' = VUV^{-1}$ se acopla al campo electromagnético A_μ lo que nos hace identificar a J_μ como la corriente electromagnética. Además, por ser A_μ vectorial J_μ también debe de serlo, en concordancia con la identificación anterior. Si quisieramos podríamos agregarle al lagrangiano un término cinético para el campo electromagnético para tener fotones libres. Este sería

$$L^{em} = - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.31)$$

$$\text{con } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

3.5 INTERACCION DE LOS PIONES CON EL CAMPO ELECTROMAGNETICO

El lagrangiano de Skyrme puede describir mesones o bariones dependiendo de la representación que hagamos de la matriz U . Una vez conocido el lagrangiano con acoplamiento electromagnético podemos determinar la interacción de los fotones ya sea con los mesones o los bariones. Si partimos del lagrangiano (3.29) y usamos el modelo escalar lo que vamos a tener es la interacción entre los piones π y los fotones γ .

Escribimos a U como

$$U = \frac{2}{c} (\sigma + i \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) \quad (3.32)$$

con τ las matrices de Pauli, σ se debe pensar que está multiplicada por la matriz unidad 2×2 .

La condición $U^\dagger U = 1$ da lugar a $\sigma^2 + \pi^2 = c^2/4$, con lo cual c coincide con la constante de decaimiento del pión.

Como vamos a trabajar con el grupo $SU(2)$ la matriz Q es

$$Q = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} = 1/6 \mathbb{1} + 1/2 \tau^3 \quad (3.33)$$

Vamos a introducir el ansatz (3.32) en la ecuación (3.29). Los siguientes resultados nos serán de utilidad:

$$a) [Q, U^\dagger] = -[Q, U] = \frac{-i}{c} [\tau^3, \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}] = \frac{2}{c} (\pi^1 \tau^2 - \pi^2 \tau^1) \quad (3.34a)$$

$$b) \partial_\mu U^\dagger [Q, U] = \frac{2}{c^2} (i \partial_\mu \sigma [\vec{\tau}^3, \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}] + \partial_\mu \pi^i \tau^i [\tau^3, \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}]) \quad (3.34b)$$

$$c) \partial_\mu \pi^i \tau^i (\pi^1 \tau^2 - \pi^2 \tau^1) = -i \partial_\mu \pi^3 \pi^1 \tau^1 - i \partial_\mu \pi^3 \pi^2 \tau^2 + i (\partial_\mu \pi^2 \pi^2 + \partial_\mu \pi^1 \pi^1) \tau^3 + i (\partial_\mu \pi^2 \pi^1 - \partial_\mu \pi^1 \pi^2) \quad (3.34c)$$

$$d) (\pi^1 \tau^1 - \pi^2 \tau^1) \partial_\mu \pi^i \tau^i = +i \partial_\mu \pi^3 \pi^1 \tau^1 + i \partial_\mu \pi^3 \pi^2 \tau^2 - i (\partial_\mu \pi^2 \pi^2 + \partial_\mu \pi^1 \pi^1) \tau^3 + i (\partial_\mu \pi^2 \pi^1 - \partial_\mu \pi^1 \pi^2) \quad (3.34d)$$

Para j_μ^2 tenemos

$$\begin{aligned} j_\mu^2 &= \frac{c^2}{16} 2i \operatorname{tr} (\partial_\mu U [Q, U^\dagger]) \\ &= (\partial_\mu \pi^1 \pi^2 - \partial_\mu \pi^2 \pi^1) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Si definimos a π^+ y π^- como

$$\pi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi^1 \pm i \pi^2) \quad (3.36)$$

$$\pi^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi^1 - i\pi^2) \quad ; \quad (3.37)$$

llegamos a

$$j_\mu^2 = i (\partial_\mu \pi^+ \pi^- - \partial_\mu \pi^- \pi^+) \quad , \quad (3.38)$$

con lo cual

$$j_\mu^2 A^\mu = i q A^\mu (\partial_\mu \pi^+ \pi^- - \partial_\mu \pi^- \pi^+) \quad . \quad (3.39)$$

Los diagramas de Feynman los podemos obtener directamente del lagrangiano de interacción. Identificamos a cada línea externa con la función de onda correspondiente y al vértice con las factores de momento y las constantes.

Los estados π^+ , π^- y A_μ se expresan como ondas planas

$$\pi^+ = N^+ e^{ip^+ \cdot x} \quad , \quad \pi^- = N^- e^{ip^- \cdot x}$$

y

$$A_\mu = N^{\pm} \epsilon_\mu (e^{-ikx} + e^{ikx}) \quad (3.40)$$

Vamos a usar la convención de identificar a las partículas entrantes con signo negativo en la exponencial, mientras que las salientes con signo positivo.

Si sustituimos (3.41) en (3.39) obtenemos

$$j_\mu^2 A^\mu = i q A^\mu N^+ N^- (p_\mu^+ - p_\mu^-) e^{-i(p^+ + p^-) \cdot x} \quad , \quad (3.41)$$

el diagrama de Feynman que le corresponda a la interacción anterior se representa en la fig. 7

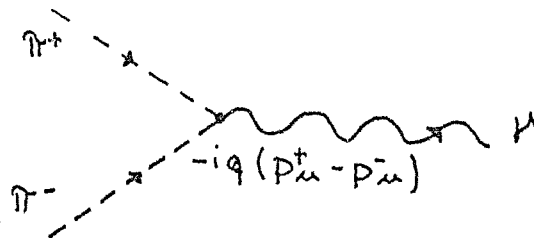


fig.7 Diagrama de Feynman para $j_\mu^2 A^\mu$.

Del diagrama podemos observar que la interacción que describe este término es la de dos piones con un fotón. Una de las posibles interpretaciones es la aniquilación de un pión positivo con uno negativo dando lugar a un fotón, pero también podría ser la desintegración de un fotón dando lugar a dos piones. Como el lagrangiano es invariante ante la transformación de conjugación de carga podemos sustituir al pión negativo por su antipartícula (pión positivo) y ver la interacción como la de un pión con un fotón. Si juntamos dos diagramas de este tipo tendríamos la dispersión electromagnética de dos piones.

Ahora vamos a calcular las interacciones provenientes de los otros términos del lagrangiano (3.29). Empezamos con L' , donde

$$i) \quad L' = -\frac{g^2}{16} q^2 A_\mu A^\mu \text{tr} ([Q, U^\dagger] [Q, U]) \quad (3.42)$$

sustituimos el ansatz (3.32) y usamos (3.34) para obtener

$$L' = \frac{1}{2} q^2 A_\mu A^\mu (\pi^{\dagger 2} + \pi^2) \quad , \quad (3.43)$$

escribiéndolo en términos de piones positivos y negativos llegamos a

$$L' = q^2 A_\mu A^\mu (\pi^+ \pi^-) \quad (3.44)$$

El digrama de Feynman para este caso es

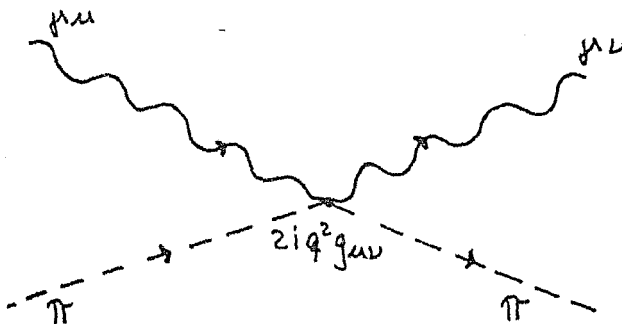


fig.8 Diagrama de Feynman para L'

La fig. 8 representa la interacción de dos piones con dos fotones. El factor de dos extra es debido a que al multiplicar los dos fotones en el lagrangiano hay dos términos posibles que representan a un fotón entrante con uno saliente. El diagrama anterior puede representar directamente un proceso de dispersión (efecto Compton), debido a lo cual a veces se la denomina como término de contacto. Sería de interés extender el presente modelo al caso del grupo SU(3), en cuyo caso podríamos esperar que en el diagrama de la fig. 8 uno de los piones fuera sustituido por algún otro mesón pseudoscalar. En particular sería de interés estudiar el decaimiento $\rho^0 \rightarrow \omega \gamma \gamma$.

El siguiente término proviene de la contribución de la corriente cuártica

$$ii) \quad j^4_{\mu} = \frac{1}{8e^2} \text{tr} \left((\partial_{\nu} U^{\dagger} \partial^{\nu} U \partial^{\mu} U^{\dagger} - \partial_{\nu} U^{\dagger} \partial^{\nu} U \partial^{\mu} U) [Q, U] + (\partial_{\nu} U^{\dagger} \partial^{\nu} U \partial^{\mu} U - \partial_{\nu} U \partial^{\nu} U^{\dagger} \partial^{\mu} U) [Q, U^{\dagger}] \right) \quad (3.11)$$

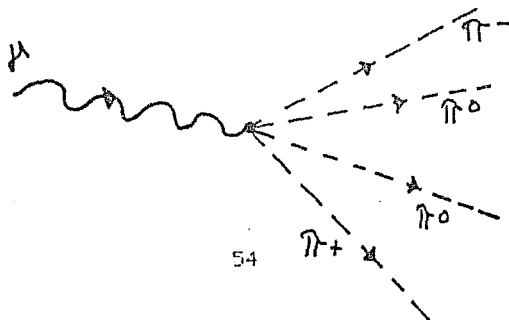
En la ecuación anterior tenemos que sustituir el ansatz (3.32) y utilizar (3.33). El resultado que obtenemos es

$$j^4_{\mu} = \frac{16}{e^2 \sigma^4} \left\{ \partial_{\mu} \sigma \partial^{\nu} \sigma (\partial_{\nu} \pi^1 \pi^2 - \partial_{\nu} \pi^2 \pi^1) - \partial_{\nu} \sigma \partial^{\nu} \sigma (\partial_{\mu} \pi^1 \pi^2 - \partial_{\mu} \pi^2 \pi^1) + 2i (\partial_{\mu} \pi^+ \partial^{\nu} \pi^- (\pi^2 \partial_{\nu} \pi^1 - \pi^1 \partial_{\nu} \pi^2) - \partial_{\nu} \pi^+ \partial^{\nu} \pi^- (\pi^2 \partial_{\mu} \pi^1 - \pi^1 \partial_{\mu} \pi^2)) \right\} \quad (3.45)$$

Sustituimos π^1, π^2 por π^+, π^- en la ecuación anterior y llegamos a

$$j^4_{\mu} = i \frac{16}{e^2 \sigma^4} \left\{ \partial_{\mu} \sigma \partial^{\nu} \sigma (\partial_{\nu} \pi^- \pi^+ - \partial_{\nu} \pi^+ \pi^-) - \partial_{\nu} \sigma \partial^{\nu} \sigma (\partial_{\mu} \pi^- \pi^+ - \partial_{\mu} \pi^+ \pi^-) + 2i (\partial_{\mu} \pi^+ \partial^{\nu} \pi^- (\partial_{\nu} \pi^- \pi^+ - \partial_{\nu} \pi^+ \pi^-) - \partial_{\nu} \pi^+ \partial^{\nu} \pi^- (\partial^{\mu} \pi^- \pi^+ - \partial^{\mu} \pi^+ \pi^-)) \right\} \quad (3.46)$$

Podemos escribir $\partial_{\mu} \pi^+ \partial^{\nu} \pi^-$ como $\partial_{\mu} \pi^+ \partial^{\nu} \pi^+ + 2 \partial_{\mu} \pi^+ \partial^{\nu} \pi^-$ por lo que identificamos los siguientes diagramas (ver fig. 9):



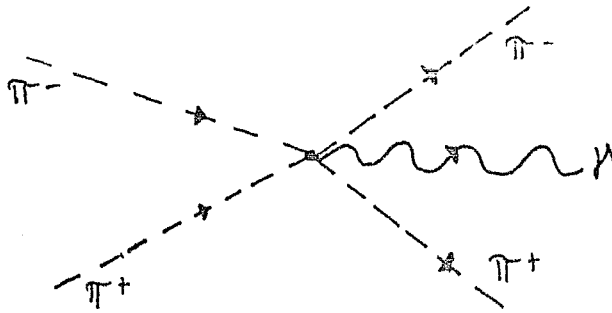


fig.9 Diagramas de Feynman para $j_{\mu}^{\pm} A^{\mu}$.

En todos los diagramas anteriores tenemos cuatro mesones y un fotón. En particular hay diagramas que representan la dispersión radiativa $\pi\pi \rightarrow \pi\pi\gamma$. Además notemos que también se tienen piones neutros. El factor que aparece en el vértice cuártico $j_{\mu}^{\pm} A^{\mu}$ (cuatro piones y un fotón) es menor que el que aparece en el vértice cuadrático $j_{\mu}^{\pm} A^{\mu}$ (dos piones y un fotón) en un término del orden $16/e^2 = .5$. Esto nos dice en particular que la sección para la reacción $\gamma \rightarrow 4\pi$ es aparte del término proveniente del espacio fase .25 veces menor que la sección para la reacción $\gamma \rightarrow 2\pi$. Nuevamente será de interés futuro considerar la extensión al grupo SU(3), en cuyo caso podríamos calcular la reacción $\eta^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\gamma$.

