42

2ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

Solución de Problemas de Dinamica Estructural

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

Ingeniero Civil

PRESENTA

Marco Antonio Delaye León

MEXICO, D.F. 1988

"SOLUCION DE PROBLEMAS DE DINAMICA ESTRUCTURAL"

I N D I C E

1. INTRODUCCION

El estudio de las vibraciones no tiene un origen reciente, sino que data de los tiempos de Lagrange (1736 - 1813). Los primeros trabajos desarrollados en este campo se enfocan al estudio de fenómenos naturales y a teorías matemáticas. En la actualidad un basto número de investigaciones se realizan en el campo de la técnica, tales como el diseño de edificios, de turbinas, motores y otras tantas cosas.

En la aplicación de la teoría de vibraciones a sistemas mecánicos o físicos complejos, se requiere hacer simplificaciones del movimiento de éstos. Usualmente consisten en reducir el sistema a un número finito de parámetros inerciales, disipativos y restitutivos, relacionados con aspectos cinemáticos. Una representación común de emplear en estos casos,ha sido la de sistemas de masas concentradas interconectadas con resortes y amortiguadores. Sin embargo, hay ocasiones en que la masa del resorte en consideración, no puede ser despreciada, motivo por el cual en el análisis se deberá considerar la continuidad del sistema.

Para representar la disipación de energía en un sistema, generalmente se emplea un elemento mecánico del tipo de amortiguamiento viscoso. Conviene aclarar que en cualquier sistema la fricción interna que se genera cuando está sometida a una solicitación dinámica, es de distintos tipos; por lo que para incluirla en un análisis deberán hacerse consideraciones cuidadosas. En este caso los sistemas se claisificarán simplemente en amortiguados y no amortiguados; un sistema no amortiguado podrá ser aquel en que los efectos de fricción interna son despreciables.

Uno de los objetivos primordiales de la dinámica estructural es presentar métodos para analizar los esfuerzos y deflexiones desarrollados en cualquier tipo de estructura, cuando está sometida a cargas arbitrarias dinámicas. El térmico "dinámico" se dfine simplemente como "variación del tiempo".

En este trabajo de tesis se presenta un resumen teórico de dinámica estructural, con una serie de ejemplos de aplicación y programas en microcomputadora y calculadoras de escritorio que permiten facilitar su análisis. Tienen el objetivo de ser ilustrativo y brindar una visión didáctica para los que se inician en esta rama de la ingeniería estructural.

El Capítulo 2 se refiere a los sistemas discretos de un grado de libertad donde se analiza la respuesta dinámica de estructuras que por sus características pueden ser estudiadas con una sola coordenada para describir su movimiento. Contiene vibraciones libres, forzadas armónicamente y forzadas arbitrariamente; sin y con amortiguamiento en cada caso. Cuando se presenta una fuerza excitadora cualquiera, se emplean métodos numéricos para evaluar la solución.

En el Capítulo 3 se analizan respuestas dinámicas de los sistemas discretos de varios grados de libertad. Su contenido es el siguiente: Vibraciones libres sin amortiguamiento, donde se incluye la solución por medio de la ecuación característica y por medio de la aplicación de métodos iterativos para la obtención de las frecuencias naturales y las configuraciones modales; vibraciones libres con amortiguamiento; vibraciones forzadas sin y con amortiguamiento, donde se analiza la obtención de la matriz de amortiguamiento y el desacoplamiento de las ecuaciones de movimiento. Se presenta también la obtención del espectro de respuesta y del espectro de diseño, para el análisis sísmico. Se finaliza con la explicación de los métodos de diseño sísmico, modal espectral y análisis sísmico estático. Considerando en ambos casos la reducción por ductilidad . Para el desarrollo de los sistemas de parámetros distribuidos; en el Capítulo 4, se estudian aquellos sistemas elásticos, en los cuales no pueden despreciarse la masa en toda su longitud y que son conocidos como sistemas continuos; se analizan las vigas de corte y las vigas de flexión; se describe el método de superposición de modos y se explica el desacoplamiento de las ecuaciones de movimiento.

El Capítulo 5 reúne en forma ordenada los ejercicios de aplicación de cada capítulo respectivamente, con el fin de aclarar toda la información teórica recopilada, en ejemplos didácticos. Además se incrementa el capítulo con la utilización de programas de calculadora HP 41C y de la microcomputadora Sigma Commodore en algunos ejemplos para aclarar los criterios de análisis o para facilitar el uso de los métodos establecidos en este trabajo.

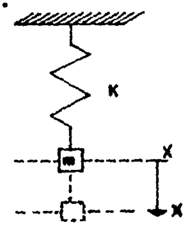
Es usual emplear dos enfoques para calcular la respuesta estructural: la determinista y la no determinista; el método que escoja dependerá en que tanto se pueden definir las cargas. Si se conoce bien la variación en el tiempo de la carga, se tendrán cargas dinámicas prescritas y se hará un análisis determinista; si la variación no es bien conocida pero se puede definir en un sentido estadístico o probalístico, entonces se tienen cargas aleatorias (no deterministas). En este trabajo se analizan sistemas deterministas sometidos a cargas dinámicas prescritas.

2. SISTEMAS DE UN GRADO LIBERTAD CON COMPORTAMIENTO LINEAL

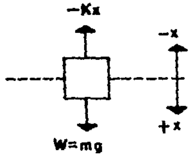
2.1 VIBRACION LIBRE NO AMORTIGUADA

(Movimiento armónico simple)

En la figura siguiente se presente en forma diagramática un sistema de un grado de libertad sin amortiguamiento, se ha supuesto que el resorte no tiene masa y obedece la Ley Hooke (Fuerza Estabilizadora K).



Si tiramos del cuerpo en sentido de las x, una distancia x_i y luego lo soltamos, el cuerpo se pondrá a vibrar. Para tener la idea clara de las fuerzas que actúan en el cuerpo se hace el siguiente D.C.L. (Diagrama de cuerpo libre).



Por conveniencia el desplazamiento hacia abajo se considera positivo.

De la figura anterior establecemos la siguiente ecuación

$$- Kx = W = mg \quad ; \quad g = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = \text{aceleración}$$

de esta manera obtenemos

$m\ddot{x} + Kx = 0$

dividiendo entre la masa m y designamos $P^2 = \frac{k}{m}$

$\ddot{x} + p^2x = 0$ Resulta una ecuación diferencial ordinaria, lineal y homogenea de segundo orden.

Cuya solución general es de la forma:

$x\ (t) = A \cos pt + B \text{ sen } pt$

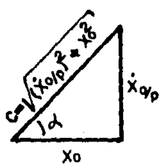
donde las constantes arbitrarias, A y B, se determinan de las condiciones iniciales. Por ejemplo si $t = 0$, $x = x_o$ y $\dot{x} = \dot{x}_o$

$A = x_o$ y $B = \dot{x}_o/p$

Con lo cual

$x\ (t) = x_o \cos pt + \dot{x}_o/p \text{ sen } pt$ ec.2.1.1

Haciendo el siguiente análisis



$\cos\alpha = \frac{x_o}{C}$, $\text{sen } \alpha = \frac{\dot{x}_o}{PC}$

De la propiedad trigonométrica

$C \cos (Pt - \alpha) = C\ [\cos Pt \cos\alpha + \text{sen } Pt \text{ sen}\alpha]$

Obtenemos:

$C \cos (Pt - \alpha) = C\ [\cos Pt(\frac{x_o}{C}) + \text{sen } Pt(\frac{\dot{x}_o}{PC})$

$C \cos (Pt - \alpha) = x_o \cos Pt + \frac{\dot{x}_o}{P} \text{ sen } Pt$

Por lo tanto la ec.2.1.1 se puede escribir como:

$x\ (t) = C \cos (Pt - \alpha)$ ec.2.1.2

donde C y α son constantes y se les conoce:

C = Amplitud

α = Angulo de fase

$P = \sqrt{k/m}$ = frecuencia natural del sistema

$P = 2\pi f$, f = frecuencia angular circular

$f = 1/T$; $P = 2\pi \frac{1}{T}$

Por lo que $T = \frac{2\pi}{P}$ = Período

Puede verse que si el resorte fuese esforzado por una fuerza igual al peso mg. de la masa vibrante, la deflexión estática está dada por:

$$\delta\,est = \frac{mg}{k} \quad ; \quad K = \frac{mg}{\delta\,est}$$

y en este caso

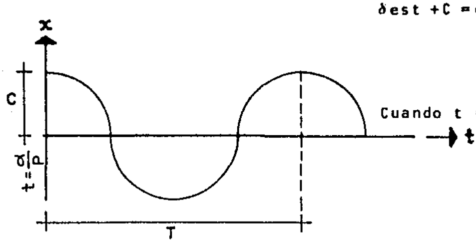
$$P = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg}{\delta\,est\;m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta\,est}} \qquad \text{ec.2.1.2}$$

Para calcular la amplitud, se tiene que para $t = 0$, el desplazamiento inicial es $x_0 = -\delta est$, con velocidad inicial $\dot{x}_0 = \sqrt{2gh}$ (movimiento rectilineo uniforme acelerado)

$$C = \sqrt{\sqrt{(-\delta\,est)^2} + \left(\sqrt{2gh} \,/ \sqrt{g\,/\delta\,est}\right)^2} \qquad \text{ec.2.1.3}$$

$$C = \sqrt{(-\delta\,est)^2 + (2h\,\delta\,est)^2}$$; C = Amplitud máxima

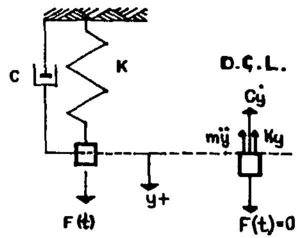
$\delta est + C$ = deflexión total



Cuando $t = \frac{\alpha}{P}$; $x = 0$

2.2 VIBRACION LIBRE AMORTIGUADA

En los sistemas vibratorios reales, la masa al cabo de un --- tiempo de estar moviéndose, se detiene. La masa al estar desplazada una distancia x_o desde su posición de equilibrio su - amplitud disminuye conforme pasa el tiempo y la masa terminará por pararse. Tal es el caso de un oscilador de un grado - de libertad que vibra libremente bajo la influencia de un - - amortiguamiento (fuerza disipadora) viscoso. Ver figura.



Lo que nos determina una ecuación de la forma

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0$$

dividiendo todo entre m

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = 0$$

Si $2n = \frac{c}{m}$ y $P^2 = \frac{k}{m}$

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + P^2 y = 0 \qquad \text{ec.2.2.1}$$

La solución de la ecuación diferencial está dada por:

$$y = ce^{\mu t}$$

Al sustituir la solución en la ecuación de movimiento obtenemos:

$$m\,\mu^2 + c\mu + k = 0$$

donde:

$$\mu = -n \pm \sqrt{n^2 - p^2}$$

Analizando el resultado anterior, encontramos tres casos diferentes de amortiguamiento según el signo del radical, ver tabla 2.1

Tabla 2.1 RELACION DEL RADICAL $\sqrt{n^2 - p^2}$

CASO	RELACION	SIGNO	TIPO DE AMORTIGUAMIENTO
A	$n > P$	+	**Sobreamortiguado**
B	$n = P$	0	**Amortiguamiento crítico**
C	$n < P$	-	**Subamortiguado**

CASO A. Movimiento sobreamortiguado.

El caso en que el término dentro del radical es positivo. -- Cuando esto ocurre se tiene un decremento del movimiento y su forma es aperiódica. Sus dos raíces son reales y distintas. La solución está dada por :

$$y\ (t) = C_1\ e^{\mu_1 t} + C_2\ e^{\mu_2 t} \qquad \text{ec.2.2.2}$$

Las raíces μ_1 y μ_2 se pueden expresar en términos del factor de amortiguamiento* η como :

$$\mu_1 = -\eta P + P\sqrt{\eta^2 - 1}$$
$$\mu_2 = -\eta P - P\sqrt{\eta^2 - 1} \qquad \text{si } \eta = \frac{n}{P}$$

---

*El factor de amortiguamiento es la relación $\eta = c/cr$, se debe de resaltar que $2n = c/m$, $C = 2nm$. En el caso de amortiguamiento crítico $n = P$, entonces $C_{cr} = 2Pm$ por lo que $\eta = \frac{n}{P}$.

Cuando el $\eta > 1$;

$$y\ (t) = e^{-\eta pt}[C_1 \exp(\sqrt{\eta^2-1}\ Pt) + C_2 \exp(-\sqrt{\eta^2-1}\ Pt)] \qquad \text{ec.2.2.3}$$

donde la frecuencia natural del sistema es:

$$P_D = P\sqrt{\eta^2-1}$$

otras formas de expresar la solución anterior son:

$$y\ (t) = e^{-\eta Pt}[C_1 \cos\ (P\sqrt{\eta^2-1})\ t + C_2\ \text{sen}\ (P\sqrt{\eta^2-1})t] \qquad \text{ec.2.2.4}$$

$$y\ (t) = e^{-\eta Pt}[C_1 \cos\ P_D t + C_2\ \text{sen}\ P_D t] \qquad \text{ec.2.2.5}$$

CASO B. Movimiento con amortiguamiento crítico.

Corresponde al caso en que la cantidad dentro del radical es nula.

$$n = P\ ,\ \frac{Ccr}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}}\ ,\ Ccr = 2m\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$Ccr = 2\sqrt{Km}$; Coeficiente de amortiguamiento crítico

El coeficiente Ccr sirve para definir la relación adimensional C/Ccr llamada factor de amortiguamiento viscoso.

En este caso las raíces μ_1 y μ_2 son iguales y valen

$$\mu_1 = \mu_2 = -Ccr/2m$$

Una solución independiente es:

$$Y_1\ (t) = C_1\ e^{-(Ccr/2m)t}$$

Otra solución independiente puede hallarse empleando la función:

$$y_2(t) = C_2 t\ e^{-(Ccr/2m)t}$$

Por lo tanto la solución general está dada por:

$$y(t) = (C_1+C_{2t})\ e^{-(Ccr/2m)t} \qquad \text{ec.2.2.6}$$

CASO C. Movimiento subamortiguado.

El caso en que el término dentro del radical es negativo correspondiente a este movimiento; ésto implica que:

$$n < p \quad \text{o sea} \quad \left(\frac{C}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}$$

Debido a ello, las raíces son complejas y conjugadas, esto es:

$$\mu_1 = -\eta P + iP\sqrt{1-\eta^2}$$

$$\mu_2 = -\eta P - iP\sqrt{1-\eta^2}$$

La solución se puede expresar como:

$$Y(t)=e^{-Pt}[C_1 \exp(i\sqrt{1-\eta^2}\,Pt)+C_2 \exp(-i\sqrt{1-\eta^2}\,Pt) \qquad \text{ec.2.2.7}$$

Puesto que únicamente los valores reales de Y(t) son de interés práctico conviene introducir otras constantes definidas por:

$$C_1 = 1/2 + 1/2\, i\, B = \frac{A + i\, B}{2}$$

$$C_2 = 1/2 + 1/2\, i\, B = \frac{A - i\, B}{2}$$

Empleando las fórmulas para las funciones circulares

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2_i}$$

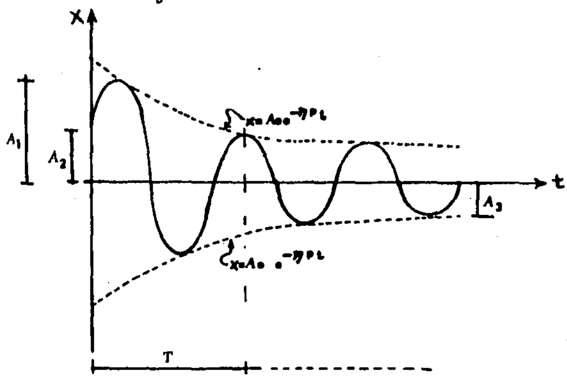
$$Y(t) = e^{-Pt}[A\cos\sqrt{1-\eta^2}\,Pt + B\operatorname{sen}\sqrt{1-\eta^2}\,Pt\,] \qquad \text{ec.2.2.8}$$

o más conveniente

$$Y(t) = A_o\, e^{-Pt}\cos(\sqrt{1-\eta^2}\,Pt - \alpha_o); \text{ y para } y=y_o, \dot{y}=\dot{y}_o \text{ y } t=o$$

donde $A_o = \sqrt{y_o^2 + \dfrac{(\dot{y}_o + y_o \eta P)^2}{P_D{}^2}}$

$\tan \alpha o = \dfrac{\dot{y} + y_o \;\; \eta \;\; P}{P_D \; y_o}$; $A_o e^{-\eta P t}$ es la amplitud máxima



$T = \dfrac{2\pi}{P'}$. $P' = P \sqrt{1 - (\dfrac{n}{nc})^2}$

$A_1 = A_o e^{-\eta P t}$, $A_2 = A_o e^{-\eta P (t + T)}$

$A_2/A_1 = e^{-\eta P T} = e^{-\eta P \frac{2\pi}{P\sqrt{1 - (^n/nc)^2}}} = e^{-\eta P 2\pi \frac{1}{P\sqrt{1 - (^n/nc)^2}}}$

desarrollando $\dfrac{1}{\sqrt{1 - (^n/nc)^2}}$ en series llegamos a

$A_2/A_1 = e^{-2\pi n/nc} [1 + 1/2(^n/nc)^2]$

$A_2/A_1 = \beta$ donde $\beta = e^{-2\pi \; n/nc} \;\; [1 + 1/2 \; (^n/nc)^2]$

Podemos observar que las amplitudes decrecen según una progresión geométrica.

$$A_{j+1} = \beta^{j} A_1$$

$A_1 = A_1$, amplitud máxima, $A_3 = \beta^2 A_1$

$A_2 = \beta\ A_1$ $\qquad$ $A_4 = \beta^3 A_1$ y así sucesivamente

El decremento logarítmico "δ" se obtendrá de la siguiente forma:

$$\delta = \text{Ln}\ (A_2/A_1) \quad ; \quad \text{o sea} \quad \delta = \text{Ln}\ \beta$$

y si $A_2/A_1 = \exp\ \left(\frac{2\pi\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\right)$, entonces obtenemos para valores muy pequeños del amortiguamiento

$$\delta \doteq 2\pi\eta$$

2.3. CONSIDERACIONES SOBRE EL AMORTIGUAMIENTO

Tres son los tipos más comunes de amortiguamiento: el viscoso, el de Coulomb y el histerético. El primero de ellos está asociado con cuerpos que se mueven dentro de fluídos a baja velocidad; en ese caso la fuerza amortiguadora se supone proporcional a la primera potencia de la velocidad del movimiento.

$$Fd\ (t) = -c\dot{y}$$

donde c es la constante de amortiguamiento y $\dot{y}$ es la velocidad del movimiento.

El amortiguamiento de Coulomb o amortiguamiento seco está asociado con el deslizamiento de dos cuerpos o superficies secas, y la fuerza resistente está dada por

$$F_f\ (t) = \pm\ \mu\ N$$

donde μ es el coeficiente de fricción cinética del material y N es la fuerza Normal.

El otro amortiguamiento es el histerético, también llamado sólido o estructural y está asociado con la fricción interna y es aproximadamente proporcional a la amplitud del desplazamiento del cuerpo deformado; es independiente de la frecuencia de vibración y es el resultado de la fricción entre planos internos. La energía que se disipa en forma de calor, por ciclo, es:

$$Uc = k\,\pi\,co\ Y^2 = \pi\,cqY^2\omega, \quad \text{si } co = cq\ \frac{\omega}{k}$$

K = Rigidez del resorte

co = Constante adimensional para amortiguamiento sólido

Y = Amplitud de vibración

ω = Frecuencia de excitación

cq = Constante de amortiguamiento viscoso equivalente.

Puesto que la amplitud de la vibración es proporcional a la amplitud de la deformación unitaria, el trabajo Us disipado por ciclo debido al amortiguamiento estructural puede escribirse como

$$Us = s\ Y^2$$

con s = escalar que representa la proporcionalidad. Igualando los valores de Uc y Us, se tiene:

$$Uc = Us\ , \text{ entonces } \quad \pi\,cq\ y^2\omega = sy^2 \qquad \therefore\ cq = \frac{s}{\pi\,\omega}$$

$$cq = \frac{s}{\pi\,\omega} = \frac{k}{\pi\,\omega} = \frac{\eta\ k}{\omega} \qquad ; \quad \text{de esto resulta}$$

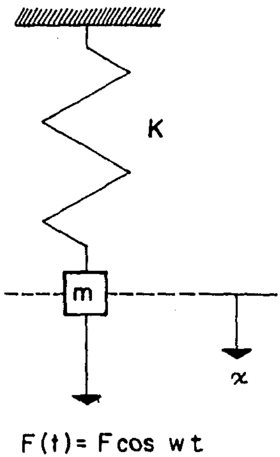
$$\eta = \frac{s}{\pi k} \quad \text{factor de amortiguamiento estructural}$$

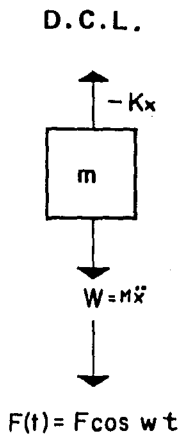
Esta cantidad puede relacionarse con el amortiguamiento viscoso equivalente, cq, dividiendo la ecuación anterior entre $Ccr = 2mp$ y empleando la notación de $k = p^2m$

$$\eta_q = \frac{Cq}{Ccr} = \frac{\eta k}{\omega(2mp)} = \frac{\eta p^2 m}{2m\omega p} = \frac{\eta p}{2\omega}\,, \qquad \eta_q = \text{factor de amortiguamiento equivalente}$$

2.4. MOVIMIENTO ARMONICO FORZADO NO AMORTIGUADO

En este tipo de movimiento se considera que la masa está forzada a vibrar por una fuerza armónica como se indica en la figura.





Supóngase que la fuerza F(t) tiene una frecuencia $f = \frac{\omega}{2\pi}$

La ecuación de equilibrio dinámico es:

$m\ddot{x} + kx = F \cos \omega t$ ec.2.4.1

La solución particular es:

$x = X \cos \omega t$

Con la primera y segunda derivada obtenemos:

$\dot{x} = \omega X \operatorname{sen} \omega t$

$\ddot{x} = -\omega^2 X \cos \omega t$

sustituyendo en la ecuación 2.4.1 resulta

$$X = \frac{F}{k - \omega^2 m} \quad , \text{ donde } \quad \omega \neq P$$

Las ecuaciones para x y X dan el estado estacionario de la vibración forzada. Para tener la solución completa de la ecuación de movimiento deberá de sumarse a esta solución particular, la ecuación de la homogênea que corresponde al caso de vibración libre. Esto es:

$X(t) = A \cos (Pt - \alpha) + X \cos \omega t$ ec.2.4.2

En los sistemas de la prática siempre hay algo de amortiguamiento de tal suerte que eventualmente se amortiguan las vibraciones y únicamente la vibración forzada permanece; esta vibración producto de la combinación de la vibración libre y forzada se llama transitoria.

si $\omega \neq P$, entonces la ecuación 2.4.2 nos queda:

$$x(t) = A \cos Pt + B \operatorname{sen} Pt + \frac{F}{k - \omega^2 m} \cos \omega t$$

Para $t = o$, $x = x_o$ y $\dot{x} = \dot{x}_o$

se tiene $A = x_o - \dfrac{F}{k - m\omega^2}$, $B = \dot{x}_o / p$

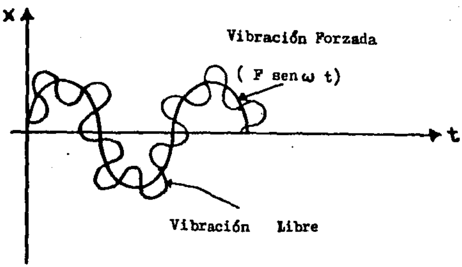
Entonces

$$x(t)=x_o \cos Pt+\dot{x}_{o/p} \text{ sen } Pt - F/_{k-m\omega^2}\cos Pt+\frac{F}{k-m\omega^2}\cos Pt, \text{ec.2.4.3.}$$

La ecuación anterior se puede arreglar , si $m= k / p$, en la forma :

$$x(t)=x_o \cos Pt + \frac{\dot{x}_o}{p}\text{ sen } Pt + \frac{F}{K}\frac{\cos\omega t - \cos pt}{(1 - \omega^2/p^2)} \quad , \text{ ec.2.4.4.}$$

El movimiento real descrito por la ecuación 2.4.3 es la superposición de dos movimientos armónicos que tienen diferentes amplitudes y frecuencias. Un caso particular se ilustra en la figura.



Si aplicamos la regla de L'Hopital* para evaluar el límite cuando $\omega \to p$ (Resonancia) llegamos a:

$$x(t) = x_o \cos pt + \frac{\dot{x}_o}{p}\text{ sen } Pt + \frac{FP}{2k}\, t \text{ sen } Pt$$

Para $x_o = \dot{x}_o = o$ y para $t = o$, en la ec.2.4.4

$$x(t) = -\underbrace{\frac{F}{k-\omega^2 m}\cos Pt}_{\text{transitorio}} + \underbrace{\frac{F}{k-\omega^2 m}\cos \omega t}_{\text{estacionario}}$$

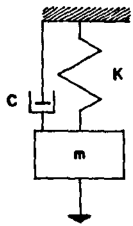
* Regla de L'Hopital. Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, derivables en el intervalo $0<|x-a|<\delta$ siendo a un número, y $g(x) \neq 0$ para todos los valores de x del intervalo, de manera que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x)= 0$, si existe o es infinito el $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, se verifica:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$x(t) = \frac{F}{k-\omega^2 m} (\cos \omega t - \cos Pt)$$

2.5 MOVIMIENTO ARMONICO FORZADO AMORTIGUADO

Consideremos el siguiente sistema mostrado en la figura



F (t) = Fcos ωt

La ecuación de equilibrio dinámico será:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \cos \omega t$$

donde ω es la frecuencia de excitación

Matemáticamente es más conveniente considerar a la función excitadora en término de una representación compleja; ésto se puede hacer al escribir la fuerza como $Fe^{i\omega t}$

Si se define al desplazamiento complejo como "z" la ecuación de movimiento se puede expresar como:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = Fe^{i\omega t}$$

Si se supone que la solución es

$$z = Ae^{i\omega t} \quad , \quad \dot{z} = iA\omega e^{i\omega t} \quad , \quad \ddot{z} = A\,\omega^2 e^{i\omega t}$$

donde A es un número complejo, se tiene

$$-m\omega^2 A + i\, c\, \omega\, A + KA = F$$

donde

$$A = \frac{F}{(k - m\,\omega^2) + i\omega c} \quad , \text{ si } z\,(i\omega) = (k - m\omega^2) + i\omega c$$

entonces la solución particular es

$$z = \frac{F}{z\,(i\omega)}\, e^{i\omega t}$$

A su vez, se puede escribir $z\,(i\omega) = |z|e^{i\alpha}$

donde $|Z| = \sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}$

de tal manera que:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) \text{ y } z = \frac{F}{|Z|}\, e^{i(\omega t - \alpha)}$$

Por otro lado, la solución de la ecuación de equilibrio dinámi_
co es:

$$Xp = \frac{\frac{F}{k}\,(A_1 \cos \omega t + A_2 \text{ sen } \omega t)}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{p})^2]^2 + 4(\frac{n}{nc})^2(\frac{\omega}{p})^2}}$$

y del inciso de la vibración libre con amortiguamiento conoce_
mos la solución de la homogénea de esta ecuación:

$$X_H = e^{-P\eta t}\,[A \cos \sqrt{1 - \eta^2}\; Pt + B \text{ sen} \sqrt{1 - \eta^2}\; pt]$$

para el caso de movimiento subamortiguado*

Si $\omega/p = \Omega$ y $^{n}/nc = \eta$ (ya se conocía como factor de amorti-
guamiento) y sumando la solución particular con la homogénea,
obtenemos la solución general

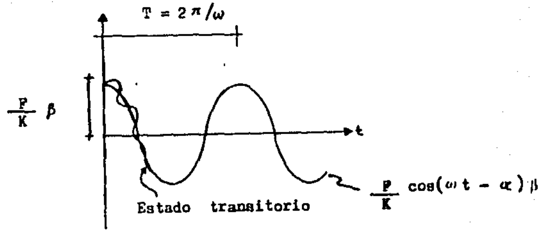
* Hoja siguiente

$$X(t) = \underbrace{e^{-p\eta t} \left(A \cos\sqrt{1-\eta^2}\, Pt + B \operatorname{sen}\sqrt{1-\eta^2}\, Pt\right.} + \frac{\frac{F}{k}\cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2\eta\Omega)^2}} \qquad \text{ec.2.5.1.}$$

El primer término de la acuación es un estado transitorio inical que se diluye conforme pasa el tiempo. (Ver Figura 2.5.A)

---

*El caso de amortiguamiento donde n<p, es donde existe mayor oscilación y presenta un caso más común en la vida real. (Movimiento subamortiguado)



$$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1-(\frac{\omega}{p})^2)^2 + 4(\frac{\Omega c}{n})^2 \; (\frac{\omega}{p})}}$$

Figura 2.5.A.

En la figura 2.5.A observamos el valor $\left(\sqrt{[1-\Omega^2]^2 - [2\Omega\eta]^2}\right)^{-1}$ Este valor es conocido como factor de amplificación y/o identificamos como "Fa". (Ver Figura 2.5.B. y 2.5.C.)

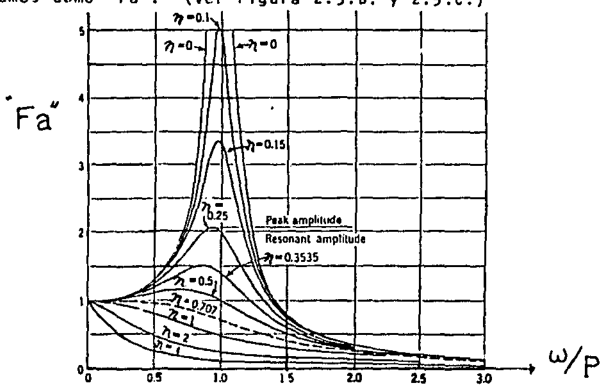


Figura 2.5.B.

De la Figura 2.5.B. se aprecia que el valor máximo de Fa no se alcanza en $\omega/p = 1$. Entonces para encontrar el valor máximo hacemos:

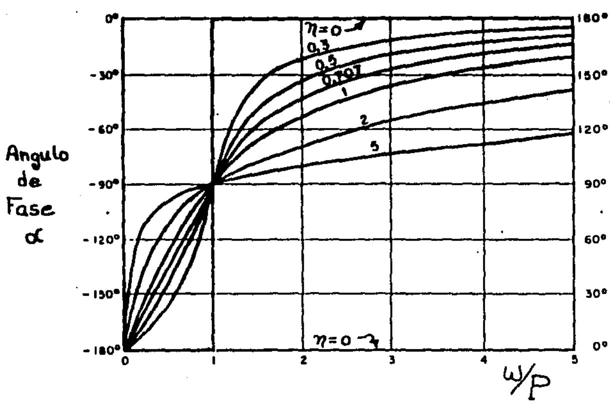
Derivamos $d\, Fa/d\omega = o$ y reducimos términos;

$$1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2 = 2\left(\frac{n}{nc}\right)^2$$

El valor máximo de Fa se alcanza para:

$$\Omega = \sqrt{1 - 2(\eta)^2} \qquad \text{ec.2.5.2.}$$

Pero se verifica que para $\frac{n}{nc} \rightarrow 0$, cuando $\omega/_p \rightarrow 1$.



El valor de $\Omega = \sqrt{1 - 2\eta^2}$ será siempre menor y a lo mucho - igual a uno. Despejando η, el Fa max. es:

$$Fa\ max = \frac{1}{\sqrt{[1 - \Omega^2]^2 + 4\left[\frac{1 - \Omega^2}{2}\right]\Omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega^2}} \quad ec.2.5.3.$$

Cuando $\omega = P$, sucede que $^{\omega}/p = 1$, por lo que

$$Fa\ max = \frac{1}{\sqrt{[1-\left(\frac{\omega}{p}\right)^2]^2 + 4\left(\frac{n}{nc}{}^2\right)\left(\frac{\omega}{p}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{4\left(\frac{n}{nc}\right)^2}} = \frac{1}{2\eta}$$

2.6. RESONANCIA

Respuesta resonante.

De la figura 2.5.8 se muestra la variación del factor de ampli ficación puede observarse que la respuesta estacionaria del pi co ocurre para valores de ω/p cercanos a la unidad en sistemas con poco amoriguamiento. Al igual que el sistema no amortigua do, la situación de considencia de la frecuencia forzada con la natural del sistema se llama Resonancia ($\omega = p$).

La expresión 2.5.3. el factor de ampliación se sujeta como una función de la relación de frecuencia ($\Omega = \omega/p$). Y en función del factor de amortiguamiento quedará:

Partiendo de la ecuación 2.5.2. resulta:

$$Fa = \frac{1}{2\sqrt{1 - \eta^2}}$$

Para tener una idea más completa de la naturaleza de esta res puesta resonante es necesario considerar la ecuación general de respuesta.

$$x(t) = e^{-\eta p t}(A \cos P_D t + B \operatorname{sen} P_D t) + \frac{F}{k}\ \frac{(1-\Omega^2)\cos \omega t + 2\eta\Omega \operatorname{sen}\omega t}{\sqrt{[1-\Omega^2]^2 + (2\eta\Omega)^2}}$$

Para el caso de Resonancia ($\omega = p$), $Fa = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}$, entonces:

$$x(t) = e^{-\eta pt}(A \text{ sen } P_D t + B\cos P_D t) + \frac{F}{k}\frac{\cos \omega t}{2\eta}$$

Por lo que $B = \frac{F}{k}\frac{1}{2\eta}$; $A = \frac{F}{k}\frac{1}{2\eta\sqrt{1-\eta^2}}$; para $x=x_0$ y $\dot{x}=\dot{x}_0$

De tal forma que con ella la solución queda como sigue:

$$x(t) = \frac{1}{2\eta}\frac{F}{k}[e^{-\eta pt}(\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \text{ sen } P_D t + \cos P_D t) - \cos pt]$$

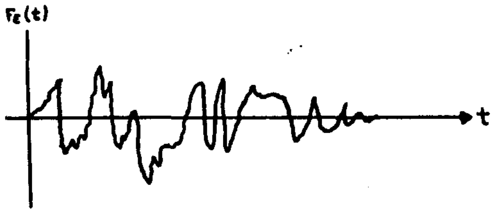
Si η es muy pequeña, entonces $P_D \doteq P$

$$x(t) = \frac{1}{2\eta}\frac{F}{k}[(e^{-\eta pt} - 1) \cos pt]$$

2.7. RESPUESTA IMPULSIVA

En los casos tratados anteriormente se han considerado fuerzas excitadoras senoidales o cosenoidales (armónicas). Sin embargo no todas las fuerzas que excitan a la masa de un sistema vibratorio son de esta naturaleza. Un tipo muy importante de fuerza excitadora es cuando ella varía sin seguir ninguna uniformidad respecto al tiempo, a tales fuerzas les llamaremos fuerzas excitadoras cualquiera. Es decir arbitrarias.

Figura 2.7.A



Veremos este caso desde su mayor simplicidad, mediante su respuesta impulsiva.

Para calcular la respuesta se puede hacer el siguiente desarrollo de carácter general. Una carga impulsiva es una carga que se aplica en un período corto. El impulso se define como el producto de la fuerza por el tiempo de su duración. Sea por ejemplo el impulso de la fuerza $F(\tau)$ señalado en la Figura 2.7.B. en el tiempo τ y durante un intervalo $d\tau$

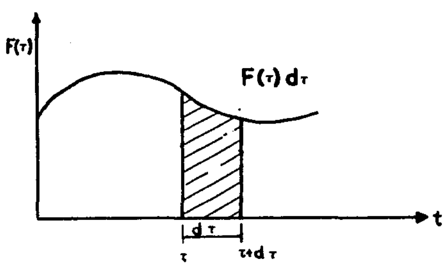


Figura 2.7.B.

Este impulso al actuar en un cuerpo de masa produce un -- cambio en la velocidad que se puede determinar por las leyes de Newton como

$$\frac{m\,d\upsilon}{d\tau} = F(\tau), \quad \upsilon = \text{velocidad}$$

$$d\upsilon = \frac{F(\tau)\,d\tau}{m}, \quad d\upsilon = \text{velocidad incremental}$$

Este cambio de velocidad se puede sustituir en la ecuación

$$y(t) = y_o \cos Pt + \frac{V_o}{P} \operatorname{sen} Pt$$

Si V_o = velocidad inicial y $y_o = o$, en el tiempo

$$dy(t) = \frac{F(\tau)\,d\tau}{m\,p} \operatorname{sen} P\,(t - \tau)$$

Ahora la carga se puede tratar como una serie de impulsos cortos o sucesivos intervalos $d\tau$, produciendo cada uno de ellos su propia respuesta diferencial en el tiempo t.

El desplazamiento total en el tiempo t está dado por:

$$y(t) = \frac{1}{mp} \int_o^t F(\tau) \operatorname{sen} P\,(t - \tau)\,d\tau \qquad \text{ec.2.7.1.}$$

Esta integral es conocida como integral de Duhamel.

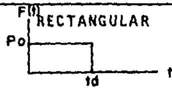
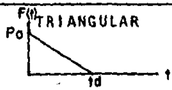
Para incluir las condiciones iniciales del problema basta con expresar la ecuación de la siguiente forma

$$y(t) = y_o \cos Pt + \frac{V_o}{P} \operatorname{sen} Pt + \frac{1}{mp} \int_o^t F(\tau) \operatorname{sen} P\,(t-\tau)\,d\tau$$

ec.2.7.2.

Algunos problemas de dinámica estructural donde exista la acción de una fuerza excitadora de comportamiento arbitrario se analizarón por medio de la solución de la integral de Duhamel. Se puede apreciar en la Tabla 2.7.1. tres casos generales comunes.

Tabla 2.7.1

CASO DE FUERZA	SOLUCION DE LA INTEGRAL DE DUHAMEL
CONSTANTE 	$y(t) = \frac{P_o}{K}\,[1 - \cos Pt]$
RECTANGULAR 	$y(t) = \frac{P_o}{K}\,[1 - \cos Pt]$ si $t < td$ $y(t) = \frac{P_o}{K}\,[\cos P(t-td) - \cos Pt]$ si $t > td$
TRIANGULAR 	$y(t) = \frac{P_o}{K}\left(1 - \cos Pt - \frac{t}{td} + \frac{\operatorname{sen} Pt}{Ptd}\right)$ si $t < td$ $y(t) = \frac{P_o}{K}\left[-\cos Pt + \frac{\operatorname{sen} P\,t}{P\,td}\right]$ si $t > td$

2.8. EXCITACION ARBITRARIA NO AMORTIGUADA

En muchos casos prácticos la función de carga aplicada es conocida únicamente en forma experimental, tal como es en el caso de movimientos sísmicos, entonces la respuesta debe evaluarse numéricamente, para ello conviene establecer la integral de Duhamel de la siguiente manera:

$$y(t) = \operatorname{sen} Pt\,\frac{1}{mp}\int_0^t F(\tau)\cos P\tau\,d\tau - \cos Pt\,\frac{1}{mp}\int_0^t F(\tau)\operatorname{sen} P\tau\,d\tau$$

o bien

$$y(t) = \left\{A(t)\operatorname{sen} p\,t - B(t)\cos pt\right\}/mp$$

donde

$$A(t) = \int_0^t F(\tau)\ \cos P\tau\ d\tau \qquad 2.8.1$$

$$B(t) = \int_0^t F(\tau)\ \text{sen}\ P\tau\ d\tau \qquad 2.8.2$$

Se pueden emplear diversos métodos de integración numérica para estas integrales, sin embargo, los más usuales son los de la suma simple de la regla trapecial y la regla de simpson. Con estos métodos lo que se hace es aproximar la integral por sumas del área bajo curva de la función; por conveniencia se emplean intervalos iguales de tiempo.

La solución incremental de la ecuación 2.8.1 y 2.8.2 es:

$$A(t_i) = A(t_{i-1}) + F(t_{i-1}) - t_{i-1}\ \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i}(\text{sen}\,\omega t_i - \text{sen}\,\omega t_{i-1})/\omega + \frac{\Delta F_i}{\omega^2\ t_i}$$

$$[\cos\omega t_i - \cos\omega t_{i-1} + \omega(t_i\ \text{sen}\,\omega t\ -\ t_{i-1}\ \text{sen}\,\omega t_{i-1})]$$

$$B(t_i) = B(t_{i-1}) + F(t_{i-1}) - t_{i-1}\ \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i}(\cos\omega t_{i-1} - \cos\omega t_i)/\omega + \frac{\Delta F_i}{\omega^2\ t_i}$$

$$[\text{sen}\,\omega t_i - \text{sen}\,\omega t_{i-1} - \omega(t_i\ \cos\omega t_i - t_{i-1}\ \cos\omega t_{i-1})]$$

REGLA TRAPECIAL

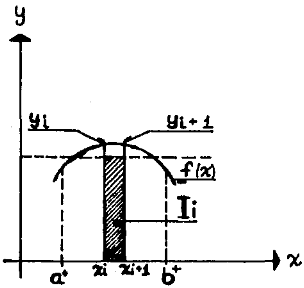


Fig. 2.8.A.

De la Figura 2.8.A. $I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$

y $x_{i+1} - x_i = h$

Si $h \to 0$ $\quad I_i \doteq \frac{1}{2}\, h\,(y_i + y_{i+1}),\ldots$

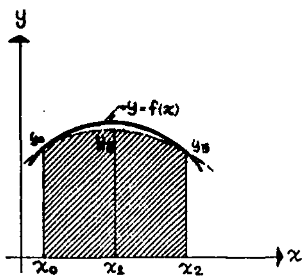
(Area de un Trapecio). Tomando en cuenta que $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Entonces el área total I es la suma de áreas parciales I_i.

O sea $I = \sum_{i=1}^{n-1} I_i$ lo que conduce a:

$$I \doteq \frac{h}{2}\left[y_1 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} Y_i\right]$$

REGLA DE SIMPSON



Para obtener un valor aproximado de la integral de F(x) en el intervalo $x_0 \leqslant x \leqslant x_n$, se parte de la interpolación de Newton.

$$F(x) \doteq y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{k}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots + \binom{k}{j}\Delta^j y_0$$

o bien

$$F(x) \doteq y_0 + K\,\Delta y_0 + \frac{K(K-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{K(K-1)(K-2)}{31}\Delta^3 y_0 + \ldots + \binom{k}{j}\Delta^j y_0$$

De la figura se obtiene que $\int_{x_0}^{x_2} F(x) \doteq \int_0^n$ (Interpolación de Newton)

Integrando se obtiene

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\, dx = h\,[^n y_0 + \frac{n^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{4}\right)\Delta^2 y_0] = h[2y_0 + \frac{4}{2}\Delta y_0 + (\frac{8}{6} - \frac{4}{4})\Delta^2 y_0]$$

Si $\Delta y_0 = y_1 - y_0$ y $\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$

$$I_i \doteq \int_{x_0}^{x_n} F(x)\, dx = \frac{h}{3} \quad (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Por lo tanto el área total será $I = \sum_{i=1}^{n-1} I_i$ con lo cual tenemos que

$$I \doteq \frac{h}{3}\,[y_0 + y_n + 4\,\Sigma \begin{array}{l}\text{ordenadas de}\\ \text{orden impar}\end{array} + 2\,\Sigma \begin{array}{l}\text{ordenadas de}\\ \text{orden par}\end{array}]$$

ahora bien si

$$A(t) \doteq \Delta\tau \;\frac{1}{a}\left[\overset{\bar{A}}{\underset{a}{\Sigma}}\ (t)\right]$$

donde para la regla trapecial en forma incremental se obtiene

$$a=2,\ \overset{A}{\underset{2}{\Sigma}}\ (t) = \overset{A}{\underset{2}{\Sigma}}\ (t - \Delta\tau) + \frac{[F(t - \Delta\tau)\cos P\ (t - \Delta\tau) +}{y_i} \frac{F(t)\cos P\ t]}{y_{i-1}}$$

Siendo $\overset{A}{\underset{2}{\Sigma}}\ (t - \Delta\tau)$ el valor de la suma determinada en el tiempo precedente $t - \Delta\tau$

Para la regla de Simpson.

$$a=3\ ,\qquad \overset{\bar{A}}{\underset{3}{\Sigma}}(t)=\overset{\bar{A}}{\underset{3}{\Sigma}}(t-2\Delta\tau)+\ [\underbrace{F(t-2\Delta\tau)\cos P(t-2\Delta\tau)}_{y_o}+\underbrace{4F(t-\Delta\tau)\cos P(t-\Delta\tau)}_{4y_i}$$

$$+\underbrace{F(t)\cos P\ t}_{y_2}\ ]$$

con $\overset{\bar{A}}{\underset{3}{\Sigma}}(t-2\Delta\tau)$ igual al valor de la suma en el tiempo precedente $t-2\Delta\tau$

De manera análoga

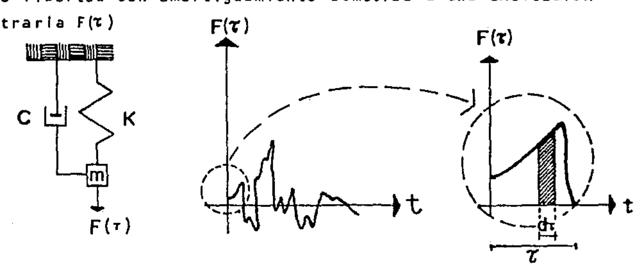
$$B\ (t)\doteq\Delta\tau\ \frac{1}{a}\left[\ \overset{\bar{B}}{\underset{a}{\Sigma}}\ (t)\right]$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación que da el valor de la respuesta dinámica se tiene:

$$x(t)=\frac{\Delta\tau}{mp}\ \frac{1}{a}\left[\ \overset{\bar{A}}{\underset{a}{\Sigma}}\ (t)\ \text{sen}\ pt-\overset{\bar{B}}{\underset{a}{\Sigma}}\ (t)\cos\ pt\right]$$

2.9. EXCITACION ARBITRARIA AMORTIGUADA

Considérese la ecuación de movimiento para sistemas de un grado de libertad con amortiguamiento sometido a una excitación arbitraria $F(\tau)$



Su ecuación de equilibrio dinámico es

$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F(\tau)$

Dividiendo esta ecuación entre m, se obtiene que

$\ddot{x} + 2\,n\,\dot{x} + p^2\,x = q\,(t)$, donde $q\,(t) = \frac{F(\tau)}{m}$

En cualquier instante τ se puede calcular el impulso incremental $qd\tau$, representado por cada banda $d\tau$. Este impulso - - transmite a cada unidad de masa un incremento instantáneo de velocidad (velocidad incremental) igual a:

$d\dot{x} = q\,d\tau$

Al tratar este incremento de velocidad como si fuera una velocidad en el instante τ se puede concluir que el desplazamiento incremental a un tiempo dado es:

$$dx = e^{-\eta p(t-\tau)}\,\frac{q_{d\tau}}{p_D}\,\text{sen}\,p_D\,(t-\tau)$$

Y de aquí se obtiene que

$$x = \frac{e^{-\eta pt}}{p_D}\int_0^t e^{-\eta p\tau} q\,\text{sen}\,p_D\,(t-\tau)\,d\tau \qquad \text{ec.2.9.1}$$

o bien

$$x = \frac{1}{mp_D}\int_0^t F(\tau)\,e^{-\eta p(t-\tau)}\,\text{sen}\,p_D(t-\tau)\,d\tau \qquad \text{ec.2.9.2}$$

(Integral de Duhamel)

si $x = \dot{x} = o$ para $t = o$

$$x = e^{-\eta t}[x_o \cos P_D t + \frac{\dot{x}+\eta x_o}{P_D} \operatorname{sen} P_D t + \frac{1}{mPd}\int_o^t e^{\eta\tau} F(\tau) \operatorname{sen} P_D (t-\tau)\, d\tau]$$

Esta ecuación puede escribirse como:

$$x(t) = [A(t) \operatorname{sen} P_D t - B(t) \cos P_D t]/P_D m$$

donde

$$A(t) = \int_o^t F(\tau) \frac{e^{\eta P \tau}}{e^{\eta P t}} \cos P_D \tau \; d\tau$$

$$B(t) = \int_o^t F(\tau) \frac{e^{\eta P \tau}}{e^{\eta P t}} \operatorname{sen} P_D \tau \; d\tau$$

Si se cálcula en forma incremental

$$A(t) \doteq \Delta\tau \; \frac{1}{a} \left[\overset{\bar{A}}{\underset{a}{\Sigma}} (t) \right]$$

$$B(t) \doteq \Delta\tau \; \frac{1}{a} \left[\overset{\bar{B}}{\underset{b}{\Sigma}} (t) \right]$$

Con la regla trapecial $(a = 2)$

$$\overset{\bar{A}}{\underset{2}{\Sigma}} (t) = [\overset{A}{\underset{2}{\Sigma}} (t-\Delta\tau) + F(t-\Delta\tau) \cos P_D (t-\Delta\tau)] \exp(-\eta P \Delta\tau) + F(t) \cos P_D t$$

Con la regla Simpson (a = 3)

$$\overset{\bar{A}}{\underset{3}{\Sigma}}(t)=[\overset{A}{\underset{2}{\Sigma}}(t-2\Delta\tau)+F(t-2\Delta\tau)\cos P_D(t-2\Delta\tau)]\exp(-\eta p2\Delta\tau)+4F(t-\Delta\tau)$$

$$\cos P_D(t-\Delta\tau)\ \exp(-\eta P\Delta\tau)+F(t)\cos P_D\ t$$

La integral B(t) está dada por una expresión similar cambiando las funciones "coseno" por las "seno".

La certeza de la solución numérica depende en gran medida del tamaño del "paso" de integración; en términos generales, este paso debe escogerse pequeño. Un valor que conduce a buenos resultados es el que se obtiene de hacer $\Delta\tau \leq T/10$, donde T es el período del oscilador.

2.10 METODOS DE INTEGRACION DIRECTA

Su nombre se debe a que antes de la integración numérica, no se realiza ninguna transformación en las ecuaciones. En estos métodos se considera que se conoce el desplazamiento, la velocidad y la aceleración, al tiempo t = 0. En la solución, el tiempo total se divide en n intervalos iguales y el esquema de integración empleado conduce a la solución aproximada en los tiempos $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \ldots, t, t+\Delta t, \ldots, T$

a. Método de diferencias centrales.

Si una ecuación diferencial tiene coeficientes constantes, como es la de equilibrio del oscilador, es posible obtener la solución mediante un proceso de integración empleando diferencias finitas; de estos esquemas el más conveniente es el de las centrales, en él se considera que:

$$\ddot{x}_t = \frac{1}{\Delta\tau^2}(x_{t-\Delta\tau} - 2x_t + x_{t+\Delta\tau})$$

$$\dot{x}_t = \frac{1}{2\Delta\tau}\left(-x_{t-\Delta\tau} + x_{t+\Delta\tau}\right)$$

El desplazamiento en el tiempo $t+\Delta\tau$ se obtiene de la ecuación

$$m\ddot{x}_t + c\dot{x}_t + kx_t = F(\tau)_t \qquad \text{ec.210.1}$$

Al sustituir el valor de las ecuaciones para $\ddot{x}_t$ y $\dot{x}_t$ resulta

$$\left(\frac{1}{\Delta\tau^2}m + \frac{1}{2\Delta\tau}c\right)x_{t+\Delta\tau} = F(\tau)_t - \left(k - \frac{2}{\Delta\tau^2}m\right)x_t$$
$$- \left(\frac{1}{\Delta\tau^2}m - \frac{1}{2\Delta\tau}c\right)x_{t-\Delta\tau}$$

de donde se puede obtener el valor de $x_{t+\Delta\tau}$.

La obtención de la solución $x_{t+\Delta\tau}$ se base en establecer la condición de equilibrio en el tiempo t, esto es, $x_{t+\Delta\tau}$ se calcula empleando la ecuación (2.10.1), por esta razón el procedimiento de integración se conoce como "*explícito*". Los métodos que emplean la ecuación de equilibrio en el tiempo $t+\Delta\tau$, se denominan "implícitos ".

