1

2y.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

ALGUNOS TEOREMAS DE CLASIFICACION DE GRUPOS ABELIANOS LIBRES DE TORSION

T E S I S

Que para obtener el título de

MATEMATICO

Autor: José de Jesús Aguilar Rodríguez

Director: Dra· María Luisa Pérez Segui

México, D. F. 1988

Indíce

Introducción

Este trabajo es una pequeña recopilación de algunos teoremas de clasificación de grupos abelianos libres de torsión de rango finito.

En el capítulo 1 introduciremos las nociones básicas que utilizaremos a lo largo de este trabajo. En los capítulos 2, 3 se estudiará una clase muy particular de grupos abelianos libres de torsión: los grupos de rango 1 y sus sumas directas. Llegaremos aquí a una clasificación completa para tales clases de grupos (es decir, dados dos grupos podemos decidir si son o no isomorfos y además dar un representante para cada clase de isomorfismo)

En el capítulo 4 regresaremos al caso general, estudiaremos la clasificación debida a Kurosh - Malcev - Derry de los grupos abelianos libres de torsión. En la práctica la teoría desarrollada en la clasificación de Kurosh - Malcev - Derry es difícil de utilizar aun en los ejemplos mas simples por lo cual el problema de clasificación de los grupos se considera todavía abierto.

En el último capítulo presentaremos otra clasificación para una clase de grupos inescindible de rango 2 (Ver [4]).

§ 1 Rango y Pureza

Los conceptos y resultados de esta sección son básicos y pueden encontrarse mas ampliamente en cualquier libro de introducción a la teoría de grupos abelianos (ver por ejemplo [2], [3]).

A lo largo de toda la tesis el termino grupo significará para nosotros grupo Abeliano.

Dado un grupo libre de torsión A decimos que un subconjunto $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de A es linealmente independiente si $r_1a_1 + \ldots + r_na_n = 0$ con $r_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 1, \ldots n$ implica que $r_i = 0$; o de manera equivalente $\Sigma\langle a_i \rangle = \oplus \langle a_i \rangle$; en base a esto tenemos la siguiente

1.1 Definición Si A es un grupo libre de torsión definimos el rango de , $r(A)$, como el cardinal de cualquier conjunto linealmente independiante máximo.

Es facil probar que el rango esta bien definido. En este trabajo, los grupos que consideraremos serán siempre grupos libres de torsión de rango finito (a menos que se indique explícitamente que no será así) y los denotaremos por $A, B, C \ldots$.

1.2 Proposición Sea A un grupo libre de torsión, entonces $r(A) = n$ sí y sólo si n es el mínimo tal que existe un monomorfismo $A \hookrightarrow \mathbb{Q}^n$

Dem ($\Rightarrow$) Sea $\{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto máximo linealmente independiente de A. Para cualquier $a \in A$, $a \neq 0$, existen enteros $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ únicos tales que $\alpha a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$ con $\alpha \neq 0$. Definimos $i : A \hookrightarrow \mathbb{Q}^n$ como $i(a) = (\alpha_1/\alpha, \ldots, \alpha_n/\alpha)$ si $a \neq 0$ y $i(0) = 0$. Así definido es fácil ver que i es un monomorfismo. Supongamos que $i_0 : A \hookrightarrow \mathbb{Q}^{n_0}$ es un monomorfismo y $n_0 < n$; entonces $i_0(a_1), \ldots, i_0(a_n)$ son linealmente independientes en $\mathbb{Q}^{n_0}$, lo cual implica que $\{a_1, \ldots, a_n\}$ son independientes en A, lo cual es falso y por lo tanto, n es mínimo $\square$

Observación: Una manera equivalente de definir el rango de un grupos A es como $r(A) = \dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A)$

1.2 Proposición Sean A, B grupos de rango finito

i) Si $A \subset B$ entonces $r(A) \leq r(B)$
ii) si $r(A) = 1$ y $f : A \longrightarrow B$ entonces f es mono ó $f = 0$
iii) $r(A) = 1$ si y sólo si $A \neq 0$ y A es isomorfo a un subgrupo de $\mathbb{Q}$
iv) Si $0 \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow C \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta entonces $r(A) = r(B) + r(C)$
v) $r(\oplus A_i) = \Sigma\, r(A_i)$ $\square$

1.3 Proposición Si $0 \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta (G un grupo arbitrario) entonces $r(A) = r(B)$ si y sólo si G es de torsión. En este caso G es isomorfo a un subgrupo de $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n$ donde $n = r(A)$

Dem. Aplicando $-\otimes \mathbb{Q}$ a $0 \to B \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow 0$ obtenemos sin dificultad la primera parte de nuestra afirmación, por lo cual solo demostraremos que $G \subset (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n$. Supondremos primero que $B \cong \mathbb{Z}^n$ de donde:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & A & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{i}} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \mathbb{Q}^n & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/\mathbb{Q})^n & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

de la propiedad universal del conúcleo i induce $\bar{i} : G \hookrightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^h$ que hace conmutar el diagrama y por el lema del 5º $\bar{i}$ es inyectivo.
Sea F libre tal que $F \subset B \subset A$ y $r(F) = r(A)$. Entonces $G \cong A/F \big/ B/F$ de donde G es cociente de A/F de donde

$T_p(G)$ es cociente de $T_p(A/F) \subset (\mathbb{Z}_{p^\infty})^h$. Pero cociente de subgrupos de $(\mathbb{Z}_{p^\infty})^h$ es isomorfo a un subgrupo de $(\mathbb{Z}_{p^\infty})^n$ y por lo tanto $T_p(G) \subset (\mathbb{Z}_{p^\infty})^h$, de donde $G \subset (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^h$ $\square$

Una clase muy importante de subgrupos de un grupo es la de los subgrupos puros. Decimos que un subgrupo H de G (no necesariamente libre de torsión) es puro en G si y sólo si $nG \cap H = nH$ para toda $n \geq 1$; es decir si la ecuación $nx = h$ tiene solución en G implica que tiene solución en H. Si G es libre de torsión entonces H es puro en G si y sólo si G/H es libre de torsión. Además, en grupos libres de torsión si la ecuación $nx = a$ tiene solución, entonces la solución es única; de esta simple observación se deduce muy fácilmente que:

1.4 <u>Proposición</u> Si A es un grupo libre de torsión la intersección de subgrupos puros en A es un subgrupo puro $\square$

Por lo anterior, dado un subconjunto S de un grupo libre de torsión A, la intersección de todos los subgrupos puros que contienen a S $\langle S \rangle_*$, es el mínimo subgrupo puro de A que contiene a S; lo llamaremos el subgrupo puro generado por S, tenemos $\langle S \rangle_*$ como:

1.5 $\langle S \rangle_* = \{ a \in A \mid \text{existe } n \neq 0 \text{ con } na \in \langle S \rangle \}$

Si definimos $P = \{a \in A \mid \text{existe } n \neq 0 \text{ con } na \in \langle S \rangle\}$ es puro en A que contiene a S, de donde $\langle S \rangle_* \subset P$; y como $\langle S \rangle \subseteq \langle S \rangle_*$ entonces $P \subseteq \langle S \rangle_*$

1.6 <u>Proposición</u> i) Sumandos directos son puros.

ii) Si B es puro en A_i para toda $i \geq 1$ y $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ entonces B es puro $\bigcup A_i$

iii) Si $C \subset B \subset A$ si C es puro en A entonces C es puro en B

iv) Si $C \subset B \subset A$ y B es puro en A entonces B/C es puro en A/C

v) Si $C \subset B \subset A$, si C es puro en B y B es puro en A entonces C es puro en A $\square$

§2- Grupos Libres de torsión de Rango 1

Para los grupos libres de torsión de rango 1 (Subgrupos distintos de cero de un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimension 1), el problema de decidir si dos grupos son ó no isomorfos está completamente resuelto en términos de divisibilidad (Recordemos que la "diferencia fundamental" entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ es precisamente que $\mathbb{Z}$ no es "nada divisible" mientras que $\mathbb{Q}$ es "completamente divisible") Analizaremos esto de manera más precisa.

Dado A un grupo libre de torsión, consideremos la ecuación $p^k x = a$ con $a \in A$ y p un entero primo. Al mayor entero no negativo k para el cual la ecuación tiene solución lo llamaremos la altura de a en p, $h_p(a) = k$; si no existe tal k, definimos $h_p(a) = \infty$. Las alturas nos indican qué tan p-divisibles son los elementos en los grupos.

Como para cada número primo tenemos asociada una altura es natural pensar en la sucesión de alturas de un elemento $a \in A$ indicada por la sucesión $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ de todos los primos (ordenada de manera creciente). A tal sucesión $\chi_A(a) = (h_{p_1}(a), h_{p_2}(a), \ldots)$ le llamaremos la característica de a en A.

En general una característica será una sucesión en $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dadas dos características, $\chi = (\alpha_i)$ y $\chi' = (\beta_i)$, decimos que χ es menor ó igual a χ', $\chi \leq \chi'$ si y sólo si $\alpha_i \leq \beta_i$ para todo $i \geq 1$. Tenemos así un orden parcial en el conjunto de todas las características con respecto al cual el ínfimo de dos características, $\inf\{\chi, \chi'\}$, es la característica (γ_i) con $\gamma_i = \inf\{\alpha_i, \beta_i\}$ para $i \geq 1$. De estas definiciones tenemos los siguientes resultados.

2.1 Proposición i) Si $\chi_A(a) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ entonces $\chi_A(p_n a) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n + 1, \ldots)$ y denotaremos $p_n \chi_A(a) = \chi_A(p_n a)$ (aquí convenimos $\infty + 1 = \infty$)

ii) A es divisible si y sólo si $h_p(a) = \infty$ para todo primo p y para toda $a \in A$.

iii) Si $B \subset A$ entonces $\chi_B(b) \leq \chi_A(b)$ para toda $b \in B$
iv) $B \subset A$, B es puro en A si y sólo si $\chi_A(b) = \chi_B(b)$ para toda $b \in B$
v) $\chi_A(a+b) \geq \inf \{\chi_A(a), \chi_A(b)\}$ para toda $a, b \in A$
vi) Si $C = A \oplus B$ y $a \in A$, $b \in B$ entonces
$\chi_C(a+b) = \inf \{\chi_A(a), \chi_B(b)\}$
vii) Si $f: A \longrightarrow B$ es un homomorfismo entonces, para todo $a \in A$ $\chi_A(a) \leq \chi_B(f(a))$
viii) Si a, b son dependientes (es decir $na = mb$ para algunos enteros n, m distintos de cero) entonces $\chi_A(a)$, $\chi_A(b)$ difieren en un número finito de coordenadas. Más aún, donde difieren ambas son finitas.

Decimos que dos características $\chi = (\alpha_i)$ y $\chi' = (\beta_i)$ son <u>equivalentes</u> si y sólo si $\sum |\alpha_i - \beta_i| < \infty$ (entendemos $\infty - \infty = 0$) tenemos una relación de equivalencia en el conjunto de las características a cuyas clases de equivalencia les llamaremos <u>tipos</u>. Si la característica de un elemento $a \in A$ pertenece al tipo τ, diremos que a tiene tipo τ y escribiremos $\text{tipo}_A a = \tau$; si una característica χ pertenece al τ escribiremos $\tau = [\chi]$.

Por 2.1 viii) los elementos linealmente independientes tienen el mismo tipo; Así, en un grupo de rango 1, todo los elementos distintos de cero tienen el mismo tipo. Esto nos permite hablar del tipo de un grupo de rango 1 (será el tipo determinado por cualquier elemento distinto de cero).