Por último calculamos los diagramas para el término cuártico

$$\text{iii) } L = \frac{1}{16e^2} A_{\nu} A^{\nu} q^2 \text{tr} (\partial^{\mu} U^{\dagger} [Q, U] ([Q, U]^{\dagger} \partial_{\mu} U - \partial_{\mu} U^{\dagger} [Q, U])) \quad (3.47)$$

Introducimos el ansatz (3.32) en (3.47), obtenemos

$$L = \frac{4}{e^2 c^4} q^2 A_{\nu} A^{\nu} (\pi^1{}^2 + \pi^2{}^2) (\partial_{\mu} \pi^3 \partial^{\mu} \pi^3 + \partial_{\mu} \sigma \partial^{\mu} \sigma) + (\partial_{\mu} \pi^3 \pi^3 + \partial_{\mu} \pi^1 \pi^1)^2 \quad (3.48)$$

Ahora sustituimos en la ecuación anterior los piones π^1, π^2 por π^+ y π^-

$$L = \frac{4}{e^2 c^4} q^2 A_{\nu} A^{\nu} (2\pi^+ \pi^- (\partial_{\mu} \pi^3 \partial^{\mu} \pi^3 + \partial_{\mu} \sigma \partial^{\mu} \sigma) + \partial_{\mu} (\pi^+ \pi^-) \partial^{\mu} (\pi^+ \pi^-)) \quad (3.49)$$

Los diagramas de Feynman correspondientes son

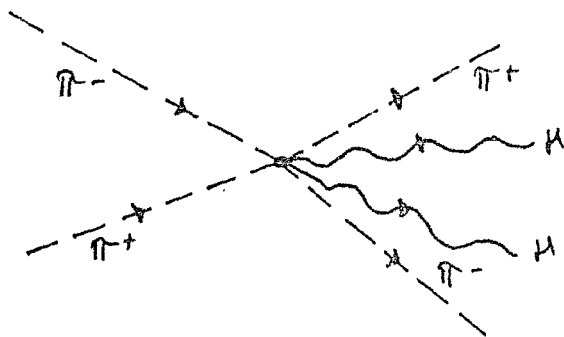


fig.10 Diagramas de Feynman

La interacción es de nuevo de contacto, pero ahora hay seis partículas cuatro mesones y dos fotones.

Los resultados obtenidos para los términos cuadrados (3.39 y (3.45) son los mismo que se obtienen utilizando el lagrangiano de Klein-Gordon acoplado al campo electromagnético. El hecho de reproducir correctamente los resultados nos indica que el acoplamiento realizado es el adecuado. Nuestro siguiente paso es obtener la interacción electromagnética con los bariones, por lo cual debemos introducir el ansatz de Skyrme en el lagrangiano. Hasta aquí no hemos cuantizado la teoría, hemos trabajado solo con un modelo clásico. Para generar a los bariones nos vemos obligados a considerar la cuantización del modelo de Skyrme.

3.6 EL SKYRMION EN ROTACION

Con la incorporación del ansatz de skyrme en el lagrangiano (2.54) lo que obtuvimos fue un skyrmión estatico. Ahora estamos interesados en generar soluciones alrededor de la solución estática mediante una transformación del tipo $U \rightarrow AUA^{-1}$, con A una matriz del grupo $SU(2)$. Como veremos mas adelante esta transformación nos genera una rotación global del skyrmión y por lo tanto estas variables vienen a ser unas variables colectivas que nos representan el movimiento rotacional del skyrmión. Con la finalidad de obtener un skyrmión con cierta movilidad dejaremos que estas variables dependan del tiempo, ésto a su vez nos permitirá cuantizar el movimiento rotacional del skyrmión.

Por otro lado tenemos que para el ansatz de Skyrme una rotación global de isoespín $U \rightarrow A(t)UA^{-1}(t)$ nos va a generar al mismo tiempo una rotación en el espacio real,

$$U \rightarrow AUA^{-1} = A(\cos F + i \tau_3 \sin F) A^{-1} \\ = \cos F + iA \tau_3 A^{-1} \sin F \quad (3.50)$$

El término $A\tau_3 A^{-1}$ representa una rotación en el espacio real. Es debido a este resultado que vamos a tener una fuerte correlación entre el isoespín y el espín. De hecho lo que se va a tener es que

$$J^3 = T^3 \quad (3.51)$$

por lo que los eigenvalores de J^3 y T^3 serán los mismos. Debido a que la transformación (3.50) nos genera tanto espín como isoespín va a ser factible identificar a los skyrmiones como bariones. Quisiéramos enfatizar que este resultado es característico del ansatz de Skyrme.

A continuación incorporaremos la matriz $A(t)$ en el lagrangiano de Skyrme (2.54) mediante la transformación

$$U \rightarrow A(t)UA^{\dagger}(t) \quad (3.52)$$

La transformación de las componentes espaciales y temporal de l_{μ} es:

$$l_1 \rightarrow A l_1 A^{\dagger} \quad (3.53)$$

$$l_0 \rightarrow A U^{\dagger} A^{\dagger} \partial_0 A U A^{\dagger} + A \partial_0 A^{\dagger} \quad (3.54)$$

Dado que A es una matriz del grupo $SU(2)$ la podemos escribir en la forma

$$A = a^0 + i \tau \cdot \bar{a} \quad (3.55)$$

$$\text{con } a^{02} + a^2 = 1, \bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

Los términos que no contienen derivadas temporales quedan invariantes y contribuirán a la mass del skyrmión calculada en (2.72). Por lo tanto solo tenemos que determinar los que si tengan derivadas temporales.

Primero consideramos la contribución del término cuártico

$$i) L^2 = - \frac{c^2}{16} \text{tr} (l_0 l_0) \quad (3.56)$$

Las siguientes definiciones y conmutadores nos serán de utilidad:

$$a) U = \alpha + i\tau \cdot \beta \quad \text{con } \alpha = \cos F \quad \text{y} \quad \beta = r \hat{\text{sen}} F \quad (3.57a)$$

$$b) A^\dagger \partial_0 A = i\tau \cdot E \quad \text{con } E = a^0 \partial_0 \bar{a} - \bar{a} \partial_0 a^0 + \bar{a} \times \partial_0 a^0 \quad (3.57b)$$

$$c) A \partial_0 A^\dagger = i\tau \cdot F \quad \text{con } F = \bar{a} \partial_0 a^0 - a^0 \partial_0 \bar{a} + \bar{a} \times \partial_0 a^0 \quad (3.57c)$$

$$d) [U^\dagger, A^\dagger \partial_0 A] = - [U, A \partial_0 A] = 2i \tau \cdot D \quad \text{con } D = \beta \times E \quad (3.57d)$$

Sustituimos la transformación (3.52) en (3.55) y obtenemos

$$\text{tr}(l_0 l_0) = -2 \{ \text{tr}(\partial_0 A^\dagger \partial_0 A) + \text{tr}(U^\dagger A^\dagger \partial_0 A U A \partial_0 A) \} \quad (3.58)$$

Si utilizamos (3.37a) el segundo término de la ecuación anterior llegamos a que la contribución del término cuadrático es

$$L^2 = \frac{c^2}{16} \text{tr}(l_1 l_1) + \frac{c^2}{4} \text{tr}(D \cdot D) \quad (3.59)$$

Para evaluar el segundo término de la ecuación anterior usamos la identidad

$$D \cdot D = (\beta \times E) \cdot (\beta \times E) = \beta^2 E^2 - (\beta \cdot E)^2 \quad (3.60)$$

y al hacer la integración angular tenemos que los términos impares en β se van a anular. Además

$$\int d\Omega \beta^2 = 4\pi \text{sen}^2 F \quad \beta^2 = \text{sen}^2 F(r) \quad (3.61)$$

$$\int d\Omega \beta_i^2 = \frac{4\pi}{3} \text{sen}^2 F \quad (3.62)$$

y por lo tanto

$$\int d\Omega D \cdot D = \frac{8\pi}{3} \text{sen}^2 F E^2 \quad (3.63)$$

$$\text{tr}(E^2) = \text{tr}(\partial_0 A^\dagger \partial_0 A) \quad (3.64)$$

Juntado los resultados de las ecuaciones (3.59) y (3.63) llegamos a

$$L^2 = \frac{c^2}{16} \text{tr}(l_1 l_1) + \frac{2\pi c^2}{3} \text{tr}(\partial_0 A^\dagger \partial_0 A) \quad (3.65)$$

Ahora calcularemos la contribución del término cuártico

$$ii) L^4 = \frac{1}{32e^2} \text{tr}([l_\mu, l_\nu]^2) \quad (2.44)$$

Otra vez solo tomaremos en cuenta los términos con derivadas temporales ya que los otros términos contribuyen únicamente a la masa. Estos términos están dados por

$$L'^4 = \frac{1}{32e^2} 4 \operatorname{tr} (\partial_0 U^+ \partial_1 U \{ \partial_1 U^+ \partial_0 U - \partial_0 U \partial_1 U^+ \}) \quad (3.66)$$

Introducimos la matriz A como en el caso anterior y encontramos que

$$\partial_0 U^+ \partial_1 U = A[U^+, \partial_0 A^+ A] \partial_1 U A^+ \quad (3.67)$$

$$\partial_1 U^+ \partial_0 U = A \partial_1 U^+ [A^+ \partial_0 A, U] A^+ \quad (3.68)$$

Usamos las eos. (3.57) para expresar la resta de las ecuaciones anteriores como

$$\partial_1 U^+ \partial_0 U - \partial_0 U^+ \partial_1 U = 4iA \{ \partial_1 \alpha \cdot r \cdot D + r \cdot (\partial_1 \beta \times D) \} A^+ \quad (3.69)$$

Por lo tanto el lagrangiano (3.66) con la incorporación de las variables colectivas es

$$L'^4 = \frac{1}{e^2} \operatorname{tr} (\partial_1 \alpha \partial_1 \alpha \cdot D \cdot D + (D \times \partial_1 \beta) \cdot (D \times \partial_1 \beta)) \quad (3.70)$$

Para calcular la expresión anterior usamos la identidad

$$(D \times \partial_1 \beta)^2 = D^2 (\partial_1 \beta)^2 - (D \cdot \partial_1 \beta)^2 \quad (3.71)$$

Tenemos que

$$a) (D \cdot \partial_1 \beta)^2 = (D \cdot (\partial_1 x \operatorname{sen} F + x \partial_1 \operatorname{sen} F))^2 \quad (3.72)$$

El segundo término de (3.72) se anulará ya que D es perpendicular a x. Y como

$$\partial_1 x_j = \frac{1}{r} (\delta_{ij} - x_i x_j) \quad (3.73)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} (D \cdot \partial_1 \beta)^2 &= D_j D_k (\delta_{ij} - x_i x_j) (\delta_{ki} - x_k x_i) \frac{\operatorname{sen}^2 F}{r^2} \\ &= D \cdot D \frac{\operatorname{sen}^2 F}{r^2} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Los otros términos son cero por ser D perpendicular a x.

b) Sumando el término $D^2 (\partial_1 \beta)^2$ con el primero del lagrangiano (3.70), tenemos

$$(\partial_1 \alpha \partial_1 \alpha + \partial_1 \beta \partial_1 \beta) D^2 = (F'^2 \operatorname{sen}^2 F + F'^2 \operatorname{cos}^2 F + \frac{2 \operatorname{sen}^2 F}{r^2}) D^2 \quad (3.75)$$

Haciendo la integración angular de los términos dados en las eos. (3.74) y (3.75) llegamos a que la contribución del lagrangiano

cuártico es.

$$L^4 = -M_2 + \frac{8\pi}{3e^2} \text{sen}^2 F (F'^2 + \frac{\text{sen}^2 F}{r^2}) \text{tr} (\partial_0 A^+ \partial_0 A) \quad (3.76)$$

M_2 es el término de masa y no contiene derivadas temporales.