Para aplicar este método los pasos a seguir son los siguientes:

1. Inicializar x, $\dot{x}$ y $\ddot{x}$. Conocer x_0, $\dot{x}_0$ y $\ddot{x}_0$

2. Seleccionar $\Delta\tau \leq \Delta\tau_{\text{crítico}}$

3. Calcular la carga efectiva en el tiempo t

$$\hat{F}(\tau)_t = F(\tau)_t - (k - a_2 m)x_t - (a_0 m - a_1 c)x_{t-\Delta\tau}$$

con $a_0 = \dfrac{1}{\Delta\tau^2}$; $a_1 = \dfrac{1}{2\Delta\tau}$; $a_2 = 2a_0$

4. Obtener el desplazamiento en el tiempo $t + \Delta\tau$

$$x_{t+\Delta\tau} = \frac{\hat{F}(\tau)_t}{\left[\frac{m}{(\Delta\tau)^2} + \frac{c}{2\Delta\tau}\right]} = \frac{\hat{F}(\tau)_t}{[a_o m + a_1 c]}$$

5. Si se requiere obtener la aceleración y velocidad en el tiempo t.

$$\ddot{x}_t = a_o(x_{t-\Delta\tau} - 2x_t + x_{t+\Delta\tau})$$

$$\dot{x}_t = a_1(-x_{t-\Delta\tau} + x_{t+\Delta\tau})$$

Si el sistema no está amortiguado, $c = 0$ y el problema se reduce:

$$\left(\frac{1}{\Delta\tau^2} m\right)x_{t+\Delta\tau} = \hat{F}_t(\tau)$$

con

$$\hat{F}(\tau)_t = F(\tau)_t - (k - a_2 m)x_t - \left(\frac{1}{\Delta\tau^2} m\right) x_{t-\Delta\tau}$$

b. Método de Houbolt

En este método se emplea un esquema de diferencias finitas para calcular la aceleración y velocidad en función de los desplazamientos; así, se tiene que

$$\ddot{x}_{t+\Delta\tau} = \frac{1}{\Delta\tau^2}(2x_{t+\Delta\tau} - 5x_t + 4x_{t-\Delta\tau} - x_{t-2\Delta\tau})$$

$$\dot{x}_{t+\Delta\tau} = \frac{1}{6\Delta\tau}(11x_{t+\Delta\tau} - 18x_t + 9x_{t-\Delta\tau} - 2x_{t-2\Delta\tau})$$

Para obtener la solución en el tiempo $t + \Delta\tau$, se considera el equilibrio en el tiempo $t + \Delta\tau$

$$m\ddot{x}_{t+\Delta\tau} + c\dot{x}_{t+\Delta\tau} + kx_{t+\Delta\tau} = F(\tau)_{t+\Delta\tau}$$

Al sustituir la ecuación para $\ddot{x}_{t+\Delta\tau}$ y $\dot{x}_{t+\Delta\tau}$ se obtiene:

$$\left(\frac{2}{\Delta\tau^2} m + \frac{11}{6\Delta\tau} c + k\right)x_{t+\Delta\tau} = F(\tau)_{t+\Delta\tau} + \left(\frac{5}{\Delta\tau^2} m + \frac{3}{\Delta\tau} c\right)x_t -$$

$$- \left(\frac{4}{\Delta\tau^2} m + \frac{3}{2\Delta\tau} c\right)x_{t-\Delta\tau} + \left(\frac{1}{\Delta\tau^2} m + \frac{1}{3\Delta\tau}\right)x_{t-2\Delta\tau}$$

Para aplicar el método de Houbolt los pasos son los siguientes:

1. Inicializar x, $\dot{x}$ y $\ddot{x}$. Conocer x_o, $\dot{x}_o$ y $\ddot{x}_o$

2. Seleccionar el incremento de tiempo $\Delta\tau$ y calcular las - - constantes

$$a_o = \frac{2}{\Delta\tau 2};\ a_1 = \frac{11}{6\Delta\tau};\ a_2 = \frac{5}{\Delta\tau^2};\ a_3 = \frac{3}{\Delta\tau};\ a_4 = -2a_o$$

$$a_5 = \frac{-a_3}{2};\ a_6 = \frac{a_o}{2};\ a_7 = \frac{a_3}{9}$$

3. Calcular la carga efectiva en el tiempo $t + \Delta\tau$

$$\hat{F}(\tau)_{t+\Delta\tau} = F(\tau)_{t+\Delta\tau} + m(a_2x_t + a_4x_{t-\Delta\tau} + a_6x_{t-2\Delta\tau})$$

$$+ c(a_3x_t + a_5x_{t-\Delta\tau}) + a_7x_{t-2\Delta\tau}$$

4. Obtener el desplazamiento en $t + \Delta\tau$

$$x_{t+\Delta\tau} = \frac{\hat{F}(\tau)_{t+\Delta\tau}}{[\frac{2m}{(\Delta\tau)^2} + \frac{11c}{6\Delta\tau} + K]} = \frac{F(\tau)_{t+\Delta\tau}}{[a_0 m + a_1 c + k]}$$

5. Si se requiere, calcular la aceleración y la velocidad en el timepo $t + \Delta\tau$

$$\ddot{x}_{t+\Delta\tau} = a_0 x_{t+\Delta\tau} - a_2 x_t - a_4 x_{t-\Delta\tau} - a_6 x_{t-2\Delta\tau}$$

$$\dot{x}_{t+\Delta\tau} = a_1 x_{t+\Delta\tau} - a_3 x_t - a_5 x_{t-\Delta\tau} - a_7 x_{t-2\Delta\tau}$$

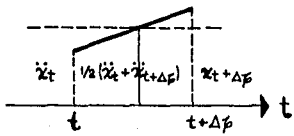
c. Método de Newmark

En este método se supone que la velocidad y el desplazamiento están dados por

$$\dot{x}_{t+\Delta\tau} = \dot{x}_t + [(1-\delta)\ddot{x}_t + \delta\ddot{x}_{t+\Delta\tau}]\Delta\tau \qquad \text{e.c.2.10.2}$$

$$x_{t+\Delta\tau} = x_t + \dot{x}_t\Delta\tau + [(\tfrac{1}{2} - \alpha)\ddot{x}_t + \alpha\ddot{x}_{t+\Delta\tau}]\Delta\tau^2 \qquad \text{e.c.2.10.3}$$

donde α y δ son parámetros que se obtienen de estudios de convergencia y estabilidad. Si se emplea $\alpha = 1/6$ y $\delta = 1/2$, el esquema corresponde al método de aceleración lineal. Si se emplea $\alpha = 1/4$ y $\delta = 1/2$ se obtiene el esquema de aceleración promedio constante, que es el que originalmente propuso Newmark, y corresponde a lo que se ilustra en la figura



Para conocer el desplazamiento, la velocidad y aceleración en el tiempo $t + \Delta\tau$ se plantea la ecuación de equilibrio en el tiempo $t + \Delta\tau$

$$m\,\ddot{x}_{t+\Delta\tau} + c\,\dot{x}_{t+\Delta\tau} + Kx_{t+\Delta\tau} = F(\tau)_{t+\Delta\tau} \qquad \text{e.c. 2.10.4}$$

De la ec.2.10.3 se obtiene $\ddot{x}_{t+\Delta\tau}$ en función de $x_{t+\Delta\tau}$ y sustituye en la ec.2.10.2 con ello se obtienen expresiones para $\ddot{x}_{t+\Delta\tau}$ y $\dot{x}_{t+\Delta\tau}$. Posteriormente se sustituyen esos valores en la ec.2.10.4 para conocer el valor de $x_{t+\Delta\tau}$. Después de eso se podrán obtener con las ecs.2.10.2 y 2.10.3 los valores de $\ddot{x}_{t+\Delta\tau}$ y $\dot{x}_{t+\Delta\tau}$

Los pasos para aplicar el método de Newmark son los siguientes:

1. Inicializar x, $\dot{x}$ y $\ddot{x}$; esto es, conocer x_o, $\dot{x}_o$ y $\ddot{x}_o$
2. Seleccionar el valor de $\Delta\tau$, el de los parámetros α y δ, y calcular las constantes de integración.

$$\delta \leq 0.5 \;;\quad \alpha \geq 0.25 \quad (0.5 + \delta)^2$$

$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta \tau^2}$; $a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta \tau}$; $a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta \tau}$; $a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$; $a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1$

$a_5 = \frac{\Delta \tau}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right)$; $a_6 = \Delta \tau (1 - \delta)$ y $a_7 = \delta \Delta \tau$

3. Calcular la carga efectiva en el tiempo $t + \Delta \tau$

$$\hat{F}(\tau)_{t+\Delta\tau} = F(\tau)_{t+\Delta\tau} + m(a_0 \, x_t + a_2 \, \dot{x}_t + a_3 \, \ddot{x}_t) + C(a_1 \, x_t + a_4 \, \dot{x}_t + a_5 \, \ddot{x}_t)$$

4. Obtiene el desplazamiento para $t + \Delta \tau$.

$$x_{t+\Delta\tau} = \frac{\hat{F}(\tau)_{t+\Delta\tau}}{\frac{m}{\alpha(\Delta\tau)^2} + \frac{\delta C}{\alpha \Delta \tau} + K} = \frac{\hat{F}(\tau)_{t+\Delta\tau}}{a_0 m + a_1 c + k}$$

5. Calcular la aceleración y la velocidad en el tiempo $t + \Delta \tau$.

$$\ddot{x}_{t+\Delta\tau} = a_0 \, (x_{t+\Delta\tau} - x_t) - a_2 \, \dot{x}_t - a_3 \, \ddot{x}_t$$

$$\dot{x}_{t+\Delta\tau} = \dot{x}_t + a_6 \, \ddot{x} + a_7 \, \ddot{x}_{t+\Delta\tau}$$

3. SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD CON COMPORTAMIENTO LINEAL

3.1 MATRIZ DE MASAS Y RIGIDECES

3.1.1 Matriz de Masas

Los métodos descritos en la sección anterior pueden ser usados para evaluar la respuesta de una estructura de un grado de libertad* ante cualquier movimiento de excitación. Los resultados pueden ser obtenidos en la forma de una historia completa de tiempo de las feurzas o desplazamiento, por medio de una evaluación numérica de la integral de Duhamel. Sin embargo, los resultados del análisis pueden ser representativos de la conducta de la estructura solamente si sus movimientos pueden ser definidos confiablemente por un desplazamiento simple. Esto se puede lograr si concentramos las masas en un punyo simple el cual esté obligado a moverse en una dirección, si la disposición de la estructura es tal que permite solamente un modo simple de desplazamiento. En general, la masa concentrada del sistema estará distribuida por toda la estructura y será capaz de desplazarse en muchos modos independientes.

A este proceso de simplificación se le conoce como discretización de la masa de la estructura. La masa que se utiliza en el análisis de un edificio incluye todas las cargas vivas y muertas, como el peso propio de los elementos estructurales y no estructurales, más aquellos valores probables de las cargas vivas móviles o variables.

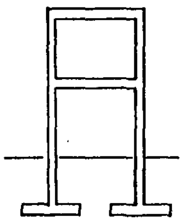
Así por razones en primer lugar de reducción de los procesos operacionales no se analizan estructuras reales sino estructuras ideales. La idealización consiste en discretizar sus masas. (Ver Figuras 3.1.A y 3.1.B)

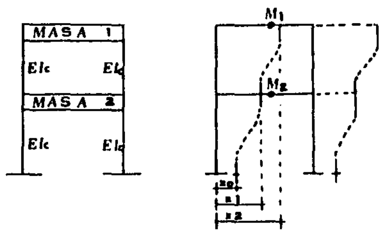
---

*Grado de libertad, es una masa concentrada, expresada en forma de coordenada independiente y obligada a moverse en una dirección, si la disposición de la estructura es tal que permite solamente un modo simple de desplazamiento.

Una vez discretizada la masa, estamos en presencia de sis temas de un número finito de grados de libertad.

La matriz de masas es diagonal solamente cuando elegimos como coordenadas cantidades proporcionales a los desplazamientos del centroide de cada masa y las rotaciones de la masa con respecto a sus ejes de inercia principales. (Ver figura 3.1.B.)





$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}$$

Estructura real. **Fig. 3.1.A.**

Estructura idealizada. **Fig. 3.1.B.**

3.1.2 Matriz de Rigideces

La matriz k se le llama usualmente matriz de rigideces del sistema. Pero no es la matriz de rigidez que se conoce para marcos la cual relaciona los desplazamientos angulares y lineales con los momentos y las fuerzas aplicadas en los nudos.

$$\begin{bmatrix} M \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \delta \end{bmatrix}$$

o sea

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ F_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta 1 \end{bmatrix}$$

La matriz que aquí resultó es la llamada matriz de rigideces lineal la cual la dividimos en cuatro matrices.

$[K_{11}]$ son los momentos que producen giros unitarios

$[K_{12}]$ son los momentos que producen desplazamientos unitarios

$[K_{21}]$ son las fuerzas que producen giros unitarios

$[K_{22}]$ son las fuerzas que producen desplazamientos unitarios

con estos conceptos podemos escribir que

$$[M] = [K_{11}]\ [\theta] + [K_{12}]\ [\delta]$$

$$[F] = [K_{21}]\ [\theta] + [K_{22}]\ [\delta]$$

Si se considera que no se aplican momentos en los nudos se ob--tiene:

$$[F] = -[K_{21}]\ [K_{11}]^{-1}\ [K_{12}]\ [\delta] + [K_{22}]\ [\delta]$$

Factorizando $[\delta]$

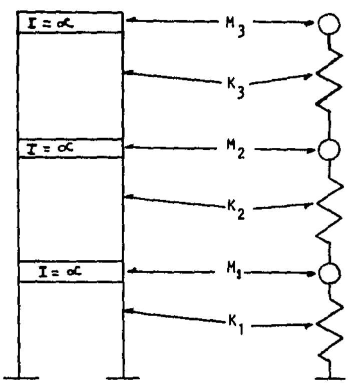
$$[F] = \left([K_{22}] - [K_{21}]\ [K_{11}]^{-1}\ [K_{12}]\right)\ [\delta] \qquad \text{ec.3.1.1}$$

Cuando la inercia de las trabes de un marco se considera muy grande con respecto a la de las columnas. Es decir rigidez infinita, se reduce el sistema de 6 a 3 grados de libertad ya que los giros de las trabes se hacen cero. Por lo tanto la - - ecuación 3.1.1 se reduce a:

$$[F] = [K_{22}] [\delta] \qquad \text{ec.3.1.2}$$

Cuando no se hace la idealización de marco rígido para - resolver el problema de vibración de un marco, la matriz de rigideces se obtienen de la expresión 3.1.1 y suele llamarse a la solución del problema como solución exacta en sistemas discre-- tos. Mientras cualquier marco en que se realice la considera-- ción de inercia infinita en la trabe, se puede idealizar como - un sistema de tantos resortes y masas como columnas y pisos tenga el marco.

Se muestra en la figura siguiente:



Matriz de Rigidez Lineal correspondiente del sistema - es de la forma

$$K = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix}$$

3.2 VIBRACION LIBRE NO AMORTIGUADA

La ecuación general de equilibrio dinámico de cualquier sistema de varios grados de libertad suele escribirse como:

$$F_I + F_D + F_S + P(t) \qquad \text{ec.3.2.1}$$

donde

F_I = Fuerza de Inercia

F_D = Fuerza Disipadora

F_S = Fuerza Restauradora

$P(t)$ = Fuerza Excitadora

Cuando se llega al caso de que F_D y $P(t)$ se anulen - - - ($F_D = P(t) = 0$) entonces la estructura oscila libremente. Este movimiento es conocido como vibración libre no amortiguada y la ec.3.2.1 se reduce a:

$$F_I + F_S = 0 \qquad \text{ec.3.2.2}$$

Para sistemas de varios grados de libertad las fuerzas de inercia en la ec.3.2.2 son simplemente:

$$F_I = M\ddot{U} \qquad \text{ec.3.2.3}$$

donde F_I es el vector de fuerzas de inercia, M es la matriz de masas y $\ddot{u}$ es el vector de aceleraciones. En forma matricial se maneja como:

$$\begin{bmatrix} F_{I_1} \\ F_{I_2} \\ \vdots \\ F_{I_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \end{bmatrix}$$

de igual manera la fuerza restauradora es de la forma

$$Fs = Ku \qquad \text{ec.3.2.4}$$

donde Fs es el vector fuerza elásticas, K es la matriz de rigideces y u es el vector de desplazamiento, entonces

$$\begin{bmatrix} Fs_1 \\ Fs_2 \\ \cdot \\ Fs_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdot & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdot & K_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdot & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix}$$

Toda estructura elástica puede vibrar libremente en forma tal - que el desplazamiento de cada una de sus masas con respecto a su posición de equilibrio estático es igual al producto de una función de la posición de la masa considerada por una función del tiempo, que es la misma para todas las masas.

En otras palabras el desplazamiento puede expresarse como:

$$u(t) = Z\,\theta(t) \qquad \text{ec.3.2.5}$$

en forma matricial **u(t) y Z**

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_n \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_n \end{bmatrix}$$

donde z es la matriz de modos naturales, al conjunto de valores z_i se le denominan formas del modo.

derivando 3.2.5 obtenemos que

$$\ddot{u}(t) = Z\,\ddot{\theta}(t)$$

Sustituyendo 3.2.3 y 3.2.4 en 3.2.2 resulta

$$MZ\,\ddot{\theta}(t) + K\,Z\,\theta(t) = 0 \qquad \text{ec.3.2.6}$$

Para la masa m_i el desarrollo de la expresión resulta

$$m_i \; z_i \; \ddot{\theta}(t) + \left(\sum_{i=1}^{n} K_{ij} \; z_i \right) \theta(t) = 0 \qquad \text{ec.3.2.7}$$

dividiendo entre $m_i \; z_i$

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{\sum_{i+1}^{n} K_{ij} \; z_i}{m_i \; z_i} \theta(t) = 0$$

Si $\quad p^2 = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{K_{ij} \; z_i}{m_i \; z_i} \quad$ = frecuencia natural del sistema

entonces la ecuación 3.2.7 se reduce a

$$\ddot{\theta}(t) + p^2 \theta(t) = 0$$

Cambiando de simbología

$$\Phi = \theta \; (t)$$

Por lo tanto

$$\ddot{\Phi} + p^2 \Phi = 0$$

Cuya solución es

$$\Phi = a \text{ sen } p \; (t - \tau) \qquad \text{ec.3.2.8}$$

derivando dos veces

$$\ddot{\Phi} = - p^2 a \text{ sen } p \; (t - \tau) = - p^2 \Phi \qquad \text{ec.3.2.9}$$

En la expresión anterior "a" es la amplitud máxima del movimiento vibratorio. Si sustituimos ec.3.2.9 en 3.2.6 nos queda:

$$(K - P^2 M) Z = 0 \qquad \text{ec.3.2.10}$$

Que es un sistema de ecuaciones lineales homogéneas; para que existan valores de Z distintos de cero es necesario que el determinante del sistema se anule, esto es

$$\left| K - P^2 M \right| = 0 \qquad \text{ec.3.2.11}$$

3.3 SOLUCION MEDIANTE LA ECUACION CARACTERISTICA

La ecuación 3.2.11 representa un problema de valores característicos. Desarrollando el determinante se tiene una solución algebraica del grado n. En forma matricial nos queda:

$$\begin{vmatrix} (K_1 + K_2) - P^2 m_1 & -K_1 & . & 0 \\ -K_2 & (K_2 + K_3) - P^2 m_2 & . & -K_n \\ . & . & . & . \\ 0 & -K_n & . & K_n - P^2 m_n \end{vmatrix} = 0$$

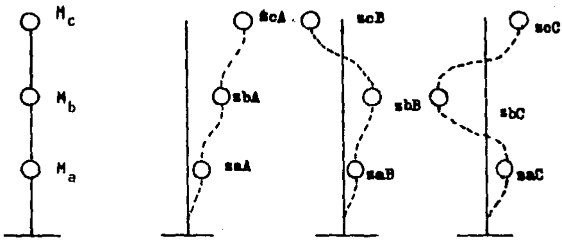
El grado n de la ecuación algebraica viene a ser determinado por el número de masas.

De la teoría de las ecuaciones se sabe que una ecuación tiene tantas raíces como sea su grado. Estas raíces corresponden a las frecuencias cuadradas de los períodos de los modos de vibrar del sistema y son los valores que hacen el determinante igual a cero. Sustituyendo cada una de las n raíces en la expresión 3.2.10 nos resulta las formas de los n modos.

$$Z_j = \begin{bmatrix} z_{1j} \\ z_{2j} \\ z_{ij} \end{bmatrix}$$

i = número de masas

j = número de modos



Modo Z_A	Modo Z_B	Modo Z_C
$P = P_A$	$P = P_B$	$P = P_C$
$T_A = 2\pi/P_A$	$T_B = 2\pi/P_B$	$T_C = 2\pi/P_C$

Un modo de vibrar es entonces, la configuración de las masas que se mueven con igual frecuencia. Y no definen las amplitudes de las vibraciones de las masas, si no las relaciones entre ellas.

3.4 ORTOGONALIDAD Y NORMALIZACION DE LOS MODOS

Los modos de vibrar tienen las siguientes propiedades que son usados para estudios dinámicos de las estructuras

a*) Ortogonalidad con respecto a la matriz de masas

$$Z_j^T M Z_r = 0 \quad si \; j \neq r \qquad ec.3.4.1$$

para cada masa m_i será

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \, Z_{in} \, Z_{im} = 0 \quad si \; n \neq m \qquad ec.3.4.2$$

b*) Ortogonalidad con respecto a la matriz de rigideces

$$Z_j^T K Z_r = 0 \quad si \; j \neq r \qquad ec.3.4.3$$

c) Los modos naturales constituyen un conjunto completo, lo que significa que cualquier configuración de desplazamiento u puede expresarse como una combinación lineal de las $\underline{Z}_i$, de decir como

$$u = \sum_j a_j \, Z_j$$

---

* Para la comprobación de la ortogonalidad debemos hacer la suposición que la matriz de masas y rigideces sea simétrica. Es obvio que la matriz de masas lo sea, pero la matriz de Rigideces se hace mediante la consideración del teorema de Maxwell.

El producto $Z_j^T MZ_j$ es igual a una constante orbitraria cuyo valor depende de la escala a la que se tome cada modo. Si dicha constante es obligada a tomar el valor de la unidad, modificando la escala del modo, se dice que se ha normalizado el modo con respecto a la masa.

La conversión usada para normalizar los modos consiste en cumplir la siguiente ecuación.

$$Z_j^T M Z_j = 1 \qquad \text{ec.3.4.4}$$

Para llegar a esta normalización de los modos se puede - emplear la siguiente expresión:

$$Zn_j = Z_j \frac{1}{\sqrt{Z_j^T MZ_j}} \qquad \text{ec.3.4.5}$$

3.5 SOLUCION GENERAL

Al encontrar los modos de vibrar de una estructura, se - están obteniendo soluciones particulares del sistema de ecuaciones diferenciales. La solución general, es la combinación lineal de todas las soluciones particulares. Esto es, que la forma de vibrar de la estructura, es la combinación lineal de todos sus modos.

O sea :

$$\{U\} = [Z] \; S(t) \qquad \text{ec.3.5.1}$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ . \\ . \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{21} & z_{31} & . & z_{n1} \\ z_{12} & z_{22} & z_{32} & . & z_{n2} \\ z_{13} & z_{23} & z_{33} & . & z_{n3} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ z_{1n} & z_{2n} & z_{3n} & . & z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \cos P_1 t \\ C_2 \cos P_2 t \\ C_3 \cos P_3 t \\ . \\ . \\ C_n \cos P_n t \end{bmatrix}$$

Donde

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_i^T = z_{1i} & z_{2i} & . & . & z_{ni} \\ Z_j^T = z_{1j} & z_{2j} & . & . & z_{nj} \\ . & . & . & . & . \\ Z_n^T = z_{1n} & z_{2n} & . & . & z_{nn} \end{bmatrix}$$

Procedimiento:

Este método supone conocida las condiciones iniciales en el tiempo $t = 0$.

1. Obtener los modos de vibrar normalizadas $[Z]$

2. Obtener las constantes Ci sustituyendo en las condiciones iniciales $t = 0$ y $\{U\} = \{Uo\}$ por medio de la expresión - que en forma matricial es:

$$C_i = [Z]^T \; [M] \; [Uo]$$

para cada masa m_i es

$$C_i = \sum_{n=1}^{u} * {}_{in} \; Uon \, m_n$$

3. Se encuentra la respuesta al movimiento (desplazamiento) mediante la ec.3.5.1

3.6 METODOS NUMERICOS PARA OBTENER MODOS Y FRECUENCIAS DE VIBRAR.

Se puede observar en los puntos tratados anteriormente - que a medida que crece nuestro sistema de varios grados de libertad, aumenta la dificultad en los procedimientos de análisis.

Para ellos se han desarrollado métodos numéricos de aproximaciones sucesivas facilitando el trabajo y obteniendo resultados aceptables en los estudios dinámicos.

Existen varios tipos de métodos numéricos de los cuales - mencionaremos los siguientes*

1. Método de Newmark
2. Método de Holzer
3. Método de iteración inversa
4. Método de Stodola con la matriz de rigideces
5. Método de Jacobi

---

*En caso de que se requieran emplear otros métodos iterativos se recomienda las siguientes bibliografías: I. Martínez, Navarro A. y Ceniceros J. "Dinámica Estructural" Ed. Universitario. Universidad de Zacatecas, 1983, México y Thomson T. "Teoría de Vibraciones". Ed. Pientice/Hall Internacional, 1983.

3.6.1 Método de Newmark

Este método se puede aplicar a cualquier estructura li-- neal con acoplamiento entre las diferentes masas y es aceptable para el cálculo del modo fundamental de vibración (1er. modo) - de las estructuras llamadas sencillas o cercanamente acopladas.

Los pasos en que consiste el método son los siguientes:

a. Suponer una forma para el modo. Es usualmente apro-- piado suponer valores iguales al número de orden del piso.

b. Obtener la fuerza de inercia en cada masa correspon-- diente a la configuración supuesta. Esta fuerza sería MXP^2; co mo se desconoce p^2 se calculan los productos $MX = F/p^2$

c. Con las fuerzas de inercia se calculan las fuerzas -- cortantes en los entrepisos, también divididos entre p^2, es de- cir se calcula V/p^2

d. A partir de las fuerzas cortantes y de la rigideces se obtienen las deformaciones también divididas entre p^2. Esto se representa como $\Delta Y/p^2$

e. Acumulando las deformaciones de entrepiso, determine una nueva configuración de los desplazamiento de las masas Y/p^2

f. Obtener p^2 para cada uno, como los cocientes $X/(Y/p^2)$

Si la configuración de X supuesta (Punto a.) es la correcta se obtendrá el mismo valor de p^2 para cada una de las masas. En caso contrario los valores de X se tendrán que normalizar y repetir el procedimiento. La normalización consiste en hacer que el desplazamiento de la primera masa sea igual a la unidad.

Para calcular la frecuencia se pueden promediar los valores del último ciclo, por medio de la expresión.

$$p^2 = \frac{\Sigma (F/p^2)(Y/p^2)}{\Sigma M(Y/p^2)^2} \qquad \text{ec.3.6.1.1}$$

3.6.2 Método de Holzer

Se empleará este método cuando se requieran encontrar configuraciones modales consecutivas al primer modo. Y se empleará a estructuras sencillamente acopladas.

Los pasos a seguir son:

a. Suponer arbitrariamente un valor de p^2 mayor que el del modo fundamenteal, previamente obtenido por cualquier método.

b. Suponer la amplitud del movimiento X_1 de la primera - masa a partir del apoyo. Conviene suponer un valor unitario. - Esta amplitud supuesta es también igual al desplazamiento ΔX_1 del primer entrepiso.

c. Calcular la fuerza cortante en el primer resorte*

$$V_1 = K_1 \Delta X_1$$

d. Se calculará ahora la fuerza de inercia de la primera masa de la siguiente manera:

$$F_1 = M_1 p^2 X_1$$

e. Satisfaciendo el equilibrio calcular la fuerza cortan te en el segundo resorte.

$$V_2 = V_1 - F_1$$

f. Se obtiene la deformación como

$$\Delta_2 = V_2 / K_2$$

g. Calcular la amplitud del desplazamiento de la segunda masa $X_2 = X_1 + \Delta X_2$ y la fuerza de inercia en la misma

$$F_2 = M_2 p^2 X_2$$

---

*Los resortes son una forma de simbolizar las rigideces de antrepiso K_i, en las representaciones esquemáticas de sistemas de varios grados de libertad.

h. Repetir los pasos (e) a (g) con el tercer resorte y la tercera masa.

i. Continúe el proceso hasta llegar a la última masa.

Si se satisface el equilibrio entre la fuerza cortante del último resorte y la fuerza de inercia de la última masa, entonces la frecuencia escogida y las amplitudes calculadas corresponden a un modo natural de vibración. Por lo general se obtendrá un residuo.

Representando en una gráfica los residuos obtenidos contra los distintos valores de p^2 supuestos, se obtendrá una curva correspondientes a las frecuencias naturales.

Para el análisis de cada modo se tendrá que seguir el procedimiento mencionado, y para reducir el número de iteraciones se acepta una interpolación lineal para tener una mejor aproximación de la frecuencia buscada.

$$\bar{p}^2 = p^2 \frac{\Sigma V X}{\Sigma FX} \qquad \text{ec.3.6.2.1}$$

3.6.3 Método de Iteración Inversa

Este procedimiento es apropiado para resolver problemas de valores característicos mediante operaciones matriciales. Este método esta basado a partir de la siguiente expresión

$$KZ = p^2 MZ$$

Los pasos a seguir son:

a. Suponer un valor arbitrario X de Z, lo que es lo mis mo que suponer un valor arbitrario de p^2 Z.

b. Calcular el valor $X' = M X$

c. Calcular el vector Y resolviendo el sistema de ecuaciones siguientes:

$$K Y = X'$$

d. Si el vector Y es igual al vector X múltiplicado por una constante $1/p^2$, entonces se tiene un forma modal. Si no se cumple la igualdad se tendrá que repetir el método hasta llegar a una aproximación aceptable. Para cada iteración se tendrá que normalizar los valores de Y.

La frecuencia p^2 se calculará de la siguiente forma:

$$p^2 = \frac{Y^T X'}{Y^T M Y}$$

El método sirve también para determinar los modos superiores de vibración. Sólo que para este caso se empleará K' en vez K. Es decir:

$$K' = K - \mu M$$

El valor μ es un valor que elegimos, el cual tendrá que ser muy aproximado a "p^2" del modo correspondiente. Lo que hace que se disminuya el número de iteraciones.

Finalmente en los modos superiores p^2 se calcula

$$p^2 = \mu + \frac{Y^T X'}{Y^T MY}$$

3.6.4 Método de Stodola con la Matriz de Rigideces.

El método Stodola Rigideces es también conocido con el - nombre de Vianello. Su calificativo "rigideces" se debe a la - utilización de la matriz de rigidez de la estructura. Al igual que todos los métodos, parte de la ecuación del equilibrio diná mico. Es decir de;

$$K\ Z - P^2\ MZ = 0$$

Se despeja M Z y se premultiplica por M^{-1}, lo que re-- sulta

$$Z = \frac{1}{P^2}\ M^{-1}\ K\ Z$$

Stodola sugiere para el cálculo del modo más alto.

a. Suponer un vector Zo. premultiplicado por M^{-1} K, o sea

$$Zz = M^{-1}\ K\ Zo$$

b. El resultado obtenido de Zz, se divide cada uno de - sus valores con el primero de ellos de arriba hacia abajo.

c. Los valores obtenidos en el inciso b) se vuelven a - operar en el inciso a) y b). Si la segunda iteración es muy - aproximada a la primera, entonces esta es la solución del modo.

d. Una vez encontrada la solución del modo, esta se normaliza con la expresión 3.4.5 y se obtiene Zn

Dado que el método converge hacia el modo más alto, se - tendrá que encontrar la constante C_i para el cálculo de cada mo do inferior con la siguiente expresión:

$$C_i = Zn^T M Zo$$

donde Zn se refiere al mayor modo normalizado.

Para modos inferiores:

e. Se propone Zo^* para el modo de interés.

f. Se encuentra C_i correspondiente y se encuentra <u>Zó</u> de la siguiente forma:

$$Zó = \{Zo\} - C_i \{Zn\}$$

i = 1, 2, 3, . . . según modo de interés

g. Los Zó no están afectados por el modo n; se hará para cada iteración. Con los valores de Zó se tendrán que seguir los incisos a., b., c. y d..

h. Obtenidos los modos de interés, se calculará la frecuencia cuadrada para cada modo con la ecuación.

$$P_i^2 = \frac{Zn_i^T K Zn_i}{Zn_i^T M Zn_i}$$

---

* Para suponer los valores de Zo , se tendrá que pensar en la configuración del modo de interés. Dando mayor importancia al signo que le corresponsa a cada valor del modo.

3.6.5 Método de Jacobi.

Conocido también como método de diagonalidad por rotaciones sucesivas, este procedimiento permite determinar, simultáneamente, todas las frecuencias y modos de sistemas complejos - "n" grados de libertad, con tiempos de ejecución razonables en las computadoras actuales. Consiste, esencialmente, en diagonalizar la matriz dinámica o su inversa con el objeto de obtener, en la ecuación matricial característica, una serie de expresiones independientes, fáciles de resolver.

Secuencia de Cálculo.

Primero se define la matriz diagonal inferior y superior, de tal manera que se cumpla:

$$L \cdot L' = M \qquad \text{ec.3.6.5.1}$$

$$\overset{L}{\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & . & 0 \\ L_{21} & L_{22} & . & 0 \\ . & . & . & . \\ L_{n1} & L_{n2} & & L_{nn} \end{bmatrix}} \overset{L'}{\begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & . & L_{n1} \\ 0 & L_{22} & . & L_{n2} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & L_{nn} \end{bmatrix}} = \overset{M}{\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & . & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & . & M_{2n} \\ . & . & . & . \\ M_{n1} & M_{n2} & . & M_{nn} \end{bmatrix}}$$

donde M = Matriz de masas

$L_{11} = L_{11}',\ L_{22} = L_{22}',\ \ldots\ L_{nn} = L_{nn}'$

$L_{11}^{2} = M_{11} \quad .: \quad L_{11} = \sqrt{M_{11}}$

$L_{11}' \ L_{21} = M_{12} \ .: \quad L_{21} \qquad M_{12}/L_{11}$

$L_{11}' \ L_{31} = M_{13} \ .: \quad L_{31} = \qquad M_{14}/L_{11}$

En este método, la matriz de masas, puede ser consistente, masa distribuida (sistemas continuos) o bien diagonal, masas concentradas (sistemas discretos).

En seguida se procede a hacer un cambio de coordenadas de acuerdo con:

$$z = L' \left\{ D \right\} \qquad \text{ec. 3.6.5.2}$$

donde $\left\{ D \right\}$ es la función de desplazamiento.

Sustituyendo en la expresión característica $K\{D\} = \omega^2 M\ D$ la ecuación 3.6.5.1 y la 3.6.5.2 nos queda

$$K\ (L')^{-1}\ z = \omega^2\ L\ z$$

por lo que

$$L^{-1}\ K(L')^{-1}\ z = \omega^2\ z$$

Si $G^{*\prime} = L^{-1}\ K(L')^{-1}$ matriz dinámica inversa ec.3.6.5.3

entonces $G^*\ z = \omega^2\ z$, ya que $G^* = G^{-1}$.

por lo tanto $z^{-1}\ G^*\ z = \omega^2$ ec.3.6.5.4

De esta forma, empezaremos con una matriz G^*o y multiplicando por una secuencia de matrices de rotación R_i para $i = 1, 2, 3,,$,, n, como sigue:

$$G_1^* = R_1'\ G_o^{-1}\ R_1$$

$$G_2^* = R_2'\ G_1^{-1}\ R_2 = R_2'\ R_1'\ G_o^{-1}\ R_1$$

etc. y para valores adecuados de R, la matriz G_n^* se convierte en una matriz diagonal, al cabo de n ciclos, donde se obtienen directamente las frecuencias naturales al sustituirla en la -- ecuación 3.6.5.4.

Las formas modales se encuentran todas simultáneamente, dentro de una sola matriz "z", multiplicando entre sí las matrices de rotación.

$$z = R_1\ R_2\ R_3\ \ldots\ R_n = \prod_{i=1}^{n} R_i$$, Π Simboliza una serie de productos

La matriz de rotación o transformación R_i, se escoge de tal forma que en cada ciclo se vayan eliminando los elementos que esten fuera de la diagonal de la matriz dinámica. Es decir R_i se construye reemplazando los términos sen o, - sen o, y cos o en las posiciones rs, sr, rr y ss de la matriz unitaria. Como se indica en la expresión siguiente:

$$R_i = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \text{Columna } r & & & & \text{Columna } s & \\ \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & & \cos 0 & \cdot & -\text{sen } 0 & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \text{sen } 0 & \cdot & \cos 0 & \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{Fila } r \\ \\ \text{Fila } s \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \qquad \text{ec.3.6.5.5}$$

siendo r y s los subíndices del elementos no diagonal que se desea eliminar, y θ es un ángulo de rotación matricial dado por:

$$2\theta = \text{ang tang } \frac{2g^*_{rs}}{g^*_{rr} - g^*_{ss}}$$

en donde g^*_{rs}, g^*_{rr}, g^*_{ss} son los respectivos elementos de la matriz dinámica inversa G* del ciclo anterior.

3.7 VIBRACION LIBRE AMORITGUADA

3.7.1 Matriz de Amortiguamiento

El componente característico de este movimiento, es el efecto de la fuerza disipadora. Y puede ser expresada como el producto de un grupo de coeficientes de influencia del amortiguamiento multiplicados por las velocidades ocasionadas por los desplazamientos, de cada masa concentrada, a través del tiempo. La fuerza disipadora o también fuerza de amortiguamiento, por analogía con la expresión de la fuerza de inercia y elástica puede ser escrita como:

$$F_D = C\,\dot{u}$$

En la cual F_D es el vector de la fuerza de amortiguamiento, $\dot{u}$ es el vector de velocidades y c es la matriz de amortiguamiento.

Ahora la ecuación de equilibrio dinámico puede ser expresada simbólicamente como:

$$F_1 + F_D + F_S = 0 \qquad \text{ec.3.7.1}$$

o bien

$$M\,\ddot{u} + C\,\dot{u} + K\,u = 0 \qquad \text{ec.3.7.2}$$

Si C es proporcional a M o a K, es evidente que se cumpla la condición de ortogonalidad Z_j C Zr = 0. Y se puede expresar según el amortiguamiento de Rayleigh de la forma:

$$C = \delta M + \beta K$$

donde δ y β con constantes. Al aplicar la matriz modal [Z] resulta:

$$[Z]^T C[Z] = \delta [Z]^T M[Z] + \beta [Z]^T K[Z] = \delta I + \beta \Lambda \quad \text{, ec.3.7.3}$$

donde I es una matriz unitaria y Λ es una matriz diagonal de los valores propios.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & & \\ & \omega_2^2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \omega_3^2 \end{bmatrix}$$

Así, sustituyendo la expresión 3.7.3 en la ecuación 3.7.2 obtenemos que para la i-ésima ecuación.

$$\ddot{y} + (\delta + \beta p_i^2)\dot{y}_i + p_i^2 y_i = 0 \qquad \text{ec.3.7.4}$$

y el amortiguamiento modal puede definirse por la ecuación;

$$2 \xi_i p_i = \delta + \beta p_i^2 \qquad \text{ec.3.7.5}$$

por lo tanto

$$\xi_i = \frac{1}{2\, p_i} [\sigma \;,\; \beta p_i] \qquad \text{ec.3.7.6}$$

donde

ξ_i = razón de amortiguamiento para el modo i

3.8 SUPERPOSICION DE REPUESTAS MODALES

Un sistema de N grados de libertad, va a tener N formas de modos de vibrar independientes. Para cualquier forma arbitraria los desplazamientos de la estructura puede ser expresada en términos de las amplitudes de estas formas, tratándolas como coordenadas de desplazamiento generalizadas. Así, en general, cualquier desplazamiento u, puede ser dado como la suma de las contribuciones que resulta de cada modo.

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} a_j\, z_{ij} \qquad \text{ec.3.8.1}$$

Como ya se vió, a_j es la amplitud del i-ésimo modo. En forma de matriz, el vector completo de desplazamiento puede ser expresado como:

$$U = \sum_{j=1}^{n} A_j\, Z_j = [Z]A \qquad \text{ec.3.8.2}$$

hacemos un cambio de variable A = Y

Donde Y es el vector de coordenadas generalizadas, que representan las amplitudes del modo de vibración, también llamadas como coordenadas normales del sistema.

$$U = [Z]Y \qquad \text{ec.3.8.3}$$

Los sistemas de varios grados de libertad pueden ser expresados en términos de las coordenadas normales. Para la ecuación de vibración libre amortiguada resulta.

$$M[Z]\ddot{Y} + C[Z]\dot{Y} + K[Z]Y = 0 \qquad \text{ec.3.8.4}$$

Si la ecuación 3.8.4 la multiplicamos por el vector Z_j^T nos queda como:

$$Z_j^T M[Z]\ddot{Y} + Z_j^T C[Z]\dot{Y} + Z_j^T K[Z]Y = 0$$

la cual se reduce por las propiedades de ortogonalidad en

$$Z_j^T M Z_j \ddot{A}_j + Z_j^T C Z_j \dot{A}_j + Z_j^T K Z A_j = 0 \qquad \text{ec.3.8.5}$$

La ecuación de coordenadas normales del movimiento puede ser expresada más convenientemente como

$$M_j^* \ddot{A}_j + C_j^* \dot{A}_j + K_j^* A_j = 0 \qquad \text{ec.3.8.6}$$

donde

$M_j^* = Z_j^T M Z_j$, es la masa generalizada

$C_j^* = Z_j^T C Z_j$, es el amortiguamiento generalizado

$K_j^* = Z_j^T K Z_j$, es la rigidez generalizada.

para condiciones iniciales en la ecuación 3.8.5

$$U_o = Z_j A_{oj} \qquad \text{ec.3.8.7}$$

entonces

$$Z_j^T\ MU_o = Z_j^T\ M\ Z_j\ A_{oj}$$

por lo tanto

$$A_{oj} = \frac{Z_j^T\ M\ U_o}{Z_j^T\ M\ Z_j}$$

similarmente

$$\dot{U}_o = Z_j\ \dot{A}_{oj}$$

entonces

$$Z_j^T\ M\ \dot{U}_o = Z_j^T\ M\ Z_j\ \dot{A}_{oj}$$

y resulta que

$$\dot{A}_{oj} = \frac{Z_j^T\ M\ \dot{U}_o}{Z_j^T\ M\ Z_j}$$

Ahora bien, de la misma forma que el capítulo anterior - obtenemos que la solución de la ecuación 3.8.6 es:

$$A_j(t) = \exp\left[-\eta_j\ P_j\ t\right] \left[\frac{\dot{A}_{oj} + \eta_j\ P_j\ A_{oj}}{P'_j}\ \text{sen}\ p'_j\ t + A_{oj}\ \cos\ P'_j\ t\right]$$

ec.3.8.8

Por último, la expresión del desplazamiento final se expresa como la superposición de respuestas modales.

$$U(t) = \Sigma X_j(t)$$ ec.3.8.9

donde

$$U_j(t) = Z_j\ A_j(t) \qquad \text{ec.3.8.10}$$

finalmente sustituyendo la ecuación 3.8.10 en 3.8.9

$$U(t) = \Sigma\ Z_j\ A_j(t)$$

j = a los modos de vibrar, 1, 2, 3, . . ., etc

3.9 VIBRACION FORZADA NO AMORTIGUADA

3.9.1 Desacoplamiento de los modos de vibrar.

Otra propiedad de los modos de vibrar es que se pueden desacoplar, esto es: son independientes entre si. El desacoplamiento de los modos es clave para resolver la vibración cuando las masas son excitadas por una fuerza. Regresemos a la ecuación matricial de equilibrio dinámico para vibración libre:

$$M\ddot{u} + Ku = 0$$

donde su solución general resulta, como ya se vió antes en la ecuación 3.5.1

$$\{U\} = [Z]\ \{S(t)\}$$

para hacer esta combinación, sabemos que los modos tienen que estar normalizados.

$$Z^T_j\ M\ Z_j = 1$$

Ahora bien, si los modos están escritos matricialmente, se puede ver que:

$$[Z_1 \quad Z_2 \; . \; . \; . \; Z_n]^T \; M \; [Z_1 \; Z_2 \; . \; . \; . \; Z_n] = I$$

I = Matriz identidad

si derivamos la ecuación 3.5.1 dos veces y separamos las frecuencias tenemos;

$$\{\dot{U}\} = [Z] \; [\quad P \quad] \; \{\dot{S}(t)\} \qquad 1° \text{ derivada}$$

$$\{\ddot{U}\} = [Z] \; [\quad P^2 \quad] \; \{\ddot{S}(t)\} \qquad 2° \text{ derivada}$$

la matriz de frecuencias obtenidas será en forma diagonal.

Si tenemos fuera del vector $\{\ddot{S}(t)\}$ a las frecuencias cuadradas; entonces $\{S(t)\} = \{\ddot{S}(t)\}$, o sea:

$$\{\ddot{U}\} = [Z] \quad [\quad P^2 \quad] \quad \{S(t)\} \qquad \text{ec.3.9.1}$$

sustituyendo las ecuaciones 3.5.1 y 3.9.1 en la ecuación de vibración libre resulta

$$[Z]^T \; M[Z] \; [\quad P^2 \quad] \quad \{S(t)\} + [Z]^T \; K \; [Z] \; \{S(t)\} = 0$$

como los modos están normalizados: $[Z]^T \; M[Z] = [I]$ entonces

$$[Z]^T \; K[Z] \; \{U(t)\} + [\quad P^2 \quad] \; \{U(t)\} = 0$$

por lo tanto

$$[\quad P^2 \quad] = [Z]^T \; K[Z]$$

Ahora por otro lado al no sacar la frecuencia y lo frecuencia cuadrada de la primera y segunda derivadas de 3.5.1 obtenemos al sustituirlas en la ecuación de equilibrio dinámico.

$$M[Z]\ \{S(t)\} + K\ [Z]\ \{S(t)\} = 0$$

premultiplicando por $[Z]^T$

$$[Z]^T\ K[Z]\ \{S(t)\} + [Z]^T\ M[Z]\ \{\ddot{S}(t)\} = 0$$

sabiendo que

$$[Z]^T\ K[Z] = [\ P^2\ ]$$

$$[Z]^T\ M[Z] = I$$

Entonces la ecuación de vibración libre nos resulta como

$$[\ P^2\ ]\ \{S(t)\} + I\ \{\ddot{S}(t)\} = 0 \qquad \text{ec.3.9.2}$$

Un sistema de n grados de libertad se puede tranaformar a "n" sistemas de un grado de libertad.

De la ecuación 3.9.2 resulta que

$$P_1^{\,2}\ \{U_1(t)\} + \{\ddot{U}_1(t)\} = 0$$

$$P_2^{\,2}\ \{U_2(t)\} + \{\ddot{U}_2(t)\} = 0$$

$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$

$$P_n^{\,2}\ \{U_n(t)\} + \{\ddot{U}_n(t)\} = 0$$

que son "n" ecuaciones diferenciales homegéneas de segundo or-- den y además "desacopladas, esto es: independientementes.

Si nuestro sistes es forzado por alguna fuerza excitado- dora F(t), entonces estamos en el caso de vibración forzada no amortiguada si c=0. En este caso la eucalcón 3.9.2 nos resulta

$$I \{\ddot{S}(t)\} + [\ P^2\ ] \{S(t)\} = [F(t)]$$

lo cual conduce que

$$\left\{\ddot{U}_1(t)\right\} + P_1^{\,2}\left\{U_1(t)\right\} = F_1(t)$$

$$\left\{\ddot{U}_2(t)\right\} + P_2^{\,2}\left\{U_2(t)\right\} = F_2(t)$$

$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$

$$\left\{\ddot{U}_n(t)\right\} + P_n^{\,2}\left\{U_n(t)\right\} = F_n(t)$$

que también resulta "n" ecuaciones diferenciales no homogéneas de segundo orden desacopladas.

La solución para cada ecuación desacoplada de un sistema forzado no amortiguado es de la forma:

$$y(t) = \text{sen } Pt \ \frac{1}{mp}\int_0^t F(t) \text{ con } P\tau \, d\tau - \cos Pt \ \frac{1}{mp}\int_0^t F(\tau) \text{ sen}\tau \, d\tau$$

o bien

$$y(t) = \left\{A(t) \text{ sen } pt - B(t) \cos pt\right\} /mp$$

Como ya se vió en el capítulo anterior existen métodos - númericos con los que se puede contar para facilitar el cálculo de la ecuación anterior.

3.10 VIBRACION FORZADA AMORTIGUADA

El análisis dinámico de un sistema forzado y amortiguado será de la misma manera que en el caso anterior, es decir por el método de superposición de modos de vibrar.

De la ecuación de equilibrio dinámico para el caso amortiguado.

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F(t) \qquad \text{ec.3.10.1}$$

puede hacerse una simplificación importante en las ecuaciones de movimiento debido al hecho de que cada modo tiene una ecuación independiente de forma exactamente igual a la de un sistema de un grado de libertad, al desacoplar los modos. Por las propiedades de ortogonalidad de las formas modales.

La ecuación de coordenadas normasles del sistema, simplificada en coordenadas generalizadas[1] resulta ser:

$$M_n^* \ddot{A}_n + C_n^* \dot{A}_n + K_n^* A_n = F_n^*(t) \qquad \text{ec.3.10.2}$$

de la misma manera que en caso de vibración libre

$F_n^*(t) = Z_j^T F(t)$, es la fuerza generalizada. La ecuación 3.10.2 es importante porque de ella se obtiene que:

$$C_n^* = 2\lambda_n P_n M_n^* \qquad \text{ec.3.10.3}$$

$$K_n^* = P_n^2 M_n^* \qquad \text{ec.3.10.4}$$

y haciendo uso de 3.10.3 y 3.10.4 nos queda 3.10.2 como

$$\ddot{A}_n + 2\lambda_n P_n \dot{A}_n + P_n^2 A_n = \frac{F_n^*(t)}{M_n^*} \qquad \text{ec.3.10.5}$$

---

[1] El desarrollo es exactamente igual que el visto en el punto 3.8 al definir la expresión 3.8.6

Ahora en términos de excitación por movimiento del suelo durante un sismo, la presión efectiva puede ser escrito como:

$$F_i(t) = m_i \ddot{u}_g(t) \qquad \text{ec.3.10.6}$$

El vector de presiones efectivas completa aplicada, esta dada por el producto de la matriz de masas y la aceleración de la tierra, ésto es:

$$F(t) = M \hat{I} \ddot{u}_g(t) \qquad \text{ec.3.10.7}$$

Donde $\hat{I}$ representa un vector unidad de dimensión N. - Entonces sustituyendo la ecuación 3.10.7 en 3.10.2 obtenemos.

$$Mn^* \ddot{A}n + Cn^* \dot{A}n + Kn^* An = \underline{Z}_j^T M \hat{I} \ddot{u}_g(t)$$

Si llamamos a $\mathcal{L}n = \underline{Z}_j^T M \hat{I}$ y representa el factor de - participación del temblor para el modo n de un sistema multigrado, entonces la ecuación 3.10.5 se puede escribir como:

$$\ddot{A}n + 2\eta n \; Pn \dot{A}n + Pn^2 An = \frac{\mathcal{L}n}{Mn^*} \ddot{u}_g(t) \qquad \text{ec.3.10.8}$$

La respuesta del n-ésimo modo en cualquier tiempo t, puede ser obtenida por una evaluación numérica de la expresión de Duhamel, al hacer la integración siguiente:

$$An(t) = \frac{Ln}{Mn^*} \frac{1}{Pn} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \, e^{-(\eta Pn (t-\tau))} \operatorname{sen} Pn (t-\tau) \, d\tau$$

ec.3.10.9

simplificando, usando el símbolo $V(t)$ para representar el valor de la integral en el tiempo t

$$An(t) = \frac{\mathcal{L}n}{M_n^*} \frac{V(t)}{Pn} \qquad \text{EC.3.10.10}$$

El desplazamiento del piso (o masa) i en un tiempo t, es obtenido entonces superponiendo la respuesta de todos los modos, calculada por dicho período de tiempo t.

$$u_i = \sum_{n=1}^{n} Z_{ij} \, An(t)$$

Debe notarse que estructuras con muchos grados de libertad, la mayor parte de la energía vibracional es absorbida en los inferiores, y por lo general es suficientemente preciso suponer solamente los efectos de los primeros modos. Las fuerzas sísmicas en la estructura pueden entonces ser expresadas en términos de las aceleraciones efectivas.

$$\ddot{A}n_{efc}(t) = Pn^2 \, An(t)$$

de las cuáles la aceleración en cualquier piso i es

$$\ddot{u}in_{efc}(t) = Pn^2 \, z_{in} \, An(t) \qquad \text{ec.3.10.11}$$

y la fuerza sísmica en cualquier piso i en un tiempo t es

$$q_{in}(t) = m_i \, P_n^2 \, z_{in} \, An(t)$$

superponiendo todas las contribuciones modales, las fuerzas sísmicas en toda la estructura pueden ser expresadas en forma matricial como

$$q(t) = M[Z]P^2 \, An(t)$$

donde [Z] es la matriz cuadrada de distribuciones de amplitudes relativas en cada modo, y P^2 es la matriz diagonal de P_n^2 para cada uno de los "n" modos.