Ahora clasificaremos los grupos de rango 1 por medio de sus tipos y daremos un representante de cada clase de isomorfismo. Antes de hacerlo necesitamos el siguiente lema:

2.2 **Lema** Si A es un grupo de rango 1 y $\chi \in$ tipo A entonces existe $a \in A$ tal que $\chi_A(a) = \chi$

Dem Sea $b \in A$, $b \neq 0$. Entonces $\chi = (\alpha_i)$ y $\chi_A(b) = (\beta_i)$ difieren en un número finito de coordenadas y donde difieren ambas son finitas. Aplicaremos inducción sobre el número t de coordenadas donde son distintas. Si $t=0$ no hay nada que hacer. Supongamos que $\chi = (\alpha_i)$ y $\chi_A(b) = (\beta_i)$ difieren en la coordenada i-esima correspondiente al primo $p = p_i$. Sea $b' = p^{\alpha_i}(1/p^{\beta_i} b)$. Entonces la p-altura de b' es α_i y las q-alturas con $q \neq p$ son las mismas que las de b, con lo cual χ y $\chi_A(b')$ difieren en menos de t coordenadas $\square$

2.3 **Lema** Dados A, B grupos libres de torsión, $a \in A$, $b \in B$, $a, b \neq 0$ entonces $\chi_A(a) = \chi_B(b)$ si y sólo si para cada $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ la ecuación $mx = na$ tiene solución en A si y sólo si la ecuación $my = nb$ tiene solución en B

Dem Por (2.1.i) tenemos que si $\chi_A(a) = \chi_B(b)$ entonces $\chi_A(na) = \chi_B(nb)$

($\Rightarrow$) Sólo demostraremos que si $mx = na$ tiene solución en A entonces $my = nb$ tiene solución en B.

Demostraremos por inducción sobre el número de factores primos de m

i) Si $m = p^r$ con p un número primo si $p^r x = na$ tiene solución en A y como $\chi(na) = \chi(nb)$ tenemos que $p^r y = nb$ tiene solución en B.

ii) Sea $m = p_1^{r_1} \ldots p_s^{r_s}$ con $(p_i, p_j) = 1$ si $i \neq j$ y supongamos que $mx = na$ tiene solución en A, entonces $p_1^{r_1} x = na$ y

$p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s} x = na$ tiene solución en A ; de donde $p_1^{r_1} y = nb$ y $p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s} y = nb$ tiene solución en B ; sean b_1, b_2 tales soluciones, entonces $p_1^{r_1} b_1 = p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s} b_2 = nb$ como $(p_i, p_j) = 1$ si $i \neq j$ entonces $p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ divide a b_1 entonces $p_1^{r_1} b_1 = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s} b_1' = nb$ con lo cual la ecuasión $my = nb$ tiene solución en B

($\Leftarrow$) Sea p un entero primo. Si $h_p(a) < \infty$ tomando $m = p^{h_p(a)}$ y $n = 1$ tenemos que $mx = a$ tiene solución en A y por hipótesis $my = b$ tiene solucion en B de donde $h_p(b) \geq h_p(a)$. Por simetría tenemos la otra desigualdad.

Si $h_p^A(a) = \infty$ entonces $p^t x = a$ tiene siempre solución de donde $p^t y = b$ tiene solución entonces $h_p(b) \geq t$ para toda $t \geq 1$ entonces $h_p(b) = \infty$. En consecuencia $\chi_A(a) = \chi_B(b)$ $\sharp$

2.4 __Teorema__ Sea A, B dos grupos de rango 1. Entonces $A \cong B$ si y sólo si tipo A = tipo B

Dem ($\Rightarrow$) Es inmediato de 2.1 ii)

($\Leftarrow$) Por 2.2 podemos tomar $a \in A$, $b \in B$ no nulos tales que $\chi_A(a) = \chi_B(b)$. Para cualquier $a' \in A$ $a' \neq 0$ existen $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tales que $ma' = na$. Como $\chi_A(a) = \chi_B(b)$ la ecuasión $my = nb$ tiene solución única en B (2.3). Sea b' tal solucion definimos $f: A \longrightarrow B$ mediante $a' \longmapsto b'$. Es fácil verificar que f es un isomorfismo $\sharp$

La siguiente proposición nos da un representante de cada clase de isomorfismo para grupos libres de torsión de rango 1.

2.5 __Proposicion__ toda sucesión en $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ es la característica de algún elemento en algún grupo libre de torsión de rango 1

Dem Sea (α_i) una sucesión en $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ y sea R el subgrupo de $\mathbb{Q}$ generado por:

$$R = \langle \{ p_n^{-\beta_n} \mid \beta_n \leq \alpha_n \} \rangle$$ donde $p_n^{-\infty}$ lo entenderemos como $\{ p_n^{k} \mid k \geq 1 \}$ entonces $\chi_R(1) = (\alpha_i)$ □

2.6 <u>Corolario</u> Existen exactamente $2^{\aleph_0}$ grupos libre de torsión no isomorfos

2.7 <u>Ejemplos</u>

i) tipo $\mathbb{Z} = [(0,0,0,,\ldots)]$

ii) tipo $\mathbb{Q} = [(\infty,\infty,\infty,\ldots\ldots)]$

iii) El localizado de $\mathbb{Z}$ en p, $\mathbb{Z}(p) = \{a/b \in \mathbb{Q} \mid (b,p)=1\}$

tipo $\mathbb{Z}(p) = [(\infty,\infty \ldots,\underset{p}{0},\infty,\ldots)]$

iv) tipo $\langle \{ 1/p^n \mid n \in \mathbb{N} \} \rangle = [(0,0,\ldots,\infty,\ldots)]$

§. 3 Sumas directas de Grupos de Rango 1

En este capítulo daremos una clasificación de los grupos que son sumas directas finitas de grupos de rango 1. A tales grupos les llamaremos grupos completamente escindibles (CE). Como ejemplos de tales grupos están los grupos libres y divisibles (ver [3])

Veremos que para cualquier descomposición de un grupo CE como suma directa de grupos de rango 1, el número de sumandos de cada tipo es independiente de la descomposición y está determinado por el grupo. Antes de ver este resultado daremos algunas definiciones.

3.1 Definición Dados τ, τ' tipos decimos que τ es menor o igual a τ', $\tau \leq \tau'$, si y sólo si existen características χ, χ' tales que $\chi \in \tau$, $\chi' \in \tau'$ y $\chi \leq \chi'$

3.2 Proposición i) La relación '$\leq$' induce un orden parcial en el conjunto de tipos.

ii) Si $\chi \in \tau$, $\chi' \in \tau'$ entonces $\inf\{\tau, \tau'\} = [\inf\{\chi, \chi'\}]$

Dem. i) Demostraremos solamente antisimetría. Sean τ, τ' tipos tales que $\tau \leq \tau'$ y $\tau' \leq \tau$ y sean $\alpha, \alpha' \in \tau$, $\beta, \beta' \in \tau'$ tales que $\alpha \leq \beta$ y $\beta' \leq \alpha'$. Existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m\beta = n\beta'$ de donde $m\alpha \leq m\beta = n\beta' \leq n\alpha'$; como $[\alpha] = [\alpha']$ entonces existe $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $km\beta = n\alpha'$ de donde $[\beta] = [\alpha]$ y $\tau = \tau'$

ii) Claramente $[\inf\{\chi, \chi'\}] \leq \tau, \tau'$. Sea μ cualquier tipo tal que $\mu \leq \tau, \tau'$. Sean $\bar{\chi} \in \mu$ y $\alpha \in \tau$ con $\bar{\chi} \leq \alpha$ y $\bar{\bar{\chi}} \in \mu$, $\beta \in \tau'$ tales que $\bar{\bar{\chi}} \leq \beta$. Entonces existen $m, n, r, s, u, v \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tales que $m\alpha = n\chi$, $r\beta = s\chi'$ $u\bar{\chi} = v\bar{\bar{\chi}}$; de donde $m\bar{\chi} \leq m\alpha = mn\chi$ y $r\bar{\bar{\chi}} \leq r\beta = rs\chi'$; de donde $urm\bar{\chi} \leq urmn\chi$ y $rmv\bar{\bar{\chi}} \leq mvrs\chi'$, además

$urm\bar{\chi} = vrm\bar{\bar{\chi}}$ y como $[urmn\chi] = [\chi]$ y $[mvrs\chi'] = [\chi']$,
$[\inf\{urmn\chi, mvrs\chi'\}] = [\inf\{\chi, \chi'\}] \geq [urm\bar{\chi}] = u$
con lo cual tenemos lo que queríamos $\square$

3.3 <u>Proposición</u> Sean A, B grupos libres de torsión

i) Si $B \subset A$ entonces $b \in B$ $\text{tipo}_B(b) \leq \text{tipo}_A(b)$

ii) Si $a, b \in A$ entonces $\text{tipo}_A(a+b) \geq \inf\{\text{tipo}_A(a), \text{tipo}_A(b)\}$

iii) Si $C = A \oplus B$ $a \in A$, $b \in B$ entonces $\text{tipo}_C(a+b) \geq \inf\{\text{tipo}_A(a), \text{tipo}_B(b)\}$

<u>Dem</u> Inmediata de 2.1 $\square$

Para un grupo A tenemos:

3.4 <u>Definición</u> $\text{conjtipos}\, A = \{\text{tipo}_A a \mid a \neq 0, a \in A\}$.

Dado un tipo τ le asociamos a A los siguientes subgrupos $A(\tau) = \{a \in A \mid \text{tipo}_A a \geq \tau\}$

$A^*(\tau) = \langle\{a \in A \mid \text{tipo}_A a > \tau\}\rangle$.

<u>Nota</u>: El conjunto $\{a \in A \mid \text{tipo}_A a > \tau\}$ en general no es un subgrupo de A, mientras que $A(\tau)$ sí lo es debido a 3.3.

Las siguientes propiedades son fáciles de verificar usando 3.2 y observamos que cuando $A^*(\tau)$ aparece, basta verificar la propiedad correspondiente sólo para los generadores.

3.5 <u>Proposición</u> i) $A^*(\tau) \subseteq A(\tau) \subseteq A$ y $A(\tau)$ es puro en A

ii) Si $B \subseteq A$ entonces $B(\tau) \subseteq A(\tau)$ y $B^*(\tau) \subseteq A^*(\tau)$

iii) Si $f: A \longrightarrow B$ es un morfismo entonces $f(A(\tau)) \subset B(\tau)$ y $f(A^*(\tau)) \subset B^*(\tau)$.

En particular $A(\tau)$ y $A^*(\tau)$ son subgrupos <u>totalmente invariantes</u> de A es decir, si f es un un endomorfismo de A entonces $f(A(\tau)) \subset A(\tau)$ y $f(A^*(\tau)) \subset A^*(\tau)$.

iv) Si B es puro en A entonces $B(\tau) = B \cap A(\tau)$

v) Si $\tau, \sigma \in$ Conjtipos A entonces $A(\tau) \subset A(\sigma)$ si y sólo si $\tau \geq \sigma$

vi) $(A \oplus B)(\tau) = A(\tau) \oplus B(\tau)$ y $(A \oplus B)^*(\tau) = A^*(\tau) \oplus B^*(\tau)$ $\square$

El siguiente teorema clasifica a los grupos C.E.

3.6 Teorema. Sea A un grupo C.E y τ un tipo. En cualquier descomposición de A como suma directa de grupos de rango 1 el número de sumandos de tipo τ es el mismo.

Dem: Sea $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$ donde A_i es de rango 1 y tipo $A_i = \tau_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Dado un tipo τ tenemos:

$A(\tau) = A_1(\tau) \oplus \ldots \oplus A_n(\tau)$ y $A^*(\tau) = A_1^*(\tau) \oplus \ldots \oplus A_n^*(\tau)$

Ademas :

Si $\tau_i = \tau$ entonces $A_i(\tau_i) = A_i$ y $A_i^*(\tau) = 0$

si $\tau_i > \tau$ entonces $A_i = A_i(\tau) = A_i^*(\tau)$

Si τ_i, τ son incomparables tenemos que $A_i(\tau) = A_i^*(\tau) = 0$

Sea $A_\tau = A(\tau)/A^*(\tau)$. Entonces $r(A_\tau) = \sum r(A_i(\tau)/A_i^*(\tau))$

Así, el rango de A_τ es precisamente el numero de sumandos A_i de tipo τ. Como A_τ no depende de la descomposición de A como suma directa de grupos de rango 1, dicho número $r(A_\tau)$ también es independiente de la descomposición de A $\square$

§ 4 Clasificación de Kurosh-Malcev-Derry.

En esta sección estudiaremos una clasificación de los grupos libres de torsión debida a Kurosh-Malcev-Derry. Tal clasificación consiste en asociar a cada grupo una sucesión de matrices, sobre el conjunto de tales sucesiones definimos una relación de equivalencia, y en el teorema de clasificación veremos que dos grupos son isomorfos si y sólo si las clases de equivalencia de sus respectivas sucesiones de matrices coinciden. Recordaremos antes algunos detalles de la construcción del anillo de los enteros p-ádicos y de su campo de cocientes.

