DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FACULTAD DE INGENIERIA

"MODELO PARA PREDECIR EL FLUJO DE TRAZADORES EN YACIMIENTOS GEOTERMICOS NATURALMENTE FRACTURADOS"

JETZABETH RAMIREZ SABAG

TESIS

PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA PETROLERA

CIUDAD UNIVERSITARIA

Febrero, 1988

RESUMEN.

El modelo propuesto ha sido desarrollado para estudiar el flujo de trazadores a través de yacimientos geotérmicos naturalmente fracturados. El sistema idealizado del yacimiento está compuesto por dos regiones: Una región móvil donde mecanismos de difusión y convección están presentes y una región estancada o inmóvil donde se consideran los mecanismos de difusión y adsorción: en ambas regiones se considera la pérdida de masa por decaimiento radioactivo.

Las soluciones de las ecuaciones básicas de flujo están en el espacio de Laplace y se utilizó el algoritmo de Stehfest para su inversión numérica. A pesar de la dispersión numérica que presentan estas soluciones, se encontró una tendencia bien definida para inferir el comportamiento del sistema bajo diferentes condiciones de flujo. Se encontró que, para propósitos prácticos el tamaño de los bloques de matriz no tiene influencia sobre la respuesta de la concentración, y la solución se reduce a la presentada por Tang y asociados. Bajo estas condiciones, el comportamiento del sistema puede ser descrito por dos parámetros adimensionales: El número de Peclet en las fracturas, P_{e_1}, y un parámetro $\alpha(\alpha=\xi\sqrt{P_{e_2}})$ donde $\xi=\phi_e D_e/v(w-\delta)$ y P_{e_2} es el número de Peclet en la matriz.

Se derivó también la respuesta del trazador para la solución "pico". Se encontró una solución analítica límite para el caso en que α tienda a cero, el cual corresponde al caso de

un sistema homogéneo. Se comprobó que esta solución límite es válida, para $\alpha<0.01$. Para el caso de inyección continua esta solución se reduce a la presentada por Coats y Smith. Para la solución pico, se encontró que el tiempo de irrupción correpondiente a la máxima concentración está relacionado directamente con el grupo adimensional $\frac{\sqrt{9+X_D^2 P_{e_1}^2}-3}{P_{e_1}}$.

Por lo tanto, es posible obtener el valor de P_{e_1} para una X_D dada, o viceversa. Un grupo de gráficas de concentración adimensional en la fractura vs tiempo adimensional, fueron desarrollados. Se encontró que si P_{e_1} permanece constante en tanto que α cambia, la solución límite es la envolvente de una familia de curvas en una gráfica de C_D vs t_D. En esta Figura P_{e_1} fija la característica de la familia de curvas. También se encontró que el tiempo de irrupción para una concentración dada depende fuertemente de α .

FIGURAS

PÁG.

APENDICES

IDENTIFICACION DEL PROBLEMA

La reinyección del agua en yacimientos geotérmicos es un problema actual dentro de la ingeniería de yacimientos, dado que lejos de incrementar la entalpía del yacimiento puede reducirla si no es reinyectada adecuadamente.

El principal uso del recurso geotérmico consiste en el empleo del vapor separado para alimentar las turbinas generadoras de electricidad, existiendo un excedente de agua con alta temperatura que puede ser utilizado como recarga térmica e hidráulica al reinyectarse al yacimiento; sin embargo, este posible beneficio puede convertirse en un efecto negativo, causado por la diferencia de temperaturas entre los fluidos del yacimiento y el fluido reinyectado, así como por la posible precipitación de sales insolubles debido a la reacción entre el fluido reinyectado y el que se encuentra "in-situ".

Las pruebas de trazadores constituyen una herramienta adecuada para obtener mayor información sobre las heterogeneidades del yacimiento. El estado actual de la tecnología no permite determinar los parámetros de flujo, que se requieren para una buena predicción del declinamiento de la entalpía del yacimiento, a partir de pruebas de trazadores en medio porosos.

El análisis de pruebas de trazadores en yacimientos geotérmicos se dificulta principalmente por las siguientes causas:

Primeramente porque la mayoría de los yacimientos son altamente fracturados, lo cual impide que se aplique el análisis cuantitativo de pruebas de trazadores desarrollados para yacimientos de aceite y gas.

En segundo término porque los procesos de convección, dispersión, difusión, reacción química, adsorción y decaimiento radioactivo que pueden presentarse, afectan el análisis de pruebas de trazadores. Este análisis depende de la habilidad para describir todos los procesos que intervienen en el movimiento del trazador que viaja a través del yacimiento.

Esta problemática ha sido objeto de estudio de varios investigadores, los cuales han propuesto alguna solución al respecto, considerando los procesos que a su criterio son los más relevantes.

En la siguiente sección se presenta una breve reseña de algunos de los trabajos más importantes desarrollados desde la década de los 60's a la fecha.

Es importante mencionar que en la medida en que procesos adicionales a los anteriormente mencionados, son involucrados - en los modelos idealizados que han sido estudiados, las soluciones de las ecuaciones diferenciales que tratan de representar el comportamiento del trazador en el yacimiento, se vuelven cada vez más complejas.

El análisis de trazadores en yacimientos geotérmicos fracturados permite determinar algunos de los parámetros que influyen en el flujo de fluidos en el medio poroso fracturado, co mo son: el ancho de la fractura, la distancia recorrida por el fluido, los coeficientes de dispersión longitudinal y - transversal, la porosidad de la matriz, así como la magnitud del volumen estancado; por lo que el análisis de pruebas de trazadores es una gran ayuda para la caracterización de yacimientos geotérmicos fracturados.

INTRODUCCION.

El estudio de la dispersión de trazadores a través de medios porosos fracturados ha despertado el interés de varios investigadores, ya que la interpretación de las pruebas de trazadores constitutuye una buena herramienta para determinar los principales parámetros del yacimiento que influyen en el comportamiento del trazador en el sistema de fracturas.

Las técnicas desarrolladas para predecir el flujo de trazadores a través de medios porosos reportadas en la literatura técnica de Hidrología y Petrolera, no son aplicables a los yacimientos geotérmicos, debido a que estos son altamente fracturados.

Hasta la fecha, se han adquirido algunas experiencias en la interpretación de pruebas de trazadores. Dentro de la Ingeniería de Yacimientos Geotérmicos, esto ha sido posible gracias a los modelos desarrollados para predecir el comportamiento del trazador en este tipo de yacimientos. Sin embargo, estos modelos en su mayoría, sólo permiten analizar cualitativamente los parámetros del sistema (Fossum, 1983, Jensen, 1983) y sólo, a través de algunos de ellos es posible determinar cuantitativamente los parámetros básicos del yacimiento (Walkup y Horne, 1985).

El modelo que se presenta en este trabajo ha sido desarrollado para determinar los valores de las principales propiedades del sistema, que afectan la respuesta del trazador en el extremo productor o en cualquier punto de su trayectoria. El modelo propuesto está representado matemáticamente por dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, su solución se presenta en el espacio de Laplace y se utilizó el algoritmo de Stehfest para su inversión numérica.

Es importante hacer notar, que a pesar de que el modelo propuesto considera los mecanismos de transporte de masa más relevantes que se presentan en la realidad, su solución es sencilla en comparación con el modelo de Walkup y Horne, esto es debido a que el modelo precedente requiere de dos inversiones numéricas y cinco parámetros de ajuste, en tanto que el modelo propuesto sólo requiere una inversión numérica y para valores prácticos, el sistema puede ser descrito por sólo dos parámetros de ajuste.

Adicionalmente se presenta una solución analítica límite que representa al sistema cuando éste se comporta como homogéneo, esto permite comparar las soluciones numérica y analítica y con ello evaluar la precisión de los perfiles de concentración obtenidos mediante la solución numérica.

CAPITULO I: REVISION DE LITERATURA

1.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

DIFUSIÓN EN FLUIDOS ESTANCADOS.

Si dos fluidos están en contacto por medio de una interfase inicialmente bien definida, al transcurrir el tiempo el fluido desplazante se difundirá lentamente en el otro, desapareciendo gradualmente la interfase y teniéndose en su lugar una zona de mezclado por difusión, cuya magnitud se irá incrementando y la composición a través de ella variará, teniendo como extremos las composiciones de los fluidos puros en ambos lados de la zona. Esta difusión se incrementará a causa del movimiento aleatorio de las moléculas.

Si no hay cambio en el volumen de mezclado de los dos fluidos, entonces el transporte neto de uno de los constituyentes a través de cualquier plano arbitrario puede ser representado por la ley de Fick de difusión molecular(*):

$$\frac{dG}{dt} = -D_o A \frac{dC}{dx} \tag{1.1}$$

El coeficiente de difusión, D_o, tal como se definió en la ecuación (1.1) es función de la concentración; sin embargo es posible representar el comportamiento del proceso seleccionando un coeficiente de difusión promedio efectivo. Una de las soluciones más conocidas de la ecuación (1.1) es la siguiente:

(*) Nomenclatura al final del texto.

$$C = \frac{1}{2} \left[1 \pm \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_o t}}\right)\right] \qquad (1.2)$$

Taylor[39] ha demostrado que el coeficiente de difusión puede ser calculado por medios gráficos, tal como se muestra en la Figura 1.1 obtenida de datos experimentales, utilizando la siguiente ecuación:

$$D_o = \frac{1}{t} \left[\frac{X_{90} - X_{10}}{3.625}\right]^2 \qquad (1.3)$$

donde:

X_{90}: es la distancia desde la interfase inicial donde la composición es de 90% del fluido bajo consideración.

X_{10}: distancia desde la interfase inicial, donde la composición es 10% del fluido bajo consideración.

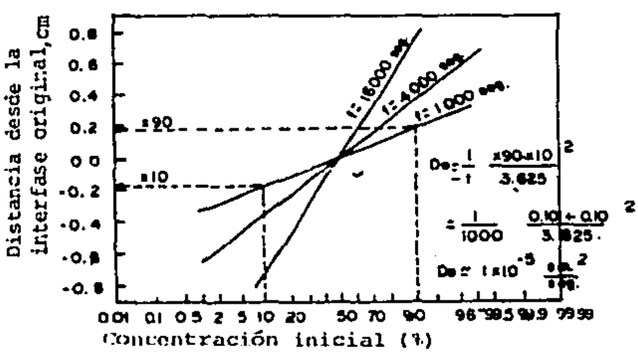


FIGURA 1.1 PERFIL DE CONCENTRACIONES

(EN PAPEL ARITMÉTICO PROBABILÍSTICO)

La difusión en medios porosos está relacionada con el factor de resistividad eléctrica, por medio de la ecuación (1.4). Esta ecuación puede ser utilizada para rocas consolidadas y no consolidadas.

$$\frac{D}{D_o} = \frac{1}{F\phi} \qquad (1.4)$$

La verificación de la ecuación (1.4) para rocas consolidadas y no consolidadas, ha sido reportada por varios autores[2,15 y 36].

Utilizando el procedimiento de Taylor antes mencionado y la ecuación (1.4) es posible obtener el coeficiente de difusión promedio efectivo.

DISPERSION EN MEDIOS POROSOS

Si un fluido está fluyendo a través de un medio poroso existe un factor adicional, a este factor adicional causado por el movimiento de fluidos o por un gradiente de concentración como resultado del flujo de fluidos se le denomina dispersión. Existen dos tipos de dispersión en medios porosos: la dispersión longitudinal y la dispersión transversal.

DISPERSION LONGITUDINAL

La dispersión longitudinal ocurre en dirección del movimiento global de los fluidos, para estudiarla se han utilizado - modelos diferentes para representar los medios porosos, por ejemplo conjuntos de tubos capilares de sección transversal variable orientados al azar, empacamientos de material granular entre otros[2,4,23 y 33 a 35]. Los datos reportados en la literatura muestran que el coeficiente de dispersión longitudinal para arenas no consolidadas o empacamientos, pueden determinarse mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{E}{D_o} = 1.75\,\frac{Vdp}{D_o} \qquad (1.5)$$

En la zona donde los procesos de difusión y dispersión son relevantes, el coeficiente total de dispersión es la suma del coeficiente de difusión, ecuación (1.4) y del coeficiente de dispersión, ecuación (1.5).

