

24.9



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA

FACULTAD DE CIENCIAS

RETROSPECTIVA HISTORICA DE LA INTEGRAL

TESIS  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
ACTUARIO  
PRESENTA  
GUADALUPE CARRASCO LICEA

México D. F. 1988.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## PRESENTACION

Mucho se ha hablado ya acerca de la necesidad de transformar el esquema tradicional de enseñanza de las matemáticas, que se reduce a presentarle al estudiante un listado de axiomas, definiciones, teoremas y ejercicios dentro de un sistema impecable que excluye todo error, y deja en el estudiante la visión de que el desarrollo de las matemáticas es un proceso lineal, continuo y ascendente.

Afortunadamente, cada vez somos más los estudiantes, ayudantes y profesores de la Facultad de Ciencias (y de otras instituciones) que hacemos a un lado la idea de que el énfasis de la enseñanza debe estar en la acumulación de conocimientos, o en el amontonamiento de hechos, y nos esforzamos porque la enseñanza de las matemáticas invite a reflexionar sobre el crecimiento del conocimiento mismo; porque el estudiante intente comprender por qué una teoría matemática se desarrolló, por qué tomó la forma que tiene, etc.

Es indudable la utilidad de la historia de las matemáticas para quienes hacen suya esta concepción de la enseñanza. A través de la historia resulta sencillo mostrar al estudiante que la matemática no es una teoría acabada, sino que está en permanente construcción; que cada uno de sus resultados o conceptos ha sido producto del trabajo humano; del trabajo desarrollado durante años por hombres que intuyeron, pero dudaron; que utilizaron un resultado aunque todavía no lo supieran demostrar; que aprobaron o cuestionaron, que generalizaron y particularizaron; que, en fin, argumentaron y contraargumentaron.

Por lo demás, al estudiar el surgimiento y desarrollo de un concepto se pueden detectar los puntos claves o difíciles de su contenido.

Por ello, con este modesto ensayo quisiéramos contribuir a ampliar el material de apoyo útil para quienes dan clases de cálculo y están interesados en hacerlo con base en un enfoque como el que hemos mencionado. Si además de cubrir el trámite que representa la elaboración de una tesis, este trabajo aporta algo a quienes encauzan sus esfuerzos hacia el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas, habrá valido la pena el tiempo que se le dedicó.

Por último —de acuerdo con la tradición— quiero dejar constancia de mis agradecimientos:

A Luis Briseño, por sus orientaciones y sugerencias, por todos los libros que me prestó, y también por sus regalos.

A Rafael porque sin su valiosa colaboración, este trabajo no tendría dibujos.

A mis papás por su exigencia sistemática —durante años— de que me titulara, por su apoyo en general y particularmente por prestarme la PC en la que este trabajo fue escrito.

A mis amigos Sonia, Salvador y Leticia por ayudarme con una serie de compromisos que se vieron temporalmente abandonados por mí.

A Martín, por su permanente actitud solidaria.

GCL.



## CAPITULO I

### EL CALCULO DE AREAS Y VOLUMENES POR LOS CIENTIFICOS

GRIEGOS. EL METODO DE EXHAUCION.....	1
1.- Eudoxo. El método de exhaustión .....	3
2.- Arquímedes. Un método para el descubrimiento y otro para la demostración.....	10

## CAPITULO II

### LOS METODOS DEL CALCULO INTEGRAL ANTERIORES A NEWTON

Y A LEIBNIZ. SIGLO XVII.....	28
1.- Los indivisibles de Cavalieri.....	32
2.- Torricelli. Volumen de un sólido infinito.....	42
3.- Pascal. Integración por partes y de la función seno.....	48
4.- Fermat. Integración usando progresiones geométricas.....	56
5.- La integración numérica de Wallis.....	60

## CAPITULO III

### LA INTEGRAL EN LOS TRABAJOS DE NEWTON Y DE LEIBNIZ.....

1.- La integral en el trabajo de Newton.....	71
2.- La integral en el trabajo de Leibniz.....	78
3.- Las lecciones sobre integración de John Bernoulli.....	86
4.- Dos de los problemas famosos a finales del siglo .....	89

## CAPITULO IV

### EL CALCULO INTEGRAL DEL SIGLO XVIII.....

1.- Problemas encontrados al desarrollar las técnicas de integración.....	96
2.- Las integrales elípticas.....	100
3.- Surgimiento de la rama de las ecuaciones diferenciales.....	104
4.- El problema de la cuerda vibrante.....	108

## CAPITULO V

LA TEORIA DE INTEGRACION DE RIEMANN.....	116
1.- Las funciones arbitrarias y su representación en series trigonométricas según Fourier.....	118
2.- La concepción de Cauchy sobre la integral.....	122
3.- La contribución de Dirichlet.....	126
4.- La teoría de integración de Riemann.....	130
5.- Los defectos de la integral de Riemann.....	134
6.- Hacia una formulación de la integral basada en la teoría de la medida.....	140
 BIBLIOGRAFIA.....	 144

## I. EL CALCULO DE AREAS Y VOLUMENES POR LOS CIENTIFICOS GRIEGOS: METODO DE EXHAUCION.

Aunque en la época de los grandes matemáticos griegos no se tenía una definición general de conceptos como los de longitud, área y volumen, el significado de estas cantidades se conocía intuitivamente y se manejaban partiendo de un entendimiento tácito de ellas. Este manejo era enteramente geométrico, pero a diferencia de la geometría de hoy que da la medida de estas cantidades mediante un número, en la antigüedad esa medida se daba indirectamente, ya fuera por equivalencia de una figura con otra que ya conocían, o a través de una proporción de la que conocían 3 términos. Así, por ejemplo, la pregunta *¿qué es el área de un círculo?* no tenía sentido para los geómetras griegos; en cambio, *¿cuál es la razón entre el área de dos círculos?* era una pregunta válida y su respuesta podía expresarse en términos geométricos de esta forma: *"la misma que la de los cuadrados contruidos sobre los diámetros de esos círculos"*.

La matemática griega en el período de la escuela pitagórica había sido esencialmente una matemática discreta. Pero con el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables y el intento de calcular longitudes, áreas y volúmenes de figuras curvilíneas, apareció ante los sabios griegos la necesidad de los procesos infinitos. Sin embargo, el rigor del pensamiento griego excluyó de las demostraciones lo *«infinitamente pequeño»*, sustituyendo este tipo de ideas por un método genial con el que trataron los problemas de nuestro cálculo integral: el método de exhaustión.

Este método, desarrollado inicialmente por Eudoxo, nos resulta hoy muy familiar porque se basa en un razonamiento análogo al que usamos actualmente para definir la integral definida. Primero, se construye una sucesión  $P_1, P_2, P_3, \dots$  de polígonos que van llenando o *«exhaustando»* la superficie  $S$  cuya área se quiere conocer. Lo fundamental de este primer paso consiste en mostrar que la diferencia entre el área de  $S$  y la de un polígono inscrito  $P_n$  se puede hacer *tan pequeña como se quiera*, tomando  $n$  suficientemente grande. Después se demuestra

una igualdad que involucra al área buscada, utilizando para ello el método de *reducción al absurdo*.

En el primer paso, Eudoxo usa un principio que corresponde al actual postulado de continuidad, mientras que el segundo viene a ser una especie de traducción geométrica de nuestro paso al límite.

Eudoxo usó el método de exhaustión para trabajar con volúmenes de esferas, conos, prismas y pirámides, además de usarlo con áreas de círculos, proposiciones que hoy conocemos gracias a que Euclides las incluyó en el libro XII de sus *Elementos*. Posteriormente Arquímedes consagró casi toda su obra a este tipo de problemas (gran parte de la cual se conoce actualmente en su forma original), pero él combinó el rigor del método de exhaustión con ciertos procedimientos «heurísticos» que le facilitaron el descubrimiento de nuevos resultados. Estos procedimientos —que carecían del rigor suficiente para que Arquímedes les diera el título de "demostración"— se exponen claramente en su texto conocido como "*El método*", descubierto apenas a principios de este siglo.

En él, Arquímedes utiliza una analogía entre situaciones físicas y situaciones geométricas para aplicar su famosa *ley de la palanca* al cálculo de áreas y volúmenes. Según esta ley, si se coloca una partícula de masa  $m_1$  a una distancia  $d_1$  del punto de apoyo de una palanca, y otra de masa  $m_2$  a una distancia  $d_2$  tomada hacia el otro lado del punto de apoyo, la palanca estará en equilibrio cuando se cumpla la igualdad  $m_1 \cdot d_1 = m_2 \cdot d_2$ . Arquímedes considera a las superficies como formadas por líneas y a los volúmenes por planos; encuentra una relación de equilibrio entre, por ejemplo, dos rectas que se toman cada una en una superficie distinta y supone que la misma relación es válida para las superficies completas. Esta relación de equilibrio entre superficies se expresa a través de una igualdad que involucra al área buscada.

De hecho, Arquímedes utilizó un concepto análogo al de los

*Indivisibles de una figura*<sup>(1)</sup> que muchos siglos después se usaría para resolver ciertos problemas del cálculo integral. El uso de este procedimiento le permitió enfrentar una de las mas fuertes limitantes que presenta el método de exhaución: que siendo un método de demostración irreprochable, no es un método de descubrimiento y su aplicación requiere necesariamente del conocimiento previo del resultado que se va a demostrar.

Sin embargo, para considerar válido un resultado, Arquímedes se remitía a una demostración formal usando el método de exhaución, por lo que su trabajo no deja nada que desear desde el punto de vista del rigor. Todavía en el siglo XVII cuando los matemáticos mas escrupulosos querían dejar fuera de dudas un resultado, daban de él una demostración *par reducción al absurdo* al estilo de Arquímedes.

Así pues, para iniciar esta breve visión histórica del desarrollo de la integral hablaremos en este capítulo del trabajo de Eudoxo en torno al área de los círculos y veremos algunos ejemplos del trabajo de Arquímedes en áreas y volúmenes.

## 1 EUDOXO. EL METODO DE EXHAUCION.

Eudoxo (408-355 aC) aportó tres grandes contribuciones para el desarrollo de las matemáticas: una definición, un principio y un método. La definición, se refiere a las proporciones. La concepción Pitagórica de las proporciones había sido el

---

(1) Una forma de calcular áreas y volúmenes ampliamente extendida durante el siglo XVII, como veremos en el siguiente capítulo, se basó en concebir a una superficie como compuesta por un número infinito de líneas paralelas equidistantes a las que se les llamó "los indivisibles" de esa superficie.

resultado de la identificación entre magnitudes geométricas y números enteros. Por ejemplo, dos líneas eran una a la otra, como la razón entre el número de unidades que cabía en cada una de ellas. El descubrimiento de la inconmensurabilidad de algunas líneas respecto a otras, obligó a dejar de lado esta idea pues no podía adquirir el carácter general de una definición.

Eudoxo propuso una definición que evitó estas dificultades al no requerir que dos de los elementos de una proporción fueran números, sino trabajar con cuatro magnitudes geométricas. Euclides la transmitió de la siguiente forma:

*"se dice que cuatro magnitudes están en la misma proporción, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, cuando si se toman cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera y cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, los primeros equimúltiplos formados exceden, son iguales o son menores que los segundos equimúltiplos respectivamente tomados en el orden correspondiente"* [3].

Es decir,  $a:b = c:d$  si dados cualesquiera dos enteros positivos  $m$  y  $n$ , se cumple que

$$\begin{array}{l} \text{ó} \\ \text{ó} \end{array} \begin{array}{l} na > mb \quad \text{y} \quad nc > md \\ na = mb \quad \text{y} \quad nc = md \\ na < mb \quad \text{y} \quad nc < md \end{array}$$

Para las razones corrientes conmensurables, la segunda de estas 3 explicaciones sería suficiente. Pero la esencia de esta teoría de proporciones radica en la primera y la tercera, porque la segunda nunca es válida para los inconmensurables. La definición de proporciones así establecida involucra sólo cantidades geométricas y múltiplos enteros de ellas.

Cuando la razón no es expresable como cociente de dos enteros, nosotros la sustituimos por un sólo número o símbolo como  $\pi$  ó  $e$ . Aunque Eudoxo no lo hacía como nosotros, si consideraba a la razón de dos cantidades inconmensurables como un número, lo que apuntaba el camino correcto para trabajar con este tipo de magnitudes.

El principio propuesto por Eudoxo --que es sustento del método de exhaustión--, fue tratado por Arquímedes como postulado y es usual que se le vincule mas con el nombre de este último que con el de Eudoxo. Dice así

*"Trácese dos magnitudes distintas. Si de la mas grande de ellas se sustrae una magnitud mas grande que su mitad, y de esta se vuelve a quitar una magnitud mayor que su mitad; y si este proceso se repite continuamente, quedará finalmente una magnitud que será menor que la mas pequeña de las dos magnitudes trazadas" [3].*

Es decir: sean  $M_0$  y  $\epsilon$  las dos magnitudes trazadas inicialmente, si construimos cantidades  $M_1, M_2, M_3, \dots$  tales que:

$$1/2 M_0 < M_1 < M_0$$

$$1/2 M_1 < M_2 < M_1$$

$$1/2 M_2 < M_3 < M_2, \text{ etc,}$$

entonces existe  $n$  tal que  $M_n < \epsilon$ .

El método propuesto por Eudoxo para el cálculo de áreas y volúmenes también muestra un abandono de las concepciones numéricas como habíamos notado en su definición de proporción. Para trabajar con el área del círculo, Eudoxo recurrió a una idea que había sido desarrollada tiempo antes por otros matemáticos: inscribir en el círculo un polígono regular e ir duplicando sucesivamente el número de lados buscando, aparentemente, «exhaustar» su área. Usa el principio que antes mencionamos para concluir que siempre existe un polígono cuya área difiere de la del círculo en menos que una cantidad fijada de antemano (lo mismo podía hacerse con polígonos circunscritos). Después demuestra que se cumple una proporción que involucra las áreas de dos círculos de la siguiente forma: supone que las dos razones no son iguales, pero tomando cualquiera de las dos desigualdades posibles en este caso llega a una contradicción, por lo que concluye que deben ser iguales.

Generalizando esta idea, Eudoxo desarrolló un método riguroso para tratar problemas de áreas y volúmenes encerrados en figuras curvilíneas.

Veamos cómo aplicó este método en el teorema que aparece como proposición 2 del libro XII de *Los Elementos de Euclides*. Su demostración requiere de un resultado que se encuentra en la proposición 1 del mismo libro. Esta presentación de las proposiciones mencionadas se hará usando terminología moderna para facilitar su comprensión, tratando siempre de no falsear la idea original.

PROPOSICION 1: *Dos polígonos semejantes<sup>(2)</sup> inscritos en círculos son uno al otro como el cuadrado de los diámetros de los círculos.* [14]

Considerando como un hecho conocido que las áreas de polígonos semejantes están en la misma razón que los cuadrados de cualesquiera dos lados correspondientes, será suficiente mostrar que una pareja de lados correspondientes están en la misma razón que los diámetros.

Tomemos los polígonos semejantes  $A_1B_1C_1D_1E_1$  y  $A_2B_2C_2D_2E_2$  inscritos en los círculos correspondientes  $C_1$  y  $C_2$  (fig. 1), los cuales tienen como diámetros  $B_1Q_1$  y  $B_2Q_2$  respectivamente. Entonces, los ángulos  $B_1A_1E_1$  y  $B_2A_2E_2$  son iguales, y los lados que los determinan proporcionales, ya que, por hipótesis, los polígonos son semejantes.

Por lo tanto,  $\Delta B_1A_1E_1 \approx \Delta B_2A_2E_2$ . Fijándonos ahora en otro par de ángulos interiores, la semejanza de los triángulos nos garantiza que

$$\sphericalangle A_1E_1B_1 = \sphericalangle A_2E_2B_2$$

También sucede que

$$\sphericalangle A_1E_1B_1 = \sphericalangle A_1Q_1B_1$$

y

$$\sphericalangle A_2E_2B_2 = \sphericalangle A_2Q_2B_2$$

(2) En el libro VI de "Los Elementos", Euclides da la siguiente definición: "Figuras rectilíneas semejantes son aquellas que tienen sus ángulos correspondientes iguales y los lados alrededor de estos ángulos, proporcionales" [14].



por ser inscritos y subtender los mismos arcos. Por lo tanto

$$\sphericalangle A_1Q_1B_1 = \sphericalangle A_2Q_2B_2$$

y como los ángulos  $B_1A_1Q_1$  y  $B_2A_2Q_2$  son rectos, llegamos a que

$$\Delta A_1Q_1E_1 \approx \Delta A_2Q_2E_2$$

De aquí que: 
$$\frac{B_1Q_1}{B_2Q_2} = \frac{B_1A_1}{B_2A_2}$$

con lo que concluye esta demostración.

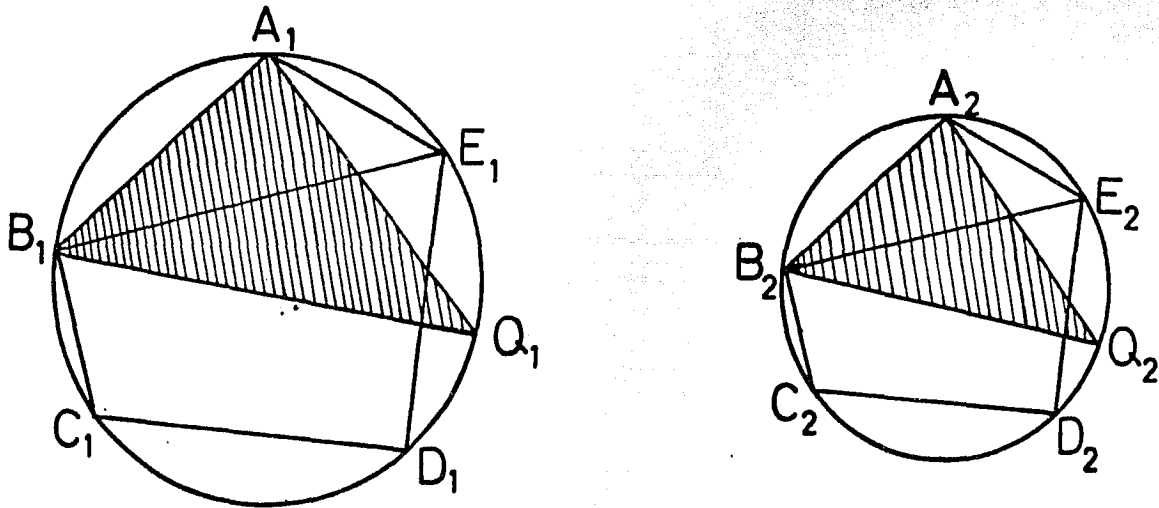


figura 1.

**Proposición 2:** *Los círculos son uno al otro como los cuadrados de sus diámetros [14]*

Haremos la demostración en dos pasos. En el primero, se demuestra que el área del círculo puede ser «exhaustada» por medio de las áreas de polígonos regulares de  $2^n$  lados inscritos en ellos, y en el segundo se utiliza el método de reducción al absurdo para llegar al resultado final.

Inscribamos el cuadrado  $A_1B_1C_1D_1$  en el círculo  $C_1$  (fig 2-a). El área de este cuadrado es mayor que la mitad del área del círculo porque si se trazan tangentes al mismo por los puntos  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  y  $D_1$  formando un cuadrado circunscrito, el área del cuadrado  $A_1B_1C_1D_1$  es exactamente la mitad del circunscrito. Para verificar que esto es así, llamemos  $l_1$  al lado del cuadrado

inscrito y  $l_2$  al del cuadrado circunscrito; por el teorema de Pitágoras

$$(\frac{l_2}{2})^2 + (\frac{l_2}{2})^2 = l_1^2$$

de donde se concluye que

$$2l_1^2 = l_2^2.$$

Y como el círculo es menor que el cuadrado circunscrito, llegamos a que el inscrito tiene que tener un área mayor que la mitad del círculo.

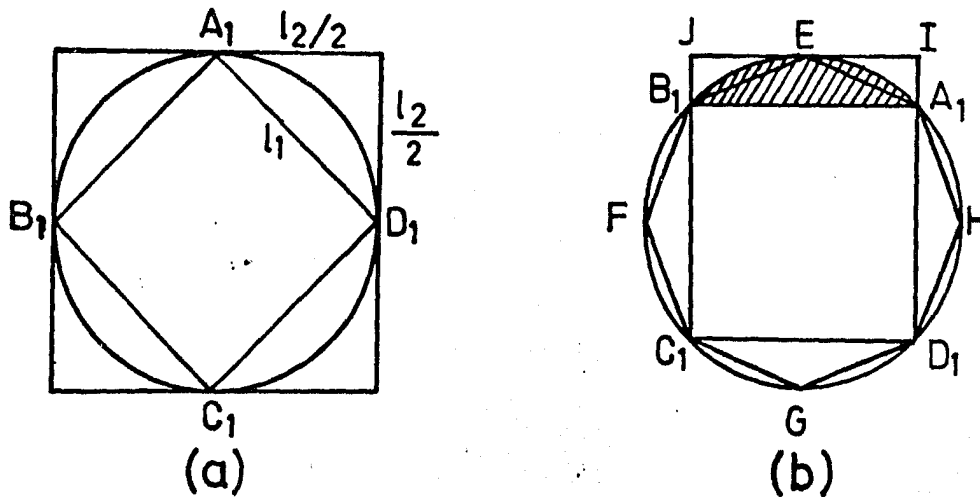


figura 2.

Ahora consideremos el octágono regular que se obtiene bisectando los arcos  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $C_1D_1$  y  $D_1A_1$  en los puntos E, F, G y H respectivamente (fig 2-b). Demostraremos que del exceso de área del círculo respecto al cuadrado, el octágono abarca más de la mitad.

El área del sector circular  $A_1EB_1$  es menor que el área del rectángulo  $A_1IJB_1$ . Se puede verificar fácilmente que el triángulo  $A_1EB_1$  incluye exactamente la mitad del área del rectángulo  $A_1IJB_1$ , y como el sector circular tiene un área menor que este rectángulo, llegamos a que el octágono regular abarca más de la mitad del área del sector. Si continuamos este proceso bisectando cada vez los nuevos arcos, el llamado postulado de Arquímedes nos garantiza que la diferencia entre el área del círculo y la del polígono regular de  $2^n$  lados, puede hacerse menor que cualquier cantidad previamente dada tomando  $n$  suficientemente

grande.

Para terminar la demostración consideremos que los dos círculos tienen áreas  $a_1$  y  $a_2$  respectivamente, y designemos sus diámetros por  $d_1$  y  $d_2$ . Supongamos que:

$$a_1/a_2 < d_1^2/d_2^2 \dots \dots \dots (1)$$

entonces, existe algún círculo con área  $a_3$  tal que  $a_2 > a_3$  que satisface que:

$$a_1/a_3 = d_1^2/d_2^2 \dots \dots \dots (2)$$

Por lo demostrado en el paso anterior podemos encontrar un polígono regular de  $2^m$  lados inscrito en el círculo de área  $a_2$ , tal que su área  $P$  satisfaga:

$$a_3 < P < a_2 \dots \dots \dots (3)$$

Consideremos otro polígono regular de  $2^m$  lados, con área  $P_1$ , inscrito en el círculo de área  $a_1$ ; entonces, la proposición 1 nos garantiza que

$$P_1/P = d_1^2/d_2^2$$

y dado que se cumple la igualdad (2), obtenemos:

$$P_1/P = a_1/a_3.$$

Como sabemos que  $P_1 < a_1$ , llegamos a que  $P < a_3$ , lo que contradice la relación (3). Por lo tanto, la expresión (1) es falsa. Análogamente se demuestra que también es falsa la relación:

$$a_1/a_2 > d_1^2/d_2^2$$

con lo que queda demostrada la proporción 2.

## 2 ARQUIMEDES. UN METODO PARA EL DESCUBRIMIENTO Y OTRO PARA LA DEMOSTRACION.

En manos de Arquímedes (287-212 aC), el método de exhaución que se había usado para demostrar unos cuantos teoremas, se transformó en un poderoso instrumento para calcular muchísimas cuadraturas y cubaturas (es decir, áreas y volúmenes), y para determinar centros de gravedad.

Su trabajo en este terreno fue un evidente progreso respecto a lo que habían logrado sus antecesores, pues no sólo perfeccionó resultados ya conocidos sino que trabajó con figuras que no habían sido estudiadas. Se conocía ya la razón entre el área de dos círculos; Arquímedes trabajó la equivalencia entre el área de un círculo y la de un triángulo que tenía por altura el radio y por base la circunferencia rectificada. Y para rectificar la circunferencia se basó en el estudio de una espiral que hoy lleva su nombre. Lo mismo ocurre con respecto a la esfera: se conocía la razón entre los volúmenes de dos esferas; Arquímedes trabajó con cascos esféricos y extendió sus investigaciones para abarcar también áreas y centros de gravedad.

En la cuadratura de la parábola, Arquímedes penetra a un terreno totalmente virgen, lo mismo que en sus estudios sobre las razones de figuras comprendidas entre dos espirales sucesivas. Tampoco habían sido trabajadas las relaciones que él descubrió entre segmentos de esfera, de paraboloides, elipsoides e hiperboloides de revolución, y el cono.

Todas estas áreas y volúmenes, la mayoría de las cuales trasciende la geometría elemental, se estudian actualmente mediante los recursos del cálculo y sobre la base de conocimientos algebraicos; recursos y conocimientos que los griegos ignoraban. En la matemática griega es posible descubrir identidades y transformaciones algebraicas que hoy se realizan con letras y entre polinomios, pero se encuentran ocultas tras un ropaje geométrico, como veremos mas adelante.

Ya habíamos mencionado que el método de exhaustión requería del conocimiento previo de los resultados, así que durante mucho tiempo quedó abierta la pregunta: ¿cómo conocía Arquímedes los resultados de las cuadraturas y cubaturas que luego demostraba?. En 1906, Heiberg, historiador de la ciencia, descubrió un manuscrito que contenía una escritura superior y debajo de ella otra más antigua que no había sido raspada sino solamente lavada. Esta última era obra de Arquímedes y contenía, entre otros escritos, "El Método".

Se trata de una carta dirigida por Arquímedes a su amigo Eratóstenes, en la que le manifiesta que ha creído conveniente exponerle *"la particularidad de un método según el cual te será posible captar ciertas cuestiones matemáticas por medios mecánicos"*, pero agregando poco después *"que la investigación hecha por este método no implica verdadera demostración"*, y sólo da *"cierta apariencia de verdad"* [1]. La clave del método radica en la idea de que las figuras planas se componen de sus cuerdas y los sólidos de sus secciones, idea que no se deduce de postulados matemáticos, ni tampoco es fruto de un experimento ya que el proceso es inexperimentable. Sin embargo, a través de él Arquímedes llega a resultados correctos.

La explicación a esto hay que buscarla en el hecho de que Arquímedes usó este método para determinar lo que hoy encontramos por medio de integrales definidas, es decir, usando límites de sumas cuyos sumandos son producto de dos factores: la función integrando y un incremento o diferencial. Ahora bien, el resultado de la integración depende exclusivamente de la forma y propiedades de la función integrando mientras que el otro factor está destinado a mantener la homogeneidad permitiendo la aplicación del límite. Es pues explicable que Arquímedes al despreciar en absoluto la homogeneidad y atender exclusivamente a las propiedades de lo que hoy sería una función, logre resultados correctos.

Analizaremos tres aspectos del trabajo de Arquímedes: 1) la cuadratura de la parábola, 2) el volumen de una esfera y el de un

casco esférico, y 3) la espiral de Arquímedes. En el primero buscaremos contrastar el resultado «heurístico» con la demostración formal; en el siguiente, la búsqueda consiste en mostrar las ecuaciones modernas que se ocultan tras las formulaciones de Arquímedes; y en el último, nos interesa resaltar la semejanza con nuestra actual definición de integral definida.

#### 1.- La cuadratura de la parábola

Arquímedes le llama *segmento* de una curva convexa a una región acotada por una línea recta y una porción de la curva (fig. 3). En el caso de un segmento parabólico de base AC (fig. 4), el punto B de la curva que se encuentra más lejos de la base se llama *vértice* del segmento, y la distancia de B a AC es la altura. Arquímedes demostró que el área del segmento parabólico es igual a cuatro tercios del área del triángulo ABC.



figura 3.

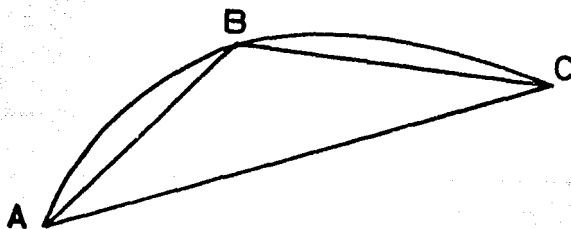


figura 4.

Primero veremos como llegó a este resultado usando la técnica que desarrolla en *El método*. Después, de las dos demostraciones que da de él en su tratado *Cuadratura de la Parábola*, analizaremos aquí la primera.

**Area de un segmento parabólico:**

Sea  $ABC$  un segmento comprendido entre la recta  $AC$  y la parábola  $ABC$ ; divídase  $AC$  por la mitad en  $D$  y trácense la recta  $DRE$ , paralela al diámetro<sup>(3)</sup>, y las rectas  $AB$  y  $BC$ . (fig 5) Digo que el segmento  $ABC$  es cuatro tercios del triángulo  $ABC$ . [1]

Como se ve en la figura,  $CF$  es una recta tangente al segmento parabólico en el punto  $C$ ;  $AF$ ,  $OM$  y  $DE$  son perpendiculares a la base del segmento parabólico;  $D$  es el punto medio de  $AC$ ; y la distancia de  $K$  a  $C$  es igual que la de  $K$  a  $H$ .

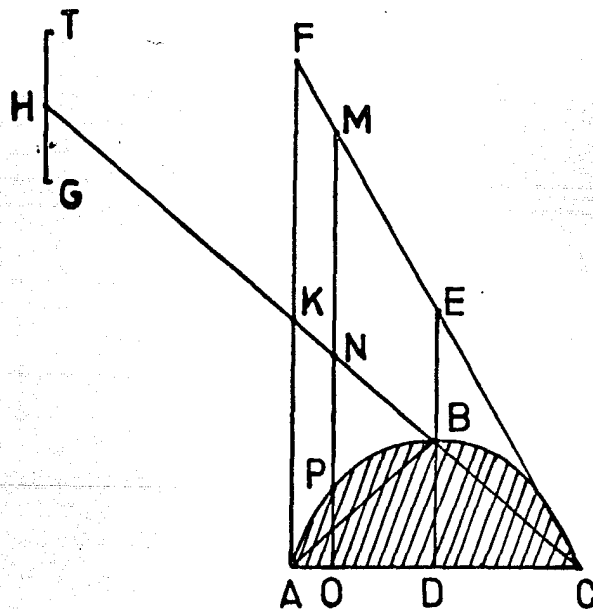


figura 5.

Sea  $O$  un punto arbitrario en la base  $AC$  y levantemos sobre él una perpendicular a dicha base. Esta perpendicular interseca al triángulo  $AFC$  en  $MO$ , y al segmento parabólico en  $OP$ . La idea de Arquímedes consiste en considerar a la recta  $CH$  como una palanca con punto de apoyo en  $K$  y buscar una relación de equilibrio entre las cuerdas que forman el triángulo  $AFC$  (tipo  $OM$ ) y las que forman el segmento parabólico (como  $OP$ ) suponiendo

(3) Le llama diámetro, a lo que actualmente conocemos como eje de la parábola.

para ello que éstas últimas son trasladadas al otro extremo de la palanca. Luego supone que es válida la misma relación de equilibrio entre las áreas del segmento parabólico y del triángulo AFC y, por último, comparar las áreas de los triángulos AFC y ABC para llegar al resultado. Veamos como lo hace.

Arquímedes usa un lema (que demuestra en *Cuadratura de la Parábola*), según el cual se cumple que

$$OM:OP = CA:AO^{(4)}$$

Por otro lado, la semejanza de los triángulos AKC y ONC garantiza que

$$CA:CO = CK:CN \Rightarrow CA:(CA-CO) = CK:(CK-CN) \Rightarrow CA:AO = CK:KN$$

y como por hipótesis  $CK=KH$ , llegamos a:

$$OM:OP = KH:KN \Rightarrow OM \cdot KN = OP \cdot KH$$

Luego traslada el segmento OP al otro extremo de la palanca colocando su punto medio (que coincide con su centro de gravedad) en H y llamando TG al segmento trasladado. Así, la última ecuación se transforma en:

$$OM \cdot KN = TG \cdot KH$$

(4). Para llegar a esta igualdad, primero demuestra, en el lema 4 de la parte I, el siguiente resultado:

Por ser ABC un segmento de parábola, se tiene  $DC^2:PO^2 = BD:BO$ . La semejanza de los triángulos DCB y QIB (ver fig. de esta nota) implica que  $BD:BO = BC:BI$ , de donde  $DC^2:DO^2 = BC:BI$ .

ONC y DBC también son triángulos semejantes, así que  $BC^2:BN^2 = DC^2:DO^2$ , llegando a  $BC^2:BN^2 = BC:BI$ , o sea

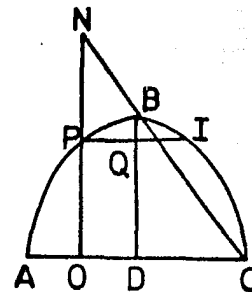
$$BN^2 = BI \cdot BC \Rightarrow BC:BN = BN:BI$$

$$\Rightarrow (BC+BN):(BN+BI) = BC:BN$$

$$\Rightarrow NC:NI = BC:BN$$

$$\Rightarrow NO:NP = DC:DO$$

$$\Rightarrow OA:DO = ON:OP$$



Después, en el lema 5, demuestra que: (ver fig 5 del texto)

$ON=NM$  y  $OA=OC \Rightarrow OM:ON = OC:AO$ . Por otro lado, sabemos que  $ON:OP = AO:AO$ , así que  $OM:OP = OC:AO$ , es decir,  $(OM-OP):OP = (OC-AO):AO$ , de donde se concluye que  $PM:OP = OC:AO$ .



Pero  $N$  es el centro de gravedad de  $OM$  (ya que  $CK$  pasa por los puntos medios de todas las rectas del triángulo  $AFC$  paralelas a  $AF$ ). De modo que esta última ecuación puede entenderse como una igualdad entre momentos (un momento es el producto del peso por la longitud del brazo de la palanca). De esta forma, la ley de la palanca descubierta por el propio Arquímedes, nos garantiza que la palanca esta en equilibrio si mantenemos en su posición original a  $OM$  y trasladamos  $OP$  colocando su centro de gravedad en  $H$ .

Esto se cumple para todas las posiciones de  $O$  sobre  $AC$ . Arquímedes pasa de aquí a la ecuación de momentos entre las áreas al suponer que la igualdad que es válida para las cuerdas constituyentes, sigue siendolo para las figuras completas. Así concluye que el triángulo  $AFC$  en su posición original equilibra al segmento parabólico trasladado de tal forma que su centro de gravedad quede en  $H$ . Para formular la ecuación que corresponde a esta conclusión hay que recordar que el centro de gravedad del triángulo  $ACF$  esta sobre la recta  $KC$  a un tercio de la distancia de  $K$  a  $C$ , por lo que:

$$A(\text{seg parab}) KH = Q(AFC) (1/3)KC$$

y como  $KH = KC$ , llegamos a:

$$A(\text{seg parab}) = (1/3) Q(AFC)$$

Es decir, el área del segmento parabólico  $ABC$  es  $1/3$  del área del triángulo  $AFC$ , o  $4/3$  del área del triángulo  $ABC$ .