Sea $(G,+)$ un grupo abeliano arbitrario. Dado un primo p, la <u>topología p-ádica</u> en G tiene una base de vecindades de 0 a $\mathcal{B} = \{ p^i G \mid i \in \mathbb{N} \}$. Es facil ver que esto hace a G un grupo topológico (es decir $+ : G \times G \longrightarrow G$ y $- G \longrightarrow G$ dadas por $(a,b) \xmapsto{+} a+b$, y $a \xmapsto{-} -a$ son continuas). Una sucesión $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ en un grupo G con la topología p-ádica decimos que es limpia si $a_{i+1} - a_i \in p^i G$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Si $j \geq i$ tenemos que $p^j G \subset p^i G$ por lo cual toda sucesión limpia es de Cauchy. Si una sucesión limpia $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge a a entonces <u>converge limpiamente</u>, es decir $a_i - a \in p^i G$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Recordemos que un grupo topológico es completo si y sólo si es Hausdorff y toda sucesión de Cauchy converge; y que dado un grupo topológico Hausdorff existe un único (salvo isomorfismo) grupo topológico completo, $\hat{G}$, que contiene a un subgrupo denso isomorfo a G. La construcción en G es como sigue:

Sea $C = \{ (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \prod_{\mathbb{N}} G \mid \{a_i\}_i \text{ es de Cauchy} \}$ y

$$E = \{ (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in C \mid \{a_i\}_i \text{ converge a } 0 \}. \text{ Sea } \hat{G} = C/E$$

En la construcción del completado de un grupo $\hat{G}$ basta tomar sucesiones limpias, ya que en toda sucesión de Cauchy $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ quitando lo superfluo y reordenando de manera adecuada tenemos una ~~subsu~~ sucesión

$\{a_i'\} \subset \{a_i\}$ tal que $\{a_i'\}$ es limpia y $(a_i') + E = (a_i) + E$

Considerando ahora el caso particular $G = \mathbb{Z}_{(p)}$ (el localizado de $\mathbb{Z}$ en p) definimos a J_p como el completado de $\mathbb{Z}_{(p)}$. A cada elemento $\pi \in J_p$ podemos pensarlo como una serie $\pi = s_0 + p_1 s_1 + \dots + p_n s_n$, con $s_i = 0, 1, \dots p-1$. para toda $i \in \mathbb{N}$, construida de la siguiente manera:

Sea $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión limpia que converge a π ($\lim a_i = \pi$); entonces para toda $i \geq 1$, $a_i - a_1 \in p\mathbb{Z}_{(p)}$ con lo cual $a_1, a_2 \overset{i \geq 1}{\dots}$ pertecen a la misma clase de equivalencia de $\mathbb{Z}_{(p)} / p\mathbb{Z}_{(p)} \cong \mathbb{Z}_p$; tomamos un representante de esta clase de equivalencia $s_0 \in \{0, \dots p-1\}$. Para $i \geq 2$ $a_i - a_2 \in p^2 \mathbb{Z}_{(p)}$ por lo cual a partir de $i=2$ todas las $a_i - s_0$ están en la misma clase de equivalencia de $p\mathbb{Z}_{(p)} / p^2 \mathbb{Z}_{(p)} \cong \mathbb{Z}(p)$; otra vez tomamos un representante ps_1 con $s_1 \in \{0, \dots, p-1\}$. Procediendo de esta manera asignamos a $\pi \in J_p$ de manera única la serie $s_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots p_n s^n \dots$.

Observemos que dadas $s_i \in \{0, \dots, p-1\}$ la sucesión de sumas parciales $b_n = s_0 + s_1 p + \dots + s_n p^n$ converge a π. Además π es unidad en J_p si y sólo si $s_0 \neq 0$; J_p tiene la cardinalidad del continuo.

Escribiremos $J_p = \{\sum_{i=0}^{\infty} s_i p^i \mid s_i \in \{0, \dots, p-1\}\}$ y claramente $J_p = \{up^k \mid u$ es unidad en J_p y $k \in \mathbb{N}\}$. En la siguiente proposición veremos cómo se relaciona J_p con $\mathbb{Z}_{(p)}$ y con $\mathbb{Q}$

4.1 <u>Proposición</u> Para todo número primo p tenemos que:

i) $\mathbb{Z}_{(p)}$ es puro en J_p

ii) $J_p \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{(p)}$

<u>Dem</u> i) Como $\mathbb{Z}_{(p)}$ es q-divisibles para toda $q \neq p$ basta probar pureza por potencias de p. Sea $\pi \in J_p$ y supongamos que $p^n \pi = r/s \in \mathbb{Z}_{(p)}$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, $(s,p) = 1$ y $r, s > 0$; entonces $sp^n \pi = r$ y la expresión p-ádica de $s\pi$ es finita.

y como la de s también lo es entonces también la de π, por tanto $\pi \in \mathbb{Z}$ (más aun $\pi > 0$).

ii) Solo demostraremos "$\subset$". Sea $\pi = r/s \in J_p \cap \mathbb{Q}$ con $(r,s)=1$; queremos ver que p y s son primos relativos. Supongamos que no, mas aun supongamos $s = pt$ entonces $r = pt\pi \in pJ_p \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$, de donde p divide a (r,s) que es una contradicción con lo cual $(s,p)=1$. □

Para tener el campo de cocientes de J_p, basta "añadir" los inversos de las potencias de p. De manera mas formal, definimos $\mathbb{K}_p = \mathbb{Q} \otimes J_p$ como el campo de cosientes de anillo de los enteros p-adicos. En la siguiente proposición veremos una manera de representar a $\mathbb{K}_p$

4.2 <u>Proposicion</u> Sea p un número primo entonces

$$\mathbb{K}_p = \left\{ \sum_{i=-n}^{\infty} s_i p^i \;\middle|\; 0 \leq s_i < p \;,\; n \geq 0 \right\}.$$

Dem Sea $\pi \in J_p \setminus \{0\}$. Entonces $\pi = p^n u$ donde $n \geq 0$ y u es unidad de J_p. Tenemos que $u^{-1} \in J_p$, por tanto $u^{-1} = s_0 + s_1 p + \dots$ y así $\pi^{-1} = (p^n u) = p^{-n} u^{-1} = s_0/p^n + s_1/p^{n-1} + \dots = \sum_{i=-n}^{\infty} s_i p^i$ □

Antes de ver el siguiente teorema necesitaremos de algunos lemas y propiedades de J_p

4.3 <u>Lema</u> J_p es un dominio de ideales principales.

<u>Dem</u> Sea $I \subset J_p$, $I \neq 0$. Sea $n_0 = \min \{ k \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=k}^{\infty} s_i p^i \in I \}$ Afirmamos que $I = \langle p^{n_0} \rangle$. Sea $a \in I$ entonces $a = \sum_{i=k}^{\infty} s_i p^i$ con $k \geq n_0$ y $a = p^{n_0} a'$ donde $a' \in J_p$ y $a' = \sum_{i=k}^{\infty} s_i p^{i-n_0}$

con lo que $I \subset \langle p^{n_0} \rangle$, claramente $p^{n_0} \in I$ □

Para no desviar nuestra atención enunciaremos sin demostración el siguiente lema ([Ver 6])

4.4 <u>Lema</u> D un dominio de ideales principales. M un D-módulo.

i) M es D-divisible si y sólo si M es inyectivo
ii) $M = d(M) \oplus N$ con $d(M)$ la parte divisible de M y N reducido (es decir N no tiene subgrupos distintos de cero divisibles)

iii) M es libre si y solo si M es proyectivo.

Para un dominio D y para cada M un D-módulo podemos definir el D-rango de M de manera análoga a como lo hicimos en el primer capítulo

4.5 <u>Lema</u> Si D un dominio y M un D-módulo divisible entonces $M \cong \oplus \bar{D}$ donde $\bar{D}$ es el campo de cocientes de D.

Dem Si M es D-divisible, a M se le puede dar una estructura de $\bar{D}$ espacio vectorial de donde $M \cong \oplus \bar{D}$ □

Con el siguiente teorema y lo anterior tendremos todo lo necesario para los invariantes de Kurosh - Malcev - Derry

4.6 <u>Teorema</u> Si B es un J_p-módulo libre de torsión de rango finito entonces $B = D \oplus F$ con D J_p-divisible y F J_p-libre.

Dem. Podemos suponer, por lema 4.5, que B es reducido. Proce
deremos por inducción sobre el rango de B
i) Si B es un J_p-módulo de rango 1 entonces $B \cong J_p$. Es fácil
ver que B es isomorfo como J_p-módulo a un B' tal que
$J_p \subset B' \subset K_p$. Sea $k_0 = \sup\{k \in \mathbb{N} \mid p^{-k} \in B'\}$ si $k_0 = \infty$
entonces $B' = K_p$ y B' sería divisible lo cual es imposible de
donde $k_0 \lneq \infty$. Dado $b \in B'$ existe $t \geq 1$ $t \leq k_0$ tal que $b = p^{-t}a$ y
unidad en J_p tal que $b \in \langle p^{-k_0} \rangle$ ent $B' = \langle p^{-k_0} \rangle$ de
donde $B \cong J_p$.
ii) Supongamos que el resultado es válido para J_p-módulos de
rango r y sea B de rango $r+1$. Sea C un submódulo puro de B
de rango r. Entonces C es un submódulo libre sobre J_p y
B/C es de rango 1. Afirmamos que B/C es J_p libre. Por i)
basta ver que B/C no es divisible. Supongamos que sí lo es y
sea $b \in B$, $b \notin C$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea b_n tal que $b + C = p^n(b_n + C)$
Ahora, la topología p-ádica en B induce la topología p-ádica en C,
ya que C es puro en B, Además $C \cong J_p^r$ como grupos y es fácil
ver que la topología producto en J_p^r coincide con la p-ádica. Así,
C es completo y por tanto la sucesión de Cauchy en C
$\{b - p^n b_n\}_n$, tiene su límite en C. Como $b = \lim (b - p_n b^n)$
entonces $b \in C$. Esto es una contradicción, y de aquí que
$B = C \oplus B/C \cong J_p^{r+1}$ ∎

Nota: Este teorema es válido en un contexto mas general:
para dominios de valuación discreta completos (J_p es
un ejemplo de este tipo de anillos) (Ver [3])

La clasificación de Kurosh-Malcev-Derry utiliza fuertemente
este teorema: para un grupo libre de torsión A se considera
$A_p^* = J_p \otimes A$ que es un J_p-módulo (y por tanto, es suma de
un J_p-módulo divisible y un J_p-libre) también trabajaremos

con los siguientes grupos asociados con A:
$A_{(p)} = \mathbb{Z}_{(p)} \otimes A$; $E = \mathbb{Q} \otimes A$ y $E_p = \mathbb{K}_p \otimes A$

4.7 Lema $A_p^* \cap E = A_{(p)}$

Dem Sólo tiene dificultad la contensión "$\subset$". Sea $x \in A_p^* \cap E$. Entonces $x = \pi_1 \otimes a_1 + \ldots + \pi_n \otimes a_n$, con $\pi_1, \ldots, \pi_n \in J_p$ y $a_i \in A$. Podemos suponer que $a_1, \ldots, a_k$ son linealmente independientes y $a_{k+1}, \ldots, a_n$ son dependientes de ellas. Así, $r_i a_i = r_{1i} a_1 + \ldots + r_{ki} a_k$ para $i \geq k+1$. En consecuencia $\pi_i \otimes r_i a_i = r_{1i} \pi_1 \otimes a_1 + \ldots + r_{ki} \pi_k \otimes a_k$ y conmutando y multiplicando por una r adecuada tenemos que:
$rx = \pi_1' \otimes a_1 + \ldots + \pi_k' \otimes a_k$. Completando $\{a_1, \ldots, a_k\}$ a un conjunto máximo linealmente independiente $\{a_1 \ldots a_k \ldots a_t\}$ de A. Entonces $\{a_1, \ldots, a_t\}$ es base del $\mathbb{Q}$ espacio vectorial E; de aquí que si escribimos $x = u_1 \otimes a_1 + \ldots + u_t \otimes a_t$, con $u_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \ldots t$ entonces $rx = ru_1 \otimes a_1 + \ldots + ru_t \otimes a_t$ y por unicidad de la expresión, se tiene que $ru_i = \pi_i' \in \mathbb{Q} \cap J_p = \mathbb{Z}_{(p)}$, y por consecuencia tenemos que $rx \in A_{(p)}$ pero $A_{(p)}$ es puro en $A_{(p)}^*$ ($\mathbb{Z}_{(p)}$ es puro en J_p y tensorear respeta pureza), por tanto $x \in A_{(p)}$ □

4.8 Lema $A = \bigcap_p A_{(p)}$

Dem Sea $a/s \in \bigcap A_{(p)}$. Cancelando si es necesario podemos suponer que todo primo que divide a s no divide a 'a'. Demostraremos que $s = \pm 1$. Supongamos que no y sea p tal que p divide a s. Como $a/s \in A_{(p)}$ entonces $a/s = b/t$ con $(p, t) = 1$, $b \in A$. Entonces $ta = sb = ps'b$ ($s' \in \mathbb{Z}$) con lo cual p divide a a, lo cual no es posible; así que $s = \pm 1$ □

Los invariantes de Kurosh-Malcev-Derry

Sea A un grupo libre de torsión de rango $r<\infty$, $\{a_1,\ldots,a_r\}$ un conjunto máximo linealmente independiente de A y p un número primo.