El coeficiente de dispersión longitudinal total en un empacamiento de arena no consolidada se determina con la siguiente ecuación[6,31,40 y 43]:

$$K_l = D + E$$

$$\frac{K_l}{D_o} = \frac{D}{D_o} + \frac{E}{D_o}$$

$$\frac{K_l}{D_o} = \frac{1}{F\phi} + 1.75\,\frac{Vdp}{D_o} \qquad (1.6)$$

La ecuación (1.6) es válida para valores de $\frac{Vdp}{D_o} < 50$.

DISPERSION TRANSVERSAL

Este fenómeno lo han descrito varios autores como fenómeno de corriente dividida, en el cual se tiene transferencia de masa entre las corrientes.

El coeficiente de dispersión transversal puede ser determinado graficando la composición contra la distancia, medida a partir del punto correspondiente a una concentración de 50%, tal como se muestra en la Figura 1.2.

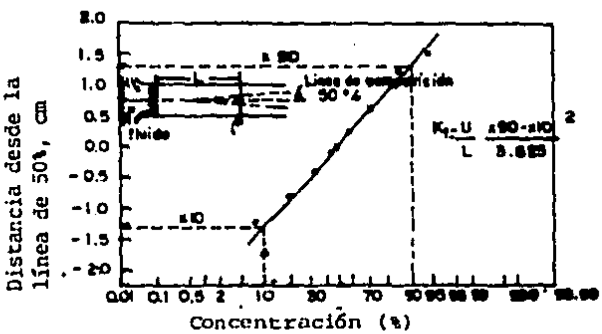


FIGURA 1.2. PERFIL DE CONCENTRACION TRANSVERSAL (EN PAPEL ARITMÉTICO PROBABILÍSTICO)

El coeficiente de dispersión transversal puede ser calculado mediante la siguiente ecuación[29].

$$K_t = \frac{V}{L} \left(\frac{X_{90} - X_{10}}{3.625}\right)^2 \qquad (1.7)$$

El coeficiente de dispersión transversal total es la suma del coeficiente de difusión y el coeficiente de dispersión transversal convectivo. La expresión final para condiciones de flujo laminar en empacamientos no consolidados con distribución no uniforme de tamaño del grano es[2 y 3]:

$$\frac{K_T}{D_o} = \frac{1}{F\emptyset} + \frac{V}{L} \left(\frac{X_{90} - X_{10}}{3.625}\right)^2 \qquad (1.8)$$

Existen además algunos otros factores que influyen en los procesos de difusión y dispersión en medios porosos, pudiendo mencionarse los siguientes: relación del diámetro de partícula al diámetro de la columna[19], distribución del diámetro de la partícula[31], forma de la partícula[6,13 y 45], permeabilidades heterogéneas[4,12 y 42], fluidos con viscosidad y densidad diferentes[18 y 30], flujo turbulento[9 y 14], efectos de la fase inmóvil[28], etc.[1].

MECANISMOS DE DISPERSION

Diferentes mecanismos contribuyen al fenómeno de dispersión, los más importantes son los siguientes[7,13,25 y 27]:

a) Difusión molecular en la dirección del flujo y transversal a ella.
b) Mezclado turbulento.
c) Proceso de transporte lateral acoplado con la velocidad y/o la distribución del tiempo de residencia. Este proce

so incluye los siguientes factores:

1. La difusión tipo "Taylor", ocasionada por la interacción de perfiles de velocidades con difusión molecular lateral
2. Separación y remezclado o interdifusión de corrientes con diferentes velocidades alrededor de las partículas.
3. Acoplamiento de perfiles de velocidades globales, causado por la inestabilidad de viscosidades o porosidades no homogéneas con dispersión lateral.

d) Ritmo finito de transferencia de masa entre la matriz porosa y la fase que se está moviendo y un gasto finito de difusión dentro de los elementos de la matriz porosa.

Los mecanismos antes mencionados pueden actuar individualmente o combinados.

La dispersión que tiene lugar en medios porosos puede ser descrita aproximadamente por soluciones a la ecuación de difusión, considerando el término respectivo de convección.

En la siguiente sección se presentan algunas soluciones al problema de valores en la frontera, empleando el modelo de difusión.

1.2. MODELOS REPRESENTATIVOS DE MEDIOS POROSOS HOMOGENEOS

La ecuación básica que rige el comportamiento del flujo de un trazador en un medio poroso homogéneo ha sido formulada por varios autores, con base en un balance de materia.

Si $C(x,t)$ (o C de aquí en adelante) es la concentración del trazador, en un punto x a un tiempo t, entonces la variación de la concentración está gobernada por la siguiente ecuación (29):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - V\,\frac{\partial C}{\partial x} \qquad (1.9)$$

Haciendo el cambio de variable $x' = x - vt$, se llega a la expresión bien conocida de la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 C}{\partial x'^2} \qquad (1.10)$$

En estas ecuaciones el coeficiente promedio de difusión, D, engloba todos los efectos debidos a la difusión y las fluctuaciones de la velocidad convectiva, mencionados en la sección anterior.

A las expresiones (1.9) y (1.10) se les conoce como "modelo de difusión". A continuación se presenta un resumen de las principales soluciones reportadas en la literatura, empleando el modelo de difusión con diferentes tipos de condiciones de frontera.

1.2.1 Modelos de difusion de Coats

Coats presenta tres soluciones empleando el modelo de Difusión:

GRUPO 1: SISTEMA SEMIINFINITO

$$C(X,0)=0 \quad ; \quad X \geq 0 \tag{1.11}$$

$$C(0,t)=C_o \quad ; \quad t > 0 \tag{1.12}$$

$$C(\infty,t)=0 \quad ; \quad t > 0 \tag{1.13}$$

La solución a la ecuación (1.9) con las condiciones (1.11) a (1.13) es:

$$\frac{C}{C_o} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{2} \frac{y-I}{\sqrt{I}}\right) + \exp(\gamma y) \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{2} \frac{y+I}{\sqrt{I}}\right)\right] \tag{1.14}$$

La ecuación (1.14) está expresada en términos de las variables adimensionales definidas por Coats[10]:

I: volúmenes de poros inyectados, vt/L;

γ: vL/D

y: distancia adimensional, x/L;

C_o: concentración inyectada;

C: concentración

Esta misma expresión en función de las variables reales es:

$$\frac{C}{C_o} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x-vt}{\sqrt{4Dt}}\right) + \exp\left(\frac{vx}{D}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x+vt}{\sqrt{4Dt}}\right)\right] \tag{1.15}$$

El desarrollo de las ecuaciones (1.14) y (1.15) se encuentra detallado en el Apéndice A.

GRUPO 2: SISTEMA SEMIINFINITO DOS

$$C(x,0)=0 \qquad ; \quad x \geq 0 \qquad (1.16)$$

$$C(0,t)= C_o + \frac{D}{v}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)\Big|_{x=0} \qquad ; \quad t > 0 \qquad (1.17)$$

$$C(\infty,t)=0 \qquad ; \quad t > 0 \qquad (1.18)$$

La solución de la ecuación (1.9) con las condiciones iniciales y de frontera (1.16) a (1.18), se presenta con detalle - en el Apéndice A y es, en función de las variables adimensionales definidas por Coats:

$$\frac{C}{C_o} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{2}\,\frac{y-I}{\sqrt{I}}\right) - \exp(\gamma\, y)\,\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{2}\,\frac{y+I}{\sqrt{I}}\right)\right]$$

$$- \frac{\gamma}{2}\,(y+I)\,\exp(\gamma\, y)\,\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{2}\,\frac{y+I}{\sqrt{I}}\right) + \frac{\sqrt{\gamma I}}{\sqrt{\pi}}\,\exp\left[-\frac{\gamma}{4I}(y-I)^2\right] \qquad (1.19)$$

La ecuación (1.19) expresada en términos de las variables reales es:

$$\frac{C(x,t)}{C_o} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x-vt}{\sqrt{4Dt}}\right) - \exp\left(\frac{vx}{D}\right)\,\operatorname{erfc}\left(\frac{x+vt}{\sqrt{4Dt}}\right)\right]$$

$$- \frac{v}{2D}(x+vt)\,\exp\left(\frac{vx}{D}\right)\,\operatorname{erfc}\left(\frac{x+vt}{\sqrt{4Dt}}\right) + \frac{vt}{\sqrt{\pi Dt}}\,\exp\left(-\frac{x-vt}{\sqrt{4Dt}}\right)^2 \qquad (1.20)$$

GRUPO 3: SISTEMA FINITO

$$C(x,0)=0 \qquad ; \quad x > 0 \qquad (1.21)$$

$$C(0,t)= C_o + \frac{D}{v}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)\Big|_{x=0} \qquad ; \quad t > 0 \qquad (1.22)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}\Big|_{x=L} = 0 \qquad ; \quad t > 0 \qquad (1.23)$$

La solución de la ecuación (1.9) con las condiciones de (1.21) a (1.23) en términos de las variables adimensionales es la siguiente:

$$\frac{C}{C_o} = \frac{1}{2}\, \text{erfc}\Big(\frac{\sqrt{Y}}{2}\, \frac{y-I}{\sqrt{I}} - \frac{\sqrt{I}\, \exp\, [-\frac{Y}{4I}\, (1-I)^2]}{\sqrt{\pi Y}\quad (1+I)}\, (1- \frac{6I}{y+I} - \frac{2I^2}{(1+I)^2})\Big) \tag{1.24}$$

Esta misma expresión expresada como función de la velocidad y el tiempo es:

$$\frac{C(x,t)}{C_o} = \frac{1}{2}\, \text{erfc}(\frac{x-vt}{\sqrt{4Dt}}) - \frac{\sqrt{tD}}{\sqrt{\pi}\,(x+vt)}\, \exp[-(\frac{x-vt}{\sqrt{4Dt}})^2]\, [1- \frac{6vt}{x+vt} - 2\, (\frac{vt}{x+vt})^2] \tag{1.25}$$

1.2.2 MODELOS DE DIFUSION DE GERSHON(17)

Gershon incluye dos efectos adicionales en el modelo de Difusión, considera que la adsorsión del trazador en los granos de la roca y el decaimiento del trazador (si se tratase de un trazador radiactivo) pueden llegar a ser de importancia. Gershon supone que la adsorsión del trazador en la roca ocurre mediante una reacción de primer orden, en la que se debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$n = KC \tag{1.26}$$

El cambio de concentración en la fase líquida debida a la adsorsión será:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(\text{quím.}) = -\frac{1}{\phi}\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{K}{\phi}\frac{\partial C}{\partial t} \tag{1.27}$$

Por otro lado, la declinación del trazador ocasionada por la pérdida de radioactividad es:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(\text{rad.}) = -\lambda C \tag{1.28}$$

donde λ es la característica de decaimiento del trazador radiactivo. Si se considera un trazador radiactivo y adsorbible a la roca, el cambio de concentración del trazador será:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(\text{rad.}) = -\lambda C - \frac{\lambda K}{\phi}C = -\lambda C(1+\frac{K}{\phi}) \tag{1.29}$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.27) y (1.29) en la ecuación - (1.9) se tendrá la ecuación de Difusión incluyendo los procesos de adsorción y decaimiento radiactivo:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{D}{\delta}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{V}{\delta}\frac{\partial C}{\partial x} - \lambda C \tag{1.30}$$

donde:

$$\delta = \left(1+ \frac{D}{\emptyset}\right)$$

Se pueden presentar los siguientes casos particulares de la ecuación anterior:

a) Flujo en régimen permanente:

$$D \frac{d^2C}{dx^2} - v \frac{dC}{dx} - \lambda \cdot \delta C = 0 \qquad (1.31)$$

b) Trazador químico o trazador radiactivo cuyo tiempo de decaimiento es grande comparado con el tiempo de tránsito en el medio poroso (λ=0):

$$\frac{D}{\delta} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{v}{\delta} \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial t} \qquad (1.32)$$

c) Trazador químico con adsorción despreciable (k=0 y en su caso λ=0):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v \frac{\partial C}{\partial x} \qquad (1.33)$$

La ecuación anterior es idéntica a la ecuación (1.9) y efectuando el cambio de variable ya mencionado, se puede simplificar a la ecuación (1.10), es decir, la ecuación (1.33)

representa la forma más sencilla del modelo de difusión siendo esta la forma en que normalmente se considera en varias de las aplicaciones reportadas en la literatura.
Para encontrar la solución de la ecuación (1.32), Gershon considera también varios conjuntos de condiciones de frontera presentadas a continuación:

GRUPO 1: SISTEMA INFINITO

$$C(x,0)=C_o \quad ; \quad x > 0 \tag{1.34}$$

$$C(-\infty,t)=C_o \quad ; \quad t > 0 \tag{1.35}$$

$$C(+\infty,t)=C_o \quad ; \quad t > 0 \tag{1.36}$$

La solución general de la ecuación (1.32) aplicando las ecuaciones (1.34) a (1.36) es:

$$\frac{C(x,t)}{C_o} = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\delta x - vt}{\sqrt{4D\delta t}}\right) \tag{1.37}$$

Para el caso en que tanto la adsorción del trazador como la constante de decaimiento son despreciables, la ecuación (1.37) se transforma en la ecuación siguiente:

$$\frac{C(x,t)}{C_o} = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x - vt}{\sqrt{4Dt}}\right) \tag{1.38}$$

GRUPO 2: SISTEMA SEMIINFINITO UNO

$$C(x,0)=0 \quad ; \quad x \geq 0 \tag{1.39}$$

$$C(0,t)=C_o \quad ; \quad t > 0 \tag{1.40}$$

$$C(\infty,t)=0 \quad ; \quad t > o \tag{1.41}$$

La solución de la ecuación (1.32) para las condiciones (1.39) a (1.41) es:

$$\frac{C(x,t)}{C_o} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\delta x - vt}{\sqrt{4\delta Dt}}\right) + \exp\left(\frac{vx}{D}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{\delta x + vt}{\sqrt{4\delta Dt}}\right)\right] \tag{1.42}$$

Para el caso en que $\delta=1$ la ecuación (1.42) se transforma en la ecuación (1.15); es decir, si se desprecian los efectos correspondientes a la adsorsión y al decaimiento radioactivo, se puede resolver la ecuación (1.33) y llegar a la misma solución reportada por Coats.

GRUPO 3: SISTEMA SEMIINFINITO DOS

$$C(x,0)=0 \quad ; \quad x > 0 \tag{1.43}$$

$$C(0^+,t) = \frac{D}{v}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)\bigg|_{x=0^+} = C_o \tag{1.44}$$

$$C(\infty,t)=0 \quad ; \quad t > 0 \tag{1.45}$$

Aplicando estas condiciones a la ecuación (1.32) se obtiene la siguiente solución:

$$\frac{C(x,t)}{C_o} = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{\delta x - vt}{2\sqrt{\delta Dt}}\right) - \frac{1}{2}\exp\left(\frac{vx}{D}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{\delta x + vt}{2\sqrt{\delta Dt}}\right)\cdot\left[1+\frac{v(\delta x+vt)}{\delta D}\right]$$

$$+ \frac{v}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{t}{\delta D}}\exp\left[\frac{vx}{D} - \frac{\delta}{2}\left(\frac{x+vt}{\sqrt{\delta D t}}\right)^2\right] \tag{1.46}$$

GRUPO 4: SISTEMA FINITO

$$C(x,0)=0 \quad , \quad 0 \leq x \leq L \tag{1.47}$$

$$C(0^+,t)=C+\frac{D}{v}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)\Big|_{x=0^+}=C_o \tag{1.48}$$

$$C(L^+,t)=C(L^-,t)-\frac{D(x<L)}{v}\frac{\partial C}{\partial x}\Big|_{L(-)} \tag{1.49}$$

La solución general de la ecuación (1.32) con las condiciones iniciales y de frontera (1.47) a (1.49) es la siguiente:

$$C(L,t)=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n L \ \mathrm{sen}\ \alpha_n L}{(\alpha_n L)^2+\frac{v^2L^2}{4D^2}+\frac{vL}{D}}\left\{\cdot\exp\left[\left(\frac{vL}{2D}-\left(\frac{v^2}{4\delta D}+\frac{D}{\delta}\alpha_n^2\right)t\right]\right)\right\} \tag{1.51}$$

donde α_n son las raíces de la siguiente ecuación:

$$\alpha_n L \cot \alpha_n L + \frac{vL}{4D} = \frac{(\alpha_n L)^2}{vL/D} \tag{1.52}$$

1.2.3 MODELOS DE DIFUSION DE BRIGHAM[5]

En 1974 Brigham demostró que había una incongruencia en varias de las soluciones previamente publicadas para el modelo de difusión, debido a que los resultados obtenidos no eran compatibles con el balance de materia. Esta incongruencia se presenta por una inadecuada interpretación de las condiciones de frontera.

Brigham hizo notar que existía una diferencia entre los datos experimentales y los resultados de los modelos matemáticos representativos del comportamiento de las concentraciones a la salida de los núcleos en las mediciones efectuadas en el laboratorio.

Los modelos predicen la concentración "in-situ" y la concentración que es medida a la salida de los núcleos es la correspondiente a la concentración fluyente.

Para demostrar lo anterior Brigham emplea el modelo de difusión para un sistema semiinfinito, utilizando las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$C(x,0)=0 \quad ; \quad x \geq 0 \tag{1.53}$$

$$C(0,t)=\frac{C_0}{2} \quad ; \quad t > 0 \tag{1.54}$$

$$C(\infty,t)=0 \quad ; \quad t > 0 \tag{1.55}$$

La solución de la ecuación (1.9) con estas condiciones es:

$$C = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x-vt}{2\sqrt{Dt}}\right) \tag{1.56}$$

La ecuación (1.56) es idéntica a la ecuación (1.37) propuesta por Gershon. Para comparar la ecuación (1.56) con los datos experimentales, es necesario evaluarla en x=L y expresarla en función de los volúmenes porosos de fluidos inyectados, por lo que la ecuación a compararse es la siguiente:

$$C = \frac{1}{2}\ \mathrm{erfc}\left(\frac{1-I}{2\sqrt{I/\delta}}\right) \qquad (1.57)$$

La Figura 1.3 muestra los resultados obtenidos aplicando la ecuación (1.57) para diferentes valores de I y un valor de δ=14. El balance de materia puede verificarse fácilmente - trazando una línea vertical en I=1, las áreas correspondientes a cada uno de los lados de esta línea deben ser iguales para que el balance de materia se cumpla. Observando con detalle esta figura se puede notar que el área 1 es diferente al área 2 (A2 es mayor que A1). Notamos también de la figura, que para I=1, se tiene justamente un valor de 0.5 de concentración.

Lo anterior verifica que el balance de materia no se cumple.

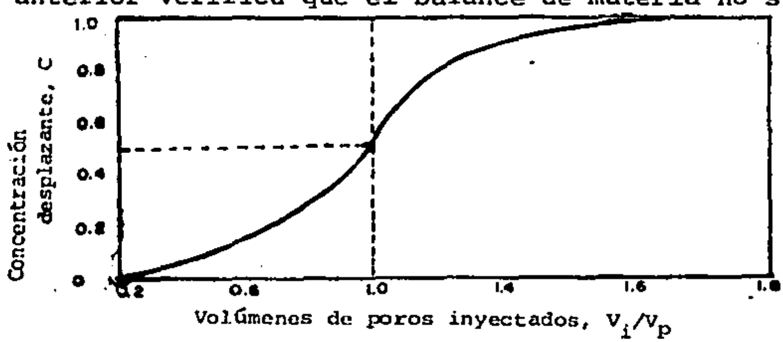


FIGURA 1.3. CONCENTRACIÓN DEL FLUIDO DESPLAZANTE EN EL AFLUENTE UTILIZANDO LA ECUACIÓN (1.57).

Brigham demostró que el error consistía en una inadecuada interpretación de las condiciones de frontera, esto puede fácilmente verificarse en la siguiente forma: el gasto - fluyente del fluido desplazante en cualquier plano arbitrario de la sección transversal, es por definición:

$$q = vA\emptyset C - DA\emptyset \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right) \qquad (1.58)$$

Dividiendo la ecuación (1.58) entre el gasto total vAØ y tomando en cuenta que la concentración del fluido desplazante será igual a su gasto dividido entre el gasto total:

$$C' = \frac{q}{vA\emptyset} = C - \frac{D}{v}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right) \qquad (1.59)$$

Debido a que esta diferencia es siempre negativa, la concentración fluyente, C', será siempre mayor que la concentración "in-situ", C, lo cual equivale a decir que, debido al gradiente de concentraciones existente, el fluido - desplazante fluye más rápido que el fluido desplazado.
Lo anterior es análogo a la teoría de Buckley-Leverett para desplazamiento inmiscible, en donde la fracción fluyente de agua, fw, es mayor que la fracción del agua "in-situ", Sw.

Para evuluar la ecuación (1.59) se requiere diferenciar la ecuación (1.56):

$$\frac{\partial C}{\partial x} = - \frac{1}{2\sqrt{Dt\pi}} \exp[(\frac{x-vt}{2\sqrt{Dt}})^2] \qquad (1.60)$$

Sustituyendo (1.60) y (1.56) en (1.59), evaluándola en x=L y expresándola en función de las variables adimensionales - definidas por Coats:

$$C' = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\frac{1-I}{2\sqrt{I/\gamma}}) + \frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma I}} \exp[-(\frac{1-I}{2\sqrt{I/\gamma}})^2] \qquad (1.61)$$

Tal como demostró Brigham[5] esta ecuación predice el comportamiento de la concentración fluyente en cualquier plano del medio poroso. La Figura 1.4 muestra una gráfica de concentración fluyente en el eje vertical y volúmenes de poro inyectados en el eje horizontal.

La gráfica se elaboró empleando un valor de γ=14. En esta gráfica se puede observar que a un valor de I=1 se tiene un valor de concentración fluyente mayor a 0.5 (aproximadamente 0.575), lo cual concuerda con lo anteriormente mencionado.

Utilizando la ecuación (1.60) se comprueba que el balance - de materia se cumple rigurosamente.

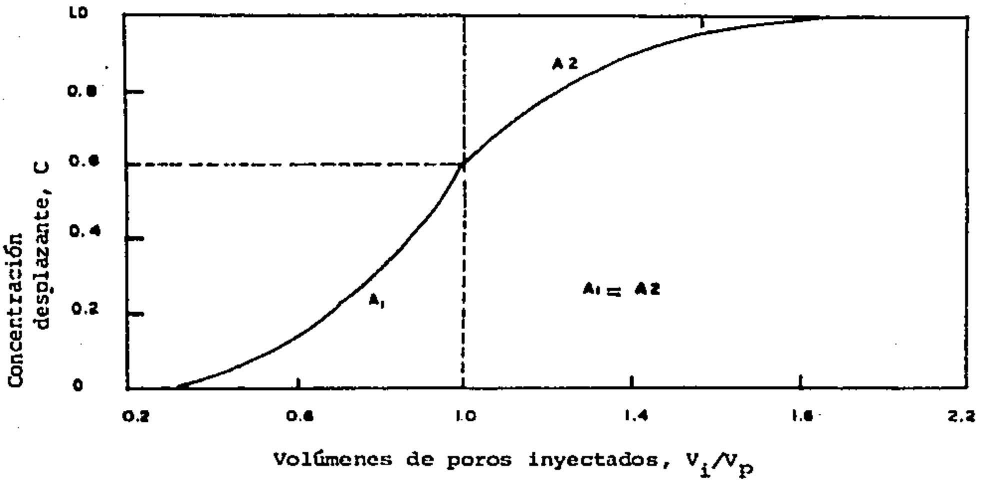


FIGURA 1.4. CONCENTRACIÓN DEL FLUIDO DESPLAZANTE EN EL AFLUENTE, UTILIZANDO LA ECUACIÓN (1.61).

Es importante notar que cuando se aplican ciertas condiciones de frontera al modelo de difusión, se obtiene como resultado un tipo de concentración, que si se pretende comparar con los datos experimentales, tendrá que tratarse de una concentración fluyente.