3.11 ESPECTROS DE RESPUESTA

En el cálculo de las estructuras se observa que uno de agentes externos capaces de llevarlos a una condición de estado límite es el sismo. El sismo es una excitación en la base de sistemas vibratorios y por lo tanto se puede transformar en un problema de excitación en la masa. Para conocer las características del movimiento, es necesario conocer los llamados acelerogramas registrados en aparatos especiales conocidos como acelerógrafos.

Un acelerograma es un registro contínuo de las aceleraciones del terreno como función del tiempo durante un sismo, es decir una función aleatoria de impulsos no períodicos.

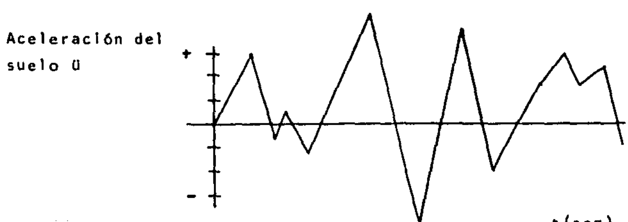


Figura 3.11.A

o bien

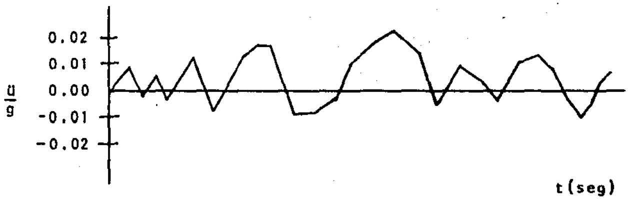


Figura 3.11.B

Por medio de una integración numérica y otras consideraciones sobre la precisión de las lectrua del registro, es posible construir la excitación como velocidad y desplazamiento.

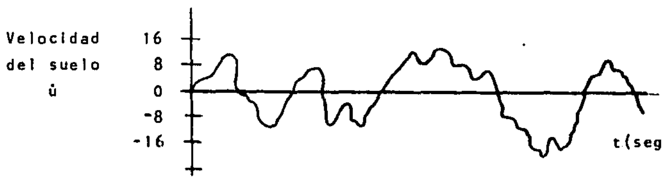


Figura 3.11.C

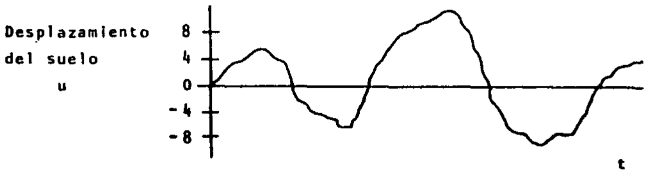


Figura 3.12.D

Para entender el comportamiento del movimiento es necesario conocer los acelerogramas de tres componentes ortogonales del desplazamiento del suelo en un punto: dos componentes horizontales y una vertical.

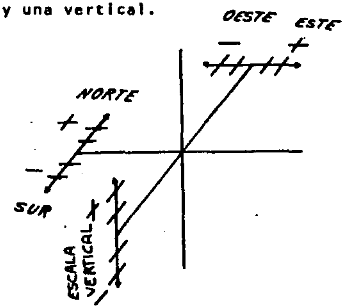


Figura 3.11.E

Conocida la excitación es posible calcular la respuesta máxima que sufre un sistema de un grado de libertad de período T_1. Ahora si reunimos las respuestas de varios sistemas de un grado de libertad con diferente período cada sistema, nos resulta, lo que se conoce como Espectro de respuesta. Asímismo, se obtiene espectros de respuesta para el desplazamiento, velocidad y aceleración.

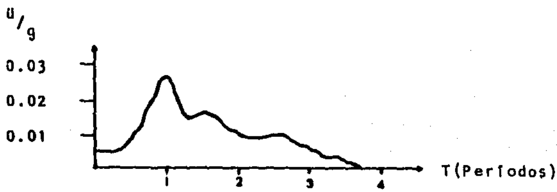


Figura 3.11.F

Si superponemos todos los espectros de respuesta obtenidos para cada excitación (en esta caso sismo) se formará una envolvente llamada Espectro de diseño.

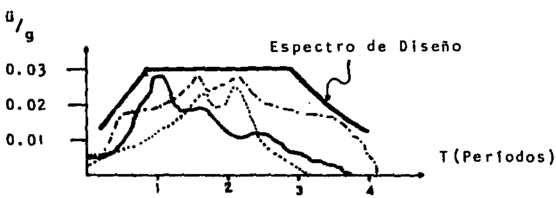


Figura 3.11.G

3.11.1 Análisis del espectro de respuesta

La historia de respuesta de la fuerza de cualquier estructura de varios grados de libertad está completamente definida por las expresiones

$$u(t) = \sum_{n=1}^{n} Z \; Y(t)$$

y por

$$q_n(t) = M \; Z \; w^2 \; Y(t)$$

La respuesta máxima de cualquier modo puede ser obtenido del espectro de respuesta del temblor siguiendo los mismos procedimientos usados para las estructuras de grado simple.

Introduciendo "Sun", la velocidad espectral para el modo "n", la ecuación 3.10.10 nos queda como:

$$An(t)_{max} = \frac{\mathcal{L}n}{M^*_n} \cdot \frac{Sun}{Pn} = \frac{\mathcal{L}n}{M^*_n} \cdot Sdn \qquad \text{ec.3.11.1}$$

donde "Sdn", es el desplazamiento espectral.

Entonces la distribución de los máximos desplazamiento en el modo "n" está dada por:

$$Un_{\,max} = Z \;\; Y(t)_{max} = Z \; \frac{\mathcal{L}n}{M^*_n} \cdot Sdn \qquad \text{ec.3.11.2}$$

Similarmente, la distribución de las máximas fuerzas efectiv~~o~~as del sismo en el modo "n" será:

$$q_{n\;max} = M \; Z \; Pn^2 \;\; Y_{\,max} = M \; Z \; \frac{\mathcal{L}n}{M^*n} \cdot San \qquad \text{ec.3.11.3}$$

Las ecuaciones 3.11.2 y 3.11.3 proporcionan la respuesta máxima en cada modo que deba considerarse. Como los máximos modales no ocurren necesariamente al mismo tiempo, ni tampoco tienen el mismo signo, no podrán ser combinados para dar la respuesta total de manera precisa. Lo mejor que puede hacerse es un análisis espectral de respuesta, que consiste en combinar las respuestas modales sobre una base probabilística.

$$U_{a\,max} \approx \sqrt{U_{a1}^{2}\,_{max} + U_{a2}^{2}\,_{max} + \dots + U_{an}^{2}\,_{max}}$$

ec.3.11.4

donde "n" es el número mayor de los modos.

3.12 ANALISIS SISMICO MODAL ESPECTRAL

El artículo 241 del Reglamento especifica como método de análisis dinámico al análisis modal espectral y el cálculo paso a paso ante temblores específicos. Se tiene que emplear alguno de estos métodos cuando no se satisfacen las limitaciones que existen para aplicar el método estático.

El análisis modal espectral es llamado así, porque implica el uso de los conceptos de modos de vibrar y de espectros de diseño. El cálculo paso a paso[1] también puede ser modal, pero para definir la excitación sísmica se emplean acelerogramas de temblores y no espectros.

De la ecuación 3.11.3 citamos los dos aspectos importantes del análisis modal espectral.

$$q_n = M\,Z\,\frac{\mathcal{L}_n}{M_n^{*}} \quad . \quad S_{an}$$ ec. 3.12.1

Contribución modal — Contribución espectral.

---

1. Ver hoja siguiente

donde S_{an}^{*} es la aceleración espectral para el modo n.

De la contribución modal podemos observar que el cociente del factor de participación entre la matriz de masa generalizada determina un coeficiente que define la escala a la que interviene el modo "n" en el movimiento. Este coeficiente es llamado como coeficiente de participación.

$$C_n = \frac{\mathcal{L}_n}{M_n^{*}} = \frac{Z_n^T \; M \; I}{Z_n^T \; M \; Z_n}$$

para cada modo j se tiene

$$C_n = \frac{\sum_{j=1} m_j \, Z_{jn}}{\sum_{j=1} m_j \, Z_{jn}^2}$$

La contribución espectral está afectada por el factor de reducción por ductilidad [2] Q. Cuando la estructura satisfaga todos los requisitos de algunos de los casos que se citan en los incisos correspondientes de los códigos, el factor Q tendrá un valor según el caso.

Entonces la fuerza sismica podrá reducirse al dividir la ordenada espectral del modo n, entre el valor de Q. Esto hace que las deformaciones calculadas con las fuerzas sismicas reducidas, se multipliquen por Q y corregir los efectos de segundo - orden.

Ahora bien, el valor de la ordenada espectral como el de ductilidad dependen directamente del valor T_i. Donde T_i es el periodo del modo i. (Ver Tablas 3.12.A y 3.12.B).

1, 2, ver hoja siguiente

---

1. Si se desea ampliar los conocimientos del cálculo - paso a paso se recomienda la bibliografía: Enrique Bazan Zurita y Robertp Meli Piralla, Manual de Diseño Sísmico de Edificios, Edit. Limusa, 1985.

2. El valor del factor de ductilidad ; es el grado de - - aceptación de formación de articulaciones plásticas en el diseño de estructuras, asegurando un mecanismo de fallas del tipo ductil.

La existencia de articulaciones plásticas, ocasiona la liberación de un porcentaje de la energía acumulado por las fuerzas de inercia.

Esto hace que se acepte en el análisis sísmico, la reducción de la fuerza sísmica por medio del factor de ductilidad

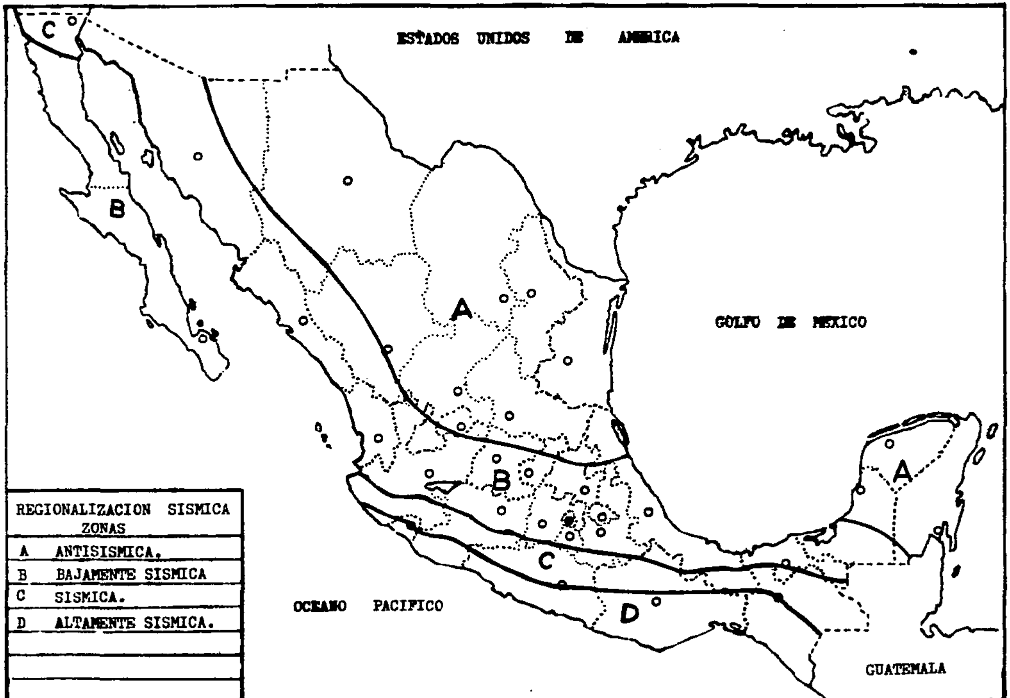
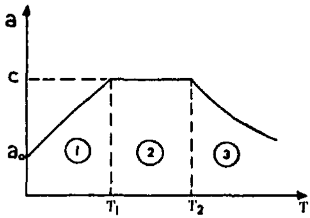

ESTADOS UNIDOS DE AMERICA
GOLFO DE MEXICO
OCEANO PACIFICO
GUATEMALA
REGIONALIZACION SISMICA
ZONAS
A ANTISISMICA.
B BAJAMENTE SISMICA
C SISMICA.
D ALTAMENTE SISMICA.
A
B
C
D

TABLA I.1 ESPECTROS DE DISEÑO



① $0 < T < T_1 \quad : \quad a = a_o + \frac{c - a_o}{T_1} T$

② $T_1 \leq T \leq T_2 \quad : \quad a = c$

③ $T > T_2 \quad : \quad a = c \left(\frac{T2}{T} \right)^r$

donde:

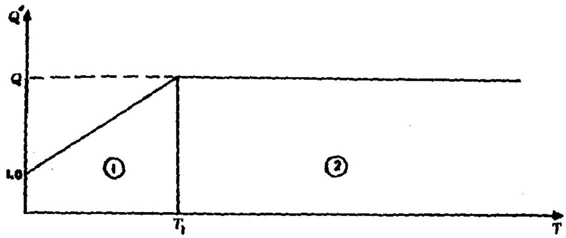
a	:	ordenada espectral ; aceleración con respecto a "g"
a_o	:	ordenada espectral para $T = 0$
c	:	coeficiente sísmico básico
r	:	exponente adimensional
T	:	período natural de la estructura o uno de sus modos, en segundos
T_1, T_2	:	períodos naturales que definen la forma del espectro, en segundos

ZONA SISMICA DE LA REPUBLICA	TIPO DE SUELO	c	a_o	T_1	T_2	r
A	I	0.08	0.03	0.30	0.8	1/2
	II	0.12	0.045	0.55	2.0	2/3
	III	0.16	0.06	0.75	3.3	1
B	I	0.16	0.03	0.30	0.8	1/2
	II	0.32	0.054	0.50	2.0	2/3
	III	0.40	0.10	0.80	3.3	1
C	I	0.24	0.05	0.25	0.67	1/2
	II	0.30	0.08	0.45	1.6	2/3
	III	0.36	0.10	0.60	2.9	1
D	I	0.48	0.09	0.15	0.55	1/2
	II	0.56	0.14	0.30	1.4	2/3
	III	0.64	0.18	0.45	2.7	1

NOTA:

Las ordenadas espectrales que se obtienen son para estructuras del grupo B. Estas deberán multiplicarse por 1.5 en el caso de estructuras del grupo A.

TABLA 1.2 FACTOR DE DUCTILIDAD



(1) $Q = 1 + (Q - 1)\dfrac{T}{T_1}$

(2) $Q' = Q$

donde

Q' y Q Factor de ductilidad

T Período de vibración considerado

CASO	FACTOR DE DUCTILIDAD Q	SEGUN RESISTENCIA A FUERZAS LATERALES.
1	4.0	Es suministrada por sólo marcos. La contribución del marco es más del 50% cuando exista contraventeo o muro.
2	3.0	La contribución del muro o contraventeo en marcos tengan más 50%.
3	2.0	Cuando los marcos o columnas no cumplan las condiciones anteriores.
4	1.5	Es suministrada por muros de mampostería de piezas huecas, confinadas o con refuerzo interior.
5	1.0	Es suministrada al menos parcialmente por elementos o materiales fuera de los mencionados.

Por lo tanto

$$San_j = \begin{bmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ . \\ A_{nj} \end{bmatrix}$$

donde An_j es cada aceleración que toma la masa "n" en el modo "j."

$$An_j = a \times 981/Q$$

$$a = \text{ordenada espectral}$$

Visto lo anterior, estamos en posibilidad de obtener los cortantes sísmicos como:

$$V_s = S \quad q$$

es decir:

$$Vs = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ 1 & 1 & . & 0 \\ 1 & 1 & . & 0 \\ 1 & 1 & . & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & . & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & . & q_{2n} \\ q_{31} & q_{32} & . & q_{3n} \\ q_{n1} & q_{n2} & . & q_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & . & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & . & V_{2n} \\ V_{31} & V_{32} & . & V_{3n} \\ V_{n1} & V_{n3} & . & V_{4n} \end{bmatrix}$$

donde S = matriz de sumas

Con base en estudios probalísticos en estructuras elásticas es más realista estimar la respuesta total como:

$$R = \sqrt{\Sigma_j \quad R^2_j}$$

o sea

$$V_R = \begin{bmatrix} \sqrt{(V_{11})^2 + (V_{12})^2 + \ldots + (V_{1n})^2} \\ \sqrt{(V_{21})^2 + (V_{22})^2 + \ldots + (V_{2n})^2} \\ \cdot \\ \sqrt{(V_{n1})^2 + (V_{n2})^2 + \ldots + (V_{nn})^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{R1} \\ V_{R2} \\ \cdot \\ V_{Rn} \end{bmatrix}$$

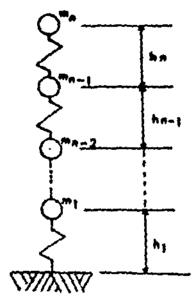
Finalmente, los momentos de volteo máximos para cada modo se obtienen:

$$M_R = H \; V_R$$

donde

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \ldots & h_n \\ 0 & h_2 & \ldots & h_n \\ 0 & 0 & \ldots & h_n \end{bmatrix}$$

siendo

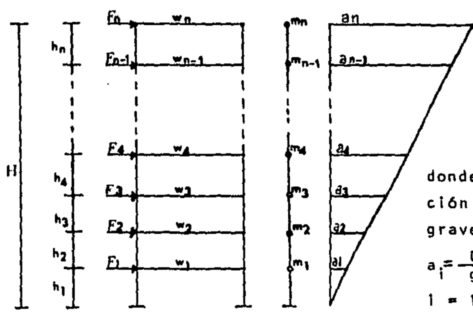


3.13 ANALISIS SISMICO ESTATICO

El análisis dinámico descrito antes, puede ser demasiado complicado para determinado tipo de estructuras, en los que no se justifique un análisis de esta naturaleza. Un criterio simplificado de análisis es el llamado análisis estático.

Es de interés resaltar, que el análisis sísmico estático resulta un diseño conservador, para edificios regulares sin cambios bruscos en la distribución de masas y rigideces.

Para calcular las fuerzas cortantes de diseño a diferentes niveles de un edificio, se usará un conjunto de fuerzas horizontales que actuan en los puntos en los que se suponen concentradas las masas de la estructura. Cada una de las fuerzas se obtienen con el producto del peso de la masa correspondiente por un coeficiente que varía linealmente desde un valor nulo en la base, o en el nivel a partir del cual las deformaciones de la estructura puedan ser apreciables, hasta un máximo en el extremo superior del sistema. O sea:



donde a_i es la aceleración con respecto a la gravedad de la masa m_i.

$$a_i = \frac{\ddot{u}_i}{g}$$

$i = 1, 2, 3, \ldots, n$

La fuerza de inercia F_i para cada masa m_i es:

$F_i = m_i a_i$, $a_i = a_i g$, y

$w_i = m_i g$, en la que g = aceleración de la gravedad

entonces

$$F_i = w_i \, a_i$$

Por la distribución lineal de la aceleración "a_i" la - - - ec.3.13.1 resulta

ec.3.13.1

$$F_i = w_i \frac{h_i}{H} \, an$$

$$V = \sum_{i=1}^{n} F_i = \frac{an}{H} \sum_{i=1}^{n} w_i \, h_i \qquad \text{ec.3.13.2}$$

$$\frac{H}{an} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{n} w_i \, h_i$$

es decir

$$\frac{an}{H} = V \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i \, h_i} \qquad \text{... ec.3.13.3}$$

Sustituyendo la ecuación 3.13.3 en 3.13.2

$$F_i = \frac{w_i \, h_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i \, h_i} \, V \qquad \text{... ec.3.13.4}$$

Por condiciones espectrales de diseño, la fuerza cortante en la base para cada masa i es

$$V = \frac{c}{Q} \; w_i \qquad \text{ec.3.13.5}$$

Sustituyendo 3.13.5 en 3.13.14 resulta

$$F_i = \frac{w_i \; h_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i \; h_i} \qquad \frac{c}{Q} \; w_i \qquad \text{ec.3.13.6}$$

Contribución de proporción lineal — Contribución espectral

Con la contribución de proporción lineal, el análisis estático hace que sus masas concentradas se aproximen a la configuración del primer modo de vibrar del sistema. El período del primer modo es conocido como período fundamental.

El reglamento de construcción, permite reducciones en el valor de la fuerza cortante en el diseño estático cuando el período de la estructura se aproxima al período fundamental. Para ello, se propone el período de vibración T, de la siguiente manera:

$$T = 2 \left[\frac{1}{g} \; \frac{W_1 \; X_1^{\,2}}{F_i \; X_i} \right]^2$$

donde $x_i = V/K = \dfrac{\text{fuerza cortante}}{\text{rigidez}}$

Los métodos de la mecánica no pueden emplearse para calcular el período fundamental de vibración antes de que se tenga un diseño de la estructura aunque sea preliminar. Se necesitan fórmulas sencillas que abarquen sólo una descripción general del tipo de edificio. Una fórmula reciente recomendada para edificios a base de marcos rígidos es la siguiente:

$$T = C_T \; H^{3/4}$$

donde T = Período fundamental, C_T = 0.035 y 0.025 para marcos de acero y concreto, respectivamente y H es la altura del edificio en pies.

Una fórmula usada comunmente para edificios de concreto reforzado con muros de cortante y marcos de acero contraventeado es la siguiente:

$$T = \frac{0.05\ H}{\sqrt{L}}$$

donde L = es la dimensión de la planta en pies en direccion del análisis.

4. SISTEMAS CONTINUOS CON COMPORTAMIENTO LINEAL

4.1 VIGA UNIFORME DE CORTE.

En los sistemas que estudiamos en los capítulos anteriores supusimos que las masas estaban concentradas en los puntos discretos o en cuerpos rígidos , unidos entre sı y al terreno mediante resortes y amortiguadores carentes de masa. Aquí trataremos los sistemas con masa y elasticidad continuamente distribuida ; se supone que estos cuerpos son homogéneos e isótropos, que obedecen la ley de Hooke. Para especificar la posición de toda partícula en un cuerpo elástico,se requiere un número infinito de coordenadas y tales cuerpos poseen por lo tanto un número infinito de grados de libertad.

La estructura de parámetro distribuido más sencilla es un sistema sin amortiguamiento, unidimensional,estrechamente acoplada, lineal con masa y rigidez uniforme por unidad de longitud. El movimiento obedece a la siguiente ecuacion diferencial.

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} - \frac{k d^2 x}{dy^2} = P \qquad \text{ec.4.1.1}$$

donde ;

m = densidad de masa (masa por unidad de longitud o por unidad de volúmen)

x = al desplazamiento de un punto de abscisa " $y_{\bullet}$ " .

t = al tiempo.

k = rigidez

P = la carga distribuida por unidad de longitud o por unidad de volúmen.

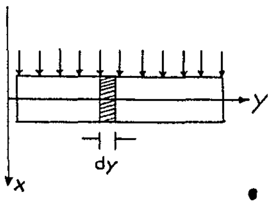


Figura 4.1.A

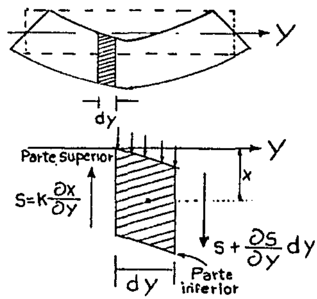


Figura 4.1.B

Suponiendo que la pendiente $\partial x / \partial y$ es proporcional al esfuerzo cortante medio en la sección transversal :

$$k = \frac{S}{\delta} \quad ; \qquad \delta = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{S}{A\ E}$$

$$\therefore \frac{S}{k} = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{S}{AE} \qquad \text{ec.4.1.2}$$

S denota la fuerza cortante transversal en la sección considerada.La diferencia entre S de la parte superior , a la inferior (figura 4.1.A y 4.1.B) de un segmento infinitesimal es $(\partial S / \partial y)\, d y$. Según el principio de D'Alambert, ésta debe estar en equilibrio con la suma de las fuerzas externas que obran en dicho segmento Pdy y las fuerzas de inercia correspondientes a $-(\partial^2 x/\partial t^2)\, m\, dy$:

$$\frac{\partial S}{\partial y}\, dy + P\, dy - m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\, dy = 0 \qquad \text{ec.4.1.3}$$

Si $S = k\, \partial x / \partial y$ entonces, la ecuación 4.1.3 se reduce a la ecuación 4.1.1.

Haciendo $P = 0$ resulta una ecuación homogénea ;

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{ec.4.1.3.1}$$

donde $v^2 = k/m$ y suponiendo que $x(y,t)$ puede expresarse como el producto de una función de "y" y de una función de "t" ,

$$x = Z_n \quad \theta_n\,(t) \qquad \text{ec.4.1.4}$$

podemos escribir la ec.4.1.3.1 como

$$Z_n\, \ddot{\theta}_n - v^2\, Z_n''\, \theta_n(t) = 0$$

entonces

$$\frac{\ddot{\theta}_n}{\theta_n} = v^2 \frac{Z_n''}{Z_n} = -\omega_n^2$$

La última expresión se puede descomponer en

$$\frac{\ddot{\theta}_n}{\theta_n} = -\omega_n^2 \qquad \text{ec.4.1.5}$$

$$\frac{Z_n''}{Z_n} = \frac{-\omega_n^2}{v^2} \qquad \text{ec.4.1.6}$$

La solución general de la ecuación 4.1.5 es de la forma

$$\theta_n = C \operatorname{sen} \omega t + D \cos \omega t \qquad \text{ec.4.1.7}$$

La solución general de la ecuación 4.1.6 es

$$Z_n = A_n \operatorname{sen} \frac{\omega}{v} y + B_n \cos \frac{\omega}{v} y \qquad \text{ec.4.1.8}$$

Los coeficientes An y Bn determinan la configuración modal, sustituyendo la ec. 4.1.7 y 4.1.8 en 4.1.4 obtenemos :

$$x = \left(An \operatorname{sen} \frac{\omega}{v} y + Bn \cos \frac{\omega}{v} y \right) (C \operatorname{sen} \omega t + D \cos \omega t)$$

Esta forma describe el modo natural enésimo de vibración del sistema.

4.2. VIGAS DE FLEXION.

Para frecuencias de vibración pequeña en estructuras(por ejemplo una chimenea) pueden idealizarse adecuadamente como vigas cuyas deformaciones dependen de los momentos flexionantes, despreciando la influencia de las fuerzas de corte, el amortiguamiento y la inercia rotacional. Bajo estas suposiciones podemos escribir la ecuación diferencial del movimiento usando el principio de D'Alambert. Para desplazamientos pequeños se tiene que:

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (EI \, \partial^2 x / \partial y^2)}{\partial y^2} = P(y,t) \qquad \text{ec.4.2.1}$$

donde m = masa por unidad de longitud

x = desplazamiento perpendicular al eje de la viga

t = tiempo

E = módulo de elasticidad

I = momento de inercia de la sección transversal.

y = coordenada a lo largo del eje de la viga.

P = carga externa por unidad de longitud.

La ecuación 4.2.1 se conoce coma la formulación del problema Bernaulli-Euler.

Considerando las vibraciones libres de una viga uniforme es decir, en el caso de que m y EI son independientes de "y" y si P=0. La ecuación 4.2.1 se convierte en

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 x}{\partial y^4} = 0$$

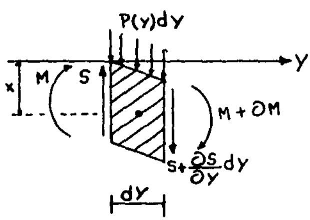
con coeficientes constantes. Procediendo como la viga de corte determinamos la forma del modo natural enésimo, dado por

$$Zn = An \operatorname{senh} (\lambda n(y-an)) + Bn \operatorname{sen} (\lambda n(y-bn)) \qquad ec.4.2.2$$

donde An, Bn, an, y bn son constantes de unidades de longitud Las últimas dos constantes y la relación An/Bn dependen de las condiciones de frontera. Asimismo el parámetro $\lambda_n^4 = \omega_n^2 \, m/EI$ y las frecuencias naturales circulares ωn también dependen de las condiciones de los extremos. La ec.4.2.2 también puede escribirse como:

$$Zn = An' \operatorname{senh} \lambda n\, y + An'' \cosh \lambda n\, y + Bn' \operatorname{sen} \lambda n\, y + Bn'' \cos \lambda n y \qquad ec.4.2.3$$

donde An',An'',Bn' y Bn'' son constantes, dependiendo tres de ellas de las condiciones de frontera y la cuarta arbitraria. Para determinar la ecuación diferencial de vibraciones de ec.4.2.1, consideremos las fuerzas y momentos actuantes en una porción de la viga.



donde S y M son la fuerza cortante y el momento flector respectivamente.

Figura 4.2.A.

Sumando las fuerzas en el sentido perpendicular al eje "y" se obtiene:

$$Si\ (\partial S/\partial y)dy = d\,V$$

$$y\quad dV - P\,(y)\,d\,y = 0$$

entonces $\dfrac{dV}{dy} = P\,(y)$, y $\dfrac{d\mathcal{M}_b}{d\,y} = V$

por lo tanto

$$\frac{\partial^2 \mathcal{M}_b}{\partial y^2} = \frac{\partial V}{\partial y} = P\ (y)$$

El momento flector está relacionado con la curvatura por medio de la ecuación , que para las coordenadas iniciales en la figura 4.2.A. es :

$$\mathcal{M}_b = E\,I\,(\partial^2 x\ /\partial y^2)$$

sustituyendo la ecuacióm 4.2.5. en la ecuación 4.2.4. resulta

$$\frac{\partial^2 (\,E\,I\,(\partial^2 x\,/\partial\,y^2)}{\partial y^{\ 2}} = P\ (y)$$

Para una viga que vibra con respecto a su posición de equilibrio estático bajo su propio peso, la carga por unidad de longitud es igual a la carga de inercia debido a su masa y aceleración . Como la fuerza de inercia está en la misma dirección de P(y), como se muestra en la figura 4.2.A y suponiendo movimiento armónico tenemos ;

$$P\ (y) = m\,\omega^2 x \qquad\qquad y$$

$$E\,I\,\frac{\partial^4 x}{\partial y^4} - m\,\omega^2 x = 0$$

por lo tanto

$$\lambda^4 = \frac{m\,\omega^2}{E\,I} \qquad \text{ec. } 4.2.4$$

La ecuación 4.2.3 es una respuesta debido a que suponemos una solución del tipo

$$x = e^{c\,y} \qquad \text{ec.} 4.2.5$$

que satisface la ecuación diferencial cuando

$$c = \pm \lambda \quad y \quad c = \pm\, i \lambda$$

como

$$e^{\pm \lambda y} = \cosh \lambda y \pm \operatorname{senh} \lambda y$$

$$e^{\pm \lambda y} = \cos \lambda y \pm i \operatorname{sen} \lambda y$$

La solución en la forma de la ec.4.2.3 se establece inmediatamente.

Las frecuencias naturales de vibración se encuentran en la ec.4.2.4 como

$$\omega_n = \lambda_n^2 \sqrt{\frac{E\,I}{m}} = (\lambda_n\, l)^2 \sqrt{\frac{E\,I}{m\, l^4}}$$

En donde λ_n depende de las condiciones de borde del problema.

4.3. METODO DE LA SUMA DE LOS MODOS.

Las estructuras compuestas de vigas son comunes en ingeniería. Constituyen sistemas con un infinito número de grados de libertad, y los métodos de suma de modos hacen posible su análisis. Los modos utilizados para representar la deflexion de un sistema no siempre necesitan ser ortogonales.

En las ecuaciones de movimiento en sistemas discretos fueron desacopladas por la matriz modal, para obtener la respuesta de la vibración en términos de las coordenadas normales del sistema. Ahora aplicaremos una técnica similar a sistemas continuos, desarrollando la deflexión en términos de los modos normales del sistema.

Consideramos el movimiento general de una viga cargada por una fuerza distribuida P(y,t), cuya ecuación de movimiento es

$$\frac{\partial^2 EI \quad (\partial^2 x/\partial y^2)}{\partial y^2} + \frac{m\partial^2 x}{\partial t^2} = P(y,t)$$

o bien,

$$\{EI\ x''(y)\}'' + m(y)\ddot{x}(t) = P\ (y,t), \text{ec.4.3.1}$$

Los modos normales Zi(y) de tal viga, deben satisfacer

$$\{EI\ Zn''\}'' - \omega_n^2 m(y)\ Zn = 0$$

y a sus condiciones de borde. Los modos Zi(y) son también funciones ortogonales que satisfacen la relación.

$$\int_0^{\ell} m\,(y)\ Zi\ \ Zj\ dy = \begin{cases} 0 & \text{para } j = i \\ Mi & \text{para } j = i \end{cases} \text{,ec.4.3.1}$$

Representando la solución al problema general en términos de $Z_i(y)$ y de la coordenada generalizada $q_i(t)$ resulta

$$x(y,t) = \sum_i Z_i(y)\, q_i(t) \quad , \text{ec. } 4.3.2$$

En donde la maza generalizada M_i^* en la ec. 4.3.1 se define como[1]

$$M_i^* = \int_0^{\ell} Z_i^2(y)\, m(y)\, dy \quad , \text{ec. } 4.3.3$$

Análogamente la rigidez generalizada es[2]

$$K_i^* = \int_0^{\ell} EI\, \{Z_i''(y)\}^2 dy \quad , \text{ec. } 4.3.4$$

La fuerza generalizada P_i^*, se determina del trabajo hecho por la fuerza aplicada $p(y,t)\,dy$ en el desplazamiento virtual δq_i

$$\delta W = \int_0^{\ell} P(y,t) \left(\sum_i Z_i\, \delta q_i\right) dy$$
$$= \sum_i \delta q_i \int_0^{\ell} P(y,t)\, Z_i(y)\, dy$$

o bien

$$P_i^* = \int_0^{\ell} P(y,t)\, Z_i(y)\, dy \quad , \text{ec. } 4.3.5$$

---

[1] y [2]. Las ecuaciones 4.3.3 y 4.3.4 son obtenidas por la relación de ortogonalidad y el planteamiento de la ecuación de la energía cinética y potencial respectivame. Se recomienda consultar William T. Thomson." Teoría de Vibraciones " . Editorial Prentice /Hall Internacional. Capítulo XI .

La evaluación de la contribución del modo "n" en alguna configuración arbitraria x (y,t), se obtiene al multiplicar $Zn(y)\, m(y)$ en ambos extremos de la barra y al integrar resulta

$$\int_0^{\ell} Zn(y)\,m(y)\,x(y,t)\,dy = \sum_{i=1} qi(t)\int_0^{\ell} Zi(y)\,m(y)\,Zn(y)\,dy$$

$$= qi(t)\int_0^{\ell} \{Zn(y)\}^2 m(y)\,dy \text{ , ec.4.3.6}$$

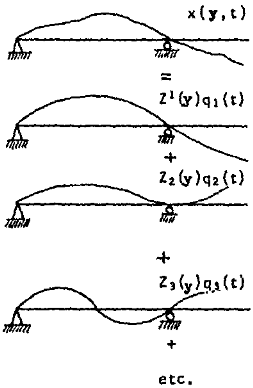


Fig. 4.3.8.

Despejando la coordenada generalizada obtenemos.

$$q_n(t) = \frac{\int_0^{\ell} Zn(y)m(y)\ x(y,t)dy}{\int_0^{\ell} \{Zn(y)\}^2 m\ (y)\ dy}$$

ec.4.3.7

Que es equivalente para sistemas de parámetros discretos. Con el objeto de satisfacer $y = L$ debemos tener $\omega n = \frac{n\pi y}{L}$ donde $\eta = 1,2,3,..$ Por tanto los períodos naturales de vibración son

$$T_1 = \frac{2L}{u} \qquad Tn = \frac{1}{n}\ T_1$$

Y las configuraciones modales son

$$Z_n = An \text{ sen } \frac{n\pi u y}{L} \text{ , ec 4.3.8}$$

donde $u = \sqrt{K/m(y)}$

4.4 DESACOPLAMIENTO DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

4.4.1 Vigas a flexión sin amortiguamiento.

Partiendo de la ecuación diferencial del movimiento para una - una viga a flexión (ec. 4.2.1)

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (EI \partial^2 x/\partial y^2)}{\partial y^2} = P(y,t)$$

expresada en coordenadas normales según la ecuación 4.3.6

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(y) Z_i(y) \ddot{q}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2}{dy^2} \left\{ EI \frac{d^2 Z_i(y)}{dy^2} \right\} q(t) = P(y,t)$$

Multiplicando por el término $Z_n(y)$ e integrando nos queda

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{q}_i(t) \int_0^{\ell} m(y) Z_i(y) Z_n(y)\, dy + \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \int_0^{\ell} Zn(y) \frac{d^2}{dy^2}\left(EI \frac{d^2 Z_i}{dy^2}\right) dy = \int_0^{\ell} Zn(y)\ P(y,t)\, dy, \text{ec. 4.4.1}$$

Aplicando las propiedades de ortogonalidad resulta

$$\ddot{q}_n(t) \int_0^{\ell} m(y)\ Z_n^2(y)\, dy + q_n(t) \int_0^{\ell} Z_n(y) \frac{d^2}{dy^2} \left(EI \frac{d^2 Zn}{dy^2}\right) dy = \int_0^{\ell} Zn(y)\ P(y,t)\, dy, \text{ec. 4.4.2}$$

donde

$$\int_0^{\ell} Zn(y) \frac{d^2}{dy^2}\left(EI \frac{d^2 Zn}{dy^2}\right) dy = \omega_n^2 \int_0^{\ell} Zn^2\, m(y)\, dy$$

Por lo tanto, nuestra expresión abreviada nos queda como:

$$Mn\ \ddot{q}_n(t) + \omega_n^2\ Mn\ q_n(t) = Pn(t) \quad \text{, ec. 4.4.3}$$

Resolviendo la ecuación 4.4.3 nos da exactamente igual a los resultados considerados anteriormente por el caso de parámetros discretos

$$qn(t) = \frac{1}{M_n \ \omega n} \int_0^t Pn(\tau) \operatorname{sen} \omega n(t-\tau) d\tau \qquad 4.4.4$$

Y la evaluación de respuestas de desplazamiento, usando las expresiones de coordenadas normales nos queda

$$x(Y,t) = \sum_{i=1}^{\infty} Zi(Y) qn(t)$$

Cuando los desplazamientos dinámicos de la estructura se pueden evaluar a través del tiempo, las fuerzas internas de la estructura se pueden establecer aplicando la relación fuerza-desplazamiento. Para el elemento viga, los momentos internos son proporcionales a las curvaturas; tal que se toma la segunda derivada de expresiones de desplazamientos dados.

$$\mathcal{M}(y,t) = EI \ \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$$

4.4.2 Vigas a flexión con amortiguamiento.

En la formulación anterior de las ecuaciones de movimiento de los miembros de una viga tipo, no se consideraron los mecanismos que absorven energía de la estructura durante la respuesta dinámica. Estos tipos de mecanismos del amortiguamiento que puede incorporarse a la formulación sin dificultad son la resistencia a los desplazamientos transversales de la viga y la resistencia de rigidez del material de la viga. Si la resistencia a la velocidad transversal se representa como $c(Y)$, la correspondiente de fuerza amortiguadora (disipadora) es $f_D(Y) = c(y)\partial x/\partial t$ y contribuye a la relación de equilibrio transversal, entonces resulta que

$$\frac{\partial x}{\partial y} = P - m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{c\partial x}{\partial t} \qquad \text{ec.4.4.2.1}$$

Similarmente, si la resistencia a la velocidad de tensión es representada por Cs, el esfuerzo de amortiguamiento es $\sigma_D = C_s \ \partial\varepsilon/\partial t$ donde ε es la tensión normal local. En el cual la tensión varía linealmente sobre la sección; esto es facilde mostrar con la respuesta del momento amortiguado en la siguiente expresión

$$\mathcal{M}_D(y) = \sigma_D \quad dA = C_s I(y)\frac{\partial^3 x}{\partial y^2 dt} \qquad \text{ec. 4.4.2.2.}$$

Ahora incorporando el momento amortiguado en la relación - - $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial y} = V$,y sustituyen en la 4.4.2.1 la ecuación diferencial del movimiento nos queda como

$$\frac{\partial}{\partial y^2}\left(EI\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + C_s \ I \ \frac{\partial^3 x}{\partial y^2 \partial t}\right) + m\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + C\frac{\partial x}{\partial t} = P$$

ec. 4.4.2.3

Es de interés transformar la ecuación 4.4.2.3 en coordenadas - normales. Esto es

$$\sum_{i=1}^{\alpha} m(y) Z_i(y) \ddot{q}_i(t) + \sum_{i=1}^{\alpha} c(y)\ Z_i(y)\ \dot{q}_i(t)$$

$$+\sum_{i=1}^{\alpha} \frac{d^2}{dy^2}\left[C_s I(y) \frac{d^2 Zi}{dy^2}\right] \dot{q}(t) + \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{d^2}{dy^2}\left[EI(y) \frac{d^2 Zi}{dy^2}\right] q_i(t)$$

$$= P\ (y,t)$$

, ec.4.4.2.4

multiplicando por $Zn(y)$, integrando y aplicando las relaciones de ortogonalidad junto con la masa generalizada y la carga generalizadora obtenemos:

$$Mn\ \ddot{q}_n(t) + \sum_{i=1}^{\alpha} \dot{q}(t) \int_0^{l} Zn(y) \left[c(y) Zi(y) + \frac{d^2}{dy^2}\left(C_s I(y) \frac{d^2 Zi}{dy^2}\right)\right] dy +$$

$\omega n^2\ Mn\ q n(t) = Pn(t)$,ec.4.4.2.5

Las ecuaciones de movimiento de los diferentes modos se aco-- plan al término del amortiguamiento si satisface las condiciones de ortogonalidad equivalente a las propiedades de las masas y rigideces. Se ha investigado en este caso que:

$c(y) = a_0\ m(y) \quad Cs = a_1 E$, ec.4.4.2.6

donde a_0 y a_1 son simples factores de proporcionalidad (ambas teniendo dimensiones recíprocas al tiempo). Sustituyendo a - ec.4.4.2.6 en 4.4.2.5 y aplicando las condiciones de ortogonalidad resulta un desacoplamiento en la ecuación de coordenadas normales.

$Mn\ \ddot{q}_n(t) + (a_0 Mn + a_1\ \omega_n^2\ Mn)\dot{q}_n(t) + \omega_n^2\ Mnq_n(t) = Pn(t)$,ec.4.4.2.7

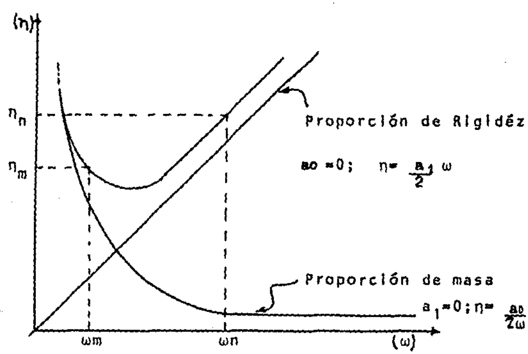
Finalmente, derivando a través de la masa generalizadora e introduciendo la relación de amortiguamiento en el n-enésimo modo, define que:

$$\eta_n = \frac{ao}{2\ n} + \frac{a_1\ \omega n}{2}$$

Por lo que resulta:

$$\ddot{q}n(t) + 2\eta_n\omega n\ \dot{q}_n(t) + \omega^2 n\ \ qn(t) = \frac{Pn(t)}{Mn}$$

Está claro que donde existen las propiedades de rigidez y de masas de tipo de Rayleigh de parámetros distribuidos pueden desacoplarse en forma semejante a los sistemas de parámetros discretos.



4.5 CONDICIONES DE BORDE.

Para satisfacer las condiciones límite, se deben escoger los puntos extremos de la estructura. Los ejemplos de típicas condiciones de borde para vigas, se dan a continuación:

4.5.1 viga simplemente apoyada. Como se muestra en la Figura 4.5.1.A. sea m el punto de apoyo en el extremo. Las condiciones de borde o límite en el extremo izquierdo de la viga son:

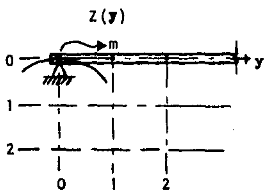


Fig. 4.5.1.A

$Z(0)=0$ Configuración modal en el punto m

$\mathcal{M}(0)=EI\ Z''(0)=0$ Momento en el punto "m".

4.5.2. Extremo fijo. **En este extremo la** deflexión y la pendiente son ambas nulas, como se muestra en la Figura 4.5.2.A. Si m es el punto donde se encuentra la condición de borde tenemos:

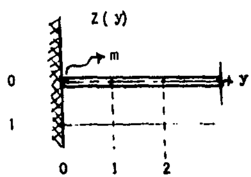
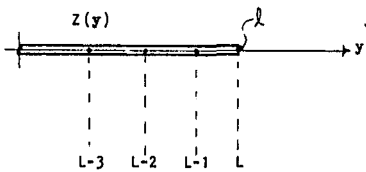


Fig. 4.5.2.A.

$Z(0)=0$ Configuración modal en el punto m

$Z'(0)=0$ La pendiente en el punto m

4.5.3. Extremo libre. En el extremo libre de una viga, el momento y el cortante deben ser cero. Sea "ℓ" el extremo derecho de la viga como se muestra en la Figura 4.5.3.A., en la cual observamos:



$\mathcal{M}(L)=EI\ Z''(L)=0$ Momento en el punto ℓ

$S(L)=EI\ Z'''(L)=0$ Cortante en el punto ℓ

Fig. 4.5.3.A

4.6 MODOS NORMALES DE VIGAS UNIFORMES.

Supongamos que las vibraciones libres de una viga uniforme están gobernadas por la ecuación diferencial de Euler.

$$EI\ \frac{\partial^4 x}{\partial y^4} + m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$$

Para determinar los modos normales de vibración, la solución en la forma

$$x(y,t) = Z_n(y)e^{i\omega_n t}$$

es sustituida en la Ec. (1) para obtener

$$\frac{d^4 Z_n(y)}{dy^4} - \lambda_n{}^4 Z_n(y) = 0$$

libre-libre		empotrada-empotrada
Zn	=	Zn''
Zn'	=	Zn'''
Zn''	=	Zn
Zn'''	=	Zn'

4.6.3 VIGA EMPOTRADA-LIBRE

n	$\lambda_n l$	$(\lambda_n l)^2$	ω_n/ω_1
1	1,8751	3,5160	1,0000
2	4,6941	22,0345	6,2669
3	7,8548	61,6972	17,5475

4.6.4 VIGA EMPOTRADA-ARTICULADA

n	$\lambda_n l$	$(\lambda_n l)^2$	ω_n/ω_1
1	3,9266	15,4182	1,0000
2	7,0686	49,9645	3,2406
3	10,2101	104,2477	6,7613

4.6.5 VIGA LIBRE-ARTICULADA

Las frecuencias naturales de la viga libre-articulada son iguales a las de la viga empotrada-articulada. Las funciones características de la viga libre-articulada están relacionadas a las de la viga empotrada-articulada como sigue:

en donde:

$Z_n(y)$ = función característica que describe la deflexión del modo n ésimo

m = densidad de masa por unidad de longitud

λ_n^4 = $m\omega_n^2/EI$

ω_n = $(\lambda_n l)^2 \sqrt{EI/ml^4}$ = frecuencia natural del modo n ésimo.

Las funciones características $Z_n(y)$ y las frecuencias de modo normal ω_n dependen de las condiciones de borde y han sido tabuladas por Young y Felgar. Un resumen abreviado tomado de ese trabajo, se presenta aquí.

4.6.1 VIGA EMPOTRADA-EMPOTRADA

n	$\lambda_n l$	$(\lambda_n l)^2$	ω_n/ω_1
1	4,7300	22,3733	1,0000
2	7,8532	61,6728	2,7565
3	10,9956	120,9034	5,4039

4.6.2 VIGA LIBRE-LIBRE

Las frecuencias naturales de la viga libre-libre son iguales a aquellos de la viga empotrada-empotrada. Las funciones características de la viga libre-libre están relacionadas a las de la viga empotrada-empotrada como sigue:

libre-articulada		empotrada-articulada
Zn	=	Zn''
Zn'	=	Zn'''
Zn''	=	Zn
Zn'''	=	Zn'

A continuación se presentan las Tablas 1, 2, y 3 para la evaluación de las funciones características y derivadas de los modos de vibrar según sus condiciones de borde.