Una vez hecha la integración sobre todo el espacio el lagrangiano de Skyrme con las variables colectivas es

$$L = -M + \lambda \text{tr} (\partial_0 A^+ \partial_0 A) \quad (3.77)$$

M corresponde a la masa del skyrmión en reposo y está dada por la ec.(2.72) y $\lambda = \frac{2}{3} \pi (1/2^3) \Lambda$ con

$$\Lambda = \int x^2 \text{sen}^2 F (1 + 4(F'^2 + \frac{\text{sen}^2 F}{x^2})) dx \quad (3.78)$$

Por otro lado notamos que

$$\text{tr} (\partial_0 A^+ \partial_0 A) = \text{tr} (E^2) = \text{tr} (F^2) \quad (3.79)$$

$$= 2 \sum (\dot{a}_i)^2 \quad (3.80)$$

El lagrangiano de Skyrme con las variables colectivas se puede escribir en la forma

$$L = -M + 2\lambda \sum (\dot{a}_i)^2 \quad (3.81)$$

Calculamos el momento conjugado de las variables colectivas de la manera usual

$$\pi_i = \delta L / \delta \dot{a}_i = 4\lambda \dot{a}_i \quad (3.82)$$

Por lo tanto el hamiltoniano es

$$H = \pi_i \dot{a}_i - L = M + 2\lambda \dot{a}_i \dot{a}_i \quad (3.83)$$

$$= M + \frac{1}{8\lambda} \sum \pi_i^2 \quad (3.84)$$

Usamos el procedimiento usual de cuantización $\pi_i = -i\delta / \delta a_i$. Con esta identificación el hamiltoniano es

$$H = M + \frac{1}{8\lambda} \sum \frac{(-\partial^2)}{\partial a_i^2} \quad (3.85)$$

con la restricción $\sum a_i^2 = 1$.

Como habíamos visto anteriormente la introducción de las variables colectivas nos genera una rotación del skyrmión. Por lo tanto la energía del skyrmión va a ser la suma de la energía encontrada en el capítulo anterior (ec.2.72) y la energía de rotación. Ahora bien la energía rotacional para un cuerpo es

$$E = \frac{1}{2} I \Omega^2 = \frac{1}{2I} J^2 \quad (3.86)$$

con I el momento de inercia, Ω la velocidad angular y J el momento angular.

Si identificamos al segundo término de la ec.(3.84) como la energía cinética rotacional y a λ como el momento de inercia del skyrmión tenemos que el cuadrado del momento angular J^2 del skyrmión es

$$\begin{aligned} J^2 &= \frac{1}{4} \sum \pi_i^2 \\ &= \frac{1}{4} E^2 \end{aligned} \quad (3.87)$$

con E definida en la ecuación (3.57b). Cuantizado a E de la manera usual obtenemos que el operador de momento angular está dado por

$$J_k = \frac{1}{2} E_k = \frac{1}{2} \left(a_k \frac{\partial}{\partial a_0} - a_0 \frac{\partial}{\partial a_k} - \epsilon_{klm} a_l \frac{\partial}{\partial a_m} \right) \quad (3.88)$$

Esta expresión del operador de momento angular es la misma que se obtiene si usamos el teorema de Noether para calcular la corriente conservada y después la cuantizamos. Por otro lado sabemos que la introducción de las variables colectivas también nos generarán una rotación del skyrmión en el espacio del isospín. El operador de isospín está dado por

$$I^2 = \frac{1}{4} F^2 \quad (3.89)$$

$$I_k = \frac{1}{2} F_k = \frac{1}{2} \left(a_0 \frac{\partial}{\partial a_k} - a_k \frac{\partial}{\partial a_0} - \epsilon_{klm} a_l \frac{\partial}{\partial a_m} \right) \quad (3.90)$$

Para encontrar los estados con diferentes números debemos determinar las funciones propias del hamiltoniano (ec.3.84). Las funciones que presentaremos a continuación fueron encontradas por Witten¹, éstas son:

¹ Witten E., Nucl.Phys. B 223 (1983) 422

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad |p\uparrow\rangle &= \frac{1}{\pi} (a_1 + i a_2) & \text{ii)} \quad |p\downarrow\rangle &= -\frac{i}{\pi} (a_0 - i a_3) \\
\text{iii)} \quad |n\uparrow\rangle &= \frac{i}{\pi} (a_0 + i a_3) & \text{iv)} \quad |n\downarrow\rangle &= \frac{1}{\pi} (a_1 - i a_2) \\
\text{v)} \quad |\Delta^{++}, s_z=3/2\rangle &= \frac{2}{\pi} (a_1 + i a_2)^3 & & (3.91) \\
\text{vi)} \quad |\Delta^+, s_z=1/2\rangle &= -\frac{2}{\pi} (a_1 + i a_2) (1 - 3(a_0^2 + a_3^2))
\end{aligned}$$

Las primeras dos funciones de onda representan al protón con las dos posibles proyecciones de espín. Las funciones iii y iv corresponden al neutrón mientras que la v y vi a la partícula delta. Podemos verificar que efectivamente estas funciones son eigenfunciones del hamiltoniano y que están ortonormalizadas.

3.7 MASA DEL NUCLEÓN Y DE LA PARTÍCULA DELTA

Vamos a calcular la masa del nucleón y de la partícula delta. Tenemos que la energía en reposo de estas partículas está dada por los valores propios del hamiltoniano (3.84), es decir $E = M + (1/2\lambda)J(J+1)$ por lo que la masa del nucleón y de la partícula delta es

$$M_n = M + (1/8\lambda)3 \qquad M_\Delta = M + (1/8\lambda)15 \qquad (3.92)$$

Anteriormente habíamos identificado a la constante c con la constante del decaimiento del pión $c = 186 \text{ MeV}$, por lo que solo nos faltaría determinar la constante adimensional e . En lugar de proceder de esta manera vamos a determinar ambas constantes de forma tal que el modelo de Skyrme reproduzca los valores de las masas del nucleón y de la partícula delta. Este procedimiento resultó ser el más adecuado para los cálculos posteriores. Primeramente necesitamos calcular la energía del skyrmión dada en la ec.(2.64). La función radial F está determinada por una ecuación diferencial altamente no lineal (ec.2.74). Para resolver esta ecuación vamos a utilizar un método variacional que consiste en proponer un ansatz para la función radial que cumpla con el comportamiento asintótico de la función F .

El ansatz¹ es

$$\text{sen}F = \frac{ar^2}{r^2 + b^2} \quad (3.93)$$

Con a, b dos constantes arbitrarias. Si imponemos que el $\text{sen}F$ tome como valor máximo 1 entonces el valor de la constante a debe de ser $2b$ ($a=2b$). La constante b queda determinada al exigir que la energía (ec.2.72) tome su valor mínimo. Con este ansatz se va a seguir cumpliendo el teorema del virial. El valor que encontramos es

$$M = 40.54 \text{ } c/e \quad (3.94)$$

E. Witten² utilizando un método numérico obtiene un valor de $M=36.5c/e$. Quisieramos mencionar que la utilización de métodos numéricos debe dar un resultado más preciso pero la simplicidad del método variacional lo hace sumamente atractivo. La diferencia entre ambos resultados es aproximadamente del 10%. Aunque esta diferencia es alta se va a tener para los cálculos posteriores una concordancia del 99%. Ahora nos falta calcular Λ (ec.3.72). Con nuestro ansatz obtenemos

$$\Lambda = 51.08 \quad (3.95)$$

($\Lambda = 50.9$ para Witten). Sustituyendo estos valores en las expresiones para las masas (3.92) con $M = 939 \text{ MeV}$ y $M_{\Delta} = 1232 \text{ MeV}$, encontramos que los valores de las constantes a, c son

$$c = 119.63 \text{ MeV} \quad a = 5.59 \quad (3.96)$$

$$e^3 c = 20897.09 \text{ MeV}$$

La última cantidad es útil por que es la que aparecerá en los cálculos posteriores. Los valores que obtiene Witten son $c = 129 \text{ MeV}$, $a = 5.45$ y $e^3 c = 20882 \text{ MeV}$. Con este modelo predicamos una constante de decaimiento del pión que esté 30% por abajo de su valor experimental de 186 MeV .

¹ Ver apéndice D.

² Nuclear Phy. B228 (1983) 557.

3.8 CALCULO DE LA CORRIENTE ELECTROMAGNETICA CON LAS VARIABLES COLECTIVAS

Para calcular cualquier fenómeno electromagnético de los skyrmiones debemos conocer primariamente su corriente electromagnética. Esta ya la habíamos determinado anteriormente pero ahora debemos incorporar las variables colectivas. La corriente electromagnética está dada por

$$\mathbf{J}_\mu = \mathbf{j}_\mu^2 + \mathbf{j}_\mu^4 \quad (3.12)$$

con
$$\mathbf{j}_\mu^2 = i \frac{e^2}{8} \text{tr} \left(\partial_\mu U [Q, U^\dagger] \right) = i \frac{e^2}{8} \text{tr} \left([U, \partial_\mu U] Q \right) \quad (3.8)$$

y
$$\mathbf{j}_\mu^4 = i \frac{1}{32\pi^2} \text{tr} \left\{ \left(-\partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U \partial^\nu U^\dagger - \partial_\nu U^\dagger \partial^\nu U \partial_\mu U^\dagger + 2\partial_\nu U^\dagger \partial_\mu U \partial^\nu U^\dagger \right) [Q, U] \right\} \quad (3.9)$$

Dado que utilizaremos la norma de radiación para los fotones ($A^0 = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) solo necesitaremos determinar las componentes espaciales de la corriente. Sustituimos en la ecuación anterior U por $A(t)UA^{-1}(t)$

a) Para la corriente cuadrática tenemos

$$\mathbf{j}_1^2 = i \frac{e^2}{8} \text{tr} \left([U^\dagger, \partial_1 U] A^\dagger Q A \right) \quad (3.97)$$

y
$$A^\dagger Q A = 1/6 + (a_0 a_2 + a_3 a_1) r^1 + (a_2 a_3 - a_0 a_1) r^2 + (1/2 - a_1^2 - a_2^2) r^3 \quad (3.98)$$

Si sustituimos este resultado en la expresión (3.97) e introducimos el ansatz de Skyrme llegamos a que la corriente cuadrática con la incorporación de las variables colectivas es

$$\mathbf{j}_1^2 = - \frac{e^2}{2} \epsilon_{mji} x_j \frac{\sin^2 F}{r} P_m(a) \quad (3.99)$$

con

$$P_m(a) = \delta_{1m} (a_0 a_2 + a_3 a_1) + \delta_{2m} (a_2 a_3 - a_0 a_1) + \delta_{3m} (1/2 - a_1^2 - a_2^2) \quad (3.100)$$

b) La corriente cuártica con la introducción de las variables colectivas y el ansatz de Skyrme es

$$\mathbf{j}_1^4 = - \frac{2}{\pi^2} \epsilon_{mji} x_j \frac{\sin^2 F}{r} \left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) P_m(a) \quad (3.101)$$

En la expresión de la corriente cuantificamos los términos que fueran cuadráticos en las derivadas temporales. Esto es válido en el límite en el que el skyrmión rota lentamente. Por otro lado notamos que la expresión para ambos términos de la corriente es similar. Solo se diferencian en la parte radial por lo que la corriente electromagnética para los skyrmiones queda dada por

$$J_i = - \frac{1}{2} \epsilon_{mji} \dot{x}_j R(r) P_m(a) \quad (3.102)$$

con P_m dada por la ec.(3.100) y R por

$$R(r) = \frac{\sin^2 F}{r} \left(a^2 + \frac{4}{a^2} (F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2}) \right) \quad (3.103)$$

3.9 DECAIMIENTO DE LA PARTICULA DELTA EN UN PROTON Y UN FOTON

Para determinar el decaimiento de la partícula delta en un protón y un fotón vamos a calcular el elemento de la matriz de transición

$$M_{if} = \int d^3x \langle \Psi_f | H_{int} | \Psi_i \rangle \quad (3.104)$$

Debido a que el fenómeno se lleva a cabo en un solo vértice (a primer orden en teoría de perturbaciones) el hamiltoniano de interacción está dado solo por el término que contiene a la corriente electromagnética del lagrangiano de Skyrme. Los otros términos que aparecen en el lagrangiano son de órdenes superiores. Las funciones de onda inicial y final corresponden a la partícula delta y protón respectivamente. Estas están dadas por (3.91)

$$|\Psi_i\rangle = |\Delta\rangle = \frac{2}{\pi} (a_1 + ia_2) (1 - 2(a_0^2 + a_3^2))$$

y

$$|\Psi_f\rangle = |P\rangle = \frac{1}{\pi} (a_0 + ia_3)$$

El hamiltoniano de interacción es

$$H_{int} = - J_\mu A^\mu \quad (3.105)$$

con J_μ dado por la ec.(3.102)