La diferencia entre ambas concentraciones estriba en las condiciones de frontera que se hayan empleado para obtener la solución del modelo de difusión, por ejemplo, para un sistema semifinito, la concentración "in-situ", C, se obtendrá cuando se utilicen las siguientes condiciones:

$$C(0,t) = C_o + \frac{D}{v}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)\Big|_{x=0} \quad ; \quad t > 0 \qquad (1.62)$$

$$C(\infty,t)=0 \qquad ; \qquad t > 0 \qquad (1.63)$$

En tanto que la concentración fluyente, C, se obtendrá cuando se empleen las siguientes condiciones de frontera:

$$C' \ (0,t)=C_o \qquad ; \qquad t > 0 \qquad (1.64)$$

$$C' \ (\infty,t)=0 \qquad ; \qquad t > 0 \qquad (1.65)$$

Ambas concentraciones están relacionadas mediante la ecuación de transporte (1.59).
Bajo estas circunstancias, es de relevancia establecer la diferencia entre ambas concentraciones, dado que para calcular el coeficiente de dispersión se recurre al ajuste mediante el modelo de difusión de los datos de laboratorio, obtenidos mediante pruebas de núcleos, por lo tanto la solución que se utilice para ajustar estos datos debe estar basada en una concentración fluyente, ya que se ha demostrado que la diferencia en las soluciones obtenidas aplicando los dos diferentes conjuntos de condiciones de frontera es de importancia cuando el coeficiente de dispersión adimensional es pequeño (menor que 20), situación que corresponde al proceso de desplazamiento en núcleos cortos.

Brigham analizó el medio semiinfinito con los dos tipos de condiciones de frontera interna dadas por las ecuaciones (1.62) y (1.64) respectivamente, llegando a las siguientes conclusiones:

Primeramente utilizando el modelo de difusión y las condiciones establecidas en las ecuaciones (1.64) y (1.65), con una condición inicial $C(x,0)=0$ obtuvo la siguiente solución:

$$C(x,t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x-vt}{2\sqrt{Dt}}\right) + \frac{1}{2}\exp\left(\frac{vx}{D}\right)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x+vt}{2\sqrt{Dt}}\right) \qquad (1.66)$$

Después empleó el modelo de difusión con las condiciones correspondientes para obtener una concentración "in-situ" (ecuaciones (1.62) y (1.63)) con la misma condición inicial que para el caso anterior, obteniendo:

$$C(x,t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x-vt}{2\sqrt{Dt}}\right) + \frac{vt}{\sqrt{\pi Dt}}\exp\left[-\left(\frac{x-vt}{2\sqrt{Dt}}\right)^2\right]$$

$$-\left[\frac{v}{D}(x+vt)+1\right]\frac{1}{2}\exp\left(\frac{vx}{D}\right)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x+vt}{2\sqrt{Dt}}\right)] \qquad (1.67)$$

Como podrá observarse, la ecuación (1.67) es exactamente la misma que la (1.20) propuesta por Coats.

Diferenciando la ecuación (1.67) se obtiene:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp[-(\frac{x-vt}{2\sqrt{Dt}})^2] - \frac{vt}{\sqrt{\pi Dt}}(\frac{x-vt}{2\sqrt{Dt}}) \exp[-(\frac{x-vt}{2\sqrt{Dt}})^2]$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}[\frac{v}{D}(x+vt)+1] \exp(\frac{vx}{D}) \exp[-(\frac{x+vt}{2\sqrt{Dt}})^2]$$

$$- (\frac{v}{2D}) [\frac{v}{D}(x+vt)+1] \exp(\frac{vx}{D}) \operatorname{erfc}(\frac{x+vt}{2\sqrt{Dt}})$$

$$- (\frac{v}{2D}) \exp(\frac{vx}{D}) \operatorname{erfc}(\frac{x+vt}{2\sqrt{Dt}}) \qquad (1.68)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.68) y (1.67) en la ecuación (1.59) se obtiene la ecuación correspondiente a la concentración fluyente:

$$C' = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\frac{x-vt}{2\sqrt{Dt}}) + \frac{1}{2} \exp(\frac{vx}{D}) \operatorname{erfc}(\frac{x+vt}{2\sqrt{Dt}}) \qquad (1.69)$$

La ecuación (1.66) es idéntica a la ecuación (1.69), con lo que se demuestra que para obtener una ecuación que permita calcular el comportamiento de las concentraciones fluyentes en medios porosos, es necesario emplear las condiciones de frontera adecuadas.

Se concluye entonces que es mejor establecer las condiciones adecuadas desde un principio, que derivar la concentración "in-situ" para obtener posteriormente la concentración fluyente y así ajustar correctamente el modelo a los datos experimentales.

La tabla 1 presenta un resumen de las principales soluciones obtenidas empleando el modelo de difusión con diferentes grupos de condiciones iniciales y de frontera.

1.2.4 MODELOS DE CAPACITANCIA

Al efectuar la interpretación de los datos de flujo de trazadores a través de medios porosos, se ha visto que el perfil de concentraciones generalmente no es simétrico, tal como lo establece el modelo de difusión, sino que frecuentemente presenta asimetrías tanto en la parte inicial como en la final de la prueba, lo cual ocasiona que los datos correspondientes a estas concentraciones se aparten de la línea recta predicha por la ecuación (1.3), tal como sucede al graficar estos datos en papel aritmético probabilístico. Varios investigadores han tratado de modificar el modelo básico de difusión, con objeto de tomar en cuenta el efecto de "retardamiento" en la irrupción de las concentraciones del trazador en la parte final de la prueba, para ello han sugerido considerar la división de la región a través de la cual fluye en dos partes, una en la que el fluido se mueve conti nuamente y otra en que permanece estancada, llegando así al establecimiento de los modelos "capacitivos".

1.2.4.1 MODELO DE CAPACITANCIA DE DEANS[11]

Deans propuso un modelo de capacitancia que básicamente es una extensión del modelo de celdas de mezclado (6,11, Y - 13); en este modelo se sugiere la existencia de un volumen estancado de fluido en el medio poroso, el cual se encuentra conectado con el volumen móvil por medio de algún tipo de - "resistencia" que regula la transferencia de masa entre ambas regiones. Este modelo tiene tres parámetros de ajuste: la magnitud del volumen estancado (1-f), el coeficiente de transferencia de masa entre las regiones móvil y estancada (M) y el número de etapas en que se divide el proceso.

El modelo propuesto por Deans es el siguiente:

$$- v \frac{\partial C}{\partial x} = f \frac{\partial C}{\partial t} + (1-f) \frac{\partial C^*}{\partial t} \qquad (1.70)$$

$$(1-f) \frac{\partial C^*}{\partial t} = M(C-C^*) \qquad (1.71)$$

La solución del modelo compuesto por las ecuaciones (1.70) y (1.71) es la siguiente:

a) para $I > f$

$$\frac{C}{C_o} = 1 - e^{-\beta} \int_0^{Y} e^{-X} I_o(2\sqrt{XZ})\, dX \tag{1.72}$$

donde:

$$\beta = af(J-y)/(1-f) \tag{1.73}$$

$$Y = ay \tag{1.74}$$

$$y = x/L \tag{1.75}$$

$$I = vt/L \tag{1.76}$$

$$J = I/f \tag{1.77}$$

$$a = ML/v \tag{1.78}$$

b) para $I<f$

$$\frac{C}{C_o} = 0 \tag{1.79}$$

c) para $I=f$

$$\frac{C}{C_o} = e^{-Y} \tag{1.80}$$

De acuerdo con (1.72) y (1.80) el modelo predice que al tiempo de irrupción todas las concentraciones entre 0 y exp(- Y) aparecerán en forma simultánea. Por otra parte, cuando se haya inyectado un volumen poroso (I=1), la ecuación (1.72) se simplifica a la siguiente:

$$\frac{C}{C_o} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\exp(-2Y)I_0(2Y) \tag{1.81}$$

Haciendo un análisis del modelo de capacitancia dado por la ecuación (1.72) es posible establecer las siguientes conclusiones:

a) El modelo de Deans se reducirá a una forma de modelo de difusión, cuando se cumpla la siguiente condición:

$$D = v^2(1-f)^2/M \tag{1.82}$$

b) La mayor desventaja de este modelo es que no toma en - cuenta el efecto del perfil difuso que se presenta en el rango de concentraciones de 0 a exp (-a).

1.2.4.2 MODELO DE CAPACITANCIA DE COATS Y SMITH[11]

Coats y Smith propusieron una extensión al modelo de Deans, en el cual se establece un modelo analítico de capacitancia dado por las siguientes ecuaciones:

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v \frac{\partial C}{\partial x} = f\frac{\partial C}{\partial t} + (1-f) \frac{\partial C^*}{\partial t} \tag{1.83}$$

$$(1-f) \frac{\partial C^*}{\partial t} = M(C-C^*) \tag{1.84}$$

Estas ecuaciones corresponden al modelo de difusión incluyendo los efectos correspondientes a los volúmenes estancados.

Resolviendo en forma simultánea ambas ecuaciones y aplicando las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$C(x,0)=0 \quad ; \quad 0 \leq x \leq \infty \tag{1.85}$$

$$C(0,t) = C_o + \frac{D}{v}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)\Big|_{x=0} \quad ; \quad t > 0 \qquad (1.86)$$

$$C(\infty,t) = 0 \quad ; \quad t > 0 \qquad (1.87)$$

Se obtiene la solución para el perfil de concentraciones - ("in-situ"), en el extremo productor:

$$\frac{C(J)}{C_o} = \frac{2e^{J}}{\pi}\int_0^{\infty} A_1\,[a_1\cos(\beta J-w)+a_2\,\mathrm{sen}(\beta J-w)]\,d\beta \qquad (1.88)$$

donde:

$$A_1=\exp\left(\frac{\gamma}{2}\left[1-\sqrt{\rho}\cos(\theta/2)\right]\right)/(a_1^2+a_2^2) \qquad (1.89)$$

$$\theta = \text{ang tan } \left(\frac{v_1}{u}\right) \qquad (1.90)$$

$$u = 1 + \frac{4}{\gamma}\left[1 + \frac{ba+a(1+\beta^2)}{(1+b)^2+\beta^2}\right] \qquad (1.91)$$

$$v_1= \frac{4\beta}{\gamma}\left[1 + \frac{ab}{(1+b)^2+\beta^2}\right] \qquad (1.92)$$

$$\rho = \sqrt{u^2 + v^2} \qquad (1.93)$$

$$b = af/(1-f) \qquad (1.94)$$

$$a_1= 1+\sqrt{\rho}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \beta\sqrt{\rho}\,\mathrm{sen}(\theta/2) \qquad (1.95)$$

$$a_2 = B(1+\sqrt{\rho}\cos(\tfrac{\theta}{2}) + \sqrt{\rho}\ \mathrm{sen}(\theta/2)) \qquad (1.96)$$

$$w = \frac{\gamma}{2}\sqrt{\rho}\ \mathrm{sen}(\tfrac{\theta}{2}) \qquad (1.97)$$

El modelo de capacitancia de Coats y Smith puede reducirse al modelo de difusión si se elige un coeficiente de dispersión promedio D_{av} que cumpla con la siguiente condición:

$$D_{av} = D[1+ v^2(1-f)^2/(DM)] \qquad (1.98)$$

1.2.4.3 MODELO DE CAPACITANCIA DE BRIGHAM(5)

Brigham demostró que la concentración calculada mediante la ecuación (1.88) corresponde a una concentración "in-situ" en el extremo de salida del medio poroso, por lo que, si se pretende utilizar los datos de la concentración medida en el afluente para obtener los parámetros del modelo (f, γ y a), será necesario expresar las soluciones a las ecuaciones (1.83) y (1.84) en términos de la concentración fluyente, C', ecuación (1.59).