Por el teorema 4.6, $A_p^* = D \oplus F$ con D J_p-divisible y F-J_p-libre escribimos.

$$A_p^* = \left(\bigoplus_{i=1}^{m_p} K_p v_i\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{n_p} J_p w_j\right) \;;\; m_p + n_p = r$$

con $v_i, w_j \in A_p^*$ para $i=1,\ldots,m_p$, $j=1,\ldots,n_p$. La elección de v_i, w_i depende de p, pero mientras no haya confusión no indicaremos esto.

Para $k=1,\ldots,r$ $a_k \in A_p^*$ por tanto tenemos que $a_k = \sum_i^{m_p} \alpha_{ki} v_i + \sum_j^{n_p} \beta_{kj} w_j$ con $\alpha_{ki} \in K_p$ y $\beta_{kj} \in J_p$ consideremos la siguiente matriz:

$$M_p = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m_p} & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n_p} \\ \vdots & & & & & \\ \alpha_{r1} & \cdots & \alpha_{rm_p} & \beta_{r1} & \cdots & \beta_{rn_p} \end{bmatrix}$$

Observaciones:

i) las últimas n_p columnas tienen sus coeficientes en J_p

ii) M_p es invertible sobre $\mathbb{K}_p$, ya que es una matriz de cambio de base de E_p

Lo anterior lo hacemos para cada primo p, de manera tal que a cada grupo A libre de torsión le asociamos una sucesión de matrices $\{M_p\}_p$. Para cada número primo la matriz M_p depende de la elección de $\{a_1,\ldots,a_r\}$ y de $\{v_1,\ldots,v_{m_p}, w_1,\ldots,w_{n_p}\}$ (notemos que la pareja (m_p,n_p) queda completamente determinada por p). Veamos la relación que existe entre las matrices al cambiar estos conjuntos. Sean

$$a' = \begin{pmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_r' \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_{m_p}' \\ w_1' \\ \vdots \\ w_{n_p}' \end{pmatrix} \quad y \quad M_p' \text{ tal que } M_p' \begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix} = a'$$

Como a, a' son bases de E existe $N \in M_r(\mathbb{Q})$ tal que $Na = a'$ (N es independiente de p). Como $\binom{v}{w}$ y $\binom{v'}{w'}$ son bases del $\mathbb{K}_p$ - espacio vectorial E_p^*, existe $V_p \in M_r(\mathbb{K}_p)$ de manera que $V_p \binom{v}{w} = \binom{v'}{w'}$; más aún la matriz ~~[illegible]~~ V_p determina un automorfismo de $A_p^* = (\oplus \mathbb{K}_p v_i) \oplus (\oplus J_p w_j) = (\oplus \mathbb{K}_p v_i') \oplus (\oplus J_p w_j')$ de aquí que

$$V_p = \begin{pmatrix} R & S \\ 0 & T \end{pmatrix} \quad \text{donde}$$

$R \in M_{m_p}(\mathbb{K}_p)$ invertible;
$S \in M_{m_p \times n_p}(\mathbb{K}_p)$;
$T \in M_{n_p}(J_p)$ invertible;

Sea $\Gamma(m_p, n_p)$ el conjunto de matrices como V_p. Es claro que $\Gamma(m_p, n_p)$ es un grupo bajo la multiplicación de matrices.

Tomamos $\quad M_p' \binom{v'}{w'} = a' = Na = N M_p \binom{v}{w} = N M_p V_p \binom{v'}{w'}$

Entonces $\quad M_p' = N M_p V_p$. En base a lo anterior definimos una relación en $\prod_p M_p(\mathbb{K}_p)$ de la manera siguiente:

Sea $\{(m_p, n_p)\}$ una sucesión tal que $m_p, n_p \in \mathbb{N}$ y $m_p + n_p = r$ para todo primo p.

Sean $(M_p)_p$ y $(M_p')_p$ en $\prod_p M_r(\mathbb{K}_p)$. Decimos que $(M_p)_p$ <u>es equivalente a</u> $(M_p')_p$ <u>según</u> $\{(m_p, n_p)\}$ si existen: $N \in M_r(\mathbb{Q})$, N invertible y $(V_p)_p \in \prod_p \Gamma_p(m_p, n_p)$ de tal forma que $M_p' = N M_p V_p$ para todo p.

Observaciones
i) La definición depende de la sucesión $\{(m_p, n_p)\}_p$
ii) Si $M_p' = N M_p V_p$, puede ser que M_p tenga sus últimas n_p columnas en J_p y M_p' no
iii) La relación es de equivalencia.

De esta manera, a cada grupo A le asociamos una clase de equivalencia con respecto a la sucesión $\{(m_p, n_p)\}$. Escribimos:

$$A \longmapsto [(M_p)_p] \quad , \{(m_p, n_p)\}_p$$

Con el siguiente teorema veremos que este es un sistema completo de invariantes para grupos libres de torsión de rango finito.

4.9 <u>Teorema</u> Supongamos que

$$A \longrightarrow [(M_p)_p] \quad , \{(m_p, n_p)\}_p$$

$$A' \longrightarrow [(M'_p)_p] \quad , \{(m'_p, n'_p)\}_p$$

Entonces $A \cong A'$ si y sólo si $m_p = m'_p$, $n_p = n'_p$ y las sucesiones $(M_p)_p$ y $(M'_p)_p$ son equivalentes según $\{(m_p, n_p)\}_p$

Dem Basta probar la suficiencia

Sean $a = \{a_1, \dots, a_r\}$ y $a' = \{a'_1, \dots, a'_r\}$ conjuntos maximales linealmente independientes de A y A' respectivamente. Sean $\binom{v}{w}$ y $\binom{v'}{w'}$ como en la definición de los invariantes. Cambiando $\binom{v'}{w'}$ si es necesario podemos considerar sólo el caso $M_p = M'_p$ para todo p. Sea $f: E \longrightarrow E'$ (E, E' como en la definición de los invariantes) el $\mathbb{Q}$ isomorfismo tal que $f(a_i) = a'_i$. Extendemos f a un $\mathbb{K}_p$-isomorfismo $f_p: E^*_p \longmapsto E^{*\prime}_p$ entonces como $\binom{v}{w} = M_p^{-1}(a)$ y $\binom{v'}{w'} = M'_p(a')$ tenemos que $f_p(v_i) = v'_i$ y $f(w_j) = w'_j$, de donde f_p restringido a A^*_p es un isomorfismo de A^*_p en $A^{*\prime}_p$, y por ser f_p una extensión de f, tenemos que $f_p(E \cap A^*_p) = E' \cap A^{*\prime}_p$, es decir $f_p(A_{(p)}) = A'_{(p)}$. Así $\bigcap_p f_p : \bigcap A_p \longrightarrow \bigcap A'_p$ está bien definida y $\bigcap_p f_p(\bigcap_p A_{(p)}) = \bigcap_p A'_{(p)}$; es decir f nos determina un isomorfismo de A en A' $\square$

En el siguiente teorema veremos cuales son las sucesiones de matrices que corresponden a grupos libres de torsión

4.10 Teorema La pareja $([L(M_p)_p], \{(m_p, n_p)\})$ determina un grupo A si y sólo si $(M_p)_p$ es equivalente según $\{(m_p, n_p)\}$ a $(\bar{M}_p)$ donde $\bar{M}_p$ tiene sus últimas n_p columnas en J_p para todo p

Dem Basta probar la suficiencia. Podemos suponer que M_p tiene sus últimas n_p columnas en J_p. Sea $\bar{E}$ un $\mathbb{Q}$ espacio vectorial de dimensión r y sea $\{a_1, \dots, a_r\}$ una base de $\bar{E}$. Para cada p definimos $\bar{E}_p^* = \bar{E} \otimes \mathbb{K}_p$ y $M_p^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ con $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_{m_p} \end{pmatrix}$ y $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_{n_p} \end{pmatrix}$ sean $\bar{A}_p^*$ y $\bar{A}_{(p)}$ definidas como:

$$\bar{A}_p^* = \left(\bigoplus_{i=1}^{m_p} v_i \mathbb{K}_p\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{n_p} w_j J_p\right), \quad \bar{A}_{(p)} = \bar{E} \cap \bar{A}_p^* \subset \bar{E}_p^* \text{ y}$$

$A = \bigcap \bar{A}_{(p)}$. Afirmamos que A satisface las condiciones, es decir A determina la clase de equivalencia de $(M_p)_p$ según $\{(m_p, n_p)\}$. Para verificar esto basta probar que $\{a_1, \dots, a_r\} \subset A$ y que $A_p^* = \bar{A}_p^*$. Como $M_p \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}$ y M_p tiene sus últimas n_p columnas en J_p tenemos que $a_i \in \bar{A}_p^*$ para cada $i \in \{1, \dots, r\}$. Además $a_i \in \bar{E}$ con lo cual $a_i \in \bar{A}_p^* \cap \bar{E} = \bar{A}_{(p)}$ para cada p, por lo que $a_i \in A$ y $A = \bigcap \bar{A}_{(p)}$. Esto prueba que $\{a_1, \dots, a_r\}$ es linealmente independiente en A.

Antes de probar $A_p^* = \bar{A}_p^*$ veremos que $A_{(p)} = \bar{A}_{(p)}$. Sabemos que $A_{(p)} \subset E = \bar{E}$ y que $A_{(p)} \subset \bar{A}_p^*$, por tanto $A_{(p)} \subset \bar{A}_p^* \cap \bar{E}$, de donde $A_{(p)} \subset \bar{A}_{(p)}$. Sea $b \in \bar{A}_{(p)}$, $b = p^t/s\, a$ con $(p, s) = 1$, $t \in \mathbb{Z}$, $a \in A$. Si $t \geq 0$ entonces $b \in A_{(p)}$. Supongamos $t < 0$; entonces $p^t a \in \bar{A}_{(q)} \subset \bar{A}_{(q)}$ para toda q distinta de p por tanto $p^t a \in \bigcap_q \bar{A}_{(q)}$, de donde $p^t a \in A$ y así $b \in A_{(p)}$ y así tenemos que $A_{(p)} = \bar{A}_{(p)}$

Sea $c \in \overline{A_p^*}$, $c = \sum \varrho_i a_i$ con $\varrho_i \in \mathbb{K}_p$ ($\overline{A_p^*} \subset \overline{E_p^*}$). Escribimos $\varrho_i = s_i/p^t + \pi_i$ con $s_i \in \mathbb{Z}$, $\pi_i \in J_p$. Entonces $c = 1/p^t \sum s_i a_i + \sum \pi_i a_i$, de donde $c - 1/p^t \sum s_i a_i \in \overline{A_p^*}$, con lo cual $1/p^t \sum s_i a_i \in \overline{A_p^*} \cap E = \overline{A_{(p)}} = A_{(p)} \in A$, y como $\sum \pi_i a_i \in A_p^*$ entonces $c \in A_p^*$. La otra inclusión $A_p^* \subset \overline{A_p^*}$, se obtiene tensoreando por J_p la contención $A \subset \overline{A_p^*}$; así $A_p^* = A \otimes J_p \subset \overline{A_p^*} \otimes J_p = \overline{A_p^*}$ □

La clasificación de Kurosh-Malcev-Derry abarca grupos de rango finito; sin embargo en la práctica resulta más complicado verificar si dos sucesiones de matrices pertenecen ó no a la misma clase de equivalencia, que trabajar directamente con los grupos.