TABLA 1.
FUNCIONES CARACTERISTICAS Y DERIVADAS
VIGA EMPOTRADA-EMPOTRADA
PRIMER MODO

$\frac{y}{l}$	z_1	$z_1' = \frac{1}{\lambda_1}\frac{dz_1}{dy}$	$z_1'' = \frac{1}{\lambda_1^2}\frac{d^2z_1}{dy^2}$	$z_1''' = \frac{1}{\lambda_1^3}\frac{d^3z_1}{dy^3}$
0.00	0.00000	0.00000	2.00000	−1.96500
0.04	0.03358	0.34324	1.62832	−1.96285
0.08	0.12545	0.61624	1.25802	−1.94862
0.12	0.26237	0.81956	0.89234	−1.91254
0.16	0.43126	0.95451	0.53615	−1.84732
0.20	0.61939	1.02342	0.19545	−1.74814
0.24	0.81459	1.02986	−0.12305	−1.61250
0.28	1.00546	0.97870	−0.41240	−1.44017
0.32	1.18168	0.87608	−0.66581	−1.23296
0.36	1.33419	0.72992	−0.87699	−0.99452
0.40	1.45545	0.54723	−1.04050	−0.73007
0.44	1.53962	0.33897	−1.15202	−0.44611
0.48	1.58271	0.11478	−1.20854	−0.15007
0.52	1.58271	−0.11478	−1.20854	0.15007
0.56	1.53962	−0.33897	−1.15202	0.44611
0.60	1.45545	−0.54723	−1.04050	0.73007
0.64	1.33419	−0.72992	−0.87699	0.99452
0.68	1.18168	−0.87608	−0.66581	1.23296
0.72	1.00546	−0.97870	−0.41240	1.44017
0.76	0.81459	−1.02986	−0.12305	1.61250
0.80	0.61939	−1.02342	0.19545	1.74814
0.84	0.43126	−0.95451	0.53615	1.84732
0.88	0.26237	−0.81956	0.89234	1.91254
0.92	0.12545	−0.61624	1.25802	1.94862
0.96	0.03358	−0.34324	1.62832	1.96285
1.00	0.00000	0.00000	2.00000	1.96500

TABLA 1.
FUNCIONES CARACTERISTICAS Y DERIVADAS
VIGA EMPOTRADA-EMPOTRADA
SEGUNDO MODO

$\frac{y}{l}$	Z_2	$Z_2' = \frac{1}{\lambda_2}\frac{dZ_2}{dy}$	$Z_2'' = \frac{1}{\lambda_2^2}\frac{d^2Z_2}{dy^2}$	$Z_2''' = \frac{1}{\lambda_2^3}\frac{d^3Z_2}{dy^3}$
0.00	0.00000	0.00000	2.00000	−2.00155
0.04	0.08834	0.52955	1.37202	−1.99205
0.08	0.31214	0.86296	0.75386	−1.93186
0.12	0.61058	1.00644	0.16713	−1.78813
0.16	0.92602	0.97427	−0.35923	−1.54652
0.20	1.20674	0.79030	−0.79450	−1.21002
0.24	1.41005	0.48755	−1.11133	−0.79651
0.28	1.50485	0.10660	−1.28991	−0.33555
0.32	1.47357	−0.30736	−1.32106	0.13566
0.36	1.31314	−0.70819	−1.20786	0.57665
0.40	1.03457	−1.05271	−0.96605	0.94823
0.44	0.66150	−1.30448	−0.62296	1.21670
0.48	0.22751	−1.43728	−0.21508	1.35744
0.52	−0.22751	−1.43728	0.21508	1.35744
0.56	−0.66150	−1.30448	0.62296	1.21670
0.60	−1.03457	−1.05271	0.96605	0.94823
0.64	−1.31314	−0.70819	1.20786	0.57665
0.68	−1.47357	−0.30736	1.32106	0.13566
0.72	−1.50485	0.10660	1.28991	−0.33555
0.76	−1.41005	0.48755	1.11133	−0.79651
0.80	−1.20674	0.70930	0.79450	−1.21002
0.84	−0.92602	0.97427	0.35923	−1.54652
0.88	−0.61058	1.00644	−0.16713	−1.78813
0.92	−0.31214	0.86296	−0.75386	−1.93186
0.96	−0.08834	0.52955	−1.37202	−1.99205
1.00	0.00000	0.00000	−2.00000	−2.00155

TABLA 1.
FUNCIONES CARACTERISTICAS Y DERIVADAS
VIGA EMPOTRADA-EMPOTRIZADA
TERCER MODO

$\frac{y}{l}$	Z_3	$Z_3' = \frac{1}{\lambda_3}\frac{dZ_3}{dy}$	$Z_3'' = \frac{1}{\lambda_3^2 \cdot}\frac{d^2Z_3}{dy^2}$	$Z_3''' = \frac{1}{\lambda_3^3}\frac{d^3Z_3}{dy^3}$
0.00	0.00000	0.00000	2.00000	−1.99993
0.04	0.16510	0.68646	1.12323	−1.97469
0.08	0.54804	0.99303	0.28189	−1.82280
0.12	0.98720	0.95006	−0.45252	−1.48447
0.16	1.34190	0.62285	−0.99738	−0.96698
0.20	1.50782	0.11050	−1.28572	−0.33199
0.24	1.42971	−0.46573	−1.28637	0.32333
0.28	1.10719	−0.98087	−1.01443	0.88956
0.32	0.59186	−1.32694	−0.53145	1.26880
0.36	−0.02445	−1.43171	0.06438	1.39529
0.40	−0.62837	−1.27099	0.65569	1.24912
0.44	−1.10739	−0.87257	1.12747	0.86096
0.48	−1.37174	−0.31031	1.38852	0.30669
0.52	−1.37174	0.31031	1.38852	−0.30669
0.56	−1.10739	0.87257	1.12747	−0.86096
0.60	−0.62837	1.27099	0.65569	−1.24912
0.64	−0.02445	1.43171	0.06438	−1.39529
0.68	0.59186	1.32694	−0.53145	−1.26880
0.72	1.10719	0.98087	−1.01443	−0.88956
0.76	1.42971	0.46573	−1.28637	−0.32333
0.80	1.50782	−0.11050	−1.28572	0.33199
0.84	1.34190	−0.62285	−0.99738	0.96698
0.88	0.98720	−0.95006	−0.45252	1.48447
0.92	0.54804	−0.99303	0.28189	1.82280
0.96	0.16510	−0.68646	1.12323	1.97469
1.00	0.00000	0.00000	2.00000	1.99993

TABLA 2.
FUNCIONES CARACTERISTICAS Y DERIVADAS
VIGA EMPOTRADA-LIBRE
PRIMER MODO

$\frac{y}{l}$	z_1	$z_1' = \frac{1}{\lambda_1}\frac{dz_1}{dy}$	$z_1'' = \frac{1}{\lambda_1^2}\frac{d^2z_1}{dy^2}$	$z_1''' = \frac{1}{\lambda_1^3}\frac{d^3z_1}{dy^3}$
0.00	0.00000	0.00000	2.00000	−1.46819
0.04	0.00552	0.14588	1.88988	−1.46805
0.08	0.02168	0.28350	1.77980	−1.46710
0.12	0.04784	0.41286	1.66985	−1.46455
0.16	0.08340	0.53400	1.56016	−1.45968
0.20	0.12774	0.64692	1.45096	−1.45182
0.24	0.18024	0.75167	1.34247	−1.44032
0.28	0.24030	0.84832	1.23500	−1.42459
0.32	0.30730	0.93696	1.23889	−1.40410
0.36	0.38065	1.01771	1.02451	−1.37834
0.40	0.45977	1.09070	0.92227	−1.34685
0.44	0.54408	1.15612	0.82262	−1.30924
0.48	0.63301	1.21418	0.72603	−1.26512
0.52	0.72603	1.26512	0.63301	−1.21418
0.56	0.82262	1.30924	0.54408	−1.15612
0.60	0.92227	1.34685	0.45977	−1.09070
0.64	1.02451	1.37834	0.38065	−1.01771
0.68	1.12889-	1.40410	0.30730	−0.93696
0.72	1.23500	1.42459	0.24030	−0.84832
0.76	1.34247	1.44032	0.18024	−0.75167
0.80	1.45096	1.45182	0.12774	−0.64692
0.84	1.56016	1.45968	0.08340	−0.53400
0.88	1.66985	1.46455	0.04784	−0.41286
0.92	1.77980	1.46710	0.02168	−0.28350
0.96	1.88988	1.46805	0.00552	−0.14588
1.00	2.00000	1.46819	0.00000	0.00000

TABLA 2.
FUNCIONES CARACTERISTICAS Y DERIVADAS
VIGA EMPOTRADA-LIBRE
SEGUNDO MODO

$\frac{y}{l}$	Z_2	$Z_2' = \frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{dZ_2}{dy}$	$Z_2'' = \frac{1}{\lambda_2^2}\frac{d^2\ _2}{dy^2}$	$Z_2''' = \frac{1}{\lambda_2^3}\frac{d^3Z_2}{dy^3}$
0.00	0.00000	0.00000	2.00000	−2.03693
0.04	0.03301	0.33962	1.61764	−2.03483
0.08	0.12305	0.60754	1.23660	−2.02097
0.12	0.25670	0.80728	0.86004	−1.98590
0.16	0.42070	0.93108	0.49261	−1.92267
0.20	0.60211	0.99020	0.14007	−1.82682
0.24	0.78852	0.98502	−0.19123	−1.69625
0.28	0.96827	0.92013	−0.49475	−1.53113
0.32	1.13068	0.80136	−0.76419	−1.33373
0.36	1.26626	0.63565	−0.99384	−1.10821
0.40	1.36694	0.43094	−1.17895	−0.86040
0.44	1.42619	0.19593	−1.31600	−0.59748
0.48	1.43920	−0.06012	−1.40289	−0.32772
0.52	1.40289	−0.32772	−1.43920	−0.06012
0.56	1.31600	−0.59748	−1.42619	0.19593
0.60	1.17895	−0.86040	−1.36694	0.43094
0.64	0.99384	−1.10821	−1.26626	0.63565
0.68	0.76419	−1.33373	−1.13068	0.80136
0.72	0.49475	−1.53113	−0.96827	0.92013
0.76	0.19123	−1.69625	−0.78852	0.98502
0.80	−0.14007	−1.82682	−0.60211	0.99020
0.84	−0.49261	−1.92267	−0.42070	0.93108
0.88	−0.86004	−1.98590	−0.25670	0.80428
0.92	−1.23660	−2.02097	−0.12305	0.60754
0.96	−1.61764	−2.03483	−0.03301	0.33962
1.00	−2.00000	−2.03693	0.00000	0.00000

TABLA 2.
FUNCIONES CARACTERISTICAS Y DERIVADAS
VIGA EMPOTRADA-LIBRE
TERCER MODO

$\frac{Y}{l}$	Z_3	$Z_3' = \frac{1}{\lambda_3}\frac{dZ_3}{dy}$	$Z_3'' = \frac{1}{\lambda_3^2}\frac{d^2Z_3}{dy^2}$	$Z_3''' = \frac{1}{\lambda_3^3}\frac{d^3Z_3}{dy^3}$
0.00	0.00000	0.00000	2.00000	−1.99845
0.04	0.08839	0.52979	1.37287	−1.98892
0.08	0.31238	0.86367	0.75558	−1.92871
0.12	0.61120	1.00785	0.16974	−1.78480
0.16	0.92728	0.97665	−0.35563	−1.54286
0.20	1.20901	0.79394	−0.78975	−1.20575
0.24	1.41376	0.49285	−1.10515	−0.79124
0.28	1.51056	0.11405	−1.28189	−0.32872
0.32	1.48203	−0.29711	−1.31055	0.14479
0.36	1.32534	−0.69422	−1.19398	0.58908
0.40	1.05185	−1.03374	−0.94753	0.96533
0.44	0.68568	−1.27881	−0.59802	1.24030
0.48	0.26103	−1.40247	−0.18130	1.39004
0.52	−0.18130	−1.39004	0.26103	1.40247
0.56	−0.59802	−1.24030	0.68568	1.27881
0.60	−0.94753	−0.96533	1.05185	1.03374
0.64	−1.19398	−0.58908	1.32534	0.69422
0.68	−1.31055	−0.14479	1.48203	0.29711
0.72	−1.28189	0.32872	1.51056	−0.11405
0.76	−1.10515	0.79124	1.41376	−0.49285
0.80	−0.78975	1.20575	1.20901	−0.79394
0.84	−0.35563	1.54236	0.92728	−0.97665
0.88	0.16974	1.78480	0.61120	−1.00785
0.92	0.75558	1.92871	0.31238	−0.86367
0.96	1.37287	1.98892	0.08829	−0.52979
1.00	2.00000	1.99845	0.00000	0.00000

TABLA 3.
FUNCIONES CARACTERISTICAS Y DERIVADAS
VIGA EMPOTRADA-ARTICULADA
PRIMER MODO

$\frac{Y}{l}$	Z_1	$Z_1' = \frac{1}{\lambda_1}\frac{dZ_1}{dy}$	$Z_1'' = \frac{1}{\lambda_1^2}\frac{d^2Z_1}{dy^2}$	$Z_1''' = \frac{1}{\lambda_1^3}\frac{d^3Z_1}{dy^3}$
0.00	0.00000	0.00000	2.00000	−2.00155
0.04	0.02338	0.28944	1.68568	−2.00031
0.08	0.08834	0.52955	1.37202	−1.99203
0.12	0.18715	0.72055	1.06060	−1.97079
0.16	0.31214	0.86296	0.75386	−1.93187
0.20	0.45574	0.95776	0.45486	−1.87177
0.24	0.61058	1.00643	0.16712	−1.78812
0.28	0.76958	1.01105	−0.10554	−1.67975
0.32	0.92601	0.97427	−0.35923	−1.54652
0.36	1.07363	0.89940	−0.59009	−1.38932
0.40	1.20675	0.79029	−0.79450	−1.21002
0.44	1.32032	0.65138	−0.96918	−1.01128
0.48	1.41006	0.48755	−1.11133	−0.79652
0.52	1.47245	0.30410	−1.21875	−0.56977
0.56	1.50485	0.10661	−1.28992	−0.33555
0.60	1.50550	−0.09916	−1.32402	−0.09872
0.64	1.47357	−0.30736	−1.32106	0.13566
0.68	1.40913	−0.51224	−1.28180	0.36247
0.72	1.31313	−0.70820	−1.20786	0.57666
0.76	1.18741	−0.88996	−1.10157	0.77340
0.80	1.03457	−1.05270	−0.96606	0.94823
0.84	0.85795	−1.19210	−0.80507	1.09714
0.88	0.66151	−1.30448	−0.62295	1.21670
0.92	0.44974	−1.38693	−0.42455	1.30414
0.96	0.22752	−1.43727	−0.21507	1.35743
1.00	0.00000	−1.45420	0.00000	1.37533

TABLA 3
FUNCIONES CARACTERISTICAS Y DERIVADAS
VIGA EMPOTRADA-ARTICULADA
SEGUNDO MODO

$\frac{Y}{l}$	Z_2	$Z_2' = \frac{1}{\lambda_2}\frac{dZ_2}{dy}$	$Z_2'' = \frac{1}{\lambda_2^2}\frac{d^2Z_2}{dy^2}$	$Z_2''' = \frac{1}{\lambda_2^3}\frac{d^3Z_2}{dy^3}$
0.00	0,00000	0,00000	2.00000	−2.00000
0,04	0.07241	0.48557	1.43502	−1.99300
0.08	0.25958	0.81207	0.87658	−1.94824
0,12	0.51697	0.98325	0.33937	−1.83960
0,16	0.80176	1.00789	−0.15633	−1.65333
0.20	1.07449	0.90088	−0.58802	−1.38736
0,24	1.30078	0.68345	−0.93412	−1.05012
0.28	1.45308	0.38242	−1.17673	−0.65879
0.32	1.51208	0.02894	−1.30380	−0.23724
0.36	1.46765	−0.34350	−1.31068	0.18649
0.40	1.31923	−0.70122	−1.20092	0.58286
0.44	1.07550	−1.01270	−0.98634	0.92349
0.48	0.75348	−1.25090	−0.68631	1.18364
0.52	0.37700	−1.39515	−0.32640	1.34442
0.56	−0.02536	−1.43265	0.06348	1.39438
0.60	−0.42268	−1.35944	0.45136	1.33056
0.64	−0.78413	−1.18058	0.80569	1.15876
0.68	−1.08158	−0.90972	1.09776	0.89319
0.72	−1.29186	−0.56793	1.30395	0.55537
0.76	−1.39858	−0.18205	1.40755	0.17245
0.80	−1.39351	0.21752	1.40010	−0.22494
0.84	−1.27726	0.59923	1.28198	−0.60506
0.88	−1.05919	0.93288	1.06244	−0.93759
0.92	−0.75676	1.19208	0.75879	−1.19604
0.96	−0.39406	1.35629	0.39504	−1.35983
1.00	0.00000	1.41251	0.00000	−1.41592

TABLA 3.
FUNCIONES CARACTERISTICAS Y DERIVADAS
VIGA EMPOTRADA-ARTICULADA
TERCER MODO

$\frac{y}{l}$	Z_3	$Z_3' = \frac{1}{\lambda_3}\frac{dZ_3}{dy}$	$Z_3'' = \frac{1}{\lambda_3^2}\frac{d^2Z_3}{dy^2}$	$Z_3''' = \frac{1}{\lambda_3^3}\frac{d^3Z_3}{dy^3}$
0,00	0,00000	0.00000	2.00000	− 2.00000
0,04	0,14410	0.65020	1.18532	− 1.97961
0,08	0,48626	0.97168	0.39742	− 1.85535
0,12	0.89584	0.98593	− 0.30845	− 1.57331
0,16	1,25604	0.74002	− 0.86560	− 1.13046
0,20	1,47476	0.30725	− 1.21523	− 0.56678
0,24	1,49419	− 0.21934	− 1.32168	0.04683
0,28	1.29662	− 0.73864	− 1.18195	0,62397
0,32	0.90489	− 1.15556	− 0.82867	1.07934
0,36	0,37703	− 1.39512	− 0.32637	1,34445
0,40	− 0.20439	− 1.41364	0.23807	1,37996
0,44	− 0,74658	− 1.20525	0.76897	1.18287
0,48	− 1,16223	− 0.80234	1.17711	0,78746
0,52	− 1.38422	− 0.26994	1.39411	0.26005
0,56	− 1.37687	0.30522	1.38344	− 0,31179
0,60	− 1,14194	0.82907	1.14631	− 0,83344
0,64	− 0,71844	1.21582	0,72134	− 1,21873
0,68	− 0,17628	1.40210	0.17821	− 1,40403
0,72	0.39519	1.35742	− 0.39391	− 1,35870
0,76	0,90188	2.08924	− 0.90103	− 1.09010
0,80	1.26035	0.64175	− 1.25980	− 0,64233
0,84	1.41160	0.08860	− 1.41124	− 0.08900
0,88	1.33072	− 0.47918	− 1.33049	0,47891
0,92	1.03098	− 0.96820	− 1.03085	0.96800
0,96	0.56168	− 1.29798	− 0.56162	1.29782
1.00	0.00000	− 1.41429	0.00000	1.41414

5.- SOLUCION DE EJERCICIOS Y PROGRAMAS DE MICROCOMPUTADORA

PROBLEMA E-1

Una masa de w = 985 kg se deja caer desde una altura de 2 cm . al centro de una viga simplemente apoyada de 350 cm. de longitud. El perfil de la viga es conocida como IPR 152x101 de 12.7 kg/m [Ver Manual AHMSA]. Despreciando la masa distribuida de la viga y suponiendo que después del primer contacto, la masa y la viga no se separan.

Se desea conocer:

a. La frecuencia
b. La deflexión total
c. La velocidad y aceleración en T = 0.08 seg.
d. El ángulo de fase

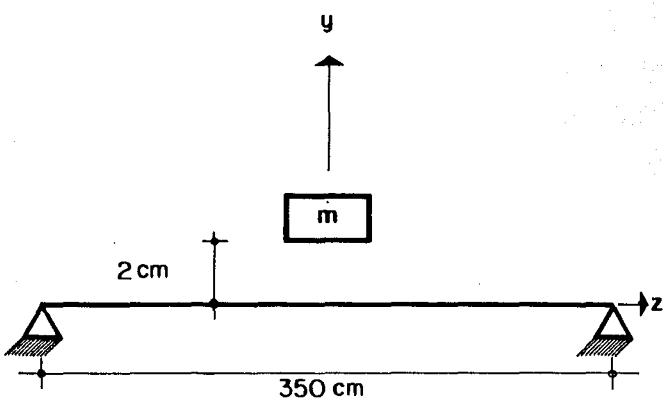


Figura E.1.1.

SOLUCION

La viga IPR 152 x 101 (12.7) tiene Ix = 616 cm^2. y
$E = 2 \times 10^6 kg/cm^2$

La deflexión de una viga apoyada libremente es:

$$\delta \text{ est} = \frac{WL^3}{48EI} = \frac{985[350]^3}{48[2 \times 10^6 \times 616]} = 1.066 \text{ cm.}$$

La frecuencia natural

$$P = \sqrt{\frac{g}{\delta set}} = \sqrt{\frac{981}{1.066}} = 30.33 \quad rad/seg$$

La frecuencia angular es

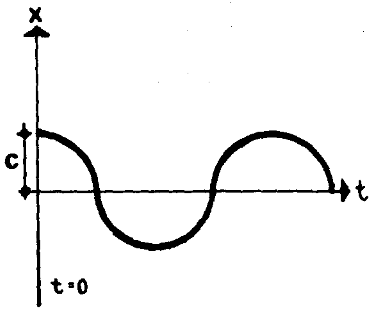
$$f = \frac{P}{2\pi} = \frac{30.33}{[6.2832]} = 4.83 \text{ ciclos por segundo}$$

La amplitud es:

$$c = \sqrt{(-\delta est)^2 + (\sqrt{2gh} / \sqrt{g/\delta est})^2}$$

$$c = \sqrt{(1.066)^2 + (2 \times 2 \times 1.066)^2} = 4.29 \text{ cm.}$$

La deflexión será 4.39 + 1.066 = 5.46 cm.



$c = 4.39$ cm.

$\dot{x}_o = 2gh = 62.64$ cm/seg.

$Pt = 30.38 \times 0.08 = 2.43$ rad

La velocidad y aceleración en $T = 0.08$ seg.

$x(t) = x_o \cos Pt + \dot{x}_o/P \text{ sen } Pt =$

$x(.08) = 4.39(\cos 2.43) + 2.07 \text{ sen } [2.43] = -1.97$ cm.

$\dot{x}(t) = -x_o\, P \text{ sen } Pt + \frac{\dot{x}_o}{p} (P) \cos Pt =$

$\dot{x}(.08) = -133.15[0.65]+62.64[-0.76] = -134.15$ cm/seg.

$\ddot{x}(t) = -x_o\, P^2 \cos Pt - \dot{x}_o\, P \text{ sen } Pt =$

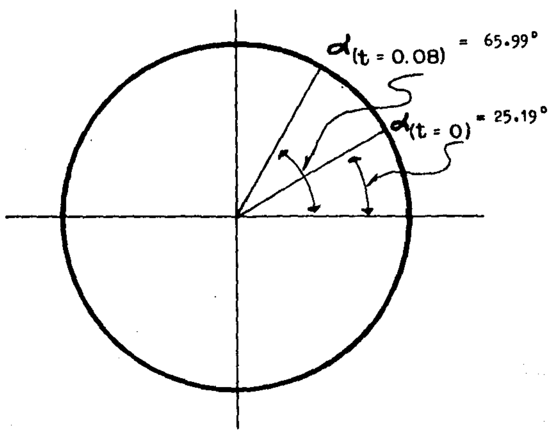
$\ddot{x}(.08) = -4038.4[-0.76]-1899.24[0.65] = 1834.68$ cm/seg^2.

El ángulo de fase es

$$\text{ángulo de fase} \quad \alpha_{(t=o)} = \tan^{-1} \frac{\dot{x}_o}{x_o P} = \tan^{-1} \frac{62.64}{4.39[30.33]} = 25.19°$$

$$\text{ángulo de fase} \quad \alpha_{t=0.08} = \tan^{-1} \frac{\dot{x}_o(t)}{x_o(t) P} = \tan^{-1} \frac{-134.5}{-1.97[30.33]} = 65.99°$$

Con éste último resultado observamos el cambio del ángulo de - fase a través del tiempo.



PROBLEMA E-2

El peso de una plataforma que se muestra en la Figura E.2.A. es de 50 tons.y se somete a una vibración libre, al librarlo de una fuerza que ejerce el gato hidráulico. La medición se empezó desde un desplazamiento x = 3 cm. en t = 0. Si el desplazamiento máximo del retorno es de 2 cm. en t = 0.64 seg.

OBTENER

a. El decremento logarítmico
b. El factor de amortiguamiento
c. El coeficiente de amortiguamiento viscoso
d. El coeficiente de amortiguamiento sólido
e. En qué tiempo se reduce la amplitud $A \leq 0.1$ cm.
f. Grafique el decremento de la amplitud.

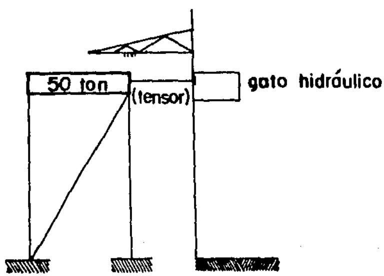


Figura E.2.A.

SOLUCION

a. Decremento logarítmico es:

$$\delta = Ln \frac{A_1}{A_2} = Ln \frac{3}{2} = 0.41$$

b. El factor de amortiguamiento es:

$$Si \quad \frac{A_1}{A_2} = e^{\frac{2\pi\eta}{\sqrt{1-\eta 2}}}$$

$$0.41 + \frac{2\pi\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \; ; \; \frac{0.41}{2\pi} \; ; \; \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = 0.065$$

$$.: \; \eta = 0.065$$

α = 2 (0.065) = 0.408 0.41 (Amortiguamiento pequeño)

c. El coeficiente de amortiguamiento viscoso.

$$P_D = \frac{2\pi}{T_D} = \frac{6.28}{0.64} = 9.813 \text{ rad/seg.}$$

$$P_D = P\sqrt{1-\eta^2}$$ movimiento sub-amortiguado.

$$P = \frac{P_D}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{9.813}{\sqrt{1-(0.065^2}} = 9.834 \text{ rad/seg.}$$

$$Ccr = 2mp = 2(9.834)\left(\frac{50\,000}{981}\right) = 1001.446 \text{ Kg-Seg/cm.}$$

$$\frac{c}{cr} = \eta \, , \; c = 0.065 \; Cr \; ; \; c = 0.065(1001.446) =$$

$$c = 65,159 \text{ Kg-Seg/cm.}$$

d. El coeficiente de amortiguamiento sólido.

$$cq = \frac{\eta\ k}{P}$$

$$k = P^2 m = (9.834)^2\ (50.968) = 4928.991 \ \text{kg/cm.}$$

$$cq = \frac{0.065\ (4928.991)}{9.834} = 32.579 \ \text{kg-seg/cm.}$$

e. Cálculo del tiempo cuando se reduce la amplitud $A \leqslant 0.1$ cm.

$$\beta = e^{-2\pi\eta\,[1+\eta^2/2]} = e^{-0.4084[1+0.0021]} = 0.6641$$

$$A_1 = 3 \text{ cm.}$$

A_i	$i-1$	β^{i-1}	$A_1\beta$	CICLOS	A_i	$i-1$	β^{i-1}	$A_1\beta$	CICLOS
A_1	0	1	3		A_6	5	0.130	0.389	5
A_2	1	0.6641	1.994	1	A_7	6	0.086	0.259	6
A_3	2	0.441	1.326	2	A_8	7	0.057	0.172	7
A_4	3	0.294	0.881	3	A_9	8	0.038	0.114	8
A_5	4	0.195	0.586	4	A_{10}	9	0.025	0.076	9

Comprobando

$$\frac{3 \text{ cm.}}{0.1 \text{ cm.}} = 30$$

$$\text{Ln } 30 = 3.4012$$

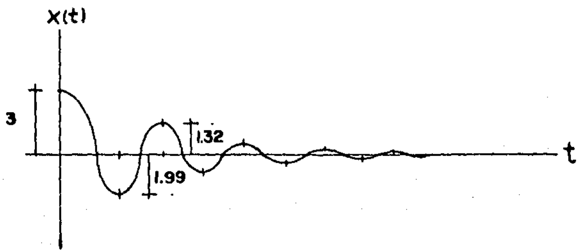
$$\text{Ln } \frac{A_1}{A_2} = \delta + \delta + \delta + \delta + \ldots + \delta = k\,\delta$$

$$\delta = 0.41$$

$$\text{Ln}\ \frac{3}{0.1} = \text{Ln}\ 30 = 3.4012\ k$$

$$k = \frac{\text{Ln}\ 30}{6} = \frac{3.4012}{0.41} = 8.29 \Rightarrow 9\ \text{ciclos}$$

f. Gráfica del decremento logarítmico



PROBLEMA E-3

La Planta Halocarburos, S.A. de C.V., ubicada en Tulpetlac Edo. de México, requiere determinar la respuesta de un garage de trenes ante excitaciones externas. Los ingenieros encargados decidieron probar mediante un tensor que trabaja con una fuerza armónica. Ver Figura E-3-1. Si se consideran 45 segundos de tiempo de prueba con un desplazamiento y velocidad inicial de 0.25 cm. y 3.4 cm/seg. respectivamente.

Se desea obtener:

a. La respuesta de vibración libre

b. La respuesta de vibración sobre-amortiguada.

c. La respuesta de vibración sub-amortiguada

d. La respuesta de vibración amortiguada críticamente

e. La respuesta tomando en cuenta la acción de la fuerza excitadora en cada movimiento de los incisos anteriores.

f. Resumen de resultados

Los valores c son: a: c = o, b: c =2310, c: c = 395 y d: c = 1559, en [Kg - seg/cm] c/u.

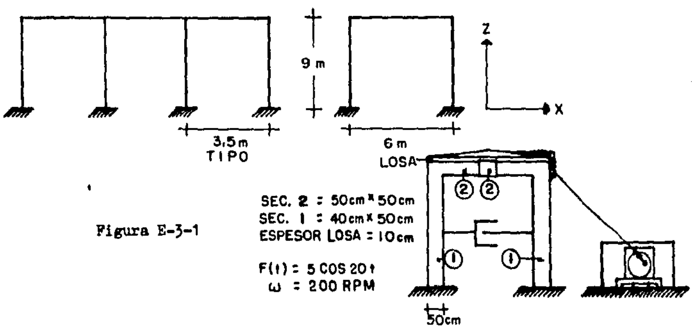


Figura E-3-1

La rigidez del marco es:

$$k = \frac{24\ EI}{H^3}$$

El módulo de elasticidad es:

$$E = 10\,000 \sqrt{f'c} = 10\,000\sqrt{200} = 141\,421.35 \quad kg/cm^2.$$

La inercia es:

$$Iy = \frac{B\ h^3}{12} = \frac{40 \times (50)^3}{12} = 416\,666.67\ cm^4.$$

$$H = 8\ m. = 800\ cm.$$

$$EI = 141\,421.35 \times 416\,666.67 = 5.8925 \times 10^{10}\ kg/cm^2.$$

$$k = \frac{24\ (5.8925 \times 10^{10})}{(800)^3} = 2762.10\ kg/cm.$$

Cálculo del peso:

sec. (2) principal	$0.50 \times 0.50 \times 6 \times 4 \times 2.4 =$	14.4 tons.
losa	$0.15 \times 10.5 \times 6 \times 2.4 =$	22.68 tons.
sec. (2) secundaria	$0.50 \times 0.50 \times 10.5 \times 2.4 =$	6.3 tons.
relleno	$2 \times \frac{3 \times 0.10}{2} \times 10.5 \times 1.8 =$	5.67 tons.
		49.05 tons.

Por consideraciones externas no estimadas aumentamos un 10%

$$w = 49.05 \times 1.1 = 53.955 \quad tons.$$

La rigidez total es 2762.10 x 4 = 11048.4 kg/cm.

La masa es:

$$M = 53\ 955/981 = 55 \text{ kg seg}^2/\text{cm}.$$

La frecuencia natural es:

$$P = \sqrt{\frac{11048.4}{55}} = 14.1732 \text{ rad/seg.}$$

Desarrollo:

Las respuestas que obedecen a cada movimiento respectivamente están dadas por las siguientes expresiones:

1. $x(t) = C_1 \cos pt + C_2 \operatorname{sen} pt$

2. $x(t) = e^{-\eta pt}(C_1 \cos P_D t + C_2 \operatorname{sen} P_D t) \qquad P_D = \sqrt{\eta^2 - 1}$

3. $x(t) = e^{-\eta pt}[C_1 + C_2 t]$

4. $x(t) = e^{-\eta pt}[C_1 \cos P't + C_2 \operatorname{sen} P't] \quad P' = \sqrt{1-\eta^2}$

Para las condiciones de $t = o$, $x = x_o$ y $\dot{x} = \dot{x}_o$, y sabiendo que $\eta = n/p$ nos queda que:

1. $x(t) = x_o \cos pt + \dot{x}_o \dfrac{\operatorname{sen} pt}{p}, \qquad P = \sqrt{k/m}$

2. $x(t) = e^{-nt}[x_o \cos P_D t + \dot{x}_o - nx_o \dfrac{\operatorname{sen} P_D t}{P_D}], \quad P_D = \sqrt{n^2 - p^2}$

3. $x(t) = e^{-nt}[x_o + (\dot{x}_o - nx_o)\, t], \qquad P = n$

4. $x(t) = e^{-nt}[x_o \cos P't + \dot{x}_o - nx_o \frac{\text{sen } P't}{P'}]$, $P' = \sqrt{P^2 - n^2}$

De esta manera se puede establecer las siguientes ecuaciones:

$x(t) = e^{-nt}[x_o \epsilon + (\dot{x}_o - nx_o)\mho]$ $\quad P \neq n$

$\epsilon = \cos Pit$

$\mho = \frac{\text{sen } Pit}{Pi}$

donde $Pi = P$, o P_D, o P' ; según sea el caso de movimiento

$x(t) = e^{-nt}[x_o + (\dot{x}_o - nx_o)\, t]$ $\quad P = n$

PROGRAMA 1

HP 41C

Programa para obtener el desplazamiento a través del tiempo - en sistemas de un grado de libertad. En vibración libre con o sin amortiguamiento.

```
001   LBL ᵀVIBRAR
002   RAD
003   ᵀX0= ?
004   PROMPT
005   STO 00
006   ᵀV0 = ?
007   PROMPT
008   STO 01
009   ᵀN = ?
010   PROMPT
011   STO 02
012   ᵀP = ?
013   PROMPT
014   STO 03
015   ᵀT1 = ?
016   PROMPT
017   STO 04
018   ᵀT2 = ?
019   PROMPT
020   STO 12
021   ᵀΔT = ?
022   PROMPT
023   STO 06
024   GTO ᵀLIBRE
025   END
001   LBL ᵀLIBRE
002   RCL 04
003   ᵀT1 = 1
004   ARCL X
005   AVIEW
006   PSE
007   ᵀLIBRE
008   AVIEW
009   RCL 02
010   X = 0 ?
011   GTO 01
012   GTO ᵀ<N = P>
013   LBL 01
014   1
015   STO 05
016   GTO ᵀDESPLAZ
017   END
001   LBL ᵀDESPLAZ
002   RCL 05
003   RCL03
004   *
005   ENTER↑
006   RCL4
007   *
008   STO 07
009   COS
010   STO 08
011   RCL 07
012   SIN
013   ENTERT↑
014   RCL 03
015   ENTER↑
016   RCL 05
017   *
018   /
019   STO 09
020   RCL 02
021   RCL 04
022   *
023   CHS
024   E↑X
025   STO 10
026   RCL 02
027   RCL 00
028   *
029   CHS
030   ENTER↑
031   RCL 01
032   +
033   ENTER
034   RCL 09
035   *
036   STO 11
037   RCL 00
038   RCL 08
039   *
040   ENTER↑
041   RCL 11
042   +
043   ENTEP↑
044   RCL 10
045   *
046   ᵀY =
047   ARCL X
```

```
048    AVIEW
049    PSE
050    RCL 04
051    RCL 06
052    +
053    STO 04
054    RCL 12
055    RCL 04
056    X<>Y
057    X< = Y ?
058    GTO 00
059    GTO  LIBRE
060    LBL 00
061    STOP
062    END

001    LBL   <N = P>
002    DEG
003    CRITICO
004    AVIEW
005    RCL 02
006    RCL 03
007    X = Y ?
008    GTO 02
009    GTO  < N <>  P>
010    LBL 02
011    RCL 02
012    LCL 04
013    *
014    CHS
015    E↗X
016    STO 10
017    RCL 00
018    RCL 02
019    *
020    ENTER↗
021    RCL 01
022    +
023    ENTER↗
024    RCL 04
025    *
026    ENTER↗
027    RCL 00
028    +
029    STO 05
030    ENTER
031    RCL 10
032    *
033    TX =
034    ARCLX
035    AVIEW
036    PSE
037    PSE
038    RCL 04
039    RCL 06
040    +
041    STO 04
042    RCL 12
043    RCL 04
044    X<> Y
045    X<  =  Y?
046    GTO 00
047    GTO T LIBRE
048    LBL 00

049    STOP
050    END
001    LBL T < N< > P>
002    RAD
003    SOBRE - A
004    AVIEW
005    RCL 02
006    RCL 03
007    X > Y ?
008    GTO 04
009    GTO 03
010    LBL 03
011    RCL 02
012    X↗ 2
013    RCL 03
014    X↗ 2
015    -
016    SQRT
017    STO 05
018    GTO T DESPLAZ
019    LBL 04
020    SUB - A
021    AVIEW
022    RCL 03
023    X↗ 2
024    RCL 02
025    X↗ 2
026    -
027    SQRT
028    STO 05
029    GTO T DESPLAZ
030    END
```

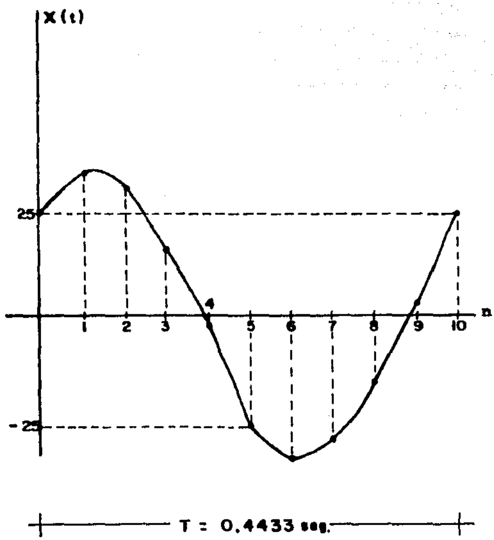
Solución:

a. Respuesta ante vibración libre

$x_o = 0.25$ cm. , $\dot{x}_o = 3.5$ cm/seg. , $P = 14.1732$ rad/seg.

$n = 0 \qquad T = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{14.1732} = 0.4433$ seg.

n	t (seg)	x(t) (cm)
0	0	0.25
1	0.044	0.347
2	0.088	0.312
3	0.183	0.158
4	0.177	-0.057
5	0.222	-0.25
6	0.266	-0.347
7	0.310	-0.312
8	0.355	-0.158
9	0.399	0.057
10	0.443	0.25
11	0.488	0.347



b. Respuesta ante vibración libre sobre-amortiguada $n > p$

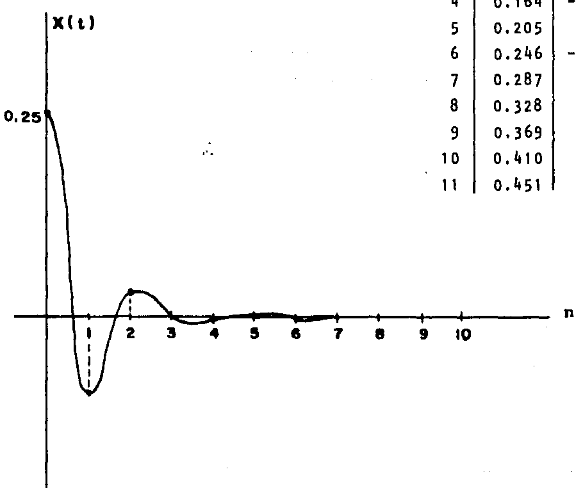
$x_o = 0.25$ cm ; $\dot{x}_o = 3.5$ cm/seg ; $c = 2310$; $n = \frac{c}{2m} = \frac{2310}{110} = 21$

$P = 14.1732$ rad/seg.

$p' = \sqrt{p^2 - n^2} = \sqrt{441 - 200.88} = 15.496$ rad/seg.

$T = \frac{2\pi}{p'} = 0.405$ seg.

n	t (seg)	x(t) (cm)
0	0	0.25
1	0.041	-0.098
2	0.081	0.031
3	0.122	-0.006
4	0.164	-0.001
5	0.205	0.002
6	0.246	-0.001
7	0.287	0.001
8	0.328	0
9	0.369	0
10	0.410	0
11	0.451	0



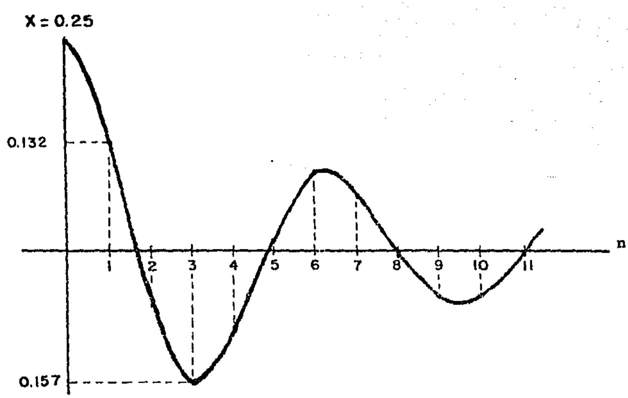
c. La respuesta ante vibración subamortiguada $p > n$

$x_o = 0.25$ cm ; $\dot{x}_o = 3.5$ cm/seg , $c = 395$, $n = \frac{c}{2m} = \frac{395}{110} = 3.59$

$P = 14.1732$ rad/seg

$P_D = \sqrt{(14.1732)^2 - (3.59)^2} = 13.711$ rad/seg $\quad T = \frac{2\pi}{P_D} = 0.4583$ seg.

n	t (seg)	x(t) (cm)
0	0	0.25
1	0.046	0.132
2	0.092	-0.059
3	0.137	-0.157
4	0.183	-0.108
5	0.229	0.112
6	0.275	0.093
7	0.321	0.081
8	0.367	0.009
9	0.412	-0.052
10	0.458	-0.058
11	0.504	-0.017

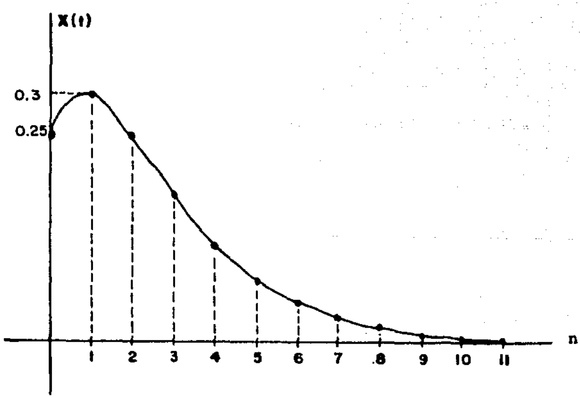


d. Respuesta ante vibración amortiguada críticamente $n = p$

$x_o = 0.25$ cm, $\dot{x}_o = 3.5$ cm/seg , $c = 1559$ $n = \frac{c}{2m} = \frac{1559}{110} = 14.173$

$p = 14.1732$ rad/seg. $T = \frac{2\pi}{p} = 0.443$ seg

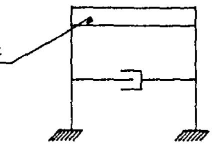
n	t (seg)	x(t) (cm)
0	0	0.25
1	0.044	0.3
2	0.088	0.25
3	0.133	0.182
4	0.177	0.123
5	0.222	0.08
6	0.266	0.05
7	0.310	0.031
8	0.355	0.019
9	0.399	0.011
10	0.443	0.007
11	0.488	0.004



e . La respuesta tomando en cuenta la acción de la fuerza excitadora en cada movimiento de los incisos anteriores

f . Resumen de resultados.

$F(t) = 5 \cos 20\, t$



Peso = 53 955 kg.

K = 11048.4 kg/cm.

$\omega = 200$ RPM $= 20.94$ rad/seg^2

PROGRAMA 2. Contribución de la fuerza $x(t) = [F/[k-\omega^2 m]] \cos \omega t$

```
01   LBL ᵀF/ < k-w>
02   RAD
03   ᵀF=?
04   PROMPT
05   STO 00
06   ᵀK = ?
07   PROMPT
08   STO 01
09   ᵀW = ?
10   PROMPT
11   STO 02
12   ᵀPESO ?
13   PROMPT
14   STO 03
15   ᵀT1 = ?
16   PROMPT
17   STO 04
18   ᵀT2 = 2
19   PROMPT
20   STO 05
21   ᵀΔT= ?
22   PROMPT
23   STO 06
24   GTO 03
25   LBL 03
26   RCL 04
27   ᵀT1 =
28   ARCLX
29   AVIEW
30   RCL 03
31   981
32   /
33   ENTER↑
34   RCL 02
35   X↑2
36   *
37   CHS
38   RCL 01
39   +
40   STO 07
41   RCL 02
42   RCL 04
```

```
*
COS
STO 08
RCL 00
RCL 08
*
ENTER↑
RCL 07
/
STO 10
TXc PART =
PROMPT
STO 13
RCL 10
RCL 13
+
STO 14
Xc + Xd =
ARCLX
AVIEW
STOP
RCL 04
RCL 06
+
STO 04
RCL 05
RCL 04
X<>Y
X<=Y ?
GTO 00
GTO 03
LBL 00
END
```

DESPLAZAMIENTO
PARA CONDICIONES INICIALES DE
VIBRACIONE LIBRE Y AMORTIGUADA

SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL

DESPLAZAMIENTO
PARA CONDICIONES INICIALES NULAS
DEL MOVIMIENTO ARMONICO FORZADO

$$x = \frac{F}{K}\,\frac{\cos \omega t - \cos Pt}{1 - (\omega/P)^2} \qquad c=0$$

y

$$x = \frac{F}{K}\,\frac{\left(1-\left(\frac{\omega}{P}\right)^2\right)\cos \omega t + 2\frac{n\omega}{nP}\,\mathrm{sen}\,Pt}{\sqrt{\left[1-(\omega/P)^2\right]^2 + 4\left(\frac{n}{n_c}\right)^2\left(\frac{\omega}{P}\right)^2}} \qquad c\neq 0$$

N	t (seg)	x(t) Libre	x(t) Sobre-A	x(t) sub-A	x(t) Crít	x(F) Libre	x(F) Sobre-A	x(F) Sub-A	x(F) Crítico
0	0	0.25	0.25	0.25	0.25	0.000	-.118	-.382	-.168
1	0.04	0.344	-.089	0.132	0.302	0.067	0.246	-.007	0.200
2	0.08	0.330	0.015	-.059	0.262	0.202	0.447	0.282	0.435
3	0.12	0.212	0.006	-.157	0.200	0.260	0.352	0.452	0.383
4	0.16	0.029	-.007	-.108	0.143	0.129	0.025	0.324	0.007
5	0.20	-.164	0.004	0.012	0.097	-.173	-.319	-.018	-.279
6	0.24	-.305	-.001	0.093	0.065	-.488	-.452	-.348	-.452
7	0.28	-.351	0.000	0.081	0.042	-.608	-.286	-.448	-.325
8	0.32	-.281	0.000	-.009	0.027	-.417	0.068	-.251	0.017
9	0.36	-.133	0.000	-.052	0.017	0.027	0.379	0.111	0.347
10	0.40	0.062	0.000	-.058	0.011	0.504	0.438	0.400	0.448
111	0.44	0.238	0.000	-.017	0.007	0.756	0.207	0.425	0.254
12	0.48	0.34	0.000	0.027	0.004	0.642	-.161	0.168	-.110

PROBLEMA E-4

Un motor de 7 800 kg se va a sujetar a una viga que en sus extremos va a estar apoyada; ver la Figura E-4.a,b. Encuentre:

a. La frecuencia natural, b. La Rigidez, c. El desplazamiento máximo. Compare resultados en ambos casos (Ver Figura [E-4.a, b]) Si el motor transmite una frecuencia de 452 R.P.M. y una fuerza de 40.18 kg.

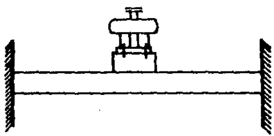
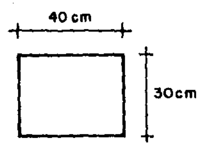


FIG. E-4.a



Sección
$f'c = 200\ kg/cm^2$

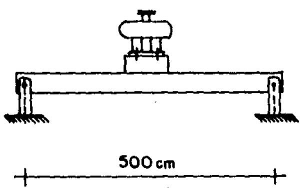
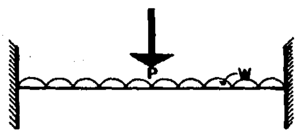


FIG. E-4.b

$$EI = 10\,000\sqrt{200} \times \frac{40\,(30)^3}{12} = 1.273 \times 10^{10}\ Kg/cm^2$$

Solución:



w = 0.4 x 0.3 x 2.4 = 0.288 Ton/m. = 2.88 kg/cm.

$$\delta \text{ est} = \frac{PL^3}{192\ EI} + \frac{w\ L^4}{384\ EI} = \frac{7\ 800\ (500)^3}{192(1.273 \times 10^{10})} + \frac{2.88\ [500]^4}{384[1.273 \times 10^{10}]}$$

$$\delta \text{ est} = 0.3989 + 0.0368 = 0.436 \text{ cm.}$$

flecha límite = $\frac{500}{500}$ = 1.000 cm. ya que soporta equipo.

δ est $<$ δ permisible

a. La frecuencia natural es:

$$P = \sqrt{\frac{g}{\delta \text{ est}}} = \sqrt{\frac{981}{0.436}} = 47.434 \text{ rad/seg.}$$

b. La rigidez es:

$$K = \frac{P}{\delta} = \frac{7\ 800 + 1440}{0.436} = 21\ 192.66 \text{ kg/cm.}$$

c. El desplazamiento máximo es:

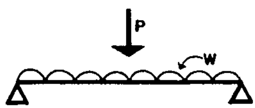
ω = 452 R. P. M.

$\omega = \frac{452 \times 2\pi}{60} = 47.383$ rad/seg.   47.434 rad/seg*

$x = \frac{F}{K} \frac{\cos \omega t}{(1 - \frac{\omega^2}{P^2})}$;   t = o, x = X máx.

$x = \frac{40.18}{21\ 182.66} \frac{1}{(0.00424)} = 0.447$ cm.

δ estático + δ dinámico = 0.436 + 0.447 = 0.883 cm.



$\delta\, est = \frac{PL^3}{48\ EI} + \frac{5}{384} \frac{WL^4}{EI} = \frac{7\ 800\ (500)^3}{48[1.273\times10^{10}} + \frac{5}{384} \frac{2.88[500]^4}{1.273\times10^{10}} =$

$\delta\, est = 1.596 + 0.18397 = 1.780$ cm.

a. La frecuencia natural es:

$P = \sqrt{\frac{981}{1.78}} = 23.476$ rad/seg

b. La rigidez es:

$K = \frac{9240}{1.78} = 5\ 191.011$ kg/cm.

c. El desplazamiento máximo es:

$$x = \frac{40.18}{5\ 191.011} \quad \frac{1}{(1-4.065)} = -0.0025^{**}_{3}$$

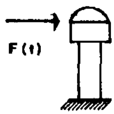
$\delta est + \delta$ dinámica = 1.78 +0.0025 = 1.782 cm.

* La frecuencia natural es aproximada a la frecuencia excitadora por lo que entra en resonancia la viga y ésto hace que el desplazamiento dinámico sea máximo.

** Se observa claramente que el desplazamiento dinámico es muy pequeño, ya que la diferencia entre las frecuencias es considerable.

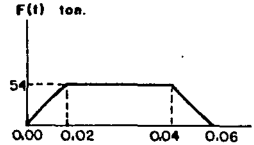
PROBLEMA E-5

Determinar la respuesta dinámica de la estructura indicada en la Figura E-5.1. Cuando está sometida a la acción de la carga dinámica (explosión). Utilice la integral de Duhamel (Solución Incremental).



W = 17 500 Kg

K = 17 800 Kg/cm



La solución incremental de la integral de Duhamel está dada por:

$$A(t_i) = A(t_{i-1})+[F(t_{i-1}) - t_{i-1}\frac{\Delta Fi}{\Delta ti}]\ (\text{sen } Pt_i - \text{sen } Pt_{i-1})/P_t$$

$$\frac{\Delta F_i}{P^2\ \Delta t_i}\ [\cos Pt_i - \cos Pt_{i-1} + P(t_i \text{ sen } Pt_i - t_{i-1} \text{ sen } Pt_{i-1})]$$

$$B(t_i) = B(t_{i-1})+[F(t_{i-1}) - t_{i-1}\frac{\Delta F_i}{\Delta t_i}](\cos Pt_{i-1} - \cos Pt_i)/\ P +$$

$$\frac{\Delta F_i}{P^2 \Delta t_i}\ [\text{sen } Pt_i - \text{sen } Pt_{i-1} - P(t_i \cos Pt_i - t_{i-1} \cos Pt_{i-1})]$$

$$x(t) = [A \text{ sen } P_t - B \cos P_t]/MP$$

$$M = \frac{17\ 500}{981} = 17.839 \quad \text{kg/seg}^2\text{/cm.}$$

$$P = \sqrt{\frac{17\ 800}{17.839}} = 31.58 \text{ rad/seg.}$$

N = 6 ; ya que el tiempo va de $t = 0$ a $t = 0.10$ seg. con $\Delta\tau = 0.02$

Programa de la solución incremental de la integral de Duhamel en Sigma Commodore 16 k.

```
005    REM SOLUCION INCREMT
010    PRINT "DAME N FRECUENCIA P, MASA M"
015    INPUT N, P, M
017    PRINT "DAME LOS TIEMPOS": PRINT
020    FOR I = 1 TON N
025    PRINT "T.(" : I. " ) =":
030    INPUT T (I)
040    NEXT I : PRINT: PRINT
045    PRINT "DAME LAS FUERZAS": PRINT
050    FOR I = TO N
055    PRINT "F("; I  ; " ) =";
060    INPUT F(I)
070    NEXT I: PRINT: PRINT
080    T(0) = 0
090    F(0) = 0
100    SUM = 0 : MAS = 0
110    FOR I = TO N
120    Z =  (F(I) - F (I-1)) / (T(2) - T(1))
130    W = (F(I) - F(I-1)  / (P 2* (T(2) - T(1))
140    WA(I) = SIN (P*T(1))
150    WB(I) = SIN (P*T(I-1))
160    WC(I) = COS (P*T(I-1))
170    WD(I) = COS (P*T(I-1))
180    FC(I)= F(I-1) - T(I-1)*Z
190    A11(I) = FC(I) *WA(I)-WB(I))/P
200    A22(I) = FC(I) *WD(I)-WC(I))/P
210    G1(I)=W*(WC(I)-WD(I))
220    G2(I)=W*P*(T(I)*WA(I)-T(I-1)*WB(I))
230    D11(I)=G1(I)+G2(I)
240    H1(I)=W*(WA(I)-WB(I))
250    H2(I)=W*(T(I)*(WC(I)-T(I-1)*WD(I)
260    D22(I)=H1(I)-H2(I)
```

```
270    AA(I)=A11(I)+D11(I)
280    BB(I)=A22(I)+D22(I)
290    CA(I)=AA(I)+SUM
300    CB(I)=BB(I)+MAS
310    SUM=SUM+AA(I)
320    MAS=MAS+BB(I)
330    NEXT I
340    FOR I = 1 TON
350    X1(I)=CA(I)*WA(I)-CB(I)*WC(I)
360    X(I)=X1(I)/CM*P
370    NEX I
380    PRINT "TIEMPO T(I)" ;"FUERZA F(I)"; "DESPLAZ X(I)"
390    FOR I = TO N
400    PRINT  "T(I)", "F(I)" "X(I)";
410    PRINT
420    NEXT I
430    END
```

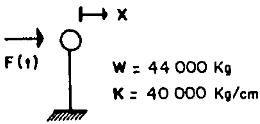
RESULTADOS:

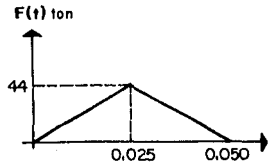
T(I)	F(I)	X(I)
0	0	0
0.02	54 000	0.19781766
0.04	54 000	1.2926031
0.06	0	2.86195219
0.08	0	3.52488551
0.10	0	2.8278841

PROBLEMA E-6

Obtener la respuesta de la siguiente estructura sometida a la carga que se indica usando la integral Duhamel. Utilice la regla de Simpson y trapecial, compare resultados,

El movimiento es no amortiguado.