En la demostración formal de esta proposición, Arquímedes aplica el método de exhaución de la siguiente forma: inscribe dentro del segmento parabólico, un triángulo de área  $A$  que tenga la misma base y el mismo vértice que el segmento; luego, tomando cada uno de los lados de este primer triángulo como bases, inscribe otros dos triángulos en forma similar. Continuando este proceso obtiene una serie de polígonos de un número cada vez mayor de lados, como se muestra en la figura 6.

Arquímedes demuestra que el área del  $n$ -ésimo de estos polígonos está dada por la serie

$$A(1 + 1/4 + 1/4^2 + \dots + 1/4^{n-1}) \dots \dots \dots (4)$$

donde A es el área del primer triángulo inscrito. De aquí pasa a encontrar la suma de los primeros n términos y le agrega un residuo usando la igualdad:

$$A(1 + 1/4 + 1/4^2 + \dots + 1/4^{n-1} + (1/3)(1/4^{n-1})) = (4/3)A \dots (5)$$

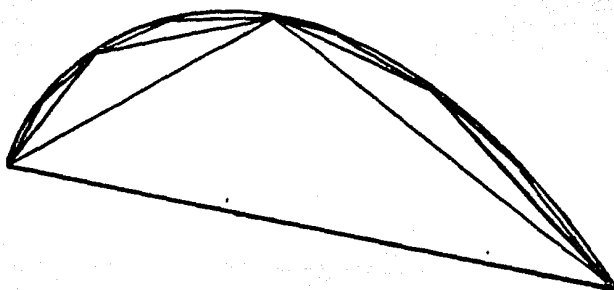


figura 6.

Conforme el número de términos crece, la serie va "llenando" a  $(4/3)A$  en el sentido griego de que el residuo  $(1/3)(1/4^{n-1})A$  se puede hacer tan pequeño como se desee. Por último, Arquímedes demuestra que el área del segmento parabólico debe ser igual a  $(4/3)A$ , de la siguiente manera:

Si no fuera igual, sería mayor o menor que  $(4/3)A$ . Llamemos al área del segmento parabólico  $\mathcal{A}$  y sea  $K=(4/3)A$ . Supongamos inicialmente que  $\mathcal{A} > K$ . Inscribiendo triángulos dentro del segmento como se explicó antes, llegará el momento en que la diferencia entre el área del segmento parabólico y la del polígono inscrito sea menor que  $\mathcal{A} - K$ , es decir:

$$\mathcal{A} - A[1 + 1/4 + 1/4^2 + \dots + 1/4^{N-1}] < \mathcal{A} - K$$

$$\Rightarrow A[1 + 1/4 + 1/4^2 + \dots + 1/4^{N-1}] > K = (4/3)A$$

lo cual contradice la igualdad (5). Supongamos ahora que  $\mathcal{A} < K$ . Si construimos áreas a través de ir dividiendo entre 4 el área de A, es decir :

$$A, (1/4)A, (1/4^2)A, \dots$$

llegará el momento en que, para alguna N,

$$(1/4^{N-1})A < K - A$$

pero

$$K - A[1 + 1/4 + 1/4^2 + \dots + 1/4^{N-1}] = (1/3)(1/4^{N-1})A$$

$$< (1/4^{N-1})A$$

$$< K -$$

$$\Rightarrow A[1 + 1/4 + 1/4^2 + \dots + 1/4^{N-1}] > A$$

lo que contradice la afirmación de que (4) es el área de un polígono inscrito en el segmento parabólico.

## 2.- El volumen de una esfera y el de un casco esférico.

En la proposición 2 de *El método*, Arquímedes compara el volumen de una esfera con el del cilindro circular recto que la circunscribe y también con el volumen de un cono circunscrito en uno de sus hemisferios. Para ello, considera a la esfera como engendrada por un círculo que gira, al cono lo construye haciendo girar un triángulo y al cilindro por la rotación de un rectángulo.

Análogamente, en la proposición 7 compara el volumen de un segmento esférico de una base (o casco) con el del cono que tiene la misma base y la misma altura que el segmento.

En los dos casos, analizaremos primero el razonamiento de Arquímedes usando los recursos que nos brinda la geometría analítica, para compararlo después con la forma en que él encontró estos resultados.

### Volumen de la esfera

*Toda esfera es cuatro veces mayor que el cono cuya base sea el círculo máximo de la esfera y cuya altura sea igual al radio de la esfera; a su vez, el cilindro cuya base sea el círculo máximo de la esfera y cuya altura sea el diámetro de la esfera, será igual a vez y media la esfera. [1]*

Para generar la esfera, vamos a girar alrededor del eje X un círculo de radio  $a$  tangente al eje Y en el origen, cuya ecuación es:

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2, \text{ es decir, } x^2 + y^2 = 2ax. \dots \dots (6)$$

El área de cada una de las secciones transversales de la esfera así obtenida, está dada por  $\pi y^2$ . (ver fig 7). Análogamente, girando la recta  $y=x$  generamos un cono cuyas secciones transversales variables tienen por área  $\pi x^2$ .

La ecuación (6) puede entonces reescribirse como sigue:

$$\pi x^2 + \pi y^2 = \pi 2ax$$

Buscando una interpretación equivalente para el miembro de la derecha de esta igualdad, podemos pensar en hacer girar la recta  $y=2a$  alrededor del eje X para obtener un cilindro cuyas secciones transversales tienen por área  $\pi(2a)^2$ . Para que la ecuación incluya esta área, bastara escribirla de la siguiente forma

$$2a(\pi x^2 + \pi y^2) = \pi x(2a)^2 \dots \dots \dots (7)$$

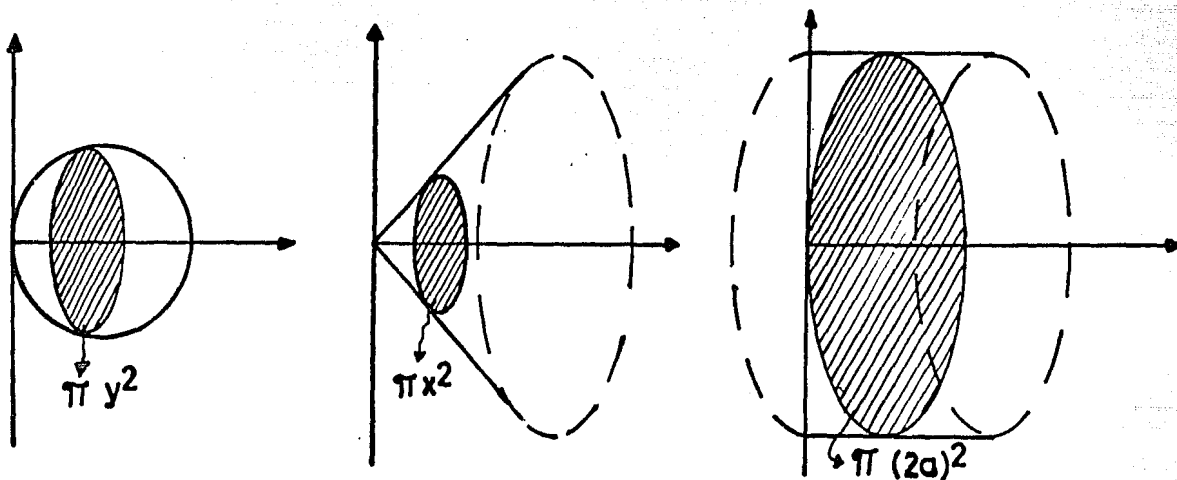


figura 7.

Esta ecuación involucra las áreas de 3 círculos que son la intersección del mismo plano con los 3 sólidos de revolución. El plano es perpendicular al eje X y está a una distancia  $x$  del origen. El cono y el cilindro tiene la misma base de radio  $2a$  (fig. 8) y su altura común también tiene longitud  $2a$ . En la figura 8 las llaves señalan las 3 secciones circulares. Arquímedes imagina que los 3 círculos que aparecen en la ecuación pueden ser separados y colocados en una balanza (eje X) cuya cuña se localiza en el origen. En el lado derecho de la palanca (a una

distancia  $x$  del origen) deja a la sección circular del cilindro. Los otros dos círculos son trasladados al punto H de abscisa  $-2a$ , colgándolos con su centro vertical bajo H como suspendidos por una cuerda. Entonces interpreta la ecuación (7) como una igualdad entre momentos que nos garantiza que la balanza estará en equilibrio al colocarse los discos como antes indicamos.

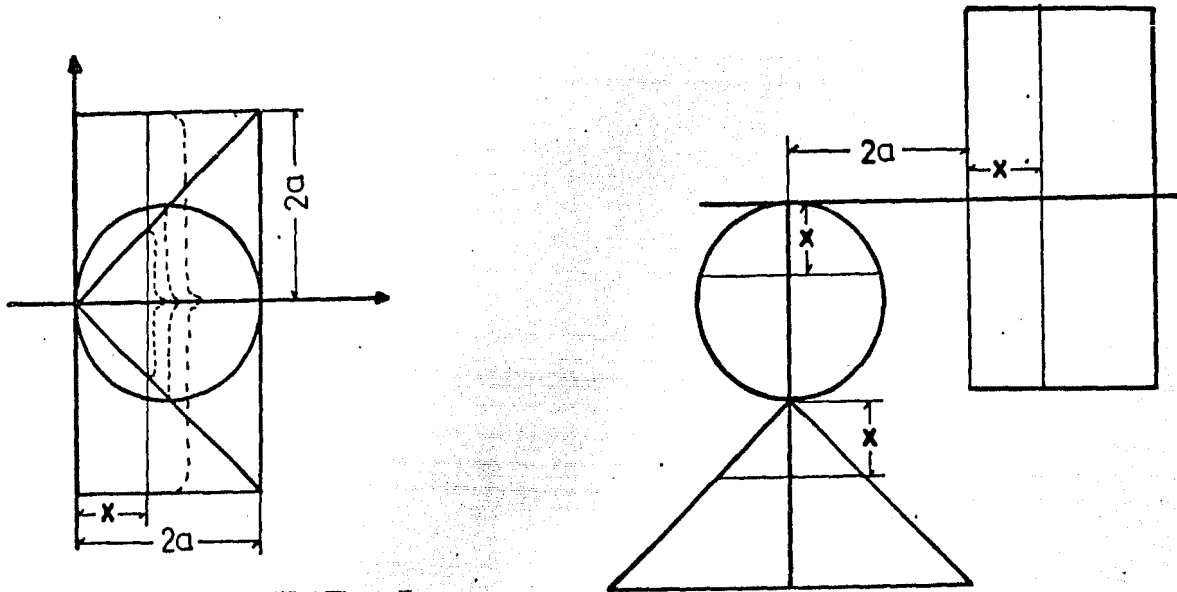


figura 8.

Arquímedes pasa de aquí a la ecuación entre volúmenes utilizando la expresión para el volumen del cono debida a Demócrito:

$$\frac{V}{L} + \frac{[\pi(2a)^2 \cdot 2a]/3}{L} = \frac{\pi(2a)^2 \cdot 2a}{L}$$

de donde se obtiene:

$$V = (4\pi a^3)/3.$$

Comparemos esta construcción con la forma en que Arquímedes la plantea. Según se ve en la figura 9,  $AC=AS+SC$ , por lo que

$$AC \cdot AS = (AS + SC) \cdot AS = (AS)^2 + SC \cdot AS,$$

y por la propiedad de la media geométrica sabemos que

$$SC \cdot AS = (SO)^2,$$

y como  $AS=SQ$ , llegamos a

$$CA \cdot AS = (SQ)^2 + (SO)^2$$

[Esta igualdad es equivalente a la ecuación  $x^2 + y^2 = 2ax$ , ya que  $CA=2a$ ,  $x=AS=SQ$ ,  $y=SO$ ].

Tomando en cuenta que por construcción de las figuras se cumple  $HA=CA=MS$  y  $SQ=AS$ , resulta que

$$HA:AS = CA:AS = MS:SQ = (MS)^2 : (MS \cdot SQ),$$

lo que nos lleva a concluir que

$$HA:AS = (MS)^2 : (OS^2 + SQ^2)$$

que es una relación entre los cuadrados de los radios de los discos equivalente a

$$2a/x = (2a)^2 / (x^2 + y^2)$$

de donde, simplemente multiplicando por  $\pi$  se llega a la relación entre las áreas de esos círculos que antes expresamos en la ecuación (7).

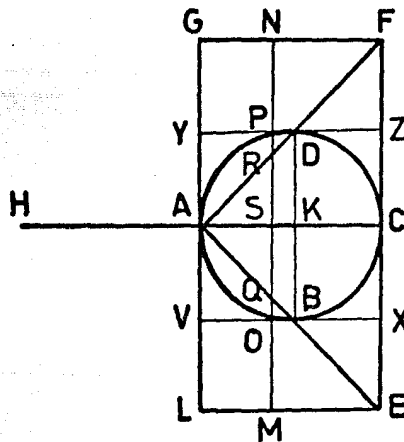


figura 9.

Arquímedes escribe esa relación entre áreas así:

$$HA:AS = (\text{circ. en el cilindro}) : [(\text{circ. en la esfera}) + (\text{circ. en el cono})].$$

Es decir, la sección circular del cilindro, permaneciendo en su lugar, equilibrará a las otras dos secciones colocadas de tal forma que su centro de gravedad quede en H. Y así, "llenados" con tales círculos, el cilindro (cuyo centro de gravedad está en K) equilibrará a la esfera y el cono colocados de forma que su centro de gravedad esté en H. En la terminología que usa Arquímedes

$$HA:AK = \text{cilindro} : (\text{esfera} + \text{cono AEF})$$

y como  $HA=2 \cdot AK$ , esta igualdad equivale a

$$\text{cilindro} = 2(\text{esfera} + \text{cono AEF})$$

por lo tanto

$$3(\text{cono AEF}) = 2(\text{esfera} + \text{cono AEF})$$

pero el cono AEF es igual al doble de la esfera ABCD, y es también 8 veces el cono ABD, tenemos que

$$8(\text{cono ABD}) = 2(\text{esfera})$$

y considerando que el cilindro VZ equivale a 6 veces el cono ABD, llegamos finalmente a la doble igualdad

$$\text{esfera ABCD} = 4 \cdot (\text{cono ABD}) = (2/3) \cdot (\text{cilindro VZ}).$$

### *Volumen de un segmento esférico*

*Cualquier segmento de esfera tiene con respecto al cono de la misma base y altura, la misma razón que la suma del radio de la esfera y la altura del segmento complementario tiene con respecto a la altura del segmento complementario. [1]*

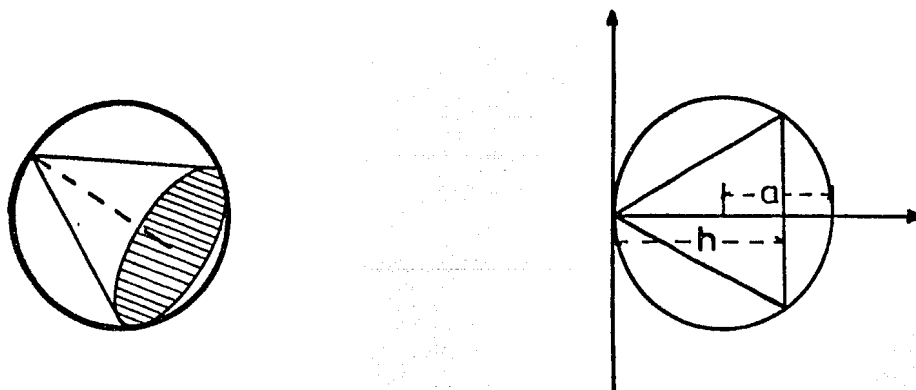


figura 10.

Llamémosle  $a$  al radio de la esfera,  $h$  a la altura del segmento esférico,  $V$  al volumen de dicho segmento y  $C$  al volumen del cono que tiene la misma base y la misma altura que el segmento esférico (fig. 10). Buscamos la razón entre  $V$  y  $C$ .

El radio de la base del cono que está dentro del segmento esférico está dado por la imagen de  $x=h$  bajo la ecuación de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 2ax$ , es decir:

$$y^2 = 2ah - h^2,$$

por lo que el volumen de este cono será

$$C = [\pi(2ah - h^2)h]/3$$

Para encontrar  $V$ , Arquímedes usa la misma igualdad de momentos que en el ejemplo anterior (fig 11), es decir, construye una ecuación de equilibrio entre 3 tipos de secciones circulares: 1) una sección que pertenece al segmento esférico, 2) una sección que pertenece al cono generado al girar la recta  $y = x$ , y 3) una sección que pertenece al cilindro generado al girar la recta  $y=2a$ . Así obtiene la ecuación:

$$2a(\pi x^2 + \pi y^2) = \pi(2a)^2 x,$$

donde  $0 < x < h$ .

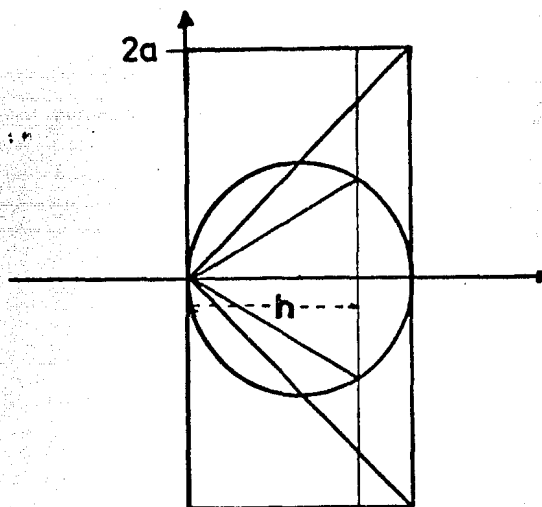


figura 11.

Para pasar de esta ecuación a la relación entre los volúmenes de los sólidos, sólo hay que tomar en cuenta que el centro de gravedad del cilindro estará en  $h/2$ . Así se llegaría a:

$$2a[V + (\pi h^2 h)/3] = (h/2)\pi(2a)^2 h$$

que se reduce a

$$V = \pi h^2 (3a - h)/3$$

De aquí que la razón buscada sea:

$$V/C = (3a - h)/(2a - h) = (a + 2a - h)/(2a - h).$$

donde  $2a - h$  es la altura del segmento complementario.



Comparemos ahora con la forma en que Arquímedes encuentra este resultado en *El método*. En la figura 12 se muestran las superficies planas que al girar generan: 1) un cilindro (IL) cuya base tiene radio GL, 2) un cono (AEF) cuya base tiene radio GF, 3) un segmento esférico AGB cuya base tiene radio GB, y 4) otro cono ADB con la misma base y altura que el segmento esférico.

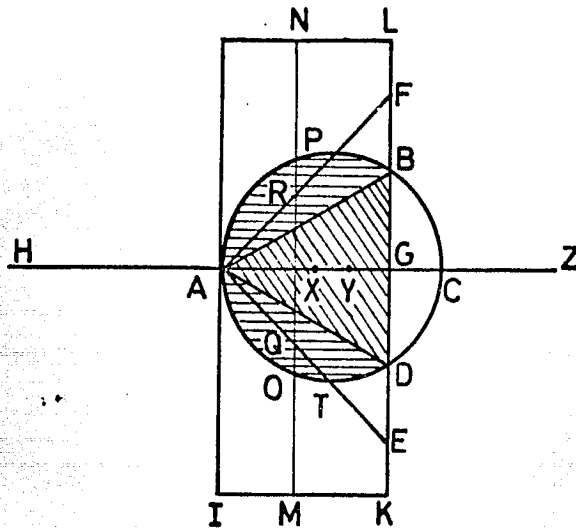


figura 12.

CZ es igual al radio de la esfera, es decir,  $CZ = (1/2)AC$ . Además, X es el punto medio de AG y Y está a  $1/3$  de la distancia de G a A.

Como ya habíamos visto, el círculo de diámetro MN equilibrará, respecto al punto de apoyo A, a los dos círculos de diámetro PO y RQ colocados de tal forma que su centro de gravedad este en H; por lo que, según Arquímedes, se tiene:

$$(\text{cilindro}) : [(\text{cono AEF}) + (\text{seg esf ADB})] = HA : AX.$$

pero

$$HA : AX = HA^2 : (AX \cdot HA) = HA^2 : (AY \cdot AX + YC \cdot AX)$$

por lo que la relación anterior puede escribirse como

$$(\text{cilindro}) : [(\text{cono AEF}) + (\text{seg esf ADB})] = HA^2 : (AY \cdot AX + YC \cdot AX) \dots (8)$$

Ahora vamos a buscar expresiones adecuadas para el cuadrado de los radios de cada una de las secciones circulares

1) para el radio de la base del segmento esférico y del cono ABD

usamos la propiedad de la media geométrica y llegamos a

$$AG \cdot GC = GB^2$$

[que es equivalente a la igualdad  $y^2 = 2ah - h^2$  ya que  $AG = h$ ,  $GC = 2a - h$ ,  $GB = y$ ].

2) el de la base del cono AEF opuede obtenerse de la siguiente expresión:

$$AG^2 = AG(3GY) \quad 3 \quad AG \cdot GY = GF^2$$

y puesto que

$$AG:AX = AY:GY = 2:1, \text{ es decir, } AG \cdot GY = AX \cdot AY$$

podemos expresar el cuadrado de este radio como:

$$AG^2 = GF^2 = 3 \quad AX \cdot AY.$$

3) en cuanto al radio de la base del cilindro tenemos que:

$$AC^2 = HA^2 = GL^2$$

Para llegar a comparar el volumen del cono ABD con el del segmento esférico, Arquímedes hace la siguiente comparación previa.

Como el área de la base es proporcional al cuadrado del radio y tanto el cono AEF como el cilindro II tienen la misma altura, se infiere que:

$$(\text{cilindro}):(\text{cono AEF}) = HA^2:(1/3 \quad AG^2) = HA^2:AX \cdot AY.$$

y esta última igualdad, usando la expresión (8), nos conduce a la ecuación:

$$(\text{cilindro}):(\text{seg esf ABD}) = AH^2:(YC \cdot AX)$$

Ahora bien, con el mismo argumento que antes, podemos afirmar que se cumple la igualdad:

$$\begin{aligned} (\text{cilindro}):(\text{cono ABD}) &= HA^2:(1/3 \quad BG^2) = HA^2:(1/3 \quad BG \cdot GC) = \\ &= HA^2:(YG \cdot GC) \end{aligned}$$

por lo tanto, llegamos a

$$(\text{seg esf ABD}):(\text{cono ABD}) = (YC \cdot AX):(YG \cdot GC).$$

Por último, tenemos que verificar que la razón entre estos dos volúmenes coincida con  $GZ:GC$ ; para ello, sabemos que

$$AG = 2AX = AY + YG = 3YG$$

de donde concluimos que  $AX = (3/2)YG$

y,  $YC = YG + GC = (1/3)AG + GC$

usando estas dos igualdades, Arquímedes encuentra una expresión equivalente a  $AX \cdot YC$

$$\begin{aligned} AX \cdot YC &= (1/3 AG + GC)YG = (1/3)AG \cdot (3/2)YG + GC \cdot (3/2)YG = \\ &= (1/2 AG + 3/2 GC)YG = [(1/2)(AG + GC) + GC] YG = \\ &= (1/2 AC + CG)YG = GZ \cdot YG \end{aligned}$$

y así llega finalmente a que

$$(\text{seg esf ABD}) : (\text{cono ABD}) = GZ : GC.$$

### 3.- La espiral de Arquímedes.

La geometría griega tenía un carácter esencialmente estático debido, fundamentalmente, al papel tan limitado que en ella jugaban los conceptos de movimiento y variabilidad. Sólo fueron estudiados en detalle los casos de movimiento uniforme --tanto rectilíneo, como circular-- y es en términos de ellos que Arquímedes define su famosa espiral. (fig. 13).

*Si permaneciendo fijo uno de los extremos de una recta, ésta gira sobre un plano con velocidad uniforme hasta volver a la posición inicial y si un punto, también con velocidad uniforme, recorre al mismo tiempo la recta que gira a partir del extremo fijo, este punto describirá una espiral. (definición 1 del libro Sobre las espirales). [15]*

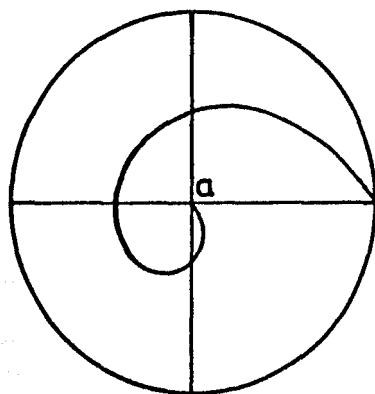


figura 13.

Actualmente, es fácil describir esta curva usando coordenadas polares. Sea  $\omega$  la rapidez angular constante de rotación de la línea, y  $v$  la rapidez constante con la que se

mueve el punto a lo largo de la línea. Entonces las coordenadas polares del punto en movimiento al instante  $t$ , son  $r=vt$  y  $\theta=\omega t$ . Así que la ecuación polar de la espiral es  $r = (v/\omega)\theta$ .

Las últimas proposiciones de *Sobre las espirales* están dedicadas al cálculo de áreas. Por ejemplo, Arquímedes prueba que el área de la región  $S$  acotada por la espiral de una revolución y por el segmento de recta que une su punto inicial con su punto final, es  $1/3$  del área del círculo con centro en el punto inicial y que pasa por el punto final de la espiral (fig. 14). Es decir, el área de  $S$  es igual a  $(1/3)\pi(2\pi a)^2$ . Más adelante, determina también el área de un sector de esta misma figura  $S$ .

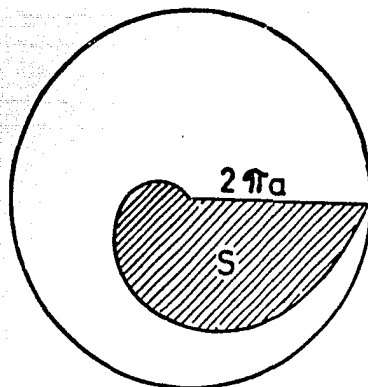


figura 14.

Las demostraciones son, aún hoy, bastante laboriosas; y esto se ve incrementado por el lenguaje geométrico que usó Arquímedes para desarrollarlas. Sin embargo, para mostrar la notable similitud de sus demostraciones con la definición moderna de integral, veremos uno de los resultados parciales de los que hace uso.

*Proposición: Al área comprendida por un arco de espiral de la primera revolución y las rectas que unen sus extremos con el origen, se le puede circunscribir una figura formada por sectores circulares e inscribirla otra de tal modo que el exceso de la figura circunscrita sobre la inscrita sea menor que un área dada. [15]*

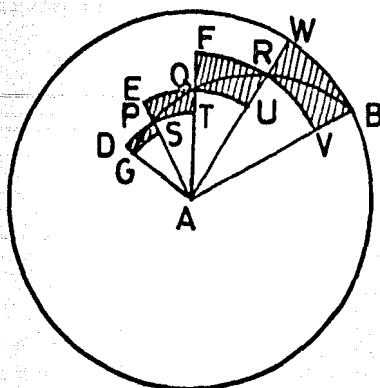


figura 15.

Sea  $BG$  un arco de la espiral que tiene por origen al punto  $A$ . Dibújese el círculo con centro en  $A$  de radio  $AB$  y trácense las rectas  $AB$  y  $AG$  como se indica en la figura 15. Procédase ahora a bisectar el ángulo  $BAG$ , hágase lo mismo con su mitad y así sucesivamente hasta tener un sector  $BAW$  menor que el área dada. A través de este proceso se han construido sectores limitados por los radios  $AG$ ,  $AP$ ,  $AQ$  y  $AR$ . Ahora, trácense arcos de circunferencia con cada uno de estos radios de tal forma que cada uno de los arcos abarque a dos sectores contiguos. Y se tendrán entonces dos figuras formadas por sectores circulares semejantes, una de las cuales está circunscrita y la otra inscrita en el área limitada por el arco  $BG$  de la espiral y las rectas  $AG$  y  $AB$ .

El sector  $ARV$  es igual al  $ARF$ , el  $AQU$  al  $AQE$  y el  $OPT$  al  $OPD$ , de modo que cada sector de la figura inscrita es igual a uno de los sectores de la circunscrita que tiene un lado común. De modo que al restar el área de la figura inscrita al de la circunscrita sólo quedará la diferencia entre el sector  $ABW$  y el  $AGS$ . La diferencia entre estas dos áreas es menor que la del sector  $ABW$  que, por construcción, es menor que el área dada. Así queda demostrado lo que se establece en la proposición.

## II. LOS METODOS DEL CALCULO INTEGRAL ANTERIORES A NEWTON Y LEIBNIZ EN EL SIGLO XVIII.

Con el derrumbe del feudalismo y el surgimiento y posterior consolidación del capitalismo, en países como Alemania, Francia, Holanda, Inglaterra e Italia entre otros, se abrieron grandes perspectivas de utilización de los descubrimientos en la medida en que contribuían al perfeccionamiento de las técnicas de producción y de los medios para producir. Estas condiciones favorecieron el surgimiento, hacia finales del siglo XVI, de una corriente de científicos que se preocupaban más por encontrar resultados prácticos que por el rigor de una demostración clásica. Tal característica estaba presente a principios del siglo XVII.

En la primera mitad del siglo XVII surgieron muchos métodos para resolver problemas de cálculo diferencial e integral, pero casi todos estaban vinculados a la resolución de un problema particular. Incluso se pueden encontrar ejemplos que cuando se traducen al lenguaje matemático moderno, muestran que la diferenciación y la integración son procedimientos mutuamente inversos, pero son ejemplos que se refieren a problemas específicos y no a teorías generales.

Además, los matemáticos de esta época se expresaban en el lenguaje ordinario sin ninguna notación especial, lo que dificultaba el llegar a formular con exactitud las posibles relaciones entre los problemas de los que se ocupaban. Por ejemplo, el resultado que actualmente expresamos por:

$$\int_0^a x^n dx = a^{n+1}/n+1.$$

donde  $n$  es un entero distinto de  $-1$ , ellos no podían expresarlo en una forma tan simple, sino que tenían que referirse a las áreas comprendidas bajo parábolas especiales. La terminología que utilizaban no les impedía ver conexiones tales como la que hay entre la rectificación de la parábola y la cuadratura de la hipérbola, o bien la relación de ciertos problemas inversos de

tangentes con cuadraturas, pero si pudo haber obstaculizado su camino hacia un entendimiento mas profundo del significado de estas relaciones.

Los diversos métodos de cuadraturas desarrollados durante el período de 1630 a 1660, estaban basados de una manera natural en la concepción de un área como una suma infinitesimal, aunque los matemáticos diferían en la manera de enfocar los problemas que planteaba este concepto. Es verdad que carecían de nociones y definiciones generales, pero al ensayar sus métodos en multitud de casos particulares, los matemáticos de esta época hicieron surgir, y contribuyeron a desarrollar, las ideas que iban a ser adoptadas mas tarde por Newton y Leibniz para abrirle paso al cálculo diferencial e integral moderno.

Los primeros trabajos de esta época tenían todavía un marcado carácter geométrico --heredado de la matemática griega-- pero conforme fue transcurriendo el siglo el papel del álgebra empezó a sobresalir dejando atrás a la geometría. Después de los trabajos de Descartes, Fermat y Wallis, el álgebra mostró que podía ser una metodología muy útil aun en el estudio de problemas geométricos.

En este capítulo analizaremos el desarrollo del concepto de integral en los trabajos de Cavalieri, Torricelli, Pascal, Fermat y Wallis pues, aunque hubo otras muchas contribuciones importantes, las suyas nos han parecido representativas del desarrollo que tuvo este concepto durante las primeras 6 décadas del siglo XVII.

El trabajo de Cavalieri, aunque polémico, ejerció una notable influencia en los métodos desarrollados posteriormente para calcular áreas y volúmenes. Partió de considerar que un sólido estaba compuesto por una infinidad de superficies que quedaban determinadas al intersectarlo con un plano móvil, y, análogamente, que una superficie estaba formada por infinidad de líneas paralelas equidistantes. En ambos casos, a las partes constitutivas las llamó los *indivisibles* de la figura. Su método

para determinar áreas y volúmenes consistió en comparar los indivisibles de una figura con los correspondientes indivisibles de otra figura ya conocida que tuviera la misma altura que la anterior. Usando este método, encontró el área bajo la curva  $y = x^n$  para varios valores de  $n$ .

Torricelli desarrolló, con notable perspicacia, el mismo tipo de ideas para determinar el volumen de un sólido infinito, usando para ello indivisibles en forma de cilindro (los de Cavalieri siempre habían sido planos). El procedimiento que empleó consiste en mostrar que cada una de las infinitas superficies cilíndricas que «conforman» a un hiperboloide de revolución, tiene la misma área que uno de los planos que «componen» a un sólido finito; para concluir de esto que el volumen de los dos sólidos es el mismo.

Durante las dos o tres décadas que siguieron a la publicación del primer libro de Cavalieri sobre sus indivisibles, diversos matemáticos desarrollaron demostraciones más o menos rigurosas de la fórmula que aquel había encontrado para calcular el área bajo la curva  $y = x^n$ , donde  $n$  es un entero positivo. Cada una de estas demostraciones enfrentó de diferente manera lo que hoy conocemos como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^n + 2^n + \dots + k^n}{k^{n+1}} = \frac{1}{n+1} ,$$

involucrando a las sumas de las  $n$ -ésimas potencias de los primeros  $k$  naturales para reemplazar los argumentos intuitivos de Cavalieri en términos de sus indivisibles geométricos.

Pascal desarrolló un método para encontrar sumas de potencias de los números de una progresión geométrica y usó este resultado para determinar áreas de figuras curvilíneas. Un punto esencial en la demostración de Pascal fue el hecho de que omitió a los términos de menor orden, aunque no como resultado de una teoría fundamentada matemáticamente (como sucede cuando aplicamos un límite), sino de un aparente traslado de los indivisibles geométricos de Cavalieri al terreno de la aritmética. En su trabajo, encontramos también un ingenioso método equivalente a



lo que actualmente conocemos como integración por partes, para ciertos casos particulares, y el cálculo de la integral de  $\text{sen}^n \phi$  para algunos valores de  $n$ .

Fermat, por su parte, dió una demostración para la integral de  $x^n$  cuando  $n$  es un fraccionario bastante diferente a las que mencionamos anteriormente. Usó, para ello, rectángulos circunscritos a una hipérbola, contruidos de forma tal que sus áreas formaban una progresión geométrica. Después, manejando la razón entre el área de un rectángulo y su sucesor y basandose en sus estudios acerca de series geométricas, encontró el área buscada.

En la misma dirección, el trabajo de Wallis en integración aritmética se basó en un manejo virtuoso de cierta relación entre las sumas de dos series, relación que actualmente resumimos en la expresión:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sum_{i=0}^m i^n}{(m+1)m^n} \right] = \frac{1}{n+1}$$

Wallis muestra que el numerador de la expresión entre paréntesis corresponde al el área bajo un segmento de parábola, y el denominador al área del paralelogramo circunscrito, y concluye de ahí la expresión para la integral de  $x^n$ .

Un problema difícil de establecer con claridad en el trabajo matemático de esta época, es el referente a las prioridades en los descubrimientos, ya que, por un lado, a multitud de matemáticos se les planteaban el mismo tipo de problemas y, por el otro, la organización del mundo científico era aún muy limitada lo que en muchos casos se traducía en que cada quien tenía un conocimiento imperfecto del trabajo de otros. Por esta razón, advertimos que es posible que los métodos de los que hablaremos puedan haber sido descubiertos por otros científicos además de los que aquí se mencionan.

## 1 LOS INDIVISIBLES DE CAVALIERI

Bonaventura Cavalieri (1598-1647), calculó áreas y volúmenes de figuras geométricas mediante la comparación entre secciones de una figura conocida y secciones de la que se pretende calcular. Su método geométrico, que recoge las ideas de Galileo y de otros de sus antecesores, muestra una actitud más abierta ante los procesos infinitos que la que asumieron los científicos griegos. Publicó su método por primera vez en 1635 en su libro *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (al que nos referiremos como *Geometría de los indivisibles*), y lo desarrolló posteriormente en *Seis ejercicios geométricos (Exercitationes geometricae sex)* aparecido doce años más tarde.