Las funciones de onda del protón y de la delta no dependen de las

coordenadas espaciales, por lo que la integración espacial actúa solo sobre el hamiltoniano. El campo electromagnético A_μ lo escribimos como

$$A_\mu = N \epsilon_\mu (e^{-ikx} + e^{ikx}) \quad (3.106)$$

con N la constante de normalización y ϵ el vector de polarización del fotón. Como solo vamos a tener un fotón saliente el segundo término de la ecuación anterior no va a contribuir. Expresamos la ec.(3.106) en términos de los armónicos esféricos,

$$e^{-ikx} = e^{-i\omega t} e^{ikx} = e^{-i\omega t} 4\pi \sum_l \frac{1}{l} j_l(kr) \sum_m Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi') \quad (3.107)$$

con $j_l(kr)$ las funciones de Bessel esféricas, Y_{lm} los armónicos esféricos. Las coordenadas primadas se refieren a la dirección del momento del fotón k mientras que las no primadas a la posición. Para hacer integración angular expresamos al vector unitario \hat{x} también en términos de los armónicos esféricos

$$\hat{x} = \begin{cases} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{cases} = \begin{cases} (2\pi/3)^{1/2} (Y_{1-1} - Y_{11}) \\ i(2\pi/3)^{1/2} (Y_{11} + Y_{1-1}) \\ (4\pi/3)^{1/2} Y_{10} \end{cases} \quad (3.108)$$

La integración angular de (3.105) es

$$\int d\Omega H = -\frac{q}{2} \epsilon_{mjl} R(r) P_m(a) N \epsilon_j e^{-i\omega t} 4\pi \sum_l \frac{1}{l} j_l(kr) \sum_m Y(\theta', \phi') \int d\Omega Y \hat{x}_j \quad (3.109)$$

Si usamos la propiedad de ortogonalización de los armónicos esféricos obtenemos

$$\int d\Omega H = -\frac{q}{2} \epsilon_{mjl} R(r) P_m(a) N \epsilon_j e^{-i\omega t} 4\pi \frac{1}{l} j_l(kr) k_j \quad (3.110)$$

El vector k es un vector unitario en la dirección del momento del fotón. Notamos que ya no hay sumatoria del índice l . Y como $l = 1$ vamos a tener que la radiación va a ser dipolar. Como el cálculo lo estamos realizando para energías bajas la longitud de onda del fotón va a ser mucho mayor que el radio del skyrmión. Por lo tanto

$$kr \ll 1 \quad (3.111)$$

y la función de Bessel se puede aproximar por

$$j_1(kr) = \frac{kr}{3} \quad (3.112)$$

Con esta aproximación la integral sobre el radio es

$$\begin{aligned} \int r^2 dr R(r) j_1(kr) &= \int r^2 \frac{\sin^2 F}{r} \left(c^2 + \frac{4}{a^2} (F^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2}) \right) \frac{kr}{3} dr \\ &= \frac{k}{3a^2 c} \Lambda \end{aligned} \quad (3.113)$$

con Λ dada por la ec. (2.78), es decir $\Lambda = 51.08$.

Con los resultados obtenidos en (3.110) y (3.113) el elemento de la matriz de transición es

$$M_{if} = -\frac{q}{6} i^4 \pi N e^{-i\omega t} \epsilon_{mji} k_j \epsilon_i k \frac{1}{a^2 c} \Lambda \langle p^+ | P_m(a) | \Delta \rangle \quad (3.114)$$

Solo nos falta determinar $\langle p^+ | P_m(a) | \Delta \rangle$. Esta se debe de interpretar como el valor esperado de la transición de la partícula deelta a un protón en el espacio de las variables colectivas.

$$\begin{aligned} \langle p | P_m | \Delta \rangle &= \int d^4 a \Psi_f^*(a) P_m(a) \Psi_i(a) \\ &= -\frac{2}{\pi^2} \int d^4 a (a_1 - ia_2) P_m(a) (a_1 + ia_2) (1 - 3(a_3^2 + a_4^2)) \end{aligned} \quad (3.115)$$

Utilizaremos los siguientes resultados para integrar la ec. (3.115)

$$\begin{aligned} \int d^4 a a_i &= 0 & \int d^4 a a_i^2 a_j^2 a_k^2 &= \pi^2/96 \\ \int d^4 a a_i^2 &= \pi^2/2 & \int d^4 a a_i^2 a_j^4 &= \pi^2/32 \\ \int d^4 a a_i^2 a_j^2 &= \pi^2/12 & \int d^4 a a_i^6 &= 5\pi^2/32 \\ \int d^4 a a_i^4 &= \pi^2/4 \end{aligned} \quad (3.116)$$

con $i \neq j \neq k$.

Estos resultados los obtuvimos cambiando de las variables a 's a la generalización de las coordenadas esféricas. Las variables a 's quedan expresados por (para el radio igual a la unidad)

$$\begin{aligned} a_2 &= \cos \alpha \\ a_1 &= \sin \alpha \cos \beta \end{aligned} \quad (3.117)$$

$$a_2 = \text{sen}\alpha \text{sen}\beta \cos\gamma$$

$$a_3 = \text{sen}\alpha \text{sen}\beta \text{sen}\gamma$$

El elemento de volumen es $d^3a = \text{sen}^2\alpha \text{sen}\beta \, d\alpha d\beta d\gamma$. Los ángulos α, β van de cero a π y γ de cero a 2π .

Usando los resultados anteriores obtenamos que el valor esperado (3.115) es

$$\langle p_f | P(a) | \Delta \rangle = -\delta_{3m} \sqrt{2}/6 \quad (3.118)$$

Sustituyendolo en la ec (3.114) tenemos que el elemento de matriz de la transición de una partícula delta a un protón con la emisión de un fotón es

$$M_{fi} = q \frac{\sqrt{2}}{9} \frac{\pi}{e^2 c} \Lambda i N e^{-i\omega t} k_\alpha \epsilon_{3ji} k_j \epsilon_i \quad (3.119)$$

Por otro lado el campo magnético B producido por el potencial electromagnético es

$$B = \nabla \times A$$

$$B_m = \epsilon_{mji} \partial_j A_i \quad (3.120)$$

Calculamos la derivada espacial del potencial electromagnético

$$\partial_j A_i = N \epsilon_i (i k k_j) e^{-i\omega t} e^{i k \cdot x} \quad (3.121)$$

evaluamos en $x = 0$ y sustituimos el resultado en la ec. (3.120). Por lo tanto tenemos que el campo magnético está dado por

$$B_m = i N e^{-i\omega t} k_\alpha \epsilon_{mji} k_j \epsilon_i \quad (3.122)$$

Identificamos esta expresión en la ecuación (3.119), y llegamos a que el elemento de la matriz de transición es

$$M_{fi} = -\mu \cdot B \quad (3.123)$$

con μ el momento dipolar magnético asociado a la transición delta-protón. Este es

$$\mu = (0, 0, -\mu_3)$$

con

$$\mu_3 = \frac{\sqrt{2}}{9} \frac{\pi}{e^2 c} \Lambda \quad (3.124)$$

Para convencernos que efectivamente μ es el momento dipolar magnético y no eléctrico notamos que el campo eléctrico es perpendicular al plano formado por el momento dipolar y la dirección de propagación del fotón. Esta situación es la que diferencia un momento dipolar de otro.

El valor numérico que obtenemos del momento dipolar magnético en unidades del magnetón del protón ($\mu_p = q/2m_p$) es

$$\frac{\mu}{\mu_p} = \frac{\sqrt{2} \cdot 4\pi \cdot 2m_p}{36 \pi^2 \cdot c} \cdot \Lambda$$

$$\mu_{\Delta p \uparrow} = 2.27 \quad (3.125)$$

Este valor del momento dipolar magnético es 30% menor al medido experimentalmente $\mu_{\Delta p} = 3.3$. Según los datos experimentales la radiación electromagnética del decaimiento de la partícula delta en un protón es del tipo dipolar magnético aunque no se excluye la posibilidad de una pequeña contribución del momento cuadrupolar eléctrico. En nuestro cálculo obtuvimos que la radiación era exclusivamente dipolar magnético pero debemos recordar que despreciamos los términos cuadráticos en las derivadas temporales. Estos términos podrían dar una contribución al momento cuadrupolar eléctrico. De cualquier forma esperaríamos que fuera muy pequeño en comparación con el momento dipolar.

3.10 EFECTO COMPTON

A la interacción entre una partícula y un fotón dando lugar a una partícula del mismo tipo y un fotón se le conoce con el nombre de efecto Compton. Para calcular el efecto Compton del protón con el modelo de Skyrme necesitamos determinar el elemento de la matriz de dispersión a segundo orden con estado inicial y final de un fotón y un protón. Esto se lleva a cabo iterando dos veces el término del lagrangiano que contiene a la corriente electromagnética y luego sumándole el término cuadrático del lagrangiano en el campo electromagnético A_μ . El primero de estos términos es¹

$$S_{fi}^2 = -i \int d^4x d^4y \langle f | T (H_\pm(x,t) H_\pm(y,t')) | i \rangle$$

con
$$H_\pm = e^{iH^0 t} H_\pm^0 e^{-iH^0 t} \quad (3.126)$$

la densidad hamiltoniana de interacción en la representación de interacción y H^0 el hamiltoniano de la partícula libre. Para H^0 se tiene que

$$H^0 | n \rangle = E_n | n \rangle \quad (3.127)$$

La densidad hamiltoniana de interacción H_\pm^0 en la representación de Schrodinger está dada, en este caso, por

$$H_\pm^0 = -L_\pm = -q \int J_\mu A^\mu$$

siendo J_μ la corriente electromagnética (cc.3.12).

Los estados iniciales y finales de los bariones en la ec. (3.126) son $|i\rangle$, $|f\rangle$ respectivamente, y la letra T representa al operador cronológico. Este operador ordena a los términos de tal forma que el que esté a la izquierda opere a un tiempo posterior. Es decir

$$T (F(t^1) K(t^2)) = \begin{cases} F(t^1) K(t^2) & \text{si } t^1 > t^2 \\ K(t^2) F(t^1) & \text{si } t^2 > t^1 \end{cases} \quad (3.128)$$

Para el término del lagrangiano de Skyrme a segundo orden en la constante de acoplamiento el elemento de la matriz de dispersión es

$$S_{fi}^2 = -i \int d^4x \langle f | V | i \rangle \quad (3.129)$$

con
$$V = e^{iH^0 t} V^0 e^{-iH^0 t}$$

El hamiltoniano de interacción V^i está dado por

$$V^i = -q^2 A_\nu A^\mu (\delta_\mu^\nu (N - D) + M_\mu^\nu) \quad (3.130)$$

con D, M, N dados en las ec. (3.23), (3.27) y (3.28) respectivamente.

Para calcular la ec. (3.126) reescribimos al operador cronológico de la siguiente forma

$$S_{fi}^2 = - \iint d^4x d^4y \langle f | \Theta(t-t') H_\pm(x,t) H_\pm(y,t') + \Theta(t'-t) H_\pm(y,t') H_\pm(x,t) | i \rangle \quad (3.131)$$

donde la función $\Theta(a-b)$ es la función de Heaviside y vale uno si $a > b$ y cero si $a < b$.

Introducimos en (3.131) la relación de completéz de las eigenfunciones del hamiltoniano de Skyrme

$$\sum_n | \phi_n \rangle \langle \phi_n | = 1$$

por lo que tenemos

$$S = \iint d^4x d^4y \left\{ \sum_n \Theta(t-t') \langle f | H_\pm(x,t) | \phi_n \rangle \langle \phi_n | H_\pm(y,t') | i \rangle + \sum_n \Theta(t'-t) \langle f | H_\pm(y,t') | \phi_n \rangle \langle \phi_n | H_\pm(x,t) | i \rangle \right\} \quad (3.132)$$

Este elemento de matriz va a describir dos diagramas de Feynman distintos :

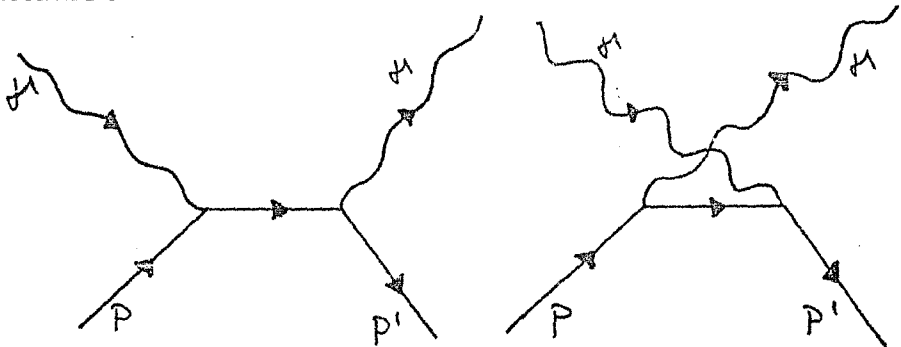


fig.11 Dispersión Compton

En el primer diagrama el fotón inicial interactúa con el barión entrante mientras que en el segundo lo hace con el saliente. Experimentalmente es imposible distinguir una de la otra, por lo que debemos calcular ambas. La expresión que se tiene en (3.132)

$$G(x,t;y,t') = \Theta(t-t') \sum_n e^{-iH^0 t} |\phi_n\rangle \langle \phi_n| e^{iH^0 t'} \quad (3.133)$$

no es más que la expresión general del propagador de la partícula libre. Se ve claramente que el operador G aplicado a un estado inicial $|i\rangle$ a un tiempo t' nos va a propagar ese estado a un tiempo t siempre y cuando t sea mayor que t' .