Datos:

$P = 29.86$ rad / seg

$\Delta\tau = T/10$, $T = 0.20$ seg.

Obtener como valor extremo $\Delta\tau = 0.20$ seg.

a. SIMPSON

$$\frac{\bar{A}\,\Sigma}{3}(t) = \frac{\bar{B}\,\Sigma}{3}(t-2\Delta\tau)+[F(t-2\Delta\tau)\cos P(t-2\Delta\tau)+4F(t-\Delta\tau)\cos P(t-\Delta\tau)+F(t)\cos P_t]$$

$$\frac{\bar{B}\,\Sigma}{3}(t) = \frac{\bar{B}\,\Sigma}{3}(t-2\Delta\tau)+[F(t-2\Delta\tau)\operatorname{sen} P(t-2\Delta\tau)+4F(t-\Delta\tau)\operatorname{sen} P(t-\Delta\tau)+F(t)\operatorname{sen} P_t]$$

$$P = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{40\ 000 \times 981}{4\ 400}} = 29.86 \text{ rad/seg}$$

N	τ	F(τ)	COS Pτ	F(τ)COS Pτ	FACTOR	FACXF(τ)COSP	Δ A	$\sum_{3}^{A}$
1	0	0	1	0	0	0	0	0
2	0.005	8 800	0.9889	8 702.10	1	34 808.42	51 629.61	
3	0.010	17 600	0.9557	16 821.19	1	16 821.19		51 619.61
4	0.015	26 400	0.9014	23 795.87	4	95 183.46	14 112	
5	0.020	35 200	0.8269	29 107.35	1	29 107.85		192 741.61
6	0.025	44 000	0.7341	32 299.09	4	129 196.34	180 299.97	
7	0.030	35 200	0.6249	21 996.28	1	21 996.28		373 041.58
8	0.035	26 400	0.5019	13 247.93	4	52 991.71	81 457.25	
9	0.040	17 600	0.3676	6 469.26	1	6 469.26		454 498.83
10	0.045	8 800	0.2251	1 981.31	4	7 925.26	14 394.52	
11	0.050	0.000	0.0777	0	1	0		468 893.35

N	τ	$F(\tau)$	SEN $P\tau$	$F(\tau)$ SEN $P\tau$	FACTOR	FAC x $F(\tau)$ SEN	ΔB	$\overset{B}{\underset{3}{\Sigma}}$
1	0	0	0	0	1	0		
2	0.005	8 800	0.1488	1 308.96	4	5 235.86	10 413.47	
3	0.010	17 600	0.2942	5 177.61	1	5 177.61		10 413.47
4	0.015	26 400	0.4331	11 433.14	4	45 732.58	70 704.18	
5	0.020	35 200	0.5623	19 793.99	1	19 793.99		81 117.65
6	0.025	44 000	0.6791	29 879.24	4	119 516.97	166 791.93	
7	0.030	35 200	0.7807	27 480.97	1	27 480.97		247 909.58
8	0.035	26 400	0.8650	22 835.33	4	91 341.33	135 190.22	
9	0.040	17 600	0.9300	16 367.92	1	16 367.92		383 099.80
10	0.045	8 800	0.9743	8 574.05	4	34 296.21	50 664.13	
11	0.050	0.000	0.9970	0 000.0	1	000		433 763.93

$$A(t) \doteq \Delta\tau \; \frac{1}{a} \left[\sum_a^A (t) \right] \; ; \quad a = 3$$

$$B(t) \doteq \Delta\tau \; \frac{1}{a} \left[\sum_a^B (t) \right] ; \quad a = 3$$

$$x(t) = \frac{\Delta\tau}{MP} \; \frac{1}{a} \left[\sum_a^A (t) \text{ sen } pt - \sum_a^B (t) \cos pt \right] = G \times R$$

$$G = \frac{\Delta\tau}{MP} \; \frac{1}{a} = \frac{0.005}{44.85\,(29.86)\,3} = 1.24 \times 10^{-6}$$

N	τ	$F(\tau)$	$\sum_3^A$	$\sum_3^B$	$\sum_3^A(t)$ sen Pt	$\sum_3^B(t)$ cos Pt	$\sum_3^A(t)$ sen Pt $-\sum_3^B(t)$ cos Pt	(cm) G x R
1	0	0	0					
2	0.005	8 800						
3	0.010	17 600	51 629.61	10 413.47	15 189.43	9 952.15	5 237.15	0.00649
4	0.015	26 400						
5	0.020	35 200	192 741.61	81 117.65	108 378.61	89 618.27	18 760.34	0.02326
6	0.025	44 000						
7	0.030	35 200	373 041.58	247 909.58	291 233.56	181 992.07	109 241.49	0.13546
8	0.035	26 400						
9	0.040	17 600	454 498.83	383 099.80	422 683.91	140 827.49	281 856.42	0.34950
10	0.045	8 800						
11	0.050	0	468 893.35	433 763.93	467 486.67	33 703.46	433 783.21	0.53789

b. Trapecial

$$\sum_{2}^{A} (t) + \sum_{2}^{A} (t-\Delta\tau)+[F(t-\Delta\tau)\cos P\,(t-\Delta\tau)+F(t)\,\cos Pt]$$

$$\sum_{2}^{B} (t) = \sum_{2}^{B} (t-\Delta\tau)+[F(t-\Delta\tau)\,\mathrm{sen}\,P(t-\Delta\tau)+F(t)\,\mathrm{sen}\,Pt]$$

N	τ	$F(\tau)$	COS $P\tau$	$F(\tau)$COS $P\tau$	ΔA	$\sum_2^A$	SEN $P\tau$	$F(\tau)$SEN $P\tau$	ΔB	$\sum_2^B$
1	0.0	0.00	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0.005	8 800	0.9889	8 702.10	8 702.10	8 702.10	0.1488	1 308.96	1 308.96	1 308.96
3	0.010	17 600	0.9557	16 821.19	25 523.29	34 225.4	-0.2942	5 177.61	6 486.57	7 795.53
4	0.15	26 400	0.9014	23 795.87	40 617.06	74 842.5	0.4331	11 433.14	16 610.75	24 406.28
5	0.020	35 200	0.8269	29 107.35	52 903.22	127 745.68	-0.5623	19 793.99	31 227.13	55 633.41
6	0.025	44 000	0.7341	32 299.09	61 406.44	189 152.12	0.6791	29 879.24	49 673.23	105 306.64
7	0.030	35 200	0.6249	21 996.28	54 295.37	243 447.49	-0.7807	27 480.97	57 360.21	162 666.85
8	0.035	26 400	0.5019	13 247.93	35 244.21	278 691.70	0.8650	22 835.33	50 316.30	212 983.15
9	0.040	17 500	0.3676	6 469.26	19 717.19	298 408.9	-0.9300	16 367.92	39 203.25	252 186.40
10	0.045	8 800	0.2251	1 981.31	8 450.57	306 859.5	0.9743	8 574.05	24 941.0	277 128.4
11	0.050	000	0.0777	0	1 981.31	308 841.8	0.9970	0	8 574.1	285 702.5

$$A\,(t) \doteq \Delta\tau \;\frac{1}{a}\;[\sum_{a}^{A} (t)\,] \quad ; \quad a = 2$$

$$B\,(t) \doteq \Delta\tau \;\frac{1}{a}\;[\sum_{a}^{A} (t)\,] \quad ; \quad a = 2$$

$$x(t) = \frac{\Delta \tau}{MPa} \left[\sum_{a}^{A} (t) \text{ sen } P_t - \sum_{a}^{B} (t) \cos pt \right] = G \times R$$

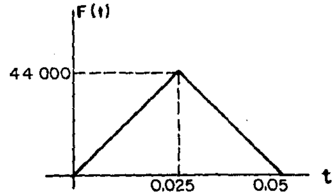
$$G = \frac{0.005}{44.85\ (29.86)\ 2} = 1.867 \times 10^{-6}$$

N	τ	$F(\tau)$	$\sum_{2}^{A}(t)$ sen P t	$\sum_{2}^{B}(t)$ cos P t	R	(cm) G x R
1	0.00	0.00	0	0	0	0
2	0.005	8 800	1 294.87	1 294.43	0.44	0.00000
3	0.010	17 600	10 069.11	7 450.19	2 618.92	0.0049
4	0.015	26 400	32 414.29	21 999.82	10 414.47	0.0194
5	0.020	35 200	71 831.40	46 003.27	25 828.13	0.0482
6	0.025	44 000	128 453.20	77 305.60	51 147.60	0.0955
7	0.030	35 200	190 059.46	101 650.51	88 408.95	0.1651
8	0.035	26 400	241 068.32	106 896.24	134 172.08	0.2505
9	0.040	17 600	277 520.28	92 703.72	184 816.56	0.3451
10	0.045	8 800	298 973.21	62 381.60	236 591.61	0.4417
11	0.050	0	307 915.27	22 199.08	285 716.19	0.5334

PROBLEMA E-7

Con los métodos de integración de diferencias centrales ,- - Houbolty Newmark, obtener la respuesta (desplazamiento) de la estructura indicada en el Problema E-6; compare resultados:

Datos:



w = 44 000 kg

ω = 29.86 rad/seg.

T = 0.21 seg.

ΔT = 0.005 seg

k = 40 000 kg/cm

Método de diferencias centrales.

Las expresiones* que deducen la tabla siguiente son:

$M = w/981$ $\qquad a_3 = \Delta T^2/2$

$a_o = 1/\Delta T^2$ $\qquad F2(T) = F(T) - (K - a_2 M)x_i - (a_o M - a_1 c)x_{i-1}$

$a_1 = 1/2\Delta T$ $\qquad x_{i+1} = \dfrac{F2(T)}{\left[\dfrac{M}{\Delta T^2} + \dfrac{C}{2\Delta T}\right]}$

$a_2 = 2/\Delta T^2$

$$A_i = a_o \quad (x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1})$$

$$V_i = a_1 \quad (-x_{i-1} + x_{i+1})$$

DATOS	t	000	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030	0.035	0.040	0.045	0.050
	x_i	0	0	0.0049	0.0195	0.0484	0.0958	0.1656	0.2513	0.346	0.4430	0.5349
	x_{i-1}	0	0	0	0.0049	0.0195	0.0484	0.0958	0.1656	0.2513	0.3461	0.4430
	F(T)	0	8 800	17 600	26 400	35 200	44 000	35 200	26 400	17 600	8 800	00
RESULTADOS	F2(T)	0	8 800	34986.1	86798.4	17946.9	29708.4	450904.3	620 956	794 769	959 708	1103 138
	x_{i+1}	0	0.0049	0.0195	0.0484	0.0958	0.1656	0.2513	6.3461	0.4430	0.5345	0.6149
	A_i	0	196.2	388.038	571.20	741.64	895.56	637.11	364.5	83.74	-198.87	-477.03
	V_i	0	0.4905	1.95	4.348	7.634	11.719	15.56	18.05	19.17	18.88	17.1874

*Las expresiones están adaptadas al programa que a continuación se presenta.

Programa del método de Diferencias Centrales en HP 41 C.

```
01 LBL   DIF CEN
02 T W= ?
03 PROMPT
04 STO 00
05 T K= ?
06 PROMPT
07 STO 01
08 T C= ?
09 PROMPT
10 STO 02
11 T ▲ T=?
12 PROMPT
13 STO 03
14 RCL 00
15 981
16  /
17 STO 04
18 T MASA =
19 ARCL X
20 AVIEW
21 PSE
22 RCL 03
23 X↑2
24 1/ X
25  STO 05
26  2
27 RCL 03
28   *
29 1/X
30 STO 06
31  2
32 RCL 05
33  *
34 STO 07
35 RCL 03
36 X ↑ 2
37  2
38  /
39 STO 00
40 GTO 01
41 LBL 01
42 T XL=?
43 PROMPT
44 STO 09
45 T XL-1=?
46 PROMPT
47 STO 12
48 T F(T) =?
49 PROMPT
50 STO 13
51 RCL 01
52 ENTER ↑
53 RCL 07
54 RCL 04
55   *
56   -
57 ENTER ↑
58 RCL 09
59   *
60 STO 14
61 RCL 05
62 RCL 04
63   *
64 ENTER ↑
65 RCL 06
66 RCL 02
67   *
68   -
69 ENTER ↑
70 RCL 12
71   *
72 STO 15
73 RCL 13
74 RCL 14
75   -
76 ENTER ↑
77 RCL 15
78   -
79 STO 16
80 T F2(T)=
81 ARCL  X
82 AVIEW
83 STOP
84 RCL 04
85 RCL 05
86  *
87 ENTER ↑
88 RCL 02
89 RCL 06
90   *
91   +
92 STO 02
93 RCL 16
94 RCL 20
95   /
96 STO 17
97 T XL +1=
98 ARCL X
99 AVIEW
100 STOP
101 RCL 12
102 ENTER ↑
103    2
104 RCL 09
105  *
106  -
107 RCL 17
108  +
```

```
109 ENTER ↑
110 RCL 05
111  ÷
112 STO 18
113 ⊤At=
114 ARCL  X
115 AVIEW
116 STOP
117 RCL 17
118 RCL 12
119  -
120 RCL 06
121  *
122 STO 19
123 ⊤Vt =
124 ARCL  X
125 AVIEW
126 STOP
127 GTO 01
128 END.
```

Método de Houbolt

Las expresiones correspondientes al método son:

$$a_o = \frac{2}{T^2} \; ; \; a_1 = \frac{11}{6\ T} \; ; \; a_2 \frac{5}{T^2} \; ; \; a_3 = \frac{3}{T} \; ; \; a_4 = -\ 2a_o$$

$$a_5 = -\frac{03}{2} \; ; \; a_6 = \frac{a_o}{2} \; ; \; a_7 = \frac{a_3}{9}$$

$$F2(t)_{i+1} = F(t)_{i+1} + [a_2x_i+a_4x_{i-1}+a_6x_{i-2}]+c[a_3x_i+a_5x_{i-1}$$

$$+ a_7x_{i-2}]$$

$$x_{i+1} = \frac{F2(T)_{i+1}}{[a_oM + a_1c+k]}$$

$$A_{i+1} = a_o\ x_{i+1} - a_2\ x_i - a_4\ x_{i-1} - a_6\ x_{i-2}$$

$$V_{i+1} = -\ a_1\ x_{i+1} - a_3\ x_i - a_5\ x_{i-1} - a_7\ x_{i-2}$$

Las expresiones anteriores adaptadas al programa correspondiente al método.

Programa para encontrar el desplazamiento , velocidad y aceleración por medio del método de Houbolt en H P 41 C

```
01  LBL ^T HOUBOLT
02  ^T W = ?
03  PROMPT
04  STO 00
05  ^T K = ?
06  PROMPT
07  STO 01
08  ^T C = ?
09  PROMPT
10  STO 02
11  ^T T = ?
12  PROMPT
13  STO 03
14  RCL 00
15  981
16  /
17  STO 04
18  ^T MASA =
19  ARCL X
20  AVIEW
21  PSE
22  2
23  RCL 03
24  X ↑ 2
25  /
26  STO 05
27  11
28  ENTER ↑
29  6
30  RCL 03
31  *
32  /
33  STO 06
34  5
35  RCL 03
36  X ↑ 2
37  /
38  STO 07
39  3
40  RCL 03
41  /
42  STO 08
43  - 2
44  RCL 05
45  *
46  STO 09
47  RCL 08
48  2
49  /
50  CHS
51  STO 10
52  RCL 05
53  2
54  /
55  STO 11
56  RCL 08
57  9
58  /
59  STO 12
60  GTO 02
61  LBL 02
62  ^T Xi = ?
63  PROMPT
64  STO 13
65  ^T X i-1 =?
66  PROMPT
67  STO 14
68  ^T Xi-2 =?
69  PROMPT
70  STO 15
71  ^T Fi+1 =?
72  PROMPT
73  STO 16
74  RCL 07
75  RCL 13
76  *
77  ENTER ↑
78  RCL 09
79  RCL 14
80  *
81  +
82  ENTER ↑
83  RCL 11
84  RCL 15
85  *
86  +
87  ENTER ↑
88  RCL 04
89  *
90  STO 17
```

```
91  RCL 08
92  RCL 13
93  *
94  ENTER↑
95  RCL 10
96  RCL 14
97  *
98  +
99  ENTER↑
100 RCL 02
101 *
102 ENTER↑
103 RCL 12
104 RCL 15
105 *
106 +
107 STO 18
108 RCL 16
109 RCL 17
110 +
111 ENTER↑
112 RCL 18
113 +
114 STO 19
115 TF2i+1=
116 ARCL X
117 AVIEW
118 STOP
119 RCL 04
120 RCL 05
121 *
122 ENTER↑
123 RCL 06
124 RCL 02
125 *
126 +
127 ENTER↑
128 RCL 01
129 +
130 ENTER↑
131 RCL 19
132 /
133 1/X
134 STO 20
135 TXi+1 =
136 ARCL X
137 AVIEW
138 STOP
139 RCL 05
140 RCL 20
141 *
142 ENTER↑
143 RCL 07
144 RCL 13
145 *
146 -
147 RCL 09
148 RCL 14
149 *
150 -
151 RCL 11
152 RCL 15
153 *
154 -
155 STO 21
156 TAi+1=
157 ARCL X
158 AVIEW
159 STOP
160 RCL 06
161 RCL 20
162 *
163 ENTER↑
164 RCL 08
165 RCL 13
166 *
167 -
168 ENTER↑
169 RCL 10
170 RCL 14
171 *
172 -
173 ENTER↑
174 RCL 12
175 RCL 15
176 *
177 -
178 STO 22
179 TVi+1=
180 ARCL X
181 AVIEW
182 STOP
183 GTO 02
184 END
```

TABLA DE RESULTADOS:

DATOS	t	0	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030	0.035	0.040	0.045	0.050	
	x_i	0	0.0024	0.0108	0.0292	0.0292	0.1123	0.1798	0.2602	0.3481	0.4373	0.5213	
	x_{i-1}	0	0	0.0024	0.0108	0.0108	0.0617	0.1123	0.1798	0.2602	0.3481	0.4373	
	x_{i-2}	0	0	0	0.0024	0.0108	0.0292	0.0167	0.1123	0.1798	0.2602	0.3481	
	$F(T)_{i-1}$	8 800	17 600	26 400	35 200	44 000	35 200	26 400	17 600	8 800	00	00	
RESULTADOS	$F2(T)_{i+1}$		8 800	39129.6	106057.5	233938.2	407303.5	652 188	944079.9	1262883	1586712	1891524	2162616
	x_{i+1}		0.0024	0.0108	0.0292	0.0617	0.1123	0.1798	0.2602	0.3491	0.4373	0.5213	0.5961
	A_{i+1}		194.04	382.78	562.53	729.75	886.89	624.53	356.63	82.15	-193.56	-464.6	-531.06
	V_{i+1}		0.889	2.5144	4.958	8.19	12.1825	15.094	17.106	17.96	17.56	15.86	13.759

Método de Newmark

$\alpha = 0.25$ $\delta = 0.5$

t_i	000	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030	0.035	0.040	0.045	0.50	0.055
x_i	0	0.0012	0.007	0.023	0.593	0.1011	0.1691	0.2529	0.3457	0.4406	0.5306	
V_i	0	0.49	1.942	4.328	7.593	11.0991	15.511	18.004	19.122	18.84	17.1651	
A_i	0	195.11	385.09	560.38	737.09	890.82	633.97	363.07	84.09	-196.74	-473.21	
$F(T)_{i+1}$	8 800	17 600	26 400	35 200	44 000	35 200	26 400	17 600	8 800	0	0	
$F2(T)_{i+1}$		8 800	52 680.32	163624.8	381045.4	729695	1220469	1826918	2494799	3179566.9	38290088.144	4402461.04
x_{i+1}		$1.22x10^{-3}$	0.007	0.023	0.053	0.1011	0.1691	0.2529	0.3457	0.4406	0.5306	0.6101
A_{i+1}		195.11	385.09	560.379	732.09	890.82	633.97	363.07	84.09	-196.74	-473.21	-544.0692
V_{i+1}		0.49	1.942	4.328	7.593	11.643	15.511	18.004	19.122	18.84	17.1651	14.6219

NOTA:

El programa de este método se desarrolla en el problema E-10

PROBLEMA E-8

Obtener la respuesta de un sistema no amortiguado con la fuerza que se indica en la figura E- 8.A y E- 8.B

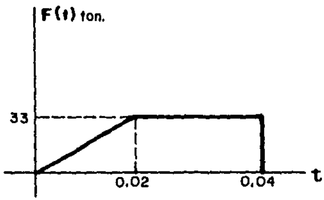


FIG. E-8.A

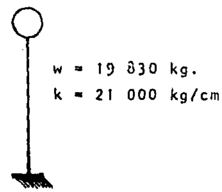


FIG. E-8.B

Utilice la integral de Duhamel.

Solución:

De la figura E-8A obtenemos que:

$$P(t) = \begin{cases} \dfrac{F_o}{t_1}\, t & , \ o \leq t \leq t_1 \ ; \quad F_o = 33\ 000 \text{ kg} \ ; \ t_1 = 0.02 \text{ seg.} \\ F_o & t_1 \leq t \leq t_2 \ ; \quad t_2 = 0.04 \text{ seg.} \\ o & t \geq t_2 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{1}{mp}\int_0^t F(\tau)\ \text{sen}\ P\ (t-\tau)d \quad ; \quad F(\tau) = \frac{F_o}{t_1}\tau$$

$$x(t) = \frac{F_o}{mpt_1}\int_0^t \tau\ \text{sen}\ P(t-\tau)d\tau$$

Integrando por partes $\int udv = uv - \int vdu$

sea $u = \tau$ $\quad dv = \text{sen}\ P(t-\tau)$

$du = d\tau \quad v = \int \text{sen}\ P(t-\tau)d\tau$

$v = \frac{1}{P}\ \cos\ P(t-\tau)$

$$\int_0^t \tau \text{sen}\ P(t-\tau)d\tau = \frac{\tau}{P}\cos\ P(t-\tau) - \int\frac{1}{P}\cos\ p(t-\tau)d\tau$$

$$\int\frac{1}{P}\cos\ P(t-\tau)d\tau = \frac{1}{P}\int\cos\ P(t-\tau)d\tau = -\frac{1}{P^2}\ \text{sen}\ P(t-\tau)$$

$$\int_0^t \tau\cos\ P(t-\tau)d\tau = \frac{\tau}{P}\cos\ P(t-\tau) - \frac{1}{P^2}\ \text{sen}\ P(t-\tau)\Big|_0^t$$

$$= [\frac{t}{p} - \frac{1}{p^2}\ \text{sen}\ Pt]$$

$\therefore$

$$x(t) = \frac{F_o}{mpt_1}\ [\ \frac{1}{P}\ [\ t - \frac{1}{P}\ \text{sen}\ pt]$$

$$P = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{21\ 000}{20.214}} = 32.23\ \text{rad/seg}$$

t	x (t)
0.0	0.0 cm
0.01	$\frac{33\ 000}{20.214(32.23)\ 0.02}\ [\ \frac{1}{32.23}(0.01 - \frac{1}{32.23}\ \cdot$ sen 32.23 (0.01)] = 0.01288 cm.
0.02	2532.63 [0.0310 (0.00136)] = 0.10678 cm.

para $t_o \leqslant t \leqslant t_1$; integrando se obtiene

$$F(\tau) = F_o$$

$$x(t) = \frac{F_o}{mpt_1}\ [\frac{1}{P}\ [t_1 + \frac{\text{sen } P(t-t_1)}{P} - \frac{\text{sin } p\ t}{p}]]$$

$$x(t) = 2532.63[0.03103(0.02 + \frac{\text{sen } 32.23(T-0.02)}{32.23} - \frac{\text{sen } 32.23(T)}{P})]$$

t	x(t)
0.02	0.10678 cm
0.03	2532.63[0.3103(0.02+0.00983-0.02554)] = 0.33714 cm
0.04	2532.63[0.03103(0.02+0.01864-0.02980)] = 0.69471cm
0.05	2532.63[0.03103(0.02+0.02554-0.03100)] = 1.14266cm

Resumiendo:

t(I)	x(I)
0.00	0.00
0.01	0.01288
0.02	0.10678
0.03	0.33714
0.04	0.69471
0.05	1.14266
(seg)	(cm)

Comprobando con la solución incremental

$N = 6$, $P = 32.23$ rad/seg. , $M = 20.214 \frac{kg/seg^2}{cm.}$

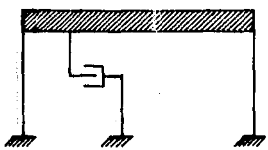
Resultados:

N	T(I)	F(I)	X(I)
1	0	0.00	0.000
2	0.01	16 500	0.0135339471
3	0.02	33 000	0.106596594
4	0.03	33 000	0.336992733
5	0.04	33 000	0.694529843
6	0.05	0	1.11532043
	(seg)	(kg)	(cm)

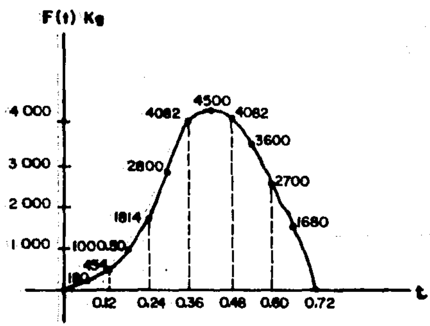
PROBLEMA E-9

El marco de la figura está sometido a la historia de carga que se muestra; se pide calcular los desplazamientos para $o < t < 0.72$ seg.

La evaluación númerica de la integral de Duhamel se hará empleando la regla de Simpson con $\Delta t = 0.12$ seg.



$w = 35\,041.32$ kg
$M = 35.72$ kg-seg^2/cm.
$K = 1428.7$ kg/cm.
$C = 71.43$ kg-seg/cm.



PROGRAMA DEL METODO SIMPSON EN SIGMA COMMODORE16 K PARA ENCONTRAR LA RESPUESTA DESPLAZAMIENTO PARA SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD CON O SIN AMORTIGUAMIENTO, EXCITADO ARBITRARIAMENTE.

```
 10 REM METODO SIMPSON
 20 SCNCLR
 30 PRINT "METODO DE SIMPSON"
 40 PRINT: PRINT "EMPEZAMOS P/RETURN"
 50 INPUT "PULSA RETURN"
 60 PRINT "DAME N, PESO (KG),RIGIDEZ (KG/CM)"
 70 IMPUT N, W, R: H=N+2
 80 DIM GB(H), BB (H)
 90 DIM T(H),F(H),GA(H)
100 DIM K(H),FA(H),FB(H)
110 DIM SA(H),SB(H),AA(H)
120 DIM XC(H),XD(H),XR(H)
125 PRINT
130 PRINT: O=0
140 PRINT "DAME AT=? ";: INPUT AT
150 FOR I=1 TO N
160 T(I)=O
170 O=O+AT
180 NEXT I: PRINT "DAME LAS FUERZAS F(I)"
190 PRINT
200 FOR I=1 TO N
210 PRINT "F (";I;")=";
220 INPUTF(I)
230 NEXT I: PRINT
240 P=SQR (R/(W/981))
250 V=P
260 INPUT "DAME EL AMORT. C="; C
270 IF C=0 THEN 340
280 CR=2* (W/981)*V
290 Z= C/CR
300 IF C<CR THEN 320
310 IF C>CR THEN 310
```

```
320 P=SQR(1-(C/CR)↑2)*V:GOTO 340
330 P=SQR((C/CR)↑2-1)*V:GOTO 340
340 FOR I=1 TO N
350 GA(I)=F(I)* COS (P*T(I))
360 GB(I)=F(I)* SIN (P*T(I))
370 NEXT I
380 PRINT "EL AMORTIGUAMIENTO C/CR=";Z;%
390 INPUT "PULSA RETURN";
400 EA=EXP(-Z*V*2*AT)
410 EB=EXP(-Z*V*AT)
420 FOR J=2 TO N STEP 2
430 K(J)=4
440 NEXT J
450 FOR I=1 TO N STEP 1
460 K(X)=1
470 NEXT X
480 FOR I=1 TO N
490 FA(I)=GA(I)*K(I)
500 FB(I)=GB(I)*K(I)
510 NEXT I
520 M=W/981
530 PRINT: PRINT "MASA=";M;"(KG-SEG 2/CM)"
540 PRINT: PRINT "FRECUENCIA=";P;"(RAD/SEG)"
550 INPUT "PULSA RETURN";
560 SUM=0
570 MAS=0
580 FOR I=2 TO N STEP 2
590 SA(I)=FA(I-1)*EA+FA(I)*EB+FA(I+1)
600 SB(I)=FB(I-1)*EA+FB(I)*EB+FB(I+1)
610 NEXT I
620 SA(1)=0
630 SB(1)=0
640 FOR I=2 TO N STEP 2
650 SUM=SUM*EA+SA(I)
660 AA(I)=SUM
670 MAS=MAS*EA+SB(I)
680 BB(I)=MAS
690 NEXT I
```

```
700 G=AT/(M*P*3) :L=N-1
710 PRINT: PRINT " G=";G;"(cm/KG)"
720 FOR J=2 TO L STEP 2
730 J=I+1
740 XC(J)=AA(I)*SIN(P*T(J))
750 XD(J)=BB(I)*COS(P*T(J))
760 XR(J)=(XC(J)-XD(J))*G
770 PRINT "T=";T(J);
780 PRINT "F=";F(J);
790 PRINT "XR=";XR(J);"(CM)"
800 NEXT I
810 PRINT "_______________________________________ OK"
820 END
```

```
RUN

    METODO DE SIMPSON

   EMPEZAMOS  P/RETURN
    PULSA RETURN??
    DAME N, PESO (KG),RIGIDEZ (KG/CM)
    725,35041.32,1428.7

    DAME AT??Ø.Ø6
    DAME LAS FUERZAS (F(I)

    F(1)=Ø
    F(2)=18Ø
    F(3)=454
    F(4)=1ØØØ.5Ø
    F(5)=1814
    F(6)=28ØØ
    F(7)=4Ø82
    F(8)=45ØØ
    F(9)=4Ø82
    F(1Ø)=36ØØ
    F(11)=2722
    F(12)=168Ø
    F(13)= Ø
    F(14)= Ø
    F(15)= Ø
    F(16)= Ø
    F(17)= Ø
    F(18)= Ø
    F(19)= Ø
    F(2Ø)= Ø
    F(21)= Ø
    F(22)= Ø
    F(23)= Ø
    F(24)= Ø
    F(25)= Ø
```

DAME EL AMORT.C=771.43

EL AMORTIGUAMIENTO C/CR=0.158097283

PULSA RETURN?

MASA=35.72

FRECUENCIA 6.24479627

PULSA RETURN?

G=8.96603172E-05 (CM/KG)

T=.12	F=454	X=0.0222504323	(CM)
T=.24	F=1814	X= .221492072	(CM)
T=.36	F=4082	X= .922480057	(CM)
T=.48	F=4082	X=2.32925037	(CM)
T=.60	F=2722	X=3.67988536	(CM)
T=.72	F=0	X=3.84392842	(CM)
T=.84	F=0	X=2.28141129	(CM)
T=.96	F=0	X=-.0610281922	(CM)
T=1.08	F=0	X=-1.87393784	(CM)
T=1.20	F=0	X=-2.38563041	(CM)
T=1.32	F=0	X=-1.62402023	(CM)
T=1.44	F=0	X=-.232410054	(CM)

PROBLEMA E-10

Resolver el mismo ejercicio del Problema E-9, con el método directo de Newmark.

$M = 3572$ kg-seg^2/cm.
$K = 1428.7$ kg/cm.
$C = 71.43$ kg-seg/cm.

Las expresiones correspondientes a este método son:

$\alpha = 1/4$ $\alpha = \alpha$ para la calculadora

$\delta = 1/2$ $d = \delta$ para la calculadora

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta \tau^2} \ ; \ a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta \tau} \ ; \ a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta \tau} \ ; \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1 \ ;$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1; \ a_5 = \frac{\Delta \tau}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right); \ a_6 = \Delta \tau \,(1-\delta) \ \text{y} \ a_7 = \delta \Delta \tau$$

$$\hat{F}(\tau)_{t+\Delta\tau} = F(\tau)_{t+\Delta\tau} + m(a_0 x_t + a_2 \dot{x}_t + a_3 \ddot{x}_t) + c(a_1 x_t + a_4 \dot{x}_t + a_5 \ddot{x}_t)$$

$$\ddot{x}_{t+\Delta\tau} = \frac{4(x_{t+\Delta\tau} - x_t - \dot{x}_t \Delta\tau)}{\Delta\tau^2} - \ddot{x}_t$$

$$\dot{x}_{t+\Delta\tau} = \dot{x}_t + \frac{2(x_{t+\Delta\tau} - x_t - \dot{x}_t \Delta\tau)}{\Delta\tau}$$

$$x_{t+\Delta\tau} = \frac{\hat{F}(\tau)}{\dfrac{M}{\delta \Delta t^2} + \dfrac{\delta C}{\alpha \Delta t} + K} = \frac{\hat{F}(\tau)}{a_0 M + a_1 C + K}$$

Programa del método de Neumark en H P 41 C, para encontrar la aceleración la velocidad y cesplazamientos

```
01  LBL ᵀ NEWMARK
02  ᵀW= ?
03  PROMPT
04  STO 00
05  ᵀ K = ?
06  PROMPT
07  STO 01
08  ᵀC = ?
09  PROMPT
10  STO 02
11  ᵀΔT = ?
12  PROMPT
13  STO 03
14  ᵀα= ?
15  PROMPT
16  STO 04
17  ᵀ d = ?
18  PROMPT
19  STO 05
20  RCL 04
21  RCL 03
22  X ↑ 2
23  *
24  1 / X
25  STO 06
26  RCL 05
27  ENTER ↑
28  RCL 04
29  RCL 03
30  *
31  /
32  STO 07
33  RCL 04
34  RCL 03
35  *
36  1 / X
37  STO 08
38  2
39  RCL 04
40  *
41  1 / X
42  ENTER ↑
43  1
44  -
45  STO 09
46  RCL 05
47  RCL 04
48  /
49  ENTER ↑
50  1
51  -
52  STO 10
53  RCL 05
54  RCL 04
55  /
56  ENTER ↑
57  2
58  -
59  ENTER ↑
60  RCL 03
61  2
62  /
63  *
64  STO 11
65  1
66  RCL 05
67  -
68  RCL 03
69  *
70  STO 12
71  RCL 05
72  RCL 03
73  *
74  STO 13
75  RCL 00
76  981
77  /
78  STO 14
79  GTO 00
80  LBL 00
81  ᵀXi = ?
82  PROMPT
83  STO 15
84  ᵀVi = ?
85  PROMPT
86  STO 16
87  ᵀAi = ?
88  PROMPT
89  STO 17
90  RCL 06
91  RCL 15
92  *
93  ENTER ↑
```

```
94  RCL 08
95  RCL 16
96   *
97   +
98  ENTER ↑
99  RCL 09
100 RCL 17
101  *
102  +
103 ENTER ↑
104 RCL 14
105  *
106 STO 18
107 RCL 07
108 RCL 15
109  *
110 ENTER ↑
111 RCL 10
112 RCL 16
113  *
114  +
115 ENLTR ↑
116 RCL 11
117 RCL 17
118  *
119  +
120 ENTER ↑
121 RCL 02
122  *
123 STO 19
124  F<T>i+1 = ?
125 PROMPT
126 STO 20
127 RCL 20
128 RCL 18
129  +
130 RCL 19
131  +
132 STO 21
133  F2<>i+ 1=
134 ARCL X
135 AVIEW
136 STOP
137 RCL 06
138 RCL 14
139  *
140 ENTER ↑
141 RCL 07
142 RCL 02
143  *
144  +
145 ENTER↑
146 RCL 01
147  +
148 ENETR ↑
149 RCL 21
150  /
151 1 / X
152 STO 22
153  Xi+1=
154 ARCL X
155 AVIEW
156 STOP
157 RCL 22
158 RCL 15
159  -
160 ENTER ↑
161 RCL 06
162  *
163 ENTER ↑
164 RCL 08
165 RCL 16
166  *
167  -
168 RCL 09
169 RCL 17
170  *
171  -
172 STO 23
173  Ai+1 =
174  ARCL X
175 AVIEW
176 STOP
177 RCL 23
178 RCL 13
179  *
180 ENTER ↑
181 RCL 17
182 RCL 12
183  *
184  +
185 ENTER ↑
186 RCL 16
187  +
188  Vi+1=
189 ARCL X
190 AVIEW
191 STOP
192 GTO 00
193 END
```

Método de Newmark
W = 35041.32 kg.
K = 1428.7 kg/cm.
C = 71.43 kg-seg/cm. α = 0.25 , δ = 0.5

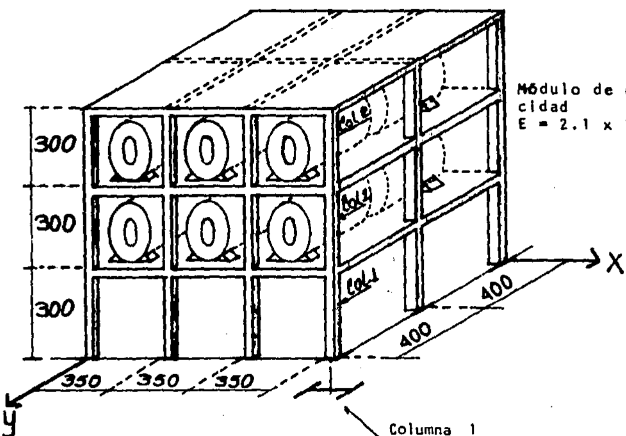
t	000	0.06	0.12	0.18	0.24	0.30	0.36	0.42	0.48	0.54	0.60
x_i	0	0.0041	0.0260	0.0901	0.234	0.5018	0.9386	1.5598	2.303	3.0359	3.6117
V_i	0	0.1379	0.5906	1.5449	3.2338	5.6913	8.8694	11.8370	12.9246	11.5051	7.6869
A_i	0	4.5979	10.4909	21.3179	34.9793	46.9377	58.9992	39.9218	-3.6674	-43.6502	-83.624
$F(T)_{i+1}$	180	454	1000.50	1814	2800	4082	4500	4082	3600	2722	1680
$F2(T)_{i+1}$	180	1128.96	3917.65	10155.25	21825.56	40828.79	67848.78	100161.97	132056.94	157102.08	169490.91

t	0.66	0.72	0.78	0.84	0.90	0.96	1.02	1.08	1.14	1.20	1.26	1.32
X_j	3.0965	3.770	3.2147	2.2908	1.1671	0.0131	-1.0163	-1.7995	-2.2605	-2.3741	-2.1633	-1.6914
V_j	1.0054	-5.7554	-13.0197	-17.778	-19.6799	-18.7082	-15.5758	-10.5809	-4.7872	1.0011	6.0242	9.7059
A_j	-112.4257	-139.60	-102.545	-56.0726	-7.3249	37.0488	71.6973	93.1337	99.5806	92.9548	74.48	48.2422
$F(T)_{j+1}$	000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
$F2(T)_{j+1}$	164337.7	139836.09	99644.92	58765.56	567.9848	-44208.51	-78275.71	-98330.5	-103269.26	-94102.32	-73573.43	

PROBLEMA E-11

Calcular los modos de vibrar de la estructura mostrada en la fi gura. Utilice la ecuación característica y considere marco rígido.

DATOS:



Módulo de elasticidad $E = 2.1 \times 10^6$ kg/cm^2

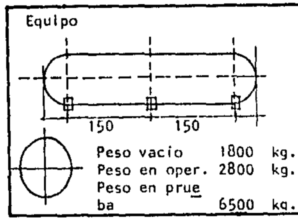
Columna 1
IPR 406 x 178 (67.0)

En columnas $I_{x1} = 19\ 618$ cm^4, $I_{y1} = 818$ cm^4 y $I_{x2} = 9\ 800$ cm^4, $I_{y2} = 451$ cm^4

En trabes $I_x = 68\ 740$ cm^4

En entrepiso

Carga viva	350 kg/m^2
Carga muerta	200 kg/m^2
Tuberías	85 kg/m^2
Total	636 kg/m^2 + equipo



En azotea

Carga viva	100 kg/cm^2
Carga muerta	150 kg/m^2
Total	250 kg/m^2

Solución:

Obtención de masas:

NIVEL #	ALTURA (m)	AREA (m^2)	PESO/AREA kg/m^2 (NETA)	PESO kg	MASA $kg\ \frac{seg^2}{m}$
1	3	168	636 + EQUIPO	92 400	9 418.96
2	6	168	636 + EQUIPO	92 400	10 948.01
3	9	168	250	42 000	4 281.35

Matriz de masas será:

$$M = \begin{bmatrix} 9.42 & 0 & 0 \\ 0 & 9.42 & 0 \\ 0 & 0 & 4.28 \end{bmatrix} \text{ en Ton } \frac{seg^2}{m}$$

Obtención de las Rigideces:

Considerando como marcos rígido, calculemos sólo la rigidez de las columnas:

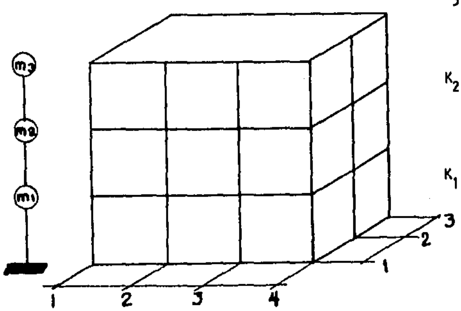
$$K_1 = \frac{12\ EI_x}{h^3} = \frac{12 \times 2.1 \times 10^6 \times 19\ 618}{(300)^3} = 18\ 318.133\ \frac{kg}{cm}$$ En la dirección x

$$K_1 = \frac{12\ E\ I_y}{h^3} = \frac{12 \times 2.1 \times 10^6 \times 818}{(300)^3} = 763.4667\ \frac{kg}{cm}$$ En la dirección y

$$K_2 = \frac{12\ E\ I_x}{h^3} = \frac{12 \times 2.1 \times 10^6 \times 9\ 800}{(300)^3} = 9\ 416.67\ \frac{kg}{cm}$$ En dirección x

$$K_2 = \frac{12\ E\ I_y}{h^3} = \frac{12 \times 2.1 \times 10^6 \times 451}{(300)^3} = 420.93\ \frac{kg}{cm}$$ En dirección y

En la dirección "x" tenemos:



$$K_3 = 9146.67 \times 4 \times 3 = 109760.04\ \frac{kg}{cm}$$

$$K_2 = 18378.133 \times 4 \times 3 = 220537.6\ \frac{kg}{cm}$$

$$K_1 = 18378.133 \times 4 \times 3 = 220537.6\ \frac{kg}{cm}$$

La matriz de Rigideces es:

$$K = \begin{bmatrix} 4.410 & -2.205 & 0 \\ -2.205 & 3.303 & -1.098 \\ 0 & -1.098 & 1.098 \end{bmatrix} \quad \frac{\text{Ton}}{\text{m}}$$

En la dirección "y" tenemos:

$$K_3 = 420.93 \times 3 \times 4 = 5\,051.16 \ \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$$

$$K_2 = 763.467 \times 3 \times 4 = 9\,161.60 \ \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$$

$$K_1 = 763.467 \times 3 \times 4 = 9\,161.60 \ \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.1832 & -0.09161 & 0 \\ -0.09161 & 0.1421 & -0.0505 \\ 0 & -0.0505 & 0.0505 \end{bmatrix} \text{ en } \frac{\text{Ton}}{\text{m}}$$

cálculo de los modos de vibrar en dirección "x":

$$\begin{bmatrix} 4.41 - 9.42\lambda & -2.205 & 0 \\ -2.205 & 3.30 - 9.42\lambda & -1.098 \\ 0 & -1.098 & 1.098 - 4.282\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$-379.796\,\lambda^3 + 408.451\,\lambda^2 - 109.94\,\lambda + 5.321 = 0$$

$$1\lambda^3 - 1.075\lambda^2 + 0.289\lambda - 0.014 = 0$$

$\lambda_1 = 0.06186$ $P_1 = 0.24871$

$\lambda_2 = 0.33255$ $P_2 = 0.57667$

$\lambda_3 = 0.68062$ $P_3 = 0.824997$

solución del 1er. sistema de ecuaciones $P_1^2 = 0.06186$

$3.83\ Z_1 - 2.205\ Z_2 + 0\ Z_3 = 0$, $Z_3 = 1$

$-2.205\ Z_1 + 2.72\ Z_2 - 1.098\ Z_3 = 0$, $Z_2 = 0.76$

$0\ Z_1 - 1.098\ Z_2 + 0.83\ Z_3 = 0$, $Z_1 = 0.44$

Solución del 2do. sistema de ecuaciones $P_2^2 = 0.33255$

$1.277\ Z_1 - 2.205\ Z_2 + 0\ Z_3 = 0$, $Z_3 = 1$

$-2.205\ Z_1 + 0.167\ Z_2 - 1.098\ Z_3 = 0$, $Z_2 = -0.296$

$0\ Z_1 - 1.098\ Z_2 - 0.325\ Z_3 = 0$, $Z_1 = -0.511$

Solución para el 3er. sistema de ecuaciones:

$$-2.0014\ Z_1 \quad -2.2050\ Z_2 \quad - \quad 0\ Z_3 = 0 ,\ Z_3 = 1$$
$$-2.2050\ Z_1 \quad -3.1114\ Z_2 \quad - \quad 1.098\ Z_3 = 0 ,\ Z_1 = -1.653$$
$$0\ Z_1 \quad -1.098\ Z_2 \quad - \quad 1.8150\ Z_3 = 0 ,\ Z_1 = 1.834$$

para la dirección "y" los modos de vibrar será:

$$\begin{bmatrix} 0.183 - 9.42\lambda & -0.0961 & 0 \\ -0.09161 & 0.1466 - 9.42\lambda & -0.0505 \\ 0 & -0.0505 & 0.0505 - 4.28\lambda \end{bmatrix} = 0$$

entonces la ecuación característica será:

$$1\lambda^3 - 6.04679\lambda^2 + 0.00056\lambda - 1.23753 \times 10^{-6} = 0$$

$$_2 = 0.015069 \qquad P_2 = 0.12276$$
$$3 = 0.0288778 \qquad P_3 = 0.16993$$
$$_1 = 0.00281 \qquad P_1 = 0.05301$$

Solución del 1er. sistema de ecuaciones:

$$0.156529 Z_1 - 0.09161\ Z_2 + 0\ Z_3 = 0 ,\ Z_3 = 1$$
$$-0.09161\ Z_1 + 0.1201\ Z_2 - 0.0505\ Z_3 = 0 ,\ Z_2 = 0.762$$
$$0\ Z_1 - 0.0505\ Z_2 + 0.038473\ Z_3 = 0 ,\ Z_1 = 0.447$$

Solución del 2do. sistema de ecuaciones:

$$0.4105\ Z_1 - 0.09161\ Z_2 + 0\ Z_3 = 0 \ , \ Z_3 = 1$$

$$-0.09161\ Z_1 + 0.00465\ Z_2 - 0.0505\ Z_3 = 0 \ , \ Z_2 = -0.277$$

$$0\ Z_1 - 0.0505\ Z_2 - 0.01399\ Z_2 = 0 \ , \ Z_1 = -0.6182$$

Solución del 3er. sistema de ecuaciones:

$$-0.08903\ Z_1 - 0.09161\ Z_2 - 0\ Z_3 = 0 \ , \ Z_3 = 1$$

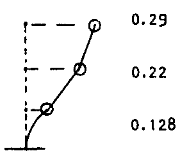
$$-0.09161\ Z_1 - 0.12543\ Z_2 - 0.0505\ Z_3 = 0 \ , \ Z_2 = -1.448$$

$$0\ Z_1 - 0.0505\ Z_2 - 0.0731\ Z_3 = 0 \ , \ Z_1 = 1.489$$

Normalizando los modos nos queda:

$$Zn_j = Zj\ n \ ; \ \text{donde} \ n = \frac{1}{\sqrt{Z_j^T\ M\ Z_j}}$$

Direccion "X"

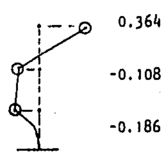


$n = 0.29$

$P = 0.249\ seg^{-1}$

$T = \frac{2}{P} = 25.234$ seg

1er. Modo

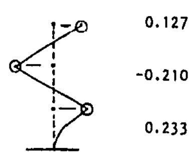


$n = 0.364$

$P = 0.577\ seg^{-1}$

$T = 10.889$ seg

2do. Modo



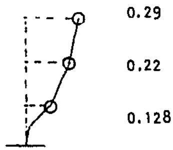
$n = 0.127$

$P = 0.825\ seg^{-1}$

$T = 7.616$ seg

3er, Modo

Dirección "Y"

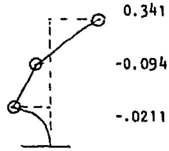


n = 0.29

P = 0.05301 seg^{-1}

T = 118.529 seg

1er. Modo

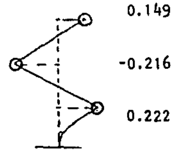


n = 0.341

P = 0.12276 seg^{-1}

T = 51.183 seg

2do. Modo



n = 0.149

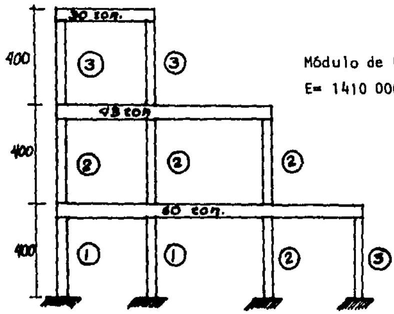
P = 0.16993 seg^{-1}

T = 36.975 seg

3er. Modo

PORBLEMA E-12

Por el método de Newmark y Holzer encuentre los modos y períodos de vibración y compruebe las propiedades de ortogonalidad de los modos.



Módulo de Elásticidad

$E = 1410\,000\ ton/m^2$

Dimensiones de columnas

③ 30x30 cm

② 35x35 cm

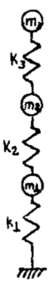
① 40x40 cm

$I_1 = 0.00213 m^4$ $I_2 = 0.00125 m^4$

$I_3 = 0.00068\ m^4$

Solución:

Representando la estructura en un sistema de varios grados de libertad.



$$m_3 = \frac{30}{9.81} = 3.058\ \frac{ton\ seg^2}{m}$$

$$K_3 = \frac{12(141\ 0000)0.00068}{64} \times 2 = 359.55\ \ ton/m$$

$$m_2 = \frac{43}{9.81} = 4.383\ \frac{ton\ seg^2}{m}\ ,\ K_2\ \frac{12(1410000)}{64}(0.00125x3) = 991.4\ t/m$$

$$m_1 = \frac{60}{9.81} = 6.116\ \frac{ton\ seg^2}{m}$$

$$K_1 = \frac{12[141\ 0000]}{64}(2x0.00213+0.00068) = 1636.48\ ton/m.$$

Método Newmark para encontrar el Primer modo de vibración.

NIVEL (1) DECRECIENTE	MASA (2) T-^{2}/m	RIGIDEZ (3) T/m	X (4) SUPUESTO	F/p^2 (5) (2)x(4)	V/p^2 (6) ↓Σ(5)	Y/p^2 (7) (6)/(3)	Y/p^2 (8) ↑Σ(6)	NORMALIZANDO (9)	p^2 (10) (4) / (9)
3	3.058		3	9.174			0.05832	3.96736	51.44033
		359.55			9.174	0.02552			
2	4.383		2	8.766			0.03280	2.2313	60.976
		991.4			17.940	0.01810			
1	6.116		1	6.116			0.01470	1	68.027
		1636.48			24.056	0.01470			
3	3.058		3.97	12.141			0.0730	4.269	54.384
		359.55			12.141	0.0338			
2	4.383		2.23	9.774			0.039204	2.292	56.888
		991.4			21.914	0.0221			
1	6.116		1	6.116			0.0171	1	58.48
		1636.48			28.030	0.0171			
3	3.058		4.269	13.055			0.0777	4.341	54.941
		359.55			13.055	0.0363			
2	4.383		2.292	10.046			0.0414	2.313	55.362
		991.4			23.060	0.0235			
1	6.116		1	6.116			0.0179	1	55.866
		1636.48			29.217	0.0179			
3	3.058		4.341	13.275			0.0786	4.360	55.229
		359.55			13.275	0.03692			
2	4.383		2.313	10.139			0.04164	2.308	55.548
		991.4			23.414	0.0236			
1	6.116		1	6.116			0.01804	1	55.432
		1636.48			29.530	0.01804			

$$p^2 = \frac{\Sigma(F/p^2)(Y/p^2)}{\Sigma M(Yp^2)^2} = \frac{1.576}{0.02848} = 55.334 \ seg^{-1}$$

Método Holzer, para encontrar los modos de vibrar.