Cavalieri concibió a una superficie como compuesta por un número infinito de líneas paralelas equidistantes y a un sólido como formado por planos paralelos equidistantes. A estos elementos los llamó los indivisibles de la superficie o del volumen correspondiente. A pesar de que reconoció que el número de dichos elementos debía ser indefinidamente grande, no se detuvo a reflexionar sobre la naturaleza del infinito. En su método el infinito es usado como una noción auxiliar; no aparece en sus argumentos porque en cada paso centra su atención en la comparación entre los indivisibles de dos figuras, más que en el total de indivisibles contenidos en una sola área o volumen. La proposición que aún hoy se conoce en geometría sólida como el *teorema de Cavalieri*, es característica de su razonamiento:

*Si las áreas de las secciones correspondientes de dos sólidos que tienen la misma altura están en la misma razón en cada altura intermedia, entonces los volúmenes de los cuerpos sólidos están también en esa razón. [11]*

De manera análoga se establece el principio para el caso de las figuras planas, lo que ilustramos en la siguiente figura 16. Si  $GH = IJ$  independientemente de la posición de la paralela  $l$ , las áreas de las dos figuras coinciden.

Así pues, el método usado por Cavalieri consiste en comparar

los indivisibles de una figura cuya área o volumen se conoce, con los correspondientes indivisibles de otra figura. Lo que nosotros con la herramienta actual del cálculo diferencial e integral haríamos integrando funciones, Cavalieri lo hace usando expresiones como:

«omnes lineae» (ol) = «todas las líneas» (tl)

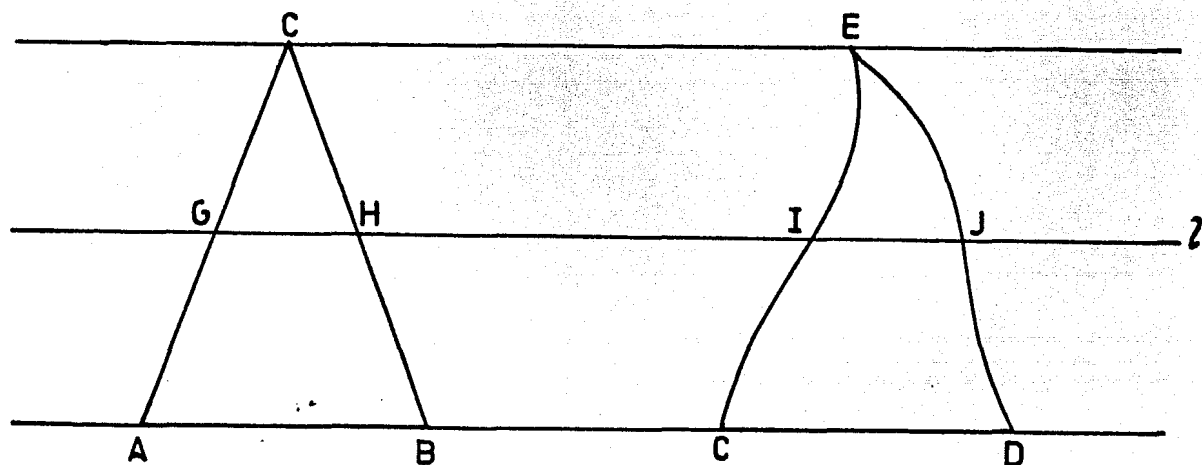


figura 16.

En su *Geometría de los indivisibles* encontró un equivalente a la expresión:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

para valores positivos de  $n$  hasta el  $n=9$ . Cavalieri enfatizó que su método podía generalizarse para todos los valores de  $n$ , pero sólo dió demostraciones completas hasta  $n=4$ , basándolas en varios lemas que son equivalentes a casos particulares del Teorema Binomial, como veremos más adelante.

Sus postulados jugaron un papel importante en el desarrollo de los métodos infinitesimales durante el periodo 1636-1655. Durante este periodo, los matemáticos Torricelli, Fermat, Roberval, Pascal, y Wallis llegaron, todos más o menos independientemente y por métodos diversos, a este resultado fundamental y lo extendieron a números negativos, fraccionarios, y aun a valores irracionales de  $n$ .

La falta de una fundamentación rigurosa, hizo que el método de los indivisibles fuera duramente criticado. Respondiendo a algunos de los ataques en su contra, Cavalieri presentó una ingeniosa comparación de los indivisibles de una superficie con los hilos de un pedazo de tela, y los de un sólido con las páginas de un libro. Pero en la geometría de las superficies y los sólidos los indivisibles eran un número infinito y carecían de grosor, sin embargo, podían ser comparados entre sí como en el caso de la tela o el libro según el argumento mencionado.

El historiador Alexandre Koyré, desprende del análisis de su obra que la justificación que da Cavalieri de su método no se basa en el argumento de que un sólido esta formado por un número infinito de planos y una superficie por el mismo número de líneas, sino en que estos planos y líneas surgen al intersectar al sólido o la superficie con un plano móvil. [10]

Pasemos ahora a ver la forma en que aplicó su método para encontrar el área debajo de la curva  $x^n$ , para distintos valores de  $n$ .

Para  $n = 1$ , Cavalieri demuestra que «todas las líneas» de un paralelogramo  $ACDF$  son a «todas las líneas» de cualquiera de los dos triángulos  $ACF$  o  $CDF$ , como 2 es a 1. Es decir, que el área del paralelogramo es el doble del área de cada uno de los triángulos que lo forman.

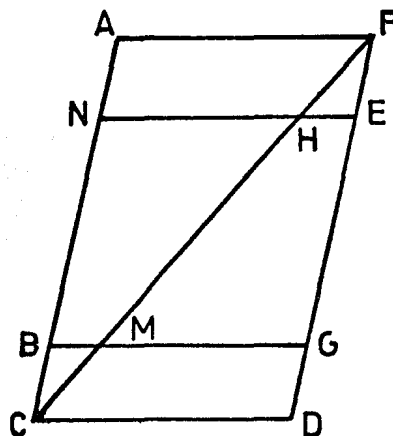


figura 17.

El razonamiento que usa para demostrar esta proposición consiste en tomar dos rectas paralelas a AF (fig. 17), digamos NE y BG, de tal forma que HE = BM y NH = MG. Usando nuestra notación tendríamos que, si HE = x, NH = y, AF = a, entonces

$$x + y = a$$

y tomando «todas las líneas» paralelas NE, desde AF hasta CD, se tiene que

$$\Sigma x + \Sigma y = \Sigma a$$

Pero a cada NH corresponde una y solo una MG y, como HE = BM se llega a

$$\Sigma x = \Sigma y$$

de donde

$$\Sigma x = (1/2) \Sigma a$$

Aquí,  $\Sigma x$  es el área del triángulo FCD y  $\Sigma a$  es el área del paralelogramo. Para establecer un símil con nuestra integral podemos introducir el factor  $\Delta x$  (incremento de x) en la última expresión, y tendremos:

$$\begin{aligned} \Sigma x \Delta x &= (1/2) \Sigma a \Delta x \\ &= (1/2) a \Sigma \Delta x \\ &= (1/2) a a \\ &= (1/2) a^2 \end{aligned}$$

así, cuando AC = CD, tendremos la relación que hoy escribimos como:

$$\int_0^a x dx = (1/2) a^2$$

Para la integración de  $x^2$ , Cavalieri introdujo los cuadrados de segmentos. Si en vez de tomar los segmentos del paralelogramo como vimos arriba, tomamos los cuadrados construidos sobre ellos en forma perpendicular al plano en el que se encuentra la figura, obtenemos lo que Cavalieri denominó «todos los cuadrados» del paralelogramo. Veamos como utiliza este concepto.

Usando la misma notación que antes, tenemos que

$$x + y = a,$$

fijémonos ahora en el área de los cuadrados correspondientes a

las líneas NE y AF; tenemos que:

$$(x + y)^2 = a^2$$

y sumando «todos los cuadrados» sobre los segmentos paralelos NE, desde AF hasta CD, tenemos

$$\Sigma(x + y)^2 = \Sigma a^2$$

o bien

$$\Sigma x^2 + 2\Sigma xy + \Sigma y^2 = \Sigma a^2$$

y puesto que, por los mismos argumentos mencionados en el caso anterior, se cumple que

$$\Sigma x^2 = \Sigma y^2$$

entonces

$$2 \Sigma x^2 + 2 \Sigma xy = \Sigma a^2$$

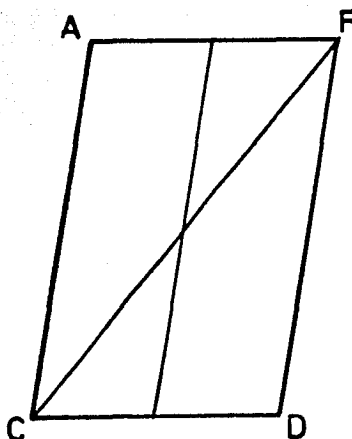


figura 18.

Por otra parte, para encontrar la expresión  $\Sigma xy$ , Cavalieri procede como sigue. Considera (fig. 18)

$$x = (1/2)a - z, \quad y = (1/2)a + z$$

entonces

$$\begin{aligned} \Sigma xy &= \Sigma [(1/2)a - z][(1/2)a + z] \\ &= \Sigma [(1/4)a^2 - z^2] \\ &= (1/4)\Sigma a^2 - \Sigma z^2 \end{aligned}$$

y como por semejanza de triángulos se tiene que  $\Sigma z = (1/4)\Sigma x$ , entonces  $\Sigma z^2 = (1/4)\Sigma x^2$ . Así que la igualdad

$$2\Sigma x^2 + 2\Sigma xy = \Sigma a^2$$

se transforma en

$$\Sigma x^2 + 2 [(1/4)\Sigma a^2 - (1/4)\Sigma x^2] = \Sigma a^2$$

de la cual se obtiene

$$\Sigma x^2 = (1/3)\Sigma a^2$$

De nuevo, agregando el factor  $\Delta x$  obtendríamos:

$$\begin{aligned} \Sigma x^2 \Delta x &= (1/3)\Sigma a^2 \Delta x \\ &= (1/3)a^2 \Sigma \Delta x \\ &= (1/3)a^2 a \\ &= (1/3)a^3 \end{aligned}$$

lo que corresponde con nuestra integral:

$$\int_0^a x^2 dx = (1/3)a^3$$

Veamos ahora el caso en que  $n = 4$  como lo demostró Cavalieri en *Seis ejercicios geométricos*. La proposición 21 dice *Todos los cubos del paralelogramo AD (fig 13) son el cuádruplo de todos los cubos de cualquiera de los triángulos ACF o FDC.* [15]

Es decir,  $\Sigma a^3 = 4\Sigma x^3 = 4\Sigma y^3$ . El razonamiento de Cavalieri para demostrar la primera de estas dos igualdades es así: puesto que

$$\frac{(x+y)^3}{(x+y)x^2} = \frac{(x+y)^2}{x^2}$$

como en los casos anteriores, se pueden sumar cubos y cuadrados para todas las líneas obteniendo:

$$\frac{\Sigma(x+y)^3}{\Sigma(x+y)x^2} = \frac{\Sigma(x+y)^2}{\Sigma x^2}$$

Por otra parte, recordemos que

$$\Sigma x^2 = 1/3 \Sigma a^2 \quad \text{y} \quad \Sigma(x+y)^2 = \Sigma a^2$$

por lo que

$$\frac{\Sigma(x+y)^3}{\Sigma(x+y)x^2} = \frac{3}{1}$$

y de ahí obtenemos:

$$\Sigma(x+y)^3 = 3 \Sigma(x+y)x^2$$

luego, como

$$\Sigma(x+y)^3 = \Sigma(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$$

$$= \Sigma x^3 + 3\Sigma x^2 y + 3\Sigma xy^2 + \Sigma y^3$$

y

$$3\Sigma(x+y)x^2 = 3\Sigma x^3 = 3\Sigma yx^2$$

se tiene la igualdad

$$3\Sigma x^3 + 3\Sigma yx^2 = \Sigma x^3 + 3\Sigma x^2 y + 3\Sigma xy^2 + \Sigma y^3$$

y puesto que

$$\Sigma x^3 = \Sigma y^3$$

se tiene que

$$3\Sigma x^3 = 2\Sigma x^3 + 3\Sigma xy^2$$

de lo que llegamos a

$$\Sigma x^3 = 3\Sigma xy^2 (= 3\Sigma x^2 y).$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \Sigma a^3 &= \Sigma(x + y)^3 \\ &= \Sigma x^3 + 3\Sigma x^2 y + 3\Sigma xy^2 + \Sigma y^3 \\ &= 4\Sigma x^3 = 4\Sigma y^3 \end{aligned}$$

Este resultado, igual que en los casos anteriores, es equivalente a la expresión:

$$\int_0^a x^3 dx = 1/4 a^4$$

Cavalieri también usó su método para calcular otro tipo de áreas y volúmenes como se muestra en las siguientes dos proposiciones del mismo libro: *Ses ejercicios geométricos*.

Proposición 23: En un paralelogramo  $ED$  con base  $CD$ , dibujamos una línea paralela a  $CD$ , digamos  $EF$ , y la diagonal  $AC$  que intersecta a  $EF$  en  $G$ . Entonces  $DA:AF = (CD \text{ o } EF):FG$ . La línea  $AC$  recibe el nombre de primera diagonal. Luego construimos el punto  $H$  sobre  $EF$  de tal forma que  $DA^2:AF^2 = EF:FH$ , y así sobre todas las paralelas a  $CD$  de manera que todas las líneas como esta  $EH$  terminen en una curva  $CHA$ . En forma similar construimos una curva  $CIA$  donde  $DA^3:AF^3 = EF:FI$ , una curva  $CLA$  tal que  $DA^4:AF^4 = EF:FL$ , etc. A  $CHA$  la llamamos segunda diagonal, a  $CIA$  tercera, a  $CLA$  cuarta, etc. Análogamente llamamos a  $AGCD$  el primer espacio



diagonal del paralelogramo  $RD$ , a la figura  $AHCD$  el segundo espacio, a  $AICD$  el tercero, a  $ALCD$  el cuarto, etc. Entonces, yo afirmo que el paralelogramo  $RD$  es el doble del primer espacio, el triple del segundo, el cuádruple del tercero, etc. [15]

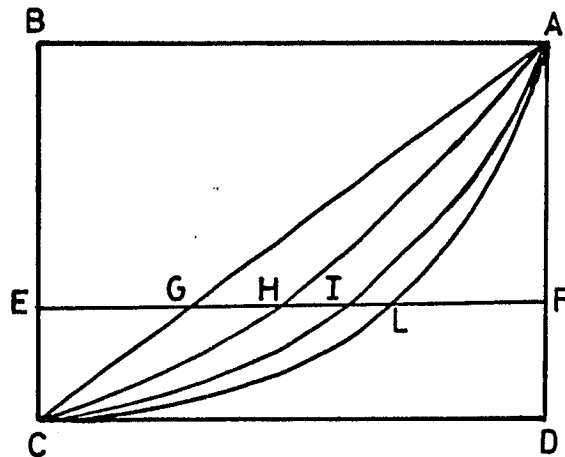


figura 19.

Veamos la demostración con la notación actual (fig. 19).

Sean  $CD = a$ ,  $DA = b$ ,  $AF = z$ ,  $FG = x$ ,  $FH = x_1$ ,  $FI = x_2$ ,  $FL = x_3$ , y  $P = \Sigma a = \text{área del paralelogramo}$ .

Ya había sido demostrado en una proposición anterior que el área del paralelogramo  $BD$  es el doble del primer espacio  $ACD$ . Es decir:  $P = \Sigma a = 2\Sigma x$ .

Según las hipótesis de la proposición, se tiene que

$$b^2/z^2 = a/x_1$$

y por semejanza de triángulos sabemos que

$$b^2/z^2 = a^2/x^2$$

por lo que obtenemos

$$a^2/x^2 = a/x_1$$

y sumando todos los indivisibles de la figura  $AHC$  llegamos a

$$a^2/\Sigma x^2 = a/\Sigma x_1$$

Como según una proposición anterior se cumple que

$$\Sigma x^2 = 1/3 \Sigma a^2 = 1/3 aP$$

concluimos que

$$a^2 / (1/3)aP = a/\Sigma x_1 \quad \text{o} \quad P = 3\Sigma x_1$$

es decir, el paralelogramo BD es 3 veces el espacio AHC.

Del mismo modo se muestra que, como se cumplen las igualdades

$$a^3/x^3 = a/x_2 \quad \text{y} \quad \Sigma x^3 = 1/4 \Sigma a^3 = 1/4 a^2 P$$

entonces debe cumplirse que  $P = 4 \Sigma x_2$ . Es decir, el paralelogramo BD es cuatro veces el espacio AICD. Y así sucesivamente.

La proposición 24 afirma que:

*Cuando un paralelogramo y una parábola que tienen la misma base y los mismos ejes, son girados alrededor de la base, el cilindro que se obtiene del paralelogramo es al sólido generado por la parábola, como 15 es a 8. [15]*

Para analizar su demostración usaremos la misma figura 15 y la notación empleada arriba agregando las siguientes igualdades:  
 $GE = y \quad HE = y_1$ .

Es evidente que la curva CHA es un arco parabólico con vértice en A. Sea AB el eje y hagamos la rotación alrededor de la base BC. De esta forma estaremos observando la mitad de un segmento parabólico inscrito en un paralelogramo, de donde al girar se genera la mitad de un segmento de paraboloides dentro del cilindro correspondiente. Probaremos que el cilindro es a la mitad del segmento del paraboloides (o que el doble del cilindro es a todo el segmento del paraboloides), como 15 es a 8.

Empecemos, como en la proposición anterior, con las proporciones siguientes:

$$a:x_1 = b^2:z^2 = a^2:x^2$$

así es que

$$a^2:x_1^2 = a^4:x^4$$

Ahora, usando lo que acabamos de demostrar en la proposición anterior, tenemos:

$$\Sigma a^2 : \Sigma a x_1 = \Sigma a : \Sigma x_1 = 3:1 = 15:5$$

Pero

$$\Sigma a x_1 = \Sigma (x_1 + y_1) x_1 = \Sigma x_1^2 + \Sigma x_1 y_1 = 5/15 \Sigma a^2$$

y como tenemos que

$\Sigma a^2 : \Sigma x_1^2 = \Sigma a^4 : \Sigma x_1^4 = 5:1$ , o  $\Sigma x_1^2 = 3/15 \Sigma a^2$ ,  
concluimos que

$$\Sigma x_1 y_1 = 2/15 \Sigma a^2 \quad \text{o} \quad 2 \Sigma x_1 y_1 = 4/15 \Sigma a^2$$

y

$$\Sigma x_1^2 + 2 \Sigma x_1 y_1 = 7/15 \Sigma a^2 \quad \text{o} \quad \Sigma y_1^2 = 8/15 \Sigma a^2.$$

Así llegamos a que el sólido generado por BD es al sólido generado por AHCB como  $\Sigma a^2$  es a  $\Sigma y_1^2$ , y por tanto, como 15 es a 8.

Pero no todo resultaba tan bien con el método de los indivisibles, como puede verse en el siguiente ejemplo tomado de una carta de Cavalieri a su amigo Torricelli.

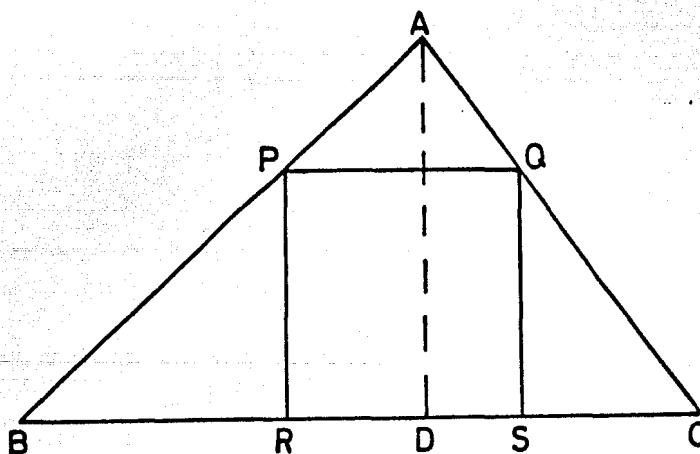


figura 20.

Tomese un triángulo no-isósceles ABC, de altura AD (fig. 20). Dibujese en él, una recta arbitraria PQ paralela a BC, y trácense PR y QS paralelas a AD.

Como se ve, siempre  $PR = QS$ , de donde, según la teoría de los indivisibles, llegaríamos a  $\Sigma PR = \Sigma QS$ , donde  $\Sigma PR$  es el área del triángulo AED y  $\Sigma QS$  es el área del triángulo ACD. Sin embargo, las áreas de estos dos triángulos no son iguales.

Cavalieri resuelve esta paradoja considerando a las líneas PR y QS como hebras de hilo. Si  $AB = 2AC$  y si AC contiene 100

puntos, entonces AB contiene 200 y resulta que hay 100 hebras en ADC contra 200 de ADB. Pero al hacer esto, Cavalieri está cambiando sus indivisibles de una dimensión por infinitesimales de dos dimensiones, paso que no siguió consistentemente.

## 2 Torricelli: el volumen de un sólido infinito.

El hecho de que Cavalieri diera tan poca importancia a la exigencia de rigor matemático, hizo que los geómetras fueran cautelosos en aceptar el método de los indivisibles como válido en demostraciones, aunque si lo usaban en investigaciones preliminares. Evangelista Torricelli (1608-1647), un amigo de Cavalieri y discípulo de Galileo, contribuyó con su trabajo a aclarar este elemento de duda.

Torricelli comprendió las ventajas y las desventajas del método de los indivisibles. No se sentía satisfecho con las demostraciones hechas mediante este método, así que acostumbraba sustituirlas por pruebas a la manera de Arquímedes; pero desarrolló las ideas expresadas por Cavalieri en forma muy significativa rebasando al propio Cavalieri en la flexibilidad y perspicacia con que usó el método de los indivisibles.

Uno de los resultados novedosos que le produjo gran satisfacción fue la determinación, en 1641, del volumen de un sólido de longitud infinita que se obtiene al girar una porción de una hipérbola equilátera alrededor de una de sus asíntotas. La demostración que da Torricelli de esta proposición hace uso de indivisibles cilíndricos, mientras que los de Cavalieri habían sido invariablemente planos.

Como hemos visto, Cavalieri había enunciado en terminología geométrica, lo que puede ser considerado el primer teorema general del cálculo integral:

$$\int_0^a x^n dx = a^{n+1}/(n+1)$$

para todos los valores naturales de  $n$ . Torricelli da una demostración de que esta igualdad sigue siendo válida cuando  $n$  es un racional distinto de  $-1$ , que es puramente geométrica y empleando el método de exhaustión. Dada una hipérbola DC, Torricelli demuestra que "el cuadrilátero EDCF es al DCEG como la potencia de BA es a la potencia de AE" [15]. (fig. 21).

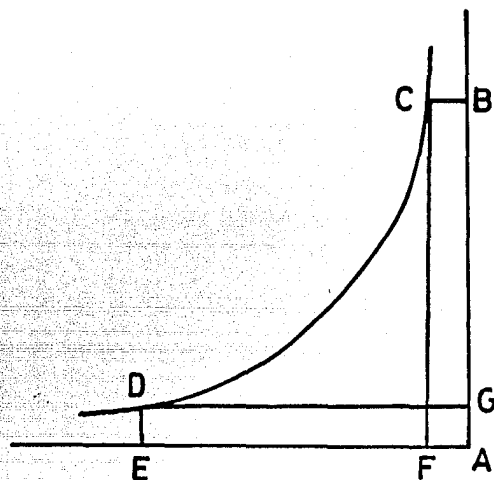


figura 21.

Para probarlo utiliza figuras inscritas y circunscritas y aplica una proposición que le garantiza que estas figuras pueden diferir en menos que un área dada. Después afirma que aplicando el mismo razonamiento se puede llegar a la misma conclusión para el caso de la parábola. Este resultado es equivalente a la afirmación analítica de que si la ecuación de la curva es  $x^m y^n = k$ , entonces la razón entre las áreas EDCF y DCEG es  $n/m$ . La determinación de esta razón es, en un sentido general, equivalente a la evaluación de lo que nosotros ahora escribimos como :

$$\int_a^b x^{m/n} dx$$

Veamos ahora la forma en que Torricelli calculó una integral de rango infinito. La idea es la siguiente:

Gírese la hipérbola alrededor de BA y sea ED la línea horizontal fija (fig. 22). ACGH es un cilindro circular cuya

altura es AC y el diámetro de su base es AH (el doble de la distancia de A a la hipérbola). Torricelli mostró que para cualquier posición de la línea NL paralela a ED, el cilindro de altura NO y diámetro IO tiene un área lateral igual al área de la sección transversal IM del cilindro ACGH. Pero las superficies de cilindros como NLIO conforman el volumen del sólido de revolución con longitud infinita; análogamente las áreas de los círculos de diámetro IM constituyen el volumen del cilindro ACGH, por lo que los volúmenes coinciden. Para llegar a este resultado se basa en una serie de lemas que veremos a continuación, usando el lenguaje y la notación actuales pero respetando el razonamiento de Torricelli.

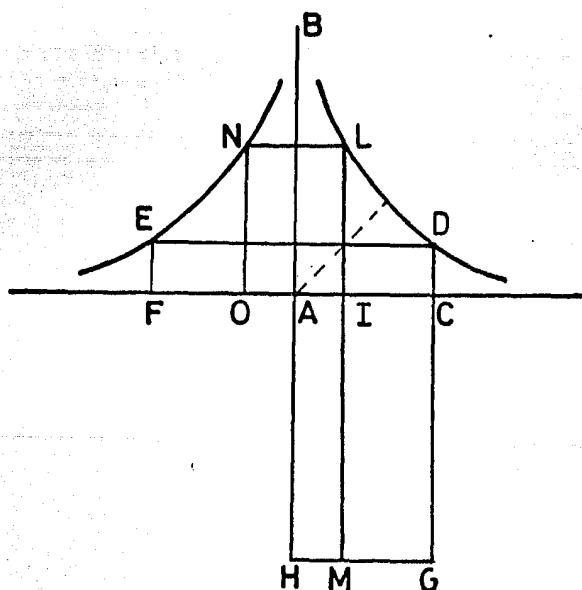


figura 22.

1. *Considérese una hipérbola cuyas asíntotas AB y AC forman un ángulo recto. Si giramos la figura alrededor del eje AB formamos lo que llamaremos un sólido hiperbólico agudo de longitud infinita en la dirección de B. Es claro que dentro de la hipérbola que genera al sólido están contenidos rectángulos que atraviesan el eje AB como DEFG. Sostengo que un rectángulo así generado es igual al cuadrado de cualquiera de los semiejes de la hipérbola. [15]*

Dibujemos el semieje AH desde el centro A de la hipérbola, el cual bisectará al ángulo BAC (fig 23). De aquí que el

rectángulo AIHC resulte ser un cuadrado (por ser un rectángulo en el que los ángulos son bisectados por las diagonales). Usando el teorema de Pitágoras es fácil ver que el cuadrado del semieje resulta ser el doble del área del cuadrado AIHC:

$$AH^2 = AI^2 + IH^2 = 2 AI^2$$

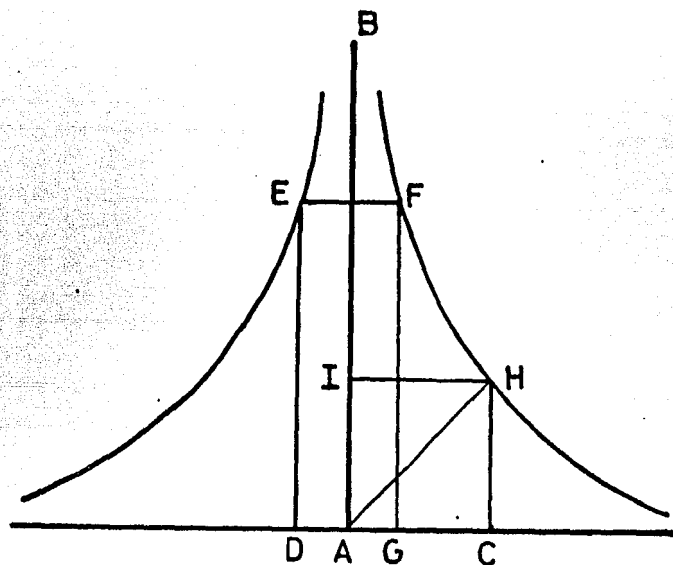
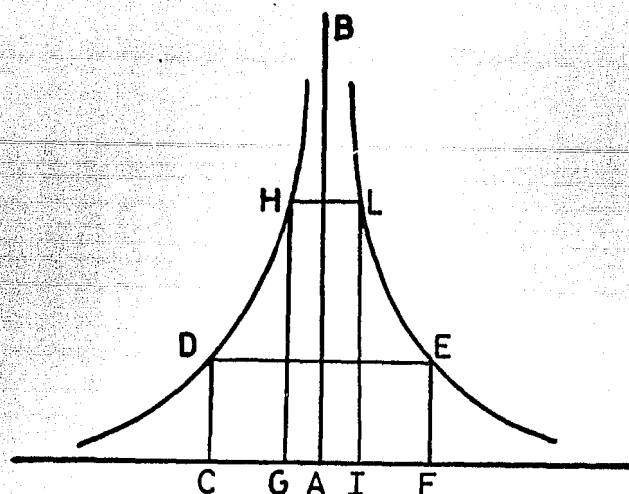


figura 23.

Y dado que se trata de una hipérbola cuya ecuación es, con la notación moderna,  $xy = k$  con  $k = \text{constante}$ , se tiene que las áreas de los rectángulos AH y AF coinciden. Por lo tanto, el cuadrado del semieje es igual al doble del área del rectángulo AF, es decir, es igual al área del rectángulo DF

2. Todos los cilindros inscritos dentro de un sólido hiperbólico agudo y construidos alrededor del eje común, tienen la misma superficie (considerando ésta sin incluir a las bases). [15]

Consideremos al sólido agudo con eje AB y tomemos dentro de él dos cilindros arbitrarios, CDEF y GHAI, construidos alrededor del eje AB (fig. 24). Ya vimos que los rectángulos CE y GL tienen la misma superficie por lo que los cilindros también cumplirán esta condición. Para llegar a esta conclusión Torricelli se basó en que tal proposición fue demostrada por Arquímedes en *Del cuadrado y el cilindro*.



. figura 24.

Con nuestra notación, suponiendo que los puntos E y L tienen coordenadas  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  respectivamente, es fácil ver que si  $x_1 y_1 = x_2 y_2$  entonces las áreas laterales de los cilindros son iguales:  $2\pi x_1 y_1 = 2\pi x_2 y_2$

3. Sea ABC un sólido hiperbólico con eje DB, donde D es el centro de la hipérbola y DF un semieje. Entonces, la superficie (sin las bases) de cualquier cilindro inscrito en el sólido alrededor del eje B, es igual al área de la circunferencia con centro en D y de radio igual al semieje DF. [15]

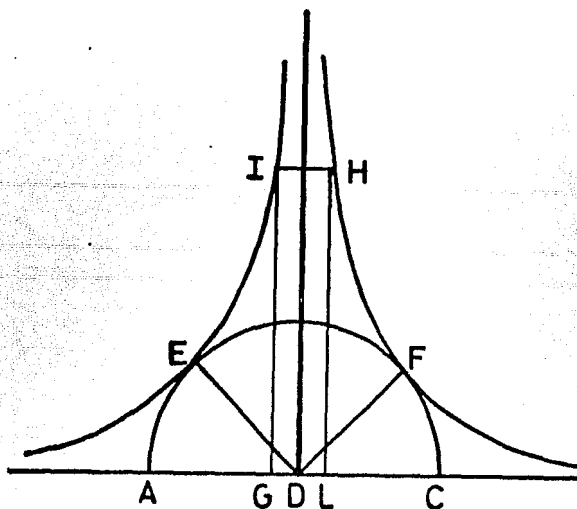


figura 25.





Sobre la recta AC seleccionemos un punto arbitrario I y formemos la superficie cilíndrica ONLI inscrita dentro del sólido hiperbólico. Formemos también el círculo IM dentro del cilindro ACGH paralelo a la base AH.

De acuerdo con los resultados anteriores tenemos que la superficie lateral del cilindro generado por ONLI es igual al área del círculo IM, y esto siempre será verdad, no importa cuál sea el punto I. De aquí que todas las superficies cilíndricas juntas, es decir el sólido agudo EBD más el cilindro FEDC colocado en su base, serán iguales a todos los círculos juntos, es decir al cilindro ACGH.

Después de llegar hasta aquí siguiendo el razonamiento mostrado, Torricelli hace una demostración del resultado obtenido usando "el método de los antiguos".

### 3 PASCAL: INTEGRACION POR PARTES Y DE LA FUNCION SENO.

Blaise Pascal (1623-62) se interesó principalmente en dos aspectos de la matemática: geometría y teoría de números. Alrededor de 1653, inició la aplicación de la teoría de los infinitesimales a su trabajo sobre el triángulo aritmético, y como consecuencia de ello, al siguiente año demostró el teorema de la integral de  $x^n$  usando un razonamiento que no sólo se derivó de las proposiciones geométricas clásicas, sino también de una forma especial de analizar el triángulo aritmético (fig 27).

El primer renglón (o columna), puede considerarse como formado por unidades o puntos. Los números del segundo renglón son las sumas de los del primero y pueden considerarse como sumas de puntos, es decir, como líneas. Los números del tercer renglón, que son las sumas de los del segundo, pueden considerarse como sumas de líneas, es decir, como triángulos. Análogamente, los del cuarto representan pirámides. Aquí termina la intuición geométrica, pero uno puede continuar por analogía.

---

1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	...	
1	3	6	10	...		
1	4	10	...			

---

figura 27.

Pascal desarrolló un método geométrico con el cual se podía encontrar la suma no sólo de potencias enteras de los primeros  $N$  naturales, sino también de potencias (del mismo grado) de enteros de una progresión aritmética. Este método se resume en la ecuación:

$$\begin{aligned} & {}^{n+1}C_1 d \Sigma^{(n)} + {}^{n+1}C_2 d^2 \Sigma^{(n-1)} + \dots + {}^{n+1}C_n d^n \Sigma^{(1)} = \\ & = (a + Nd)^{n+1} - a^{n+1} - Nd^{n+1} \end{aligned}$$

donde  $a$  es el primer término de la progresión,  $d$  es la diferencia común,  $N$  es el número de términos,  $n$  es el grado de la potencia,  ${}^{n+1}C_i$  el número de la  $(i+1)$ -ésima columna y del  $(n-i+2)$ -ésimo renglón del triángulo de Pascal, y  $\Sigma^{(j)}$  la suma de las  $j$ -ésimas potencias de los términos de la progresión.

Como Pascal señaló, resultaba obvio para cualquiera familiarizado con la doctrina de los indivisibles que este resultado podía ser aplicado en la determinación de áreas curvilíneas. Por ejemplo, para encontrar el área bajo la curva  $y=x^n$ , la superficie buscada puede ser considerada como la suma de las  $n$ -ésimas potencias de las abscisas escogidas en una progresión aritmética (cuyo primer término es cero y en la que la diferencia común es la unidad), de las cuales en este caso habrá un número infinito. Más aún, Pascal consideró que un solo punto agregado a una línea no le suma ninguna longitud; ni la adición

de una línea causa alguna diferencia en el área de una superficie, debido a que el primero es un indivisible del último. O, hablando aritméticamente, las raíces no figuran en una razón de cuadrados, ni los cuadrados en una razón de cubos, y así sucesivamente. por tanto, transformó la regla mencionada arriba en:

$$(n+1)\Sigma^{(n)} = b^{n+1}$$

llamando a la mayor abscisa  $b$  y considerando como ceros a los términos de menor orden. En un sentido general, esto es equivalente a la expresión:

$$\int_0^b x^n dx = b^{n+1}/(n+1)$$

El punto esencial en la demostración de Pascal es la omisión de los términos de menor dimensión. Este método parece haber aparecido en los trabajos de Roberval y Pascal como resultado de la asociación del indivisible de la geometría con la aritmética y la teoría de números. La intuición geométrica de los indivisibles de menor dimensión, los condujo a justificar en la aritmética el desprecio de ciertos términos de menor grado. Pascal fue más lejos al comparar los indivisibles de la geometría con el cero de la aritmética.