Brigham derivó la ecuación (1.88) obteniendo la siguiente expresión:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{2e^{J}}{\pi L}\int_{0}^{\infty} \frac{\gamma}{2}\left(1 - \frac{\gamma v}{4w}\right) \frac{\exp\left[\frac{\gamma y}{2}\left(1 - \frac{\gamma v}{4w}\right)\right]}{a_1^2 + a_2^2}\,[a_1 \cos(\text{ZJ}-wy)$$

$$+ a_2 \text{ sen } (\text{ZJ}-wy)]\,dz + \frac{2e^{J}}{\pi L}\int_{0}^{\infty} \frac{\exp\left[\frac{\gamma y}{2}\left(1 - \frac{\gamma v}{4w}\right)\right]}{a_1^2 + a_2^2}\,.$$

$$[a_1 w \text{ sen}(\text{ZJ}-wy) - a_2 w \cos(\text{ZJ}-wy)]\,dz \qquad (1.99)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.98) y (1.88) en la ecuación (1.59), se obtendrá como resultado el perfil de concentraciones fluyentes:

$$\frac{C'(J)}{C_o} = \frac{2e^{J}}{\pi}\int_{0}^{\infty} B_1(B_2+B_3)\ dz \qquad (1.100)$$

donde:

$$B_1 = \frac{\exp\left[\frac{\gamma y}{2}\left(1 - \frac{\gamma v}{4w}\right)\right]}{a_1^2 + a_2^2} \qquad (1.101)$$

$$B_2 = \cos(\text{ZJ}-wy)\left[\frac{a_1}{2}\left(1 + \frac{\gamma v}{4w}\right) + \frac{a_2 w}{\gamma}\right] \qquad (1.102)$$

$$B_3 = \operatorname{sen}(\delta J - wy)\left[\frac{a_2\lambda}{2}\left(1 - \frac{\gamma v}{4w}\right) - \frac{a_1 w}{\gamma}\right] \qquad (1.103)$$

La importancia de emplear la concentración adecuada en el proceso de ajuste de los datos medidos utilizando algunos de los modelos revisados con anterioridad, radica en la correcta definición de los parámetros básicos, como el coeficiente de dispersión, el cual influye directamente sobre el cálculo de la longitud de la zona de dispersión en procesos miscibles. A su vez, la longitud de la zona de dispersión es uno de los parámetros principales para la determinación del tamaño óptimo del bache del solvente a inyectar en un proceso miscible. Por otra parte, si se emplea alguno de los modelos de capacitancia en conjunción con la expresión errónea del perfil de concentraciones, entonces además del problema ya mencionado, se determinará un volumen estancado mayor al que realmente existe.

1.3 MODELOS REPRESENTATIVOS DE MEDIOS POROSOS CON FRACTURAS NATURALES.

Las formaciones con fracturas naturales presentan discontinuidades extremas en propiedades físicas, tales como la porosidad y la permeabilidad. Cuando se tiene el proceso de flujo de un trazador a través de un sistema, naturalmente fracturado, los procesos dominantes serán la dispersión - (transporte convectivo más difusión) en la red de fracturas y la difusión en los bloques de la matriz. Normalmente, el proceso de difusión en la matriz actuará como efecto retardador de la aparición del trazador en el pozo productor, lo cual se agudizará si existe algún tipo de adsorsión del soluto de la roca, debido al incremento del área efectiva de contacto entre los granos de la roca y el soluto.

Las técnicas convencionales y disponibles para el estudio del fenómeno de difusión-dispersión en medios homogéneos no son, en general, totalmente aplicables para modelar este proceso en sistemas reales con fracturas naturales.

1.3.1 SOLUCION ANALITICA PARA LA FRACTURA

En 1981 Tang y asociados[38], desarrollaron una solución semianalítica para el problema de transporte de un contaminante en fracturas discretas, considerando los procesos de dispersión y difusión. Estas soluciones fueron usadas en la determinación las distancias recorridas por el contaminante y los tiempos de irrupción correspondientes.

El sistema idealizado de Tang se muestra en la Figura 1.5, las principales consideraciones de este modelo son las siguientes:

1. El ancho de la fractura es muy pequeño en comparación con la longitud del sistema.
2. La difusión transversal y la dispersión dentro de la fractura aseguran un mezclado completo a lo ancho de la fractura a todo tiempo.
3. La permeabilidad de la matriz porosa es muy baja y el transporte en la matriz será principalmente por difusión molecular.
4. El transporte en la fractura es mucho más rápido que el de la matriz.

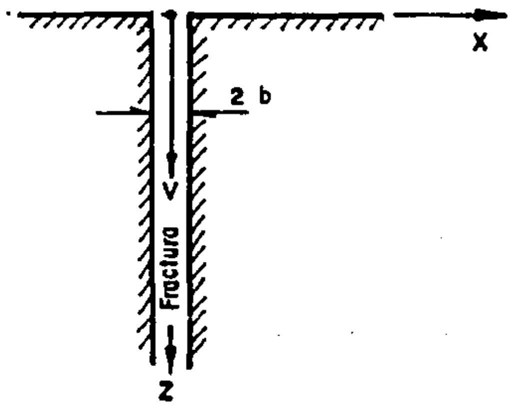


FIGURA 1.5 MODELO DE TANG Y ASOCIADOS

Los siguientes fenómenos fueron considerados:

1. Transporte convectivo sólo en la fractura.
2. Mecanismo de dispersión longitudinal en la fractura

3. Difusión molecular en la fractura, en dirección del eje de fractura.
4. Difusión molecular de la fractura a la matriz.
5. Adsorsión sobre la cara de la matriz.
6. Adsorsión en la matriz.
7. Decaimiento radioactivo.

Tang también considera que los procesos de dispersión mecánica y difusión molecular en la fractura usualmente se conjuntan como dispersión hidrodinámica.

Las ecuaciones que gobiernan el sistema propuesto por Tang son los siguientes:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{v}{R}\frac{\partial C}{\partial z} - \frac{D}{R}\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \lambda C - \frac{\theta D'}{bR}\frac{\partial C'}{\partial x}\Big|_{x=b} = 0 \quad ; \quad 0 \leq z \leq \infty \qquad (1.104)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{D'}{R'}\frac{\partial^2 C'}{\partial x^2} + \lambda C' = 0 \quad ; \quad b \leq x \leq \infty \qquad (1.105)$$

donde:

z: Coordenada al eje de fractura, (L);

t: Tiempo, (T)

C: Concentración del soluto en solución en la fractura igual a $C(z,t)$, (M/L^3)

λ: Constante de decaimiento $(1/t)$;

2b: Ancho de fractura, (L);

v: Velocidad del agua subterránea en la fractura, (L/t);

C': Concentración del soluto en solución en la matriz igual a $C'(x,z,t)$, (M/L^3);

θ: Porosidad;

D: Coeficiente de difusión hidrodinámico (L^2/t);

$$D = \alpha_L v + D^* ; \qquad (1.106)$$

α_L: Dispersividad en dirección del eje de fractura, (L);

D*: Coeficiente de dispersión molecular en agua (L^2/t);

R: Coeficiente de retardamiento.

$$R = 1 + K_f/b \qquad (1.107)$$

K_f: Coeficiente de distribución (masa de soluto adsorbido por unidad de área de superficie dividida por la concentración de soluto en solución).

D': Coeficiente de difusión efectivo en la matriz, (L^2/t);

$$D' = \sigma D^* \qquad (1.108)$$

σ: Tortuosidad de la matriz (Bear, J., Dynamics of Fluids in poros media, Elsivier, NY, (1972)

R': Coeficiente de retardamiento de la matriz;

$$R' = 1 + \frac{\rho_b}{\theta} K_m \qquad (1.109)$$

ρ_b: Densidad de la roca de la matriz (M/L^3);

K_m: Coeficiente de distribución en la matriz (masa de soluto adsorbido por unidad de volumen de sólido dividido por la concentración de soluto en solución).

Las condiciones iniciales y de frontera para las ecuaciones (1.104) y (1.105) son las siguientes:

$$C(o,t) = C_o \tag{1.110}$$

$$C(\infty,t) = 0 \tag{1.111}$$

$$C(z,0) = 0 \tag{1.112}$$

$$C'(b,z,t) = C(z,t) \tag{1.113}$$

$$C'(\infty,z,t,) = 0 \tag{1.114}$$

$$C'(x,z,0) = 0 \tag{1.115}$$

Donde C_o es la concentración de inyección.

Aplicando el método de la Transformada de Laplace a las ecuaciones (1.104) y (1.105), se obtienen las soluciones analíticas para la distribución de concentraciones en la fractura y en la matriz en el espacio de Laplace:

$$\frac{\bar{C}}{C_o} = \exp\left(\frac{vz}{2D}\right)\frac{1}{s}\exp\left\{-\frac{vz}{2D}\sqrt{1+\frac{4D}{v^2}\left[\frac{\sqrt{s+\lambda}}{bR}\,\theta\sqrt{D'}+s+\lambda\right\}}\right. \tag{1.116}$$

$$\bar{C}' = \bar{C}\ \exp\left(-\sqrt{\frac{R'}{D'}(s+\lambda)}\ (x-b)\right) \tag{1.117}$$

Tang invierte las ecuaciones (1.116) y (1.117) y presenta una solución de tipo integral (Tang, 1981) en el espacio real. Las ecuaciones que representan la distribución de la concentración en la fractura y en la matriz son las siguientes:

$$\frac{C}{C_O} = \frac{\exp(vB)}{\sqrt{\pi}} \int_{\ell}^{\infty} \exp\left[-\xi^2 - \frac{v^2 B^2}{4\xi^2}\right]\ \exp(-nB^2)\left(\exp[-\lambda^{\frac{1}{2}} y]\right.$$

$$\left.\cdot\ \mathrm{erfc}\left[\frac{y}{2T} - \lambda^{\frac{1}{2}} T\right]\ \exp[\lambda^{\frac{1}{2}} y]\ \mathrm{erfc}\left[\frac{y}{2T} + \lambda^{\frac{1}{2}} T\right]\right) d\xi \tag{1.118}$$

donde:

$$\ell = \frac{B}{2}\left(\frac{R}{Dt}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{C'}{C_O} = \frac{\exp(vB)}{\sqrt{\pi}} \int_{\ell}^{\omega} \exp\left[-\xi^2 - \frac{v^2 B^2}{4\xi^2}\right]\ \exp(-nB^2)\ \left(\exp(-\lambda^{\frac{1}{2}} y')\right.$$

$$\left.\mathrm{erfc}\left[\frac{y'}{2T} - \lambda^{\frac{1}{2}} T\right] - \exp[\lambda^{\frac{1}{2}} y']\ \mathrm{erfc}\left[\frac{y'}{2T} + \lambda^{\frac{1}{2}} T\right]\right) d\xi \tag{1.119}$$

Donde:

$$y' = \frac{\nu^2 \beta^2 B^2}{4A\xi^2} + B(x-b)$$

$$\eta = \frac{\lambda R}{4D\xi^2}$$

$$T = (t - \frac{\nu^2 \beta^2 B^2}{4\xi^2})^{1/2} = (t - \frac{RB^2}{4D\xi^2})^{1/2}$$

$$y = \frac{\nu^2 \beta^2 B^2}{4A\xi^2}$$

$$\nu = \frac{V}{2D}$$

$$\beta^2 = 4RD/v^2$$

$$A = \frac{bR}{\theta(R'D')^{1/2}}$$

$$B = (\frac{R'}{D'})^{1/2}$$

$$R' = 1 + \frac{\rho_b}{\theta} K_m$$

$$\xi \geq \frac{B}{2} (\frac{R}{Dt})^{1/2}$$

$$t \geq RZ^2/4D\xi^2$$

1.3.2. MODELO DE JENSEN Y HORNE[22]

En 1983, Jensen y Horne desarrollaron un modelo matemático para describir el flujo de trazadores a través de medios porosos.

El modelo de doble porosidad formulado por Jensen y Horne se presenta esquematizado en la Figura 1.6, en la que se ilustra una fuente de trazador constante C_o que viaja a través de una fractura y una zona de la matriz en la cual el fenómeno de difusión está presente.

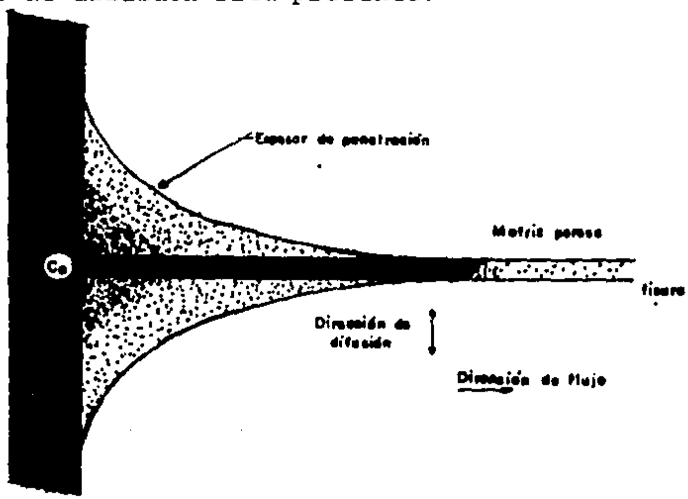


FIGURA 1.6. MODELO DE JENSEN Y HORNE

Con base en el balance de materia, considerando los fenómenos de convección en la fractura y, simultáneamente, difusión y adsorción en los poros de la matriz, Jensen y Horne describen estas condiciones de flujo mediante las siguientes ecuaciones:

$$R \frac{\partial C_f}{\partial t} - \frac{2D_e}{\delta} \frac{\partial C_p}{\partial y}\bigg|_{y=0} + U_f \frac{\partial C_f}{\partial x} = 0 \qquad (1.120)$$

$$D_a \frac{\partial^2 C_p}{\partial y^2} = \frac{\partial C_p}{\partial t} \qquad (1.121)$$

donde:

C_f: Concentración de trazador en la fractura;

C_p: Concentración de trazador en los poros de la Matriz;

D_a: Coeficiente de difusión aparente (L^2/t);

D_e: Coeficiente de difusión efectivo, $D_e = D_a \rho_b K_d$

siendo:

- ρ_b: Densidad media de la roca
- K_d: Coeficiente de adsorsión (reacción química de primer orden).