No obstante la clasificación tiene su importancia a nivel teórico.

A continuación veremos un ejemplo que ilustra la aplicación de esta teoría y que muestra que aun en los casos más sencillos, trabajar con los invariantes de Kurosh-Malcev-Derry resulta complicado.

4.11 <u>Ejemplo</u> Sean A, B y C subgrupos de $\mathbb{Q}$ con:

$$\chi_A(1) = (1, \infty, 1, \infty, 1, \dots)$$
$$\chi_B(1) = (0, 0, \infty, 0, \infty, \dots)$$
$$\chi_C(1) = (2, 2, 2, 2, 2, \dots)$$

Sea $G = A \oplus B \oplus C$. Para encontrar los invariantes de KMD asociados con G consideremos $G_p^* = (A \otimes J_p) \oplus (B \otimes J_p) \oplus (C \otimes J_p)$. Sean $a = (1,0,0)$, $b = (0,1,0)$, $c = (0,0,1)$; con lo cual tenemos que $\{a, b, c\}$ es máximo linealmente independiente en G. Antes de calcular G_p^* observamos que:

Si X es un grupo de rango 1 entonces $X \otimes J_p \cong \mathbb{K}_p$ si X es p-divisible y $X \cong J_p$ si $pX \neq X$.

- $p = 2$, Entonces $G_2^* = (A \otimes J_2) \oplus (B \otimes J_2) \oplus (C \otimes J_2)$ y por la última observación tenemos que $G_2^* \cong J_2 w_1 \oplus \mathbb{K}_2 v_1 \oplus J_2 w_2$, como $h_2^A(1) = 1$ y $h_2^C(1) = 2$ podemos tomar

$w_1 = a/2$, $w_2 = c/4$, $v_1 = b$, tenemos que

$$a = 0v_1 + 2w_1 + 0w_2$$
$$b = 1v_1 + 0w_1 + 0w_2$$
$$c = 0v_1 + 0w_1 + 4w_2$$

de donde $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $m_2 = 1$ $n_2 = 2$

Procediendo de manera análoga tenemos

- $p = 3$. $G_3^* = \mathbb{K}_3 \oplus J_3 \oplus J_3$ $v_1 = a$, $w_1 = b$, $w_2 = c/9$ y

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad , m_3 = 1 \ , \ n_3 = 2$$

- $p = 5$. $G_5^* = \mathbb{K}_5 \oplus J_5 \oplus J_5$ $v_1 = b$ $w_1 = a/5$, $w_2 = c/25$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \quad m_5 = 1 \ , \ n_5 = 2$$

$\square$

§ 5 Grupos Inescindibles de Rango 2

En este capítulo estudiaremos una clase de grupos libres de torsión de rango 2. Daremos condiciones necesarias y suficientes para que dos grupos de esta clase sean isomorfos.

Debido al capítulo 3 concentraremos nuestro interés a la clasificación de grupos inescindibles de rango 2. Dado un grupo A inescindible de rango 2 existe un grupo B completamente escindible B tal que $B \subseteq A$ y que rang B = rango A y A/B es un grupo de torsión por lo anterior estudiaremos a los grupos inescindibles como extensiones A de $B = B_1 \oplus B_2$ por T con T de torsión y B_i puro en A con $i = 1, 2$, más adelante precisaremos más esto. Ahora daremos ejemplos de familias de grupos inescindible de rango 2, antes necesitaremos de algunos resultados previos.

5.1 <u>Lema</u> Sea A un grupo libre de torsión de rango finito. Si B es un subgrupo de índice finito en A entonces para todo $b \in B$ tenemos que $\text{tipo}_B(b) = \text{tipo}_A(b)$

Dem Sea $k = |A/B|$. Para todo primo p y para cualquier $b \in B$ tenemos que $h_p^A(b) \geq h_p^B(b)$. Supongamos que existe $a \in A \setminus B$ y tal que $p^k a = b$. Entonces $a + B$ es un elemento orden una potencia de p en A/B, por lo que p divide a k. Así $\chi_A(b)$ y $\chi_B(b)$ sólo pueden diferir en un número finito de coordenadas (las correspondientes a divisores primos de k). Sea $k = p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}$ y sea $p = p_i$ para alguna $i \in \{1, \ldots, n\}$. Supongamos que $h_p^A(b) = \infty$ y probaremos que $h_p^B(b) = \infty$:

Como p divide a k, sea $e \geq 1$ tal que $p^e k' = k$ y $(p, k') = 1$. dada $t \geq e$ existe $a \in A$ tal que $b = p^t a$ así $k'b = p^t k' a = p^{t-e}(ka)$ pero $ka \in B$ por lo que p^{t-e} divide a $k'b$ y como $(p, k') = 1$ entonces p^{t-e} divide a b en B para cualquier $t \geq e$, por tanto $h_p^B(b) = \infty$ y $\text{tipo}_B\, b = \text{tipo}_A\, b$ como se quería □

5.2 <u>Corolario</u> Si B es de índice finito en A entonces
conjtipos A = conjtipos B □

5.3 <u>Lema</u> Sea A un grupo libre de torsión de rango 2. Si $B \subset A$ con $B = B_1 \oplus B_2$ con B_1, B_2 puros en A de rango 1 y τ_1, τ_2 son los tipos de B_1, B_2 respectivamente y son incomparables, entonces:

i) rango $A(\tau_i) = 1$

ii) $B_i = A(\tau_i)$

Dem i) Sean $b_1 \in B_1$, $b_2 \in B_2$ con b_1, b_2 no nulos por (2.1, iv), $\text{tipo}_A(b_1) = \tau_1$, $\text{tipo}_A(b_2) = \tau_2$. Si el rango de $A(\tau_1)$ fuera dos entonces existe $c \in A(\tau_1)$ tales que $\{b_1, c\}$ forman un conjunto máximo linealmente independiente en $A(\tau_1)$. Como rango$(A) = 2$ existen $r, m, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ tales que $mb_1 + nc = rb_2$ por (2.1, viii) y (3.3 ii) tenemos que $\tau_2 = \text{tipo}_A(rb_2) = \text{tipo}_A(mb_1 + nc) \geq \inf\{\text{tipo}_A mb_1, \text{tipo}_A nc\} = \tau_1$ lo cual es imposible. Por lo cual $r(A(\tau_1)) = 1$ de manera análoga $r(A(\tau_2)) = 1$

ii) $B_i \subset A(\tau_i)$ y como $A(\tau_i)$ es de rango 1 y como B_i es puro en $A(\tau_i)$ tenemos que $A(\tau_i)/B_i$ es libre de torsión y por (1.3) $A(\tau_i)/B_i$ es de torsión entonces $A(\tau_i)/B_i = 0$ y $B_i = A(\tau_i)$ $\square$

5.4 <u>Observación</u> Para un grupo libre de torsión de rango 2 las siguientes afirmaciones son equivalentes.

i) $|\text{Conjtipos } A| \geq 3$

ii) Al menos hay dos tipos incomparables en A

5.5 <u>Ejemplos de grupos A inescindibles de rango 2</u>:

Sean B_1, B_2 subgrupos de $\mathbb{Q}$ tales que $1 \in B_1, B_2$ y $\chi_{B_1}(1) = (\infty, 0, 0, \ldots)$; $\chi_{B_2}(1) = (0, \infty, 0, 0, \ldots)$; sea p un número primo con $p > 3$. Por 2.1 ii), B_1, B_2 no son p-divisibles y además sus tipos τ_1, τ_2, respectivamente, son incomparables. Sea $A = \langle B, a \rangle \subset Q^2$ donde $B = B_1 \oplus B_2$, $a = \frac{b_1 + b_2}{p}$ con $b_1 = (1,0)$ $b_2 = (0,1) \in B$. Claramente $A/B \cong \mathbb{Z}_p$ y rango A = rango B.

Afirmamos que A es inescindible. Por 5.1 tenemos que conj tipos A = conj tipos $B = \{ \tau_1, \tau_2, \inf\{\tau_1, \tau_2\} \}$. Si A se descompusiera como suma directa de dos grupos no triviales entonces $A = A(\tau_1) \oplus A(\tau_2)$. Afirmamos que B_1 es puro en A, sea $a \in A$ y $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tales que $ma \in B_1$, escribimos $a = b_1' + b_2' + r\frac{(b_1 + b_2)}{p}$ con $b_i' \in B_i$ y $(r,p) = 1$ ó $r = 0$. Como $ma \in B_1$ tenemos que $pb_2' + rb_2 = 0$ es decir $pb_2' = -rb_2$ lo cual implica que p divide a 1 en B_2 lo cual es imposible ya que $h_p^{B_2}(1) = 0$ entonces $r = 0$ y $b_2' = 0$ de donde $a \in B_1$ y B_1 es puro en A, de manera análoga B_2 es puro en A; como τ_1, τ_2 son incomparables, tenemos que $B_i = A(\tau_i)$ (ver (5.3)) para $i = 1,2$. Esto es que $A = B$ que es imposible por lo tanto A es inescindible $\square$

5.6 <u>Definición</u> Decimos que un grupo A es <u>fuertemente inescindible</u> si para cualquier suma directa $B \oplus C$ de índice finito en A se tiene que $B = 0$ ó $C = 0$.

Nuevamente daremos ejemplos de esta clase de grupos y para ello requerimos del siguiente lema:

5.7 <u>Lema</u> Si $A_1 \oplus A_2$ es de índice finito n en A y C un subgrupo totalmente invariante de A, entonces

$$nC \subset A_1 \cap C \oplus A_2 \cap C \subset C$$

Dem Sea $c \in C$ con $nc = a_1 + a_2$ con $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ consideremos la composición $A \xrightarrow{\mu_n} A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{\pi_i} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A$ donde μ_n es la multiplicación por n, π_i es la i-ésima proyección y α_i la i-ésima inclusión. Entonces para $i = 1,2$ $\alpha_i \pi_i \mu_n(c) = a_i$ pero C es un subgrupo totalmente invariante de donde $a_i \in C \cap A_i$ para $i = 1,2$ $\square$

5.8 <u>Ejemplos de grupos fuertemente inescindibles de rango 2</u> :

Sean p, B_1, B_2 y B como en el ejemplo 5.5 y sea

$$A = \left\langle B, \frac{b_1+b_2}{p^\infty} \right\rangle, \text{ donde } \frac{b_1+b_2}{p^\infty} = \left\{ \frac{b_1+b_2}{p^k} \mid k \geq 1 \right\}$$

con b_1, b_2 como en el ejemplo 5.5 . Veremos a continuación que A es fuertemente inescindible :

i) $A/B \cong \mathbb{Z}p^\infty$ ya que si $a_n = (b_1+b_2)/p^n$ para $n \geq 1$, entonces tenemos que $p(a_1+B) = B$ y $p(a_{n+1}+B) = a_n + B$

ii) B_1 y B_2 son puros en A. En efecto, sea $a \in A$ con $ma \in B_1$, $m \neq 0$. Escribimos $a = b_1' + b_2' + r(b_1+b_2)/p^k$ para alguna $k \geq 1$. $b_1' \in B_1$, $b_2' \in B_2$, $(r,p)=1$ o' $r=0$. Como $ma \in B_1$ entonces $p^k b_2' + r b_2 = 0$. Pero $h_p^{B_2}(1) = 0$ por lo que $r=0$ y $b_2' = 0$ de donde $a \in B_1$. De manera análoga se prueba que B_2 es puro en A.

iii) $B_i = A(\tau_i)$ para $i = 1, 2$ debido a (5.3)

iv) A es fuertemente inescindible. En efecto, si suponemos que no, entonces existe $A_1 \oplus A_2$ de índice finito k en A, podemo suponer que A_i es puro en A. Como $B_i = A(\tau_i)$, B_i es un subgrupo invariante de A (3.5) por lo cual tenemos que $kB_1 \subset (B_1 \cap A_1) \oplus (B_1 \cap A_2) \subset B_1$ (5.6); pero como B_1 es de rango 1, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $B_1 \cap A_2 = 0$; entonces $kB_1 \subset A_1$ y como B_1 es puro en A, tenemos que $B_1 \subset A_1$; más aún $B_1 = A_1$ y de manera análoga tenemos que $B_2 = A_2$, es decir B de índice finito en A, lo cual es imposible y por lo tanto A es fuertemente inescindible.