Hacia el final de su producción matemática, Pascal parece haber modificado su punto de vista respecto a los infinitesimales. En conexión con problemas tales como los de su *tratado de los senos de un cuadrante de un círculo* de 1659, usa el lenguaje de los infinitesimales hablando de la "suma de todas las ordenadas"; pero añade que uno no debe temer a hacer esto porque lo que realmente significa es la suma de rectángulos arbitrariamente pequeños. En sus últimas demostraciones numéricas Pascal se esforzó por evitar argumentos basados en el desprecio de cantidades infinitamente pequeñas.

Pascal miraba hacia lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño con misterio—algo que la naturaleza había brindado al hombre no para entenderlo, sino para admirarlo—. Su

trabajo surgió en conexión con la vieja teoría de números y la geometría clásica. Los nuevos procedimientos analíticos de Fermat y Descartes no le causaron interés, sustituyéndolos por una facilidad notable en la manipulación de las transformaciones geométricas. A través de ellas, Pascal relacionó las sumas de figuras de su teoría de números con problemas de geometría sintética de magnitudes continuas y anticipó numerosos resultados del Cálculo integral, incluyendo uno equivalente a la integración por partes.

Pasemos a ver algunos ejemplos de su trabajo relacionado con integración. La terminología que usó Pascal tiene un sentido geométrico; por ejemplo, cuando habla de "ordenada" no se refiere un número sino a un segmento de recta; lo mismo sucede con los "senos" que no son para él razones de números, sino segmentos de recta.

En la proposición 1 de su tratado sobre los senos, Pascal demuestra un resultado equivalente a nuestra fórmula:

$$\int_{\alpha}^{\psi} \text{sen } t \, dt = \text{cos } \alpha - \text{cos } \psi.$$

Para ello, dado un punto D sobre la circunferencia (fig 28-b), le llama seno del ángulo DAC= $\psi$  a la segmento DI, es decir, a lo que nosotros identificamos con  $a \text{ sen } \psi$  cuando el radio de la circunferencia es a.

*Proposición 1. La suma de los senos de cualquier arco de un cuadrante, es igual a la porción de la base entre los senos extremos, multiplicada por el radio. [15]*

Consideremos una porción PR de un cuadrante de circunferencia (fig 28-b) y dividámosla en un número infinito de partes usando los puntos extremos  $D_i$ , desde los cuales dibujemos los senos  $D_i I_i$ . En todos los puntos D (fig.28-b), usando la tangente  $DE_2$ , Pascal construye triángulos rectángulos  $E_1 KE_2$  cuyas hipotenusas son los segmentos  $E_1 E_2$ .

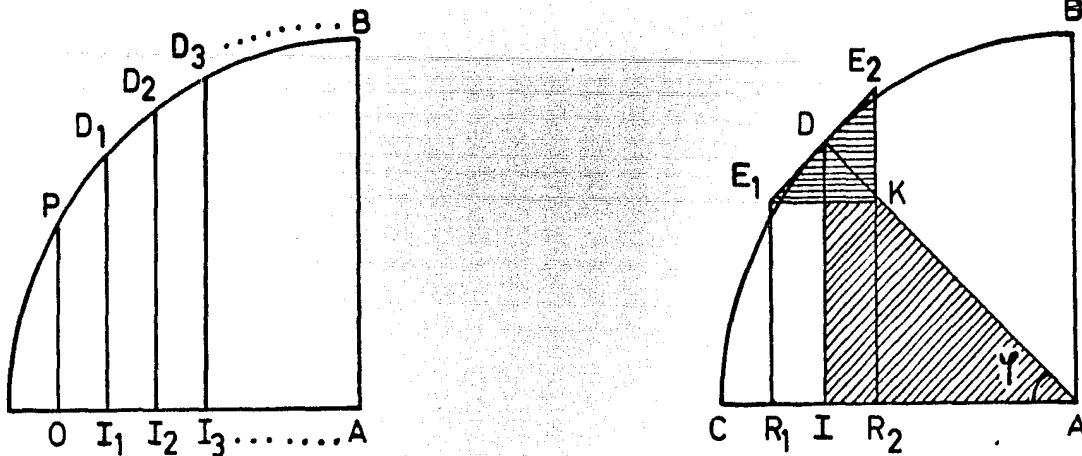


figura 28.

Ahora bien, como los triángulos DIA y  $E_1KE_2$  son semejantes, se cumple que:

$$\begin{aligned} \frac{AD}{E_1E_2} &= \frac{DI}{E_2K} && \text{por lo que } E_1E_2 \cdot DI = AD \cdot E_2K. \\ & && = AD \cdot R_1R_2. \\ & && = AB \cdot R_1R_2. \end{aligned}$$

De donde concluye que todos los cuadriláteros formados por los senos  $DI$  y sus tangentes  $E_1E_2$  son iguales a todos los cuadriláteros formados por los segmentos de base  $R_1R_2$  y el radio  $AB$ . Pero cada tangente  $E_iE_{i+1}$  es igual a cada arco  $D_iD_{i+1}$ . Así que la suma de senos multiplicados por los pequeños arcos, es igual a la distancia  $AO$  multiplicada por el radio.

Con nuestra notación, si  $y=DI$ ,  $a=AB$ ,  $\Delta s=EE$ ,  $\Delta x=RR$ , lo que Pascal obtuvo es la igualdad:

$$y\Delta s = a\Delta x.$$

Considerando a  $\Delta s$  y  $\Delta x$  como indivisibles y sumándolos, llega al resultado equivalente a :

$$\int y \, ds = \int x \, dx.$$

Manejando las coordenadas de cada punto sobre la circunferencia en términos de senos y cosenos, obtenemos la igualdad para la integral de  $a \operatorname{sen} \varphi$ .

Pascal añade la siguiente nota: "no debe causar sorpresa el que diga que todas las distancias  $R_i R_{i+1}$ , son iguales a  $AO$ , lo mismo que cada tangente  $E_i E_{i+1}$ , es igual a cada pequeño arco  $D_i D_{i+1}$ , ya que es bien sabido que, aunque estas igualdades no se cumplen para un número finito de senos, son sin embargo verdad cuando el número es infinito; porque entonces la suma de todas las tangentes iguales  $E_i E_{i+1}$ , difiere del arco entero  $ED$ , o de la suma de todos los arcos iguales  $D_i D_{i+1}$ , en menos que una cantidad dada; análogamente la suma de las  $R_i R_{i+1}$ , respecto del segmento entero  $AO$ ".

[15]

Ahora veamos como trabajó la integración por partes. Para ello, Pascal considera una figura trilineal (formada por dos ejes ortogonales y una curva convexa)  $ABC$ , con "ordenadas al eje"  $DF$  y "ordenadas a la base"  $EG$ , donde los puntos  $E$  dividen a la base en segmentos iguales y los puntos  $D$  hacen lo mismo con el eje (fig. 29).

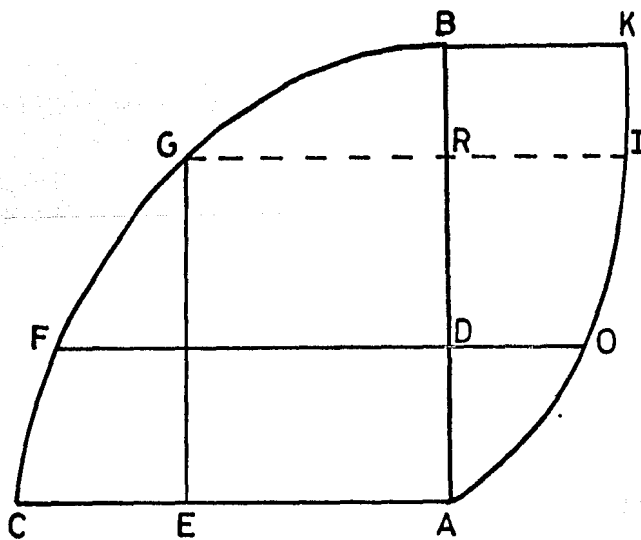


figura 29.

A los segmentos  $GR$  les llama contraordenadas y construye una figura adjunta trazando la línea  $BK$  paralela a  $CA$  y una curva arbitraria que une a los puntos  $A$  y  $K$ .

Proposición. La suma de los rectángulos sobre  $FD$  y  $DO$  (es decir, acotados por cada ordenada de la trilineal y la

ordenada correspondiente de la figura adjunta), es igual a la suma de las áreas  $ARI$  (que son porciones de la adjunta entre cada una de las contraordenadas y el punto final  $A$ ).

[15]

Para demostrarlo, Pascal construye un sólido de la siguiente forma:

"... en todos los puntos de  $ABC$  se levantan perpendiculares a su plano formando un sólido prismático infinito con  $ABC$  como base. Se rota la figura  $BAOK$  alrededor del eje  $AB$  hasta una posición perpendicular al plano de  $ABC$ . Y, finalmente, la base  $AC$  se levanta paralela a sí misma de tal forma que el punto  $A$  siempre este en el contorno de  $BAOK$  hasta que llega a  $B$ . La parte del sólido prismático cortado por la superficie descrita por la línea  $CA$  en movimiento, será el sólido considerado aquí." [15], (fig. 30)

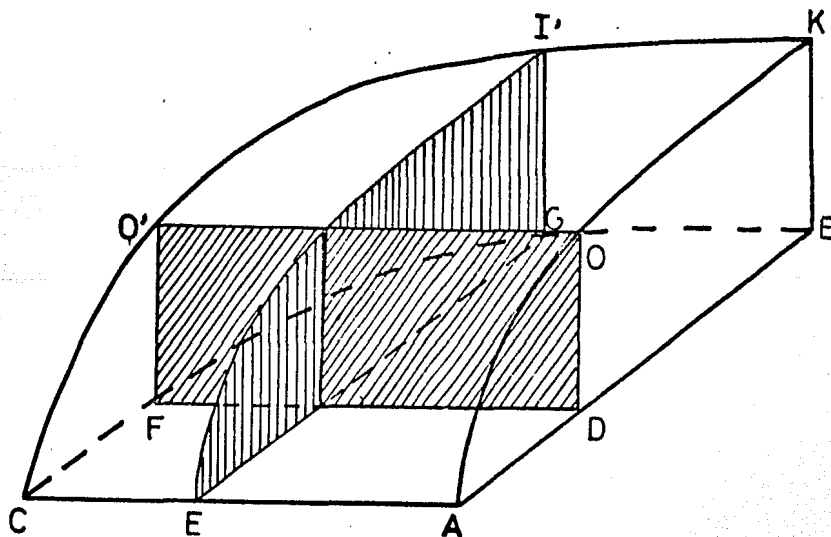


figura 30.

Es decir, Pascal construyó un sólido cuyo volumen es lo que nosotros expresamos usando:

$$\int_0^a f(x)g(x) dx$$

en el caso en que las superficies estén acotadas por las funciones  $f(x)$ ,  $g(x)$  y por los ejes.



La demostración continúa con la introducción de dos tipos de planos perpendiculares al plano de ABC. El primero de ellos pasa por cada ordenada FD (intersectando al sólido en los rectángulos FD·DO), y el segundo es un plano paralelo al de la figura adjunta BAOK girada, pasando por las ordenadas GE (éstos intersectan al sólido en secciones EGI', similares al área ARI).

"Ahora — concluye Pascal — podrá verse que la suma de las secciones hechas por cada tipo de plano, es igual al sólido, y son consecuentemente iguales una a la otra (debido a que las infinitas partes AE, EE, etc de la base son iguales entre ellas y a las partes AD, DD, etc del eje)."

Es decir:  $\Sigma (FD \cdot DO) = \Sigma EGI'$ .

Si tomamos  $AB=a$ ,  $AC=h$ ,  $AD=x=f(y)$  y  $DO=z=g(x)$  (siendo las dos funciones monótonas), la relación anterior corresponde a

$$\int_{x=0}^{x=a} f(x)g(x)dx = \int_0^a \left[ \int_0^{f^{-1}(x)} g(t)dt \right] dy,$$

cuya solución se obtiene mediante integración por partes. Como  $f(a)=0$ , tenemos:

$$\int_0^a f(x)g(x)dx = - \int_0^a \left[ \int_0^a g(t)dt \right] f'(x)dx = \int_0^a \left[ \int_0^{f^{-1}(x)} g(t)dt \right] dy$$

En el caso en que  $g(x)=x$ , resulta que:

$$\int_0^a xy dx = \int_0^a \frac{x^2}{2} dy.$$

#### 4 FERMAT. INTEGRACION USANDO PROGRESIONES GEOMETRICAS.

Fermat dió una demostración para la integral de  $x^n$ , con  $n$  fraccionario, distinta a las que hemos visto hasta ahora (muy probablemente antes que las que ya mencionamos). En ella se encuentran algunos aspectos esenciales de la definición actual de integral. Sin embargo, este procedimiento fue para él --como para sus contemporáneos-- simplemente la forma de encontrar una cuadratura, es decir, la respuesta a una cuestión geométrica específica.

En cuanto a la relación entre geometría y álgebra, él y Descartes desarrollaron, cada uno independientemente del otro, una geometría analítica cuyo sustento fundamental era que a cada curva se le asociaba una ecuación en la que estaban implicadas todas las propiedades de la curva.

Aunque ninguno de los trabajos de Fermat fueron publicados durante su vida, diversos historiadores coinciden en que fue el primero en aplicar este nuevo punto de vista a los problemas del análisis infinitesimal popularizados por Kepler y Cavalieri. Para Fermat, los símbolos involucrados en una ecuación representaban constantes indeterminadas a las que podía asociarse los segmentos de recta de longitud indeterminada; así que era congruente con tal punto de vista la identificación entre los infinitésimales geométricos que habían venido usándose y los números infinitesimales correspondientes.

El surgimiento de los infinitesimales numéricos está relacionado con ciertos problemas que Fermat consideró. Se fijó en el hecho de que en un problema que en general tenía dos soluciones, el máximo y el mínimo daban una sola solución. Por ejemplo, si una línea de longitud  $a$  es dividida por un punto  $P$  en dos partes de longitudes  $x$  y  $a-x$ , hay en general dos posiciones de  $P$  para las que el área del rectángulo formado por los segmentos es la misma. Sin embargo para el área máxima hay una sola posición, el punto medio.

Partiendo de este hecho, Fermat se basó en un problema planteado por Diofanto para formular un método que permitía determinar máximos y mínimos de la siguiente forma: sea  $A$  el área del rectángulo formado por  $x$  y  $a-x$

$$A = x(a - x)$$

Si en vez de la distancia  $x$ , se marcara la distancia  $x+E$ , el área sería:

$$A = (x + E)(a - x - E)$$

Para el área máxima los dos valores serán el mismo y los segmentos  $x$  y  $x+E$  deben coincidir por lo que Fermat iguala los dos valores de  $A$  y luego considera que  $E$  se anula, llegando así al resultado  $x = a/2$ .

Aunque no faltaron las críticas, el método encontró buena aceptación entre los matemáticos y Fermat empezó a aplicarlo en la determinación de tangentes y de centros de gravedad, con algunas modificaciones. Por cierto que la determinación del centro de gravedad de un segmento parabólico usualmente se había hecho a base de consideraciones basadas en sumas, pero Fermat lo hizo a través de este método de máximos y mínimos.

Ya antes de 1644 Fermat había dado una demostración de la integral de  $x^n$ , con  $n$  entero, y había encontrado cuadraturas, y centros de gravedad de "parábolas" de grado fraccionario:  $a^m \cdot y^n = b^n \cdot x^m$ . El procedimiento que usó fue tomar sobre uno de los ejes una serie de intervalos de tal forma que al construir sobre ellos los rectángulos correspondientes, las áreas de éstos formaran una progresión geométrica infinita cuya suma podía ser determinada siempre que no se tratara de la familia de la hipérbolas  $y = 1/x$ .

También utilizó este mismo tipo de razonamiento para reducir un problema de rectificación de una curva, cuestión que involucra tangentes, a un problema de cuadraturas. Es decir, Fermat no sólo desarrolló buenos métodos para encontrar tangentes y cuadraturas, sino que además relacionó estos dos problemas y probablemente conoció su carácter mutuamente inverso.

Vamos a reproducir los argumentos de Fermat, usando la notación actual, para calcular el área bajo una hipérbola de la forma:

$$y x^n = k, \quad k \text{ constante}, \quad n = 2, 3, 4 \dots$$

Fermat dividía el eje AGM (fig. 31), a la derecha del punto G, en intervalos GH, HO, OM, ... de longitudes  $x_1 - a$ ,  $x_2 - x_1$ ,  $x_3 - x_2$ , ... ( $a = AG$ ), de tal forma que:

$$\frac{a}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \dots$$

y por lo tanto

$$\frac{a}{x_1} = \frac{x_1 - a}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \dots$$

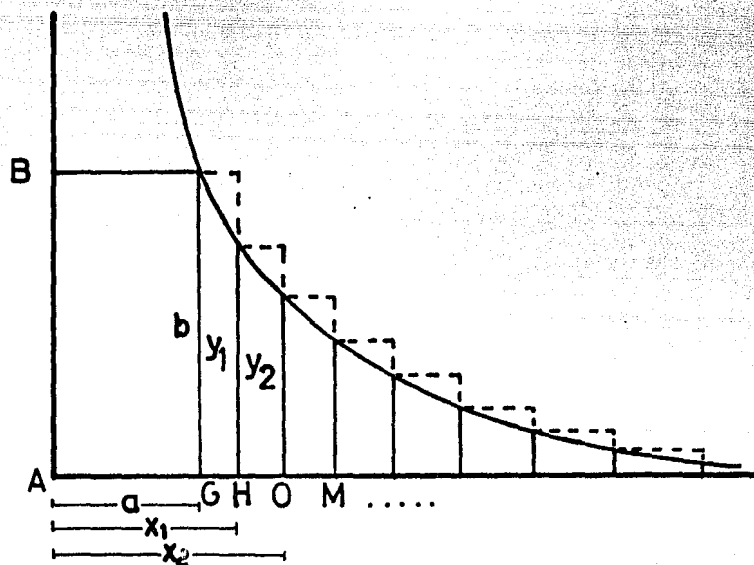


figura 31.

Sobre los intervalos formados construía los rectángulos circunscritos

$$R_1 = b(x_1 - a), \quad \text{donde } b = GE$$

$$R_r = y_{r-1}(x_r - x_{r-1}), \quad r = 2, 3, \dots$$

de las expresiones anteriores se sigue que:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{b(x_1 - a)}{y_1(x_2 - x_1)} = \frac{x_1^n \left[ \frac{(x_1 - a)}{x_1^n} \right]}{a^n \left[ \frac{(x_2 - x_1)}{x_1^n} \right]} = \frac{x_1^n \cdot a}{a^n \cdot x_1} = \frac{x_1^{n-1}}{a^{n-1}} = \frac{x_{n-1}}{a}$$

porque, de acuerdo a la elección de la serie de puntos en el eje:

$x_{n-1} = x_1(x_1/a)^{n-2}$ . En general, se tiene que:

$$\frac{R_r}{R_{r+1}} = \frac{y_{r-1} [(x_r - x_{r-1})]}{y_r [(x_{r+1} - x_r)]} = \frac{x_r^n a}{x_{r-1}^n x_1} = \frac{x_1^n a}{a^n x_1} = \frac{x_{n-1}}{a}$$

lo cual significa que los rectángulos circunscritos están en progresión geométrica de razón  $a/x_{n-1}$ .

Fermat utilizaba la expresión:

$$\frac{v-u}{u} = \frac{\alpha}{S-\alpha}$$

para determinar la suma  $S$  de una progresión geométrica cuyo primer término es  $\alpha$  y cuya razón es  $u/v$  ( $u < v$ ). Por lo tanto, si  $S$  representa la suma de los rectángulos  $R_i$ , tenemos que:

$$\frac{x_{n-1} - a}{a} = \frac{h(x_1 - a)}{S - h(x_1 - a)}$$

que es igual a tener:

$$\frac{x_{n-1} - a}{x_1 - a} = \frac{ba}{S - b(x_1 - a)}$$

Fermat suponía entonces que los intervalos  $x_1 - a$ ,  $x_2 - x_1$ , etc, eran casi iguales y lo suficientemente pequeños como para llegar a la conclusión de que el miembro de la izquierda en la última expresión, era igual a  $n-1$ . Por otra parte, como los intervalos son pequeños, concluía que  $S - b(x_1 - a)$  podía considerarse igual al área  $S$ . Así, la última expresión quedaba transformada en

$$n-1 = \frac{ba}{S} = \frac{AG \cdot GE}{S}$$

llegando así a la cuadratura buscada:

$$S = (ba)/(n-1) = k/[a^{n-1} (n-1)]$$

## 5 LA INTEGRACION NUMERICA DE WALLIS.

A partir de 1650, los métodos analíticos empezaron a recibir más atención y a remplazar a los métodos geométricos basados en los escritos de los antiguos matemáticos griegos. Esto se debió en parte, a la aceptación, dentro de la geometría, de los métodos algebraicos de Descartes y Fermat. La mayoría de los resultados basados en un método de integración aritmética, fueron conseguidos por John Wallis (1616-1703), un matemático y teólogo inglés.

Wallis fue mas allá que Fermat y Descartes al realizar un esfuerzo por liberar a la aritmética completamente de las representaciones geométricas. Wallis no se preocupó demasiado por el rigor matemático y basó muchos de sus resultados en analogías y en lo que hoy llamamos inducción incompleta, cuando ésta no había sido rigurosamente fundamentada.

Al parecer, la lectura, en 1650, del método geométrico de los indivisibles de Cavalieri como lo explicaba Torricelli, influenció notablemente su trabajo. Partiendo del trabajo puramente geométrico de Cavalieri, Wallis introduce una fuerte aritmetización y, al final, abstrae de la geometría de los indivisibles la noción aritmética de límite.

La forma en que Wallis hace la transición de la geometría a la aritmética, se ve claramente en su demostración de que el área de un triángulo es la mitad de la base por la altura. Adopta el principio de que una figura plana puede ser considerada como formada por un número infinito de líneas paralelas, o por un número infinito de paralelogramos cuya altura es igual, misma que en cada caso será  $1/\infty$ , es decir, una parte alícuota infinitamente pequeña de la altura de la figura. Para Wallis, pues,  $1/\infty$  representa una cantidad infinitamente pequeña o *non cuanta*; y un paralelogramo cuya altura es infinitamente pequeña o cero, es entonces "apenas una línea", pero que tiene grosor.

Las áreas de estos paralelogramos paralelos a la base del triángulo, forman una progresión aritmética que se inicia con cero si se toman desde el vértice hasta la base. Wallis usa la regla de que la suma de una progresión así es el producto del primer término por la mitad del número de términos, dado que "no hay ninguna causa para diferenciar entre un número finito y uno infinito". Si la altura y la base del triángulo son A y B respectivamente, el área del último paralelogramo de la progresión es  $(AB)(1/\omega)$ . El área de todo el triángulo es entonces  $(AB)(1/\omega)(\omega/2)$ , o,  $AB/2$ . Wallis aplica argumentos similares a numerosas cuadraturas y cubaturas que involucran cilindros, conos y secciones cónicas.

En su tratado *La aritmética de los infinitos* (*«arithmetica infinitorum»*), demuestra un teorema equivalente a

$$\int_0^a x^n dx = a^{n+1}/(n+1).$$

extendiéndolo por lo menos a todos los racionales excepto -1. Para llegar a esta conclusión, Wallis se basa en su intuición, realmente asombrosa, acerca de las relaciones entre las sumas de diferentes series. Observa primero las cantidades:

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad \frac{0+1+2}{2+2+2} = \frac{1}{2} \quad \frac{0+1+2+3}{3+3+3+3} = \frac{1}{2} \quad \dots$$

y del hecho de que la razón es  $1/2$  para cualquier número finito de términos, concluye que lo mismo debe pasar para un número infinito. Posteriormente, nota que en las igualdades

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1+1}{3 \cdot 6} \quad \frac{0+1+4}{4+4+4} = \frac{1+1}{3 \cdot 12} \quad \frac{0+1+4+9}{9+9+9+9} = \frac{1+1}{3 \cdot 18} \quad \dots$$

a mayor número de términos, estas cantidades se acercan más a la razón aproximada  $1/3$ ; es decir, siempre hay un número de términos suficientemente grande para garantizar que la razón entre las sumas difiera de  $1/3$  menos que una cantidad previamente establecida. Siguiendo este procedimiento hasta el infinito, la diferencia "tenderá a desaparecer completamente". Así que la razón para un número infinito de términos es  $1/3$ .

De una manera similar, Wallis observa que las razones

análogas para las potencias 3, 4, 5, etc, son  $1/4$ ,  $1/5$ ,  $1/6$ , etc. Después concluye que la regla es válida para todas las potencias, racionales e irracionales (excepto  $-1$ ).

Con base en esto, Wallis derivó la integral de Cavalieri de una forma original, para después sumergirse en un remolino de métodos numéricos, de donde llegó — nuevamente conducido por su intuición — a establecer un producto infinito para  $\pi$  que hoy lleva su nombre.

Para analizar un ejemplo de integración numérica de Wallis, empecemos por ver su razonamiento en un caso particular. Como mencionamos arriba, Wallis analiza el cociente entre dos series infinitas, partiendo de la observación del mismo cociente pero para diversos casos finitos. Por ejemplo, para estudiar la razón entre la suma de los cubos de una progresión aritmética (digamos 1, 2, 3, 4, etc) y la suma de cantidades iguales al mayor de estos cubos, observa que:

$$\begin{array}{r} \frac{0 + 1 = 1}{1 + 1 = 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}, \\ \frac{0 + 1 + 8 = 9}{8 + 8 + 8 = 24} = \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \\ \frac{0 + 1 + 8 + 27 = 36}{27 + 27 + 27 + 27 = 108} = \frac{4}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}, \\ \frac{0 + 1 + 8 + 27 + 64 = 100}{64 + 64 + 64 + 64 + 64 = 320} = \frac{5}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}, \\ \frac{0 + 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225}{125 + 125 + 125 + 125 + 125 + 125 = 750} = \frac{6}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} \end{array}$$

y así sucesivamente. La razón obtenida siempre es mayor que  $1/4$ , pero el excedente decrece conforme el número de términos aumenta siendo  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{12}$ ,  $\frac{1}{16}$ ,  $\frac{1}{20}$ , etc

es decir, el excedente es igual a:

$$1/(4 \text{ veces el número de términos después del } 0)$$

por lo que es fácil determinar cuántos términos se necesitan para que el excedente sea menor que un cierto valor dado de antemano.



Con base en esta observación Wallis concluyó la validez de lo que nosotros denotamos por:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^m i^3}{(m+1)m^3} = \frac{1}{4}$$

También analizó el caso en el que la serie del numerador esta formada por los cubos de una progresión aritmética distinta de los naturales, y llegó a la conclusión de que el excedente a  $1/4$  al obtener la razón correspondiente es igual a:

raíz cúbica del primer término después del 0

4 (raíz cúbica del mayor término del numerador)

Utilizó este resultado para encontrar el área debajo de la parábola cúbica en un intervalo  $(0, a)$ , de la siguiente forma: Sea AO (fig. 32-a) una rama de la parábola cúbica contenida en el paralelogramo TD. El área que buscamos esta dada por AOD y su complemento es ATO. Las rectas DO (fig 32-b), son iguales a las AT y son las raíces cúbicas de las distancias denotadas por AD o las representadas por TO.

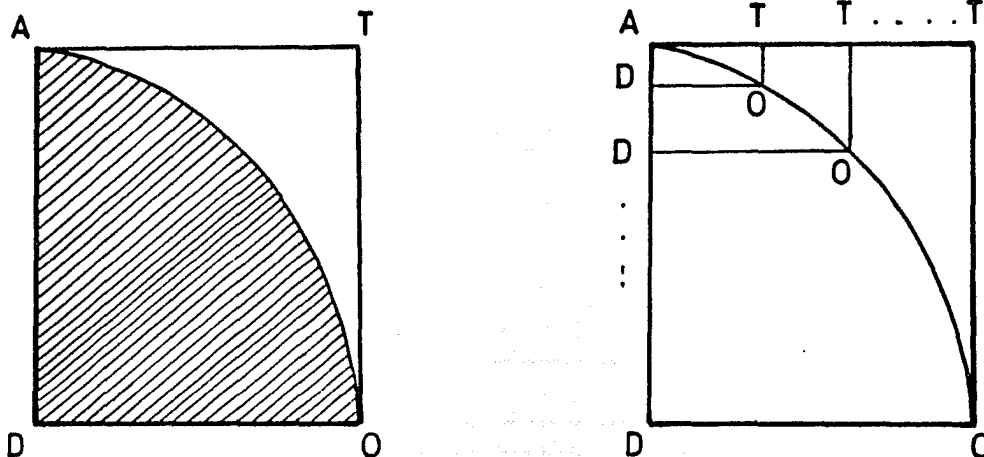


figura 32.

Wallis considera a la figura ATO como formada por un número infinito de rectas TO, que vienen siendo los cubos de las distancias AT. Y como las AT forman una progresión aritmética, la figura ATO correspondería con la serie del numerador de la expresión que acabamos de ver. De igual forma considera al

paralelogramo ATOD como formado por el mismo número infinito de rectas pero todas iguales a la mayor de las TO, lo que correspondería con el denominador de la expresión analizada. Así es como llega a la conclusión de que el área ATO es al paralelogramo, como 1 es a 4. Por lo tanto, el área AOD debajo del segmento de la parábola cúbica, es al paralelogramo como 3 es a 4, que es el resultado que se buscaba.

Después de analizar una serie de casos particulares, Wallis concluye que, en general, (usando nuestra terminología):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^m i^n}{(m+1)m^n} = \frac{1}{n+1} \dots \dots \dots (1)$$

para  $n$  entero distinto de  $-1$ ; y encontró la cuadratura de las curvas  $y = x^n$  al dividir el intervalo  $(0, a)$  en puntos de la forma  $(i/m)a$  (ver fig 33) y sumando para obtener:

$$\frac{\sum_{x=0}^a x^n}{\sum_{x=0}^a b} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\left[ \left[ \frac{a \cdot 0}{m} \right]^n + \left[ \frac{a \cdot 1}{m} \right]^n + \dots + \left[ \frac{a \cdot m}{m} \right]^n \right]}{a^n + a^n + \dots + a^n} =$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^m i^n}{(m+1)m^n} = \frac{1}{n+1} \quad \text{es decir,} \quad \int_0^a x^n dx = \frac{1}{n+1} a^{n+1}$$

Para extender el dominio de valores de  $n$  en la fórmula (1) hasta incluir por lo menos todos los números racionales excepto el  $-1$ , Wallis observó que si los números

$$m^{n_1}, m^{n_2}, \dots, m^{n_r}$$

están en progresión geométrica (donde  $n_1, n_2, \dots, n_r$  son enteros no negativos), entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{m+1} m^j}{\sum_{i=0}^m j^n}, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

estarán en progresión aritmética.

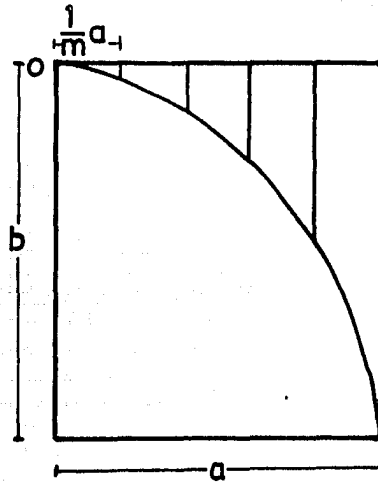


figura 33.

Además, del hecho de que para  $q$  en los naturales se tiene que:

$m^0, m^{1/q}, m^{2/q}, \dots, m^1$  están en progresión geométrica,  $1, 1 + 1/q, 1 + 2/q, \dots, 2$  están en progresión aritmética, y que los términos primero y último de esta última sucesión son los inversos de los valores del miembro de la derecha en (1) para  $n=0$  y  $n=1$ , Wallis obtenía que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{m+1} i^{p/q}}{\sum_{i=0}^m m^{p/q}} = \frac{1}{1 + p/q} \dots \dots \dots (2)$$

A Wallis no le cabía duda de que esta relación se verificaba

para todo  $p/q \geq 0$  ; decía incluso que era válida para irracionales como  $3^{1/2}$ . Y como consideraba extendido el concepto de potencia para incluir exponentes negativos, afirmaba que la expresión (2) era válida también para ellos, excepto para  $-1$ . En forma análoga a lo que vimos antes, usaba esta expresión para encontrar la razón entre el área bajo una curva  $y = x^{p/q}$  y el rectángulo que la circunscribe. También determinó las razones entre los volúmenes obtenidos por girar estas áreas alrededor de un eje, y los cilindros circunscritos.

### III. LA INTEGRAL EN LOS TRABAJOS DE NEWTON Y DE LEIBNIZ.

El cálculo, como todos los grandes avances en las matemáticas, se construyó gracias al trabajo de muchos hombres que durante años fueron aportando su contribución poco a poco, y que, como hemos visto en los capítulos anteriores, condujeron su desarrollo desde las demostraciones de los antiguos griegos hasta los métodos heurísticos desarrollados en la primera mitad del siglo XVII.

Los procedimientos desarrollados por algunos de los matemáticos que antecedieron a la época que nos ocupa, eran ya bastante parecidos a los que se encuentran en el cálculo actual, aunque no habían logrado trascender a los problemas particulares que les dieron origen. Sin embargo el trabajo realizado por todos ellos permitió que para la segunda mitad de aquel siglo, las condiciones estuvieran suficientemente maduras para que alguien organizara los puntos de vista, métodos y descubrimientos involucrados en el análisis infinitesimal, y se constituyera todo un aparato algorítmico que brindara métodos generales para el tratamiento de curvas y trayectorias, tanto en lo relacionado con tangentes como en cuadraturas.

Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz culminaron este proceso, por lo que se acostumbra llamarlos "*los descubridores del cálculo*". Pese a que sus trabajos difieren bastante en las ideas y el estilo, ambos supieron retomar los conocimientos desarrollados por sus predecesores para dar un gran paso hacia adelante inventando, en forma independiente uno del otro, métodos de procedimiento generales que contienen mucho de lo que hoy consideramos esencial en el cálculo.

Tales métodos fueron necesarios para el desarrollo lógico de las concepciones de derivada e integral. Sin embargo, Newton y Leibniz no llegaron a las definiciones fundamentales del cálculo de nuestros días. Para que estas nociones básicas fueran rigurosamente elaboradas tuvieron que pasar todavía dos siglos de esfuerzos en esta dirección.

A finales del siglo XVII, surgió una desagradable disputa sobre la prioridad en los descubrimientos. Mucho tiempo después logró aclararse que Newton lo tuvo primero (en 1665-1666, mientras que Leibniz en 1673-1676), pero Leibniz lo publicó primero en el periodo de 1684-1686, mientras que los trabajos de Newton fueron publicados en el periodo de 1704-1736. Ambos concocían una buena cantidad de trabajos de sus antecesores, así que las formulaciones a las que llegaron fueron, probablemente, el resultado de una influencia anterior común, más que una coincidencia recíproca.