P_2^2 = supuesta = $3P_1^2$ = 166.0 seg^{-2}

Iteración 1

Nivel	Masa	Rigidez	X Supuesta	Δ X	V	F	Residuo
3	3.058		0.072			36.549	-598.139
		359.55		-1.565	-562.59		
2	4.383		1.627			1183.77	
		991.4		0.627	621.18		
1	6.116		1			1015.3	
		1636.48		1	1636.48		

Iteración 2 P_2^2 = 200 seg^{-2}

Nivel	Masa	Régidez	X Supuesta	Δ X	V	F	Residuo
3	3.058		-0.888			-543.068	285.68
		359.55		-2.305	-828.744		
2	4.383		1.417			1242.0	
		991.4		0.41687	413.26		
1	6.116		1			1223.2	
		1636.48		1	1636.48		

Iteración 3 P_2^2 = 223 seg^{-2}

Nivel	Masa	Rigidez	X Supuesta	Δ X	V	F	Residuo
3	3.058		-1.433			-977.255	+3.571
		359.55		-2.708	-973.684		
2	4.383		1.275			1246.196	
		991.4		0.275	272.512		
1	6.166		1			1363.868	
		1636.48		1	1636.48		

Iteración 4, $P_2^{\,2} = 221 \text{ seg}^{-2}$

Nivel	Masa	Rigidez	X Supuesta	Δ X	V	F	Residuo
3	3.058		-1.39229			-940.934	-21.1700
		359.55		-2.676	-962.104		
2	4.383		1.28731			1246.944	
		991.4		0.28731	284.84		
1	6.616		1			1351.64	
		1636.48		1	1636.43		

Iteración 5, $P_2^{\,2} = 222.4 \text{ seg}^{-2}$

Nivel	Masa	Rigidez	X Supuesta	Δ X	V	F	Residuo
3	3.058		-1.41959			-965.462	-4.708
		359.55		-2.698	-970.17		
2	4.383		1.2787			1246.450	
		991.4		0.2787	276.28		
1	6.116		1			1360.20	
		1636.48		1	1636.48		

Iteración 6, $P_2^{\,2} = 222.7 \text{ seg}^{-2}$

Nivel	Mesa	Rigidez	X Supuesta	Δ X	V	F	Residuo
3	3.058		-1.42613			971.21	-0.64
		359.55		-2.70296	-971.85		
2	4.383		1.27683			1246.30	
		991.4		0.27683	274.45		
1	6.116		1			1362.033	
		1636.48		1	1636.48		

$P_2^{\,2} = 222.7 \text{ seg}^{-2}$

Cálculo del tercer modo de vibrar

1ra. Iteración $P_3^2 = 650 \quad seg^{-2}$

Nivel	Masa	Rigidez	X Supuesta	Δ X	V	F	Residuo
3	3.058		2.984			5772.51	-4239.71
		359.55		4.2631	1532.803		
2	4.383		-1.359			-3871.73	
		991.4		-2.359	-2338.92		
1	6.116		1			3975.4	
		1636.48		1	1636.48		

2da. Iteración $P_3^2 = 570 \quad seg^{-2}$

Nivel	Masa	Rigidez	X Supuesta	Δ X	V	F	Residuo
3	3.058		0.00486			8.430	304.67
		359.55		0.87083	313.11		
2	4.383		-0.866			-2162.75	
		991.4		-1.866	-1849.64		
1	6.116		1			3486.12	
		1636.48		1	1636.48		

3da. Iteración $P_3^2 = 578 \quad seg^{-2}$

Nivel	Masa	Rigidez	X Supuesta	Δ X	V	F	Residuo
3	3.058		0.252			-444.77	-25.318
		359.55		1.1666	419.47		
2	4.383		-0.915			2318.04	
		991.4		-1.915	-1898.57		
1	6.116		1			3535.05	
		1636.48		1	1636.48		

4ta. Iteración $P_3^2 = 576.8 \ \text{seg}^{-2}$

Nivel	Masa	Rigidez	X Supuesta	Δ X	V	F	Residuo
3	3.058		0.2143			377.949	25.42
		359.55		1.1218	403.37		
2	4.383		-0.9076			-2294.60	
		991.4		-1.9076	-1891.23		
1	6.116		1			3527.71	
		1636.48		1	1636.48		

5ta. Iteración $P_3^2 = 577.4 \ \text{seg}^{-2}$

Nivel	Masa	Rigidez	X Supuesta	Δ X	V	F	Residuo
3	3.058		0.2333			412.067	-0.6076
		359.55		1.1443	411.46		
2	4.383		0.911			-2306.358	
		991.4		-1.911	-1894.898		
1	6.116		1		3531.378		
		1636.48		1	1636.48		

6ta. Iteración $P_3^2 = 577.38 \ \text{seg}^{-2}$

Nivel	Masa	Rigidez	X Supuesta	Δ X	V	F	Residuo
3	3.058		0.2324			410.374	0.8152
		359.55		1.1436	411.189		
2	4.383		-0.9112			-2305.966	
		991.4		-1.9112	-1894.776		
1	6.166		1			3531.256	
		1636.48		1	1636.48		

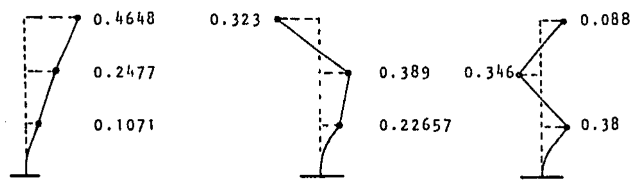
7ma. Iteración $P_3^2 = 577.39 \ seg^{-2}$

Nivel	Masa	Rigidez	X Supuesta	Δ X	V	F	Residuo
3	3.058		0.2326			410.853	-0.469
		359.55		1.144	411.322		
2	4.383		-0.9113			-2306.16	
		991.4		-1.9113	-1894.84		
1	6.116		1			3531.32	
		1636.48		1	1636.48		

Normalizando los modos

$$n = \frac{1}{\sqrt{Z_j^{T} \; M \; Z_j}}$$

$n = 0.10709$ $\qquad$ $n = 0.22657$ $\qquad$ $n = 0.380$



$P = 7.439 \text{ seg}^{-1}$ $\qquad$ $P = 14.923 \text{ seg}^{-1}$ $\qquad$ $P = 24.029$

$T = 0.845$ seg $\qquad$ $T = 0.421$ seg $\qquad$ $T = 0.261$ seg

Comprobando la ortogonalidad.

$$Z_j^{T} \;\; M \;\; Zr = 0$$

$$[0.1071,\ 0.2477,\ 0.4648] \begin{bmatrix} 6.116 & 0 & 0 \\ 0 & 4.385 & 0 \\ 0 & 0 & 3.058 \end{bmatrix} = [0.655,\ 1.086,\ 1.421]$$

$$[0.655,\ 1.036,\ 1.421] \begin{bmatrix} 0.227 \\ 0.389 \\ -0.323 \end{bmatrix} = 0.112 \rightarrow 0$$

$$Z_j^T \; K \; Zr = 0$$

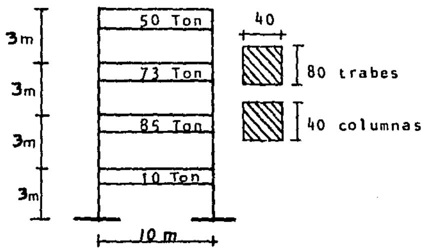
$$[0.1071,\ 0.2477,\ 0.4648]\begin{bmatrix} 2627.88 & -991.4 & 0 \\ -991.4 & 1350.95 & -359.55 \\ 0 & -359.55 & 359.55 \end{bmatrix} = [35.876, 61.33, 78.058]$$

$$[35.876 \quad 61.333 \quad 78.058]\begin{bmatrix} 0.2266 \\ 0.389 \\ -0.323 \end{bmatrix} = 6.775 \rightarrow 0$$

Los resulados no son exactamente cero, por errores de redondeo y por aproximación del método.

PROBLEMA E-13

Para el siguiente sistema de cuatro grados de libertad, calcule los modos de vibrar con el método de la matriz inversa y compruebe las propiedades de ortogonalidad. Considere marcos infinitamente rígidos:



Módulo de Elasticidad $E = 1410000 \ \frac{ton}{m^2}$

Solución:

Las masas concentradas serán:

$$m_1 = w_1/g = 85/9.81 = 8.6646 \ \frac{ton \ seg^2}{m}$$

$$m_2 = m_3 = W_2/g = 73/9.81 = 7.4414 \ \frac{ton \ seg^2}{m}$$

$$m_4 = w_4/g = 50/9.81 = 5.09684 \ \frac{ton \ seg^2}{m}$$

Entonces la matriz de masas es:

$$M = \begin{bmatrix} 8.6646 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7.4414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.4414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.09684 \end{bmatrix}$$

Las rigideces serán

$$Ki = \frac{12\ EI}{H^3} = \frac{12(1410000)}{27} \quad \frac{(0.40)^4}{12} = 1336.89 \quad \text{ton/m}$$

$$K = 2\ K_i = 2673.78 \quad \text{ton/m}$$

La matriz de Rigideces es:

$$K = \begin{bmatrix} 5347.56 & -2673.78 & 0 & 0 \\ -2673.78 & 5347.56 & -2673.78 & 0 \\ 0 & -2673.78 & 5347.56 & -2673.78 \\ 0 & 0 & -2673.78 & 2673.78 \end{bmatrix}$$

Método de interación inversa (primer modo)

Nivel	X Supuesta	X'	Y	Normalización	
4	4	20.38736	0.069921	2.828	
3	3	22.3242	0.062296	2.514	
2	2	14.8828	0.046324	1.869	
1	1	8.6646	0.024781	1	
4	2.822	14.38328	0.056151	2.69723	
3	2.514	18.70768	0.0507721	2.43886	
2	1.869	13.90798	0.038396	1.84437	
1	1	8.6646	0.020818	1	
4	2.69723	13.74735	0.05444	2.68138	
3	2.43886	18.14853	0.049294	2.42792	
2	1.84437	13.72469	0.037365	1.84037	
1	1	8.6646	0.020303	1	
4	2.68138	13.66656	0.053959	2.67521	
3	2.42792	18.06712	0.04891	2.42489	
2	1.84037	13.69493	0.03710	1.83937	
1	1	8.6646	0.02017	1	
4	2.67521	13.68512	0.0541	2.67822	
3	2.42489	18.04458	0.0490	2.42574	
2	1.83937	13.68749	0.0372	1.84158	
1	1	8.6646	0.0202	1	Primer modo
4	2.67822	13.65046	0.0542	2.68051	2.68
3	2.42574	18.05090	0.0491	2.42829	2.43
2	1.84158	13.70393	0.0372	1.83976	1.84
1	1	8.6646	0.02022	1	1

$$P^2 = \frac{Y^T X'}{Y^T M Y}$$

$$= \frac{0.02022x8.6646+0.0372x13.70393+0.491x18.0509+0.0542x13.65046}{(0.02022)^2 X8.6646+(0.0372)^2 x7.4414+(0.0491)^2+7.4414+(0.0542)^2 x5.09684}$$

$$P_1^2 = \frac{2.311}{0.04675} = 49.4303 \quad seg^{-2}$$

Para los modos superiores se tiene

$K' = K - \mu M$

suponiendo un valor $\mu = 240$

$$K' = \begin{bmatrix} 3268.06 & -2673.78 & 0 & \\ -2673.78 & 3561.62 & -2673.78 & 0 \\ 0 & -2673.78 & 3561.62 & -2673.78 \\ 0 & 0 & -2673.78 & 1450.54 \end{bmatrix}$$

Nivel	X Supuesta	X'	Y	Normalización
4	-1	-5.0968	-0.0109	-2.2199
3	1	7.4414	-0.0040	-.81349
2	1	7.4414	0.00278	0.5643
1	1	8.6646	0.00942	1

4	-2.2199	-11.2791	-0.00641	-0.607
3	-0.8135	-6.0536	0.000742	0.07036
2	0.5643	4.1988	0.00966	0.91523
1	1	8.6646	0.01055	1

4	-0.607	-3.0947	-0.00827	-1.469
3	0.07036	0.5236	-0.00333	-0.5913
2	0.91523	6.811	0.00362	0.6465
1	1	8.6646	0.00563	1

4	-1.469	-7.490	-0.00655	-0.7675
3	-0.5913	-4.400	-0.000754	-0.0883
2	0.6465	4.8112	0.00719	0.84269
1	1	8.6646	0.00854	1

Nivel	X Supuesta	X'	Y	Normalización	
4	-0.7675	-3.9118	-0.007835	-1.25282	-6.3854
3	-0.0883	-0.6567	-0.002760	-.44418	-3.3053
2	0.8459	6.27081	0.004353	0.70066	5.2139
1	1	8.6646	0.006213	1	8.6646

4	-1.25282	-6.3854	-0.00689	-0.8800
3	-0.44418	-3.3053	-0.00135	-0.1723
2	0.70066	5.2139	0.00633	0.8083
1	1	8.6646	0.00729	1

4	-0.880	-4.48520	-0.00757	-1.485
3	-0.1723	-1.28246	-0.00243	-0.3685
2	0.8083	6.015115	0.00481	0.7304
1	1	8.6646	0.00659	1

4	-1.1485	-5.8535	-.00708	-0.9458
3	-0.3685	-2.7418	-0.00165	-0.2205
2	0.7304	5.4355	0.00590	0.789144
1	1	8.6646	0.00748	1

4	-0.9458	-4.82078	-0.00745	-1.0937
3	-0.2205	-1.6410	-0.00224	-0.3285
2	0.78914	5.87234	0.00508	0.7463
1	1	8.6646	0.00681	1

4	-1.0937	-5.5746	-0.00718	-0.9831
3	-0.3285	-2.4447	-0.00181	-0.2477
2	0.7463	5.5533	0.00568	0.7783
1	1	8.6646	0.00230	1

Nivel	X Supuesta	X'	Y	Normalización
4	-0.9831	-5.0105	-0.007378	-1.064
3	-0.2477	-1.8433	-0.002129	-3.3171
2	0.7783	5.7920	0.005232	0.7548
1	1	8.6646	0.006931	1

					2do. Modo Promedio
4	-1.064	-5.4250	-0.00723	-1.004	-1.034
3	-0.3171	-2.2852	-0.001893	-0.263	-0.294
2	0.7548	5.6165	0.00556	0.77	0.76
1	1	8.6646	0.00720	1	1

$$\lambda = \frac{0.00707\times 8.6646+0.00540\times 5.7043+0.00201\times 2.0643+0.00730\times 5.21775}{(0.00707)^2 8.6646+(0.00540)^2\times 7.4414+(0.00201)^2\times 7.4414+(0.0073)^2\times 5.09684} =$$

$$\frac{0.1343}{0.00095} = 141.3$$

$$p_e^2 = \mu + \lambda = 240 + 141.3 = 381.32 \text{ seg}^{-2}$$

Para el tercer modo tenemos si $\mu = 800$

$$K' = K - \mu M = \begin{bmatrix} -1584.12 & -2673.78 & 0 & 0 \\ -2673.78 & -605.56 & 0 & 0 \\ 0 & -2673.98 & -605.56 & -2673.78 \\ 0 & 0 & -2673.78 & -1403.69 \end{bmatrix}$$

Nivel	X Supuesta	X'	Y	Normalización
4	1	5.0968	0.01948	1.07773
3	-1	-7.4414	-0.01213	-0.67125
2	-1	-7.4414	-0.01395	-0.77174
1	1	8.6646	0.01808	1

4	1.07773	5.4930	0.0171533	1.0653
3	-0.67125	-4.9950	-0.011060	-0.68685
2	-0.77174	-5.7428	-0.012780	-0.79372
1	1	8.6646	0.016102	1

4	1.0653	5.4296	0.017275	1.0651
3	-0.68685	-5.1111	-0.011099	-0.68437
2	-0.79372	-5.9064	-0.01285	-0.79226
1	1	8.6646	0.01622	1

tercer modo

4	1.0651	5.428691	0.017256	1.0650	1.0650
3	-0.68437	-5.092678	-0.01109	-0.68443	-0.68443
2	-0.79226	-5.895546	-0.01284	-0.79247	-0.79247
1	1	8.6646	0.01620	1	1

$$\lambda = \frac{0.01620 \times 8.6646 + 0.01284 \times 5.895546 + 0.01109 \times 5.092678 + 0.017256 \times 5.428691}{(0.01620)^2 \times 8.6646 + (0.01284)^2 \times 7.4414 + (0.01109)^2 \times 7.4414 + (0.017256)^2 \times 5.0968} =$$

$$\lambda = \frac{0.36622}{0.00593} = 61.757$$

$$P_3^{\,2} = 800 + 61.757 = 861.757 \ \ seg^{-2}$$

Y para el cuarto modo se supone $\mu = 1200$

$$K' = K - M = \begin{bmatrix} -5049.96 & -2673.78 & 0 & 0 \\ -2673.78 & -3582.12 & -2673.78 & 0 \\ 0 & -2673.78 & -3582.12 & -2673.78 \\ 0 & 0 & -2673.78 & -3442.43 \end{bmatrix}$$

Nivel	X Supuesta	X'	Y	Normalización
4	1	5.0968	0.009879	-2.01556
3	-1	-8.4414	-0.014625	2.9839
2	1	-7.4414	0.0124978	-2.54985
1	-1	-8.6646	-0.0090143	1
4	-2.01556	-10.2729	-0.226658	-1.6069
3	2.9839	22.2044	0.033023	2.34122
2	-2.54985	-18.9744	-0.02988	-2.1184
1	1	8.6646	0.014105	1
4	-1.6069	-8.1900	-0.01879	-1.6899
3	2.34122	17.4229	0.02725	2.4512
2	-2.1184	-15.7641	-0.02424	-2.1802
1	1	8.6646	0.01112	1

4	-1.6899	-8.61297	-0.01940	-1.6687
3	2.4512	18.2405	0.02820	2.4255
2	-2.1802	-16.2238	-0.02520	-2.1674
1	1	8.6646	0.01163	1

4	-1.6687	-8.5052	-0.019266	-1.6740
3	2.4255	18.0488	0.02799	2.43168
2	-2.1674	-16.1283	-0.02498	-2.17027
1	1	8.6646	0.01151	1

4	-1.6740	-8.53225	-0.019299	-1.6727
3	2.43168	18.09513	0.02804	2.43012
2	-2.1703	-16.14986	-0.02503	-2.16957
1	1	8.6646	0.01153	1

4	-1.6727	-8.52534	-0.019291	-1.6730
3	2.43012	18.083502	0.028025	2.4305
2	-2.16957	-16.144604	-0.02502	-2.1697
1	1	8.6646	0.011530	1

					4to. modo de vibrar
4	-1.6730	-8.52710	-0.019293	-1.6730	-1.6730
3	2.4305	18.0865	0.02803	2.4304	2.4304
2	-2.1697	-16.14592	-0.02502	-2.1697	-2.1697
1	1	8.6646	0.01153	1	1

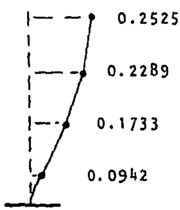
$$\lambda = \frac{0.01153\times 8.6646+0.2502\times 16.14592+0.02803\times 18.0865+0.019293\times 8.52710}{(0.01153)^2\times 8.6646+(0.02502)^2\times 7.4414+(0.02802)^2\times 7.4414+(0.019293)^2\times 5.0968}$$

$$\lambda = \frac{1.17535}{0.01355} = 86.742$$

$$P_4^2 = \mu + \lambda = 1\,200 + 86.742 = 1286.742 \ \text{seg}^{-2}$$

Normalizando. $Znj = Zj\ n \quad ; \quad n = \dfrac{1}{\sqrt{Z_j^T\ M\ Zj}}$

Primer modo

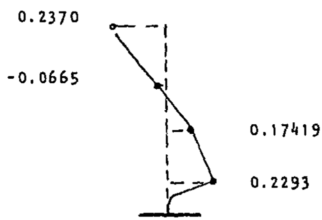


$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{112.635}} = 0.0942$$

$P_1 = 7.0307 \ \text{seg}^{-1}$

$T_1 = 0.8937$ seg

Segundo modo

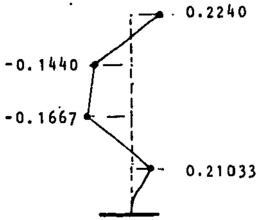


$$n_2 = \frac{1}{\sqrt{19.038}} = 0.2292$$

$P_2 = 19.6275 \ \text{seg}^{-1}$

$T_2 = 0.3218$ seg

Tercer modo

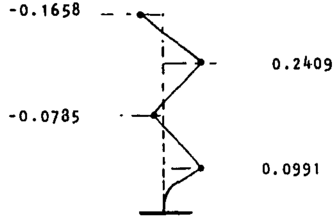


$$n_3 = \frac{1}{\sqrt{22.605}} = 0.21033$$

$P_3 = 29.3557 \ \text{seg}^{-1}$

$T_3 = 0.3218$ seg

Cuarto modo



$$n_4 = \frac{1}{\sqrt{101.917}} = 0.0991$$

$P_4 = 35.8712 \ \text{seg}^{-1}$

$T_4 = 0.1752$ seg

Propiedades de ortogonalidad

1ª $\quad Zj^T \, M \, Zr = 0$

$$[0.0942,\ 0.1733,\ 0.2289,\ 0.2525] \begin{bmatrix} 8.6646 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7.4414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.4414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.09684 \end{bmatrix}$$

$$[0.81621,\ 1.28959,\ 1.70334,\ 1.28695]$$

$$[0.81621,\ 1.28959,\ 1.70334,\ 1.28695] \begin{bmatrix} 0.2292 \\ 0.17419 \\ -0.0665 \\ -0.2370 \end{bmatrix} = -.00789 \longrightarrow 0$$

2ª $\quad Zj^T \ K \ Zr = 0$

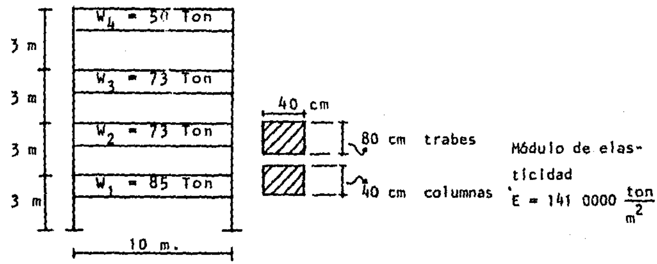
$$\begin{bmatrix} 0.0942, & 0.1733, & 0.2289, & 0.2525 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5347.56 & -2673.78 & 0 & 0 \\ -2673.78 & 5347.56 & -2673.78 & 0 \\ 0 & -2673.78 & 5347.56 & -2673.78 \\ 0 & 0 & -2673.78 & 2673.78 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 40.3741 & 62.834 & 85.561 & 63.1012 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 40.3741, & 62.834, & 85.561, & 63.1012 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0991 \\ -0.0785 \\ 0.2409 \\ -0.1658 \end{bmatrix} = 9.21807 \longrightarrow 0$$

PROBLEMA E-14

Para el siguiente sistema de cuatro grados de libertad, calcule los modos de vibrar con el método Stodola con la matriz de Rigideces. No se considera las trabes infinitamente rígidas.



Solución:

Las masas concentradas serán:

$$m_1 = w_1/g = 85/9.81 = 8.6646 \text{ ton } \frac{seg^2}{m}$$

$$m_2 = m_3 = \frac{w_2}{g} = 73/9.81 = 7.4414 \text{ ton } \frac{seg^2}{m} ,$$

$$m_4 = w_4/g = 50/9.81 = 5.09684 \text{ ton } \frac{seg^2}{m}$$

La matriz de masas concentradas es:

$$M = \begin{bmatrix} 8.6646 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7.4414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.4414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.09684 \end{bmatrix}$$

Calculemos la rigidez angular y lineal:

$$I_T = \frac{0.40\ (0.80)^3}{12} = 0.01707\ m^4$$

$$Ic = \frac{(0.40)^4}{12} = 0.00213\ \ m^4$$

$$I_T/Ic = 0.01707/0.00213 = 8.0141$$

Entonces

$$I_T = 8.0141\ Ic \quad y$$

$$E\ Ic = 3003.3\ ton - m^2$$

para las columnas es:

$$Ka = \frac{4\ EI}{h} = \frac{4}{3}\quad E\ Ic = 1.333\ E\ Ic$$

$$MkL = \frac{6\ EI}{h^2} = \frac{6}{9}\quad E\ Ic = 0.666\ \ E\ Ic$$

$$KL = \frac{12\ EI}{h^3} = \frac{12}{27}\quad E\ Ic = 0.444\ \ E\ Ic$$

para las trabes es:

$$K = \frac{4\ EI}{L} = \frac{4}{10}\ (8.014)\ \ E\ Ic = 3.206\ E\ Ic$$

Por lo tanto la matriz de Rigideces es:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	F_1	F_2	F_3	F_4
M_1	5.871	1.602	0.667	0	0	0	0	0	0	0.667	0	0
M_2	1.602	5.871	0	0.667	0	0	0	0	0	0.667	0	0
M_3	0.667	0	5.871	1.602	0.667	0	0	0	-0.667	0	0.667	0
M_4	0	0.667	1.602	5.871	0	0.667	0	0	-0.667	0	0.667	0
M_5	0	0	0.667	0	5.871	1.667	0.667	0	0	-0.667	0	0.667
M_6	0	0	0	0.667	1.602	5.871	0	0.667	0	-0.667	0	0.667
M_7	0	0	0	0	0.667	0	4.538	1.602	0	0	-0.667	0.667
M_8	0	0	0	0	0	0.667	1.602	4.538	0	0	-0.667	0.667
F_1	0	0	-0.667	-0.667	0	0	0	0	1.776	-0.888	0	0
F_2	0.667	0.667	0	0	0.667	0.667	0	0	-0.888	1.776	-0.888	0
F_3	0	0	0.667	0.667	0	0	-0.667	-0.667	0	-0.888	1.776	-0.888
F_4	0	0	0	0	0.667	0.667	0.667	0.667	0	0	-0.888	0.888

que es de la forma

$$\begin{bmatrix} M \\ F \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array}\right]$$

esto es que

$$K_D = [K_{22}] - [K_{21}]\,[K_{11}]^{-1}\,[K_{12}]$$

entonces

$$[K_{11}]^{-1} \begin{bmatrix} 0.18758 & -.05268 & -.02533 & 0.0.1319 & 0.00368 & -.00262 & -.00077 & 0.00066 \\ -.05268 & 0.18758 & 0.01319 & -0.02533 & -.002582 & 0.00369 & -.00066 & -.00077 \\ -.02533 & 0.01319 & 0.191271 & -.05530 & -.02619 & 0.01416 & 0.00524 & -.00393 \\ 0.013190 & -.02582 & -.05530 & 0.19127 & 0.01388 & -.02627 & -.00389 & 0.00523 \\ 0.0036988 & -.002618 & -.026268 & 0.014166 & 0.19349 & -.05898 & -.035984 & 0.021372 \\ -.002582 & 0.003680 & 0.013888 & 0.026190 & -.056762 & 0.193494 & 0.020999 & -.035834 \\ -0.00077 & 0.00066 & 0.005234 & -.003889 & -.035853 & 0.021372 & 0.2590197 & -.094580 \\ 0.00066 & -.00077 & -.003930 & 0.005234 & 0.020999 & -.03598 & -.094525 & 0.2590197 \end{bmatrix}$$

$$[K_{11}]^{-1}\ [K_{12}] = \begin{bmatrix} 0.008097 & 0.089258 & -.008024 & 0.000634 \\ 0.008097 & 0.159506 & -.008024 & 0.000674 \\ -.090692 & 0.000428 & 0.089805 & -.007137 \\ -.090692 & -.000173 & 0.089798 & -.007370 \\ 0.008077 & -.088998 & 0.001667 & 0.079973 \\ 0.008204 & -.090465 & 0.001688 & 0.081307 \\ -.000896 & 0.009571 & -.108785 & 0.100087 \\ -.006123 & 0.009918 & -.103592 & 0.099723 \end{bmatrix}$$

finalmente

$$[K_{12}][K_{11}]^{-1}[K_{12}] \begin{bmatrix} 0.120983 & -0.000170 & -0.119789 & 0.009676 \\ -0.000058 & 0.286294 & -.012942 & 0.106701 \\ -0.116301 & -0.012819 & 0.26144 & -0.142916 \\ 0.006178 & -0.107378 & -0.139418 & 0.240813 \end{bmatrix}$$

$$K_D = \begin{bmatrix} 1.776 & -0.888 & 0 & 0 \\ -0.888 & 1.776 & -0.888 & 0 \\ 0 & -0.888 & 1.776 & -0.888 \\ 0 & 0 & -0.888 & 0.888 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.120983 & -0.000170 & -0.119789 & 0.009676 \\ -0.000058 & 0.286294 & -0.12942 & -0.106701 \\ -0.116301 & -0.012818 & 0.26144 & -0.142916 \\ 0.006178 & -0.107378 & -0.139418 & 0.240813 \end{bmatrix}$$

$$K_D = \begin{bmatrix} 1.655017 & -0.88783 & 0.119789 & 0.009676 \\ -0.887942 & 1.488706 & -0.87506 & 0.106701 \\ 0.116301 & -0.87518 & 1.51456 & -0.745084 \\ -0.006178 & 0.107378 & -0.74858 & 0.647157 \end{bmatrix} \cdot E\ Ic$$

$$K_D = \begin{bmatrix} 4970.513 & -2666.420 & 359.762 & 29.060 \\ -2666.756 & 4471.031 & -2628.068 & 320.455 \\ 349.287 & -2628.428 & 4548.678 & -2237.711 \\ -18.554 & 322.488 & -2248.210 & 1943.607 \end{bmatrix}$$

Para el cálculo de los modos de vibrar con el método de Stodola vianelo se empleará el programa que a continuación se presenta:

Programa para encontrar las frecuencias, período y los modos de vibrar de un sistema de varios grados de libertad con el método de Stodola con matriz de Rigideces.

```
2    REM "STODOLA RIGIDEZ"
3    SCNCLR
5    REMARK LEE DATOS Y CALCULA (1/M)* K
6    N = 1
8    INPUT "GRADOS DE LIBERTAD" ; G
10   DIM F(1), G(1), L(1)
12   DIM N(3), S(1), W(1)
14   DIM C(GO, P(GO, T(G)
16   DIM X(G), Z(G)
18   DIM A(G, G), M(G, G)
20   DIM R(G, G), Y (G, G)
24   PRINT "DAME LOS PESOS"
25   FOR I = 1 TO G
30   INPUT W
40   LET M(I, I) = 9.81/W
50   NEXT I
55   PRINT "DAME LA MATRIZ DE RIGIDECES"
60   FOR I = 1 TO G
70   FOR J = 1 TO G
80   INPUT R (I, J)
90   NEXT J
100  NEXT I
110  FOR I = 1 TO G
120  FOR J = 1 TO G
130  LET A (I, J) = 0
140  FOR K = 1 TO G
150  LET A (I, J) = A(I, J) + M(I, K)* R (K, J)
160  NEXT K
170  NEXT J
180  LET X(I) = RND(  .5)
```

```
190  NEXT I
192  LET N2 = N
196  PRINT " ITERCION"; N2;
198  PRINT "MODO" ; G + 1 -N
200  FOR J =1 TO G
210  LET C(J) = 0
220  FOR K = I TO G
230  LET C(J) = C(J) + A (J, K)* X(K)
240  NEXT K
250  NEXT J
260  FOR I = 2 TO G
270  LET C(I) = C(I)/C(1)
280  LET X(I) = C(I)
284  NEXT I
300  LET X(1) = 1
302  U = 0.01
304  H = -.01
306  V = C(2) -F
310  IF(V)< (U) THEN 311 : ELSE 515
311  IF(V) >(H) THEN 320 : ELSE 515
315  REMARK CALCULA FRECUENCIA Y PERIODO
320  FOR J = 1 TO G
330  LET C(J) = 0
340  FOR K = 1 TO G
350  LET C(J) = C(J) + R(J, K)* X(K)
360  NEXT K
370  NEXT J
380  LET L = 0
390  LET S = 0
400  FOR I = 1 TO G
410  LET L = L + X(I)* C(I)
420  LET S = S + (X(I)↑2)/M(I, I)
430  NEXT I
440  LET P(N) = L/S
```

```
450  LET T(N) = 6.283185 / SQR (P(N))
455  REMARK NORMALIZA Y ALMACENA MODOS
460  FOR I = 1 TO G
470  LET Y(I,N) = X(I)/SQR (S)
480  LET X(I) = RND (0.5)
490  NEXT I
500  LET N = N + 1
505  REMARK QUITA MODO
510 LET F = X(2)
515  LET F = X(2)
520  IF N = 1 THEN 194
530  FOR I=1 TO N - 1
540  LET Z(I) = 0
550  FOR J = 1 TO G
560  LET Z(T) = Z (I) + (Y(J, I)* X(J))/M(J, I)
570  NEXT J
580  NEXT I
590  FOR I = 1 TO N - 1
600  FOR J = 1 TO G
610  LET X(J) = X(J) -Z(I)* Y(J, I)
620  NEXT J
630  NEXT I
640  IF N < > (G+1) THEN 194
645  REMARK IMPRIME RESULTADOS
650  PRINT " MATRIZ DE MODOS "
660  PRINT "MODO 1, 2, 3,,     N"
670  PRINT
680  FOR I = 1 TO G
690  FOR J = G TO 1 STEP - 1
700  PRINT Y(I, J);
710  NEXT J: PRINT
720  NEXT I
730  PRINT
740  FOR I = 0 TO G - 1
```

```
750  PRINT "P("; I + 1 ;") ↑ 2 ="; P(G-1)
755  PRINT "T("; I + 1;") = "; T(G-1); "SEG"
760  NEXT I
770  END.
```

Resultados

1er. Modo	2do. Modo	3er. Modo	4to. Modo	Nivel
0.144378	0.186959	0.23501	0.155423	1
0.140077211	0.208500	-0.08237	-0.213559	2
0.22558644	-0.039500	-0.173131	0.201925	3
0.2236747	-0.2611938	0.221398	-0.139069	4

$P_1^2 = 63.3233 \qquad T_1 = 0.78958$ seg

$P_2^2 = 256.1512 \qquad T_2 = 0.39258$ seg

$P_3^2 = 696.6692 \qquad T_3 = 0.23805$ seg

$P_4^2 = 1117.82309 \qquad T_4 = 0.18793$ seg

Los resultados obtenidos fueron determinados en24 iteraciones.

PROBLEMA E-15

Con el fin de demostrar la aplicación del método de Jacobi, considerese el sistema oscilatorio de la Figura E-15. para el cual se tiene los datos siguientes:

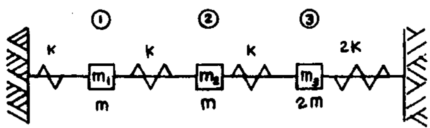


Figura E-15

$$K = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad y \quad M = m\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Puesto que M es diagonal, la matriz L y L' se encuentra fácilmente así:

$M = L' \, L'$

$$L = \sqrt{m}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L' = \sqrt{m}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matriz dinámica inversa resulta

$$G^* = G^{-1} = L^{-1} \; K \; (L')^{-1}$$

$$G^* = G^{-1} = \begin{bmatrix} 2.000 & -1.00 & 0 \\ -1.000 & 2.000 & -0.7071 \\ 0 & -0.7071 & 1.5000 \end{bmatrix}$$

Los ciclos de rotación se inician eliminando, por ejemplo, el término g^*_{12} $(r = 1 \; , \; s = 2)$, así

$$\tan 2\phi = \frac{2\, g^*_{rs}}{g^*_{rr} - g^*_{ss}} = \frac{2\,(-1)}{2-2} = \pm \infty$$

$\therefore \quad \phi = 3/4\pi$

y siendo sen $\phi = 0.7071$, y cos $\phi = 0.7071$, se tiene que:

$$R_1 = \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 & 0 \\ 0.7071 & -0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El triple producto resulta ser

$$G^*_1 = R'_1 \; G^* \; R_1 = \begin{bmatrix} 3.000 & 0 & -0.5000 \\ 0 & 1.000 & 0.5000 \\ -0.500 & 0.500 & 1.500 \end{bmatrix}$$

En igual forma, para $r = 1$, $s = 3$, se obtiene:

$$\tan 2\phi = \frac{2\,(-0.500)}{3.000 - 1.500} = -\,0.67 \;\therefore\; \phi = 163^\circ\, 09'$$

o sea que (sen $\phi = 0.2899$, y cos $\phi = -0.9571$)

y por lo tanto

$$G^*_2 = R'_2\, G^*_1\, R_2 = \begin{bmatrix} 3.1516 & 0.1450 & 0 \\ 0.1450 & 1.000 & -0.4789 \\ 0 & -4.4786 & 1.3486 \end{bmatrix}$$

Después de seis ciclos se obtiene finalmente

$$G^*_6 = R'_6\, G^*_5\, R_6 = \begin{bmatrix} 3.1619 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6789 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6594 \end{bmatrix}$$

El producto de las matrices de rotación es

$$Z = R_1 \cdot R_2 \cdot \ldots\ldots R_n = \prod_{i=1}^{n} R_i$$

$$Z = \prod_{i=1}^{n} R_i = \begin{bmatrix} -0.6209 & 0.6074 & -0.4959 \\ 0.7215 & 0.1949 & -0.6646 \\ -0.3070 & -0.7702 & -0.5592 \end{bmatrix}$$

Ahora $D = (L')^{-1}\, Z = \dfrac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 2.86 & -1.12 & 1.26 \\ -3.33 & -0.36 & 1.68 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}$

y como $\lambda = m\, P^2/K$

$$\{Z\}'\ G^*_6\ \{Z\} = \lambda \quad ; \qquad W^2 = \lambda\, \frac{K}{m}$$

Para obtener finalmente las frecuencias naturales

$$W_1 = 0.8119 \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$W_2 = 1.2961 \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$W_3 = 1.7808 \sqrt{\frac{K}{m}}$$

PROGRAMA PARA ENCONTRAR LOS MODOS DE VIBRAR DE UN SISTEMA CON VARIOS GRADOS DE LIBERTAD CON E METODO DE JACOBI EN LA SIGMA COMMODORE 16 K.

```
5     SCNCLR
10    REM ENTRADA DE DATOS
20    GOSUB 70
28    REM INICIA
30    GOSUB 660
40    GOSUB 980
46    REM SALIDA DE RESULTADOS
50    GO SUB 750
60    GOTO 3000
65    REM ENTRADA DE DATOS
70    PRINT
80    PRINT "METODO CICLICO DE JACOBI"
160   PRINT
180   PRINT"N=TAMANO DEL PROBLEMA"
190   PRINT"DAME EL VALOR DE N";
200   PRINT
210   INPUT N
220   DIM A(N,N),B(N),V(N,N)
225   PRINT
227   PRINT "DAME EL VALOR DE S1";
230   INPUT S1
240   PRINT
250   PRINT
260   PRINT"ENTRADA DE MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR"
270   PRINT
280   PRINT"DE LA MATRIZ A, POR COLMS"
290   PRINT
320   FOR J=1 TON
330   PRINT
340   PRINT "ENTRADA DE LA PARTE SUPR. DE LA COLM.";J
350   PRINT
360   FOR I=1 TO J
370   REM PRINT "A(";I;",";J;")=";
380   INPUT A(I,J)
```

```
390  NEXT I
400  PRINT
450  NEXT J
460  FOR I=1 TO N
470  I1=I-1
480  FOR J=1 TO I1
490  A(I,J)=A(J,I)
500  NEXT J
510  NEXT I
520  PRINT
530  PRINT "ENTRADA DE ELEMENTOS DE"
550  PRINT "MATRIZ DIAGONAL B"
560  PRINT
570  FOR I=1 TO N
580  PRINT "B(";I;")=";
590  INPUT B(I)
600  NEXT I
610  PRINT
650  RETURN
655  REM NUMERO MAX. DE ROTACIONES
660  Z=2*S1
670  T1=1/(10↑Z)
680  PRINT
690  SCNCLR:PRINT"TOLERANCIA="; T1
700  R=5*N*N
710  R1=0
720  T2=.1
730  N1=N-1
740  RETURN
746  REM SALIDA DE LA EIGENSOLUCIONES
750  PRINT
770  PRINT"SOLUCION":PRINT
800  PRINT "NUMERO DE ITERACIONES";R1
810  PRINT
830  FOR J=1 TO N
840  PRINT
850  PRINT "EIGENVALOR";J;"="=;B(J)
```

```
860   PRINT
870   PRINT"SU EIGENVECTOR ES"
880   PRINT
890   FOR I=1 TO N
900   PRINT U(I,J)
910   NEXT I
950   PRINT
960   NEXT J
970   RETURN
975   REM SOLUCION AL EIGENPROBLEMA
980   GOSUB 1130
990   GOSUB 1290
995   REM CHECK OF ROTATIONS
1000  IFX1  T1 THEN 1110
1005  REM CHECK NO.OF ROTATIONS
1010  IFR1  R THEN 1040
1020  T2=.1*X1
1030  GOTO 990
1040  PRINT
1050  PRINT"**ERROR**"
1060  PRINT "NO SE LOGRA CONVERGENCIA"
1018  PRINT
1090  PRINT "WITH";R1;"ITERACIONES"
1100  END
1110  GOSUB 1830
1120  RETURN
1130  FOR I=1 TO N
1140  FOR J=1 TO N
1150  U(I,J)=0
1160  NEXT J
1170  U(I,I)=1
1180  NEXT I
1190  FOR I=1 TO N
1200  B1=SQR(B(I)
1210  B(I)=1/B1
1220  NEXT I
1230  FOR I=1 TO N
```

```
1240 FOR J=1 TO N
1250 A(I,J)=B(I)*A(I,J)*B(J)
1260 NEXT J
1270 NEXT I
1280 RETURN
1290 X1=0
1300 FOR K=1 TO N1
1310 K1=K+1
1320 FOR L=K1 TO N
1330 A1=A(K,K)
1340 A2=A(K,L)
1350 A3=A(L,L)
1360 X=A2*A2/(A1*A3)
1370 IF X X1 THEN 1390
1380 GOTO 1400
1390 X1=X
1400 IFX T2 THEN 1800
1410 R1=R1+1
1420 IF A1=A3 THEN 1470
1430 Z=.5*(A1-A3)/A2
1440 Z1=1+1/(Z*Z)
1450 T=Z*(1+SQR(Z1))
1460 GOTO 1480
1470 T=1
1480 C=1/SQR(1+T*T)
1490 S=C*T
1500 S2=S*S
1510 C2=C*C
1520 A(K,L)=0
1525 REM TRANSFORMACION DE ELEMENTOS DIAGONALES
1530 A0=2*A2*C*S
1540 A(K,K)=A1*C2+A0+A3*S2
1550 A(L,L)=A1*S2-A0+A3*C2
1560 FOR I=1 TO N
1570 IF I  K THEN 1600
1580 IF I  K THEN 1640
```

```
1590 GOTO 1740
1600 AO=A(I,K)
1610 A(I,K)=C*AO+S*A(I,L)
1620 A(I,L)=-S*AO*C*A(I,L)
1630 GOTO 1740
1640 IF I<L THEN 1670
1650 IF I>L THEN 1710
1660 GOTO 1740
1670 AO=A(K,K)
1680 A(K,I)=C*AO+S*A(I,L)
1690 A(I,L)=S*AO+C*A(I,L)
1700 GOTO 1740
1710 AO=A(K,I)
1720 A(K,I)=C*AO+S*A(L,I)
1730 A(L,I)=-S*AO+C*A(L,I)
1740 NEXT I
1750 FOR I=1 TO N
1760 UO=U(I,K)
1770 U(I,K)=C*UO+S*U(I,L)
1780 U(I,L)=-S*UO*C*U(I,L)
1790 NEXT I
1800 NEXT L
1810 NEXT K
1820 RETURN
1830 FOR I=1 TO N
1840 FOR J=1 TO N
1850 U(I,J)=U(I,J)*B(I)
1860 NEXT J
1870 NEXT I
1880 FOR I=1 TO N
1890 B(I)=A(I,I)
1900 NEXT I
1910 FOR I=1 TO N1
1920 I1=I+1
1930 Z=B(I)
1940 M=I
```

```
1950  FOR J=I1 TO N
1960  IF Z<B(I) THEN 1990
1970  Z=B(J)
1980  M=J
1990  NEXT J
2000  B(M)=B(I)
2010  B(I)=Z
2020  FOR J=1 TO N
2030  Z=U(J,I)
2040  U=(J,I)=U(J,M)
2050  U=(J,M)=Z
2060  NEXT J
2070  NEXT I
2080  RETURN
3000  PRINT "FIN DEL PROGRAMA"
3010  END
```

PROBLEMA E-16

Encontrar la solución general a la vibración del sistema que se muestra en la figura:

$m_3 = 0.2039$ ton - seg^2/cm

$k_3 = 80$ ton/cm

$m_2 = 0.4078$ ton - seg^2/cm

$k_2 = 200$ ton/cm

$m_1 = 0.4078$ ton-seg^2/cm

$k_1 = 200$ ton/cm

Condiciones iniciales

$$X_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ cm} \qquad \dot{X}_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{cm/s}$$

Solución:

Con alguno de los métodos mencionados anteriormente se calculan los modos de vibrar del sistema.

$$[Z] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1.751 & 0.853 & -0.803 \\ 2.541 & -1.968 & 0.321 \end{bmatrix}$$

donde

$$P_1 = 11.05 \ \text{seg}^{-1} \quad y \qquad T_1 = 0.5686 \ \text{seg}$$

$$P_2 = 23.71 \ \text{seg}^{-1} \quad y \qquad T_2 = 0.2650 \ \text{seg}$$

$$P_3 = 37.08 \ \text{seg}^{-1} \quad y \qquad T_3 = 0.1694 \ \text{seg}$$

La matriz de modos normalizados es: $\eta = \dfrac{1}{\sqrt{Z^T M Z}}$

$$[Zn] = \begin{bmatrix} 0.58 & 0.82 & 1.20 \\ 1.02 & 0.70 & -0.97 \\ 1.48 & -1.61 & 0.39 \end{bmatrix}$$

como estamos en el caso de vibración libre, emplearemos la solu ción general como:

$$U = [Z] \left\{ S\ (t) \right\}$$

para esto calculamos el valro de las constantes C_i

$$C_i = [Z]^T \ M \ Xo$$

O sea:

$$C_i = \begin{bmatrix} 0.58 & 1.02 & 1.48 \\ 0.82 & 0.70 & -1.61 \\ 1.20 & -0.97 & 0.39 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.4078 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4078 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2039 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.973752 \\ -0.079521 \\ -0.0682 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $C_1 = 1.973752$, $C_2 = -0.079521$, $C_3 = -0.0632$

La solución es $X = Xo \cos Pt + \dot{X}o/p \text{ sen } pt$

pero $\dot{X}o = 0$ entonces

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.58 \\ 1.02 \\ 1.48 \end{bmatrix} (1.973752) \cos 11.051t + \begin{bmatrix} 0.82 \\ 0.70 \\ -1.61 \end{bmatrix} (-0.079521) \cos 23.71\, t +$$

$$\begin{bmatrix} 1.20 \\ -0.97 \\ 0.39 \end{bmatrix} (-0.0632) \cos 37.08\, t$$

Para la masa m_1

t	$s(t)_1$	$s(t)_2$	$s(t)_3$	X_1
0	1.145	-0.065	-0.076	1.004
0.03	1.082	-0.049	-0.033	1.000
0.06	0.902	-0.010	0.046	0.938
0.09	0.624	0.035	0.074	0.733
0.12	0.277	0.062	0.020	0.359
0.15	-0.099	0.060	-0.057	-0.096
0.18	-0.465	0.028	-0.070	-0.507
0.21	-0.780	-0.017	-0.005	-0.802
0.24	-1.010	-0.054	0.065	-0.891
0.27	-1.131	-0.065	0.063	-1.133
0.30	-1.128	-0.044	-0.010	-1.182
0.33	-1.002	-0.002	-0.073	-1.077

Para la masa m_2

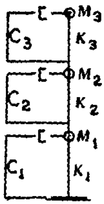
t	$s(t)_1$	$s(t)_2$	$s(t)_3$	X
0	2.013	-0.056	0.061	2.018
0.03	1.904	-0.042	0.027	1.891
0.06	1.587	-0.008	-0.037	1.542
0.09	1.097	0.03	-0.06	1.067
0.12	0.488	0.053	-0.016	0.525
0.15	-0.174	0.051	0.046	-0.077
0.18	-.818	0.024	0.057	-0.737
0.21	-1.312	-0.015	0.004	-1.323
0.24	-1.777	-0.046	-0,053	-1.876
0.27	-1.988	-0.055	-0.051	-2.094
0.30	-1.983	-0.038	0.008	-2.014
0.33	-1.762	-0.002	0.058	-1.706

Para la masa m_3

t	$S(t)_1$	$S(t)_2$	$S(t)_3$	X_3
0	2.921	0.128	-0.025	3.024
0.03	2.762	0.097	-0.011	2.848
0.06	2.302	0.019	0.015	2.336
0.09	1.592	-0.068	0.024	1.548
0.12	0.708	-0.122	0.006	0.592
0.15	-0.253	-0.117	-0.019	-0.389
0.18	-1.187	-0.055	-0.023	-1.265
0.21	-1.997	0.034	-0.002	-1.965
0.24	-2.578	0.106	0.021	-2.451
0.27	-2.885	0.127	0.021	-2.737
0.30	-2.877	0.086	-0.003	-2.794
0.33	-2.556	0.004	-0.023	-2.575

PROBLEMA E-17

Encuentre la respuesta para el sistema amortiguado que se muestra en la figura y cuyos datos se indican a continuación durante un tiempo de 0.62 segundos.



Condiciones iniciales

$$Xo \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} cm \qquad \dot{X}o = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} cm/seg$$

$m_1 = 55 \ \frac{kg\ s^2}{cm} \qquad K_1 = 3\ 471\ \ kg/cm$

$m_2 = 55 \ \frac{kg\ s^2}{cm} \qquad K_2 = 3\ 471\ \ kg/cm$

$m_3 = 55 \ \frac{kg\ s^2}{cm} \qquad K_3 = 3\ 471\ \ kg/cm$

Modo 1	Modo 2	Modo 3
2.2470	-0.8021	0.555
1.8019	0.4451	-1.247
1	1	1

$P_1^2 = 124.99$ rad/seg^2 $\quad P_2^2 = 982.133$ rad/seg $\quad P_3^2 = 2051.003$ rad/seg^2

$P_1 = 11.186$ rad/seg $\quad P_2 = 31.339$ rad/seg $\quad P_3 = 45.288$ rad/seg

$T = 0.562$ seg $\quad T = 0.2005$ seg $\quad T = 0.1387$ seg

La matriz de amortiguamiento es:

$$C = \begin{bmatrix} 172.37 & -61.52 & 0 \\ -61.52 & 172.37 & -61.52 \\ 0 & -61.52 & 110.85 \end{bmatrix}$$

Solución:

La ecuación de coordenadas normales del movimiento es:

$$M_j^* A_j + C_j^* A_j + K_j^* A_j = 0$$

Para cada modo es:

$M_j^* = Z_j^T M Z_j$ masa generalizada

$C_j^* = Z_j^T C Z_j$ amortiguamiento generalizado

$K_j^* = Z_j^T K Z_j$ rigidez generalizada

y para todos los modos será:

$$Z^T M Z = \begin{bmatrix} 1 & 1.8019 & 2.2470 \\ 1 & 0.4451 & -0.8021 \\ 1 & -1.247 & 0.555 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1.8019 & 0.4451 & -1.247 \\ 2.2470 & -0.8021 & 0.555 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 511.271893 & -0.0161154 & -2.73883 \\ -0.0161154 & 101.2813 & -0.68940 \\ -0.006364 & -0.011285 & 159.3667 \end{bmatrix}$$

nos interesa la diagonal principal de la matriz $\begin{bmatrix} 511.2719 \\ 101.2813 \\ 159.3667 \end{bmatrix}$

$$Z^T K Z = \begin{bmatrix} 1 & 1.8019 & 2.2470 \\ 1 & 0.445 & -0.8021 \\ 1 & -1.247 & 0.555 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6942 & -3471 & 0 \\ -3471 & 6942 & -3471 \\ 0 & -3471 & 3471 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1.8019 & 0.4451 & -1.247 \\ 2.247 & -0.8021 & 0.555 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6392.6581 & 1.6424 & 2.6873 \\ -.4815 & 9938.69695 & -.65671 \\ 0.69732 & -2.06212 & 32267.1553 \end{bmatrix}$$

nos interesa la diagonal principal $\begin{bmatrix} 6392.6581 \\ 9938.69695 \\ 32267.1553 \end{bmatrix}$

$$Z^T C Z = \begin{bmatrix} 1 & 1.8019 & 2.2470 \\ 1 & 0.445 & -0.8021 \\ 1 & -1.247 & 0.555 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 172.37 & -61.52 & 0 \\ -61.52 & 172.37 & -61.52 \\ 0 & -61.52 & 110.85 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1.8019 & 0.4451 & -1.247 \\ 2.247 & -.8021 & 0.555 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 571.8324 & -0.02079 & .018067 \\ -0.03188 & 266.991 & -0.01561 \\ 0.018067 & -0.046671 & 713.1365 \end{bmatrix}$$

nos interesa la diagonal principal $\begin{bmatrix} 571.8324 \\ 266.991 \\ 713.1365 \end{bmatrix}$

Las ecuaciones desacopladas son lineales, homogéneas y de 2do - grado.