Los estados iniciales y finales de los bariones (protones) son:

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} \Psi_i(a) \quad \langle f| = \frac{1}{\sqrt{V}} \Psi_f^*(a) \quad (3.134)$$

La función $\Psi(a)$ es la función de onda para los protones en términos de las variables colectivas (cc.2.91). La constante la escogimos de tal forma que tengamos una densidad normalizada a una partícula por unidad de volumen. Los estados intermedios ϕ_n y de los fotones están dados por

$$|\phi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} \Psi_n(a) \quad \langle \phi_n| = \frac{1}{\sqrt{V}} \Psi_n^*(a)$$

$$A_\mu = \frac{\epsilon_\mu}{\sqrt{2kV}} (e^{-ikx} + e^{ikx}) \quad (3.135)$$

La constante de normalización del fotón nos asegura que su energía $U = \frac{1}{2} \int d^3x (E^2 + B^2)$ sea precisamente k . Además la densidad está

normalizada a una partícula por unidad de volumen.

Ahora vamos a calcular las integrales temporales de la ec. (3.132). Empezamos con el término

$$\Theta(t-t') \langle f| H_{\epsilon}(x,t) |\phi_n\rangle \langle \phi_n| H_{\epsilon}(y,t') |i\rangle$$

y escribimos explícitamente los factores

$$\frac{-1}{2\pi i} \int dw \frac{1}{w + i\epsilon} \left\{ \int dt e^{-i\omega t} e^{iE^f t} (e^{-ikt} + e^{ikt}) e^{-iE^N t} \right. \\ \left. \times \int dt' e^{i\omega t'} e^{iE^N t'} (e^{-ik't'} + e^{ik't'}) e^{-iE^i t'} \right\} \quad (3.136)$$

En la expresión anterior usamos la representación integral de la función escalón

$$\Theta(\tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi i} \int dw \frac{1}{w + i\epsilon} e^{-i\omega \tau} \quad (3.137)$$

De los cuatro términos de la ec.(3.136) solo los términos cruzados van a contribuir como consecuencia de la conservación de energía. Es decir solo los términos con un fotón en el estado inicial y final van a contribuir. Una vez hecha la integración sobre las variables t, t' la ec.(3.137) nos da

$$\frac{-1}{2\pi i} \int dw \frac{1}{w + i\epsilon} \left\{ \delta(E^f - E^N - \omega - k) \delta(E^N - E^i + \omega + k') + \right. \\ \left. + \delta(E^f - E^N - \omega + k) \delta(E^N - E^i + \omega - k') \right\},$$

ahora integramos sobre la variable w

$$= \frac{-1}{2\pi i} \left(\frac{\delta(E^f - E^i - k' - k)}{E^f - E^N - k} + \frac{\delta(E^f - E^i + k - k')}{E^f - E^N + k} \right) \quad (3.138)$$

Este resultado hace ver de manera explícita la conservación de la energía. Además la energía E^N que es la energía del propagador es y por lo tanto es la energía transferida entre estado inicial y final.

Ahora calcularemos la integral temporal del otro término de la ec.(3.132)

$$\Theta(t' - t) \langle f | H_{\text{int}}(x, t') | \phi_n \rangle \langle \phi_n | H_{\text{int}}(x, t) | i \rangle$$

Usamos la representación integral de la función escalón e integramos sobre las variables t, t'

$$\frac{-1}{2\pi i} \int dw \frac{1}{w + i\epsilon} \left\{ \int dt' e^{-i\omega t'} e^{iE^f t'} (e^{-ik't'} + e^{ik't'}) e^{-iE^N t'} \right. \\ \left. \times \int dt e^{i\omega t} e^{iE^N t} (e^{-ikt} + e^{ikt}) e^{-iE^i t} \right\}$$

$$= \frac{-1}{2\pi i} \int dw \frac{1}{w + i\epsilon} \left(\delta(E^f - E^i - w + k') \delta(E^i - E^i + w - k) + \delta(E^f - E^i - w - k') \delta(E^i - E^i + w + k) \right) \quad (3.139)$$

Otra vez solo dos de los términos sobreviven a la conservación de energía. Haciendo la integral sobre w tenemos

$$= \frac{-1}{2\pi i} \left(\frac{\delta(E^f - E^i + k' - k)}{E^i - E^i + k} + \frac{\delta(E^f - E^i - k' + k)}{E^i - E^i - k} \right) \quad (3.140)$$

Si consideramos a la energía del fotón entrante pequeña podemos suponer que la energía del estado inicial y final del protón iguales. Esta condición nos lleva a que la contribución de los términos con dos vértices se cancelen. Lo cual es muy interesante debido a que esta propiedad es característica de las partículas escalares. Este fenómeno solo es válido en el límite de bajas energías. En otro caso la energía inicial y final del protón no sería la misma. De cualquier forma creemos que sería interesante estudiar más a fondo las causas y consecuencias de que el skyrmión a pesar de tener espín semientero presenta propiedades de las partículas escalares.

A continuación calcularemos el elemento de matriz S^{12} (ec. 3.129). Este término describe una interacción que se lleva a cabo en un solo vértice y tiene el siguiente diagrama

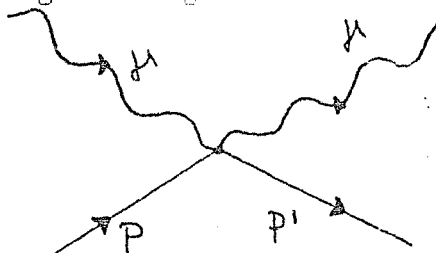


fig.12 Término de Contacto para la dispersión Compton

El hamiltoniano que debemos considerar es

$$V^0 = -q^2 A_\nu A^\mu (\delta_\mu^\nu (N - D) + M_\mu^\nu) \quad (3.130)$$

Antes de calcular el elemento de matriz S^{12} debemos expresar V' en términos de las variables colectivas. Para incorporarlas vamos a proceder de manera diferente a como lo habíamos hecho anteriormente. Utilizaremos los resultados obtenidos del modelo escalar y reinterpretaremos los campos " π " por los campos correspondientes.

Tomamos el resultado de las eos. (3.43) y (3.48) y escribimos a V' como

$$V' = -q^2 A_{\nu} A^{\nu} \left\{ \frac{1}{2} (\pi^1{}^2 + \pi^2{}^2) + \frac{4}{\xi^2 \xi^2} [(\pi^1{}^2 + \pi^2{}^2) (\partial_{\mu} \pi^3 \partial^{\mu} \pi^3 + \partial_{\mu} \sigma \partial^{\mu} \sigma) + (\partial_{\mu} \pi^3 \pi^3 + \partial_{\mu} \pi^1 \pi^1)^2] \right\} + q^2 A_{\nu}^{\mu} A_{\mu}^{\nu} M_{\nu}^{\nu} \quad (3.141)$$

Si expresamos a la matriz unitaria U como

$$U = \alpha + i \tau \cdot \beta \quad (3.142)$$

entonces los campos σ, π están relacionados con α y β de la siguiente forma:

$$\sigma = \frac{c}{2} \alpha \quad \text{y} \quad \pi = \frac{c}{2} \beta \quad (3.143)$$

Como habíamos visto anteriormente la introducción de las variables colectivas la hicimos mediante la transformación de la matriz U

$$U \rightarrow U' = A(t) U A^{\dagger}(t)$$

Por ser tanto U como A matrices de $SU(2)$ podemos asegurar que U' también lo será. Si escribimos a U' como

$$U' = \zeta + i \tau \cdot \xi \quad (3.144)$$

tenemos que los coeficientes ζ, ξ en términos de α, β están dados por

$$\zeta = \alpha \quad \text{y} \quad \xi_i = (2\delta_{ij} c_{ilk} a_k a^0 + 2a_i a_l \delta_{lj} + (a^0{}^2 - \vec{a}^2) \delta_{ij}) \beta_j \quad (3.145)$$

con $\vec{a}^2 = a^1{}^2 + a^2{}^2 + a^3{}^2$, $\alpha = \cos F(r)$ y $\beta = x \sin F(r)$.

El hamiltoniano de interacción V' (cambiando $\alpha \rightarrow \zeta$ y $\beta \rightarrow \xi$) es

$$V' = -q^2 A_\nu A^\nu \left\{ \frac{c^2}{8} (\xi^1{}^2 + \xi^2{}^2) + \frac{1}{2c^2} [(\xi^1{}^2 + \xi^2{}^2) (\partial_\mu \xi^3 \partial^\mu \xi^3 + \partial_\mu \xi^4 \partial^\mu \xi^4) + (\partial_\mu \xi^1 \xi^1 + \partial_\mu \xi^2 \xi^2)^2] \right\} - q^2 A^\mu A_\nu M_\mu{}^\nu \quad (3.146)$$

Afortunadamente al hacer la integración angular algunas expresiones de la variable ξ se van a colapsar.

La integral angular de $\xi_i \xi_m$ es

$$\int d\Omega \xi_i \xi_m = \text{sen}^2 F f_{ir} f_{mj} \int x_r x_j d\Omega \\ = \frac{4\pi}{3} \text{sen}^2 F \delta_{im} \quad (3.147)$$

donde f_{ir} esta definido por $\xi_i = f_{ir} \beta_r$, es decir

$$f_{ir} = 2\epsilon_{ilk} a_k a^3 \delta_{lr} + 2a_l a_1 \delta_{lr} + (a^3 - a^2) \delta_{lr}$$

Tenemos que

$$f_{ij} f_{mj} = \delta_{im} \quad (3.148)$$

Para realizar la integración angular de V' los siguientes resultados serán de utilidad

$$i) \int d\Omega \xi_j \partial^1 \xi_k = f_{jr} f_{kr} \left\{ \delta_{rs} \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} + x_r x_s (\cos^2 F F'^2 - \frac{\text{sen}^2 F}{r^2}) \right\} \quad (3.149a)$$

$$ii) \int d\Omega \xi_1{}^2 \partial_1 \xi_3 \partial^1 \xi_3 = \frac{16\pi \text{sen}^4 F}{15 r^2} + \frac{4\pi \text{sen}^2 F F'^2 \cos^2 F}{15} \quad (3.149b)$$

$$iii) \int d\Omega \xi_1{}^2 \partial_1 \xi_3 \partial^1 \xi_3 = \frac{4\pi}{3} F'^2 \text{sen}^4 F \quad (3.149c)$$

$$iv) \int d\Omega \partial_1 \xi_1{}^2 \partial^1 \xi_2{}^2 = \frac{16\pi}{15} (\text{sen}^2 F F'^2 \cos^2 F - \frac{\text{sen}^4 F}{r^2}) \quad (3.149d)$$

$$v) \int d\Omega \partial_1 \xi_1{}^2 \partial^1 \xi_1{}^2 = 16\pi \left(\frac{1}{5} \text{sen}^2 F \cos^2 F F'^2 + \frac{2 \text{sen}^4 F}{15 r^2} \right) \quad (3.149e)$$

Sustituimos la expresión de V' (ec.3.146) en el elemento de la matriz de dispersión (3.129) . Dado que estamos trabajando en el régimen de bajas energías vamos a expandir al campo electromagnético A_{μ} en su serie de Taylor y solo consideraremos el primer término de esta expansión que da para el elemento de la matriz de dispersión una contribución diferente de cero. De hecho el primer término será el término constante. Debido a que la función de onda del proton no tiene dependencia espacial tenemos que la integración angular la podemos hacer directamente sobre el hamiltoniano V' .

Para los términos cuadrados en los campos ξ del hamiltoniano de interacción V' obtenemos la siguiente contribución:

$$-\frac{c^2}{8} q^2 \int d\Omega A_1 A_1^i (\xi_1^2 + \xi_2^2) = -q^2 c^2 \frac{\pi}{3} A_1 A_1^i \text{sen}^2 F \quad (3.150)$$

Utilizamos los resultados de las ecs. (3.149).