Gracias a los trabajos de Newton y de Leibniz, el cálculo dejó de ser un apéndice y extensión de la geometría griega para transformarse en una materia independiente. La notación algebraica y las técnicas usadas por ellos, no solo brindaron una herramienta más eficaz que la geometría, sino también permitieron tratar muchos problemas diferentes, geométricos y físicos, con la misma técnica.

Durante el siglo que siguió a su descubrimiento, el cálculo se desarrolló de una forma impresionante, a pesar de que su fundamentación era aún muy insegura. Esto hizo posible un tratamiento matemático de campos muy extensos de las ciencias naturales. En este desarrollo posterior, el tipo de cálculo leibniziano utilizando diferenciales e integrales, avanzó muy rápidamente, sobre todo a través de los trabajos de los hermanos Bernoulli, Euler y otros matemáticos del continente. El cálculo fluxional de Newton tuvo un desarrollo menos espectacular en los trabajos de Taylor, Maclaurin y otros matemáticos ingleses.

Los conceptos fundamentales que Newton incorporó al desarrollo del cálculo fueron las *fluxiones* o velocidades de variación, que corresponden con nuestras derivadas; los *momentos* que son magnitudes infinitesimales que pueden identificarse con las actuales diferenciales; y finalmente, las *primeras y últimas razones* con gran parecido a lo que hoy llamamos límite.

Newton escribió varias versiones de sus descubrimientos en

el campo del cálculo infinitesimal: en octubre de 1666 resumía sus hallazgos en un manuscrito sobre fluxiones; en 1669 escribió el tratado sobre series infinitas titulado "*Análisis por medio de ecuaciones con un número infinito de términos*" (*De analysi per aequationes numero terminarum infinitas*) que circuló entre los miembros de la Royal Society; de 1671 data un tratado "*Método de fluxiones y series infinitas*" (*Methodus fluxionum et serierum infinitarum*) y aproximadamente en 1676 escribió su *cuadraturas de curvas* (*De quadratura curvarum*). Todos ellos fueron publicados de 1704 en adelante.

Para el desarrollo de su nuevo cálculo, Leibniz se inspiró en sus primeros trabajos sobre sucesiones de sumas y diferencias de números. Partiendo del carácter inverso entre la suma y la diferencia en el caso discreto, Leibniz desarrolló un procedimiento para determinar sumas y diferencias de infinitesimales, operaciones a través de las cuales se obtenían cuadraturas y tangentes respectivamente.

Contemplando la sucesión infinita de valores de una variable  $x$ , denotó la diferencia entre dos valores sucesivos por  $dx$ . Sumando tales diferencias, operación que denotaba por

$$\int dx,$$

obtenía la variable completa  $x$ . Es decir:

$$\int dx = x.$$

Partiendo de estas ideas, Leibniz obtuvo una serie de resultados correctos usando un procedimiento algorítmico más sencillo que el de Newton. Sus primeras publicaciones sobre el tema, aparecieron en la revista científica alemana *Acta Eruditorum* en dos breves artículos publicados en 1684 y 1686. Posteriormente, en ésta y otras revistas aparecieron artículos en los que Leibniz siguió desarrollando su cálculo y presentando una serie de aplicaciones. Hablaremos también en este capítulo de las

primeras contribuciones hechas a finales del siglo por los matemáticos suizos James y John Bernoulli al tipo de cálculo leibniziano, en lo que se refiere al desarrollo de la integral.

Tanto Newton como Leibniz trataron con cantidades variables; pero Newton las consideraba como *variando en el tiempo*, mientras Leibniz las consideraba más bien como *recorriendo una sucesión de valores infinitamente próximos*. Para Newton el objeto de la integración era *hallar la cantidad de la que provenía una fluxión dada*, es decir, lo que ahora llamamos obtener la antiderivada o integral indefinida de una función dada. Por ello, en su versión del cálculo, el actual teorema fundamental del cálculo era una conclusión inmediata y trivial de la definición de integral.

Leibniz por su parte, veía a la integral como la suma de todos los valores de una magnitud, o la *suma de rectángulos infinitamente angostos*; es decir, la manejaba en el sentido de lo que hoy llamamos integral definida. El teorema fundamental, por ello, era para él una consecuencia de la relación inversa que hay entre la operación de sumar y la de tomar diferencias. Sin embargo, los hermanos Bernoulli reinterpretaron la integral de Leibniz como la inversa de la diferenciación, así que durante todo el siglo XVIII el famoso teorema fue una consecuencia inmediata de la definición de integral.

Tanto Newton como Leibniz trabajaron con *cantidades infinitamente pequeñas* y ambos eran conscientes de las dificultades lógicas inherentes a su uso. Newton trató de evitar estas dificultades modificando la fundamentación de su cálculo por medio de las *primeras y últimas razones*, aunque las manejó con cierta inconsistencia y no llegó a satisfacer los requerimientos del rigor matemático.

Este hecho provocó que, junto al espectacular desarrollo del cálculo que hemos mencionado arriba, surgieran también una serie de críticas muy fuertes contra las teorías de ambos, las que fueron algunas veces acompañadas de intentos de fundamentación por otros caminos pues lo que resultaba incuestionable era que



aplicando las reglas de procedimiento elaboradas por Newton y Leibniz se llegaba, en muchos casos, a resultados correctos.

## 1 LA INTEGRAL EN EL TRABAJO DE NEWTON.

Newton descubrió que los desarrollos en series de potencias ofrecían varias ventajas: en primer lugar, permitían aplicar a un dominio mucho más amplio de curvas ciertas reglas y algoritmos que sólo estaban definidas, en principio, para ecuaciones sencillas; por ejemplo, la relación

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

que para entonces era bien conocida, podía aplicarse en aquellos casos en los que, a través de un desarrollo en serie, la ecuación de una curva «complicada» se reducía a una suma de términos formados por una constante y una potencia de la variable (aunque estos fueran un número infinito). En segundo lugar, los desarrollos en serie suministraban un método fácil y uniforme para aproximar o simplificar fórmulas despreciando los términos de orden superior, procedimiento que Newton utilizó con gran virtuosismo en la aplicación de sus métodos matemáticos al tratamiento de problemas físicos.

Así por ejemplo, para integrar  $y = a^2/(b+cx)$ , dividió  $a^2$  entre  $b+cx$  y obtuvo

$$y = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2 cx}{b^2} + \frac{a^2 c^2 x^2}{b^3} - \frac{a^2 c^3 x^3}{b^4} + \dots$$

teniendo esta serie infinita, encontró el área integrando término a término, obteniendo

$$\frac{a^2 x}{b} - \frac{a^2 c x^2}{2b^2} + \frac{a^2 c^2 x^3}{3b^3} - \frac{a^2 c^3 x^4}{4b^4} + \dots$$

Newton estaba convencido de que, para cualquier uso práctico, era suficiente con tomar los primeros términos de esta serie. De la misma forma, para integrar

$y = 1/(1+x^2)$ , usó el desarrollo binomial para escribir

$$y = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

e integró término por término. Pero notó que si tomaba  $y = 1/(x^2+1)$ , entonces el desarrollo binomial que obtenía era

$$y = x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8} + \dots$$

para después integrar término a término. Señaló entonces que cuando  $x$  era suficientemente pequeño se debía usar el primero de estas desarrollos, y cuando era grande, el segundo.

En el *De analysi*, donde explica y utiliza estos métodos de desarrollo en serie, Newton empieza por mencionar la regla para obtener la integral de  $x^m$ , con  $m$  racional, regla que jugó un papel importante tanto en el descubrimiento de estos métodos, como en sus diversas aplicaciones. En ese mismo tratado da un método general (del cual se deriva la regla anterior) para hallar la relación entre la cuadratura de una curva y su ordenada. Explica su método mediante un ejemplo, sin embargo, en la explicación queda claro su carácter general.

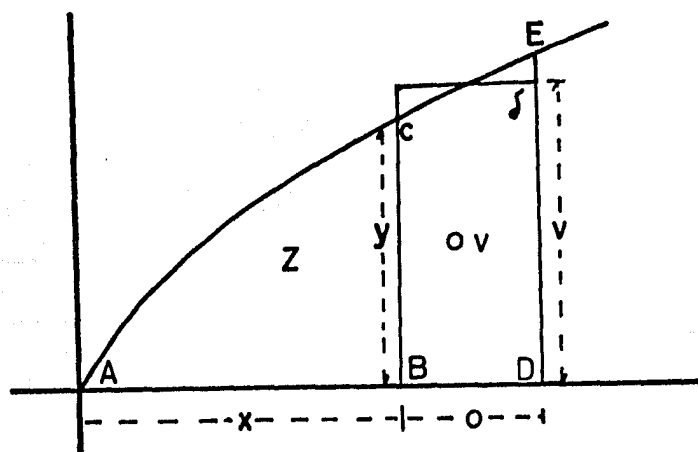


figura 34.

Sea  $z$ , en la figura 34, el área bajo la curva desde 0 hasta  $x$ , es decir, el área ABC. Newton consideró un incremento en  $x$  al que llamó *momento de  $x$*  y lo denotó por  $o=BD$ . Sea  $v=Dj$  tal que área BCED =  $ov$ . Supongamos, por ejemplo, que se trata de la curva

para la cual

$$z = (2/3)x^{3/2},$$

es decir,

$$z^2 = (4/9)x^3,$$

considerando los incrementos se tiene

$$(z+ov)^2 = (4/9)(x+o)^3,$$

de donde

$$z^2 + 2zov + o^2v = (4/9)[x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3].$$

Sustituyendo  $z^2$  por  $(4/9)x^3$ , simplificando y dividiendo los dos miembros de la expresión resultante por  $o$ , nos queda:

$$2zv + ov^2 = (4/9)[3x^2 + 3xo + o^2].$$

Al tomar el incremento  $o$ -BD "infinitamente pequeño"  $v$  se hace igual a  $y$  y los términos que contienen a  $o$  desaparecen, resultando que:

$$2zy = (4/3)x^2$$

y sustituyendo el valor de  $z$  se obtiene

$$y = x^{1/2}.$$

Evidentemente este mismo procedimiento se puede aplicar a cualquier función polinómica en la que  $z$  esté definida en términos de  $x$ . Así Newton mostró que el área puede ser obtenida invirtiendo el proceso de encontrar una razón de cambio. Usando este método, encontró el área bajo muchas curvas coleccionandolas en largas lista (las primeras tablas de integrales) y resolvió otros problemas que pueden formularse en terminos de sumatorias.

Mientras que las cuadraturas o áreas habían sido obtenidas anteriormente usando la suma de infinitesimales u otros métodos equivalentes, es decir, mediante lo que ahora llamamos la integral definida, Newton aquí determinó primero la razón de cambio del área, y después, de ella llegó al área misma mediante lo que ahora llamaríamos la integral indefinida de una función.

Varios matemáticos anteriores a Newton conocían esta relación inversa, pero él fue el primero en dar un procedimiento aplicable en forma general para obtener razones de cambio instantáneas y para invertir las cuando los problemas involucraban

sumatorias (mejor dicho, límites de sumas). Antes de esto, la tendencia había sido en sentido opuesto: reducir problemas a la determinación de cuadraturas, siempre que fuera posible.

En su *método de fluxiones y series infinitas* consideró a las variables como generadas por el movimiento continuo de puntos, líneas y planos más que como una unión estática de elementos infinitesimales. Aquí llamó *fluente* a una cantidad que variaba con respecto al tiempo, y *fluxión* a su razón de cambio o velocidad. Denotó por  $\dot{x}$  y  $\dot{y}$  a las fluxiones de las fluentes  $x$  y  $y$ . La fluxión de  $\dot{x}$  es  $\ddot{x}$ , etc. La fluente de la cual  $x$  es fluxión es  $\dot{x}$ , la fluente de esta última es  $\ddot{x}$ , etc.

En este trabajo, Newton expuso con mayor claridad el problema fundamental del cálculo: dada una relación entre dos fluentes, encontrar la relación entre sus fluxiones; e inversamente, dada una relación entre dos fluxiones, llegar a la correspondiente relación entre las fluentes.

Para atacar este segundo aspecto del problema, Newton consideró varios tipos de relación: 1) cuando están presentes  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  y una de las dos fluentes, 2) cuando están presentes  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $x$  y  $y$ , 3) cuando están presentes  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  y las tres fluentes correspondientes. El primer tipo es el más sencillo y, en notación moderna, consiste en resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Del segundo tipo de relación, resolvió la ecuación

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + y + x^2 + xy$$

mediante un proceso de aproximaciones sucesivas; empezó con

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + x^2$$

como una primera aproximación, obtuvo  $y$  como una función de  $x$ ,

introdujo este valor de  $y$  en el lado derecho de la ecuación original, y continuó el proceso. Aquí Newton describió lo que estaba haciendo, pero no lo justificó.

Del tercer tipo, trabajó la ecuación  $2\dot{x} - \dot{z} + \dot{y}x = 0$ . Supuso una relación entre  $x$  y  $y$ , por ejemplo  $x = y^2$ , así que  $\dot{x} = 2y\dot{y}$ . Entonces, la ecuación original se transformó en  $4y\dot{y} - \dot{z} - \dot{y}y^2 = 0$ , de donde obtuvo que  $2y^2 + (y^3/3) = z$ .

Mediante la idea de considerar cantidades que se mueven en el tiempo, Newton pensaba que podría resolver las dificultades de fundamentación que le planteaba el uso de las cantidades *infinitamente pequeñas*, las cuales son tan pequeñas que se les puede despreciar y, sin embargo obviamente no son nulas ya que se requiere poder dividir entre ellas. A pesar de ello, el método de fluxiones que usó Newton en este caso no es más riguroso ni tiene una diferencia esencial con el método que utilizó en su *De analysi*.

En su tercer escrito sobre cálculo, *Cuadratura de curvas*, Newton declara haber abandonado el método de los infinitesimales. Ahora para determinar por ejemplo la fluxión de  $x^m$ , reemplaza  $x$  por  $x+o$ , desarrolla  $(x+o)^m$  y resta  $x^m$ , para obtener, como antes, el cambio en  $x^m$  que corresponde al cambio  $o$  en  $x$ . Después de esto, Newton forma la razón entre el cambio en  $x$  y el cambio en  $x^m$ , es decir,

$$1 \quad \text{a} \quad mx^{m-1} + m(m-1)/2 \cdot ox^{m-2} + \dots$$

y en esta razón hace tender  $o$  a cero, para obtener

$$1 \quad \text{a} \quad mx^{m-1}$$

a lo que llama *la última razón de incrementos evanescentes* (es decir, que se desvanecen o tienden a anularse), o también, *la primera razón de disminuciones nascentes*.

Es por medio de estas concepciones que Newton llega a estar muy cerca de lo que sería una fundamentación del cálculo basada en el concepto de límite.

En 1687 se publicó el primer libro de Newton que involucraba

su cálculo: *Principios Matemáticos de la Filosofía de la naturaleza* (*philosophiae naturalis principia mathematica*), del cual se dice que es la mejor muestra de la *synthesis newtoniana* pues en él logra integrar en una sola teoría las primeras leyes matemáticas que describen el movimiento celeste dadas por Kepler, con las leyes del movimiento terrestre dadas por Galileo auxiliándose para ello tanto de la noción de primeras y últimas razones, como de la de infinitesimal.

Veamos ahora algunos lemas y corolarios que presenta Newton en la sección I del libro I de sus *Principia* [15] referidos al concepto de integral.

#### LEMA I

*Cantidades y razones de cantidades, las cuales en cualquier tiempo finito convergen a ser iguales, y antes de que el tiempo finalice se aproximan una a la otra en menos que cualquier diferencia dada, entonces finalmente son iguales.*

DEMOSTRACION: Si usted niega esto, suponga entonces que al final son diferentes, y sea  $D$  su última diferencia. Luego entonces no podrían aproximarse en menos que  $D$ , lo que contradice la suposición.

Gracias a este lema, Newton puede liberarse de la necesidad de aquella doble reducción al absurdo con la que se concluía la clásica demostración por exhaustión.

#### LEMA I

*Si en cualquier figura  $AaCE$ , determinada por las líneas rectas  $Aa$ ,  $cE$  y la curva  $acE$ , se inscriben cualquier número de paralelogramos  $ab$ ,  $Bc$ ,  $Cd$ , ... con bases iguales  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ , ... y lados  $Rb$ ,  $Cc$ ,  $Dd$ , ... paralelos al lado  $Aa$  de la figura y los paralelogramos  $aKbl$ ,  $bLcm$ ,  $cMIn$ , ... son completados; entonces, si las anchuras de los paralelogramos van disminuyendo y su número se aumenta in infinitum, digo que las últimas razones de la figura inscrita  $AKbLcMdD$ , la figura circunscrita  $AaIhmncndE$  y la figura curvilínea  $AabcdE$ , tendrán una con otra, razones de*

*Igualdad.*

DEMOSTRACION: La diferencia de las figuras inscritas y circunscritas es la suma de los paralelogramos  $Kl$ ,  $Lm$ ,  $Mn$ ,  $Do$ ; esto es, (de la igualdad de sus bases), el rectángulo sobre una de sus bases  $Kb$  y la suma de sus alturas  $Aa$ , forman el rectángulo  $ABla$ . Pero este rectángulo, puesto que su anchura  $\alpha\beta$  disminuye *in infinitum*, se hace menor que cualquier espacio dado. Y por lo tanto (por el Lema I) las figuras inscritas y circunscritas se hacen finalmente iguales, y más aún, la figura curvilínea intermedia se hace finalmente igual a cada una de aquellas dos.

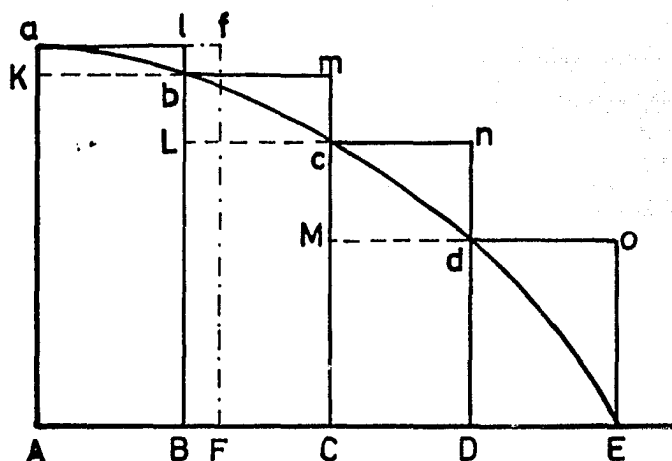


figura 35.

**LEMA III**

Las últimas razones, son también razones de igualdad cuando las bases  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ , ... de los paralelogramos no sean iguales, y todas disminuyan *in infinitum*.

DEMOSTRACION:

Suponiendo que (fig 35)  $AF$  es igual a la anchura más grande, y completando el paralelogramo  $FAaf$ , este paralelogramo será más grande que la diferencia de las figuras inscritas y circunscritas. Pero puesto que su base  $AF$  disminuye *in infinitum*, será menor que cualquier rectángulo dado.

**COROLARIO I**

De aquí que la última suma de estos paralelogramos

evanescentes coincidirá en todas partes con la figura curvilínea.

#### COROLARIO II

Más aún, la figura rectilínea comprendida debajo de las cuerdas de los arcos evanescentes  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$ , ..., al final coinciden con la figura curvilínea.

#### COROLARIO III

Asimismo la figura rectilínea circunscrita comprendida sobre las tangentes a los mismos arcos.

#### COROLARIO IV

Y por lo tanto, esas últimas figuras (así como su perímetro acE) no son rectilíneas, su límite es la figura curvilínea.

## 2 LA INTEGRAL EN EL TRABAJO DE LEIBNIZ.

A diferencia de Newton, Leibniz se reafirmó en el uso de las concepciones infinitesimales --a pesar de mantener serias dudas sobre su justificación lógica-- debido, sobre todo, al éxito operacional de su método diferencial. Incluso en algún momento, intentó demostrar que utilizando las diferenciales como símbolos *posiblemente sin significado*, y aplicando las reglas del cálculo, se llegaría a resultados correctos.

Los artículos de Leibniz sobre cálculo fueron publicados a partir de 1684; pero existen unos manuscritos consistentes en cientos de páginas con notas que fueron hechas por él a partir de 1673 y que no fueron publicadas durante su vida. Por ser solamente notas, son confusas pues saltan de un tema a otro y contienen una notación que fue cambiando conforme iba modificándose el propio pensamiento de Leibniz. A pesar de ello, ilustran con bastante claridad cómo fue el proceso de razonamiento a través del cual Leibniz arribó a las nociones



fundamentales de su versión del cálculo diferencial e integral.

Un antecedente importante para su trabajo sobre cálculo, es la tesis que escribió en 1666, *El arte de las combinaciones* (*De arte combinatoria*), en la que consideraba sucesiones de números y formaba las correspondientes sucesiones de sus primeras diferencias, segundas diferencias y diferencias de orden mayor. Por ejemplo, para la sucesión de cuadrados

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$$

las primeras diferencias son

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$$

y las segundas diferencias

$$2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots$$

Leibniz notó que se anulaban las segundas diferencias de la sucesión de números naturales, las terceras de la sucesión de cuadrados, las cuartas de la sucesión de cubos, etc.

En estos estudios sobre sucesiones numéricas  $a_1, a_2, a_3, \dots$  y sus sucesiones de primeras diferencias  $b_1 = a_2 - a_1, b_2 = a_3 - a_2, b_3 = a_4 - a_3, \dots$  se dió cuenta de que se cumplía la relación

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = a_{n+1} - a_n$$

lo que significaba que las sucesiones de diferencias podían sumarse fácilmente y que, en el caso de que la sucesión original empezara con 0, la suma de las primeras diferencias sería el último de los términos que se tomó en la sucesión.

Estos descubrimientos le fueron de gran utilidad para resolver el problema que le planteó Huygens en 1673, consistente en encontrar la suma

$$1/1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 + 1/15 + \dots$$

donde los denominadores son los llamados "números triangulares":  $r(r+1)/2$ . Descubrió que los términos de la serie pueden expresarse como las diferencias de una sucesión, ya que:

$$\frac{2}{r(r+1)} = \frac{2}{r} - \frac{2}{r+1},$$

de donde llegó a

$$\sum_{r=1}^n [r(r+1)/2] = 2 - 2/(n+1)$$

y la suma que buscaba era entonces 2.

Con base en estas ideas estudió todo un sistema de sucesiones de sumas y diferencias, que resumió en el triángulo armónico (fig. 36), en el que los renglones contienen las sucesiones de diferencias de la sucesión del primer renglón. El  $n$ -ésimo elemento de cada renglón es la suma de los elementos del renglón siguiente a partir del  $n$ -ésimo, y es también la diferencia entre los elementos  $n$  y  $n+1$  del renglón anterior.

---

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7 ...
1/2	1/6	1/12	1/20	1/30	1/42 ...	
1/3	1/12	1/30	1/60	1/105 ...		
1/4	1/20	1/60	1/140 ...			
1/5	1/30	1/105 ...				
1/6	1/42 ...					
1/7 ...						

---

figura 36.

Así fue como Leibniz llegó a la conclusión de que formar las sucesiones de sumas y las sucesiones de diferencias eran operaciones inversas, y aplicó este tipo de ideas al cálculo tomando, como se muestra en la figura 34, una sucesión donde los elementos eran las ordenadas equidistantes y de una función. Inicialmente pensó a las abscisas  $x$  como representando el orden de los términos de la sucesión. la suma de las ordenadas da una aproximación a la cuadratura de la curva, y la diferencia entre dos ordenadas sucesivas (a la que después llamó  $dy$ ) resultaba ser, aproximadamente, la pendiente de la tangente correspondiente.

La cantidad  $dx$ , a la que frecuentemente llamaba  $a$ , era siempre 1 porque representaba la diferencia entre 2 naturales sucesivos; pero cuanto mas pequeña fuera esta unidad, mejor sería la aproximación. Leibniz dedujo de esto que si la unidad pudiera ser tomada *infinitamente pequeña*, estas aproximaciones se harían exactas.

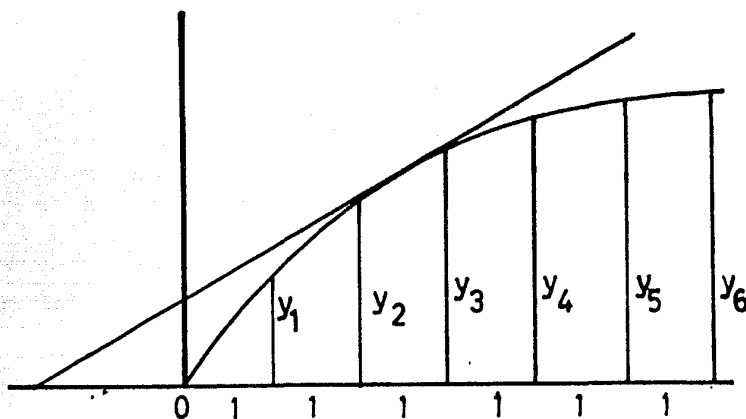


figura 37.

En sus notas del 25 de octubre de 1675, Leibniz usó la terminología de Cavalieri:

«*omnia lineae*» = *omn.* = «*todas las líneas*»

y en vez de  $dy$  usó la letra  $l$  para concluir que

$$\text{omn. } l = y$$

puesto que *omn. l* es la suma de las primeras diferencias de una sucesión que empieza con 0 (fig 37), por lo que es igual al último término.

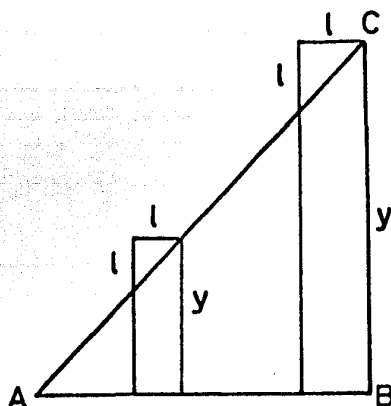


figura 38.

Para encontrar a qué era igual  $\text{omn. } y1$ , Leibniz pensó en términos de la función  $y=x$ . El área del triángulo ABC (fig. 38), es la suma de todas las  $y1$  (para  $1$  «pequeñitas») y es también  $y^2/2$ .

El siguiente paso era hacer la transición de las series discretas al caso en el que  $dy$  y  $dx$  fueran incrementos arbitrarios de una función  $y$  de  $x$ .

El manuscrito del 29 de octubre de 1675, Leibniz lo inicia con

$$\text{omn. } y1 = \overline{\text{omn. } \overline{\text{omn. } 1} 1/a}$$

lo cual se cumple porque la sola  $y$  es  $\text{omn. } 1$  (las líneas superiores se usan como los paréntesis actuales). La notación  $1/a$ , que introduce un elemento de confusión, es usada aquí con las intención de preservar dimensiones (después hablaremos más sobre esto). y como ya habíamos visto que

$$y^2/2 = \text{omn. } y1$$

se concluye que

$$y^2/2 = \overline{\text{omn. } \overline{\text{omn. } 1} 1/a}$$

Es decir, usando nuestra notación lo que aquí se establece es que

$$\frac{y^2}{2} = \int \left[ \int dy \right] \frac{dy}{dx} = \int y \frac{dy}{dx}$$

Otro teorema del mismo tipo, que Leibniz deriva de un argumento geométrico, es:

$$\text{omn. } x1 = x \text{ omn. } 1 - \text{omn. } \text{omn. } 1 \dots \dots \dots (3)$$

donde, como antes,  $1$  es la diferencia de valores entre dos términos sucesivos de la sucesión de ordenadas  $y$  y  $x$  indica el número de términos. En nuestra notación esta igualdad es

$$\int x dy = xy - \int y dx.$$

En la ecuación (3) Leibniz sustituye 1 por  $x$  y obtiene

$$\text{omn. } x^2 = x \text{ omn. } x - \text{omn. } \text{omn. } x;$$

y como afirma que  $\text{omn. } x$  es  $x^2/2$ , llega a que

$$\text{omn. } x^2 = x \cdot x^2/2 - \text{omn. } (x^2/2).$$

Trasponiendo el último término de esta expresión, obtiene finalmente

$$\text{omn. } x^2 = x^3/3.$$

Es en este manuscrito del 29 de octubre en donde Leibniz decide sustituir  $\text{omn.}$  por el símbolo

$$\int$$

surgido del alargamiento de una S de "*suma*"; después de lo cual transcribe las fórmulas que había deducido antes al nuevo simbolismo, subrayando que estas reglas se aplican a los casos en "*que la razón de las diferencias de los términos a los términos mismos es menor que cualquier cantidad dada*" [6], es decir, a las series cuyas diferencias son infinitamente pequeñas.

Más adelante aparece también la introducción del símbolo actual de diferencial,  $d$ . En un principio el carácter inverso de las dos operaciones lo relacionó con un aumento o disminución en la dimensión; así, el área al ser diferenciada debía dar una longitud. Para resaltar este hecho usó el símbolo  $x/d$  en vez de  $dx$ . Después llegó a la conclusión de que la integral y la diferencial no alteraban la dimensión.

Para 1680 la  $dx$  era ya claramente la diferencial entre abscisas como la manejamos actualmente, lo mismo la  $dy$ , y decía

*"...ahora estos  $dx$  y  $dy$  se toman como infinitamente pequeños, o se entiende que los dos puntos de la curva están separados por una distancia que es menor que cualquier longitud dada."* [9]

Entonces, para obtener el área debajo de la curva (fig. 39) toma

la suma de los rectángulos inscritos y dice que elimina los triángulos restantes porque son infinitamente pequeños comparados con los rectángulos.

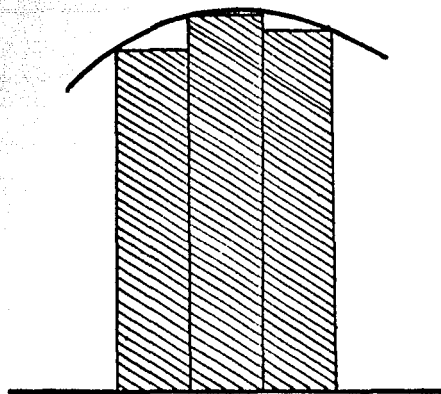


figura 39.

Ya establecidas las ideas de diferencial y de "suma" para los modelos continuos, Leibniz los aplica para obtener una serie de resultados como los siguientes:

**LONGITUD DE CURVA.** Dada una curva  $y=f(x)$ , construye el triángulo diferencial tomando un incremento  $dx$  en la variable  $x$  y encontrando el incremento correspondiente en la variable  $y$  (fig. 40-a);  $ds$  es el incremento infinitesimal sobre la gráfica de  $y=f(x)$ . Como Leibniz consideraba que el arco infinitesimal  $AB$  era indistinguible de la cuerda  $AB$ , resultaba que el triángulo curvo también era indistinguible del triángulo rectángulo formado con esta cuerda (fig 40-b). Así que aplicaba el teorema de Pitágoras para concluir que

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

de donde obtuvo

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx.$$

Esta relación nos da la longitud del elemento de arco infinitesimal en términos de las diferenciales  $dx$  y  $dy$ . Así pues, la longitud de la curva será la "suma" de todos estos arcos infinitesimales, es decir:

$$\int \sqrt{1+(dy/dx)^2} dx.$$

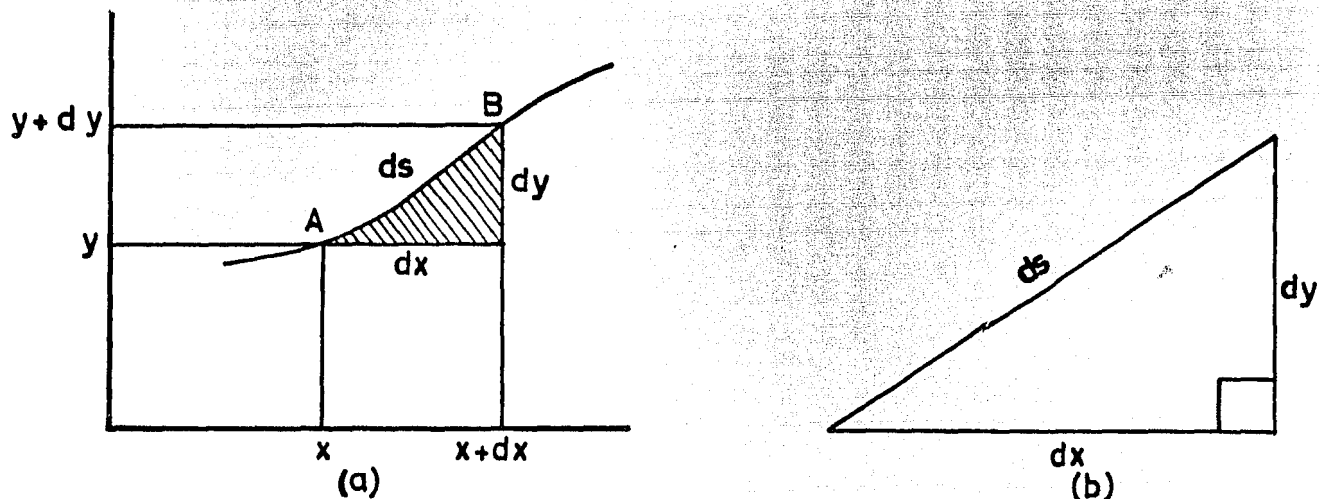


figura 40.

**SUPERFICIE DE REVOLUCION.** Considérese una superficie generada por la rotación de la curva  $y=f(x)$  alrededor del eje  $X$ , como se muestra en la figura 41-a. Tómese en ella un anillo cuyo espesor infinitesimal sea  $ds$ . Si este anillo se extendiera, quedaría como un rectángulo de lados  $ds$  y  $2\pi y$  (fig 41-b) por lo cual el elemento diferencial de área será

$$dA = 2\pi y ds = 2\pi y \sqrt{1+(dy/dx)^2} dx$$

y, finalmente, sumando estas áreas infinitesimales se obtiene el área total del sólido de la superficie de revolución:

$$A = \int 2\pi y \sqrt{1+(dx/dy)^2} dx$$

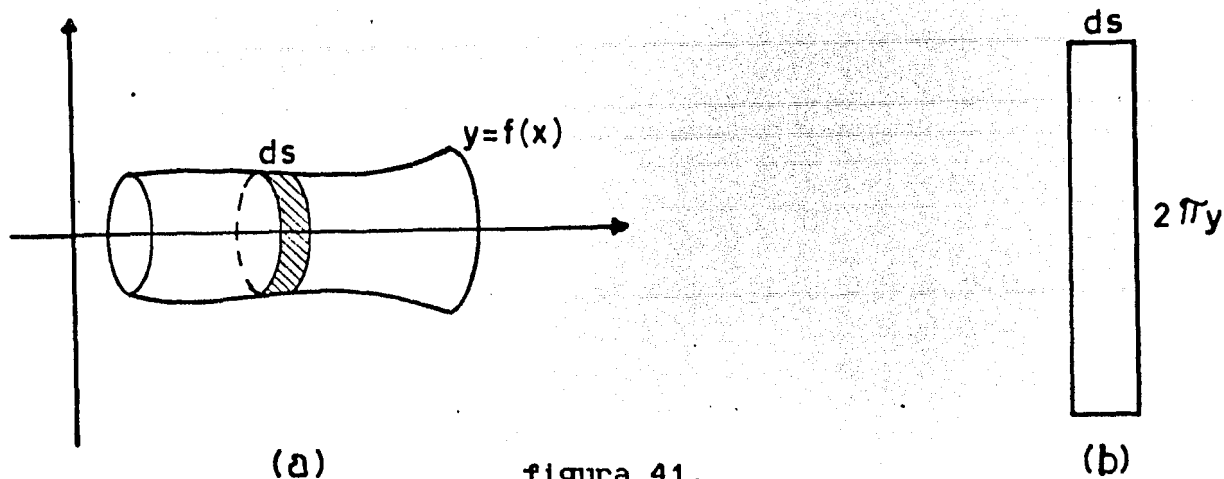


figura 41.