1. $511.2719 \ddot{A}_j + 571.8324 \dot{A}_j + 6392,6581 A_j = 0$

2. $101.2813 \ddot{A}_j + 266.991 \dot{A}_j + 9938.69695 A_j = 0$

3. $159.3667 \ddot{A}_j + 713.1365 \dot{A}_j + 32267.1553 A_j = 0$

La solución de cada una de las ecuaciones esta dada por la expresión:

$$X(t) = e^{-nt} \left[C_1 \cos P't + (C_2 - n\, C_1) \frac{\text{sen } P't}{P'} \right], P' = P\sqrt{P^2 - n^2}$$

Normalización de los modos $Znj = Zj\ n$; $n = \dfrac{1}{\sqrt{Z_j^T\ M\ Z_j}}$

Modo 1	Modo 2	Modo 3
$n = \dfrac{1}{\sqrt{511.27}} = 0.0442$	$n = \dfrac{1}{\sqrt{101.28}} = 0.099$	$n = \dfrac{1}{\sqrt{159.37}} = 0.079$
0.0993	-0.0797	0.0440
0.0796	0.0442	-0.0988
0.0442	0.0994	0.0792

Cálculo de $C_2 = [Z]^T\ M\ [\dot{X}o]$

$$C_2 = \dot{X}o$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0442 & 0.0796 & 0.0993 \\ 0.0994 & 0.0442 & -0.0797 \\ 0.0792 & -0.0988 & 0.044 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.2705 \\ 3.5145 \\ 1.342 \end{bmatrix}$$

$$n_1 = \frac{c}{2m} = \frac{571.8324}{2(511.2719)} = 0.5593$$

$$n_2 = \frac{c}{2m} = \frac{266.991}{2(101.2813)} = 1.31163$$

$$n_3 = \frac{c}{2m} = \frac{713.1365}{2(159.3667)} = 2.2644$$

$$p_1 = \sqrt{\frac{6392.658}{511.2719}} = 3.536 \text{ rad/seg} , p_1' = \sqrt{p_1^2 - n_1^2} = 12.346 \text{ rad/seg.}$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{9938.697}{101.2813}} = 9.906 \text{ rad/seg} , p_2' = \sqrt{p_2^2 - n_2^2} = 97.2648 \text{ rad/seg}$$

$$p_3 = \sqrt{\frac{32267.155}{159.3667}} = 14.2292 \text{ rad/seg}, p_3' = \sqrt{p_3^2 - n_3^2} = 199.8899 \text{ rad/seg}$$

La respuesta del sistema es:

$$\{U\} = Z_1 \; S(t)_1 \; + \; Z_2 \; S(t)_2 \; + \; Z_3 \; S(t)_3$$

sustituyendo datos en este problema resulta

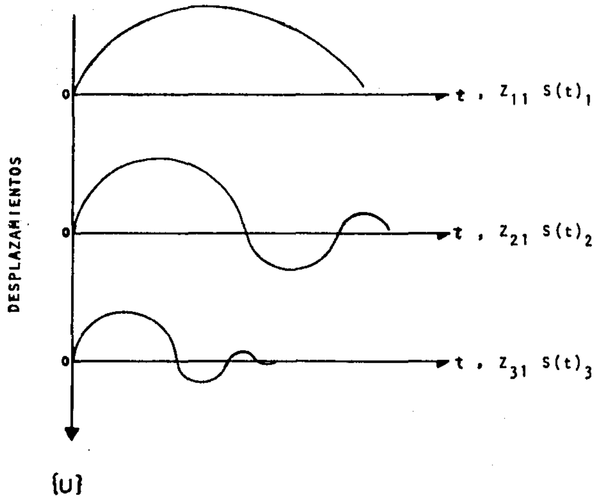
$$S(t)_1 = e^{-0.5593\,t} \left[0 \cos 12.346\,t + 12.2705 \frac{\text{sen } 12.346\,t}{12.346} \right]$$

$$S(t)_2 = e^{-1.31163\,t} \left[3.5145 \frac{\text{sen } 97.2648\,t}{97.2648} \right]$$

$$S(t)_3 = e^{-2.2644\,t} \left[1.342 \frac{\text{sen } 199.8899\,t}{199.8899} \right]$$

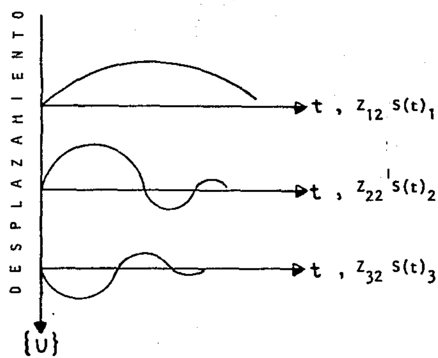
Los desplazamientos de la masa m_1

t	$S(t)_1$	$Z_{11}=0.0442$ $Z_{11}S(t)_1$	$S(t)_2$	$Z_{21}=0.0994$ $Z_{21}\ S(t)_2$	$S(t)_3$	$Z_{31}=0.0792$ $Z_{31}S(t)_3$	Σ $\{U\}$
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.3	0.054	2.387×10^{-3}	0.012	1.193×10^{-3}	0.003	2.376×10^{-4}	3.818×10^{-3}
0.6	0.092	4.066×10^{-3}	0.014	1.392×10^{-3}	0.001	7.920×10^{-5}	5.537×10^{-3}
0.9	0.116	5.127×10^{-3}	0.011	1.093×10^{-3}	1.5×10^{-6}	1.188×10^{-7}	6.220×10^{-3}
1.2	0.130	5.746×10^{-3}	0.007	6.958×10^{-4}	-3.8×10^{-4}	-3.010×10^{-5}	6.412×10^{-3}
1.5	0.136	6.011×10^{-3}	0.003	2.982×10^{-4}	-1.9×10^{-4}	-1.505×10^{-5}	6.324×10^{-3}
1.8	0.137	6.055×10^{-3}	2.92×10^{-4}	2.902×10^{-5}	-3.9×10^{-7}	0.000	6.084×10^{-3}
2.1	0.134	5.923×10^{-3}	-0.001	-9.94×10^{-5}	4.99×10^{-5}	0.000	5.824×10^{-3}
2.4	0.128	5.658×10^{-3}	-0.001	-9.94×10^{-5}	2.54×10^{-5}	0.000	5.559×10^{-3}
2.7	0.121	5.348×10^{-3}	-0.001	-9.94×10^{-5}	7.7×10^{-8}	0.000	5.249×10^{-3}
3.0	0.112	4.950×10^{-3}	-0.001	-9.94×10^{-5}	-6.5×10^{-6}	0.000	4.851×10^{-3}
3.3	0.102	4.508×10^{-3}	-3.00×10^{-4}	-2.982×10^{-5}	-3.32×10^{-6}	0.000	4.478×10^{-3}
3.6	0.093	4.111×10^{-3}	-5.5×10^{-5}	-5.467×10^{-6}	-1.34×10^{-8}	0.000	4.056×10^{-3}
3.9	0.084	3.713×10^{-3}	7.182×10^{-5}	7.139×10^{-6}	0.000	0.000	3.729×10^{-3}
4.2	0.075	3.315×10^{-3}	1.09×10^{-4}	1.083×10^{-5}	0.000	0.000	3.326×10^{-3}
4.5	0.066	2.917×10^{-3}	9.64×10^{-5}	9.582×10^{-6}	0.000	0.000	2.927×10^{-3}
4.8	0.058	2.564×10^{-3}	6.37×10^{-5}	6.333×10^{-6}	0.000	0.000	2.57×10^{-3}
5.1	0.051	2.254×10^{-3}	3.12×10^{-5}	3.101×10^{-6}	0.000	0.0000	2.257×10^{-3}


DESPLAZAMIENTOS
0
t , Z_{11} $S(t)_1$
0
t , Z_{21} $S(t)_2$
0
t , Z_{31} $S(t)_3$
{U}

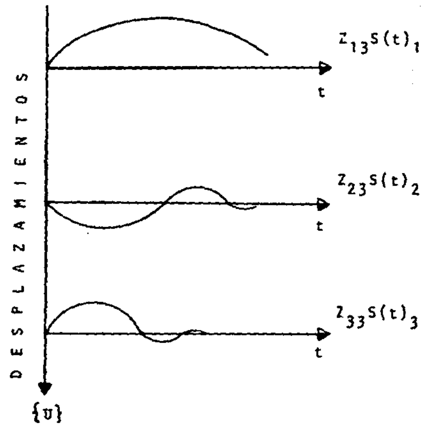
Para el segundo modo

t	$Z_{12}=0.0196$ $Z_{12}\ S(t)_1$	$Z_{22}=0.0442$ $Z_{22}\ S(t)_2$	$Z_{32}=-.0988$ $Z_{32}\ S(t)$	Σ $\{U\}$
0	0.000	0.000	0.000	0.000
0.3	4.298×10^{-3}	5.304×10^{-4}	-2.964×10^{-4}	4.532×10^{-3}
0.6	7.323×10^{-3}	6.188×10^{-4}	-0.988×10^{-4}	7.843×10^{-3}
0.9	9.234×10^{-3}	4.862×10^{-4}	-1.482×10^{-7}	9.720×10^{-3}
1.2	1.035×10^{-2}	3.094×10^{-4}	$+3.754\times10^{-5}$	1.070×10^{-2}
1.5	1.083×10^{-2}	1.326×10^{-4}	$+1.877\times10^{-5}$	1.098×10^{-2}
1.8	1.091×10^{-2}	0.1291×10^{-4}	$+3.853\times10^{-8}$	1.092×10^{-2}
2.1	1.067×10^{-2}	-4.420×10^{-4}	-4.930×10^{-6}	1.022×10^{-2}
2.4	1.019×10^{-2}	-4.429×10^{-4}	-2.510×10^{-6}	9.745×10^{-3}
2.7	9.632×10^{-3}	-4.420×10^{-4}	0.000	9.190×10^{-3}
3.0	8.915×10^{-3}	-4.420×10^{-4}	0.000	8.473×10^{-3}
3.3	8.119×10^{-3}	-0.1326×10^{-4}	0.000	8.106×10^{-3}
3.6	7.403×10^{-3}	$-.0243\times10^{-4}$	0.000	7.401×10^{-3}
3.9	6.686×10^{-3}	0.0317×10^{-4}	0.000	6.689×10^{-3}
4.2	5.970×10^{-3}	0.04818×10^{-4}	0.000	5.975×10^{-3}
4.5	5.254×10^{-3}	0.04261×10^{-4}	0.000	5.258×10^{-3}
4.8	4.617×10^{-3}	0.02816×10^{-4}	0.000	4.620×10^{-3}
5.1	4.060×10^{-3}	0.01379×10^{-4}	0.000	4.061×10^{-3}



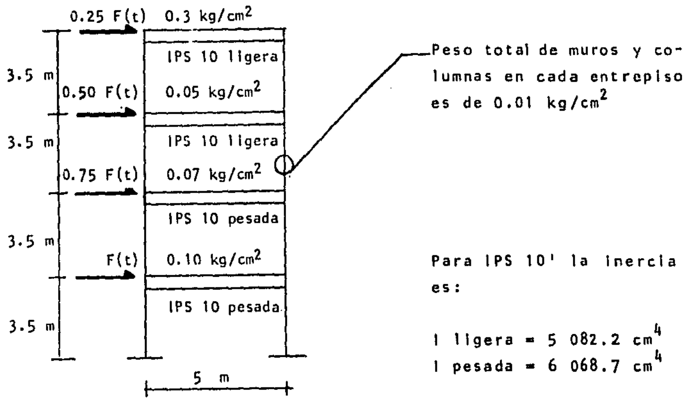
Para el tercer modo

t	$Z_{13}=0.0993$ $Z_{13}\ S(t)_1$	$Z_{23}=0.0797$ $Z_{23}\ S(t)_2$	$Z_{33}=0.0440$ $Z_{32}\ S(t)$	Σ $\{U\}$
0	0.0000	0.000	0.000	0.000
0.3	5.362×10^{-3}	-9.564×10^{-4}	1.32×10^{-4}	4.538×10^{-3}
0.6	9.136×10^{-3}	-1.116×10^{-3}	4.40×10^{-5}	8.064×10^{-3}
0.9	11.519×10^{-3}	-8.767×10^{-4}	6.60×10^{-8}	1.064×10^{-2}
1.2	12.909×10^{-3}	-5.579×10^{-4}	-1.672×10^{-5}	1.233×10^{-2}
1.5	13.505×10^{-3}	-2.391×10^{-4}	-8.360×10^{-6}	1.326×10^{-2}
1.8	13.604×10^{-3}	-0.232×10^{-4}	-1.716×10^{-8}	1.358×10^{-2}
2.1	13.306×10^{-3}	0.797×10^{-4}	2.196×10^{-6}	1.339×10^{-2}
2.4	12.710×10^{-3}	0.797×10^{-4}	1.118×10^{-6}	1.279×10^{-2}
2.7	12.015×10^{-3}	0.797×10^{-4}	0.000	1.209×10^{-2}
3.0	11.122×10^{-3}	0.797×10^{-4}	0.000	1.120×10^{-2}
3.3	10.129×10^{-3}	0.2391×10^{-4}	0.000	1.015×10^{-2}
3.6	9.235×10^{-3}	0.0438×10^{-4}	0.000	9.239×10^{-3}
3.9	8.341×10^{-3}	$-.05724\times10^{-4}$	0.000	8.335×10^{-3}
4.2	7.448×10^{-3}	$-.08687\times10^{-4}$	0.000	7.439×10^{-3}
4.5	6.554×10^{-3}	$-.07683\times10^{-4}$	0.000	6.546×10^{-3}
4.8	5.759×10^{-3}	$-.05977\times10^{-4}$	0.000	5.754×10^{-3}
5.1	5.064×10^{-3}	$-.02487\times10^{-4}$	0.000	5.062×10^{-3}



PROBLEMA E-18

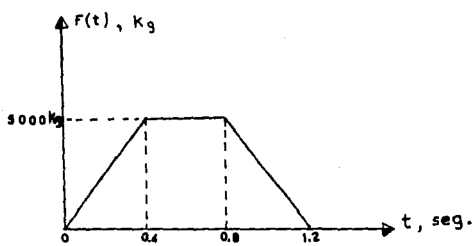
Obtener la historia del desplazamiento de los niveles en la estructura que se indica. Los marcos están a cada 5 metros en el sentido perpendicular; se pide la respuesta de desplazamiento desde $t = 0$ hasta $t = 1.4$ seg.



Para IPS 10' la inercia es:

I ligera = 5 082.2 cm^4
I pesada = 6 068.7 cm^4

fuerza de excitación



Cálculo de los pesos:

$$w_1 = 0.10 \; (500)\,(500) + 0.01 \; (350)\,(500)2 =$$

$$W_1 = 28\;500 \text{ kg}$$

$$w_2 = (0.07 \text{ kg/cm}^2)(500)^2 + 3\;500 = 21\;000 \text{ kg}$$

$$w_3 = (0.05 \text{ kg/cm}^2)(500)^2 + 3\;500 = 16\;000 \text{ kg}$$

$$w_4 = (0.03 \text{ kg/cm}^2)(500)^2 + 3\;500 = 11\;000 \text{ kg}$$

Cálculo de las masas:

$$m_1 = w_1/g = 28\;500/981 = 29.05 \text{ kg-seg}^2\text{/cm}$$

$$m_2 = 21.407 \text{ kg-seg}^2\text{/cm}$$

$$m_3 = 16.310 \text{ kg-seg}^2\text{/cm}$$

$$m_4 = 11.213 \text{ kg-seg}^2\text{/cm}$$

Cálculo de rigideces:

Considerando un sistema de marcos rigidos, la rigidez será:

$$Kc = \frac{12\;EI}{H^3}$$, para cada columna de cada entrepiso.

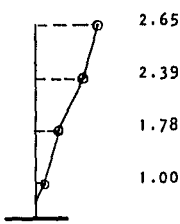
$$K_1 = \frac{2[12\ (2.0\times10^6)\ 6\ 068.7]}{(350)^3} = 6\ 794.113\ \text{kg/cm}$$

$$K_2 = K_1 = 6\ 794.113\ \text{kg/cm}$$

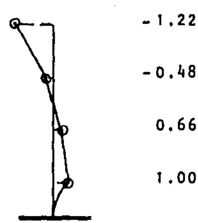
$$K_3 = \frac{2[12\ (2.0\times10^6)\ 5\ 082.2]}{(350)^3} = 5\ 689.693\ \text{kg/cm}$$

$$K_4 = K_3\ \ 5\ 689.693\ \text{kg/cm}$$

Obtenemos los modos y frecuencias de vibración con Newmark y Holzer.



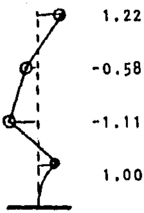
1er. Modo



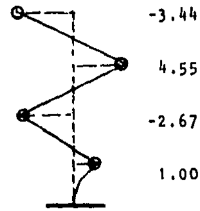
2do. Modo

$P_1^2 = 50.07$ rad/seg^2 $\quad$ $P_2^2 = 308.47$ rad/seg^2

$T_1 = 0.88$ seg $\quad$ $T_2 = 0.36$ seg



3er. Modo



4to. Modo

$P_3^2 = 742.90 \text{ rad/seg}^2$

$T_3 = 0.23 \text{ seg}$

$P_4^2 = 1169.05 \text{ rad/seg}^2$

$T_4 = 0.18 \text{ seg}$

Desacoplamiento de las ecuaciones de equilibrio.

La ecuación matricial de equilibrio es:

$$M\ddot{X}(t) + K\,x(t) = P(t)$$

L a solución para cada modo "j" se puede escribir como:

$$Xj = zj \quad Yj$$

El desplazamiento total se obtiene con la suma

$$x(t) = Z_1 Y_1 + Z_2 Y_2 + \ldots + Z_j Y_j = \sum_{n=1}^{n} Zn\, Yn = y$$

Aplicando las condiciones de ortogonalidad del modo con respecto a las matrices de masas y rigideces, se obtiene:

$$M^*_j \ \ddot{Y}_j + K^*_j \ Y_j = P^*_j \ (t)$$

con

$$M^*_j = Z^T_j \ M \ Z_j$$

$$K^*_j = Z^T_j \ K \ Z_j$$

$$P^*_j = Z^T_j \ P \ (t)$$

Para el problema en cuestión se tiene

$$M = \begin{bmatrix} 29.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21.41 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16.31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11.21 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 135588.2 & -6794.1 & 0 & 0 \\ -6794.1 & 12483.8 & -6794.1 & 0 \\ 0 & -5689.7 & 11379.4 & -5689.7 \\ 0 & 0 & -5689.7 & 5689.7 \end{bmatrix}$$

$Z^T_j \ M \ Z_j$ =

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.78 & 2.39 & 2.65 \\ 1 & 0.66 & -0.48 & -1.22 \\ 1 & -1.11 & -0.58 & 1.22 \\ 1 & -2.67 & 4.55 & -3.44 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 29.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21.41 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16.31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11.21 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1.78 & 0.66 & -1.11 & -2.67 \\ 2.39 & -0.48 & -0.58 & 4.55 \\ 2.65 & -1.22 & 1.22 & -3.44 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 268.772 & -0.7503 & 0.38113 & 2.4695 \\ -0.7503 & 58.8190 & 1.2208 & 2.7464 \\ 0.3812 & 1.2208 & 77.600 & 2.4146 \\ 2.4696 & 2.7464 & 2.4146 & 651.992 \end{bmatrix}$$

nos interesa la diagonal principal de la matriz $\begin{bmatrix} 268.772 \\ 58.819 \\ 77.600 \\ 651.992 \end{bmatrix}$

$Z^T_j \quad K \quad Z_j \quad =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.78 & 2.39 & 2.65 \\ 1 & 0.66 & -0.48 & -1.22 \\ 1 & -1.11 & -0.58 & 1.22 \\ 1 & -2.67 & 4.55 & -3.44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13588.2 & -6794.1 & 0 & 0 \\ -6294.1 & 12483.8 & -5689.7 & 0 \\ 0 & -5689.7 & 11379.4 & -5689.7 \\ 0 & 0 & -5689.7 & 5689.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1.78 & 0.66 & -1.11 & -2.67 \\ 2.39 & -0.48 & -0.58 & 4.55 \\ 2.65 & -1.22 & 1.22 & -3.44 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13429.3915 & -59.01099 & 114.6299 & 584.10322 \\ -59.01097 & 18089.5118 & 651.7902 & 2081.9154 \\ 114.6298 & 651.7902 & 57074.98 & -651.4872 \\ 584.103 & 2081.915 & -651.487 & 758129.128 \end{bmatrix}$$

nos interesa la diagonal principal de la matriz $\begin{bmatrix} 12429.39 \\ 18089.51 \\ 57074.98 \\ 758129.13 \end{bmatrix}$

$z^T_j \; F\,(t) =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.78 & 2.39 & 2.65 \\ 1 & 0.66 & -0.48 & -1.22 \\ 1 & -1.11 & -0.58 & 1.22 \\ 1 & -2.67 & 4.55 & -3.44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.75 \\ 0.50 \\ 0.25 \end{bmatrix} F(t) = \begin{bmatrix} 4.1925 \\ 0.95 \\ 0.183 \\ 0.4125 \end{bmatrix} F(t)$$

Ecuaciones desacopladas

$268.8\ \ddot{y} + 13429.4\ y = 4.2\ F(t)$, para el 1er. oscilador modal

$$P_1 = \sqrt{\frac{13425.4}{268.8}} = 7.068 \quad \text{rad/seg}$$

$58.8\ \ddot{y}_2 + 18089.51\ y_2 = 0.95\ F(t)$, para el 2do. oscilador modal

$$P_2 = \sqrt{\frac{18089.51}{58.8}} = 17.54 \quad \text{rad/seg}$$

$77.6\ \ddot{y}_3 + 57074.98\ y_3 = 0.18\ F(t)$, para el 3er oscilar modal

$$P_3 = \sqrt{\frac{57074.98}{77.6}} = 27.120 \ \text{rad/seg}$$

$652.0\ \ddot{y}_4 + 758129.1\ y_4 = 0.41\ F(t)$, para el 4to. oscilador modal

$$P_4 = \sqrt{\frac{758129.1}{652}} = 34.099 \quad \text{rad/seg}$$

La solución para cada ecuación desacoplada se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$y(t) = y_o \cos p\, t + \frac{Uo}{p} \text{ sen } P\, t + \frac{1}{mp} \int_o^t F(\tau) \text{ sen } P\,(t-\tau)\, d\tau$$

Integral de Duhamel

Ley de los senos en Integral de Duhamel

$$y(t) = \text{sen } P\, t \int_o^t F(\tau) \cos P\,(t-\tau)\, d\tau - \cos Pt \frac{1}{mp} \int_o^t F(\tau) \text{ sen } P\tau\, d\tau$$

o bien:

$$y(t) = \left\{ A(t) \text{ sen } Pt - B(t) \cos Pt \right\} / m\, p$$

utilizaremos el criterio de Simpson para integración.

INTEGRAL DE DUHAMEL . 1er OSCILADOR ·

$G = \frac{\Delta t}{m\,p\,n} = 0.0088$

N	t seg (1)	F(t) ton (2)	sen Pt (3)	cos Pt (4)	EVALUACION DE Ā: (2)x(4) (5)	MULT (6)	(5)x(6) (7)	ΔĀ (8)	Ā (9)	EVALUACION DE B̄: (2)x(3) (10)	MULT (11)	(10)x(11) (12)	ΔB̄ (13)	B̄ (14)	(9)x(3) (15)	(14)x(4) (16)	(15)-(16) (17)	Y(t) G x (17) (18)
1	0.000	0.00	0.000	1.000	0.000	1	[illegible]		[illegible]	[illegible]	1	[illegible]		0.0000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	0.050	2.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4	[illegible]	[illegible]		[illegible]	4	[illegible]	[illegible]					
3	0.100	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	[illegible]		[illegible]	[illegible]	1	[illegible]		[illegible]	8.9571	[illegible]	[illegible]	0.0219
4	0.150	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4	[illegible]	[illegible]		[illegible]	4	[illegible]	[illegible]					
5	0.200	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	[illegible]		[illegible]	[illegible]	1	[illegible]		18.1277	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
6	0.250	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4	-2.0381	-15.[illegible]		[illegible]	4	[illegible]	[illegible]					
7	0.300	[illegible]	[illegible]	0.5105	[illegible]	1	-8.0378		[illegible]	[illegible]	1	[illegible]		123.[illegible]	16.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
8	0.350	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4	[illegible]	[illegible]		[illegible]	4	[illegible]	[illegible]					
9	0.400	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	10.8171		[illegible]	6.8[illegible]	1	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1.3[illegible]
10	0.450	21.000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4	[illegible]	[illegible]		-0.5318	4	-1.5[illegible]	[illegible]					
11	0.500	21.000	[illegible]	-0.33[illegible]	[illegible]	1	[illegible]		[illegible]	[illegible]	1	[illegible]		193.231	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.1503
12	0.550	21.000	-0.65[illegible]	-0.75[illegible]	[illegible]	4	[illegible]	[illegible]		-13.9[illegible]	4	[illegible]	-81.[illegible]					
13	[illegible]	21.000	-0.8770	0.17[illegible]	[illegible]	1	10.0560		[illegible]	-18.1357	1	-18.13[illegible]		195.808	[illegible]	-51.1501	[illegible]	2.6311
14	[illegible]	21.000	[illegible]	[illegible]	-3.1022	4	-12.4073	-19.[illegible]		[illegible]	4	-83.[illegible]	-172.001					
15	[illegible]	21.000	[illegible]	[illegible]	4.[illegible]	1	1.2301		[illegible]	[illegible]	1	-20.[illegible]		[illegible]	[illegible]	-3.0[illegible]	[illegible]	2.6201
16	[illegible]	21.000	[illegible]	0.5[illegible]	11.0163	4	[illegible]	[illegible]		-17.360	4	[illegible]	-101.381					
17	[illegible]	21.000	-0.6177	[illegible]	[illegible]	1	[illegible]		[illegible]	12.9715	1	-12.[illegible]		[illegible]	115.213	[illegible]	[illegible]	2.1158
18	[illegible]	13.575	0.3005	0.9503	17.4725	4	69.9330	102.114		-5.[illegible]	4	[illegible]	-35.150					
19	0.900	[illegible]	0.0341	[illegible]	15.7396	1	15.7396		[illegible]	0.5777	1	[illegible]		-155.907	-1.8391	[illegible]	[illegible]	1.3276
20	0.950	13.125	0.3778	0.9257	12.1521	4	48.6084	72.112		[illegible]	4	19.8364	27.[illegible]					
21	1.000	10.50[illegible]	0.6742	0.7335	7.7642	1	7.7642		[illegible]	7.0697	1	7.0697		-127.123	[illegible]	-91.601	[illegible]	0.17[illegible]
22	1.050	7.875	0.8[illegible]	0.4623	3.6447	4	11.5788	23.0210		6.[illegible]	4	27.3232	40.197					
23	1.100	5.250	0.9916	0.1237	0.6810	1	0.6818		[illegible]	5.2056	1	5.2056		-87.732	-37.1332	-11.[illegible]	[illegible]	0.0201
24	1.150	2.625	0.9757	-0.2[illegible]	-0.5754	4	-2.3016	-1.6[illegible]		2.5616	4	10.2118	15.450					
25	1.200	0.000	0.8408	-0.5414	0.000	1	0.0000		-32.1263	0.0000	1	0.0000		-72.281	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
26	1.250	0.000	0.6033	-0.7775	0.0000	4	0.0000	0.0000		0.0000	4	0.0000	0.0000					
27	1.300	0.000	0.2122	-0.9561	0.0000	1	0.0000		-32.1263	0.0000	1	0.0000		-72.281	11.[illegible]	[illegible]	-80.[illegible]	[illegible]
28	1.350	0.000	-0.0515	[illegible]	0.0000	4	0.0000	0.0000		0.0000	4	0.0000	0.0000					
29	1.400	0.000	-0.3716	-0.91[illegible]	0.0000	1	0.0000		-32.1263	0.0000	1	0.0000		-72.281	15.5578	66.[illegible]	-50.8[illegible]	[illegible]
30	1.450	0.000	-0.6365	-0.7271	0.0000	4	0.0000	0.0000		0.0000	4	0.0000	0.0000					
31	1.500	0.000	-0.8397	-0.1[illegible]	0.0000	1	0.0000		-32.1263	0.0000	1	0.0000		-72.281	35.2752	[illegible]	[illegible]	[illegible]

INTEGRAL DE DUHAMEL. 2do OSCILADOR

$G = \frac{\Delta t}{m\,p\,h} = 0.0161$

N	t seg (1)	F(t) ton (2)	Sen Pt (3)	Cos Pt (4)	EVALUACION DE $\bar{A}$: (2)×(4) (5)	MULT (6)	(5)×(6) (7)	$\Delta \bar{A}$ (8)	$\bar{A}$ (9)	EVALUACION DE $\bar{B}$: (2)×(3) (10)	MULT (11)	(10)×(11) (12)	$\Delta \bar{B}$ (13)	$\bar{B}$ (14)	(9)×(3) (15)	(14)×(4) (16)	(15)-(16) (17)	Y(t) G×(17) (18)
1	0.000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	1	0.0000		0.000	0.0000	1	0.000		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.050	0.5938	0.7687	0.6396	0.3798	4	1.5192	1.3034		0.4564	4	1.8256	2.9933					
3	0.100	1.1875	0.9834	-0.1817	-0.2158	1	-0.2158		1.3034	1.1677	1	1.1677		2.9933	1.2818	-0.5439	1.8257	0.0294
4	0.150	1.7813	0.4893	-0.8721	-1.5535	4	-6.2140	-8.6479		0.8716	4	3.4864	3.8053					
5	0.200	2.375	-0.3574	-0.9340	-2.2181	1	-2.2181		-7.3445	-0.8488	1	-0.8488		6.7986	2.6249	-6.3479	8.9718	0.1446
6	0.250	2.9688	-0.9465	-0.5227	-0.9580	4	-3.8320	-4.1935		-2.8100	4	-11.2400	-15.1283					
7	0.300	3.5625	-0.8535	0.5212	1.8566	1	1.8566		-11.5380	-3.0405	1	-3.0405		-8.3307	9.8477	-4.3420	14.1897	0.2286
8	0.350	4.1563	-0.1453	0.9894	4.1122	4	16.4488	21.8420		-0.6039	4	-2.4156	-2.2851					
9	0.400	4.750	0.6676	0.7445	3.5366	1	3.5366		10.3040	3.1710	1	3.1710		-10.6558	6.8790	-7.9035	14.7825	0.2382
10	0.450	4.750	0.9993	-0.0369	-0.1753	4	-0.7012	-0.9254		4.7468	4	18.9872	25.0597					
11	0.500	4.750	0.6108	-0.7918	-3.7608	1	-3.7012		9.3786	2.9015	1	2.9015		14.4439	5.7284	-11.4367	17.1651	0.2766
12	0.550	4.750	-0.2179	-0.9760	-4.6359	4	-18.5436	-24.4742		-1.0349	4	-4.1396	-5.4636					
13	0.600	4.750	-0.8896	-0.4568	-2.1698	1	-2.1698		-15.0956	-4.2255	1	-4.2205		8.9803	13.4290	-4.1022	17.5312	0.2825
14	0.650	4.750	-0.9201	0.3916	1.8601	4	7.4404	9.8200		-4.3706	4	-17.4824	-23.0737					
15	0.700	4.750	-0.2875	0.9578	4.5494	1	4.5494		-5.2756	-1.3658	1	-1.3658		-14.0931	1.5167	-13.4987	15.0154	0.2419
16	0.750	4.750	0.5523	0.8336	3.9598	4	15.8392	20.9049		2.6234	4	10.4936	13.8497					
17	0.800	4.750	0.9941	0.1087	0.5163	1	0.5163		15.6293	4.7219	1	4.7219		-0.2437	15.5371	-0.0265	15.5636	0.2508
18	0.850	4.1563	0.7194	-0.6946	-2.8869	4	-11.5476	-15.5841		2.9901	4	11.9604	16.4156					
19	0.900	3.5625	-0.0738	-0.9973	-3.5528	1	-3.5528		1.0452	-0.2627	1	-0.2627		16.1759	-0.0771	-16.1322	16.0551	0.2587
20	0.950	2.9688	-0.8138	-0.5812	-1.7225	4	-6.9020	-9.8521		-2.4159	4	-9.6636	-12.2236					
21	1.000	2.375	-0.9673	0.2537	0.6027	1	0.6027		-8.8067	-2.2973	1	-2.2973		3.9523	8.5189	1.0027	7.5162	0.1211
22	1.050	1.7813	-0.4237	0.9058	1.6135	4	6.4540	8.1315		-0.7547	4	-3.0188	-3.8111					
23	1.100	1.1875	0.4253	0.9051	1.0748	1	1.0748		-0.6754	0.5050	1	0.5050		-0.8588	-0.2872	-0.7773	0.4901	0.0079
24	1.150	0.5938	0.9677	0.2520	0.1496	4	0.5984	1.6732		0.5746	4	2.2984	2.8034					
25	1.200	0.000	0.8127	-0.5827	0.000	1	0.0000		0.9978	0.0000	1	0.000		1.9446	0.8109	-1.1331	1.9440	0.0313
26	1.250	0.000	0.0719	-0.9974	0.000	4	0.0000	0.000		0.0000	4	0.000	0.000					
27	1.300	0.000	-0.7207	-0.6933	0.000	1	0.0000		0.9978	0.0000	1	0.000		1.9446	-0.7191	-1.3482	0.6291	0.0101
28	1.350	0.000	-0.9939	0.1106	0.000	4	0.0000	0.000		0.0000	4	0.000	0.000					
29	1.400	0.000	-0.5508	0.6346	0.000	1	0.0000		0.9978	0.0000	1	0.000		1.9446	-0.5496	1.6230	-2.1726	-0.0350
30	1.450	0.000	0.2823	0.9572	0.000	4	0.0000	0.000		0.0000	4	0.000	0.000					
31	1.500	0.000	0.4206	0.3899	0.000	1	0.0000		0.9978	0.0000	1	0.000		1.9446	0.9188	0.7582	0.1606	0.0026

Para el tercer y cuarto oscilador usaremos el programa del Problema E-9 para el criterio de Simpson:

$$77.6\ \ddot{Y}_3 + 57074.98\ Y_3 = 0.18\ F(t)$$

solución

$G = 4.75167 \times 10^{-6}$

(seg)		(kg)		(cm)	
T =	0.1	F =	0.0	Y =	0
T =	0.2	F =	228.1	Y =	0.00353
T =	0.3	F =	456.3	Y =	0.00921
T =	0.4	F =	684.4	Y =	0.01098
T =	0.5	F =	912.5	Y =	0.0177
T =	0.6	F =	912.5	Y =	0.0158
T =	0.7	F =	912.5	Y =	0.0161
T =	0.8	F =	912.5	Y =	0.0175
T =	0.9	F =	912.5	Y =	0.0146
T =	1.0	F =	684.4	Y =	0.0146
T =	1.1	F =	456.3	Y =	0.00544
T =	1.2	F =	228.1	Y =	0.00678
T =	1.3	F =	0	Y =	0.00214
T =	1.4	F =	0	Y =	0.000643
T =	1.5	F =	0	Y =	0.000972
T =	1.6	F =	0	Y =	0.00241

$$652.0\ \ddot{Y}_4 + 758129.19 = 0.41\ F(t)$$

$G = 7.49641 \times 10^{-7}$

T =	0.1	F =	0	Y =	0
T =	0.2	F =	520.9	Y =	0.000774
T =	0.3	F =	1041.9	Y =	0.00140
T =	0.4	F =	1562.8	Y =	0.00231
T =	0.5	F =	2083.8	Y =	0.00281
T =	0.6	F =	2083.8	Y =	0.00305

T = 0.7	F = 2083.8	Y = 0.00287
T = 0.8	F = 2083.8	Y = 0.00295
T = 0.9	F = 1562.8	Y = 0.00295
T = 1.0	F = 1041.9	Y = 0.00212
T = 1.1	F = 520.9	Y = 0.00163
T = 1.2	F = 0	Y = 0.000519
T = 1.3	F = 0	Y = 0.000262
T = 1.4	F = 0	Y = 0.000250
T = 1.5	F = 0	Y = 0.000220
T = 1.6	F = 0	Y = 0.000174

Para el Nivel 1.

t_1	Z_{11}	Y_1	Z_{21}	Y_2	Z_{31}	Y_{31}	Z_{41}	Y_4	$Z_{ij}Y_i$
0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
0.1	1	0.319	1	0.0294	1	0.0035	1	0.00077	0.0656
0.2	1	0.2359	1	0.1446	1	0.0092	1	0.0014	0.3911
0.3	1	0.7030	1	0.2286	1	0.0140	1	0.0023	0.9449
0.4	1	1.3993	1	0.2382	1	0.0177	1	0.0028	1.6580
0.5	1	2.1509	1	0.2766	1	0.0158	1	0.0031	2.4464
0.6	1	2.6341	1	0.2826	1	0.0161	1	0.0029	2.9357
0.7	1	2.6201	1	0.2419	1	0.0175	1	0.0030	2.8825
0.8	1	2.1158	1	0.2508	1	0.146	1	0.0030	2.3842
0.9	1	1.3276	1	0.2587	1	0.0146	1	0.0021	1.6030
1.0	1	0.4734	1	0.1211	1	0.0054	1	0.0016	0.6015
1.1	1	-0.2304	1	0.0079	1	0.0068	1	0.00052	-6.2152
1.2	1	-0.6378	1	0.0313	1	-0.0021	1	+0.00026	-0.6083
1.3	1	-0.7116	1	0.0101	1	0.00064	1	-0.00025	-0.7011
1.4	1	-0.4488	1	-0.0350	1	0.00097	1	0.00022	-0.4826
1.5	1	0.0264	1	0.0026	1	-0.0024	1	-0.00017	0.0264

Para el nivel 2.

$Z_{12} = 1.78$ $Z_{22} = 0.66$ $Z_{32} = -1.11$ $Z_{42} = -2.67$

t_1	$Z_{12}\ Y_1$	$Z_{22}\ Y_2$	$Z_{32}\ Y_3$	$Z_{42}\ Y_4$	$Z_{1j}\ Y_1$
0	0	0	0	0	0
0.1	0.0568	0.0194	-.0039	-.0021	0.07
0.2	0.4199	0.0954	-.0102	-.0037	0.50
0.3	1.2513	0.1509	-.0122	-.0061	1.38
0.4	2.4908	0.1572	-.0196	-.0075	2.62
0.5	3.8286	0.1826	-.0175	-.0083	3.99
0.6	4.6887	0.1865	-.0179	-.0077	4.86
0.7	4.6638	0.1597	-.0194	-.0080	4.80
0.8	3.7661	0.1655	-0.162	-.0080	3.91
0.9	2.3631	0.1707	-.0162	-.0056	2.51
1.0	0.8432	0.0799	-.0060	-.0043	0.91
1.1	-.4101	0.0052	-.0075	-.0014	-0.41
1.2	-1.1353	0.0207	0.0023	-.0007	-1.113
1.3	-1.2666	0.0067	-.0007	0.0007	-1.260
1.4	-.7989	-.0231	-.0011	-0.0006	-0.824
1.5	0.0470	0.0017	0.0027	0.0005	0.052

Para el nivel 3.

$Z_{31} = 2.39$ $\quad Z_{32} = -0.48$ $\quad Z_{33} = -0.58$ $\quad Z_{34} = 4.55$

t_1	$Z_{31}Y_1$	$Z_{32}\ Y_2$	$Z_{33}\ Y_3$	$Z_{43}\ Y_4$	ZIJ YI
0					
0.1	0.0762	-.0141	-.002	0.0035	0.0636
0.2	0.5638	-.0694	-.009	0.0064	0.4918
0.3	1.6802	-.1097	-.0064	0.0105	1.5746
0.4	3.3443	-.1147	-.0103	0.0127	3.2320
0.5	5.1407	-.1328	-.0092	0.0141	5.0128
0.6	6.2955	-.1356	-.0093	0.0132	6.1638
0.7	6.2620	-.1161	-.0102	0.0137	6.1494
0.8	5.0568	-.1204	-.0085	0.0137	4.9416
0.9	3.1730	-.1242	-.0085	0.0096	3.0499
1.0	1.1314	-.0581	-.0031	0.0073	1.0776
1.1	-.5507	-.0038	-.0039	0.0024	-.5560
1.2	-1.5243	-.0150	0.0012	0.0012	-1.5369
1.3	-1.7007	-.0048	-.0004	-.0011	-1.7070
1.4	-1.0726	0.0168	-.0006	0.0010	-1.0554
1.5	0.0631	-.0012	0.0014	-.0008	0.0625

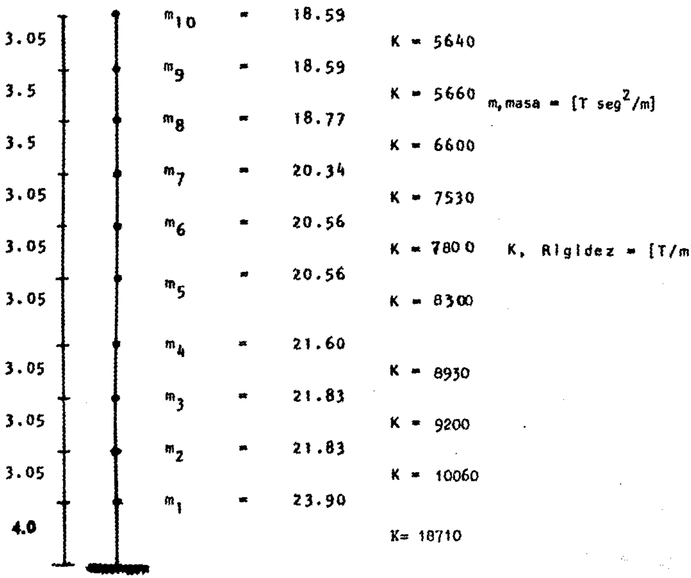
Para el nivel 4.

$Z_{41} = 2.65$ $\quad Z_{42} = -1.22$ $\quad Z_{43} = 1.22$ $\quad Z_{44} = -3.44$

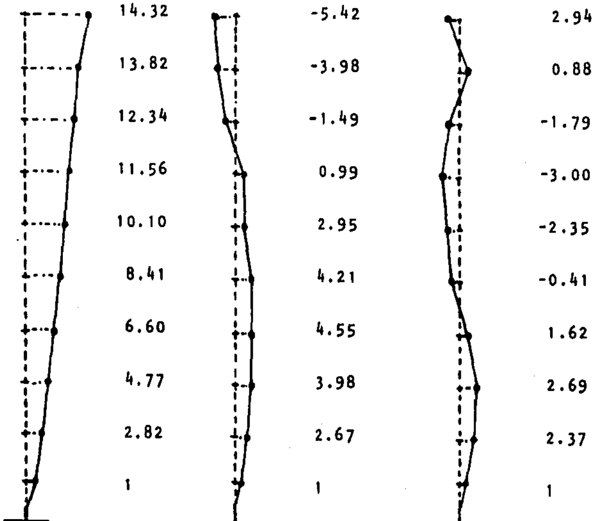
t_1	$Z_{41}\ Y_1$	$Z_{42}\ Y_2$	$Z_{43}\ Y_3$	$Z_{44}\ Y_4$	ZI jy
0	0	0	0	0	0
0.1	0.0845	-.0358	0.0043	-.0028	0.0502
0.2	0.6251	-.1758	0.0112	-.0048	0.4557
0.3	1.8630	-.0278	0.0134	-.0079	1.8407
0.4	3.7081	-.2897	0.0216	-.0096	3.4304
0.5	5.6999	-.3363	0.0192	-.0103	5.3725
0.6	6.9804	-.3435	0.0196	-.0100	6.6465
0.7	6.9433	-.2942	0.0213	-.0103	6.6601
0.8	5.6069	-.3050	0.0179	-.0100	5.3098
0.9	3.5181	-.3146	0.0181	-.0072	3.2145
1.0	1.2545	-.1473	0.0063	-.0055	1.1081
1.1	-0.6106	-.0096	0.0084	-.0017	-0.6135
1.2	-1.6902	-.0381	-.0027	-.0010	-1.7320
1.3	-1.8857	-.0123	0.0006	0.0007	-1.8967
1.4	-1.1893	0.0426	0.0015	-.0007	-1.1460
1.5	0.0700	0.0032	-.0033	0.0007	0.0642

PROBLEMA E-19

Del sistema mostrado en la figura, realizar el análisis sísmico dinámico Modal Espectral en la dirección X. Considerar el espectro de diseño en la Zona B, Terreno III y un factor de ductilidad $Q = 4$.



Por alguno de los métodos numéricos encontramos los tres primeros modos de vibrar.



1er. Modo | 2do. Modo | 3er. Modo

1er. Modo	2do. Modo	3er. Modo
$P^2_1 = 10.89$	$P^2_1 = 80.66$	$P^2_1 = 211.5$
$P_1 = 3.30$ rad/seg	$P_2 = 8.98$ rad/seg	$P_3 = 14.54$ rad/seg
$T_1 = 1.90$ seg	$T_2 = 0.70$ seg	$T_3 = 0.43$ seg

$$\text{Matriz de Masas } M = \begin{bmatrix} 23.90 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21.83 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21.83 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21.60 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20.56 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20.56 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20.34 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18.77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18.59 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18.59 \end{bmatrix}$$

Las fuerzas sísmicas máximas se obtienen por medio de la expresión para cada modo.

$$qn\ max = M\ \underline{Z}\ \frac{\mathcal{L}n}{M^*n}\ San$$

y el desplazamiento se puede calcular con la ecuación

$$Un\ max = Zn\ \frac{\mathcal{L}n}{M^*n}\ S\ dn$$

$$San = P^2\ Sdn$$

$$Sdn = \frac{San}{P^2}$$

para el primer modo

$$M^*_1 = Z^T_1\ M\ Z_1 = 18125.42$$

$$\mathcal{L}n = Z^T_1\ M\ I = 1684.44$$

T = 1.90 seg, comparándolo con los valores del período para un terreno de Tipo III; en la Zona B del espectro de diseño, se tiene que:

$$T > T_2\ ,\ \text{es decir}, 1.90 > 0.80$$

$$.:\ \ a = c\ ({}^{T}2/T)^1 = 0.4\ ({}^{0.80}/1.90)^1 = 0.17$$

Sdn es afectado por el factor de ductilidad Q = 4

$$Sdn = a \times g\ /QF = 0.17 \times 9.81/4(10.89) = 0.0383\ m$$

$$un\ max = \begin{bmatrix} 14.32 \\ 13.82 \\ 12.34 \\ 11.56 \\ 10.10 \\ 8.41 \\ 6.60 \\ 4.77 \\ 2.82 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{18125.42}{1684.44} \times 0.0383 = \begin{bmatrix} 0.0515 \\ 0.0497 \\ 0.0444 \\ 0.0416 \\ 0.0363 \\ 0.0303 \\ 0.0237 \\ 0.0172 \\ 0.0101 \\ 0.0036 \end{bmatrix} \text{ en } [m]$$

para el segundo modo:

$M^*_2 = Z^T_2\ M\ Z_2 = 2418.34$

$\lambda n = z^T_2\ M\ 1 = 231.97$

T = 0.70 comparándolo con el espectro de diseño:

$T_1 < T < T_2$, es decir, $0.3 < 0.7 < 0.8$

$a = c$

$Sdn = c \times g/QP = 0.40 \times 9.81/4(80.66) = 0.0122$ m

$$U_2 \max = \begin{bmatrix} -5.42 \\ -3.98 \\ -1.49 \\ 0.99 \\ 2.95 \\ 4.21 \\ 4.55 \\ 3.98 \\ 2.67 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{231.97}{2418.34} \times 0.0122 = \begin{bmatrix} -0.0063 \\ -0.0047 \\ -0.0017 \\ 0.0019 \\ 0.0035 \\ 0.0049 \\ 0.0053 \\ 0.0047 \\ 0.0031 \\ 0.0012 \end{bmatrix} \text{ en [m]}$$

para el tercer modo:

$$M^*_3 = Z^T_3 \ M \ Z_3 = 896.66$$

$$\Gamma n = Z^T_3 \ M \ I = 13.05$$

$T = 0.43 \quad T_1 < T < T_2$, es decir, $0.3 < 0.43 < 0.8$

$S dn = 0.40 \times 9.81/4(211.5) = 0.0046$

$$U_3 \max = \begin{bmatrix} 2.94 \\ 0.88 \\ -1.79 \\ -3.00 \\ -2.35 \\ -0.41 \\ 1.62 \\ 2.69 \\ 2.37 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{13.05}{896.66} \times 0.0046 = \begin{bmatrix} 0.00287 \\ 0.00006 \\ -0.00012 \\ -0.00020 \\ -0.00016 \\ -0.00003 \\ 0.00011 \\ 0.00018 \\ 0.00016 \\ 0.00007 \end{bmatrix}$$

como $U_n = Z_n \dfrac{\mathcal{L}_n}{M^*_n} S_{an} \dfrac{1}{p^2}$

$$p^2 \; U_n = Z_n \frac{\mathcal{L}_n}{M^*_n} \; S_{an}$$

Cálculo de las fuerzas sísmicas

$q_n = M \, p^2 \; U_n$, ∴ $q_n = K \; U_n$ → Vector de desplazamiento máximos

→ Matriz de Rigidez

Para el primer modo

$$q_1 = \begin{bmatrix} 10.152 \\ 19.846 \\ -11.518 \\ 21.429 \\ 6.891 \\ 7.980 \\ 3.265 \\ 7.275 \\ 0.0700 \\ 1.9660 \end{bmatrix} \text{ton} \qquad V_1 = S q_1 = \begin{bmatrix} 10.152 \\ 29.998 \\ 18.480 \\ 39.909 \\ 46.800 \\ 54.780 \\ 58.045 \\ 65.32 \\ 65.39 \\ 67.356 \end{bmatrix} \text{ton}$$

Para el segundo modo

$$q_2 = \begin{bmatrix} -9.0240 \\ -7.9560 \\ -2.1600 \\ 1.8210 \\ 6.3990 \\ 7.6000 \\ 8.6780 \\ 9.3620 \\ 4.3940 \\ 3.3380 \end{bmatrix} \text{ ton} \qquad V_2 = S\,q_2 \begin{bmatrix} -9.024 \\ -16.980 \\ -19.140 \\ -17.319 \\ -10.920 \\ -3.320 \\ 5.358 \\ 14.720 \\ 19.114 \\ 22.452 \end{bmatrix} \text{ ton}$$

En el tercer modo

$$q_3 = \begin{bmatrix} 15.8484 \\ -14.8296 \\ -.4908 \\ -.8292 \\ -.7128 \\ -.1430 \\ 0.5369 \\ 0.8090 \\ 0.7214 \\ 0.4043 \end{bmatrix} \text{ ton} \qquad V_3 = \begin{bmatrix} 15.8484 \\ 1.0188 \\ 0.5280 \\ -0.3012 \\ -1.0140 \\ 1.1620 \\ -0.6251 \\ 0.1839 \\ 0.9053 \\ 1.3096 \end{bmatrix} \text{ ton}$$

Cálculo de los momentos de volteo

$$
\text{Matriz de alturas de nivel } H = \begin{bmatrix}
3.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3.05 & 3.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3.05 & 3.05 & 3.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 0 & 0 & 0 \\
3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 0 & 0 \\
3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 0 \\
3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 3.05 & 4.00
\end{bmatrix}
$$

Para el Primer Modo

Vector de momentos de volteo

$$
Mv_1 = H \cdot V_1 = \begin{bmatrix}
30.9686 \\
122.4575 \\
178.8215 \\
300.5440 \\
443.2840 \\
610.9630 \\
787.4002 \\
986.6262 \\
1186.0657 \\
1456.4867
\end{bmatrix} \text{ ton - m}
$$

Para el Segundo Modo

$$Mv_2 = H \cdot V_2 = \begin{bmatrix} -27.5232 \\ -79.3122 \\ -137.6892 \\ -190.5123 \\ -223.8182 \\ -233.9442 \\ -217.6022 \\ -172.7062 \\ -114.4085 \\ -24.6005 \end{bmatrix} \text{ton - m}$$

Para el Tercer Modo

$$Mv_3 = H \cdot V_3 = \begin{bmatrix} 48.3376 \\ 51.4450 \\ 53.0554 \\ 52.1367 \\ 49.0440 \\ 45.5000 \\ 43.5934 \\ 44.1542 \\ 46.9154 \\ 52.1538 \end{bmatrix}$$

Superposición de respuestas modales:

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}$$

N	U_1	U_2	U_3	U_1^2	U_2^2	U_3^2	$U_1^2+U_2^2+U_3^2=U'$	$\sqrt{U'}$
10	0.0515	-.0063	0.00287	0.0027	3.969×10^{-5}	8.237×10^{-6}	0.0027	0.0524
9	0.0497	-.0047	0.00006	0.0025	2.209×10^{-5}	3.6×10^{-9}	0.0025	0.0502
8	0.0444	-0.0007	-.00012	0.0020	2.89×10^{-6}	1.44×10^{-8}	0.0020	0.0448
7	0.0416	0.0012	-.00020	0.0017	1.44×10^{-6}	4.00×10^{-3}	0.0017	0.0412
6	0.0363	0.0035	-.00016	0.0013	1.225×10^{-5}	2.56×10^{-8}	0.0013	0.0362
5	0.0303	0.0049	-.00003	0.0009	2.401×10^{-5}	9.00×10^{-10}	0.0009	0.0304
4	0.0237	0.0053	0.00011	0.0006	2.809×10^{-5}	1.21×10^{-8}	0.0006	0.0251
3	0.0172	0.0047	0.00018	0.0003	2.209×10^{-5}	3.24×10^{-8}	0.0003	0.0179
2	0.0101	0.0031	0.00016	0.0001	9.610×10^{-6}	2.56×10^{-8}	0.0001	0.0105
1	0.0036	0.0012	0.00007	1.296×10^{-5}	1.44×10^{-6}	4.90×10^{-9}	1.4405×10^{-5}	0.0038

$$F = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

N	q_1	q_2	q_3	q_1^2	q_2^2	q_3^2	F	
10	10.152	-9.024	15.8484	103.063	81.433	251.172	20.873	
9	19.846	-7.956	-14.8296	393.864	63.298	219.917	26.023	
8	-11.518	-2.160	-0.4908	132.664	4.666	0.241	11.729	
7	21.429	1.8210	-0.8292	459.202	3.316	0.688	21.522	ton
6	6.891	0.3990	-0.7128	47.486	40.947	0.508	9.431	
5	7.980	7.6000	-.1480	63.68	57.760	0.022	11.021	
4	3.265	8.6780	0.5369	10.66	75.308	0.288	9.287	
3	7.275	3.3620	0.8090	52.926	87.647	0.654	11.884	
2	0.0700	4.3940	0.7214	0.005	19.307	0.520	4.453	
1	1.9660	3.338	0.4043	3.865	11.142	0.163	3.895	

$$V = \sqrt{V^2_1 + V^2_2 + V^2_3}$$

N	V_1	V_2	V_3	V^2_1	V^2_2	V^2_3	V
10	10.152	-9.024	15.8484	103.063	81.433	251.172	20.873
9	29.993	-16.980	1.0188	899.880	288.320	1.038	34.485
8	18.480	-19.140	0.5280	341.510	366.340	0.279	26.615
7	39.909	-17.319	-0.3012	1592.728	299.948	0.091	43.506
6	46.800	-10.920	-1.0140	2190.024	119.246	1.028	48.066
5	54.780	-3.320	-1.1620	3000.848	11.022	1.350	54.893
4	53.045	5.358	-0.6251	3369.222	28.708	0.391	58.295
3	65.320	14.720	0.1839	4268.702	216.678	0.034	66.973
2	65.390	19.114	0.9053	4275.852	365.345	0.820	68.132
1	37.356	22.452	1.3096	4536.831	504.092	1.715	71.012

ton

$$Mv = \sqrt{Mv^2_1 + Mv^2_2 + Mv^2_3}$$

N	Mv_1	Mv_2	Mv_3	Mv^2_1	Mv^2_2	Mv^2_3	Mv
10	30.9636	-27.5232	48.3376	958.745	757.527	2336.524	63.662
9	122.8215	-79.3122	51.9450	14995.398	6290.425	2646.533	157.701
8	178.8215	-137.6892	53.0554	31977.129	18958.316	2814.875	231.841
7	300.5490	-190.5123	52.1367	90326.696	36294.936	2718.236	359.639
6	443.2840	-223.8182	49.0440	196500.705	50094.587	2405.314	499.000
5	610.3630	-233.9442	45.5000	372542.972	54729.889	2070.250	655.243
4	787.4002	-217.6022	43.5934	619999.075	47350.717	1900.385	818.077
3	986.6062	-172.7062	44.1542	973391.794	29827.432	1949.583	1002.581
2	1186.0657	-114.4085	46.9154	140675.845	13089.305	2201.055	1192.494
1	1456.4867	-24.6005	52.1538	2121353.507	605.185	2720.019	1457.628

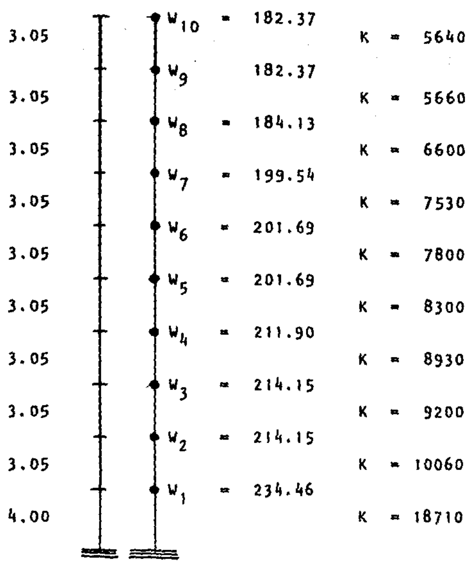
ton-m

PROBLEMA E-20

Con los mismos datos del Problema E-19 encuentre las fuerzas y los cortantes sísmicos. Utilizando el análisis Sísmico Estático.