$\square$

<u>Observación</u> De manera análoga se pueden construir grupos fuertemente inescindibles de rango finito. (ver [L] , 2.4)

De ahora en adelante trabajaremos en $V = \mathbb{Q}x_1 \oplus \mathbb{Q}x_2$ un $\mathbb{Q}$ espacio vectorial de dimensión dos y con base x_1, x_2. <u>Fijaremos</u> un grupo B completamente escindible $B = B_1 \oplus B_2$ con $B_i = B_i' x_i$ con $B_i' \subset \mathbb{Q}$ de tipo τ_i para $i = 1, 2$, además supondremos que τ_1, τ_2

son incomparables. (Para el caso en que τ_1, τ_2 son comparables ver [5])

Puede verificarse que si un grupo A de rango 2 contiene a un subgrupo isomorfo a B, entonces existe A' subgrupo de V tal que $B \subset A'$ y cada B_i es puro en A' y $A' \cong A$.

Analizaremos entonces los grupos A tales que $B \subset A$ y B_i es puro en A. Entonces, por el lema 5.3 tenemos que $A(\tau_i) = B_i$ para $i = 1, 2$, de manera más formal trabajaremos con elementos del siguiente conjunto:

5.9 <u>Notación</u> $E(B) = \{A \leq V \mid B \subseteq A,\ B_i = A(\tau_i)\}$

Ahora para un grupo A en $E(B)$ veremos que el cociente A/B está determinado por la clase de isomorfismo de A

5.10 <u>Lemma</u> Sean A, A' subgrupos isomorfos de V que contienen a B. Si $B_i = A(\tau_i) = A'(\tau_i)$ entonces $A/B \cong A'/B$

Dem Sea $\varphi : A \longrightarrow A$ un isomorfismo; tenemos que $\varphi(B_i) = \varphi(A(\tau_i)) \subset A'(\tau_i) = B_i$, de aquí que $\varphi(B) = B$. Así, por la propiedad universal del conúcleo $\exists\, \bar{\varphi}$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi|_B"', "\|"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"', "\wr"] & A/B \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\bar{\varphi}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, hook] & A' \arrow[r] & A'/B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por el lema del 5: $\bar{\varphi}$ es un isomorfismo $\square$

Observación: En el lema anterior no basta que B_i sea puro en A, la invarianza ($B_i = A(\tau_i)$) es fundamental.

Para estudiar las clases de isomorfismos de grupos en $E(B)$, el lema anterior permite fijar un grupo T (de torsión) y limitar el estudio al siguiente subconjunto.

5.11 __Notación__ $E(B,T) = \{ A \in E(B) \mid A/B \cong T \}$

Afortunadamente las posibilidades para T son bastante restringidas

5.12 __Lema__ Si $A \in E(B)$ entonces A/B es isomorfo a un subgrupo de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

Dem Como $A \in E(B)$ entonces B_i es puro en A y por (1.2), rango $(A/B_1) = 1$, además A/B es isomorfo $A/B_1 / B/B_1$ y por (1.3), $A/B \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ $\triangleleft$

Para cualquier subgrupo T de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tenemos que $T \subset \bigoplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty}$ de donde $T \cong \bigoplus_i \mathbb{Z}_{p_i}^{k_i}$ para algunos primos p_i y $k_i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Por todo lo anterior tenemos el siguiente lema:

5.13 __Lema__ $E(B) = \dot{\bigcup}_{T \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}} E(B,T)$

__Dem__ ($\subset$) lema 5.12

($\supset$) Definición de $E(B,T)$ y la unión es ajena por 5.10

5.14 <u>Lema</u> Supongamos que $E(B,T) \neq \phi$ y p un número primo. Si T_p la componente p-primaria de T es no trivial entonces B_i no es p-divisible para $i=1,2$

Dem Sea $A \in E(B,T)$. Supongamos que $T_p \neq 0$ y B_1 p-divisible sea $a \in A \setminus B$ tal que el orden de a modulo B sea p, es decir $pa = b_1 + b_2$ con $b_i \in B_i$ para $i=1,2$. Como B_1 es p-divisible tenemos que $pa = pb_1' + b_2$, pero como B_2 es puro en A tenemos que $pa = pb_1' + pb_2'$ y de aqui $a = b_1' + b_2'$ con $b_i' \in B_i'$ $i=1,2$ lo cual es una contradiccion por lo que B_1 no es p-divisible; analogamente B_2 no es p-divisible □

5.15 <u>observaciones</u> En el lema anterior tenemos que si $T_p \neq 0$ entonces $h_p^{B_i}(1) < \infty$; esto nos permite hacer las siguientes suposiciones adicionales sobre B

i) Si T es un p-grupo entonces $h_p^{B_i}(1) = 0$ para $i=1,2$ (ya que si $h_p^{B_i}(1) < \infty$ solamente, podríamos hacer un cambio de base en V por medio de $x_i \longmapsto (1/p^{h_p^{B_i}(1)})x_i$ y así tendríamos un subgrupo isomorfo a B_i y tal que $h_p^{B_i}(1) = 0$)

ii) Si T es finito entonces $h_p^{B_i}(1) = 0$ para cualquier primo p divisor de $|T|$.

Si A un grupo inescindible tal que $|A/B| < \infty$ y $A \in E(B)$, entonces el conjunto de tipos de A tiene exactamente tres elementos τ_1, τ_2 y $\inf\{\tau_1, \tau_2\}$. Además $B = A(\tau_1) \oplus A(\tau_2)$ con τ_1, τ_2 los elementos incomparables del conjunto de tipos de A. Por otro lado, si A es un grupo fuertemente inescindible y el conjunto de tipos de A tiene al menos tres elementos entonces cualesquiera dos tipos incomparables y distintos del tipo inferior (tipo inferior $TI(A) = \inf\{\text{tipo } a \mid a \in A \ a \neq 0\}$) dan lugar a un B tal que $A \in E(B)$

Si T es un subgrupo finito de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ de orden k entonces $T \cong \mathbb{Z}_K$ y escribimos $E(B,K)$ en lugar de $E(B,\mathbb{Z}_K)$. Con una prueba análoga a la del ejemplo 5.5 se puede mostrar que los elementos de $E(B,K)$ son irrescindibles. Además veremos que para $A \in E(B,K)$ existe $a \in A$ tal que $A = \langle B, a\rangle$. Supondremos (5.13, 5.14) que $h_p^{B'}(1) = 0$ para todo divisor primo de K

Sea $U(k) = \{ r \in \mathbb{Z} \mid (r,K) = 1 \text{ y } 0 \leq r < K \}$. Podemos pensar a $U(k)$ como el grupo de unidades de $\mathbb{Z}_K$

5.16 <u>Definición</u> Dados $a, a' \in V$, decimos que a, a' están relacionados con respecto a K y a B, en símbolos $a \underset{K}{\sim} a'$, sí y sólo sí existen $b \in B$ y t primo relativo con K tales que $a' = ta + B$

Una observación inmediata es que $a \sim a'$ sí y sólo sí $\langle B, a\rangle = \langle B, a'\rangle$. Con todo lo anterior podemos enunciar el siguiente teorema que es uno de los más importantes de este capítulo.

5.17 <u>Teorema</u> Existe una relación uno a uno entre $U(K)$ y $E(B,K)$ dada por

$$r \longleftrightarrow A(r) = \langle B, a(r) \rangle$$

donde $a(r) = (x_1 + r x_2)/K$. Decimos que el generador $a(r)$ está en <u>forma normalizada</u>.

Dem Sea $A \in E(B,k)$ y sea $a \in A$ tal que $A = \langle B, a\rangle$ y $Ka = (s_1/t_1)x_1 + (s_2/t_2)x_2$ donde $s_i/t_i \in B_i$ $(s_i, t_i) = 1$ ó $t_i = 1$ si $s_i = 0$ Modificaremos el generador hasta obtener un generador normalizado $a(r)$

i) Afirmamos que $(t_i, k) = 1$ para $i = 1,2$. Por simplicidad trabajaremos con $i=1$. Supongamos que no; entonces existe p. primo y enteros t, k' tales que $k = pk'$ y $t_1 = pt_1'$, entonces $(p, s) = 1$, por lo cual $s_1 u + pv = 1$ para algunos $u, v \in \mathbb{Z}$, de donde $s_1 u/p + v = 1/p$ y $t_1 s_1 u/t_1 + v = 1/p$ es decir $1/p \in B_1'$ lo cual es una contradicción y por tanto $(t_1, k) = 1$. Análogamente $(t_2, k) = 1$.

Sea $t = t_1 t_2$ y $a' = ta = (s_1' x_1 + s_2' x_2)/K$, donde $s_1' = t_2 s_1$ y $s_2' = t_1 s_2$. Observemos que $a \sim a'$

ii) Afirmamos que $(s_i', k) = 1$ para $i = 1,2$. Por simplicidad tomaremos $i=1$. Supongamos que $(s_1', k) \neq 1$ entonces existe p primo tal que $s' = pm$ y $k = pk'$ para algunos $m, k' \in \mathbb{Z}$. Tenemos que $pk'a' = pm x_1 + s_2' x_2$, de donde p divide en A a $s_2' x_2$. Por pureza de B_2 p divide a $s_2' x_2$ en B_2 y cancelando tendríamos $k'a' \in B$ lo cual es imposible. Y por consiguiente $(s_1', k) = 1$.

Tomemos $s_1' u + kv = 1$, entonces $s_1' u \equiv 1$ módulo k, es decir $t_2 s_1 u \equiv 1$ módulo K. Sea $s_2'' = s_2' u = t_1 s_2 u$ y $a'' = ua' + vx_1$ es decir $a'' = (x_1 + s_2'' x_2)/k$.

Así $a'' \sim a' \sim a'$ con respecto a k y a B. Sea $r \in U(k)$ tal que $r \equiv s_2''$ (mod k) y sea $a(r) = (x_1 + r x_2)/K$. Entonces $a(r) \sim a$ con respecto a k y B, con lo cual $A = \langle B, a(r) \rangle$.

Recordemos que $r \equiv u t_1 s_2$ (mod k), donde u es tal que $1 \equiv u t_2 s_1$ módulo k y $r \in U(k)$ es tal que $t_2 s_1 r \equiv u t_1 s_2$ módulo k

Probaremos ahora que la asignación $E(B, k) \longrightarrow U(k)$ dada por $A(r) \longmapsto r$ está bien definida. Sea $a(r)$ y $a(s) \in A$ con $a(r) = (x_1 + r x_2)/K$ y $a(s) = (x_1 + s x_2)/K$, tenemos que $K(a(r) - a(s)) = (r-s) x_2$. Sea $d \geq 1$ tal que $k = dk'$, y $r - s = dt$; y $(k', t) = 1$; entonces $t/k' x_2 \in A$ de donde $1/k' x_2 \in A$ y por la pureza de B_2 tenemos que $1/k' \in B_2'$ pero esto es posible sólo si $k' = 1$, $k = d$ y $r = s$ con lo cual $a(r) = a(s)$.