δ: Ancho de fractura, (L);

U_f: Velocidad del fluído en la fractura, X_o/T_w, (L/T);

T_w: Tiempo de residencia del agua, (T);

X_o: Distancia recorrida desde el pozo inyector hasta el pozo productor, (L);

Las condiciones iniciales y de frontera son un pulso rectan gular finito de trazador, de duración ΔT inyectado en la entrada de la fractura a $t = 0$ y tanto la fractura como la roca se encuentran, originalmente, sin concentración de trazador.

Estas condiciones se expresan con las siguientes ecuaciones:

Condiciones Iniciales:

$$C_p\ (x,y,0) = C_f\ (x,y,0) \tag{1.122}$$

Condiciones de Frontera:

$$C_p\ (x,\infty,t) = 0 \tag{1.123}$$

$$C_f\ (0,y,\Delta t) = C_o \tag{1.124}$$

siendo Δt la duración del pulso.

La solución de las ecuaciones (1.120) y (1.121) con las condiciones de frontera (1.122) a (1.124) es:

$$C_f = \frac{M}{Q}\left\{\frac{D_e\ T_w\ \exp\left[-\dfrac{\left(\dfrac{D_e\ T_w}{D_a^{5}\ (T_{wR})^{5}\ \delta}\right)^2}{\dfrac{t}{T_{wR}} - 1}\right]}{D_a^{.5}\ (T_{wR})^{1.5}\ \delta\sqrt{\pi}\left[\dfrac{t}{T_{wR}} - 1\right]^{1.5}}\right\} \tag{1.125}$$

Esta solución se obtuvo considerando que C_o es la masa total de entrada durante el intervalo de tiempo Δt dividida entre el volumen total de fluído que fluye durante Δt, $[M/(Q\Delta T)]$ y que la duración del pulso es muy pequeña.

1.3.3 MODELO BIDIMENSIONAL DE WALKUP Y HORNE(44)

En 1984 Horne y Walkup desarrollaron un modelo bidimensional representando el sistema de fracturas del yacimiento con un esquema idealizado tal como se muestra en la Figura 1.7.

En este esquema representativo del yacimiento, los autores consideran dos volúmenes de control, una región móvil en la que se incluyen los fenómenos de convección en la dirección "x", difusión en la dirección "y", y adsorsión del trazador en las paredes de la roca; y una región inmóvil en la cual actúan los procesos de difusión en dirección "y", así como la adsorsión.

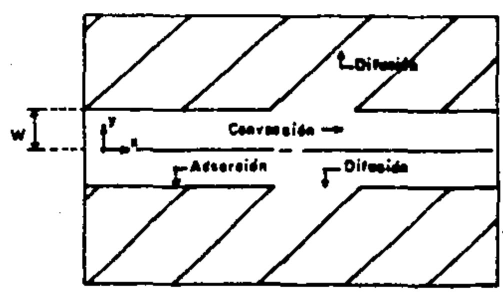


FIGURA 1.7. MODELO DE WALKUP Y HORNE

Efectuando un balance de materia tanto en la región móvil como en la inmóvil y suponiendo que no existe producción - del trazador dentro del volumen de control, así como densidad de fluido constante, Walkup y Horne llegan a las expresiones que gobiernan el flujo del trazador en medios fracturados:

$$(\phi_m + \rho_b\ P_K)\ \frac{\partial C_m}{\partial t} = \phi_m\ D_m^y\ \frac{\partial^2 C_m}{\partial y^2} - \phi_m\ V_m\ \frac{\partial C_m}{\partial x} \qquad (1.126)$$

$$[\phi_{im} + \rho_b\ (1-P)K]\ \frac{\partial C_{im}}{\partial t} = D_{im}^y\ \ \phi_{im}\ \frac{\partial^2 C_{im}}{\partial y^2} \qquad (1.127)$$

Donde:

C_{im}: es la concentración del trazador en la zona inmóvil.
C_m: es la concentración del trazador en la zona móvil.
ϕ_m: es la porosidad en la región móvil.
ϕ_{im}: es la porosidad en la región inmóvil.
ρ_b: densidad de la roca.
K: coeficiente de transferencia de masa en el fenómeno - de adsorción.
P: fracción del total de adsorción en la región móvil.

Para simplificar la solución de estas dos ecuaciones se utilizaron las siguientes variables adimensionales:

$$C_1 = \frac{C_m - C_i}{C_o - C_i} \qquad (1.128)$$

$$C_2 = \frac{C_{im} - C_i}{C_o - C_i} \qquad (1.129)$$

$$X_D = \frac{X}{W} \qquad (1.130)$$

$$y_D = \frac{Y}{w} \qquad (1.131)$$

$$\beta = \frac{\phi_w + \rho_{PK}}{\phi_T + \rho_K} \qquad (1.132)$$

$$R = [\frac{\phi_T + \rho_K}{\phi_m + v_m}] \cdot w \qquad (1.133)$$

$$Pe = \frac{V_{mw}}{D_m} \qquad (1.134)$$

$$\alpha = [\frac{\phi_{im}\ D_{im}}{\phi_m\ D_m}] \qquad (1.135)$$

Todas las variables anteriores son adimensionales, excepto R que tiene unidades de tiempo.

Las ecuaciones (1.120) y (1.121) expresadas en función de las variables adimensionales son las siguientes:

$$\beta R\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right) = \frac{1}{P_e}\frac{\partial^2 C_1}{\partial y_D^2} - \frac{\partial C_1}{\partial X_D} \tag{1.136}$$

$$(1-\beta)\ R\ \frac{\partial C_2}{\partial t} = \frac{\alpha}{P_e}\frac{\partial^2 C_e}{\partial y_D^2} \tag{1.137}$$

Para dar solución a las ecuaciones anteriores se emplearon las siguientes condiciones iniciales y de frontera adimensionales

$$C_1(X_D, y_D, 0) = C_2(X_D, Y_D, o) = 0 \tag{1.138}$$

$$\left.\frac{\partial C_1}{\partial y_D}\right|_{y_D=0} = 0 \tag{1.139}$$

$$\left.\frac{\partial C_1}{\partial y_D}\right|_{y_D=1} = \alpha \left.\frac{\partial C_2}{\partial y_D}\right|_{y_D=1} \tag{1.140}$$

$$\left.C_1\right|_{y_D=1} = \left.C_2\right|_{y_D=1} \tag{1.141}$$

$$\left.\frac{\partial C_2}{\partial y_D}\right|_{y_D=\infty} = 0 \tag{1.142}$$

$$C_1(0, y_D, t_{D)} = 1 \tag{1.143}$$

El método general de solución, consistió en transformar las ecuaciones mediante la Transformada de Laplace con respecto al tiempo (t) y transformarlas otra vez respecto al espacio. Con las ecuaciones en el espacio transformado, la solución debe obtenerse directamente.

Sin embargo, la solución analítica resultante no puede ser invertida analíticamente. Por tanto, para expresar la solución en el espacio real se requirió utilizar dos veces el algoritmo de inversión numérica de Stehfest[37].

Las soluciones analíticas en el espacio de Laplace son las siguientes:

$$C_1^P = \frac{C_o}{s(P+s\beta R)} - \left[\frac{Z\alpha C_o}{s(P+s\beta R)}\right] \frac{\exp(m\,y_D) + \exp(-m\,y_D)}{(1-\alpha)M(\exp(m) - \exp(-m)) + Z\,[\exp(m) - \exp(-m)]} \quad (1.144)$$

$$C_2^P = \left(C_1^P \Big|_{y_D=1}\right) \exp\,[t(1-y_D)] \quad (1.145)$$

donde:

$$Z = \left[\frac{P_e(1-\beta)Rs}{\alpha}\right]^{1/2} \quad (1.146)$$

$$m = \left(\frac{1}{P_e}\right)^{1/2} (P+s\beta R)^{1/2} \quad (1.147)$$

Las expresiones (1.144) y (1.145) están en el espacio (p,y,

s) para antitransformarlas al espacio (x,y,t), es necesario utilizar el algoritmo de Stehfest dos veces, primero para invertir el espacio (p,y,s) al espacio (x,y,s) y, posteriormente, para invertir el espacio (x,y,s) al espacio (x,y,t).

CAPITULO 2: PLANTEAMIENTO Y SOLUCION DEL MODELO

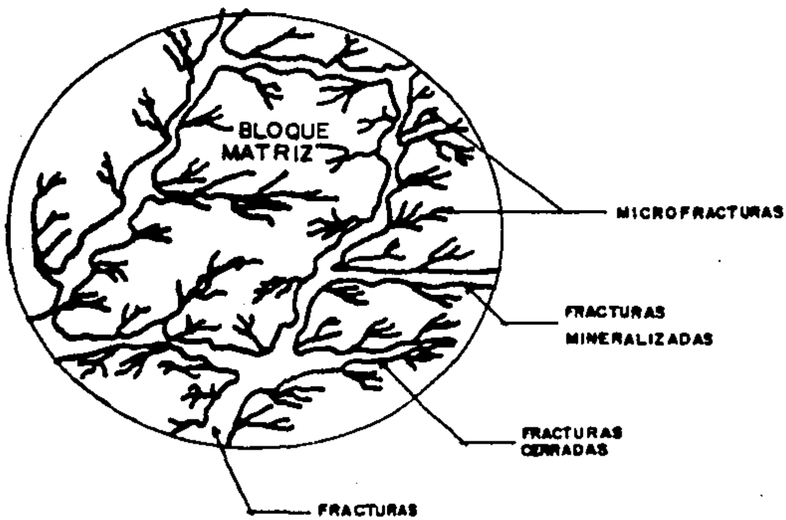
El modelo que se presenta en este trabajo, es un modelo de doble porosidad. Los bloques de matriz y las fracturas corresponden a las porosidades primaria y secundaria respectivamente, considerando así los dos tipos de medios, continuo y discontinuo.

Este modelo representa el yacimiento naturalmente fracturado por medio de dos regiones: una región móvil, donde los fenómenos de difusión y convección están presentes y una región estancada o inmóvil donde sólo se presentan los fenómenos de difusión y adsorción. Ambas regiones están interconecatadas por medio de una capa muy delgada de fluido estancada, que forma parte de la región inmóvil, la cual controla la transferencia de masa entre las dos regiones. La región móvil representan al sistema de fracturas, donde el trazador puede alcanzar altas velocidades. La roca del yacimiento y sus heterogeneidades, tales como microfracturas y fracturas cerradas, son representadas por un cuerpo poroso equivalente donde el fluido permanece inmóvil, lo que constituye la región estancada. La idea de dividir el sistema de flujo en dos regiones ha sido utilizada por varios autores (11,26 y 44).

El modelo propuesto se muestra en la Figura 2.1, el sistema idealizado esta constituído por dos regiones: la región móvil (1) y la región estancada o inmóvil (2). Estas dos regiones están en contacto a través de una película delgada - de fluido estancado cuyo espesor es δ.