### 3 LAS LECCIONES SOBRE INTEGRACION DE JOHN BERNOUILLI

Los hermanos Bernoulli, James (o Jakob) y John (o Johann), estudiaron los artículos publicados por Leibniz en el *Acta Eruditum*, y a partir de 1690 ellos mismos empezaron a escribir artículos en ésta y otras revistas sobre cálculo. Además de sus propias aportaciones al tema, los Bernoulli hicieron mucho por popularizar las ideas de Leibniz a pesar de que aquellos primeros artículos resultaron ser para ellos "un enigma, más que una explicación".

De los dos hermanos, John tenía mas imaginación y originalidad, pero James era mucho más crítico por lo que mantuvo un punto de vista mas cuidadoso frente a los planteamientos de Leibniz sobre los infinitesimales.

Ambos sostuvieron una correspondencia constante con Leibniz, Huygens y entre ellos mismos, además de con otros matemáticos contemporáneos. Todos estos hombres trabajaron sobre muchos problemas comunes sugeridos en cartas o planteados como desafíos. Como muchos de sus resultados eran también comunicados por carta, el asunto de la prioridad se vuelve muy complicado y se oscurece aún más debido a la peculiaridad de las relaciones establecidas entre ellos. Al parecer, John no dudaba en hacer un uso poco escrupulosos de los resultados que le llegaban para presentarse como su descubridor, por lo que tuvo serias disputas con su hermano y con otros matemáticos de la época. Se dice también que el propio John fue objeto de un plagio por parte del marqués de L'Hopital quien publicó un libro titulado *Análisis de los Infinitésimos para el entendimiento de las líneas curvas* basado, al menos parcialmente, en las lecciones que John le había dado sobre el cálculo diferencial.

En 1742 John publicó en sus obras completas, las lecciones que le había dado a L'Hopital sobre el *método de las integrales* mas de 50 años después de haberlas escrito. Estas lecciones pueden considerarse como un buen resumen de las ideas vigentes alrededor de 1700 acerca de las integrales y su uso en la



resolución de problemas.

Bernoulli comienza definiendo la integral como la inversa de la diferencial, concepción que como ya hemos mencionado antes, difiere de la de Leibniz. Afirma que la integral de  $ax^n dx$  es  $x^{n+1} \cdot a/(n+1)$  y da varios métodos prácticos para el cálculo de integrales, entre los que se encuentra el método de sustitución que viene explicado a través de ejemplos como el siguiente.

Supongamos que se pide hallar la integral de

$$(ax+bx^2)dx \quad (a+bx).$$

Sustituyendo  $a+bx=y$  obtenemos  $x=yy-a$ , y así  $dx=2ydy$ , y en la cantidad total

$$(ax+bx^2) \cdot dx \quad a+bx = 2y^6 \cdot dy - 2ay^4 \cdot dy.$$

Y ahora es fácil ya integrar esta expresión; su integral es  $(2/7)y^7 - (2/5)y^5$  y, sustituyendo de nuevo y por su valor, tenemos que la integral buscada es  $(2/7)(x+a)^3 x+a - (2/5)a(x+a)^2 x+a$ . [6]

Bernoulli pasa a explicar a continuación que el uso principal del cálculo integral está en la determinación de áreas; para ello hay que considerar dicha área como dividida en partes infinitamente pequeñas (ya sean franjas, triángulos o cuadriláteros en general como en la figura 42).

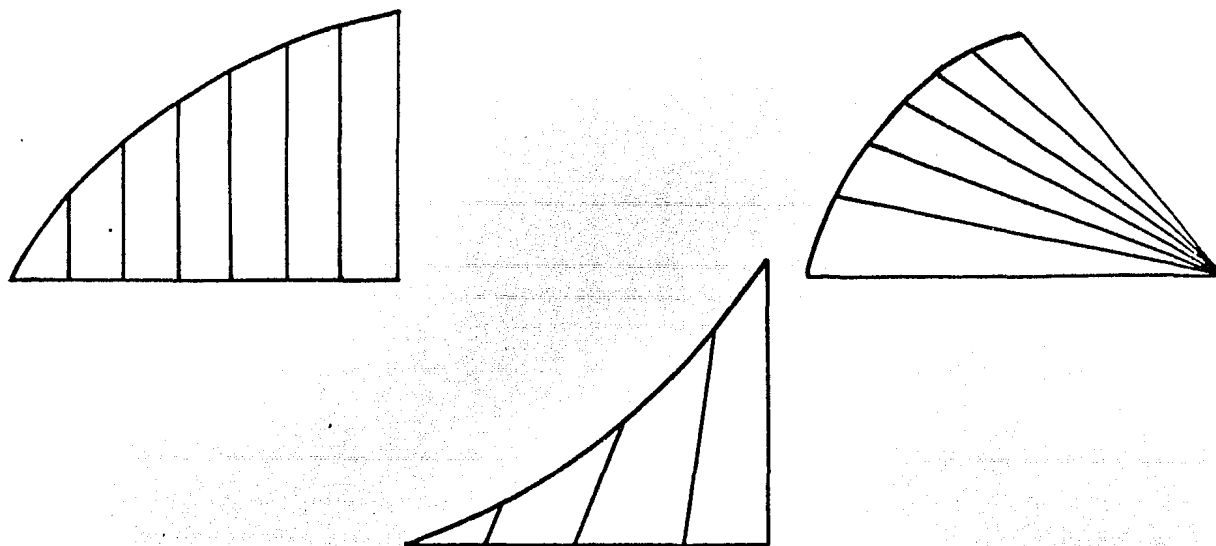


figura 42.

Estas partes son entonces las diferenciales de dichas áreas y lo que tenemos que hacer es hallar su expresión "por medio de letras determinadas y una única cantidad indeterminada", es decir, una expresión de la forma  $f(u) \cdot du$  donde  $u$  es una variable. El área buscada es entonces igual a la integral

$$\int f(u) \cdot du$$

Bernoulli plantea como otra aplicación de la integral, el problema de determinar una curva a partir de conocer una propiedad de sus tangentes. Esta propiedad tiene que expresarse bajo la forma de una ecuación en la que intervienen las diferenciales y debe determinarse la ecuación de la curva usando integrales, es decir, se trata de resolver una ecuación diferencial. A esto él le llama "método inverso de las tangentes" y el primer ejemplo que pone es el siguiente.

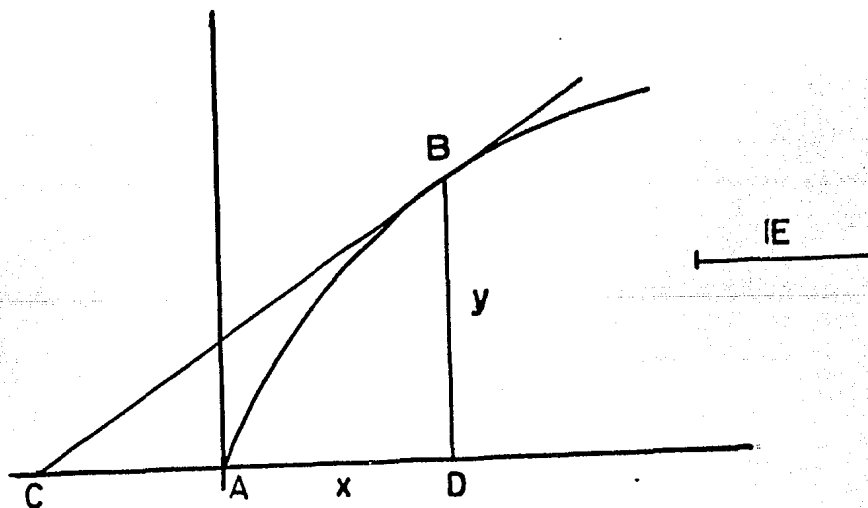


figura 43.

Se pide determinar qué tipo de curva AB (fig. 43) es aquella cuya ordenada  $RD$  es siempre media proporcional entre un segmento dado  $E$  y la subtangente  $CD$ , es decir, tal que  $E:RD=RD:CD$ . Sea  $E=a$ ,  $AD=x$ ,  $RD=y$ , luego  $CD=yy/a$  de donde obtenemos la ecuación

$$y dx = yy \cdot dy/a, \text{ o bien, } a dx = y dy,$$

e integrando ambos miembros nos queda que

$$ax = (1/2)yy, \text{ es decir, } 2ax = yy$$

lo que nos demuestra que la curva AB buscada es la parábola de parámetro=2a. [6]

En las lecciones siguientes dedica mucha atención al problema de cómo traducir los datos en una ecuación diferencial manejable. Resuelve, entre otras cosas, problemas sobre rectificación de curvas tales como cicloides, espirales logarítmicas y la catenaria (ver la próxima sección), y el problema sobre de la forma de las velas de un barco hinchadas por el viento.

#### 4 DOS DE LOS PROBLEMAS FAMOSOS A FINALES DEL SIGLO.

En esta sección veremos, aunque sea de una manera superficial, dos problemas famosos que fueron discutidos por varios de los matemáticos destacados de la época, y cuya solución se hizo posible gracias al uso de los nuevos métodos del cálculo diferencial e integral.

##### EL PROBLEMA DE LA CATENARIA

Si se toma una cadena, o un cable perfectamente flexible, y se le sujeta de dos puntos fijos, la curva que se formará entre dichos puntos recibe el nombre de *catenaria*. Galileo pensaba que se trataba simplemente de una parábola, pero en 1646 Huygens demostró que esto no era verdad dejando abierto el problema de averiguar la forma real de la curva. En 1690 James Bernoulli publicó en el *Acta eruditorum* un desafío a los matemáticos para resolver este problema y un año más tarde Leibniz, John Bernoulli y Huygens enviaron sus soluciones. De ellos, Leibniz y Bernoulli aplicaron el nuevo cálculo y Huygens, con gran virtuosismo, logró la solución correcta usando los clásicos métodos de la matemática infinitesimal.

Haremos un breve resumen de la solución dada por John Bernoulli. Sea AB en la figura 44, un arco de catenaria.

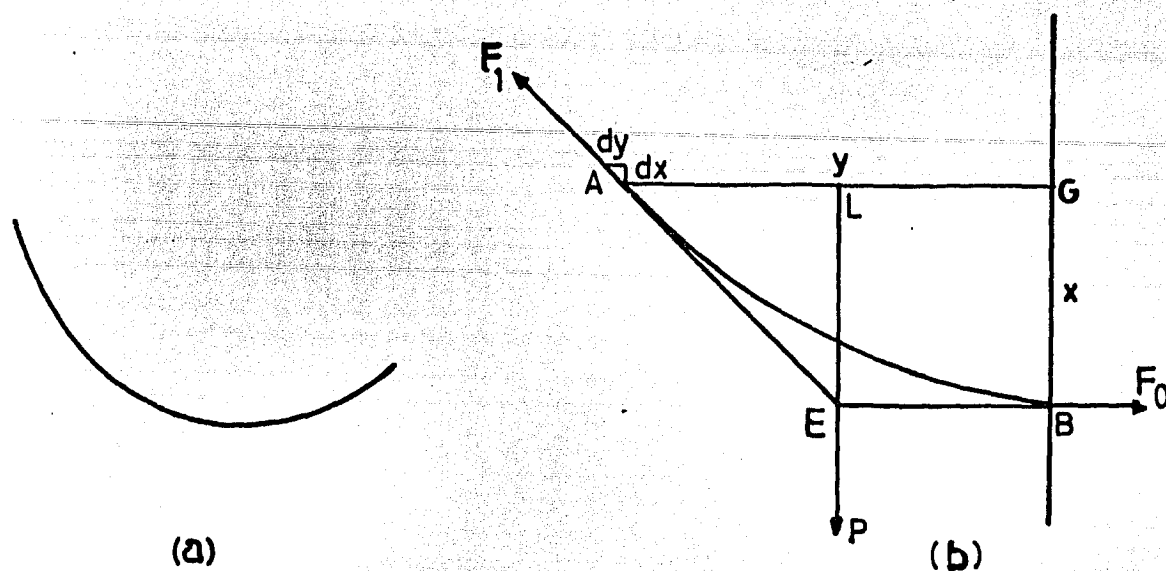


figura 44.

Supongamos que el peso  $P$  del arco  $AB$ , se concentra en el punto  $E$  y se le sostiene por medio de dos cuerdas sin masa  $AE$  y  $BE$  que son tangentes a la curva en  $A$  y en  $B$  respectivamente. Usando razonamientos mecánicos Bernoulli encontró que las fuerzas  $F_0$  y  $F_1$ , que son necesarias para mantener el arco  $AB$  de la cadena en su posición de equilibrio, son iguales (en valor absoluto y dirección) a las que se requieren para mantener en equilibrio al peso  $P$  del mismo arco en las condiciones que describimos antes. Además, la fuerza  $F_0$  en  $B$  no depende de la elección del punto  $A$ , por lo que podemos tomarla como constante,  $F_0 = a$ . Partiendo de que la cadena tiene densidad uniforme, el peso  $P$  puede tomarse igual a la longitud  $s$  de la cadena desde  $A$  hasta  $B$ , y entonces, la ley de la composición de fuerzas nos da

$$P:F_0 = s:a = dx:dy,$$

así que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{s},$$

que es la ecuación diferencial de la curva.

El problema para resolver esta ecuación radica en que  $x$  y  $y$  aparecen implícitamente en la longitud de arco  $s$ . Después de varias manipulaciones ingeniosas, Bernoulli consigue llegar a la

ecuación diferencial

$$dy = \frac{adx}{(x^2 - a^2)}$$

Aunque no sigamos paso a paso su razonamiento, es fácil comprobar que las dos últimas ecuaciones son equivalentes; a partir de la segunda tenemos:

$$ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \sqrt{\frac{a^2}{x^2 - a^2} + 1} dx = \frac{xdx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

de donde por integración

$$s = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2} = a \frac{dx}{dy}$$

Después sustituye  $x$  por  $x+a$  para trasladar el origen a B obteniendo que  $dy$  es:

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{x^2 + 2ax}}$$

En esta última ecuación las variables ya están separadas por lo que la solución se obtiene integrando

$$y = \int \frac{adx}{\sqrt{x^2 + 2ax}}$$

En aquel entonces, Bernoulli aun no conocía la forma analítica del logaritmo como para resolver esta integral en la forma que nosotros lo haríamos ahora, así que en lugar de ello, dió varias interpretaciones geométricas de esta integral. Usando una serie de transformaciones que no veremos aquí encontró que además de representar el área bajo la curva

$$z = \frac{a}{\sqrt{x^2 + 2ax}}$$

es el área bajo una cierta hipérbola y también la longitud de arco de cierta parábola.

### EL PROBLEMA DE LA BRAQUISTOCRONA

Considerese el movimiento de una partícula material entre dos puntos arbitrarios A y B, bajo la acción de la gravedad y sin resistencia del aire. El tiempo  $T_\alpha$  del recorrido dependerá exclusivamente de la forma de la trayectoria  $\alpha$  descrita por la partícula (fig 45).

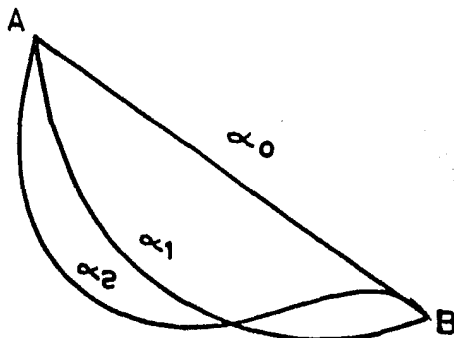


figura 45.

Braquistócrona significa «*curva de tiempo mínimo*» y el problema de determinarla fue hecho público por John Bernoulli en el Acta de junio de 1696. Un año más tarde se publicaron las respuestas recibidas de los hermanos Bernoulli, L'Hopital, Leibniz y Newton.

John lo resuelve por analogía: redujo este problema al de la refracción de un rayo de luz en un medio en el que la densidad, y por tanto el índice de refracción, es función únicamente de la altura.

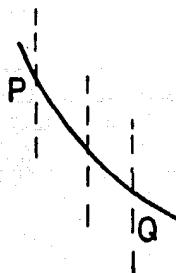


figura 46.

Leibniz y James, consideraron en primer lugar la posición de dos segmentos rectilíneos consecutivos P y Q (fig. 46), tales que

entre ellos  $T_{\alpha}$  es mínimo. Este es un problema de mínimos que depende de una variable y por lo tanto es fácil de resolver. Extendiendo esta idea a tres segmentos rectilíneos y tomándolos infinitamente pequeños, consiguieron hallar la ecuación diferencial para la curva y la resolvieron.

Descubrieron así —igual lo hizo John— que la braquistócrona es una cicloide que tiene una tangente vertical en A. Newton por su parte llegó también a la misma conclusión.

Como continuación de este problema, James Bernoulli propuso otros del mismo tipo, llamados problemas isoperimétricos, que consistía en encontrar ciertas curvas cuya longitud estaba determinada de antemano. Todos estos problemas son significativos porque su estudio fue conduciendo a la formación, en el siglo XVIII, de una nueva rama de las matemáticas: el cálculo de variaciones.

#### IV. EL CALCULO INTEGRAL DEL SIGLO XVIII

Aunque en el siglo XVIII no surgieron, como había sucedido en el siglo anterior, nuevos métodos y conceptos fundamentales para el desarrollo del cálculo diferencial e integral, los matemáticos de esta época explotaron la potencialidad que los métodos recién descubiertos habían mostrado tener. El empleo virtuoso de la técnica durante este período dió lugar al surgimiento y desarrollo de lo que serían las ramas más importantes del análisis: series infinitas, ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, geometría diferencial y cálculo de variaciones.

Quizá más que ningún otro siglo, en éste, el trabajo matemático estuvo directamente inspirado en problemas físicos. La observación directa de algunos fenómenos mecánicos simples sugirieron problemas tales como el de la forma de una viga elástica sometida a tensiones y el de la cuerda vibrante. Otros artificios técnicos más complicados sugirieron el estudio del movimiento del péndulo, la trayectoria de los proyectiles y el movimiento del agua a través de tubos. La astronomía requería que el estudio del movimiento de los cuerpos celestes fuera tratado en forma sistemática, y así se hizo: la mecánica adoptó la forma matemática que hoy conocemos. En hidrodinámica, fueron problemas centrales el estudio de la salida de un fluido a través de una abertura en el recipiente que lo contiene, y el problema de determinar la desviación que la superficie de la tierra presenta respecto a una esfera perfecta.

Por otro lado, la propia matemática también proponía problemas a resolver como la generalización de determinadas ecuaciones diferenciales y la clasificación de algunos tipos de integrales no elementales (por ejemplo, las integrales elípticas).

Gracias a los esfuerzos de hombres como James y John Bernoulli, Daniel Bernoulli (hijo de John), D'Alembert, Clairaut, Euler y Lagrange, entre otros, durante este siglo los antiguos



métodos geométricos llegaron a transformarse totalmente en métodos analíticos y se fueron unificando al presentarse las leyes básicas por medio de fórmulas matemáticas, particularmente en forma de ecuaciones diferenciales. En particular, Leonard Euler (1707-1783) jugó un papel muy importante en la reestructuración del cálculo de Leibniz transformándolo, de una serie de métodos disconexos, en un cuerpo de conocimientos matemáticos razonablemente organizado. La productividad matemática de Euler fue impresionante no sólo por la gran cantidad de libros y artículos que escribió, sino también por la amplitud de los campos que abarcó. Sus tres grandes tratados sobre el cálculo le dieron una forma global, organizándolo en torno al estudio de las funciones en lugar de las cantidades geométricas o curvas que habían sido el eje anterior. Estos tratados son: *Introducción al análisis de los infinitos (Introductio an analysin infinitorum)* en 2 volúmenes, *Textos sobre el cálculo diferencial (Institutiones calculi differentialis)*, y *Textos sobre el cálculo integral (Institutiones calculi integralis)* en 3 volúmenes.

El concepto de integral manejado en esta época debe ser ubicado dentro de este planteamiento esencialmente algebraico de los distintos conceptos del cálculo. En la primera mitad del siglo, una función  $f(x)$  era un cierto tipo de ecuación posiblemente, incluso, con un número infinito de términos, y el problema de la integración era el de determinar una función primitiva  $F(x)$  que tuviera como derivada la  $f(x)$ , o bien, de una manera más general, el problema de hallar la solución de una ecuación diferencial. El hecho de que la integración tuviera que ver con el cálculo de áreas, se consideraba lo más natural, y a veces los matemáticos aproximaban el valor de una integral calculando el área de una figura poligonal. Pero el cálculo de áreas no representaba más que una aplicación particular de una operación esencialmente algebraica con un campo de aplicabilidad mucho más general (el de las funciones consideradas algebraicamente).

La polémica acerca del tipo de funciones que podían ser

solución de una ecuación diferencial parcial, surgida de la representación analítica del movimiento de "la cuerda vibrante", terminó por demostrar la necesidad de ampliar el concepto de función incorporando aquéllas cuya regla de correspondencia no podía expresarse mediante una sola fórmula. La controversia sobre este famoso problema, condujo también a la discusión acerca de la posibilidad de representar una función «arbitraria» (más adelante hablaremos de lo que se entendía por esto) sobre un cierto intervalo, por medio de una serie trigonométrica, cuestión que sólo pudo ser resuelta adecuadamente en el siglo posterior, gracias al trabajo de hombres como Fourier. Junto a esta extensión del concepto de función, surgió --en el siglo XIX-- la pregunta de ¿qué es entonces la integral de una función cuya regla de correspondencia no está dada por una fórmula?

Posteriormente veremos que para resolver los problemas que estas generalizaciones requerían, era necesario retomar una visión geométrica de conceptos como los de función e integración. En este capítulo hablaremos del desarrollo que tuvo el concepto de integral durante el siglo XVIII, daremos algunos ejemplos del papel que jugó la integral en el desarrollo de ramas como la de las ecuaciones diferenciales, y revisaremos los puntos de polémica surgidos en torno al problema de la cuerda vibrante.

## 1 PROBLEMAS ENCONTRADOS AL DESARROLLAR LAS TECNICAS DE INTEGRACION.

Partimos pues de que todos los matemáticos del siglo XVIII trataron a la integral como la inversa de la diferencial o de la derivada. El trabajo sobre las técnicas de integración se inició con bastante intensidad desde el siglo anterior (véase la sección 3 del capítulo III) y conforme se fue desarrollando, condujo a nuevos problemas como el del manejo de los números complejos y su relación con los logaritmos.

Para evaluar la integral

$$\int \frac{a^2 dx}{a^2 - x^2} \dots \dots \dots (1)$$

James Bernoulli había usado el cambio de variable

$$x = a \cdot \frac{b^2 - t^2}{b^2 + t^2},$$

transformándola en una integral de la forma

$$\int \frac{dt}{2at},$$

cuya solución es una función logarítmica. En 1702 John Bernoulli publicó la observación de que

$$\frac{a^2}{a^2 - x^2} = \frac{a}{2} \left[ \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right],$$

con lo que quedaba claro que la integral (1) podía obtenerse directamente. Después de esto, empezó a usarse con mucha frecuencia el método de las fracciones parciales para obtener la integral de una función racional que tuviera por denominador un polinomio de grado  $n$  con coeficientes reales. (Leibniz había deducido el mismo método en forma independiente).

En la correspondencia entre Leibniz y John Bernoulli, el método fue aplicado a la integral

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

Como los factores lineales de  $ax^2 + bx + c$  podían ser complejos, las fracciones parciales podían conducir a integrar expresiones del tipo  $dx/(cx+d)$  donde al menos  $d$  era un número complejo. Aunque aún prevalecía cierta confusión acerca de los números complejos, nadie parece haber titubeado al integrar de esta forma. Leibniz, por ejemplo, afirmaba que la presencia de números complejos no afectaba en absoluto. Sin embargo, al avanzar en el manejo de ellos surgió la siguiente polémica.

John Bernoulli afirmó que así como

$$\frac{a dz}{b^2 - z^2}$$

se transformaba en

$$\frac{a dt}{2bt}$$

cuando se le aplicaba la sustitución

$$z = \frac{b(t-1)}{t+1}$$

la diferencial

$$\frac{dz}{b^2 + z^2}$$

se transformaba en

$$-\frac{dt}{\sqrt{-1} 2bt} \dots \dots \dots (2)$$

por la sustitución

$$z = \frac{\sqrt{-1} b(t-1)}{t+1}$$

y que, por tanto, la expresión (2) era la diferencial del logaritmo de un número imaginario, afirmación que levantó una fuerte discusión acerca de la naturaleza de los logaritmos de números negativos y complejos.

En un artículo de 1712 y en su intercambio de cartas con John Bernoulli durante los años 1712-13, Leibniz afirmó que el logaritmo de un número negativo no existía mientras que Bernoulli creía demostrar que debía ser un real. Leibniz argumentaba que los logaritmos positivos eran usados para números más grandes que 1 y los negativos para números entre 0 y 1, por lo que no podían existir logaritmos de números negativos. Bernoulli por su parte, argumentaba que como

$$\frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x} \dots \dots \dots (3)$$

entonces  $\log(-x) = \log(x)$ , y como  $\log(1) = 0$ , también  $\log(-1) = 0$  a lo que Leibniz respondía que la igualdad  $d(\log x) = dx/x$  sólo se valía para valores positivos de  $x$ . Durante 1727-31 la polémica se trasladó a la correspondencia entre Euler y John Bernoulli sin

que ninguno de los dos diera una argumentación correcta y consistente de sus afirmaciones. Fue hasta 1747 cuando la discusión avanzó hacia resultados precisos. Euler afirmó que  $d(\log x) = dx/x$  era válida para  $x$  positivos y negativos, pero agregó que Bernoulli había olvidado que lo que se podía concluir de la igualdad (3) era que  $\log(-x)$  y  $\log(x)$  diferían en una constante que debía ser  $\log(-1)$  dado que  $\log(-x) = \log(-1 \cdot x) = \log(-1) + \log(x)$ . Euler además, decía que la afirmación de que  $\log(-1) = 0$  requería una demostración que Bernoulli no había dado. Partiendo de este tipo de ideas, Euler respondió a los diversos argumentos de Leibniz y Bernoulli y encontró una relación correcta entre los logaritmos y los números complejos y negativos.

Con el desarrollo de las integrales de funciones racionales, también surgieron otro tipo de discusiones vinculadas al álgebra de polinomios. En 1702 John Bernoulli afirmó que la integral de una función racional no tenía porque involucrar ninguna otra función trascendente que no fuera trigonométrica o logarítmica. Se entendía por función trascendente aquella que puede describirse mediante una serie infinita, y por función racional aquella en la que a la variable se le aplican sólo las cuatro operaciones elementales, así que estas últimas funciones podían tener como denominador un polinomio en  $x$  de grado  $n$  con coeficientes reales. Por ello, lo correcto de la afirmación dependía de si cualquier polinomio de este tipo podía o no expresarse como producto de polinomios de primer y segundo grado con coeficientes reales

Ese mismo año, Leibniz respondió que esto no era posible y dió como ejemplo el polinomio  $x^4 + a^4$ , señalando que

$$x^4 + a^4 = (x^2 - a^2\sqrt{-1})(x^2 + a^2\sqrt{-1})$$

$$= (x+a\sqrt{\sqrt{-1}})(x-a\sqrt{\sqrt{-1}})(x+a\sqrt{-\sqrt{-1}})(x-a\sqrt{-\sqrt{-1}}).$$

El decía que en ningún caso la multiplicación de dos de estos cuatro factores daba por resultado un factor cuadrático. Sin embargo, en 1719 un sobrino de James y John Bernoulli, Nicolás,

mostró que

$$x^4 + a^4 = (a^2 + x^2)^2 - 2a^2x^2 = (a^2 + x^2 + ax^2)(a^2 + x^2 - ax^2)$$

lo que garantizaba que la función  $1/(a^4 + x^4)$  podía integrarse por fracciones parciales en términos de funciones logarítmicas y trigonométricas. Si Leibniz hubiera sido capaz de escribir las raíces cuadradas de  $\sqrt{-1}$  y de  $-\sqrt{-1}$  como números complejos ordinarios, habría llegado a la misma conclusión.

## 2 LAS INTEGRALES ELIPTICAS.

Las integrales de funciones irracionales (es decir, funciones que involucran raíces aplicadas sobre la variable) habían empezado a encontrarse con mucha frecuencia. En 1694 James Bernoulli estaba trabajando el problema de la forma de una varilla elástica cuando se aplican sobre de ella ciertas fuerzas, por ejemplo, en sus puntos extremos. Para un conjunto particular de condiciones, encontró que la ecuación de la curva estaba dada por

$$dy = \frac{(x^2 + ab) dx}{\sqrt{a^4 - (x^2 + ab)^2}}$$

ecuación que no pudo integrar en términos de funciones elementales. También en conexión con ese trabajo, James introdujo la "lemniscata", (fig. 47) cuya ecuación en coordenadas rectangulares es  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ , y en coordenadas polares es  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ . Tratando de encontrar la longitud de esta curva, desde el vértice hasta un punto arbitrario, Bernoulli llegó a la integral

$$s = \int_0^r \frac{a^2}{\sqrt{a^4 - r^4}} dr$$

y le pareció que tampoco podría resolverla en términos de funciones elementales.

Por otro lado, en el siglo XVII se intentó rectificar la elipse  $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ , cuya longitud de arco tenía especial importancia para la astronomía, llegandose al problema de evaluar la integral

$$s = a \int_0^t \frac{(1-k^2 t^2) dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}$$

donde  $k = (a^2 - b^2)/a^2$  y  $t = x/a$ .

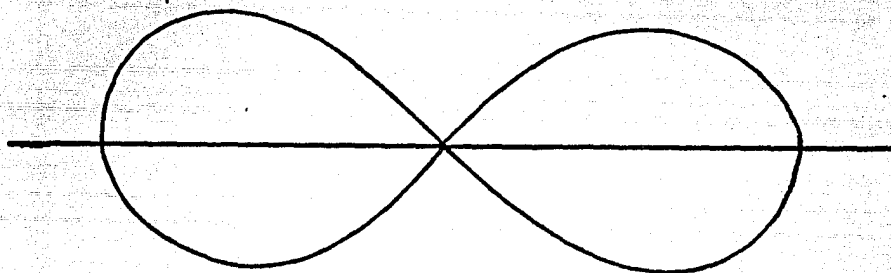


figura 47.

El problema de encontrar el periodo de un péndulo simple condujo a la integral

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}$$

También se encontraron integrales irracionales de este tipo, al buscar la longitud de arco de una hipérbola, de las funciones trigonométricas y de otras curvas. Los ejemplos que hasta aquí hemos mencionado se conocían ya alrededor de 1700, pero integrales de este tipo siguieron surgiendo a lo largo de todo el siglo XVIII. Por ejemplo, Euler obtuvo, en una parte del apéndice de su libro sobre cálculo de variaciones (1744) en la que hablaba sobre problemas de elástica, la ecuación

$$dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2) dx}{\sqrt{a^4 + (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}}$$

con ciertas constantes  $a$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $\gamma$  que no detallaremos aquí. Como sus predecesores, Euler recurrió a las series para obtener resultados físicos sin integrar directamente esta expresión.

A la clase de integrales que incluye los ejemplos anteriores, se le conoce como integrales elípticas pues se tomó como representativa de ellas a la integral que surgió al tratar de encontrar la longitud de arco de una elipse. Aunque los matemáticos del siglo XVIII no lo sabían con seguridad, estas integrales no pueden evaluarse en términos de funciones algebraicas, circulares, logarítmicas o exponenciales.

Para trabajar con ellas, los matemáticos de la época usaron el hecho de que aunque la integral directa de una de estas funciones irracionales no podía obtenerse; bajo ciertas condiciones sí podía obtenerse una integral algebraica para la suma o la diferencia de dos arcos de la función en cuestión. Es decir, inicialmente se encontró que la ecuación diferencial

$$f(x) dx = f(y) dy$$

donde  $\int f(x) dx$  es una función logarítmica o una trigonométrica

inversa, tiene como integral una función algebraica en términos de  $x$  y  $y$ . En 1698, John Bernoulli había encontrado que la diferencia entre dos arcos de la parábola cúbica  $y=x^3$  podía integrarse fácilmente, resultado que encontró accidentalmente. Se planteó entonces el problema general de encontrar arcos de parábolas, elipses e hipérbolas de mayor orden, cuya suma o diferencia pudiera escribirse mediante una ecuación rectilínea. Y afirmó, sin demostrarlo, que esto se cumplía para las curvas parabólicas de la forma  $a^m y^n = b^n x^q$  con  $m+p=n+q$ .

Otro matemático poco conocido, Count Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano (1682-1766), trabajó en este problema a partir de 1714



encontrando una serie de resultados importantes, muy laboriosos, acerca de la longitud de arco de elipses, hipérbolas y la lemniscata. Alrededor de 1750, Euler retomó el trabajo de Fagnano y aportó sus propias contribuciones. Pero quizá el trabajo definitivo sobre las integrales elípticas, fue el realizado por Adrien-Marie Legendre (1752-1833) cuyo principal resultado fue mostrar que la integral elíptica general

$$\int \frac{P(x) dx}{R(x)}$$

donde  $P(x)$  es una función racional de  $x$  y  $R(x)$  es un polinomio de cuarto grado, puede ser reducida a tres tipos de integral

$$\int \frac{dx}{1-x^2 \sqrt{1-l^2 x^2}},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{1-x^2 \sqrt{1-l^2 x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{(x-a) \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-l^2 x^2}}$$

a las que llamó integrales elípticas de primero, segundo y tercer tipo respectivamente. También demostró que, mediante ciertas transformaciones, estas integrales pueden reducirse a las tres formas:

$$F(k, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \phi}, \quad 0 < k < 1$$

$$E(k, \phi) = \int_0^{\phi} 1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi \, d\phi, \quad 0 < k < 1$$

$$\Pi(n, k, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{(1+n \operatorname{sen}^2 \phi) \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \phi}}, \quad 0 < k < 1$$

donde  $n$  es cualquier constante. De esta forma se puede ver que los valores de las integrales desde  $\phi=0$  hasta  $\phi=\pi/2$  se repiten, pero en el orden inverso, desde  $\phi=\pi/2$  hasta  $\phi=\pi$ .

La importancia del trabajo de Legendre radica en que obtuvo gran cantidad de inferencias acerca de las integrales elípticas con base en el trabajo de sus predecesores, y organizó el material que hasta entonces se había trabajado sobre el tema. Sin embargo, los matemáticos tuvieron que esperar hasta que se desarrolló una teoría sobre funciones complejas, para tener la herramienta necesaria para invertir estas funciones (las integrales elípticas indefinidas). Fueron Abel y Jacobi quienes lo lograron en la primera mitad del siglo XIX.

De cualquier forma, las integrales elípticas indefinidas se incorporaron al cálculo integral desde esta época siendo consideradas como nuevas funciones trascendentes.

### 3 SURGIMIENTO DE LA RAMA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

La necesidad de usar el cálculo para resolver problemas físicos, condujo a los matemáticos del siglo XVIII a construir una nueva rama de las matemáticas: la de las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Después de haberlas usado en una gran cantidad de problemas, hacia mediados del siglo, la solución de tales ecuaciones se trató como un fin en sí mismo y se le dió el carácter de disciplina independiente del cálculo a la teoría relacionada con la forma de encontrar esas soluciones.

Los primeros trabajos en ecuaciones diferenciales fueron realizados al final del siglo anterior por hombres como Newton, Leibniz, Huygens, los Bernoulli, etc (en el capítulo anterior se mencionan diversos ejemplos). Durante la época que nos ocupa, de hecho, la forma más general y más frecuente de utilizar la integral fue en la solución de este tipo de ecuaciones. Veamos algunos ejemplos.