Vamos ahora a definir la asignación inversa $\mathcal{U}(k) \longrightarrow E(B,k)$. Dado por $r \in \mathcal{U}(k)$ le asignamos $A = A(r)$ el subgrupo de V generado por B y $(x_1 + r x_2)/K = a(r)$ es decir $A = \langle B, (x_1 + r x_2)/K \rangle$. Probaremos que $A \in E(B,K)$. Claramente $A/B \cong \mathbb{Z}_K$ y $A/B = \langle a(r) + B \rangle$. Resta demostrar que (lema 5.3) B_1, B_2 son puros en A. Veremos que B_1 es puro en A: (Entonces al tomar $r' \in \mathcal{U}(K)$ tal que $r'r \equiv 1$ módulo k, vemos que $a \sim r'a \sim (r'x_1 + x_2)/K$; así un argumento similar probaría que B_2 es puro en A). Sea $a \in A$, entonces $a = b_1' + b_2' + s(x_1 + r x_2)/K$ con $b_i' \in B_i$ para $i = 1, 2$ y K' divisor de k, $(s, k') = 1$ ó $s = 0$. Supongamos que $m' \neq 0$ es tal que $ma \in B_1$; así $K'm'a = Kmb_1' + Kmb_2' + msx_1 + msrx_2 \in B_2$ y por lo tanto $Kb_2' + srx_2 = 0$; por lo cual k' divide a sr; así $k' = 1$ y $a \in B$. Como B_1 es puro en B, $a \in B_1$ por lo cual es puro en A. $\square$

OBS. En el teorema anterior la incomparabilidad de los tipos τ_1, τ_2 sólo fue utilizada para ver que $A(\tau_i) = B_i$. Si los tipos fueran comparables tendríamos una biyección entre $(\mathcal{U}(K))$ y
$\{A : B \subsetneq A \subseteq \overline{B},\ A/B \cong \mathbb{Z}_K$ y B_i puros en $A\}$

Ahora quisiéramos saber cuándo dos grupos $A(r), A(r')$ en $E(B,k)$ son isomorfos en términos de r y r'. Antes de ver esto haremos algunas observaciones cuya demostración es inmediata. Si G es un subgrupo de $\mathbb{Q}$, los automorfismos de G están dados por multiplicar por racionales u/v tales que $(u, v) = 1$ y $uG = vG = G$. Para cada $i = 1, 2$ sea $W_i = \{w \in \mathbb{Z} \mid wB_i = B_i\}$. Sea $W = \{w \in \mathbb{Z} \mid$ si p-primo div. a w ent $B_1 \oplus B_2$ es p-divisible$\}$. Observemos que si $w \in W$, existen w_1, w_2 tales que $w = w_1 w_2$ y $w_i \in W_i$ (W es el submonoide de $\mathbb{Z}$ generado por $W_1 \cup W_2$). Sea $\overline{W} = \{w + k\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_K \mid w \in W\}$. Entonces $\overline{W}$ es un subgrupo del grupo de unidades de $\mathbb{Z}_K$ ya que $1 \in W$ y $\overline{W}$ es finito y cerrado bajo multiplicación. De aquí que dado $w \in W$ existe w' con $ww' \equiv 1$ módulo K.

Como antes para $r \in \mathcal{U}(k)$ sea $a(r) = (x_1 + r x_2)/K$ y sea $A(r) = \langle B, a(r) \rangle \leq V$

El siguiente teorema da condiciones necesarias y suficientes para que dos grupos en $E(B,K)$ sean isomorfos

5.18 <u>Teorema</u> Sean $r,s \in \mathcal{U}(k)$. Consideremos $A(r) = \langle B, a(r) \rangle$ y $A(s) = \langle B, a(s) \rangle$. Entonces $A(r) \cong A(s)$ si y sólo si existe $w \in \mathcal{W}$ tal que $s \equiv rw$ módulo K

Dem Sea $f: A(r) \longmapsto A(s)$ un isomorfismo. Por el lema (5.3), (3.5 iii) tenemos que $f(B_i) = B_i$, con lo que $f|_{B_i}$ es un isomorfismo de B_i. Sean $u_i, v_i \in \mathcal{W}_i$ para $i=1,2$ tales que $(u_i, v_i) = 1$ y $f|_{B_i}$ es multiplicar por u_i/v_i, con $u_iB_i = v_iB_i = B_i$, para $i = 1,2$. sea $g: V \longrightarrow V$ la extensión $\mathbb{Q}$-lineal de f. Tenemos que $g(a(r))$ genera a $A(s)$ módulo B; pero

$$g(a(r)) = \frac{(u_1/v_1)X_1 + (u_2/v_2)rX_2}{K} \in A(s)$$

$$\text{y } g(a(r)) \sim v_1v_2\, g(a(r)) = \frac{v_2u_1X_1 + v_1u_2rX_2}{K}$$

Como $v_2u_1 \in \mathcal{W}$ existe $w' \in \mathcal{W}$ con $w'v_2u_1 \equiv 1$ módulo k. Entonces $g(a(r)) \sim \dfrac{X_1 + w'v_1u_2rX_2}{K}$. Así por la unicidad de la forma normalizada del generador, tenemos que $s \equiv w'v_1u_2r$ modulo K. Entonces $w = w'v_1u_2 \in \mathcal{W}$ tiene la propiedad deseada.

($\Leftarrow$) Supongamos $s \equiv rw \pmod{k}$, con $r,s \in \mathcal{U}(K)$ y $w \in \mathcal{W}$ sean w_1, w_2 tales que $w = w_1w_2$ con $w_i \in \mathcal{W}_i$ $i=1,2$. Sea $f: V \longrightarrow V$ la extensión lineal de la asignación

$$X_1 \longrightarrow (1/w_1\, X_1)\ ; \quad X_2 \longrightarrow w_2X_2$$

; claramente $f(B_i) = B_i$ y $f(B) = B$. Afirmamos que $f(A(r)) = A(s)$

Como $f(a(r)) = \dfrac{(1/w_1)x_1 + w_2 r x_2}{k} \sim \dfrac{x_1 + w_1 w_2 r x_2}{k} \sim a(s)$ entonces $A(s) \subseteq f(A(r))$. Por otro lado tenemos que

$$\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \cong f(A(r))/B \supset A(s)/B \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$$

y por el teorema de correspondencia, tenemos que $A(s) = f(A(r))$ y así $A(s) \cong A(r)$ $\square$

Por el teorema anterior, mientras "más divisible" sea B menos clases de isomorfismo habrá en $E(B,K)$

Hemos estudiado ya $E(B,T)$ para el caso en que T es finito. Recordemos que, en general, T es isomorfo a un subgrupo de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Como los subgrupos infinitos más "sencillos" de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, estudiaremos $E(B,\mathbb{Z}_{p^\infty})$ primero. Daremos resultados análogos a los teoremas anteriores.

Escribiremos $E(B,p^\infty)$ en lugar de $E(B,\mathbb{Z}_{p^\infty})$.

Si A es un grupo de rango 2 tal que $A \in E(B,p^\infty)$ podemos suponer que $h_p^{B_i'}(1)=0$ (5.14).

Recordemos que para $\rho \in J_p$ (el anillo de los enteros p-ádicos) existe $\{s_k\}_{k\geq 0}$ tal que $0 \leq s_i < p$ para todo $k \geq 0$ y $\rho = s_0 + s_1 p + \dots + s_n p^n + \dots$ Sea para cada $k \geq 1$ $r_k = s_0 + \dots + s_{k-1}p^{k-1}$; entonces $\{r_k\}$ es una sucesión limpia de Cauchy (Ver capítulo 3) que converge a ρ. Tenemos que $\rho - r_k \in p^k J_p$ y $r_k \in U_{(p^k)}$ para todo $k \geq 1$. Además ρ determina a las sucesiones $\{s_i\}_i$ y $\{r_k\}_k$ y viceversa. Escribiremos $\rho = \lim r_k = (r_k)$.

Sea $A \in E(B,p^\infty)$, tenemos una proyección $\pi : A \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^\infty}$ dada por el paso al cociente. Recordemos que $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \langle \bar{c}_1, \bar{c}_2 \dots \rangle$ con las relaciones $p\bar{c}_1 = 0$ y $p\bar{c}_{n+1} = c_n$; así para cada $k \geq 1$, $\langle \bar{c}_k \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^k}$ para todo $k \geq 1$. (Además es inmediato que B_i es puro en) Sea $A_k = \pi^{-1}(\langle \bar{c}_k \rangle)$ tenemos

tenemos que B_i es puro en A_K para $i=1,2$, por lo que $A_K \in E(B, p^K)$ y por el teorema 5.17 existe un único $r_K \in \mathcal{U}(p^K)$ tal que $A_K = \langle B, a(r_K)\rangle$, donde $a(r_K) = (x_1 + r_K x_2)/p^K$. Como $p\,a_{K+1} = (x_1 + r_{K+1} x_2)\, p^K$ tenemos que $r_{K+1} \equiv r_K$ (modulo p^K) por tanto la sucesión $\{r_K\}$ es limpia de Cauchy.
Sea $\rho = \lim r_K$ unidad en J_p (Escribiremos $\rho \in J_p^\bullet$)

5.19 Teorema Existe una biyección entre $J_p^\bullet$ y $E(B, p^\infty)$ dada por:

$$\rho = \lim_{K\geq 1}(r_K) \longleftrightarrow A(\rho) = \left\langle B, \frac{x_1 + r_1 x_2}{K}, \frac{x_1 + r_2 x_2}{K}, \dots \right\rangle.$$

Dem Por las observaciones previas al teorema la asignación $E(B, p^\infty) \longrightarrow J_p$ está bien definida. Sea $\rho = (r_K)_K$
Para cada $k \geq 1$, $r_K \in \mathcal{U}(p^K)$. Sea $C_K = \langle B, c_K\rangle$ donde $c_K = (x_1 + r_K x_2)/p^K$. Entonces B_i es puro en C_K. Como la sucesión $\{r_K\}$ es limpia de Cauchy tenemos que $p C_{K+1} \cap C_K$, con lo cual $C_K \subset C_{K+1}$. Sea $C = \bigcup_K C_K$ afirmamos que $C \in E(B, p^\infty)$.
Como B_1 y B_2 son puros en C_i para $i \geq 1$ entonces (1.5) B_1, B_2 son puros en C; además $B_i \subset C(\tau_i)$ y $C(\tau_i)$ es de rango 1 (τ_1, τ_2 de tipo incomparable 5.3); por lo tanto $B_i = C(\tau_i)$, $C_K/B \cong \mathbb{Z}_{p^K}$ y $p(C_{K+1}/B) \cong C_K/B$ con lo cual $C/B \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$ □

Ahora quisiéramos saber cuando dos elementos de $E(B, p^\infty)$ son isomorfos en términos de elementos de $J_p^\bullet$

5.20 Teorema Sean ρ y $\sigma \in J_p^\bullet$, $A(\rho), A(\sigma)$ elementos de $E(B, p^\infty)$ Entonces $A(\rho) \cong A(\sigma)$ si y sólo si existen ω y ω' tales que $\omega\rho = \omega'\sigma$

Dem Sea $\rho = (r_K)_K$ y $\sigma = (s_K)_K$ con $r_K, s_K \in \mathcal{U}(p^K)$

para toda $k \geq 1$.

Sean $A = A(\rho)$ y $C = A(\sigma)$; $A_k = \langle B, a_k \rangle$ y $C = \langle B, c_k \rangle$ donde $a_k = \dfrac{x_1 + r_k x_2}{k}$ y $c_k = \dfrac{x_1 + s_k x_2}{k}$ para $k \geq 1$

fijaremos $k \geq 1$

($\Longrightarrow$) Sea $f : A \longrightarrow C$ un isomorfismo. Entonces $f(B_i) = B_i$ para $i = 1, 2$, así que existen $u_i, v_i \in W_i$, $(u_i, v_i) = 1$ y tales que $f|_{B_i}$ es multiplicar por u_i / v_i. Además f induce un isomorfismo φ de A/B en C/B y como $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ tiene un único subgrupo de orden p^k, tenemos un isomorfismo $f|_{A_k} : A_k \longrightarrow C_k$. Sea $g : V \longrightarrow V$ la $\mathbb{Q}$ extensión lineal de f ; entonces $g(a(r_k))$ genera a C_k módulo B. Pero

$$g(a(r_k)) = \frac{(u_1/v_1)\, x_1 + (u_2/v_2)\, r_k x_2}{p^k} \in C_k$$

y tenemos que $g(a(r_k)) \sim v_1 v_2\, g(a_k) \sim c_k$ con respecto a p^k y B ; además $v_1 v_2\, g(a_k) - u_1 v_2\, c_k = \dfrac{(v_1 u_2 r_k - v_2 u_1 s_k)}{p^k} x_2 \in B$

pero como $h_p^{B_2}(1) = 0$ tenemos que p^k divide a $v_1 u_2 r_k - v_2 u_1 s_k$ para toda $k \geq 1$ es decir $v_1 u_2 r_k \equiv v_2 u_1 s_k$ modulo p^k para toda $k \geq 1$. En consecuencia $v_1 u_2 \rho = v_2 u_1 \sigma$. Tomamos $w = v_1 u_2$ y $w' = v_2 u_1$ que satisfacen lo que queríamos.