Como se puede observar de la Figura 2.1.b. en el esquema idealizado se considera: un bloque de espesor E, el cual es repetitivo; una fractura de ancho 2w, limitada en ambos extremos por el medio poroso. La región móvil tiene un ancho de $2(w-\delta)$, siendo δ el espesor de una película muy delgada que limita la región móvil en dirección "y", que está incluida en la zona estancada por lo que, la región estancada tiene un espesor de $E / 2 - w$. Esta película representa la resistencia que controla la transferencia de masa entre las regiones estancada y móvil.

a. SISTEMA REAL



b. SISTEMA IDEAL

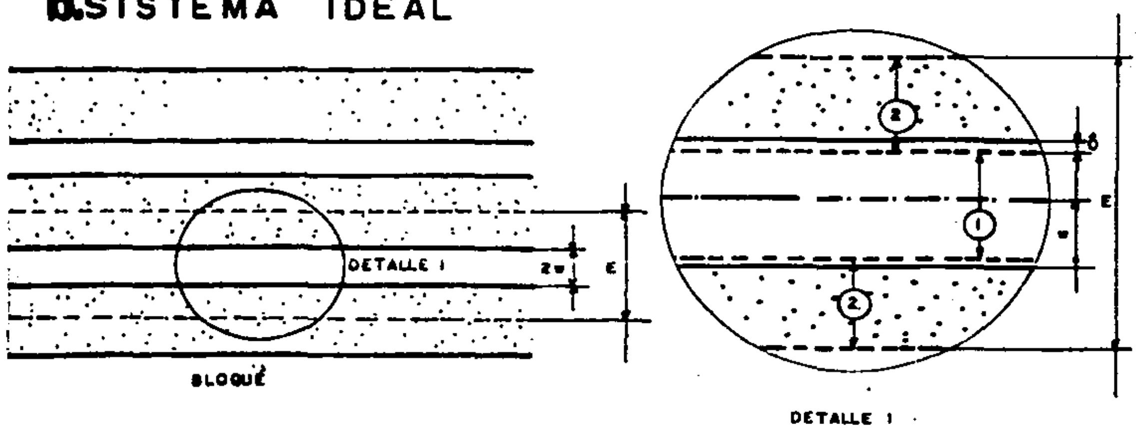


FIGURA 2.1 MODELO PROPUESTO

En la región móvil se están considerando los siguientes fenómenos:

a) Difusión, sólo en dirección "x" debido a que se está suponiendo que la inyección se lleva a cabo en y=0 y que el ancho de la fractura es muy pequeño, por lo que el fluido inyectado instantáneamente ocupa toda la sección transversal de la zona móvil y como consecuencia no existe variación de la concentración a lo largo de "y".

b) Convección, por las razones del inciso a), tampoco se tendrá variación de la velocidad del fluido en dirección "y", por lo cual sólo se considera convección en "x".

c) Decaimiento, para el caso de un trazador radioactivo, cuyo tiempo de declinación sea mayor que el tiempo de tránsito de la prueba.

En la región estancada se consideran los siguientes procesos:

a) Difusión, sólo en dirección "y", ya que la difusión en sentido longitudinal se supone despreciable comparada con la que ocurre transversalmente.

b) Adsorción, incluyendo en su caso, la adsorción de un trazador radioactivo, así como la transferencia de masa de un trazador químico.

c) Decaimiento, lo mismo que el inciso c) de la región móvil.

Con las consideraciones anteriores y suponiendo una producción despreciable del trazador dentro del volumen de control, así como un fluido de densidad constante, se efectuó un balance de materia en ambas regiones resultando las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} = Dm \frac{\partial^2 C_m}{\partial x^2} - v_m \frac{\partial C_m}{\partial x} - \lambda Cm - \frac{\emptyset_e}{(w-\delta)} D_e^y \left.\frac{\partial C_e}{\partial y}\right|_{(w-\delta)} \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial C_e}{\partial t} + \lambda C_e - \left[\frac{D_e^y}{1+\frac{\rho K(1-\emptyset_e)}{\emptyset_e}}\right] \frac{\partial^2 C_e}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.2)$$

En el Apéndice B se presenta en detalle el desarrollo de estas ecuaciones.

El término que liga las dos regiones consideradas se encuentra en la ecuación (2.1) y corresponde a una transferencia de masa debida a difusión, que pierde la región móvil y gana la inmóvil, esto ocurre en $y = w - \delta$.

Las condiciones iniciales y de frontera que se consideraron son las siguientes:

$$C_m(x,0) = C_i \qquad ; \quad x \geq 0 \qquad (2.3)$$

$$C_m(0,t) = C_o \qquad ; \quad t > 0 \qquad (2.4)$$

$$C_m(\infty,t) = C_i \qquad ; \quad t > 0 \qquad (2.5)$$

$$C_e(x,y,0) = C_i \qquad ; \quad x > 0 \qquad (2.6)$$

$$C_e(x,w-\delta,t) = C_m(x,t) \quad ; \quad t > 0 \qquad (2.7)$$

$$\left.\frac{\partial C_e}{\partial y}\right|_{(x,\frac{E}{2},t)} = 0 \qquad ; \quad t > 0 \qquad (2.8)$$

Para simplificar la solución a este problema de valores en la frontera se definieron las siguientes variables adimensionales:

$$C_{D1} = \frac{C_m - C_i}{C_o - C_i} \qquad (2.9)$$

$$C_{D2} = \frac{C_e - C_i}{C_o - C_i} \qquad (2.10)$$

$$x_D = \frac{x}{L} \qquad (2.11)$$

$$y_D = \frac{y}{L} \qquad (2.12)$$

$$t_D = \frac{v_{mt}}{L} \tag{2.13}$$

Las ecuaciones (2.1) y (2.2) expresadas en función de las - variables adimensionales son las siguientes:

$$\frac{1}{P_{e1}} \frac{\partial^2 C_{D1}}{\partial x_D^2} - \frac{\partial C_{D1}}{\partial x_D} - \gamma C_{D1} + \xi \left.\frac{\partial C_{D2}}{\partial y_D}\right|_{\frac{w-\delta}{L}} - \frac{\partial C_{D1}}{\partial t_D} = 0 \tag{2.14}$$

$$\frac{R}{P_{e2}} \frac{\partial^2 C_{D2}}{\partial y_D^2} - \gamma C_{D2} - \frac{\partial C_{D2}}{\partial t_D} = 0 \tag{2.15}$$

donde:

$$P_{e1} = \frac{v_{mL}}{D_m} \tag{2.16}$$

$$P_{e2} = \frac{v_{mL}}{D_e} \tag{2.17}$$

$$\xi = \frac{\phi_e D_e^y}{v(w-\delta)} \tag{2.18}$$

$$\gamma = \frac{L}{v} \lambda \tag{2.19}$$

$$R = \frac{\emptyset_e}{\emptyset_e + \rho_K (1-\emptyset_e)} \tag{2.20}$$

Las condiciones iniciales y de frontera adimensionales se presentan a continuación:

$$C_{D1}(x_D, 0) = 0 \tag{2.21}$$

$$C_{D2}(x_D, y_D, 0) = 0 \tag{2.22}$$

$$C_{D1}(0, t_D) = 1 \tag{2.23}$$

$$C_{D1}(\infty, t_D) = 0 \tag{2.24}$$

$$C_{D2}(x_D, \tfrac{W-\delta}{L}, t_D) = C_{D1}(x_D, t_D) \tag{2.25}$$

$$\left.\frac{\partial C_{D_2}}{\partial y_D}\right|_{(x_D, \frac{E}{2L}, t_D)} = 0 \tag{2.26}$$

Para encontrar la solución a las ecuaciones (2.14) y (2.15) se empleó el método de Transformada de Laplace, se transformó el espacio (x,y,t) al espacio (x,y,s). La solución analítica en el espacio de Laplace para las regiones móvil y estancada está dada por las siguientes ecuaciones:

$$\bar{C}_{D1} = \frac{1}{s} \exp\left(\frac{P_{e1} x_D}{2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{4}{P_{e1}}\left(s + \lambda + \xi m_1 \tanh\left[\frac{m_1}{2L}(E - 2w + 2\delta)\right]\right)}\right]\right) \tag{2.27}$$

$$\bar{C}_{D2} = \bar{C}_{D1}(x_D, s) \left\{ \frac{\exp\left[-m_1\left(\frac{E}{L} - y_D\right)\right] + \exp(-m_1 y_D)}{\exp\left[-m_1\left(\frac{E - w + \delta}{L}\right)\right] + \exp\left[-m_1\left(\frac{w - \delta}{L}\right)\right]} \right\} \tag{2.28}$$

Donde:

$$m_1 = \sqrt{\frac{P_{e2}}{R}(s + \lambda)}$$

El desarrollo de las ecuaciones anteriores se presenta con detalle en el Apéndice C.

Para calcular la distribución de concentración en el espacio - real a partir de las ecuaciones (2.27) y (2.28) se utilizó el algoritmo de Stehfest [37].

CAPITULO 3: VALIDACION DEL MODELO

El modelo objeto de este estudio se comparó con los modelos desarrollados por Coats[10] y por Tang y asociados[38], los cuales fueron referidos en las secciones 1.2.1 y 1.3.1 respectivamente.

La comparación analítica demostró que los modelos antes mencionados corresponden a casos particulares del modelo que aquí se propone. Para el caso en que la porosidad y el coeficiente de difusión de la región estancada son muy pequeños, es decir $\xi\sqrt{P_{e_2}}\approx 0$, el sistema se comporta como un medio homogéneo y entonces el modelo propuesto se reduce al modelo de Coats.

Por otro lado, la solución del modelo propuesto se reducirá a la correspondiente al modelo de Tang y asoc., siempre y cuando la frontera externa correspondiente a la región estancada no influya en el comportamiento del flujo del trazador, es decir, que el sistema en dirección "y", sea infinito para fines prácticos.

3.1. COMPARACION ANALITICA CON EL MODELO DE COATS[10]

La ecuación (2.27) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\bar{C}_{D1}= \frac{1}{s} \exp(\frac{x_D P_{e1}}{2}) \exp(-x_D\sqrt{\frac{P_{e1}^2}{4} +P_{e1}(s+\gamma+\xi\sqrt{\frac{P_{e2}}{R}(s+\gamma)}\tanh[\sqrt{\frac{P_{e2}}{R}(s+\gamma)}(\frac{E-2w+2\delta}{2L})]}) \quad (3.1)$$

Considerando que el trazador en estudio es químico ($\lambda = 0$) y que R=1 la ecuación (3.1) se reduce a la siguiente:

$$\bar{C}_{D1}= \frac{1}{s} \exp(\frac{x_D P_{e1}}{2}) \exp(- x_D\sqrt{\frac{P_{e1}^2}{4} + P_{e1}(s+\xi\sqrt{P_{e2}}\sqrt{s}\tanh[\sqrt{P_{e2}s}\ (\frac{E-2w+2\delta}{2L})]}) \quad (3.2)$$

Para el caso en el que la porosidad y el coeficiente de difusión de la region estancada sean muy pequeños, es decir: $\xi\sqrt{P_{e2}}\approx 0$, esta región se comportaría como si fuera impermeable y por consiguiente sólo estaría actuando un sólo medio, la región móvil. En estas condiciones la ecuación (3.2) se transforma en la siguiente ecuación:

$$\bar{C}_{D1}= \frac{1}{s} \exp(\frac{x_D P_{e1}}{2}) \ \exp(-x_D\sqrt{\frac{P_{e1}^2}{4} + P_{e1}s}) \quad (3.3)$$

La inversión analítica de la ecuación (3.3) es la siguiente:

$$C_{D1}(x_D, t_D) = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left[\frac{\sqrt{P_{e1}}\,x_D}{2\sqrt{t_D}} - \sqrt{\frac{P_{e1} t_D}{4}}\right] + \frac{1}{2}\exp(x_D\,P_{e1})$$

$$\mathrm{erfc}\left[\frac{x_D\sqrt{P_{e1}}}{2\sqrt{t_D}} + \sqrt{\frac{P_{e1}\,t_D}{4}}\right] \qquad (3.4)$$

Sustituyendo las definiciones de los parámetros adimensionales (2.11), (2.13) y (2.14), en la ecuación (3.4), se tiene la siguiente ecuación en términos de las variables reales.

$$C_{D1}(x,t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x - v_m t}{\sqrt{4 D_m t}}\right) + \frac{1}{2}\exp\left(\frac{v_m x}{D_m}\right)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x + v_m t}{\sqrt{4 D_m t}}\right) \qquad (3.5)$$

La ecuación (3.5) representa el caso particular de la ecuación (3.1), para el cual el medio estancado no tiene influencia sobre el flujo de trazador a través del sistema de fracturas, representado esquemáticamente en la Figura 2.1.