La contribución del término cuártico en el campo ξ es

$$-\frac{q^2}{2e^2} \int d\Omega A_1 A_1^i \{ (\xi_1^2 + \xi_2^2) (\partial_{\mu} \xi_2 \partial^{\mu} \xi_2 + \partial_{\mu} (\partial^{\mu} \xi)) + (\partial_{\mu} \xi_1 \xi_1 + \partial_{\mu} \xi_2 \xi_2)^2 \} =$$

$$= -\frac{q^2}{2e^2} A_1 A_1^i \left[\frac{8\pi \text{sen}^2 F \cos^2 F F'^2 + 32\pi \frac{\text{sen}^4 F}{r^2}}{15} + \frac{8\pi}{5} \frac{\text{sen}^4 F}{r^2} \right.$$

$$+ \frac{8\pi}{15} \left(\text{sen}^2 F \cos^2 F F'^2 - \frac{\text{sen}^4 F}{r^2} \right)$$

$$\left. + 8\pi \left(\frac{1}{5} \text{sen}^2 F \cos^2 F F'^2 + \frac{2}{15} \frac{\text{sen}^4 F}{r^2} \right) \right]$$

$$= -q^2 A_1 A_1^i \frac{4\pi}{3e^2} \text{sen}^2 F \left(F'^2 + \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} \right) \quad (3.151)$$

Ahora usamos que $(\partial_{\mu} \xi_1 \partial_{\mu} \xi_1 + \partial_{\mu} \xi_2 \partial_{\mu} \xi_2)^2 = (\partial_{\mu} \xi_1^2 + \partial_{\mu} \xi_2^2)/4$ y los resultados de las ecs.(3.149).

Sumado las contribuciones de las ecs.(3.150) y (3.151) obtenemos que la integral angular del hamiltoniano V' es:

$$\int d\Omega V' = -q^2 A_1 A_1^i \frac{\pi}{3} \text{sen}^2 F \left(c^2 + \frac{4}{e^2} \left(F'^2 + \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} \right) \right) +$$

$$+ q^2 A^{\mu} A_{\nu} \int d\Omega M_{\mu}^{\nu} \quad (3.152)$$

Ahora debemos determinar la contribución de $\int d\Omega M_{\mu}^{\nu}$. Si vemos la definición de M y N (ec.3.27) y (3.28) tenemos que

$$\sum_{\mu} M_{\mu}^{\mu} = -N \quad (3.153)$$

Por otro lado los únicos tensores de los que puede depender M (después de hacer la integración sobre las variables colectivas) son del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y de los momentos p_{μ}^{ν} , por lo tanto

$$M_{\mu}^{\nu} = g_{\mu}^{\nu} C + p_{\mu}^{\nu} E \quad (3.154)$$

con C y E dos constantes.

Si suponemos que el momento del protón es pequeño, podemos despreciar el segundo término. Con esto tenemos que M es un tensor diagonal y está dado por

$$\sum_{\mu} M_{\mu}^{\mu} = 3C \quad (3.155)$$

Con lo cual la constante C es igual a menos un tercio de N ($C = -N/3$). No hay que olvidar que estamos usando la norma de radiación, por lo tanto el índice μ solo toma los valores espaciales.

Si utilizamos este resultado la contribución de los términos cuárticos en los campos ξ va a ser dos terceras partes de la calculada en (ec.3.150). Con lo cual llegamos a que la integral de V^2 sobre todo el espacio real es

$$\int r^2 dr \int d\Omega V = -q^2 \frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{\sqrt{2kV} \sqrt{2k'V}} \frac{2\pi}{3} \Lambda^2 \quad (3.156)$$

con

$$\Lambda^2 = \int r^2 dr \sin^2 F \left(c^2 + \frac{8}{3e^2} \left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \right) \quad (3.157)$$

En la ecuación (3.156) sustituimos explícitamente factores constantes del campo electromagnético. Además aparece un factor de dos extra como consecuencia de tener dos términos posibles que representen a un fotón entrante y uno saliente.

El factor de dos extra que aparece en el elemento de la matriz de dispersiones se debe a que tenemos dos terminos que representan a un

Sustituyendo el resultado (3.156) en la eq. (3.129) llegamos a

$$S_{fi}^{(2)} = q^2 \frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon'^1}{2V\sqrt{kk'}} \frac{2\pi \Lambda^3}{3} \int dt \langle f | e^{iH^0 t} e^{ikt} e^{-ik't} e^{-iH^0 t} | i \rangle$$

Introduciendo la función de onda de los protones tenemos que

$$S_{fi}^{(2)} = q^2 \frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon'^1}{2V\sqrt{kk'}} \frac{2\pi \Lambda^3}{3} \frac{1}{V} \int d^3a \Psi_f^*(a) \Psi_i(a) \int dt e^{i(E^f + k - E^i - k')t} \quad (3.158)$$

Como no tenemos dependencia de las variables colectivas en el hamiltoniano concluimos que la proyección del espín del protón final debe de ser la misma que la del espín del protón inicial, es decir que no se va a tener un "spin flip". Por lo tanto tenemos que la contribución del término de contacto para la matriz de dispersión es

$$S_{fi}^{(2)} = q^2 \frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon'^1}{2V\sqrt{kk'}} \frac{2\pi \Lambda^3}{3} 2\pi \delta(E^f + k - E^i - k') \quad (3.159)$$

Como estamos suponiendo que la energía del protón inicial es la misma que la del final, el elemento de la matriz de dispersión a segundo orden es

$$S_{fi}^{(2)} = -q^2 \frac{\pi}{3V^2} \Lambda^3 \frac{2\pi \delta(k - k')}{\sqrt{kk'}} (\epsilon_1 \cdot \epsilon'^1) \quad (3.160)$$

Como experimentalmente la cantidad que se mide es la sección diferencial vamos a calcularla. Para obtener la sección diferencial debemos hacer los siguientes pasos:

- i) Calcular la probabilidad de transición $|S_{fi}^{(2)}|^2$.
- ii) Dividirlo entre el tiempo de observación T .
- iii) Dividirlo entre el flujo de partículas incidentes F_{\perp} .
- iv) Dividirlo entre el número de partículas del blanco por unidad de volumen E .
- v) Sumar sobre el número de estados finales en un intervalo de momento d^3p .

Si no conocemos la polarización inicial ni la final entonces,

vi) Sumemos sobre estados finales y promediamos sobre estados iniciales de espín.

Calculamos los diferentes términos:

i) La probabilidad de transición es

$$|S_{fi}^{\pm}|^2 = q^{\pm} \frac{\pi^2}{9V^2} \Lambda^{\pm 2} \frac{(2\pi\delta(k-k'))^2}{kk'} (\epsilon_1^{\pm} \cdot \epsilon_2^{\pm})^2 \quad (3.161)$$

El cuadrado de la función ó está dado por

$$[2\pi\delta(k-k')]^2 = 2\pi\delta(0) 2\pi\delta(k-k') \quad (3.162)$$

ii) El tiempo de observación $T = 2\pi\delta(0)$

Una posible manera de verlo es por la definición

$$2\pi\delta(k-k') = \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(k-k')t}$$

y por lo tanto

$$2\pi\delta(0) = \int_{-T/2}^{T/2} dt = T$$

iii) El flujo es el número de partículas que incidien en el blanco por unidad de área y de tiempo.

$$F_L = n_1 |v|$$

donde n_1 es el número de partículas por unidad de volumen y v su velocidad. Con la normalización que habíamos escogido para las partículas incidentes (fotones) tenemos

$$F_L = \frac{1}{V} \quad (3.163)$$

iv) El número de partículas por unidad de volumen con la normalización escogida para las partículas del blanco (protones) es

$$B = \frac{1}{V} \quad (3.164)$$

v) Si consideramos que el protón final se encuentra en reposo el espacio fase de las partículas finales es

$$V^2 \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \quad (3.165)$$

Juntado todos los resultados anteriores para formar la sección diferencial, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= |E_0^2 f_1|^2 \frac{V^2 k'^2 dk'}{F_L E (2\pi)^3} \\ &= q^4 \frac{k'}{k} \frac{\delta(k - k')}{36} \Lambda'^2 (\epsilon_1 \cdot \epsilon'^1)^2 dk' \quad (3.166) \end{aligned}$$

Integramos sobre los momentos finales

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = q^4 \frac{\Lambda'^2}{36} (\epsilon_1 \cdot \epsilon'^1)^2 \quad (3.167)$$

Esta es la fórmula para la dispersión Compton a bajas energías con el modelo de Skyrme.

Según la mecánica cuántica relativista la sección diferencial de Compton se reduce en el límite de la energía del fotón tendiendo a cero a la sección diferencial clásica de Thompson. Para una partícula de masa m la sección diferencial de Thompson es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_T} = \frac{\alpha^2}{m^2} (\epsilon_1 \cdot \epsilon'^1)^2 \quad (3.168)$$

con α la constante de estructura fina $\alpha = 1/137$. En las unidades naturales $\alpha = q^2/4\pi$.

Dado que el cálculo que realizamos para el efecto Compton es en el régimen de bajas energías podemos identificar la sección diferencial obtenida con la sección diferencial de Thompson. De esta forma obtenemos una masa para el protón de

$$M_p^2 = \frac{6}{4\pi} (\Lambda')^2 \quad (3.169)$$

Como

$$\Lambda^2 = \frac{1}{8^2 b} \int dx x^2 \sin^2 F \left(1 + \frac{8}{3} \left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{x^2} \right) \right)$$
$$= \frac{1}{8^2 b} 42.1$$

tenemos

$$M_{\Sigma} = 237 \text{ MeV} \quad (3.170)$$

Esta masa es pequeña comparado con la masa del protón medida experimentalmente que es de 939 MeV. De cualquier forma obtenemos un valor al mismo orden de magnitud y dado que el modelo de Skyrme es una teoría efectiva podemos concluir que la predicción de la masa es aceptable. Además debemos recordar que en la aproximación tomada hemos despreciado varios términos y que los diagramas con dos vértices se cancelaron. Estos factores podrían contribuir al sección diferencial y por lo tanto a la masa del protón.

CONCLUSIONES

En este trabajo de tesis estudiamos el acoplamiento electromagnético del modelo de Skyrme, así como el decaimiento de la partícula delta en un protón y un fotón, y el efecto Compton para protones. Como habíamos mencionado anteriormente este modelo fue presentado por T.H.R.Skyrme en 1962 como una teoría de campo no lineal que describe tentativamente la interacción fuerte.

Sabemos que uno de los puntos esenciales en teoría del campo son las simetrías que se tengan. En este sentido confirmamos que el modelo de Skyrme es una buena aproximación de la cromodinámica cuántica ya que ambos poseen las mismas simetrías internas, estas son $SU(N)_I \times SU(N)_R \times U(1)_B \times U(1)_A$. Además encontramos que el vacío está degenerado y que es invariante ante la transformación del grupo $SU(2)$ de isoespín pero no ante la transformación $SU(2)$ axial. Este punto es de gran importancia debido a que el rompimiento espontáneo de la simetría nos libera de la degeneración de estados en paridad, degeneración no observada en el espectro de partículas.

En el trabajo de tesis determinamos con el estudio de la teoría homotópica y del teorema de Derrick la posibilidad de que el lagrangiano de Skyrme contenga soluciones tipo solitón. Como consecuencia de este estudio encontramos que la única dimensión del espacio real en que estos solitones pueden existir es tres que es justamente la dimensión deseada. Además el teorema de Derrick nos obliga a tener en el lagrangiano de Skyrme términos con al menos cuatro derivadas. Estos términos son necesarios para la estabilización del solitón.

Posteriormente introducimos el ansatz de Skyrme con el que obtuvimos una solución tipo solitón. Este solitón representa a un skyrmión en reposo. A continuación incorporamos unas variables colectivas dependientes del tiempo que nos generan una rotación del

skyrmi6n. Despu6s de cuantizar las variables colectivas interpretamos a uno de los n6meros cu6nticos obtenidos como el valor propio del esp6n del solit6n. Por otro lado vimos que una rotaci6n del espacio real nos genera una transformaci6n en el espacio de isosp6n. De hecho encontramos que los valores propios del esp6n y del isosp6n son iguales y por lo tanto es factible interpretar a los skyrmiones como bariones. Es en este momento que la identificaci6n de la carga topol6gica del skyrmion como el n6mero barionico adquiere sentido. Dado que la carga topol6gica es una cantidad conservada tenemos por consiguiente que el n6mero barionico tambi6n debe de conservarse. Aunque actualmente hay teor6as que predicen la no conservaci6n de dicho n6mero no se ha encontrado ninguna evidencia experimental.

El comportamiento de la funci6n radial del skyrmion lo calculamos utilizando un m6todo variacional y no uno num6rico. Los resultados obtenidos con este m6todo difieren a lo m6s en un 10 % de los valores encontrados por Witten con m6todos num6ricos. Para determinar las dos constantes del lagrangiano de Skyrme exigimos que el modelo reprodujera correctamente las masas del nucle6n y de la part6cula delta. Esta elecci6n result6 ser la m6s adecuada para los osculos tanto del decaimiento de la part6cula delta como para el efecto Compton de los protones. Con estos valores para las constantes predicimos una constante de decaimiento del pi6n que est6 un 20% por debajo de su valor experimental.