($\Longleftarrow$) Sean $w = u_1 u_2$ y $w' = v_1 v_2$ con $u_i, v_i \in W_i$ para $i = 1, 2$. Sea $f : V \longrightarrow V$ definida como $f(x_1) = (v_1/u_1)\, x_1$, y $f(x_2) = (u_2/v_1)\, x_2$ y haciendo la demostración análoga a la del teorema 5.18 mostramos que $f(A_k) = C_k$ para todo $k \geq 1$ y como $A = \bigcup A_k$ y $C = \bigcup C_k$ y $A_k \subset A_{k+1}$ tenemos que $f(A) = C$ con lo que $A \cong C$ □

Trataremos ahora el caso general: cuando T es isomorfo a un subgrupo arbitrario de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Estudiaremos $E(B,T)$ en el caso general tomando las partes p-primarias de T_p y utilizando los teoremas anteriores. Las posibilidades para $T_p \neq 0$ son $\mathbb{Z}_{p^k}$ para alguna $k \in \mathbb{N}$ ó $k=\infty$.

Para $A \in E(B,T)$ sea $A_{\{p\}} \subset A$ tal que $A_{\{p\}}/B \cong T_p$, es decir $A_{\{p\}}$ es el subgrupo de A cuyos elementos módulo B tienen orden una potencia de p.

Al tratar de generalizar los teoremas anteriores nos encontraremos con los siguientes problemas:

i) T_p puede ser no trivial para una infinidad de primos p, por lo que no podemos suponer $h_p^{B_i}(1)=0$ (Solamente sabemos que $h_p^{B_i}(1)<\infty$ 5.14)

ii) Existen ejemplos de grupos A y C para los cuales $A_{\{p\}} \cong C_{\{p\}}$ para todos los primos p, y sin embargo $A \not\cong C$ (es decir no podemos recuperar al grupo A de los grupos $A_{\{p\}}$) (Ejemplo 5.22)

Para salvar el primer obstáculo y poder utilizar los teoremas anteriores modificaremos la base $\{x_1, x_2\}$ de V de la siguiente manera.

Sea $\Pi(T) = \{p \text{ primo} \mid T_p \neq 0\}$. Por el lema 5.14 si $T_p \neq 0$ entonces $h_p^{B_i}(1)<\infty$. Sea $g_p : V \longrightarrow V$ definida por $g_p(x_i) = x_{i,p}$ donde $x_{i,p} = (1/p^{h_p^{B_i}(1)})\, x_i$.

Claramente $g_p(B_i) \cong B_i$ para $i=1,2$ y $h_p^{g(B_i)}(x_{i,p})=0$, además notemos que g_p conmuta con cualquier transformación lineal de V a V.

Dado $Y \subset V$, denotaremos a Y' a la imagen de Y bajo g_p.

Con todas las consideraciones anteriores, si $A \in E(B,T)$ decimos que:

i) $A_{\{p\}}$ corresponde a $r \in U(p^k)$ para alguna $k \geq 1$ si $T_p \cong \mathbb{Z}_{p^k}$ y $A'_{\{p\}} = \left\langle B', \dfrac{x_{1,p} + r\, x_{2,p}}{p^k} \right\rangle$

ii) $A_{\{p\}}$ corresponde a $\rho \in J_p^\circ$ si $t_p \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$ y

$$A'_{\{p\}} = \left\langle B', \frac{x_{1,p}+r_1 x_{2,p}}{p}, \frac{x_{1,p}+r_2 x_{2,p}}{p^2}, \dots \right\rangle \text{ con}$$
$\rho = (r_k)_k$

Sea $\mathcal{L}(T) = \{ (\rho(p))_{p\in\Pi(T)} \mid \rho(p) \in J_p^\circ$ si $t_p \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$ y $\rho(p) \in U(p^k)$ si $T_p \cong \mathbb{Z}_{p^k}$ para alguna $k \geq 1 \}$

5.21 Teorema Existe una correspondencia uno a uno entre $E(B,T)$ y $\mathcal{L}(T)$

Dem Sea $A \in E(B,T)$. Para cada p sea $\{A_p\}$ tal que $A_{\{p\}}/B \cong T_p$ por los teoremas anteriores $A'_{\{p\}} = A(\rho(p))$ con $\rho(p) \in U(p^k)$ si $T_p \cong \mathbb{Z}_{p^k}$ para alguna $k \geq 1$ y $\rho(p) \in J_p^\circ$ si $T_p \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$ de tal manera que la asignación $E(B,T) \longrightarrow \mathcal{L}(T)$ está bien definida.

Definimos ahora la asignación inversa; para ello tomamos $p \in \Pi(T)$ y $A(p) \in E(B, T_p)$. Sea $A = \sum A(p)$. Así definido es claro que $A_{\{p\}} = A(p)$. Afirmamos que $B_i = A(\tau_i)$. Tenemos que $B_i = A(p)(\tau_i)$ para toda p. Además $A(p)$ es el conjunto de todos los elementos de A cuyo orden módulo B es una potencia de p

Sea $a \in A$ tal que $ma \in B_i$ para alguna $m \neq 0$. Como $A = \sum A(p)$ entonces $a = a_1 + \dots + a_n$ con $a_j \in A(p_j)$ para $j = 1, \dots n$. Sea k_j tal que $k_j a_j \in B$ (k_j potencia de p_j) y sea $k = \prod k_j$ y $l_j = k/k_j$. Entonces para cada j tenemos que $l_j a \in A(p_j)$

r

por tanto $m l_j a \in B_1$ y como B_1 es puro en $A(p_j)$, $l_j a \in B_1$; pero los l_j son primos relativos en consecuencia $a \in B_1$ y B_1 es puro en A. Entonces $B_1 = A(\tau_1)$ y como $r(A(\tau_1)) = 1$ se tiene que $B_1 = A(\tau_1)$. Análogamente $B_2 = A(\tau_2)$ □

Ahora de manera análoga a los casos anteriores, quisiéramos saber la relación que hay entre las sucesiones asociadas a grupos isomorfos.

5.22 <u>Teorema</u> Sean $r, s \in \Delta(T)$ $r = (\rho(p))$, $s = (\sigma(p))$.
Entonces $A(r) \cong A(s)$ si y sólo si existen w y $w' \in W$ tales que
$w\rho(p) \equiv w'\sigma(p)$ (modulo $|T_p|$) si $|T_p| < \infty$
ó $w\rho(p) = w'\sigma(p)$ si $T_p \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$

Dem Sean $A = A(r)$ y $C = A(s)$
Sea $f: A \to C$ un isomorfismo; entonces
($\Rightarrow$) Fijamos p primo. $f|_{A_{\{p\}}}$ es un isomorfismo entre $A_{\{p\}}$ y $f(B) = B$. Tambien $f|_{A_{\{p\}}}$ $C_{\{p\}}$ y por lo tanto existen u_i y $v_i \in W_\lambda$ tales que $(u_i, v_i) = 1$ y $f|_{B_i}$ es multiplicar por u_i/v_i. Sean $w = u_2 v_1$ y $w' = u_1 v_2$. Tomamos $\bar{f}$ la extensión lineal de f. Entonces $\bar{f}$ conmuta con g_p ya que ambas transformaciones tienen matrices asociadas diagonales. En consecuencia $\bar{f}$ induce un isomorfismo de $A'_{\{p\}}$ en $C'_{\{p\}}$ y de los teoremas de los casos anteriores tenemos que
i) $w\rho(p) \equiv w'\sigma(p)$ (mod $|T_p|$) si $T_p < \infty$
ii) $w\rho(p) = w\sigma(p)$ si $T_p \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$
($\Leftarrow$) Sean $w = u_1 u_2, w' = v_1 v_2$ con $u_i, v_i \in W_i$, $i = 1,2$. Sea $f: V \to V$ dada por $f(x_1) = (v_1/u_1)x_1$, $f(x_2) = (u_2/v_2)x_2$. Como f y g_p conmutan y por los teoremas anteriores tenemos que $f(A'_{\{p\}}) = C'_{\{p\}}$ pero $A' = \bigcup_p A'_{\{p\}}$ y $C' = \bigcup_p C'_{\{p\}}$; por tanto $f(A') = C'$ y

Así $A \cong C$.

Para terminar daremos una aplicación de la teoría con grupos A y $C \in E(B)$ donde tendremos que $A_{\{p\}} \cong C_{\{p\}}$ para toda p pero $A \not\cong C$

5.23 Ejemplo. Sean B_1', B_2' subgrupos de $\mathbb{Q}$ que contienen a 1 tales que

$$h_p^{B_1'}(1) = \begin{cases} 0 & p \neq 2 \\ \infty & p = 2 \end{cases}; \quad h_p^{B_2'}(1) = \begin{cases} 1 & p \neq 5 \text{ y } p \neq 13 \\ 0 & p = 5 \text{ ó } p = 13 \end{cases}$$

tomamos $k = 65$. Entonces $W = \{\pm 2^t : t \geq 0\}$. Observemos que si $p | K$ entonces $h_p^{B_i'}(1) = 0$ y que τ_1 ó τ_2 son incomparables. Sean

$$a_1 = \frac{x_1 + 4x_2}{5}, \quad c_1 = \frac{x_1 + x_2}{5}, \quad a_2 = \frac{x_1 + 2x_2}{13}, \quad c_2 = \frac{x_1 + x_2}{13}$$

Definimos para $i = 1, 2$ $A_i = \langle B, a_i \rangle$ y $C_i = \langle B, c_i \rangle$. Entonces $A_i \cong C_i$ ya que existen $w_1, w_2 \in W$ con $4 \equiv 1 \cdot w_1$ (módulo 5) (tómese $w_1 = 2^2$) y $2 \equiv w_2$ (mod 13) (aquí $w_2 = 2^1$). Sean $A = A_1 + A_2$ y $C = C_1 + C_2$. Supongamos que $A \cong C$; entonces existe $t \geq 0$ y $\epsilon = \pm 1$ tal que $4 \equiv \epsilon 2^t$ modulo 5 y $2 \equiv \epsilon 2^t$ módulo 13. Observemos que los órdenes de 2 módulo 5, 2 módulo 13 son 4, 12 respectivamente. Si $\epsilon = 1$ entonces $2^{t-2} \equiv 1$ (mod 5) y $2^{t-1} \equiv 1$ (mod 13) por lo tanto $4 | t-2$ y $12 | t-1$ lo cual es imposible. Supongamos ahora que $\epsilon = -1$ y observamos que $2^2 \equiv -1$ (mod 5) y que $2^6 \equiv -1$ (mod 13); así $2^{t-2} \equiv -2 \equiv 2^2$ (mod 5) y $2^{a+6} \equiv -2^a \equiv 2$ (13); en consecuencia $4 | t$ y $12 | t+5$ lo cual es imposible. Por lo tanto $A \not\cong C$.

Bibliografía

[1] .- D.M. Arnold
FINITE RANK TORSION FREE ABELIAN GROUPS AND RINGS
Lecture Notes in Mathematics 931
Springer Verlag
1982

[2] .- L. Fuchs
INFINITE ABELIAN GROUPS VOL I, II
Academic Press
1970 - 1973

[3] .- I. Kaplansky
INFINITE ABELIAN GROUPS
Press, Ann, Arbor
1954

[4] .- M.L. Pérez Seguí
CLASIFICATION OF RANK 2 GROUPS WHOSE TYPESET CONTAINS AT LEAST THREE ELEMENTS
Publicaciones Preliminares #120 I. de Matemáticas
UNAM - México
1986

[5] .- M.L. Pérez Seguí
QUASI-DIRECT SUMMANDS OF FINITE RANK FREE ABELIAN GROUPS
Publicaciones Preliminares # 103 I de Matemáticas
UNAM-México
1985

[6].- J. Rotman
NOTES IN HOMOLOGICAL ALGEBRA
Van Nostrand Reinhold Company
1970