En 1694 Leibniz y John Bernoulli introdujeron el problema de encontrar la curva o familia de curvas que corta a una familia de curvas en un ángulo dado. La solución de este problema resultaba importante para determinar la trayectoria de los rayos de luz cuando estos se mueven en un medio no uniforme. En 1698 John obtuvo la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales a una familia particular de curvas, y la resolvió. Por su parte, Leibniz trabajó en el mismo problema de la siguiente manera: tomó  $y^2 = 2bx$ , donde  $b$  es el parámetro de la familia; de aquí se desprende que

$$y \frac{dy}{dx} = b,$$

tomó entonces

$$b = -y \frac{dx}{dy},$$

y substituyó este valor en la ecuación original para obtener

$$y^2 = -2xy \frac{dx}{dy}$$

ecuación diferencial que representa el comportamiento de las trayectorias ortogonales. La solución es  $a^2 - x^2 = y^2/2$ . Así, aunque resolvió un caso particular, concibió el método y el problema generales.

En 1717, un estudiante de James Bernoulli dio la siguiente regla para el problema de las trayectorias ortogonales:

si  $F(x, y, c) = 0$  es la familia de curvas dada, entonces

$$y' = -\frac{F_x}{F_y},$$

donde  $F_x$  y  $F_y$  son las derivadas parciales de  $F$  y las trayectorias ortogonales tienen pendiente

$$\frac{F_y}{F_x}$$

por lo que concluyó que la ecuación diferencial ordinaria de las trayectorias ortogonales a  $F(x, y, c)$  era

$$F_y dx = F_x dy$$

Resolvió esta ecuación para  $c$ , substituyó su valor en la ecuación

original  $F(x, y, c) = 0$  y resolvió la ecuación diferencial que le resultó. Este es, en realidad, el método de Leibniz expuesto en una forma general. Antes de esto (en 1716), Newton había encontrado ya un método general para las trayectorias ortogonales, y había mostrando además cómo encontrar las curvas que cortan a una familia dada en un ángulo constante y en un ángulo que varía con cada curva de la familia dada de acuerdo con una ley conocida.

En 1728 Euler empezó a considerar ecuaciones de segundo orden surgidas en sus trabajos sobre mecánica (particularmente en torno al movimiento de un péndulo en un medio resistente, y acerca del efecto de la resistencia del aire sobre los proyectiles). En una parte de su trabajo con estas ecuaciones, consideró una clase de ellas que tenían la característica de que podían reducirse a ecuaciones de primer orden mediante un cambio de variable. Por ejemplo, tomó la ecuación

$$ax^m dx^n = y^n dy^{n-2} dy$$

que escrita en forma de derivadas es

$$\left[ \frac{dy}{dx} \right]^{n-2} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{ax^m}{y^n} \dots \dots \dots (4)$$

Euler usó entonces las variables  $t$  y  $v$  dadas por las ecuaciones

$$y = e^{vt}(v), \quad x = e^{\alpha v} \dots \dots \dots (5)$$

donde  $\alpha$  es una constante por determinar, introduciendo así la función exponencial que jugaría un papel importante en la resolución de ecuaciones diferenciales no sólo de segundo orden, sino también de orden superior. Las ecuaciones (5), pueden considerarse como ecuaciones paramétricas para  $x$  y  $y$  en términos de  $v$ . Así que se pueden calcular las derivadas

$$\frac{dy}{dx} \quad y \quad \frac{d^2 y}{dx^2}$$

y por sustitución en la ecuación (4) obtener una ecuación de segundo orden en  $t$  como función de  $v$ . Euler fijó  $\alpha$  de forma tal que se eliminara el factor exponencial, la variable  $v$  no vuelve a aparecer explícitamente. Por último, aplicando una nueva transformación, digamos  $z = dv/dt$ , reduce la ecuación de segundo

orden a una de primer orden.

Con este trabajo, se inició el estudio sistemático de las ecuaciones de segundo orden. La idea de reducir ecuaciones de segundo orden a ecuaciones de primer orden --que será un método importante en el tratamiento de las ecuaciones de orden superior-- fue considerada también al introducir la ecuación no-líneal conocida como "ecuación de Riccati", cuya forma general es:

$$\frac{dy}{dx} = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 \dots \dots \dots (6)$$

Dicha ecuación adquirió importancia cuando fue introducida por Count Riccati (1676-1754) para ayudar a resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden. Considerando curvas cuyos radios de curvatura dependían sólo de las ordenadas, Riccati llegó a la ecuación

$$x^m \frac{d^2 x}{dp^2} = \frac{d^2 y}{dp^2} + \frac{[dy]^2}{[dp]}$$

y usando cambios de variable la transformó en

$$x^m \frac{dq}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{u^2}{q}$$

que es de primer orden. Supuso entonces que  $q$  era una potencia de  $x$ , digamos,  $x^n$ , y llegó a la forma

$$\frac{du}{dx} + \frac{u^2}{x^n} = n x^{m+n-1}$$

y mostró cómo resolver esta ecuación para valores especiales de  $n$ , por el método de separación de variables.

En 1760, Euler consideró la ecuación de Riccati en la forma:

$$\frac{dz}{dx} + z^2 = ax^n$$

y mostró que si se conoce una integral particular  $v$ , entonces aplicar la transformación

$$z = v + u^{-1}$$

conduce a una ecuación líneal. También llegó a la conclusión de que si se conocen dos integrales particulares es posible reducir

el problema de resolver la ecuación original, a un problema de cuadraturas. D'Alambert fue el primero en considerar la forma general (6) y llamarle "ecuación de Riccati".

El desarrollo de las ecuaciones diferenciales ordinarias durante el siglo, abarcó también el tratamiento de ecuaciones lineales de  $n$ -ésimo orden —homogéneas y no-homogéneas—, ecuaciones no lineales de orden superior, y sistemas de ecuaciones diferenciales .

En cuanto a las ecuaciones diferenciales parciales, sus orígenes se vinculan al estudio del mismo tipo de problemas físicos que condujeron a las ecuaciones diferenciales ordinarias, pero tratados con mayor profundidad al comprender mejor los principios físicos que sustentaban los fenómenos. Por ejemplo, el desplazamiento de una cuerda vibrante había sido estudiado por separado como una función del tiempo y como una función de la distancia de un punto sobre la cuerda a uno de los extremos. El estudio del desplazamiento como una función de ambas variables y los intentos por abarcar todos los posibles movimientos, condujeron a una ecuación diferencial parcial. En el siguiente capítulo analizaremos detalladamente este ejemplo que resulta importante no sólo desde el punto de vista del papel de las ecuaciones diferenciales parciales, sino por la discusión en torno al concepto de función a que dió lugar.

#### 4 EL PROBLEMA DE LA CUERDA VIBRANTE

Una cuerda uniformemente elástica con sus dos extremos fijos en los puntos A y B, entre los cuales media una distancia  $l$ , es sometida a una pequeña vibración vertical. Pensemos en un sistema de coordenadas colocado de tal forma que la recta AB este en la parte positiva del eje X, y el eje Y sea una recta

ortogonal a AB que pasa por A. Consideremos también que, inicialmente, la cuerda se estira hasta quedar tensa, posición que describiremos mediante la función  $y=f(x)$ . Se trata, primero, de encontrar una ecuación que describa el movimiento, y después, resolviéndola, encontrar una expresión explícita para este movimiento.

En 1727, John Bernoulli trabajó en este problema considerando a la cuerda como formada por  $n$  masas iguales y distribuidas uniformemente, unidas por cuerdas sin peso; analizando la fuerza de la  $k$ -ésima masa llegó a una ecuación diferencial de segundo orden que involucraba al desplazamiento sufrido por la  $k$ -ésima masa,  $y_k$ , como una función del tiempo  $t$ . Jean le Rond D'Alambert (1717-83) publicó en 1747 un trabajo sobre el tema en el que consideraba al desplazamiento de la cuerda en cada punto como una variable tanto de la distancia  $x$  como del tiempo  $t$ , llegó por primera vez a la ecuación parcial correcta, la llamada "ecuación de onda", y la resolvió. En 1748 Euler publicó su versión sobre la solución del problema, llegando al mismo resultado que D'Alambert. Las deducciones de D'Alambert y Euler fueron obtenidas analizando un trozo infinitesimal de la cuerda.

Veamos la estructura general del planteamiento que condujo a la ecuación de onda. Se parte de las siguientes suposiciones:

- 1) las pequeñas vibraciones imprimen a la cuerda un movimiento hacia arriba y hacia abajo (no se consideraban otro tipo de movimientos); esto es, el punto  $[x_0, f(x_0)]$  se moverá únicamente sobre la recta  $x=x_0$ .
- 2) la tensión  $T$  tiene magnitud constante y su dirección coincide con la de la recta tangente en cada punto de la cuerda, y
- 3) la cuerda es homogénea y su densidad de masa en cada punto está dada por  $m=m(x)$ .

Una vez que se inician las vibraciones, la posición de cualquier punto sobre la cuerda dependerá, además de la abscisa

$x$ , del tiempo  $t$ ; por lo que el desplazamiento estará descrito por una función  $y=y(x, t)$ .

Consideremos un elemento infinitesimal de la cuerda (fig.48), cuya longitud sea  $dx$ . Como  $m(x)$  es la densidad de la cuerda, entonces  $m(x)dx$  es la masa del elemento infinitesimal. Usando la segunda ley de Newton encontramos que la fuerza transversal  $F=F(x)$  que actúa sobre el elemento diferencial es

$$F = [m(x)dx] \cdot [d^2y/(dt^2)]$$

masa      aceleración

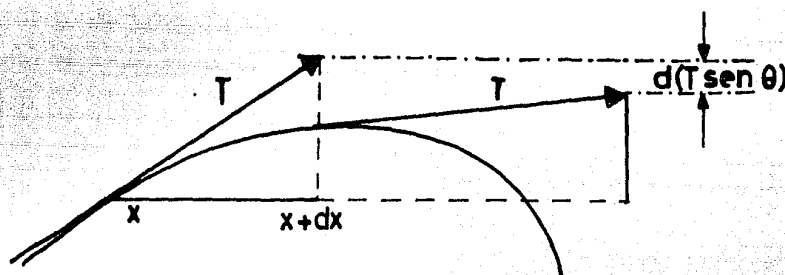


figura 48.

Por otra parte, como la tensión es tangente a la cuerda, entonces, si  $\theta=\theta(x)$  es el ángulo de inclinación de la tangente respecto al eje  $X$ , la componente  $y$  de  $T$  será  $T \text{ sen}\theta(x)$ . Y como la tensión es la única fuerza que actúa sobre la cuerda, se tiene que la fuerza transversal  $F$  es la diferencial de  $T \text{ sen}\theta$  en los valores extremos del elemento  $dx$ , por lo que

$$d(T \text{ sen}\theta) = m dx \frac{d^2y}{dt^2}$$

Finalmente, dado que se supuso que las vibraciones son pequeñas,  $\theta$  es pequeño y  $\text{sen}\theta = \text{tan}\theta$ , y como la derivada parcial de  $y$  respecto a  $x$  es la tangente de  $\theta$ , entonces la ecuación anterior se transforma en:



$$d\left(\frac{T dy}{dx}\right) = m dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

y de ahí

$$\frac{d\left(\frac{T dy}{dx}\right)}{dx} = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Pero como la derivada parcial de  $y$  con respecto a  $x$  en realidad depende también de  $t$ , se tiene que

$$\frac{\partial(T dy/dx)}{\partial x} = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

y como  $T$  y  $m$  son constantes, llegamos a

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Para llegar a la ecuación de onda, tomamos  $a = \sqrt{T/m}$  y obtenemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \dots\dots\dots (7)$$

ecuación que describe el movimiento de la cuerda vibrante.

Como la cuerda está fija en los puntos  $x=0$  y  $x=l$ , la solución debe satisfacer las condiciones frontera:

$$y(t, 0) = 0, \quad y(t, l) = 0$$

Cuando  $t=0$  la cuerda está en reposo y su forma queda descrita por  $y=f(x)$ , lo que significa que cada partícula empieza con una velocidad inicial igual a 0. Estas condiciones iniciales expresadas matemáticamente, son:

$$y(0, x) = f(x), \quad \frac{\partial y(0, x)}{\partial t} = 0$$

y también deben ser satisfechas por la solución.

No reproduciremos aquí los detalles de la forma en que

D'Alembert llegó a la conclusión de que la solución de la ecuación (7) debía ser la suma de una función de  $at+x$  y de una de  $at-x$ , llegando así a la expresión

$$y(t, x) = (1/2) \phi(x+at) + (1/2) \psi(x-at) \dots \dots \dots (8)$$

La condición  $y(t, 0)=0$ , para toda  $t$ , conduce la expresión (8) a

$$(1/2)\phi(at) + (1/2)\psi(at) = 0$$

Como  $at+x$  es siempre igual a  $at'$  para alguna  $t'$ , tenemos que para cualesquiera  $x$  y  $t$

$$\phi(x+at) = -\psi(x+at)$$

Por, otro lado, la condición  $y(t, 1)=0$ , para toda  $t$ , conduce a

$$(1/2)\phi(at+1) = (1/2)\psi(at-1);$$

lo que muestra que  $\phi$  debe ser periódica en  $at+1$  con periodo  $21$ .

La expresión (8), bajo la condición

$$\frac{\delta y(0, x)}{\delta t} = 0$$

junto con el hecho de que  $\phi=-\psi$ , conduce a que:

$$\phi'(x) = \phi'(-x);$$

integrando, esto se transforma en

$$\phi(x) = -\phi(-x),$$

por lo que  $\phi$  es una función impar de  $x$ . Usando esta propiedad y aplicando a la expresión (2) el hecho de que  $\phi=-\psi$ , se llega a

$$y(0, x) = \phi(x),$$

por lo que

$$\phi(x) = f(x) \quad \text{para } 0 < x < 1$$

En resumen, la solución a la ecuación (7) está dada por

$$y(t, x) = (1/2)\phi(ax+at) - (1/2)\phi(ax-t)$$

donde  $\phi$  es impar y periódica como mencionamos antes, y tiene la característica de ser igual a  $f(x)$  para  $x$  entre 0 y 1. entre 0 y 1. Así que para cada  $f$  hay solo una solución.

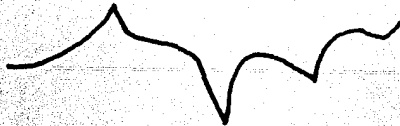
Como D'Alembert pensaba a las funciones como expresiones analíticas formadas por procesos algebraicos, entonces si dos de esas funciones coincidían en una vecindad de  $x$ , deberían coincidir para todo valor de  $x$ . Por lo que supuso que  $f=\phi$  y por lo tanto, que  $f$  debía ser impar y periódica. Finalmente, como

$y(t, x)$  tenía que satisfacer la ecuación diferencial, concluyó que debía ser dos veces diferenciable. Pero  $y(0, x) = f(x)$  por lo que también  $f(x)$  debía ser dos veces diferenciable.

Euler tenía una idea muy diferente sobre qué funciones podían admitirse para describir la curva inicial  $y$ , por lo tanto, como soluciones de la ecuación diferencial parcial. A diferencia de D'Alambert, él argumentó que tales funciones no necesariamente tenían derivada en cada punto del intervalo  $[0, 1]$ , sino que podían tener "picos". La razón para buscar esta extensión radica en un argumento físico: Euler decía que la función posición inicial debía incluir el caso en que el movimiento se iniciara dando un tirón a la cuerda, como cuando se tañe la cuerda de un violín o de cualquier otro instrumento musical. Pero tales funciones no podían describirse totalmente con una sola fórmula analítica. Euler las concebía como descritas por varias fórmulas, cada una de las cuáles describía un pedazo de la curva y terminaba justo donde otra fórmula empezaba. Es decir, se trataba de funciones continuas pero no diferenciables en todos sus puntos (fig. 49). Sin embargo, él les llamaba funciones «*discontinuas*» o «*arbitrarias*» para distinguirlas de las que entonces se conocían como «*continuas*», las que ahora llamamos diferenciables.



Euler: "continua"  
actual: diferenciable



Euler: "discontinua"  
actual: continua



actual: discontinua

figura 49.

Con esta idea de tratar de describir una situación física que no quedaba contemplada mediante las funciones que hasta entonces se manejaban, Euler rebasó una teoría de funciones que, en buena medida, se había consolidado y se había visto enriquecida gracias a su propio trabajo; y lo hacía con conciencia de que tal extensión abría una gran promesa para el desarrollo posterior del análisis, pues en 1763 le escribió a D'Alambert: "*considerar estas funciones que no están sujetas a ninguna ley de continuidad, nos abre un campo enteramente nuevo para el análisis*" [7]. La nueva teoría de funciones requería un cierto regreso a la geometría, pues las necesidades que la estaban haciendo surgir tenían que ver con construir una teoría de formas, más que una de expresiones algebraicas.

Al intentar responder el argumento de que las funciones debían ser dos veces diferenciables para satisfacer la ecuación parcial, Euler exhibió otro punto de discrepancia con D'Alambert: su tratamiento del continuo de los reales: Euler era un infinitesimalista, así que ignoró la objeción de D'Alambert invocando a los infinitesimales, argumentando que como las vibraciones eran pequeñas, lo serían también los ángulos en las "esquinas", y así, la curva diferiría solo infinitesimalmente de una «*continua*». Y aquí concluyó la primera parte de la polémica, sin que ninguno de los participantes se convenciera de los argumentos del otro.

La controversia entró en una nueva etapa cuando Daniel Bernoulli, partiendo del hecho de que una cuerda vibrante emite una frecuencia fundamental y una serie de armónicas de orden superior, afirmó que pueden existir muchas formas de vibración simultáneamente (la cuerda puede responder a la superposición de todas las formas posibles de vibración) y concluyó que la función  $f$  era expresable mediante una serie de la forma:

$$f(x) = a_1 \operatorname{sen}(x\pi/l) + a_2 \operatorname{sen}(2x\pi/l) + a_3 \operatorname{sen}(3x\pi/l) + \dots \dots \dots (9)$$

porque hay suficientes constantes  $a_n$  para que se ajuste a cualquier curva en el intervalo  $[0, l]$ . Desde un punto de vista

puramente matemático, esta afirmación equivale a decir que cualquier curva puede ser representada, en un intervalo de valores de  $x$ , mediante una serie trigonométrica. Sin embargo, Bernoulli no incluía términos en  $t$ , reduciendo así la efectividad de su afirmación, y tampoco ofrecía ningún medio matemático para calcular los coeficientes en la expresión (9).

La hipótesis de Bernoulli fue rechazada por matemáticos como D'Alambert, Euler y el joven Lagrange. Euler se apresuró a publicar su respuesta cuestionando la generalidad de las funciones que podían expresarse por medio de (9) pues consideraba que toda función expresada mediante suma de senos tenía que ser impar y periódica. Más tarde presentó la función que era igual a cero en una parte del intervalo (que correspondería a una estimulación inicial sólo sobre el resto de la cuerda) como incapaz de tal representación trigonométrica por la naturaleza no-senoidal de esa parte. Euler reconocía el hecho de que al tener un número infinito de coeficientes indeterminados, la expresión (9) alcanzaba cierta generalidad, pero consideraba que la periodicidad y la imparidad del seno eran propiedades restrictivas. No contempló que al tratarse de la representación de una función restringida al intervalo  $[0, 1]$ , la periodicidad no afectaba pues lo que sucediera fuera de ese intervalo resultaba intrascendente para el problema de la cuerda vibrante, y la expresión (9) tiene periodicidad 1. Lo mismo puede argumentarse respecto al carácter impar de (9) que se manifiesta en el comportamiento de la función en  $(-\infty, 0)$ .

## V. LA TEORIA DE INTEGRACION DE RIEMANN.

Alrededor de 1800 los matemáticos empezaron a preocuparse por la ambigüedad existente en una serie de conceptos y por hipótesis y afirmaciones que sin haber sido demostradas fueron incorporándose al cuerpo del análisis matemático. Se conocían, por ejemplo, diversos conceptos de función que no dejaban nada claro acerca de lo que realmente era una función; el uso de las series sin considerar la convergencia o divergencia, produjo paradojas y desacuerdos; la controversia acerca de la representación de funciones mediante series trigonométricas, introdujo mayor confusión; y, por supuesto, las nociones fundamentales de integral y derivada, nunca habían sido definidas propiamente. Todas estas dificultades finalmente condujeron a una insatisfacción con el estado de la lógica del análisis.

Varios matemáticos resolvieron concentrar sus esfuerzos para poner orden en este caos. Los líderes de lo que usualmente se llama el movimiento crítico, decidieron reconstruir el análisis sobre la base de los conceptos aritméticos. El análisis riguroso empezó con los trabajos de Bolzano, Cauchy, Abel, Dirichlet y, más tarde, Weierstrass, entre otros.

Como parte de este interés creciente por solidificar los fundamentos del análisis, durante el siglo XIX se desarrolló una reformulación de conceptos como los de función, continuidad e integrabilidad sentándose las bases fundamentales para el surgimiento de las teorías de integración modernas.

El trabajo de Fourier acerca de la representación de funciones mediante series trigonométricas, fortaleció los argumentos que se venían desarrollando desde el siglo anterior en relación a la necesidad de ampliar el concepto de función rebasando los estrechos márgenes que imponía el tener que representarlas mediante una sola expresión analítica. A pesar de ello, en los hechos la extensión que hizo del concepto de

función sólo alcanzó a las funciones descritas mediante un número finito de expresiones analíticas. Aun así, para darle un sentido claro a la integral de este nuevo tipo de funciones, retomó la interpretación de la integral como área.

Cauchy por su parte, contribuyó a este trabajo colectivo popularizando el concepto actual de continuidad, lo que representaba un cambio respecto a como se venía manejando este concepto a partir de la polémica en torno a la cuerda vibrante, y estableciendo por primera vez una definición precisa de la integral de una función continua en términos de límite de una suma. Sin embargo, estas definiciones no significaron un rompimiento de golpe con las viejas ideas, sino que iniciaban apenas el proceso que llevaría hasta la aceptación plena de los conceptos actuales.

Para llegar a ello resultaba necesario que los matemáticos se enfrentaran con ejemplos concretos de funciones completamente libres de fórmulas analíticas y profundamente discontinuas. Dirichlet avanzó en esta dirección y abrió la pregunta acerca de si era posible definir la integral de este tipo de funciones. Además, dió una brillante demostración sobre lo que es hacer análisis rigurosamente al encontrar condiciones suficientes para la convergencia de las series de Fourier.

La teoría de integración de Riemann se derivó de la de Cauchy debilitando lo más posible las condiciones que debía cumplir una función para ser integrable, retomando así el problema que Dirichlet había dejado abierto. Esto fue posible reemplazando la exigencia planteada por Cauchy de que la función fuera continua, por la condición más débil de que las sumas de Cauchy tendieran hacia un límite único cuando la norma de la partición se fuera hacia cero. Riemann dió además un ejemplo de una función integrable que tenía un número infinito de discontinuidades en un intervalo finito, lo que le valió que su teoría fuera considerada por los matemáticos hasta de varias

décadas después, la más general posible.

Sin embargo, el desarrollo posterior del cálculo fue haciendo surgir varios ejemplos que a la larga mostraron las limitaciones de la teoría de Riemann y sentaron las bases para el surgimiento de una teoría más general, capaz de resolver estos problemas. Dos fueron las fuentes principales de problemas en torno a las funciones Riemann-integrables: (1) el descubrimiento de funciones cuyas derivadas, a pesar de ser acotadas, no eran integrables; y (2) la construcción de ejemplos que pusieron en tela de juicio la hipótesis manejada sin restricciones por matemáticos como Fourier, de que la integral de una suma infinita de funciones era igual a la suma infinita de las integrales de las funciones. Estos ejemplos y el trabajo de diversos matemáticos en torno a la teoría de conjuntos y sus medidas, fueron los instrumentos principales que Lebesgue encontró, a principios del siglo XX, para desarrollar la generalización necesaria de la integrabilidad de Riemann, la llamada integral de Lebesgue.

Hablaremos, por último, del camino que siguió el desarrollo de esta generalización de la integral y la integrabilidad, sin pretender con ello dar una idea medianamente completa sobre este tema, sino meramente dejar sentado en qué dirección se dió el desarrollo posterior a Riemann.

## 1 LAS FUNCIONES ARBITRARIAS Y SU REPRESENTACION EN SERIES TRIGONOMETRICAS, SEGUN FOURIER.

En 1807 Joseph Fourier presentó a la Academia de Ciencias de París un trabajo sobre la conducción del calor en el que reafirmaba la hipótesis de Bernoulli acerca de la posibilidad de una representación en serie trigonométrica para cualquier función



(acotada) en un intervalo. Había utilizado la técnica de separación de variables para resolver ciertos problemas que se le presentaron al estudiar la transmisión del calor en los sólidos, y se encontró con que la validez del método dependía de la hipótesis de que una función «arbitraria»  $f(x)$  pudiera representarse de esa forma. Aunque seguramente sabía lo poco popular que había resultado esta hipótesis cuando fue presentada por primera vez, tenía la certeza de haber encontrado razones matemáticas suficientemente fuertes para justificarla. Este trabajo sobre la conducción del calor no fue publicado y sus ideas acerca de la representación de funciones en series trigonométricas aparecieron por primera vez impresas en su *Teoría analítica del calor* (*Theorie analytique de la chaleur*) en 1822.

Veamos primero, como maneja Fourier el concepto de función. La definición que da es aún más general que la surgida en la discusión sobre la cuerda vibrante:

*"En general, la función  $f(x)$  representa una sucesión de valores u ordenadas cada una de las cuales es arbitraria. Como la abscisa  $x$  recibe una infinidad de valores, hay un número igual de ordenadas  $f(x)$  y todas ellas tiene valores numéricos concretos, ya sean positivos, negativos o nulos. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común a todas ellas; se suceden unas a otras de una manera arbitraria y cada una de ellas viene dada como si fuera una cantidad aislada."* [6]

De hecho, esta es una definición muy parecida a la que usamos actualmente, pero todos los ejemplos de funciones arbitrarias que Fourier da en su libro son funciones formadas por un número finito de piezas continuas; es decir, curvas suaves excepto, quizá, en un número finito (y pequeño) de puntos. Por otro lado, él mismo estaba sosteniendo que toda función era expresable mediante una serie, que es también una expresión analítica, aunque infinita. De cualquier forma, el trabajo de

Fourier sacudió la concepción de función manejada generalmente durante el siglo anterior, y por ende, la de sus propiedades. La pregunta natural era entonces ¿qué debe entenderse realmente por función, continuidad, diferenciabilidad, integrabilidad, etc?

Volviendo al problema de las series de Fourier, la forma más general de su proposición es la siguiente: cualquier función (acotada)  $f$  definida en  $(-a, a)$  puede ser expresada en la forma

$$f(x) = (1/2)a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi x/a) + b_n \operatorname{sen}(n\pi x/a)] \dots (1)$$

donde los coeficientes están dados por

$$a_n = (1/a) \int_{-a}^a f(x) \cos(n\pi x/a) dx,$$

$$b_n = (1/a) \int_{-a}^a f(x) \operatorname{sen}(n\pi x/a) dx.$$

Fourier reconocía la necesidad de dar una justificación matemática para fundamentar su hipótesis y no sólo basarla en un principio físico como lo había hecho Bernoulli. Para ello, dió dos tipos de argumentaciones. En las dos buscaba demostrar que para una función  $f$  definida sobre el intervalo  $(-a, a)$ , la ecuación (1) podía resolverse, es decir, era posible encontrar los valores de los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots$  cuestión que consideraba suficiente para garantizar la validez de la representación en serie trigonométrica.

En la primera demostración Fourier tuvo que suponer que  $f(x)$  podía desarrollarse mediante una serie de potencias en  $x$ , y después, mediante manipulación no rigurosa que involucraba un número infinito de ecuaciones con un número infinito de incógnitas, logró determinar los coeficientes. En la segunda

prueba, retomó una idea que ya había sido usada por Lagrange para series trigonométricas finitas. Para calcular por ejemplo  $a_0$  en (1), Fourier consideró

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a (1/2)a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-a}^a [a_n \cos(n\pi x/a) + b_n \operatorname{sen}(n\pi x/a)] dx$$

y como las integrales sobre un intervalo así en las que intervienen senos y cosenos son siempre nulas, llegó a

$$a_0 = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) dx.$$

En este razonamiento Fourier da por hecho que la integral de una suma infinita es igual a la suma infinita de las integrales, hipótesis que hasta entonces nadie había encontrado razón para cuestionar. De una manera análoga llegó a las expresiones ya mencionadas para  $a_n$  y  $b_n$  (primero multiplicó los dos lados de la ecuación (1) por  $\cos(n\pi x)$  o por  $\operatorname{sen}(n\pi x)$ , para después integrarlos).

Resumiendo: la demostración suponía, primero, la existencia de la representación (1) para cualquier función (presumiblemente acotada), una hipótesis que no es válida cuando al concepto de función se le permite una generalidad total, de acuerdo con el punto de vista actual. Pero aun dando por hecho la validez de (1), Fourier involucró todavía dos suposiciones más, que representaron una fuerte restricción a la generalidad de su planteamiento:

- (a) que la función  $f$  y sus productos con  $\operatorname{sen}(n\pi x)$  y con  $\cos(n\pi x)$  tienen integral, y
- (b) que es válida la integración término a término para el caso infinito.

Fourier reconoció la falta de significado para la integral definida de una función arbitraria. Mientras la integración fue concebida principalmente como la inversa de la diferenciación, el proceso de integrar una función equivalía a encontrar una primitiva, y la integral definida era simplemente la diferencia de las imágenes de los límites de integración según esa función primitiva. Sin embargo, la existencia de una primitiva no resultaba obvia cuando la función era arbitraria. Tal vez pensando en esto, Fourier regresó a la concepción de la integral como área.

Bajo esta idea, la existencia de la integral indefinida de una función  $f(x)$  estaba basada en la existencia del área del conjunto de ordenadas, es decir, se trataba de una definición orientada desde un punto de vista geométrico de acuerdo con las bases geométricas de la concepción de Euler-Fourier de función arbitraria. Sin embargo, el área como cantidad no estaba aún definida. En el desarrollo histórico del concepto de integral, el problema de clarificar y extender la noción de área ocupó un lugar fundamental.

Así pues, objetivamente, el trabajo de Fourier sobre las series trigonométricas con sus coeficientes definidos por medio de integrales, dejó planteado un problema: ¿cómo se puede definir  $\int f(x)dx$  como un área, cuando  $f$  es una función arbitraria?

## 2 LA CONCEPCION DE CAUCHY SOBRE LA INTEGRAL.

La distinción entre continuidad y discontinuidad, como ahora la conocemos, fue surgiendo gradualmente. Al parecer, el primer estudio cuidadoso acerca de las propiedades de las funciones, fue iniciado por Bernhard Bolzano (1781-1848) quien en 1817 dió una

definición esencialmente igual a la actual de los conceptos de función y continuidad, pero su trabajo pasó inadvertido durante medio siglo.

No sucedió lo mismo con el trabajo de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) quien no solo planteó el concepto moderno de continuidad, sino que además dió por primera vez una definición precisa de la integral como límite de una suma. En su libro *Curso de análisis (Cours d'analyse)* (1821) escribió que si  $f(x)$  es una función univalente que toma valores finitos para toda  $x$  entre  $a$  y  $b$ ,

"...la función  $f(x)$  será, entre los límites asignados para la variable  $x$ , una función continua de la variable si, para cada valor de  $x$  intermedio entre estos dos límites, el valor numérico de la diferencia  $f(x+\alpha)-f(x)$  disminuye indefinidamente con el de  $\alpha$ ". [6]

Caracteriza también a una función discontinua diciendo que  $f(x)$  es discontinua en  $x_0$  si no es continua en cada intervalo alrededor de  $x_0$ .

Dos años más tarde, en su *Resumen de las lecciones dadas en la Escuela Politécnica Royale sobre cálculo infinitesimal*, define la integral definida de una función continua como sigue: Toma  $f(x)$  continua para  $x$  en  $[a, b]$ , y considera una partición de este intervalo

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

y la suma de Cauchy

$$S = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_i).$$

Usando la continuidad de  $f(x)$  —con más precisión, la continuidad uniforme de  $f(x)$ — demostró que para cualesquiera dos particiones  $P$  y  $P'$ , las correspondientes sumas  $S$  y  $S'$  difieren en una cantidad arbitrariamente pequeña con tal de que las longitudes de los subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$  en las dos particiones

sean lo suficientemente pequeñas. Así pues, "el valor de  $S$  terminará obviamente por ser constante... Este límite se denomina la integral definida".

Una de las principales ventajas de esta definición, desde el punto de vista de Cauchy, era que le permitía demostrar en forma general la existencia de integrales o funciones primitivas para pasar, después, a estudiar sus propiedades. Para una función  $f$  continua entre  $a$  y  $b$ , Cauchy consideró la función  $F(x)$  definida por

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Como

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f = f(x+ch), \quad \text{para alguna } |c| < 1$$

$F$  no sólo es continua sino también diferenciable. Cauchy demostró por primera vez los siguientes resultados, conocidos como las tres partes del Teorema Fundamental del Cálculo:

Teorema I.  $F$  es una función primitiva de  $f$ ; esto es  $F' = f$ .

Teorema II. Toda función primitiva de  $f$  debe ser de la forma

$$\int_a^x f + C,$$

donde  $C$  denota una constante; esto es, si  $G$  es una función con derivada continua  $G'$ , entonces

$$\int_a^x G' = G(x) - G(a).$$

El siguiente, fue un Teorema que usó Cauchy para probar el Teorema II.

Teorema III. Si  $G$  es una función tal que  $G'(x) = 0$  para toda  $x$  en  $[a, b]$ , entonces  $G(x)$  permanece constante ahí.

Después, Cauchy trató las integrales impropias como lo hacemos actualmente, tanto en el caso en el que las imágenes de

la función tienden a  $\infty$  en algún punto  $x$  del intervalo de integración, como el caso en el que el propio intervalo de integración tiende a  $\infty$ . Por ejemplo, cuando  $f$  presentaba una discontinuidad en  $x=c$ , en la que el valor de  $f(x)$  podía estar acotado o no, Cauchy definió:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx$$

siempre que estos límites existieran.

Las definiciones de función continua e integral definida dadas por Cauchy pueden aplicarse, sin modificaciones, a la definición moderna de función (una correspondencia  $x \rightarrow f(x)$  entre dos números), puesto que están libres de cualquier referencia a una expresión analítica que esté determinando a la función. Pero al parecer el propio Cauchy no adoptó una noción tan general. Es cierto que su definición de función elimina toda referencia a una expresión analítica: afirma que  $y$  es una función de  $x$  si  $x$  y  $y$  están relacionadas de tal manera que un valor particular de  $x$  determina el valor de  $y$ . Pero después pasa a clasificar las funciones en explícitas e implícitas y define éstas últimas como aquéllas en las que la relación entre  $x$  y  $y$  está dada por una ecuación que no ha sido resuelta algebraicamente. Esto muestra que evidentemente Cauchy aún tendía a considerar las funciones como ecuaciones, tendencia que también se muestra en otros de sus trabajos.

El tipo de funciones discontinuas trabajadas por Cauchy y varios de sus contemporáneos, llegaron a ser funciones con un número finito de discontinuidades de salto o discontinuidades infinitas, pero no más que eso. Por lo demás Cauchy comprendió que su caracterización de integral definida era perfectamente aplicable a estos casos, como ya habíamos señalado.