Un punto fundamental en el trabajo de tesis fue el estudio de la invariancia del lagrangiano ante transformaciones del grupo $U(1)$. Usando el teorema de Noether obtuvimos una corriente vectorial conservada. Para incorporar el campo electromagn6tico hicimos que esta transformaci6n fuese local o de norma. Al exigir que el lagrangiano fuera invariante ante esta transformaci6n local tuvimos que introducir un campo auxiliar. Este campo auxiliar result6 ser un campo vectorial cuya transformaci6n de norma es igual a la del campo electromagn6tico por lo que lo identificamos, precisamente, con el campo electromagn6tico. Con esta interpretaci6n la corriente de Noether obtenida anteriormente no es m6s que la corriente electromagn6tica. El lagrangiano de Skyrme con acoplamiento electromagn6tico que obtuvimos contiene tres t6rminos distintos. Uno de ellos representa al lagrangiano original, es decir al lagrangiano sin interacci6n, otro al

término usual de interacción $j_{\mu} A^{\mu}$, y por último tenemos un término de segundo orden en la constante de acoplamiento electromagnético.

Una vez obtenido el lagrangiano con acoplamiento electromagnético calculamos la interacción electromagnética de los piones a primer orden en teoría de perturbaciones. Los diagramas de Feynman que encontramos con solo tres partículas son exactamente iguales a los obtenidos a partir del lagrangiano de Klein-Gordon que es el lagrangiano usual para partículas de espín cero. Este hecho no aporta nada nuevo pero nos indica que el acoplamiento realizado es el adecuado. Para los diagramas con mayor número de partículas tenemos que la probabilidad de que se den es mucho menor.

La transición del decaimiento de la partícula delta en un protón y un fotón resultó ser únicamente una transición dipolar magnética. Este cálculo lo efectuamos para un fotón de baja energía. El valor del momento dipolar para esta transición que se encontró está un 30% abajo del valor experimental, pero comparado con el modelo efectivo de cuarks tenemos un resultado de solamente 10% menor. Además como despreciamos los términos con dos derivadas temporales en las variables colectivas habría la posibilidad de que estos términos contribuyeran tanto a la transición dipolar magnética como a la cuadrupolar eléctrica, aunque de ser así ésta debería ser muy pequeña. Experimentalmente solo se ha medido la transición dipolar magnética pero no se excluye una contribución de la cuadrupolar eléctrica.

El efecto Compton lo calculamos para protones en el régimen de bajas energías. Primeramente determinamos el elemento de la matriz de dispersión a segundo orden. Un resultado obtenido sumamente interesante es que los diagramas de Feynman con dos vértices se cancelan. Esto es normal para partículas con espín cero pero no para partículas con espín semientero. Sería interesante preguntarnos si este fenómeno es consecuencia o no del modelo de Skyrme. Bien podría ser que dado que el lagrangiano solo contiene campos escalares los solitones de dicho modelo presentaran propiedades características de las partículas con espín cero. Creemos que para resolver esta interrogante es necesario realizar el cálculo del efecto Compton permitiendo que el protón final retroceda. Dado que los diagramas de Feynman con dos vértices se cancelan tenemos que el único término que contribuye al

efecto Compton es el término de contacto. Según la mecánica cuántica relativista cualquier sección diferencial debida a una interacción electromagnética se reduce a la sección clásica de Thomson para el límite de la energía del fotón tendiendo a cero. Después de tomar este límite en la sección diferencial calculada determinamos a partir de ésta la masa del protón. El resultado obtenido es del mismo orden de magnitud que la masa del protón medida experimentalmente. Este resultado es aceptable si consideramos que estamos trabajando con una teoría efectiva.

Quisieramos enfatizar que los resultados obtenidos se realizaron en el régimen de bajas energías. Esto se manifiesta en las siguientes situaciones: i) al despreciar términos con más de dos derivadas temporales en las variables colectivas, ii) al tomar el límite de baja energía para el fotón en el decaimiento de la partícula delta, iii) al expandir a los fotones en su serie de Taylor y quedarnos solo con el primer término distinto de cero del elemento de la matriz de dispersión a segundo orden para el efecto Compton, iv) al considerar en el efecto Compton la energía del protón inicial y del protón final iguales.

Es importante señalar que para tener un modelo más realista, y probablemente mejores resultados, debemos de incluir unas variables colectivas que nos indiquen el movimiento translacional del centro de masa del skyrmión. Con la inclusión de estas variables no tendríamos que tomar tan estrictamente el límite de bajas energías. Además tenemos que el término de Wess-Zumino apesar de anularse para $SU(2)$ puede dar una contribución en el lagrangiano con interacción electromagnética. Esta contribución necesariamente es menor en magnitud dado que contiene mayor número de derivadas en las variables colectivas pero podría dar lugar a efectos interesantes. Otra consideración que debemos tomar en cuenta es que estuvimos trabajando con el grupo $SU(2)$ y no con $SU(3)$. En $SU(3)$ el término de Wess-Zumino no se anula y ya no es necesario el término cuártico del modelo de Skyrme para estabilizar las soluciones tipo solitón. Por último quisieramos hacer notar que al tener el lagrangiano de Skyrme acoplado al campo electromagnético podemos en principio hacer cualquier cálculo electromagnético de interés.

APENDICE A

A.1 Unidades Naturales

En esta tesis adoptamos la convención de usar

$$\hbar = c = 1 \quad (\text{A.1})$$

A este sistema de unidades se le llama Unidades Naturales. Gracias a este sistema no tenemos que cargar con los factores \hbar, c en las ecuaciones. Veamos que implicaciones tiene esta elección

i) $c = 1$

En unidades convencionales MKS, c toma el valor de

$$c \simeq 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \quad (\text{A.2})$$

y como es una velocidad tiene dimensión de longitud por tiempo,

$$[c] = [L][T]^{-1} \quad (\text{A.3})$$

Al escoger $c = 1$ estamos implicando que nuestra unidad temporal es igual a la unidad de longitud,

$$[L] = [T] \quad (\text{A.4})$$

Similarmente, de la relación de energía-momento de la relatividad especial

$$E^2 = c^2 p^2 + c^4 m^2, \quad (\text{A.5})$$

vemos que al tomar $c = 1$ nos lleva a que la masa, energía y momento tienen las mismas dimensiones.

ii) $\hbar = 1$

El valor numérico de la constante de Planck es

$$\hbar = 6.6 \times 10^{-22} \text{ MeV s} \quad (\text{A.6})$$

y tiene dimensiones de energía por tiempo

$$[\hbar] = [M][L]^2[T]^{-1} \quad (\text{A.7})$$

Al escribir $\hbar = 1$ nos relaciona las unidades de masa M , longitud L y tiempo T . Como L y T tienen la misma dimensión por nuestra convención anterior $c = 1$, la única dimensión independiente es la de la masa M . Por lo tanto

$$[M] = [L]^{-1} = [T]^{-1} \quad (\text{A.8})$$

iii) Si multiplicamos $\hbar c$ en unidades convencionales (ec.A.2 y A.6) tenemos

$$\hbar c \simeq 200 \text{ MeV fm} \quad (\text{A.9})$$

por lo que en nuestras unidades

$$1 \text{ fm} \simeq \frac{1}{200} \text{ MeV}^{-1} \quad (\text{A.10})$$

Como ejemplo calcularemos la longitud de onda del pión. En unidades naturales ésta es

$$\lambda_{\pi} \simeq \frac{1}{138} \text{ MeV}^{-1} \quad (\text{A.11})$$

Para pasar a las unidades convencionales notamos que λ tiene dimensiones de MeV^{-1} . Pero $(1 \text{ MeV})^{-1} = 200 \text{ fm}$ por lo que la longitud de onda del pión queda como

$$\lambda_{\pi} \simeq 1.41 \text{ fm} \quad (\text{A.12})$$

que es el valor en unidades convencionales.

A.2 NOTACION TENSORIAL

Las coordenadas espacio-temporales $(t, x, y, z) = (t, \vec{x})$ están definidas por el cuadrivector contravariante

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) \quad (\text{A.13})$$

El índice μ corre de 0 a 3, 0 representa la coordenada temporal y 1,2,3 espaciales.

El cuadrivector de posición covariante se obtiene del cuadrivector x^μ por medio del tensor métrico $g_{\mu\nu}$,

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (t, -x, -y, -z)$$

con

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

El producto interno o escalar de dos cuadrivectores arbitrarios es

$$\begin{aligned} A_\mu B^\mu &= g_{\mu\nu} B^\mu A^\nu \\ &= A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

En este trabajo de tesis adoptamos la convención de Einstein, los índices repetidos se suman. A menos que se indique lo contrario los índices griegos μ, ν corren de 0 a 3 mientras que los latinos de 1 a 3.

El cuadrivector derivada es

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{A.16})$$

y normalmente lo vamos a denotar por el símbolo ∂_μ , es decir

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (\text{A.17})$$

A.3 GRUPOS $SU(n)$ Y MATRICES DE PAULI

$SU(n)$ es el grupo de todas las matrices unitarias U $n \times n$ con determinante uno, es decir $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$ y $\det U = 1$. Cualquier matriz U se puede expresar en términos de una matriz hermitiana H como

$$U = e^{iH} \quad (\text{A.18})$$

De la identidad

$$\det e^A = e^{\text{tr} A} \quad (\text{A.19})$$

y de la condición que la traza de U sea igual a la unidad, tenemos

$$\text{tr} H = 0 \quad (\text{A.20})$$

y como hay $n^2 - 1$ matrices hermitianas $n \times n$, un elemento de $SU(n)$ se puede escribir de la forma

$$U = \exp\left(i \sum_a \epsilon_a J_a\right) \quad (\text{A.26})$$

donde ϵ_a son los parámetros del grupo y J_a los generadores del grupo representados por matrices hermitianas de traza nula. Estos generadores dan lugar a un álgebra que es característica del grupo en cuestión. En general este álgebra es

$$[J_a, J_b] = i f_{abc} J_c \quad (\text{A.27})$$

donde f_{abc} son las constantes de estructura del grupo. En el caso particular de $SU(2)$ vamos a tener tres generadores que cumplen con la siguiente álgebra

$$[J_i, J_j] = i \epsilon^{ijk} J_k \quad (\text{A.28})$$

con ϵ^{ijk} el tensor de Levi-Civita totalmente antisimétrico.

Una posible representación de los generadores está dada por las matrices de Pauli,

$$z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad z_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(A.27)

Podemos comprobar que efectivamente cumplen con el álgebra (2.26) y que tienen traza cero.

A.4 NOTACION DE DIRAC

El espinor de Dirac Ψ tiene cuatro componentes y su adjunto está definido por

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0 \quad (\text{A.28})$$

donde Ψ^\dagger es el espinor transpuesto de Ψ y γ^0 es una matriz de Dirac.

Las matrices de Dirac γ^μ son matrices 4×4 que cumplen con la siguiente álgebra

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} \quad (\text{A.29})$$

Una posible representación de las matrices de Dirac hace uso de las matrices de Pauli, ésta es

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & z^i \\ -z^i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.30})$$

Otra matriz de Dirac que resulta ser de suma importancia es γ^5 y está definida por

$$\gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad (\text{A.31})$$

Si el espinor de Dirac se transforma ante una transformación del grupo de Lorentz como

$$\Psi'(x') = S(\alpha) \Psi(x) \quad (\text{A.32})$$

entonces las matrices de Dirac se transforman como

$$\eta^{\nu} = S(a) \eta^{\mu} S(a)^{-1} a^{\nu}_{\mu} \quad (\text{A.33})$$

Usando estos resultados se puede demostrar que las siguientes cantidades son:

a) $\bar{\psi}'(x') \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \psi(x)$ escalar

b) $\bar{\psi}'(x') \gamma^5 \psi'(x') = \bar{\psi}(x) S^{-1} \gamma^5 \psi(x) = \det |a| \bar{\psi}(x) \gamma^5 \psi(x)$ pseudoscalar

c) $\bar{\psi}'(x') \gamma^{\nu} \psi'(x') = a^{\nu}_{\mu} \bar{\psi}(x) \gamma^{\mu} \psi(x)$ vector

d) $\bar{\psi}'(x') \gamma^5 \gamma^{\nu} \psi'(x') = \det |a| a^{\nu}_{\mu} \bar{\psi}(x) \gamma^5 \gamma^{\mu} \psi(x)$ pseudovector

(A.34)

APENDICE B

B.1 REPRESENTACION DE INTERACCION

Escribimos el hamiltoniano H en la representación de interacción como

$$H = H_0 + H_1 \quad (\text{B.1})$$

y denotamos $O(t)$ y $|t\rangle$ al operador y al vector de estado en esta representación. Las ecuaciones de movimiento son

$$[H_0, O(t)] = -i \dot{O}(t) \quad (\text{B.2})$$

y

$$H_1 |t\rangle = i \frac{\partial}{\partial t} |t\rangle \quad (\text{B.3})$$

Hasta ahora la descomposición del hamiltoniano (B.1) es arbitraria. Notamos que si hacemos $H_0 = 0$ entonces la representación de interacción es igual a la de Schrodinger y si $H_1 = 0$ a la de Heisenberg.