Solución

a) Análisis sísmico estático



Solución

$$F_i = \frac{W_i \quad h_i}{\Sigma W_i \quad h_i} \quad \frac{c}{Q} \quad \Sigma \quad W_i$$

Contibución lineal

Nivel	W_i	h_i	$W_i h_i$	$\frac{W\ hi}{\Sigma Wihi}$
10	182.37	31.45	5735.54	0.17
9	182.37	28.40	5179.31	0.15
8	184.13	25.35	4667.70	0.14
7	199.54	22.30	4449.74	0.13
6	201.69	19.25	3882.53	0.11
5	201.69	16.20	3267.38	0.09
4	211.90	13.15	2786.49	0.08
3	214.15	10.10	2162.92	0.06
2	214.15	7.05	1509.76	0.04
1	234.46	4	937.84	0.03
SUMA	2026.45		34579.21	1

Contribución espectral

c = 0.40, Q = 4 , c/Q = 0.10

Nivel	$\frac{Wihi}{Wihi} \Sigma W_i$	F	V
10	344.497	34.450	34.45
9	303.968	30.397	64.847
8	283.703	28.370	93.217
7	263.438	26.344	119.561
6	222.910	22.291	141.852
5	182.381	18.240	160.092
4	162.116	16.212	176.304
3	121.587	12.159	188.463
2	81.058	8.106	196.569
1	60.794	6.079	202.648

Cálculo del Período

1. $T = C_T \; H^{3/4}$

C_T = 0.025 para concreto

H = 31.45 m = 3145 cm = 103.182 pies

$T = 0.035\,(103.182)^{3/4} = 1.133$ seg

2. $T = 6.3\left[\dfrac{1}{g}\;\dfrac{\Sigma W_i\, X_i^2}{\Sigma F_i\, X_i}\right]^{1/2}$

V	K	V/K	X(m)
34.45	5640	0.00611	0.1557
64.85	5660	0.0115	0.1495
93.22	6600	0.0142	0.1381
119.56	7530	0.0159	0.1239
141.85	7800	0.0182	0.1080
160.09	8300	0.0193	0.0898
176.304	8930	0.0197	0.0705
188.463	9200	0.0205	0.0508
196.569	10060	0.0195	0.0303
202.648	18710	0.0108	0.0108

$T = 6.3\left[\dfrac{1}{9.81}\;\dfrac{20.9142}{23.3453}\right]^{1/2}$

T = 1.9038 seg

Según el espectro de diseño

$T > T_2$; $1.9038 > 0.8$

Existe reducción de fuerzas sísmicas.

Reducción de fuerza sísmica

$c = 0.40$, $r = 1$, $T_2 = 0.8$, $T = 1.9038$, $Q = 4$

$q = (T_2/T)^r = (0.8/1.9038)^1 = 0.42$

$K_i = q\,(1 - r\,(1 - q))\;\Sigma W_i/(\,W_i h_i) =$

K_1 = 0.42 (1 -1(1 - 0.42)) 2026.45/34579.21 =

K_1 = 0.18 (0.06) = 0.0105

K_2 = 1.5 rq (1 - q) W_i/ ($W_i h_i^2$) =

K_2 = 1.5 (1) 0.42) 2026.45/745,583.44 = 0.00099

$K_1 \frac{C}{Q}$ = 0.0105 $\frac{0.40}{4}$ = 0.00105

$K_2 \frac{C}{Q}$ = 0.00099 $\frac{0.40}{4}$ = 0.00010

Nivel	$W_i h_i$ K_1 C/Q	$W_i h^2_i$ K_2 C/Q	F	V	V/K	X(m)
10	6.022	18.038	24.060	24.060	0.0048	0.094
9	5.438	14.709	20.147	44.207	0.0078	0.090
8	4.901	11.833	16.734	60.941	0.0092	0.082
7	4.672	9.923	14.595	75.536	0.01003	0.073
6	4.077	7.474	11.551	87.087	0.01117	0.063
5	3.431	5.292	8.724	95.811	0.012	0.052
4	2.926	3.664	6.594	102.405	0.011	0.040
3	2.271	2.185	4.456	106.861	0.012	0.029
2	1.585	1.064	2.649	109.510	0.011	0.017
1	0.985	0.375	1.360	110.870	0.006	0.006

PROBLEMA E-21

Considere una pila fijada en la base, sujeta a una funciòn de carga Po en el extremo superior, como se muestra en la figura **E-21.A** . Encuentre las ecuaciones que gobiernen a la respuesta del desplazamiento y a la fuerza axial.

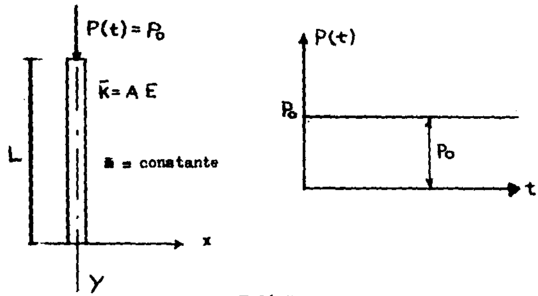


Figura E-21.A

Soluciòn:

Las dos condiciones lìmite que deben considerarse en este caso son:

At y=0 $\qquad Zn(o) = 0$

At y=L $\qquad N(L) = AEZ'(L) = 0$

Sustituyendo el primer caso en la ecuaciòn 4.1.8

$$Zn: An \operatorname{sen} \frac{\omega}{v}(0) + Bn \cos \frac{\omega}{v}(0) = 0$$

$$Bn = 0$$

Haciendo la primera derivada de la ecuaciòn 4.1.8, tomando Bn=0 y sustituyendo la segunda ecuaciòn queda:

$$EA\ Z'(L) = EA\ An\ \frac{\omega}{v} \cos \frac{\omega}{v} L = 0$$

La soluciòn trivial An=0 es exclusiva para un caso en particular.

Si $An \neq 0$ entonces:

$$\cos \frac{\omega}{v}(L) = 0$$

Para lo cual

$$\frac{\omega}{v}(L) = \frac{2n-1}{2}\pi$$

La configuraciòn modal de la viga està dada por

$$Zn\ (x) = An\ \text{sen}\ \frac{2n-1}{2}\pi\left(\frac{y}{L}\right)$$ Donde An determina la escàla del modo.

y la frecuencia de vibraciòn resulta

$$\omega n = \sqrt{\frac{(\omega/v)^2\ EA}{m}} = \frac{2n-1}{2}\pi\sqrt{\frac{EA}{mL^2}}$$

donde n=1, 2,3,4.... modos de vibrar

La masa y la carga generalizada resulta como:

$$Mn = \int_0^L m(y)\ Zn^2\ (Y)\ dy = m\ (y) \int_0^L Zn^2(y)\ dy$$

$$= m\ (y)\ An \int_0^L \text{sen}^2 \left(\frac{2n-1}{2}\pi\frac{y}{L}\right)dx =$$

Si An = 1 $\qquad Mn = \bar{m}\ \frac{L}{2}$

$$Pn = \int_0^L Pu_y\ (y,t)\ Zn\ (y)\ dy = -Po\ Zn\ (L) = \pm\ Po$$

n = par

-n = impar

La respuesta de la coordenada generalizada es:

$$M_n \ddot{Y}_n + \omega_n^2 M_n Y_n = P_n$$

entonces $$Y_n(t) = \frac{1}{M_n \omega_n} \int P_n(\tau) \operatorname{sen}\omega_n (t-\tau)\, d\tau$$

Integral de Duhamel

$$Y_n(t) = \frac{1}{M_n\omega_n} \left[\frac{P_o}{\omega_n} (1-\cos\omega_n t) \right]$$

$$= \frac{2}{mL} \frac{P_o}{\omega_n^2} (1-\cos\omega_n t)$$

La respuesta del desplazamiento serà

$$x(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(y)\, Y_n(t)$$

$$x(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{sen} \frac{2n-1}{2} \frac{\pi y}{L} \right] \left[\frac{2 P_o}{\bar{m} L\, \omega^2 n} (1-\cos\omega_n t) \right]$$

La evaluación mínima será para 3 modos de vibrar.

$$x(y,t) = \frac{8 P_o}{\pi^2} \frac{L}{AE} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\pm \frac{1-\cos\omega_n t}{(2n-1)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi y}{L} \right) \right]$$

La respuesta a fuerza Normal resulta

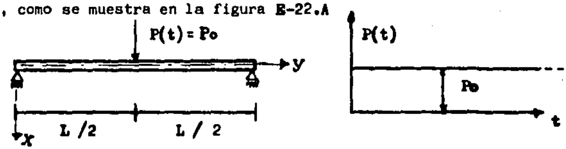
$$N(y,t) = EA \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{8 P_o L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\pm \frac{1-\cos\omega_n t}{(2n-1)^2} \frac{(2n-1)}{2} \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi y}{L} \right) \right]$$

$$= \frac{4 P_o}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\pm \frac{1-\cos\omega t}{2n-1} \cos\left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi y}{L} \right) \right]$$

PROBLEMA E- 22

Encuentra la respuesta dinámica de una viga, simplemente apoyada, sujeta a una carga Po en función de tiempo localizada a una distancia L/2, como se muestra en la figura E-22.A



$K = EI$, $\bar{m}$ = constante.

Figura E-22.A

Solución:

Las cuatro condiciones límite para una viga simplemente apoyada son:

At y=0 $\qquad Z(0) = 0$

$\qquad \mathcal{M}(0) = EIZ''(0) = 0$

At y=L $\qquad Z(L) = 0$

$\qquad \mathcal{M}(L) = EIZ''(L) = 0$

Sustituyendo en la ecuación 4.2.3, tenemos:

$Z(0) = \text{senh}\, \lambda n\,(0) + A''n \cosh \lambda n\,(0) + B'n \,\text{sen}\, \lambda n\,(0) + B''n \cos \lambda n(0) = 0$

$Z(0) = A''n \cosh \lambda n\,(0) + B''n \cos \lambda n\,(0) = 0$

y para $Z''(y)$ tenemos

$Z''(0) = \lambda^2 (A'n \,\text{senh}\, \lambda n\,(0) + A''n \cosh \lambda n\,(0) - B'n \,\text{sen}\, \lambda n\,(0) - B''n \cos \lambda(0))$

$Z''(0) = \lambda^2 (A''n \cosh \lambda n\,(0) - B''n \cos \lambda n\,(0)) = 0$

Para lo cual

$A''n + B''n = 0 \qquad y\ A''n - B''n = 0$

por lo tanto

$$A''n = B''n = 0$$

Similarmente sustituyendo la segunda condición en la ecuación 4.2.3 y tomando en cuenta que A"n =B"n = 0 resulta:

$$Z(L) = A'n \operatorname{senh} \lambda(L) + B'n \operatorname{sen} \lambda(L) = 0$$

$$Z''(L) = \lambda^2(-A'n \operatorname{senh} \lambda(L) + B'n \operatorname{sen} \lambda(L) = 0$$

$$-A'n \operatorname{senh} \lambda(L) + B'n \operatorname{sen} \lambda(L) = 0$$

$$B'n \operatorname{sen} \lambda(L) = A'n \operatorname{senh} \lambda(L) \qquad (2)$$

entonces sustituyendo (2) en (1) obtenemos:

$$2A'n \operatorname{senh} \lambda(L) = 0$$

De aquí que A'n = 0 ya que la función seno hiperbólico no se desvanece, por lo tanto

$Z(L) = B'n \operatorname{sen} \lambda(L) = 0$ Para B'n determina la escala del modo.

Si B'n=0 tenemos una solución trivial exclusiva para un caso en particular.

Para la proporción de la ecuación de la frecuencia tenemos:

$$\operatorname{sen} \lambda(L) = 0$$

Para lo cual

$$\lambda(L) = n\pi \ ; \quad n=1,2,3,..\infty \text{ modos de vibrar}$$

la frecuencia para $\lambda = n\pi/L$, donde por definición tenemos

$$\lambda^4 = \frac{\omega^2 \bar{m}}{EI} \quad ; \omega^2 n = \frac{\lambda^4 EI}{m} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \frac{EI}{m}$$

o sea

$$n = (\lambda\, 1)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}\, 1^4}}$$

o bien

$$n = n^2\, \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}\, 1^4}}$$

La figura de vibración es dada por la ecuación 4.2.3. con A"n=A'n=

B"n = 0

$$Zn\ (\ y\ ) + B'\ n\ \ sen\ \frac{n\pi}{L}\ y$$

donde B'n determina la escala del modo.

haciendo B'n = 1 tenemos

$$Zn\ (y) = sen\ \frac{n\pi}{L}\ y$$

La carga y masa generalizada es:

$$Mn = \int_0^L Zn^2\ (y)\ m\ (y)\ dy = \bar{m} \int_0^L sen^2\ \frac{n\pi x}{L}\ \ d\ \ = \frac{\bar{m}\ L}{2}$$

$$Pn = \int_0^L Zn\ (y)\ p\ (\ y,t)\ dy\ \ = Po\ Zn\ (\ y=L/2\ ) = \alpha Po$$

$$\text{donde}\ \alpha = \begin{cases} 1 & n=1,5,9,\dots. \\ -1 & n=3,7,11,\dots \\ 0 & n=par \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación de respuesta de las coordenadas normales;

$$Mn\ \ddot{q}n\ \ = \omega n^2\ Mn\ qn\ \ = Pn$$

$$\ddot{q}n\ (t) + \frac{1}{Mn\,\omega_n} \int_0^t Pn\ (\tau\ )\ sen\,\omega n\ (t-\tau\ )\ \ d\tau$$

de aquí que

$$\ddot{q}\ (t) = \frac{2\alpha Po}{\bar{m}\ L\ \omega n} \int_0^t sen\,\omega n\ (\ t\ -\ \tau\ )\ d\tau\ = \frac{2Po\alpha n}{\bar{m}\ L\ \omega_n^2}\ \ \ (1-\cos\omega nt)$$

La evaluación de la respuesta del desplazamiento es:

$$x\,(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Zn\ (y)\ qn\ (t)$$

$$x(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Po\,\alpha n}{\bar{m}\,L\,\omega_n^2}\ (1-\cos\omega nt)\ \text{sen}\ \frac{n\pi y}{L}$$

La evaluación de los momentos dinámicos de la viga.

$$\mathcal{M}(y,t) = EI\ \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$$

$$\mathcal{M}(y,t) = EI\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,Po\,\alpha\,n}{\bar{m}\,L\,\omega n^2}\ (1-\cos\omega nt)\ \left(\frac{-n^2\pi^2}{L^2}\right)\ \text{sen}\ \frac{n\pi y}{L}$$

PROBLEMA E-23

Los cuarenta pisos de un edificio largo que se muestra en la figura E-23.A tiene una altura de piso uniforme de 3.20 metros, con un peso por piso de 260 toneladas y con una inercia equivalente a 25 columnas de 3.225×10^9 cm^4 constante. El piso de losa es rígido, no se considera el amortiguamiento y la deformación por carga axial.

a) Determine la frecuencia de los tres primeros modos de vibrar.

b) Encontrar la respuesta máxima de desplazamiento y el tiempo en que se establece cuando la estructura es sometida a un impulso como se muestra en la figura:

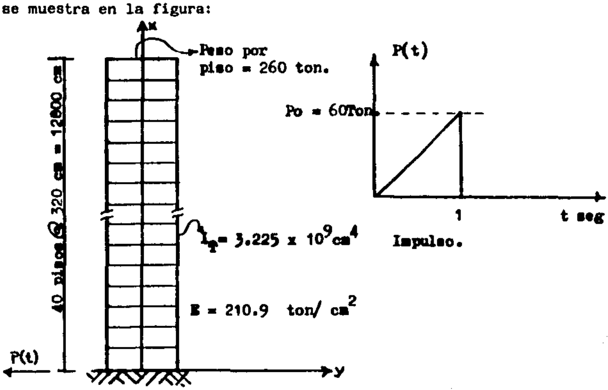


Figura E-23.A

Solución:

Las condiciones de borde son:

At x= o $\qquad Z(0) = 0 \qquad (1)$

$\qquad Z'(0) = 0 \qquad (2)$

At y= L $\qquad \mathcal{M} = EI\ Z''(L) = 0 \qquad (3)$

$\qquad V = EI\ Z'''(L) = 0 \qquad (4)$

Entonces para la primera condición de borde

$$Z(0) = A'n \operatorname{senh} \lambda(0) + A''n \cosh \lambda(0) + B'n \operatorname{sen} \lambda(0) + B''n \cos \lambda(0) = 0$$

$$Z(0) = A''n \cosh \lambda(0) + B''n \cos \lambda(0) = 0$$

$$\therefore \qquad A'n = -B''n$$

Para la segunda condición

$$Z'(0) = \lambda\ (A'n \cosh \lambda(0) + A''n \operatorname{senh} \lambda(0) + B'n \cos \lambda(0) - B''n \operatorname{sen} \lambda(0)) = 0$$

$$Z'(0) = \lambda\ (A'n \cosh \lambda(0) + B'n \cos \lambda(0))$$

$$\therefore \qquad A'n = -B'n$$

Para la tercera condición

$$Z''(L) = \lambda^2 (A'n \operatorname{senh} \lambda(L) + A''n \cosh \lambda(L) - B'n \operatorname{sen} \lambda(L) - B''n \cos \lambda(L)) = 0$$

y para la cuarta condición

$$Z'''(L) = \lambda^3 (A'n \cosh \lambda(L) + A''n \operatorname{senh} \lambda(L) - B'n \cos \lambda(L) - B''n \operatorname{sen} \lambda(L)) = 0$$

reduciendo términos en las dos últimas ecuaciones y expresandola en un sistema de ecuaciones resulta

$$A'n\ (\operatorname{senh} \lambda L + \operatorname{sen} \lambda L) + A''n\ (\cosh \lambda L + \cos \lambda L) = 0$$

$$A'n\ (\cosh \lambda L + \cos \lambda L) + A''n\ (\operatorname{senh} \lambda L - \operatorname{sen} \lambda L) = 0$$

en forma matricial

$$\begin{bmatrix} (\operatorname{senh}\lambda L + \operatorname{sen}\lambda L) & (\cosh\lambda L + \cos\lambda L) \\ (\cosh\lambda L + \cos\lambda L) & (\operatorname{senh}\lambda L - \operatorname{sen}\lambda L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'n \\ A''n \end{bmatrix} = 0$$

Para evitar la solucion trivial, se requiere que el determinante sea igual a cero.

$$\Delta = \text{determinante} = \operatorname{senh}^2\lambda L - \operatorname{sen}^2\lambda L - \cosh^2\lambda L - \cos^2\lambda L - 2\cos\lambda L \cosh\lambda L = 0$$

por lo tanto

$$\Delta = 1 + \cos\lambda L \cosh\lambda L = 0$$

$$\cos\lambda L \cosh\lambda L = -L$$

Para encontrar los valores de la frecuencia tendremos que evaluar λL, lo cuál ya fueron evaluados,(leer modos normales de vigas uniformes, punto 4.6) por Young y Felgar .

Para una viga empotrada - libre

modo	λnL	$(\lambda nL)^2$	$\omega n/\omega_1$
1	1.3751	3.5160	1
2	4.941	22.035	6.2669
3	7.3548	61.6972	17.5475

La evaluación de las frecuencias serán:

$$\omega n = (\lambda nL)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} L^4}}$$

masa = $W / 981 = 260/981 = 0.265 \ \dfrac{Ton\ s^2}{cm} = 265.04 \ \dfrac{Kg\ s^2}{cm}$

$m\ (x) = \bar{m} = 40\ (\ 265.04\ /\ 12800\ ) = 0.828 \ \dfrac{Kg\ s^2}{cm^2}$

$mL^4 = 0.828\ (\ 12800\ )^4 = 2.223 \times 10^{16}$ kg s^2 cm^2

$I_T = 3.225 \times 10^9$ cm^4

$E = 210900$ Kg/cm^2

$E\ I = 3.225 \times 10^9\ (210900) = 6.802 \times 10^{14}$ kg-cm^2

Las frecuencias de los tres primeros modos son:

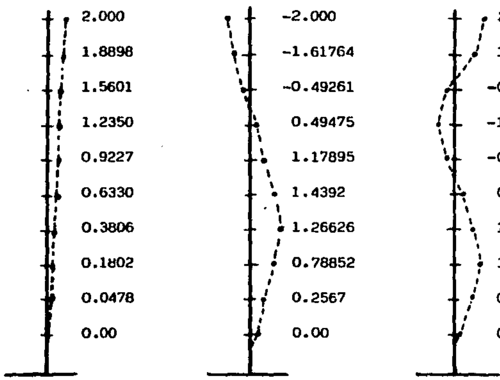
$$\omega_1 = 3.5160 \sqrt{\frac{6.802 \times 10^{14}}{2.223 \times 10^{16}}} = 0.615 \text{ rad/seg}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 10.216 \text{ seg}$$

$\omega_2 = 6.2669\ (0.615) = 3.854$ rad/seg , $T_2 = 1.630$ seg

$\omega_3 = 17.5475\ (0.615) = 10.792$ rad/seg , $T_3 = 0.582$ seg

Los primeros tres modos son:



x/L	1er.Modo	2do. Modo	3er.Modo
1.0	2.000	-2.000	2.00
0.96	1.8898	-1.61764	1.3787
0.84	1.5601	-0.49261	-0.35563
0.72	1.2350	0.49475	-1.28189
0.60	0.9227	1.17895	-0.94753
0.48	0.6330	1.4392	0.26103
0.36	0.3806	1.26626	1.32534
0.24	0.1802	0.78852	1.41376
0.12	0.0478	0.2567	0.61120
0.00	0.00	0.00	0.00

1er.Modo 2do. Modo 3er.Modo

La ecuación de la respuesta de desplazamiento en coordenadas generalizadas es:

$$q(t) = \frac{1}{M_n \omega_n} \int_0^t P_n(\tau) \operatorname{sen} \omega_n (t - \tau)\, d\tau$$

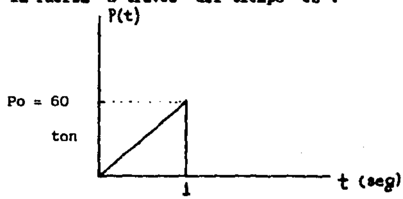
Integral de Duhamel

$$M_n = \int_0^L m(x)\, Z_n^2(x)\, dx = m(x) \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{2n-1}{2}\,\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{\bar{m}L}{2}$$

$$M_n = \frac{0.828\ (12800)}{2} = 5\ 300.71\ \frac{Kg\text{-}s}{cm}$$

$$P_n = \int_0^L P_n(x,t)\, Z_n(x)\, dx = -P_o\, Z_n(L) = \pm\ P_o \qquad \begin{array}{l} +\ n = \text{par} \\ -\ n = \text{impar} \end{array}$$

La variación de la fuerza a través del tiempo es :



La solución integral de Duhamel es:

$$q(t) = \frac{1}{Mn} \frac{Po}{\omega^2 td}\left(t - \frac{\text{sen}\,\omega t}{\omega}\right) \quad ; \text{ para } t \leqslant td$$

$$q(t) = \frac{1}{Mn} \frac{Po}{\omega^2 td}\left(td \cos (t - td) + \frac{\text{sen}\,\omega(t-td)}{\omega} - \frac{\text{sen}\,\omega t}{\omega}\right)$$

para $t > td$

Para $\omega_1 = 0.615$ rad/seg $t \leqslant td$

t	$\frac{1}{Mn} \frac{-Po}{\omega^2 td}$	$\left(\frac{\text{sen}\,\omega t}{\omega}\right)$	$\left(t - \frac{\text{sen}\,\omega t}{\omega}\right)$	$q(t)$
0.2	− 29.927	0.00349	0.19651	−5.881
0.4	− 29.927	0.00690	0. 39310	−11.764
0.6	− 29.927	0.01047	0.58953	−17.643
0.8	− 29.927	0.01396	0.78604	−23.524
1	− 29.927	0.01745	0.98255	−29.405

Para $\omega_2 = 3.854 \ \frac{rad}{seg}$ y $t \leqslant td$

t	$\frac{1}{Mn} \frac{Po}{\omega_2^2 td}$	$\left(\frac{sen\ \omega t}{\omega}\right)$	$\left(t - \frac{sen\ \omega t}{\omega}\right)$	q(t)
0.2	0.762	0.00349	0.19651	0.150
0.4	0.762	0.00698	0.39302	0.299
0.6	0.762	0.01047	0.58953	0.449
0.8	0.762	0.01396	0.78604	0.559
1.0	0.762	0.01745	0.98255	0.749

Para $\omega_3 = 10.792 \ \frac{rad}{seg}$ y $t \leqslant td$

t	$\frac{1}{Mn} \frac{Po}{\omega_3^2 td}$	$\left(\frac{sen\ \omega t}{\omega}\right)$	$\left(t - \frac{sen\ \omega t}{\omega}\right)$	q(t)
0.2	− 0.097	0.00349	0.19651	− 0.019
0.4	− 0.097	0.00689	0.39302	− 0.038
0.6	− 0.097	0.01047	0.58953	− 0.057
0.8	− 0.097	0.01396	0.78604	− 0.076
1.0	− 0.097	0.01745	0.98255	− 0.095

Para $\omega_1 = 0.615$ rad/seg y $t > td$

t	$\frac{1}{Mn} \frac{-Po}{\omega_1^2 td}$	$(t-td)$	$t_d \cos\omega(t-t_d)$	$\frac{sen\,\omega(t-td)}{\omega}$	$\frac{-sen\,\omega t}{\omega}$	$q(t)$
1.5	-29.927	0.5	0.99999	0.0087	-0.0262	-29.403
2.0	-29.927	1.0	0.99994	0.0175	-0.0349	-29.404
2.5	-29.927	1.5	0.99987	0.0262	-0.0436	-29.402
3.0	-29.927	2.0	0.99939	0.0349	-0.0524	-29.396

Para $\omega_2 = 3.854$ rad/seg y $t > td$

t	$\frac{1}{Mn} \frac{Po}{\omega_2^2 td}$	$(t-td)$	$t_d \cos\omega(t-t_d)$	$\frac{sen\,\omega(t-td)}{\omega}$	$-\frac{sen\,\omega t}{\omega}$	$q(t)$
1.5	0.762	0.5	0.99943	0.0087	-0.0262	0.748
2.0	0.762	1.0	0.99774	0.0175	-0.0349	0.747
2.5	0.762	1.5	0.99491	0.0262	-0.0436	0.745
3.0	0. 762	2.0	0.99036	0.0349	-0.0524	0.742

Para $\omega_3 = 10.792$ rad/seg y $t > td$

t	$\frac{1}{Mn} \frac{Po}{\omega_3^2 \, td}$	(t-td)	$t_d \cos \omega(t-t_d)$	$\frac{\operatorname{sen} \omega(t-td)}{\omega}$	$\frac{-\operatorname{sen} \omega t}{\omega}$	q(t)
1.5	- 0.097	0.5	0.99557	0.0087	-0.0262	-0.095
2.0	- 0.097	1.0	0.98231	0.0175	-0.0349	-0.094
2.5	- 0.097	1.5	0.96036	0.0262	-0.0436	-0.091
3.0	- 0.097	2.0	0.92988	0.0349	-0.0524	-0.089

Del resultado se obtiene que la coordenada máxima para cada modo es en el tiempo t = 1 seg. También se observa que la participación modal cada vez es menor a medida en que nos alejamos del primer modo de vibrar.

En los tiempos mayores de td se nota un decremento muy pequeño en los valores de las coordenadas generalizadas q(t), ocasionados por las propiedades geométricas y elásticas de los elementos estructurales. Sin embargo el decremento es impercentible y no se consideran los efectos del amortiguamiento, por lo tanto el movimiento se identifica como vibración forzada no amortiguada.

Entonces, los desplazamientos máximos serán:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t) \; Z_i$$

Para **t = 1 seg.**

$$x(t) = q_1 \quad Z_1 \quad + \quad q_2 \quad Z_2 \quad + \quad q_3 \quad Z_2 \quad = \quad x(cm)$$

$$x(1) = -29.405 \begin{bmatrix} 2.00 \\ 1.8898 \\ 1.5601 \\ 1.2350 \\ 0.9227 \\ 0.6330 \\ 0.3806 \\ 0.1802 \\ 0.0478 \\ 0.0000 \end{bmatrix} + 0.749 \begin{bmatrix} -2.00 \\ -1.6176 \\ -0.4926 \\ 0.4945 \\ 1.1789 \\ 1.4392 \\ 1.2663 \\ 0.7852 \\ 0.2567 \\ 0.0000 \end{bmatrix} - 0.095 \begin{bmatrix} 2.00 \\ 1.3787 \\ -0.3556 \\ -1.2819 \\ -0.9475 \\ 0.2610 \\ 1.3253 \\ 1.4138 \\ 0.6112 \\ 0.0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60.49 \\ -56.91 \\ -46.21 \\ -35.82 \\ -26.16 \\ -17.56 \\ -10.37 \\ -4.85 \\ -1.27 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

PROGRAMA PARA MULTIPLICACION Y SUMA DE DOS MATRICES

```
001 REM ARREGLO MATRICIAL
002 PRINT "DAME LA MATRIZ A"
005 INPUT "ORDEN DE N Y M"; N,M
010 DIM AP(N,M)
020 FOR I =1 TO N
030 FOR J =L TO M
040 INPUT AP(I,J)
050 NEXT J: NEXT I
065 PRINT "DAME LA MATRIZ B"
068 INPUT "ORDEN DE O Y P"; O,P
070 IF M<>O THEN 280
080 DIM BP(O,P)
090 FOR I= 1 TO O
100 FOR J= 1 TO P
110 INPUT BP(I,J)
120 NEXT J: NEXT I
135 SCNCLR
140 PRINT "LA MATRIZ A ES"; N;",";M
145 FOR I =1 TO N
150 FOR J =1 TO M
155 PRINT "      "; AP(I,J)
160 NEXT J: PRINT
165 NEXT I
167 PRINT "PULSE RETURN"
168 INPUT
170 PRINT "LA MATRIZ B ES" O; ",";P
175 FOR I = 1 TO O
180 FOR J = 1 TO P
185 PRINT "      ";BP(I,J),
190 NEXT J; PRINT
195 NEXT I
200 PRINT
205 DIM (CP(N,M)
210 IF(N/M)<>(O/P) THEN 250
213 SCNCLR: PRINT "LA SUMA DE A + B ES"
214 PRINT
```

```
215 FOR I= 1 TO N
220 FOR J= 1 TO M
225 CP(I,J)=AP(I,J)+BP(I,J)
230 PRINT "      ";CP(I,J),
235 NEXT J: PRINT
238 NEXT I
240 PRINT "PULSE RETURN"
241 INPUT
245 DIM DP(N,P)
247 SCNCLR
250 PRINT "LA MULTIPLICACION DE A*B ES"
253 FOR I= 1 TO N
255 FOR J= 1 TO P
258 SUM= 0
260 FOR K=1 TO M
263 DP(I,J) = AP(I,K) * BP(K,J) + SUM
265 SUM= DP(I,J)
268 NEXT K
270 PRINT "      ";DP(I,J),
273 NEXT J: PRINT
275 NEXT I
278 STOP
280 PRINT "NO SE OPERA EL ORDEN"
285 PRINT "      "; "DE LA MATRIZ"
290 END
```

PROGRAMA PARA CALCULAR UN SISTEMA DE ECUACIONES:

```
4 REM SISTEMA DE  ECUACIONES

6 PRINT "XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX"
7 PRINT
8 PRINT "SOLUCION DE SISTEMAS"
9 PRINT "         "; "DE ECUACIONES"
10 PRINT .
11 PRINT"XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX"
12 PRINT
13 PRINT
14 PRINT
20 INPUT "NUMERO DE ECUACIONES"; N
30 DIM A (N,N),B(N),LU(N,N)
35 DIM Y (N),X(N)
40 FOR I=1 TO N : FOR J=1 TO N
50 PRINT "      "; "A(";I;",";J;")=";
60 INPUT A(I,J)
70 NEXT J: NEXT I
80 FOR J=1 TO N
90 PRINT "      B(";J;")=";
100 INPUT B(J): NEXT J
101 FOR I = 1 TO N: FOR J=1 TO N
110 IF I = J THEN 140
113 FOR R=1 TO (I-1)
115 S=S+LU(I,R)*LU(R,J):NEXT R
120 LU(I,J)=(A(I,J)-S)/LU(J,J)
130 S=0 : GO TO 160
140 FOR R=1 TO (I-1): S=S+LU(I,R)*LU(R,J)
143 NEXT R
150 LU(I,J)=A(I,J)-S:S=0
160 NEXT J:NEXT I
170 FOR I=1 TO N
180 FOR J=1 TO (I-1)
190 SR=SR+LU(I,J)*Y(J): NEXT J
200 Y(I)=B(I)-SR : SR=0
```

```
210 NEXT I
220 FOR I=N TO 1 STEP -1
225 FOR J=1 TO N
230 S2=S2+LU(I,J)*X(J): NEXT J
240 X(I)=(Y(I)-S2)/LU(I,J): S2=0
250 NEXT I
255 SCNCLR
257 PRINT: PRINT "LA SOLUCION ES:"
258 PRINT
260 FOR I=1 TO N
265 PRINT"    X(";I;")=";X(I): PRINT
268 NEXT I
270 END
```

PROGRAMA PARA OBTENER LA MATRIZ INVERSA

```
  5 REM MATRIZ INVERSA
 10 SCNCLR
 20 INPUT "ORDEN DE LA MATRIZ CUADRADA"; N
 30 DIM A(N,N)
 35 FOR I=1 TO N
 40 FOR J=1 TO N
 45 PRINT "( "; I; ",";J;") =";
 50 INPUT A(I,J)
 60 NEXT J: NEXT I
 70 FOR L=1 TO N
 80 X=A(L,L)
 90 IF X<>0 THEN 120
100 PRINT "MATRIZ SINGULAR":END
120 A(L,L)=1
130 FOR J=1 TO N
140 A(L,J)=A(L,J)/X
150 NEXT J
155 FOR I=1 TO N
160 IF I=L THEN 220
170 X=A(I,L)
180 A(I,L)=0
190 FOR J=L TO N
200 A(I,J)=A(I,J)-X*A(L,J)
210 NEXT J
220 NEXT I
230 NEXT L
235 SCNCLR
236 PRINT
237 PRINT: PRINT "MATRIZ INVERSA"
238 PRINT
240 FOR I=1 TO N: FOR J=1 TO N
250 PRINT "        "; A(I,J),
260 NEXT J: PRINT:NEXT I
300 END
```

PROGRAMA PARA ENCONTRAR LA ECUACION CARACTERISTICA

```
10 REM "LEVERRIER -FADDEEU"
20 INPUT "DAME EL ORDEN"; N
25 DIM A (N,N)
30 IF N>=2 THEN 50
40 END
50 FOR I=1 TO N
60 FOR J=1 TO N
70 INPUT "          ";A(I,J)
80 NEXT J: NEXT I
90 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N
100 B(I,J)= A (J,J)
110 NEXT J: NEXT I
120 FOR L=1 TO N
130 TRAZA= 0
140 FOR I=1 TO N
150 TRAZA = TRAZA + B(I,I): NEXT I
160 PCL)= -TRAZA/L
170 FOR I=1 TO N
180 B (I,I)=B(I,I) + P(L) : NEXT I
190 IF L<> (N-1) THEN 230
200 FOR I=1 TON:FOR J=1 TO N
210 ADJ (I,J)= B(I,J): NEXT J
220 NEXT I
230 FOR J=1 TO N: FOR I=1 TO N
240 COL (I)=B(I,J) ;NEXT J
250 FOR I=1 TO N
260 PROD = 0
270 FOR K=1 TO N
280 PROD = PROD + A(I,K)*COL(K): NEXT K
290 B(I,J)=PROD:NEXT I
300 NEXT J: NEXT L
310 SCNCLR
320 PRINT: PRINT
330 PRINT "ECUACION CARACTERISTICA"
340 PRINT: PRINT
350 FOR L=1 TO N
```

```
360 PRINT "      ";P(L)
370 NEXT L
371 PRINT: PRINT
373 PRINT " N U T A "
376 PRINT: PRINT
378 PRINT "LA ULTIMA CIFRA ES EL TERMINO"
380 PRINT " I N D E P E N D I E N T E "
390 END
```

PROGRAMA PARA SOLUCIONAR UNA ECUACION CARACTERISTICA:

```
 10 REM NEWTON RAPHSON
 20 INPUT "DAME R PRELIMINAR"; R
 30 INPUT "NUMERO DE INTERACCIONES"; N D I
 40 INPUT "DAME EL GRADO"; N
 50 IF N> =2 THEN 70
 60 PRINT "ES DE GRADO =1": END
 70 M=N+1
 80 FOR I=1 TO M
 90 PRINT "A(";I;")=",: INPUT  A(I)
100 APROX = 0.001 :NEXT I
110 FOR L=1 TO NDI
120 B(1)=A(1)
130 FOR I=2 TO M
140 B(I)=A(I)+R*B(I-1): NEXT I
150 C(1)=B(1)
160 FOR I=2 TO N
170 C (I)=B(I)+R*C(I-1): NEXT I
180 Y=R-B(M)/C(N)
190 REL=ABS ( (R-Y)/Y)
200 PRINT: PRINT
210 PRINT "NUMERO DE INTERACCIONES"; L: PRINT
220 PRINT "APROXIMACION"; REL: PRINT
230 PRINT "        "; "RAIZ" ;  Y: PRINT
240 IF REL< =APROX THEN 290
250 R=Y: NEXT L
260 PRINT: PRINT
270 PRINT "NO CONVERGE EN"; NDI; "ITERACIONES"
280 END
290 PRINT "LA RAIZ ES"; Y: PRINT
300 PRINT "LA NUEVA ECUACION ES"
310 FOR I=1 TO M
320 PRINT "       "; B(I); "       ";A(I)
330 NEXT I: END
```

6. CONCLUSIONES

1. La dinámica estructural, es la parte específica de la mecánica clásica, que se encarga de estudiar las causas y efectos del movimiento de un sistema estructural, a través de un intervalo de tiempo dado. Los resultados obtenidos dependerán de la forma de idealizar los problemas; ya sea como sistemas discretos o sistemas contínuos; y además, en cada caso, es de suma importancia, el criterio con que se fijen los conceptos primordiales de rigidez, masa y peso, el empleo del amortiguamiento y la condición de excitación en que se forje el sistema.

2. El planteamiento de las ecuaciones que gobiernan un sistema estructural vibratorio, estará sometido por cuatro tipos de fuerzas fundamentales; "La fuerza de inercia", establecida directamente por la segunda ley de Newton; "La Fuerza Restaurradora",que dependerá esencialemten del comportamiento del material de la estructura, en la relación de proporcionalidad - carga - deformación, que puede ser lineal (elástico) o no lineal; "La Fuerza Disipadora"; que se representa como un elemento mecánico, llamado amortiguamiento, y dependiendo su intensidad, el sistema puede denominarse como subamortiguado, sobreamortiguado y amortiguado críticamente. Por último tenemos la fuerza provocada por algún agente externo como por ejemplo un motor, un sismo o una explosión , y usualmente la llamamos como "Fuerza de Excitación".Los dos primeros tipos de fuerza, son parte esencial y fundamental de las ecuaciones de movimiento de la mecánica de vibraciones. Las últimas pueder ser despreciables, si las condiciones y el criterio de análisis lo permite. La consideración de la fuerza de disipación y excitación respectivamente y en forma independiente en la ecuación de movimiento, hace que el movimiento se clasifique en diversas formas según sea su caso, por ejemplo; en vibración libre, vibración libre amorti

guada, vibración forzada, vibración forzada amortiguada, vibración armónicamente forzada, etc. y a su vez cada una de estas - divisiones, tiene una solución en particular de su ecuación de movimiento.

3. La resonancia se da en sistemas forzados, es decir, - en sistemas excitados por algún agente externo. La resonancia consiste en la aproximación de la intensidad de la frecuencia - excitadora con la frecuencia natural del sistema, provocando la agudeza de los elementos mecánicos que trabajan sobre la estructura ocasionando una falla irremedeable del elemento. Por esta razón es recomendable que cuando se produce un sísmo por acomodo del suelo, los edificios de largos períodos y frecuencias - lentas estén cimentados en terrenos rocosos con períodos cortos y frecuencias rápidas y viceversa. De esta manera se evita la igualdad de la frecuencia del suelo con la de la estructura, - por lo que la estructura sufrirá menos deterioros.

4. El análisis de sistemas discretos, hace que una estructura de "n" grados de libertad se descomponga en "n" sistemas de un grado de libertad. Siendo "n" el número de masas concentradas con que se forma el sistema. Para ésto se necesita hacer el llamado desacoplamiento modal, el cual consiste en obtener - la ecuación de movimiento que gobierna a cada sistema de grado simple, formado por la matriz generalizada de masas, rigideces, amortiguamiento y fuerzas excitadoras. Cada ecuación de movi-- miento de un grado de libertad podrá ser analizada con los métodos numéricos de la integración de Duhamel (Como son por ejem-- plo: La trapecial, Simpson, diferencias centrales, Houbolt, - Newmark, etc.) si son sistemas forzados, o con la solución general de las ecuaciones diferenciales cuando se trate de sistemas no forzados.

5. El modo de vibrar de un sistema de varios grados de libertad se define como la configuración o forma del movimiento vibratorio en un plano, que toma la estructura en cada período definido cuando se obliga a oscilar. Existen varios métodos para encontrar los modos de vibrar de los cuales mencionaremos algunos: Método de la Ecuación Característica, como método directo, y los métodos de Newmark,Holzert, Matriz Inversa, Stodola y Jacobi, como métodos iterativos. La elección del método consiste en la disponibilidad de los medios de información, el entendimiento y las herramientas de trabajo, siendo ésta última el empleo de la computadora que hace que se simplifique parcial o totalmente el análisis. El tiempo que tarda la computadora en procesar un programa también es un factor decisivo en la elección del método, ya que implica en la economía del proyecto. Entre más rápido se ejecute el programa más económico será el análisis.

6. El análisis sísmico dinámico visto en este trabajo consta de dos partes características; la participación modal y la participación espectral. En los ejemplos realizados observamos que para cada modo se presenta una frecuencia y un período natural diferente que permite ordenar los modos de vibrar en forma creciente con respecto a sus frecuencias y en forma decreciente con respecto a sus períodos. De tal manera que el primer modo siempre tendrá la menor frecuencia y el período más largo. Entre más pequeña sea la frecuencia y más largo sea el período,mayor será su contribución modal. El reglamento, de la Comisión Federal de Electricidad, recomienda que en el análisis sísmico modal espectral se considere la contribución de todo modo cuyo período natural sea mayor o igual que 0.4 segundos, pero en ningun caso podrá considerarse menos de tres modos. El primer modo de vibrar tiene una configuración de tipo simple, que en muchos casos se aproxima a una distribución lineal, con un período natural conocido como período fundamental de vibración.

El análisis estático parte de esta distribución lineal basada en el principio de la conservación de la energía, provocando que en algunos casos se obtengan diseños conservadores. El espectro de diseño determina el coeficiente sísmico a partir de la **macroregionalización** y **microregionalización** sísmica; y además del período natural de vibración. El espectro de diseño determina también el porcentaje de amortiguamiento para la que es diseñada la estructura. Por lo tanto si cambiamos el porcentaje de amortiguamiento en el espectro de diseño, cambiará los coeficientes sísmicos y se tendrán otras fuerzas sísmicas de diseño muy diferentes a las primeras. Con esto se hace notar que el amortiguamiento si interviene en el diseño sísmico modal espectral y en el diseño sísmico estático.

7. Los sistemas de multigrados de libertad, donde el número de masas que se forman, es muy grande, o en sistemas con masa y elástica continuamente distribuida, homogénea, isotrópicos y que obedecen la ley de Hooke; son los llamados sistemas contínuos. El análisis de los sistemas distribuidos o contínuos, es semejante a los sistemas discretos; es decir, acepta un desacoplamiento modal en base de coordenadas generalizadas en función de la longitud. Los métodos de análisis permite idealizar el sistema como una viga sometida a cortante, o flexión, o a esfuerzos combinados, para lo cual, es necesario considerar las condiciones de frontera del sistema. Esto hace que se extienda la idealización de sistemas contínuos y permita analizar desde la vibración de una viga simplemente apoyada hasta la de un edificio de cuarenta niveles de longitud.

8. El objetivo de este trabajo fue la de agrupar la información básica necesaria para el entendimiento del comportamiento de estructuras sometidas a vibración. Desde el caso más simple, como son los sistemas de un grado de libertad, hasta llegar a los sistemas contínuos. El camino seguido fue la de -

ordenar lo mejor posible la teoría que se presenta en varios libros de dinámica estructural y darles alguna aplicación, elaborando y resolviendo ejemplos representativos y didacticos con énfasis a la aplicación de la computadora. Para ésto se presentan varios métodos iterativos simplificando total o parcialmente la solución del problema. Los programas de computadora presentados en este trabajo tienen la finalidad de mostrar algoritmos que sirvan de ayuda al estudiante de dinámica estructural facilitando la comprensión y el uso de los métodos de análisis.

7. BIBLIOGRAFIA

Altos hornos de Mexico, S.A. "Manual A.H.M.S.A."
Construcción de Acero, México, 1977

Aranda, G.R. Apuntes de clase de: "Dinámica Estructural"
Facultad de Ingenieria, UNAM, 1986

Aranda, J.R., Ayala, G.A., Camba, J.L., Damy, J., Fuentes, S. y
Sandoval, H.; Curso: "Matemáticas Aplicadas a la Ingenieria
estructural". División de Educación Contínua. UNAM
Mayo, 1986

Bazan, E. y Meli, R., "Manual de Diseño Sísmico de Edificios".
Editorial Limusa, México, 1985

Clough, W.R. y Penzein, J. "Dynamics of Structures".
Editorial Mc Graw-Hill, International, 1975

Dowrick, D.J. "Diseño de Estructuras Resistentes a Sismos
para Ingenieros y Arquitectos".
Editorial Limusa, 1984

Estrada,U.G. "Estructuras Antisísmicas"
Editorial C.E.C.S.A. 1981

Martínez, I.,Navarro,A. y Ceniceros,J."Dinámica Estructural".
Editorial Universitaria.Universidad Autónoma de Zacatecas,
México, 1983

Newmark,N.M. y Rosenblueth,E."Fundamentos de Ingeniería -
Sísmica". Editorial Diana, 1986

Thomson,T.W. " Teoría de Vibraciones"
Editorial Prentice/Hall International, 1983

Zurita,N.F. "Teoría y Ejemplos de aplicación para la clase
de Ingeniería Sísmica".TESIS. Facultad de Ingeniería.
UNAM,1985