El llegar a concebir plenamente a las funciones continuas como las entendemos hoy, fue todo un proceso. A lo largo del

siglo XIX la noción de continuidad fue explorada y los matemáticos aprendieron mucho acerca de ella, algunas veces, produciendo resultados que les resultaban asombrosos a ellos mismos. Por ejemplo, el matemático francés Gaston Darboux (1842-1917) --de quien hablaremos después-- dió una función que tomaba todos los valores intermedios entre dos valores dados pasando desde  $x=a$  hasta  $x=b$ , pero que no era continua. Esto mostraba que una propiedad básica de las funciones continuas, no era suficiente para garantizar la continuidad. Se trata de la función

$$y = \begin{cases} \text{sen } (1/x) & \text{para } x \neq 0 \\ 0 & \text{para } x=0 \end{cases}$$

que recorre todos los valores entre cualquier valor negativo de  $x$  y cualquier otro positivo, y no es continua en  $x=0$ .

### 3 LA CONTRIBUCION DE DIRICHLET.

Para la noción de función discontinua manejada por Cauchy y Fourier, la definición de integral dada por Cauchy resolvía enteramente el problema del significado de los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  de Fourier. Sin embargo, Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-59) llamó la atención hacia la existencia de funciones que tenían un número infinito de puntos de discontinuidad dentro de un intervalo finito, y con ello, replanteó el problema de extender el concepto de integral hasta abarcar este tipo de funciones.

En 1829, Dirichlet publicó en su artículo "*Sobre la convergencia de las series trigonométricas*", la primera demostración rigurosa acerca de las condiciones generales bajo las cuales la serie de Fourier de una función  $f(x)$  converge precisamente a  $f(x)$ . Su método se basó en calcular directamente



la  $n$ -ésima suma parcial de la serie de Fourier y luego investigar qué sucede cuando  $n$  tiende a infinito. Por medio de la identidad trigonométrica

$$\sum_{r=-n}^n \cos ru = \frac{\text{sen } (1/2)(n+1)u}{\text{sen } u/2},$$

transformó la  $n$ -ésima suma parcial

$$S_n(x) = (1/2)a_0 + \sum_{h=1}^n [a_h \cos hx + b_h \text{sen } hx],$$

en la expresión

$$S_n(x) = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\text{sen}[(1/2)(2n+1)(x-t)]}{\text{sen}[(1/2)(x-t)]} dt \dots \dots \dots (2)$$

que es una integral de la forma que ahora se conoce como "integral de Dirichlet":

$$\int_0^h f(u) \frac{\text{sen } mu}{\text{sen } u} du \dots \dots \dots (3)$$

Dirichlet analizó el comportamiento de este tipo de integrales manejando rigurosamente el siguiente razonamiento intuitivo: La oscilación de  $\text{sen } mu$  sugiere una partición del intervalo  $[0, h]$  en subintervalos  $[0, \pi/m]$ ,  $[\pi/m, 2\pi/m]$ , ... tales que sobre cada uno de ellos  $\text{sen } mu$  tiene un solo signo. Si  $f(x)$  decrece monótonamente hacia cero, entonces la integral se descompondrá en una serie de áreas de signos alternativamente positivos y negativos y de valores absolutos decrecientes, por lo tanto, (por el criterio de las series alternantes) converge cuando  $n$  tiende a  $\infty$ . Cuando  $u=0$  el integrando se convierte en  $0/0$ , pero haciendo  $v=mu$  Dirichlet demuestra que la integral (3) tiende a

$$f(0) \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } v}{v} dv, \quad \text{ó} \quad \frac{\pi}{2} f(0),$$

así que concluye que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^h f(u) \frac{\sin nu}{\sin u} du = -f(0) \dots \dots \dots (4)$$

Buscando establecer las condiciones para la convergencia Dirichlet encontró que como esta igualdad es válida cuando  $f(x)$  decrece monótonamente siendo positiva en  $(0, h)$  o cuando es constante y positiva, lo será también cuando  $f(x)$  cambia de signo dentro del intervalo o es negativa, ya que entonces se puede aplicar la igualdad a las funciones  $c+f(x)$  y  $c$  para un valor de  $c$  suficientemente grande como para que la suma sea positiva sobre el intervalo  $(0, h)$ , y se restan después los resultados. También comprobó que todo su razonamiento era igualmente válido si se tomaba el intervalo  $(0, g)$  con  $0 < g < h$ , en vez de  $(0, h)$ ; entonces, restando a la integral (4) la misma integral pero evaluada sobre  $(0, g)$ , se llega a la conclusión de que la integral de Dirichlet es igual a cero sobre  $(g, h)$ . Por último, si  $f(x)$  es discontinua en  $g$  ó en  $h$  ó en ambos, vió que la demostración no se alteraba si se utilizaban los límites laterales  $f(g+0)$  y  $f(h-0)$  en vez de  $f(g)$  y  $f(h)$ .

Dirichlet aplicó estos resultados al análisis del comportamiento de la integral (2) cuando  $n$  crece. Para ello, supuso que  $f$  tenía un número finito de discontinuidades o valores extremos ubicados en los puntos  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_k$ , y descompuso el intervalo  $[-\pi, \pi]$  en subintervalos  $[-\pi, d_1], [d_1, d_2], \dots, [d_n, x], [x, d_{n+1}], \dots, [d_k, \pi]$ . Observando que al intervalo  $[0, h]$  de  $u$  en la integral (4) le corresponde el subintervalo  $[x, d_{n+1}]$  de  $t$  en la integral (2), se ve que cuando  $n \rightarrow \infty$  este subintervalo contribuye al valor de  $S_n(x)$  con

$$(1/\pi)(\pi/2)f(x+0) = (1/2)f(x+0)$$

Análogamente  $(d_n, x)$  contribuye con

$$(1/2)f(x-0).$$

Los demás subintervalos de  $[-\pi, \pi]$  contribuyen con cero al valor límite de la  $n$ -ésima suma por la especificación hecha para el

caso del intervalo  $[g, h]$ . Por lo tanto Dirichlet concluye que la serie de Fourier converge a

$$(1/2)[f(x+0) + f(x-0)]$$

en el caso en el que  $f$  cumple las siguientes condiciones:

- a)  $f(x)$  es univalente y acotada,
- b)  $f(x)$  es continua por pedazos, es decir, tiene un número finito de discontinuidades en el intervalo cerrado,
- c)  $f(x)$  es monótona por pedazos, es decir, tiene un número finito de puntos extremos en el intervalo cerrado.

La importancia de esta demostración radica en que, a la vez que mostraba el rigor con el que debía hacerse el análisis matemático, se proponía la tarea de buscar condiciones suficientes cada vez más generales para la convergencia de las series de Fourier. Concluyó este artículo con una afirmación que resultó ser especialmente profética al dar un ejemplo de función que no satisfacía sus condiciones:

*" $f(x)$  es una constante determinada  $c$  cuando la variable toma un valor racional, e igual a otra constante  $d$  cuando el valor de esta variable es irracional. La función así definida tiene valores finitos y determinados para todo valor de  $x$ , y sin embargo no es posible sustituirla en la serie [de Fourier], en vista de que las diferentes integrales que aparecen en dicha serie pierden todo su significado en este caso." [6]*

Dirichlet creía que el caso de las funciones con un número infinito de puntos de discontinuidad o de puntos extremos, podía reducirse al caso que él había considerado. La única condición necesaria, declaró, es que la función tenga una integral definida. Propuso como una condición suficiente para esto, en el caso de funciones acotadas, que

*"...si  $a$  y  $b$  denotan dos cantidades arbitrarias incluidas entre  $-\pi$  y  $\pi$ , siempre sea posible encontrar otras cantidades  $r$  y  $s$  entre  $a$  y  $b$  que estén suficientemente cerca como para que la función se mantenga continua en el intervalo de*

r a s." [6]

En terminología moderna, la condición de Dirichlet es que el conjunto  $D$  de puntos de discontinuidad de la función sea "denso en ninguna parte". Sin embargo, en esta ocasión Dirichlet no justificó su afirmación pues, una prueba lúcida *"requiere algunos detalles conectados con los principios fundamentales del análisis infinitesimal que serán presentados en otra nota..."*. La nota prometida nunca llegó así que no hay ningún documento que aclare la forma en que Dirichlet pensó, si es que lo hizo, la posibilidad de extender el concepto de integral para abarcar funciones con un número infinito de discontinuidades.

Así pues, tenemos que con Dirichlet se inició la diferenciación entre las funciones continuas y las funciones integrables, además de que en su trabajo encontramos por primera vez una verdadera concepción general de función que no necesitaba estar definida por una o varias ecuaciones, ni tampoco ser representada por una curva dibujada o dibujable en el plano.

#### 4. LA TEORIA DE INTEGRACION DE RIEMANN.

El problema de la integrabilidad de funciones con un número infinito de discontinuidades que Dirichlet había dejado sin resolver, fue retomado por Bernhard Riemann (1826-66), quien había hecho su doctorado en 1851 en la Universidad de Gotinga. Para poder dar clases en esta Universidad era necesario presentar una investigación como «examen de admisión». Riemann escogió como tema para ella el problema de la representatibilidad de funciones mediante series trigonométricas; y durante la preparación de la memoria en cuestión, recibió el estímulo y la ayuda de Dirichlet. La memoria fue presentada en 1854 con el título de *"Sobre el desarrollo de una función mediante series trigonométricas"*.

La primera parte consiste en una historia del tema en la que, después de discutir las contribuciones que aportó Dirichlet, Riemann señala que es razonable admitir que *"las funciones no cubiertas por el análisis de Dirichlet, no ocurren en la naturaleza"*, a pesar de lo cual, presenta dos razones que lo condujeron a considerar funciones más generales. Primero porque, como sostuvo el propio Dirichlet *"este tema está muy estrechamente relacionado con los principios del cálculo infinitesimal y puede ayudar a aportar mayor claridad y precisión a estos principios"*. Y en segundo lugar porque *"la aplicación de las series de Fourier no se limita a las investigaciones físicas; ahora están siendo aplicadas con éxito en un dominio de las matemáticas puras, la teoría de los números, y aquí aquellas funciones cuya representabilidad mediante series trigonométricas no fue investigada por Dirichlet parecen ser de importancia"*. [8]

Riemann inicia su propia investigación con la pregunta que Dirichlet dejó sin resolver: ¿en qué casos es integrable una función?. Dado que interpretaba el significado de la integrabilidad en términos de las sumas de Cauchy, la pregunta es en realidad ¿bajo qué condiciones estas sumas tienden a un valor único cuando la norma de la partición tiende a cero? Afirmó que esto quedaba garantizado si y sólo si se cumple la condición:

$$(R_1) \quad \lim_{|P| \rightarrow 0} (D_1 \delta_1 + D_2 \delta_2 + D_3 \delta_3 + \dots + D_n \delta_n) = 0.$$

donde  $\delta_i$  denota la longitud de los subintervalos de  $[a, b]$  formados por la partición  $P$ , y  $D_i$  denota la oscilación de  $f(x)$  en el  $i$ -ésimo subintervalo ( $\sup f(x) - \inf f(x)$  para las  $x$  del subintervalo).

Después, demostró que esta condición de integrabilidad puede ser reemplazada por otra equivalente pero formulada en términos de que los saltos que tenga la función que sean mayores que una cota dada, puedan encerrarse en subintervalos de longitud pequeña. La idea es la siguiente: Para un número fijo  $d$  sea  $\Delta = \Delta(d)$  el

máximo de todas las sumas  $D_1\delta_1 + D_2\delta_2 + \dots + D_n\delta_n$  correspondientes a las particiones de norma menor o igual que  $d$ ; entonces,  $f$  es integrable si  $\Delta$  converge a cero cuando  $d$  tiende a cero. Si  $\sigma > 0$  es otra cantidad dada para cualquier partición  $P$  de norma menor o igual que  $d$ , define  $s = s(P, \sigma)$  como la suma de las  $\delta_j$  para las cuales  $D_j$  es mas grande que  $\sigma$ . La contribución de estos intervalos a la suma total

$$D_1\delta_1 + D_2\delta_2 + \dots + D_n\delta_n$$

es, al menos,  $\sigma s$ ; así que

$$\sigma s \leq D_1\delta_1 + D_2\delta_2 + \dots + D_n\delta_n \leq \Delta, \quad \text{y} \quad s \leq \Delta/\sigma$$

Así que, como habíamos visto que cuando  $f$  es integrable  $\Delta$  converge a cero al acercarse  $d$  a cero, lo mismo sucederá con  $s$ ; esto es

*Correspondiendo a cada par de números positivos  $\epsilon$  y  $\sigma$  existe un número positivo  $d$  tal que si  $P$  es cualquier partición de norma menor o igual que  $d$ , entonces  $s(P, \sigma)$  es menor o igual que  $\epsilon$ . [8]*

Riemann mostró que  $(R_2)$  es también una condición suficiente para la integrabilidad de  $f$ : si  $f$  satisface  $(R_2)$ , dados  $\epsilon > 0$ ,  $\sigma > 0$  existe un  $d > 0$  que satisface  $(R_2)$ ; así, para toda partición  $P$  cuya norma sea menor que  $d$ ,

$$D_1\delta_1 + D_2\delta_2 + \dots + D_n\delta_n \leq Ds + s(b-a) \leq D\epsilon + \sigma(b-a),$$

donde  $D$  denota la oscilación de  $f$  sobre  $[a, b]$ . entonces se sigue  $(R_1)$  porque  $\epsilon$  y  $\sigma$  pueden ser tomadas arbitrariamente pequeñas.

Así, Riemann estableció el concepto de integrabilidad sin ninguna consideración relativa a la continuidad de la función, aunque pronto se descubrió que la integrabilidad de Riemann encerraba ciertas propiedades de continuidad. También señaló que la clase de funciones integrables incluía funciones con un número infinito de discontinuidades dentro de un intervalo. Y "ya que estas funciones no han sido tomadas en consideración hasta ahora, será conveniente comenzar con un ejemplo concreto". El notable ejemplo que dió fue el siguiente.

Denotemos por  $(x)$  a la diferencia entre  $x$  y el entero más cercano, y sea  $\phi(x)=0$  cuando  $x$  esté exactamente a la mitad entre dos enteros, es decir, cuando  $x = 1/2, -1/2, 3/2, -3/2, 5/2, \dots$ . Entonces, tenemos que  $-1/2 < (x) < 1/2$  para toda  $x$ . Riemann definió  $f(x)$  como

$$f(x) = (x) + (2x)/4 + (3x)/9 + \dots + (nx)/n^2 + \dots$$

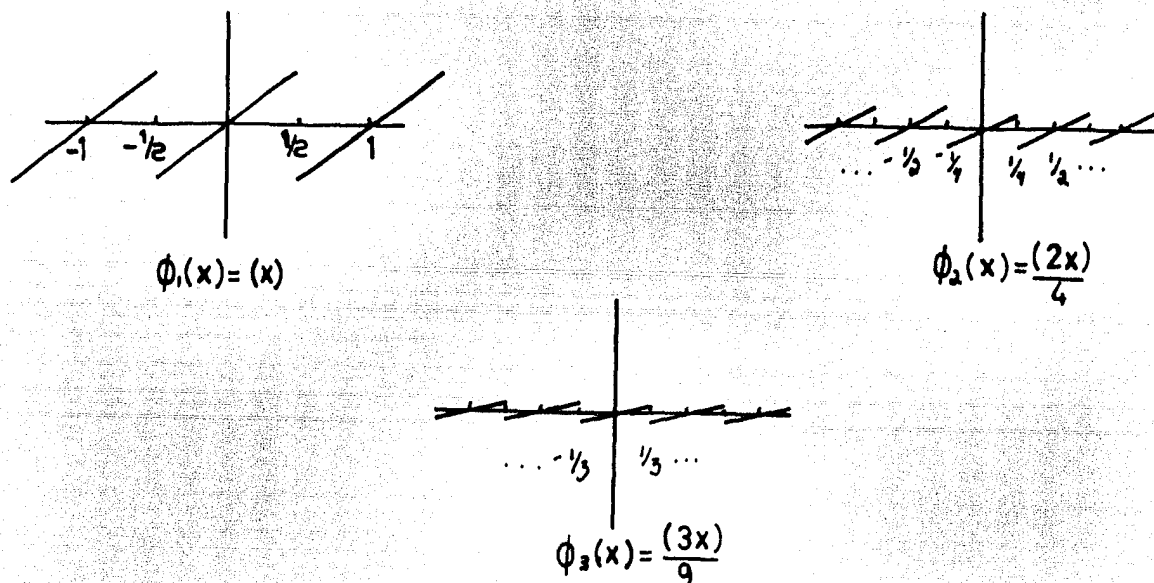


figura 50.

Esta función (ver fig.50) es discontinua en cualquier punto de la forma  $x=m/2n$  cuando  $m$  y  $2n$  son primos relativos. Para estos valores de  $x$ , los límites por la derecha y por la izquierda de  $f$  son:

$$\begin{aligned} f(x+0) &= f(x) - (1/2n^2) [1 + (1/9) + (1/25) + \dots] \\ &= f(x) - \pi^2/(16n^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x-0) &= f(x) + (1/2n^2) [1 + (1/9) + (1/25) + \dots] \\ &= f(x) + \pi^2/(16n^2) \end{aligned}$$

Así que el salto de la función en cada uno de estos puntos es de  $\pi^2/(8n^2)$ , y  $f$  resulta ser discontinua en un número infinito de puntos dentro de cualquier intervalo, por pequeño que sea ( $f$  es discontinua en un subconjunto denso de los números reales). Sin embargo es integrable porque para cada  $\sigma > 0$  hay sólo un número

finito de puntos en los cuales el salto es mayor que  $\sigma$ .

Este trabajo de Riemann fue publicado por primera vez en 1868, poco después de su muerte prematura. La generalidad sin precedentes de su punto de vista y el sorprendente ejemplo de función integrable que presentó impresionó fuertemente a los matemáticos. Así, Bois Reymond opinaba que Riemann había logrado extender el concepto de integral a sus posibilidades extremas; su condición de integrabilidad parecía ser la más general que se podía imaginar. La medida de la generalidad venía expresada en el ejemplo mencionado. Parecía imposible imaginarse de una manera más general la integrabilidad y la integral de una función acotada, ya que si las sumas de Cauchy-Riemann no tienden a un valor único, no parece que tenga mucho sentido hablar de un área determinada por sus ordenadas. El planteamiento de Cauchy y Riemann se basaba en una tradición que se remontaba hasta Arquímedes.

Esta fue la actitud que prevaleció durante el siglo XIX hacia la teoría de integración de Riemann. Sin embargo, fueron surgiendo una serie de descubrimientos que revelan serios defectos de la teoría de Riemann y acabaron demostrando que, a pesar de las apariencias, la condición de integrabilidad de Riemann *no era lo suficientemente general*.

## 5 LOS DEFECTOS DE LA INTEGRAL DE RIEMANN.

Con el desarrollo del cálculo, y como producto de ese enfoque crítico prevaleciente durante el siglo XIX que mencionamos en la introducción a este capítulo, se fueron haciendo evidente ciertas limitaciones de la teoría de integración de Riemann. Surgieron ejemplos de funciones que mostraban que esta definición de integrabilidad no era tan



general como se hubiera deseado, aunque sus descubridores no pretendieran con ello cuestionar la teoría de Riemann.

Una fuente de dificultades se relaciona con lo que hemos llamado el Teorema Fundamental II, debido a Gaston Darboux (1842-1917), que afirma que si una función  $f$  tiene una derivada  $f'$  acotada e integrable en el sentido de Riemann en el intervalo  $[a, b]$ , entonces para todo  $x$  en ese intervalo se cumple

$$\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a).$$

Pero fueron encontradas funciones que tenían derivadas acotadas que no eran integrables en el sentido de Riemann, así que este teorema carecía de sentido para tales funciones. Este resultado había sido demostrado por Cauchy pero para el caso de derivadas continuas, de acuerdo con su teoría de integración. La generalización de Darboux representaba un triunfo significativo del punto de vista de Riemann porque demostraba que eran suficientes sus condiciones de integrabilidad, mucho más débiles, para establecer este importante resultado del cálculo.

Ulisse Dini, (1845-1918), observó una implicación de este teorema que escribió en su libro *Fundamentos de la teoría de funciones de variable real* (1878): si  $f$  tiene la propiedad de que en cada intervalo, por pequeño que sea, existen puntos  $t$  tales que  $f'(t) = 0$ , entonces o bien  $f$  es constante o  $f'$  no es integrable en el sentido de Riemann. El teorema de Darboux implicaba que si  $f'$  es una función acotada e integrable y cumple la condición señalada, entonces debe ser constante, ya que en las sumas de Cauchy-Riemann podemos tomar siempre los  $t_i$  en los que se anula  $f'$ :

$$S = \sum_{i=1}^n f'(t_i) (x_i - x_{i-1}) = 0$$

y por lo tanto

$$\int_a^x f'(t) dx = 0 = f(x) - f(a)$$

de donde  $f(x)=f(a)$  para todo  $x$  en  $[a,b]$ .

Dini intuía sin embargo, que era muy probable que existieran funciones que tuvieran la propiedad mencionada y no fueran constantes, de manera que  $f'$  no sería integrable. Y efectivamente, Vito Volterra (1860-1940) construyó un ejemplo que confirmaba esta conjetura. Es decir, dió un ejemplo de una función  $f$  no constante, cuya derivada  $f'$  está acotada y se anula en un conjunto denso de puntos. El mismo formuló la observación de que su ejemplo de función demostraba que, en algunos casos por lo menos, el enfoque de la integración via antiderivación era más general que el del área, que esa  $f'$  tenía una antiderivada  $f$ , por lo que podría tomarse su integral sobre  $[a,b]$  como  $f(a)-f(b)$ . Volterra no intentaba criticar la teoría de integración de Riemann, así que se apresuró a añadir que ésta era superior al método de la antiderivada, ya que al menos daba condiciones necesarias y suficientes para que una función fuera integrable.

Surgieron otros ejemplos del tipo anunciado por Dini durante el resto del siglo XIX. Mencionaremos el construido por el sueco T. Brodén (1857-1931) porque utiliza la misma técnica que había ideado Riemann para la construcción del ejemplo que ilustra la generalidad de su teoría de integración. Brodén observó que la gráfica de  $\phi(x) = x^{1/3}$  sobre el intervalo  $[-1,1]$ , tiene una tangente vertical en  $x=0$ ,  $\phi'(0)=\infty$ ;  $\phi'$  es finita para los demás valores de  $x$ . Tomó  $\{a_n\}$  un subconjunto denso de  $[-1,1]$  y construyó  $f$  sobre  $[-1,1]$  definida por

$$f = \frac{(x-a_1)^{1/3}}{2} + \frac{(x-a_2)^{1/3}}{2^2} + \dots + \frac{(x-a_n)^{1/3}}{2^n} + \dots$$

que cumple con que  $f'(a_n) = \infty$  para toda  $n$ , por lo que su gráfica tiene tangentes verticales en un conjunto denso de puntos.

Por otro lado, es fácil ver que la función  $f$  es

estrictamente creciente porque lo es  $\phi$ ; es decir, cada uno de los sumandos de  $f$  es estrictamente creciente. Así pues,  $f$  tiene una inversa continua  $g = f^{-1}$  definida sobre  $[a, b] = [f(-1), f(1)]$ , que tiene la característica geométrica de tener tangentes verticales en un conjunto denso de puntos, los puntos  $b_n = f(a_n)$ . Luego

$$g'(y) = \begin{cases} 1/f'(x) & \text{donde } y=f(x), y \neq b_1, b_2, b_3, \dots \\ 0 & \text{para } y = b_1, b_2, b_3, \dots \end{cases}$$

Además, una sencilla comprobación basta para ver que  $f'$  se mantiene fuera de una vecindad del cero para  $x$  en  $[-1, 1]$ . Así que  $g'$  está acotada, se anula en un conjunto denso de puntos,  $\{b_n\}$ , y no es constante.

Brodén no menciona nada acerca de las limitaciones del concepto de integral de Riemann al describir este ejemplo como un caso particular de toda una clase de funciones análogas. Para él, así como para otros que construyeron más ejemplos de curvas con la propiedad de tener un conjunto densamente distribuido de tangentes horizontales, estos ejemplos seguían el camino iniciado por Weierstrass para la investigación de funciones, quien dió un ejemplo de una función continua no diferenciable y cuestionó el que se confiara en la intuición para establecer los principios fundamentales del análisis.

Para nosotros, que tenemos la ventaja de conocer la teoría de integración de Lebesgue, estos ejemplos ponen de relieve el que la integrabilidad en el sentido de Riemann no se conserva en los procesos de límite, pues la derivada de una función se obtiene a partir de ella mediante un proceso de límite. Otra manifestación del mismo hecho está relacionada con la hipótesis que Fourier había dado por hecho en su trabajo sobre representación en serie trigonométrica de una función, de que la integral de una suma infinita es igual a la suma infinita de integrales; es decir, de hecho estaba suponiendo que

$$\int_a^b \{ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \dots \dots \dots (5)$$

Cauchy había dado una demostración de esta afirmación suponiendo que las  $f_n$  eran continuas, pero su demostración era incorrecta porque no logró distinguir entre su idea de continuidad y la convergencia uniforme o no uniforme. Se dice que Weierstrass demostró que la igualdad (5) es válida siempre que se suponga que la convergencia es uniforme. Este mismo resultado lo demostró Darboux en 1875 dando además un sencillo ejemplo que demuestra que la igualdad (5) no necesariamente se cumple si la serie no converge uniformemente: tomó la sucesión de funciones

$$f_n = 2n^2 x \exp(-n^2 x^2), \text{ para } 0 \leq x \leq 1$$

y definió

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \text{ para } 0 \leq x \leq 1.$$

Así pues,

$$\int_a^b f(x) dx = 0,$$

pero

$$\int_a^b f_n(x) dx = \left[ -\exp(-n^2 x^2) \right]_a^b = 1 - \exp(-n^2),$$

luego

$$\lim \int_a^b f_n(x) dx = 1 \neq 0.$$

Darboux apuntó que la sucesión  $f_n$  no convergía uniformemente en  $[0, 1]$  haciendo notar que  $f_n(1/n) = 2n/e$ ; pero esto lo que realmente demuestra es que la sucesión no está uniformemente acotada, que es una condición más débil que la de la convergencia uniforme. Sin embargo, ni Darboux ni otros matemáticos

contemporáneos se dieron cuenta que se podía garantizar la validez de (5) bajo condiciones más generales.

Diez años más tarde, Cesare Arzelá (1847-1912) descubrió que el que la serie estuviera uniformemente acotada era la condición esencial. Es decir, Darboux había demostrado que si  $f_n(x)$  converge uniformemente a  $f(x)$  sobre  $[a, b]$ , y si las  $f_n(x)$  son Riemann-integrables, entonces también lo es  $f(x)$ . Arzelá encontró que la igualdad (5) se verifica suponiendo que las  $f_n$  y la  $f$  son Riemann-integrables y que las  $f_n$  están uniformemente acotadas. Así pues, dada una sucesión de funciones integrables  $f_n$  convergente y uniformemente acotada, la única condición que hay que añadir para que se cumpla (5) es que la función límite sea Riemann-integrable.

Rene Baire (1874-1932) dió, en 1889, un ejemplo en el que la función límite no es Riemann-integrable: definió una sucesión de funciones  $f_n(x)$  en el  $[0, 1]$  dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=p/q \text{ con } p \text{ y } q \text{ primos relativos y } q \leq n \\ 0 & \text{para los demás valores en } [0, 1] \end{cases}$$

Cada  $f_n$  es cero excepto en un número finito de puntos, por lo que todas son integrables. Como  $|f_n(x)| \leq 1$ , están uniformemente acotadas. Se puede verificar fácilmente que existe

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

para todo  $x$  en  $[0, 1]$ , y que se tiene que  $f(x)=1$  si  $x$  es racional y  $f(x)=0$  si  $x$  es irracional. Por lo tanto la función límite no es integrable en el sentido de Riemann.

Baire, como los demás, no hizo ninguna referencia a las limitaciones de la teoría de integración de Riemann cuando dió su ejemplo puesto que nadie consideraba entonces que el que tal función límite no fuera integrable, representara un grave inconveniente. Sin embargo, hacia finales del siglo XIX la teoría de integración de Riemann había sido reformulada en términos de

conjuntos y sus medidas, reformulación que abrió nuevas perspectivas y, en última instancia, hizo surgir la idea de que era posible una nueva generalización muy natural.

## 6 HACIA UNA FORMULACION DE LA INTEGRAL BASADA EN LA TEORIA DE LA MEDIDA.

En 1892 Camile Jordan (1838-1922) introdujo la primera teoría de la medida, en la que contemplaba definiciones como las siguientes:

Supongamos que  $S$  denota un conjunto acotado de números reales contenido en  $[a, b]$ . Y tomemos una partición  $P$  de  $[a, b]$  formada por los intervalos  $I_1, I_2, \dots, I_n$ . Entonces se definen dos números  $c_i(S)$  y  $c_e(S)$  llamados respectivamente contenido interior y contenido exterior de  $S$ , a través de

$$c_i(S) = \sup_P \sum_{I_k \subset S} l(I_k) \quad \text{y} \quad c_e(S) = \inf_P \sum_{I_k \cap S \neq \emptyset} l(I_k)$$

donde  $l(I_k)$  representa la longitud del intervalo  $I_k$ . En otras palabras, el contenido interior de  $S$  se obtiene considerando, para cada partición  $P$ , aquellos intervalos que esten completamente contenidos en  $S$ , mientras que el contenido exterior se obtiene considerando a los intervalos que contienen puntos de  $S$ . Claramente se tiene

$$\bigcup_{I_k \subset S} I_k \subset S \subset \bigcup_{I_k \cap S \neq \emptyset} I_k, \text{ y por tanto, } \sum_{I_k \subset S} l(I_k) \leq c_i(S) \leq c_e(S) \leq \sum_{I_k \cap S \neq \emptyset} l(I_k)$$

El conjunto  $S$  se llama *Jordan-medible* si  $c_i(S) = c_e(S)$  y en este caso su contenido se denota por  $c(S)$ . Estas nociones, sugirieron dos nuevas caracterizaciones de la condición de integrabilidad de Riemann. La primera esta basada en el punto de vista geométrico de la integral de una función en términos del

área acotada por su gráfica. Para  $f$  definida y acotada sobre el intervalo  $[a, b]$ ,  $S$  denota el conjunto de puntos en el plano acotados por la gráfica de  $f$ , las rectas  $x=a$ ,  $x=b$ , y el eje  $X$ . Entonces  $f$  es Riemann-integrable si y sólo si el conjunto  $S$  es Jordan-medible, y

$$\int_a^b |f| = c(S), \quad \int_a^b f = c(S^+) - c(S^-) \dots \dots \dots (6)$$

donde  $S^+$  y  $S^-$  denotan las partes de  $S$  que están arriba y abajo del eje  $X$  respectivamente.

La segunda caracterización de la condición de integrabilidad de Riemann parte de definir las integrales inferior y superior, de la siguiente forma. Sean

$$L(P) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) \quad U(P) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$$

donde  $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n=b$  denota una partición de  $[a, b]$ , y  $m_k$  y  $M_k$  son el ínfimo y el supremo del conjunto de valores  $f(x)$  para  $x$  en  $[x_{k-1}, x_k]$ . Entonces las integrales inferior y superior serán:

$$\int_a^b f = \sup L(P) \quad \int_a^b f = \inf U(P)$$

y se dice que  $f$  es Riemann-integrable si y sólo si

$$\int_a^b f = \int_a^b f$$

La introducción del concepto de *conjunto medible* indujo a Jordan a presentar la siguiente variación de esta caracterización de la integral. Considérense las sumas, más generales

$$L = \sum_{k=1}^n m_k c(E_k) \quad U = \sum_{k=1}^n M_k c(E_k) \dots \dots \dots (7)$$

donde los  $E_k$  son conjuntos ajenos y medibles tales que  $[a, b] = \bigcup_{k=1}^n E_k$

Igual que antes, se define entonces la integral inferior como el *sup* de los reales  $L$  y la integral superior como el *inf* de las  $U$ .

Estas dos caracterizaciones hicieron posible ver que una generalización del concepto de medida y medibilidad conduciría a una generalización del de integral e integrabilidad. En otras palabras, supongamos que  $M$  denota una clase de conjuntos medibles que contiene a los conjuntos Jordan-medibles, y supongamos que se define una medida  $m(E)$  para todo conjunto  $E$  de  $M$  que coincide con  $c(E)$  cuando  $E$  es Jordan-medible. Entonces la primera de estas caracterizaciones de las funciones Riemann-integrables, (6), sugiere que el concepto de integrabilidad podría extenderse a cualquier función  $f$  cuyo correspondiente conjunto  $E$  pertenezca a  $M$ . La integral de  $f$  quedaría definida entonces, por

$$\int_a^b f = m(E^+) - m(E^-).$$

Análogamente, la segunda caracterización, la igualdad (7), sugiere definir integrales inferior y superior respecto a  $M$ ,

$$\int_a^b f \quad \text{y} \quad \int_a^b f$$

como el *sup* de las  $L^*$  y el *inf* de las  $U^*$  donde las sumas son

$$L^* = \sum_{k=1}^n m_k m(E_k) \quad \text{y} \quad U^* = \sum_{k=1}^n M_k m(E_k)$$

donde ahora  $E_k$  pertenece a  $M$ . Entonces

$$\int_a^b f \leq \int_a^b f \leq \int_a^b f \leq \int_a^b f$$

y podría decirse que  $f$  es integrable si



$$\int_a^b f = \int_a^{mb} f$$

Claramente, estas dos caracterizaciones, basadas en una ampliación del concepto de medibilidad, representan una generalización de la integral de Riemann. Cuando  $M$  denota la clase de los conjuntos *Lebesgue-medibles*, las definiciones corresponden a la *Integral de Lebesgue para funciones acotadas*.

Fue esencialmente a través de este tipo de consideraciones que Lebesgue llegó a obtener su generalización de la integral, cuyo desarrollo histórico requeriría un trabajo por separado. Dejemos simplemente anotado el hecho de que la teoría de integración de Lebesgue, surgida a principios del siglo XX, resolvió los problemas que se habían presentado previamente en la teoría de Riemann, con base, por supuesto, en una serie de contribuciones desarrolladas por diversos matemáticos antes de su trabajo. Específicamente, las definiciones, teoremas y ejemplos que emanaron del trabajo de estos matemáticos, brindaron a Lebesgue dos instrumentos fundamentales para la fundamentación de su teoría: un desarrollo pleno de un punto de vista teórico sobre la medida, y una serie de problemas teóricos que fueron descubiertos dentro del contexto de la definición de integral de Riemann (algunos de ellos fueron mencionados en la sección anterior).

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Arquímedes. *El método*. Introducción y notas de José Babini. UDEBA. 1966.
- [2] Bourbaki. *Elementos de historia de las matemáticas*. Alianza editorial. 1972.
- [3] Boyer C.B. *The history of the calculus and its conceptual development*. Dover. 1949.
- [4] Cantoral R. *Procesos del cálculo y su desarrollo conceptual*. CIEA. 1983.
- [5] Edwards Jr. C.H. *The historical development of calculus*. Springer-Verlag New York Inc. 1979.
- [6] Grattan-Guinness. *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Alianza Universidad. 1984.
- [7] Grattan-Guinness. *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann*. The MIT press. 1970.
- [8] Hawkins T. *Lebesgue's theory of integration. Its origins and development*. Chelsea Publishing Co. 1975.
- [9] Kline M. *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press. 1972.
- [10] Koyré A. *Estudios de historia del pensamiento científico. Siglo XXI*. 1980.

- [11] Newman J.R. *Sigma. El mundo de las matemáticas* (tomo I). Ediciones Grijalbo. 1983.
- [12] Newton I. *La cuadratura de las curvas*. Universidad Autónoma de Puebla. 1986.
- [13] Polya G. *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos. 1966.
- [14] Sarton G. *Historia de la ciencia*. EUDEVA. 1965.
- [15] Struick D.J. *A source book in mathematics, 1200-1800*. Harvard University Press. 1969.
- [16] Vera F. (recopilador). *Científicos griegos*. Editorial Aguilar. 1970.