El vector de estado $|t\rangle$ en la representación de interacción está relacionado con el de Schrodinger $|t\rangle_S$ por

$$|t\rangle = e^{iH_0^S t} |t\rangle_S \quad (\text{B.4})$$

donde H^S está dado por la siguiente descomposición del hamiltoniano de Schrodinger

$$H^S = H_0^S + H_1^S \quad (\text{B.5})$$

Recordemos que cualquier operador incluyendo al hamiltoniano en la representación de Schrodinger es independientes del tiempo.

Los operadores de interacción O y de Schrodinger O_S están relacionados por

$$O(t) = e^{iH_0^S t} O_S e^{-iH_0^S t} \quad (\text{B.6})$$

Si tomamos el operador O_S igual a H_0^S vemos que

$$O H_0 = H_0^S \quad (\text{B.7})$$

Por lo que H_0 no cambia si pasamos de la representación de Schrodinger a la de interacción. Si tomamos la derivada temporal de las ecuaciones (B.4) y (B.5) encontramos

$$\begin{aligned}
 -i\dot{O}(t) &= -i \frac{\partial}{\partial t} (e^{iH_0 t} O_S e^{-iH_0 t}) \\
 &= H_0 e^{iH_0 t} O_S e^{-iH_0 t} - e^{iH_0 t} O_S e^{-iH_0 t} H_0 \\
 &= [H_0, O(t)]
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 i \frac{\partial}{\partial t} |t\rangle &= i \frac{\partial}{\partial t} e^{iH_0 t} |t\rangle_S \\
 &= e^{iH_0 t} (-H_0 + H) |t\rangle_S = e^{iH_0 t} H_I |t\rangle_S \\
 &= e^{iH_0 t} H_I e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t} |t\rangle_S \\
 &= H_I(t) |t\rangle
 \end{aligned}$$

Para deducir las ecuaciones anteriores usamos las ecuaciones de movimiento en la representación de Schrodinger, éstas son

$$|t\rangle_S = e^{-iHt} |0\rangle_S \quad (\text{B.8})$$

y

$$\dot{O}_S = 0 \quad (\text{B.9})$$

Por lo tanto concluimos que las ecuaciones de movimiento de la representación de Schrodinger implican a las de la representación de interacción. Lo contrario también es cierto. Además, sabemos que la representación de Schrodinger y la de Heisenberg son equivalentes por lo que tenemos

$$\langle a|0\rangle_S = \langle a|0\rangle_I = \langle a|0\rangle_H \quad (\text{B.10})$$

con $|a\rangle$, $|b\rangle$ y 0 vectores de estado y operadores arbitrarios, respectivamente.

En el trabajo de tesis vamos a tomar como H al hamiltoniano que describe los campos libres mientras que H será el hamiltoniano con interacción.

B.2 LA MATRIZ DE DISPERSION E

Las ecuaciones de movimiento del vector de estado y del hamiltoniano H (ec. B.3) son

$$i \frac{\partial}{\partial t} |t\rangle = H_I |t\rangle \quad (\text{B.11})$$

$$-i \dot{H}_1 = [H_0, H_1] \quad (B.11)$$

Sea $U(t, t_0)$ la función de Green de la ecuación (B.11). Entonces tenemos

$$|t\rangle = U(t, t_0) |t_0\rangle \quad (B.12)$$

$U(t, t_0)$ satisface

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_1(t) U(t, t_0) \quad (B.13)$$

con la condición inicial

$$U(t, t_0) = \mathbf{1} = \text{matriz unidad} \quad (B.14)$$

El conjugado hermitiano de (B.13) es

$$-i \frac{\partial}{\partial t} U^\dagger(t, t_0) = U^\dagger(t, t_0) H_1(t)$$

por lo que

$$-i \frac{\partial}{\partial t} (U^\dagger(t, t_0) U(t, t_0)) = 0$$

que junto con la condición inicial (B.14), implican

$$U^\dagger(t, t_0) U(t, t_0) = \mathbf{1} \quad (B.15)$$

e.d., $U(t, t_0)$ es una matriz unitaria.

La matriz de dispersión S se define como

$$S = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow \infty}} U(t, t_0) \quad (B.16)$$

Por lo que tenemos que S conecta vectores de estado de un tiempo $-\infty$ a $+\infty$.

B.3 SERIE PERTURBATIVA

Comenzamos con la ecuación (B.13)

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_1(t) U(t, t_0)$$

y reemplazamos al hamiltoniano por

$$H_1(t) \rightarrow \lambda H_1(t) \quad (B.17)$$

y al operador U por

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n U_n(t, t_0) \quad (B.18)$$

La ecuación (B.13) queda dada por

$$i \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n U_n(t, t_0) = \lambda H_1(t) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n U_n(t, t_0) \quad (\text{B.19})$$

Si igualamos los coeficientes de λ en ambos lados de la ecuación anterior tenemos

$$i \frac{\partial}{\partial t} U_0(t, t_0) = 0 \quad (\text{B.20})$$

y

$$i \frac{\partial}{\partial t} U_n(t, t_0) = H_1(t) U_{n-1}(t, t_0) \quad (\text{B.21})$$

De la misma forma encontramos que

$$U_0(t_0, t_0) = 1 \quad (\text{B.22})$$

y para $n \neq 0$ tenemos

$$U_n(t_0, t_0) = 0 \quad (\text{B.23})$$

Por las ecuaciones (B.20) y (B.22) tenemos que

$$U_0(t, t_0) = 1 \quad (\text{B.24})$$

El primer orden en teoría de perturbaciones, $n = 1$, está dado por

$$U_1(t, t_0) = -i \int_{t_0}^t H_1(t') dt' \quad (\text{B.25})$$

de la misma forma, la solución para $n = 2$ es

$$U_2(t, t_0) = (-i)^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} dt_2 dt_1 H_1(t_1) H_2(t_2) = \dots \quad (\text{B.26})$$

en esta expresión el tiempo t es mayor al tiempo t_0 .

Si escribimos la ec. anterior en términos del operador cronológico T ésta queda como

$$U_2(t, t_0) = \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T(H_1(t_1) H_2(t_2))$$

El operador cronológico T se define como

$$T(H_1(t_1) H_2(t_2)) = \begin{cases} H_1(t_1) H_2(t_2) & t_1 < t_2 \\ H_2(t_2) H_1(t_1) & t_1 > t_2 \end{cases} \quad (\text{B.27})$$

Haciendo $\lambda=1$ y por (B.19) la matriz de dispersión es

$$\begin{aligned}
 S = U(\infty, -\infty) &= 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} H_1(t) dt \\
 &+ \frac{(-i)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 T(H_1(t_1) H_2(t_2)) \\
 &+ \frac{(-i)^3}{3!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_3 T(H_1(t_1) H_2(t_2) H_3(t_3)) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{B.28}$$

B.4 TEOREMA DE NOETHER

En esta sección vamos a estudiar el teorema de Noether para simetrías internas, e.d. simetrías debidas a transformaciones de los campos. Tenemos una acción de la forma

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \partial_\mu \phi_1, \dots, \partial_\mu \phi_n) \tag{B.29}$$

en donde la densidad lagrangiana \mathcal{L} solo depende de n campos independientes y de sus derivadas.

Si para una cierta transformación infinitesimal $\delta\phi$ de los campos la acción es invariante, entonces tenemos una ley de conservación.

En el caso en que mantegamos los extremos fijos y la transformación se deba solo a variación en los campos, no en los parámetros, la invariancia de la acción será equivalente a la de la densidad lagrangiana. Por lo tanto

$$\delta \mathcal{L} = 0 \tag{B.30}$$

La variación de la densidad lagrangiana es

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_r} \delta \phi_r + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi_r} \delta \partial_\mu \phi_r \tag{B.31}$$

por las ecuaciones de movimiento podemos escribir

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_r} = \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi_r} \tag{B.32}$$

y como

$$\delta \partial_\mu \phi_r = \partial_\mu (\phi_r + \delta \phi_r) - \partial_\mu \phi_r = \partial_\mu \delta \phi_r \tag{B.33}$$

obtenemos

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi_r} \delta \phi_r \right) = 0 \tag{B.34}$$

Podemos definir a el término entre paréntesis como una corriente J_μ . Esta corriente por construcción se va a conservar, y nos va a dar una carga independiente del tiempo. La corriente conservada es entonces

$$J_{\mu\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_{\mu} \phi^r} \delta \phi^r \quad (\text{B.35})$$

Si integramos la ecuación (B.34) sobre todo el espacio e imponemos que los campos se anulen en el infinito entonces la carga conservada es

$$Q = \int d^3x J_0 \quad (\text{B.36})$$

y será independiente del tiempo.

El teorema de Noether nos dice que para toda transformación que deje invariante a la acción vamos a tener una corriente conservada. La mayoría de las leyes de conservación son producto de este teorema pero hay otras cantidades conservadas que no lo son.

BIBLIOGRAFIA

- Adkins S., Nappi R., Witten E., Nucl.Phys. B228 (1983) 552
- Aitchison I., *An informal Introduction to gauge Field Theories*, 1984, Cambridge University Press, Gran Bretaña.
- Arfken G., *Mathematical Methods for Physicists*, 1985, Academic Press, Inc., EUA
- Belvin A.A., Polyakov A., Schwartz A., Tyupkin Y., Phys.Lett. 59B (1975) 85
- Bjorken J., Drell S., *Relativistic Quantum Mechanics*, 1964, Mc Graw Hill Book Co., EUA
- Bjorken J., Drell S., *Relativistic Quantum Fields*, 1965, Mc. Graw Hill Book Co., EUA
- Coleman S., Part A, ed. A. Zichichi, Plenum Press, (1977) 297
- Cheng T., Li L., *Gauge Theory of Elementary Physics*, 1984, Oxford Univesrsity Press, EUA
- Christ N.H., Lee T.D., Phys, Rev. D12, (1975) 1606
- Data , *Compilation of Coupling Constants and low-energy Parameters*, Nucl. Phys. B109 (1976) 1
- Derrick G.H., J.Math. Phys. 5 (1964) 1252
- Dothan Y., Biedenharn L., Nucl.Phys. Vol.17, No.2 63 (1987)
- Feynman R., *The Feynman Lectures on Physics. Electromagnetismo y Materia. Vol.II.*, 1972, Fondo Educativo Interamericano, México.
- Holzwarth G., Schwesinger B., Rep. Prog. Phys. 49 (1986) 827

- Goddard P., Mansfield M., Rep. Prog. Phys. 48 (1986) 727
- Goldstone J., Jackiw R., Phys.Rev. D11 (1975) 1486
- Jackson J.D., *Classical Electrodynamics*, 1975, Jhon Wiley and Sons Inc., EUA
- Korepin V.E., Kulish P.P., Faddeu L.D., JETP Lett. 21 (1975) 221
- Landau L., Lifshitz E., *The Classical Theory of Fields*, 1951, Addison Wesley Press INc., EUA
- Landau L., Lifshitz E., *Curso abreviado de Física Teórica, Libro 2 "Mecánica Cuántica"*, 1979, Editorial Mir, URSS.
- Landau L., Lifshitz E., *Relativistic Quantum Theory, Part I*, 1974, Pergamon Press Ltd., Hungria.
- Landau L., Lifshitz E., *Relativistic Quantum Theory, Part II*, 1974, Pergamon Press Ltd., Hungria.
- Lee T.D., *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, 1981, Harwood Academic Publishers, EUA
- Marciano W., Pagels H., *Quantum Chromodynamics*, Phys. Rep., Feb. 1978, Vol 36C.
- Mondragon M., *Monopolos Magnéticos en Teorías de Yang-Mills*, 1987, Tesis UNAM, México
- Ramond P., *Field Theory. A Modern Primer*, 1981, The Benjamin/Cummings Publishing Co., EUA
- Rebbi C., *Solitons*, Feb.1979, Scientific American, EUA
- Rho M., Oxford Nucl.Press (1983) 379
- Shankar R., 1976, Phys. Rev. D, 18, 3809
- Skyrme T.H.R., Proc.Roy.Soc.London, Ser. A260, (1961) 127
- Skyrme T.H.R., Nucl.Phys.,31, (1962) 556
- Stuewer R., *The Compton Effect*, 1975, Science History Publications, EUA
- Tomboulis E., Woo G., Nucl. Phys. B107 (1976) 221

Wess J., Zumino B., Phys. Lett. 37B (1971) 95

Williams B., *Compton Scattering*, 1977, Mc.Graw-Hill, Gran Bretaña

Witten E., Nucl.Phys. B 223 (1983) 422

Witten E., Nucl.Phys. B 233 (1983) 433