La ecuación (3.5) es idéntica a la ecuación (1.15), desarrollada por Coats aplicando el modelo de difusión a un medio homogéneo y considerando un sistema semiinfinito.

Lo anterior demuestra que el modelo propuesto contiene como caso particular la solución para un medio homogéneo.

3.2 COMPARACION ANALITICA CON EL MODELO DE TANG Y ASOC.[38]

Las ecuaciones (2.1) y (2.2) pueden reescribirse de la siguiente manera:

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} - D_m \frac{\partial^2 C_m}{\partial x^2} + v_m \frac{\partial C_m}{\partial x} + \lambda C_m - \frac{\phi_e}{(w-\delta)} D_e^y \left.\frac{\partial C_e}{\partial y}\right|_{w-\delta} = 0 \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial C_e}{\partial t} + \lambda C_e - \beta \frac{\partial^2 C_e}{\partial y^2} = 0 \qquad (3.2)$$

donde:

$$\beta = \frac{D_e^y}{1 + \frac{\rho K(1-\phi_e)}{\phi_e}} \qquad (3.3)$$

Aplicando el método de Transformada de Laplace a la ecuación (3.2) se obtiene:

$$\frac{d^2 \bar{C}_e}{d\, y^2} - \frac{\bar{C}_e}{\beta} (s+\lambda) = 0 \qquad (3.4)$$

Las raíces de esta ecuación son:

$$m_{1\,2} = \pm\sqrt{\frac{(s+\delta)}{\beta}}$$

Entonces la solución general de (3.4) es:

$$\bar{C}_e = C_1 \exp(m_1 y) + C_2 \exp(m_2 y) \tag{3.5}$$

Las condiciones de frontera (2.7) y (2.8) en el espacio de Laplace son las siguientes:

$$\bar{C}_{e(x,w-\delta,s)} = \bar{C}_{m(x,s)} \tag{3.6}$$

$$\left.\frac{d\bar{C}_e}{dy}\right|_{y_D = \frac{E}{2}} = 0 \tag{3.7}$$

Aplicando las condiciones (3.6) y (3.7) a la ecuación (3.5) se obtiene que:

$$C_2 = \frac{\bar{C}_m}{\exp[-m_1(E-w+\delta)] + \exp[-m_1(w-\delta)]} \tag{3.8}$$

$$C_1 = \frac{\bar{C}_m \exp(-m_1 E)}{\exp[-m_1(E-w+\delta)] + \exp[-m_1(w-\delta)]} \tag{3.9}$$

donde m_1 es la raíz positiva.

Sustituyendo (3.8) y (3.9) en (3.5), se tiene:

$$\bar{C}_c = \bar{C}_m\left\{\frac{\exp[-m_1(E-y)] + \exp[-m_1 y]}{\exp[-m_1(E-w+\delta)] + \exp[-m_1(w-\delta)]}\right\} \tag{3.10}$$

La diferenciación de (3.10) evaluada en $y = w - \delta$ es la si guiente:

$$\left.\frac{d\bar{C}_e}{dy}\right|_{w-\delta} = \bar{C}_m\, m_1\left\{\frac{\exp[-m_1(E-w+\delta)] - \exp[-m_1(w-\delta)]}{\exp[-m_1(E-W+\delta)] + \exp[-m_1(w-\delta)]}\right\} \tag{3.11}$$

Aplicando el método de Transformada de Laplace a la ecuación (3.1) y sustituyendo la ecuación (3.11) se tiene:

$$s\bar{C}_m - D_m\frac{d^2\bar{C}_m}{dx^2} + v_m\frac{d\bar{C}_m}{dx} + \lambda\bar{C}_m - \varepsilon\bar{C}_m\,\zeta = 0 \tag{3.12}$$

donde:

$$\zeta = m_1\left\{\frac{\exp[-m_1(E-w+\delta)] - \exp(-m_1E/2)}{\exp[-m_1(E-w+\delta)] + \exp[-m_1(w-\delta)]}\right\} = m_1\tanh\left(\frac{m_1}{2}(E-2w)\right) \tag{3.13}$$

$$\varepsilon = \frac{\phi_e D_e^y}{(w-\delta)} \tag{3.14}$$

La ecuación (3.12) se puede escribir como:

$$\frac{d^2\bar{C}_m}{dx^2} - \frac{V_m}{D_m} - \frac{\bar{C}_m}{D_m}\{s+\lambda-\varepsilon\zeta\} = 0 \tag{3.15}$$

Las raíces de (3.15) son:

$$r_1=[\frac{V_m}{D} + \sqrt{\frac{V_m^2}{D_m^2} + \frac{4}{D_m}(s+\lambda-\varepsilon\zeta)}]\frac{1}{2} \tag{3.16}$$

$$r_2=[\frac{V_m}{D} + \sqrt{\frac{V_m^2}{D_m^2} + \frac{4}{D_m}(s+\lambda-\varepsilon\zeta)}]\frac{1}{2} \tag{3.17}$$

de donde la solución general de (3.15) es:

$$\bar{C}_m = C_1 \exp(r_1 x)+C_2 \exp(r_2 x) \tag{3.18}$$

Suponiendo que la concentración inicial es despreciable, las condiciones de frontera (2.4) y (2.5) en el espacio de Laplace son las siguientes:

$$\bar{C}_m (0,s) = \frac{C_o}{s} \tag{3.19}$$

$$\bar{C}_m\ (\infty, s) = 0 \tag{3.20}$$

Aplicando las condiciones (3.19) y (3.20) a la ecuación - - (3.18) se obtiene que:

$$C_1 = 0 \tag{3.21}$$

$$C_2 = \frac{C_o}{s} \tag{3.22}$$

Sustituyendo (3.21) y (3.22) en (3.18) se tiene:

$$\bar{C}_m = \frac{C_o}{s} \exp\left(\frac{v_{mx}}{2D}\right) \exp\left[-\frac{v_{mx}}{2D}\sqrt{1+\frac{4D_m}{v_m^2}(s+\lambda-\varepsilon\zeta)}\right] \tag{3.23}$$

Sustituyendo (3.13) y (3.14) en (3.23) se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{\bar{C}_m}{C_o} = \exp\left(\frac{v_{mx}}{2D}\right)\frac{1}{s}\exp\left\{-\frac{v_{mx}}{2D}\sqrt{1+\frac{4D_m}{v_m^2}\left(s+\lambda+\frac{\phi_e D_e^Y}{(w-\delta)}m_1\tanh\left[\frac{m_1}{2}(E-2w+2\delta)\right]\right)}\right\} \tag{3.24}$$

pero:

$$m_1 = \sqrt{\frac{s+\lambda}{D_e^Y}} \tag{3.25}$$

porque:

$$R = \frac{1}{1+\frac{\rho K(1-\phi_e)}{\phi_e}} \approx 1 \quad \ldots(21) \qquad (3.26)$$

Sustituyendo (3.24) en (3.23) se tiene:

$$\beta = D_e^y \qquad (3.27)$$

Para tiempos pequeños se tiene que:

$$\text{si} \qquad s \to \infty \qquad ; \qquad m_1 \to \infty$$

por lo que:

$$\lim_{m_1 \to \infty} \tanh\left(\frac{m_1}{2}(E-2w+2\delta)\right) \approx 1$$

y la ecuación (3.24) se puede escribir como:

$$\frac{\bar{C}_m}{C_o} = \exp\left(\frac{v_m x}{2D}\right)\frac{1}{s}\exp\left(-\frac{v_m x}{2D}\sqrt{s+\lambda}+\frac{\phi_e\sqrt{D_e}\sqrt{s+\lambda}}{(w-\delta)}\right) \qquad (3.28)$$

La ecuación (3.28) es igual a la ecuación (1.116) tomando -

en cuenta la igualdad que existe entre las variables emplea das por Tang y asoc., y las utilizadas en el modelo propues to: $z = x$; $R = 1$; $e = \emptyset_e$; $D = D_m$; $b = w$; y $D' = D_e$.

Los mismo ocurre con la expresión (1.117) y la ecuación - - (3.10) para tiempos pequeños, la ecuación (3.10) se reduce a la siguiente expresión:

$$\bar{C}_e = \bar{C}_m \left\{ \frac{\exp(-m_1 E) + \exp(m_1 y)}{\exp(-m_1 E) + \exp[m_1 (w-\delta)]} \right\} \tag{3.29}$$

Sustituyendo la ecuación (3.25) en (3.29) y simplificando - términos se tiene:

$$\bar{C}_e = \bar{C}_m \exp\left\{-\sqrt{\frac{s+\lambda}{De}}\ (y-w)\right\} \tag{3.30}$$

La ecuación (3.30) es igual a la ecuación (1.117) conside-- rando la equivalencia de las variables empleadas en los res pectivos modelos: $R' = 1$; $x = y$; y $b = w$

Con lo anterior se demuestra que el modelo propuesto contie ne como caso particular la solución del modelo propuesto por Tang.

3.3 COMPARACION NUMERICA CON EL MODELO DE TANG Y ASOC.

Las ecuaciones (1.116) o (3.28) y (3.24) se invirtieron numéricamente, empleando el algoritmo de Stehfest[37].
Las Tablas 3.1 y 3.2, presentan los resultados de las respectivas inversiones númericas y los valores de la solución tipo integral de la ecuación (1.116) reportada por Tang y asociados, estos valores fueron obtenidos de las Figuras 9 y 10 de la referencia (38).
Para la elaboración de las Tablas 3.1 y 3.2 se utilizaron los siguientes datos, reportados por Tang y asociados: - - $\phi_e = 0.35$; $w = 6\times10^{-6}$m; $\delta = 1\times10^{-10}$; $D_m = 0.57 m^2/d$; $v = 0.75$ m/d y $R = 1$.

De las Tablas 3.1 y 3.2 se puede concluir que para los valores considerados, los efectos de la frontera externa en dirección "y" no influyen en el flujo del trazador; por tanto las ecuaciones (1.116) y (3.24) presentan la misma solución para fines prácticos. Por otro lado, de estas Tablas se puede observar, que la inversión númerica de las ecuaciones (1.116) y (3.24) es una buena aproximación con - respecto a la solución tipo integral de la ecuación (1.116), desarrollada por Tang y asociados.

Lo anterior demuestra, numéricamente, que el modelo propuesto, bajo las condiciones ya mencionadas, se comporta como si fuera un sistema infinito en dirección "y" y en consecuencia, incluye como caso particular al modelo desarrollado por Tang y asociados.

CAPITULO 4: ANALISIS DE RESULTADOS

En esta sección se analiza la influencia de los parámetros que gobiernan el proceso de dispersión sobre el comportamiento de la concentración del trazador en el extremo productor, - los valores considerados de los diferentes números adimensio nales cubren el rango de los valores prácticos, de acuerdo con lo reportado en la literatura.

Se elaboró un programa de cómputo para evaluar las ecuaciones (4.1) y (4.2), utilizando el algoritmo de Stehfest como subrutina de inversión númerica. Se observó que bajo, ciertas condiciones, este algoritmo presenta fluctuaciones en - la solución; sin embargo, a pesar de la dispersión numérica presente en estas soluciones, es posible observar que para ciertos valores de tiempo adimensional se - tiene una tendencia definida que permite inferir el comportamiento del sistema, bajo diferentes condiciones de flujo.

También se encontró que para propósitos prácticos, el espesor del bloque de la matriz parece no tener influencia sobre el comportamiento de la variación en la concentración - del trazador, y la solución es equivalente a la presentada por Tang y asociados [38]. Bajo estas condiciones, el comportamiento del sistema puede ser descrito en forma adecuada por dos parámetros adimensionales: el número de Peclet en las fracturas (P_{e_1}) y el parámetro $\alpha (\alpha = \xi / \sqrt{P_{e_2}})$; donde - - $\xi = \dfrac{\phi_e D_e}{v(w-\delta)}$ y P_{e_2} es número de Peclet en la matriz. Se derivó una solución analítica límite para $\alpha=0$, la cual corresponde al caso del sistema homogéneo. Se comprueba que esta solución límite es válida para $\alpha\leq 0.01$. Para el caso de inyección continua, esta solución se reduce a la presentada por Coats[10].

Para el caso de una inyección tipo "pico", se derivó una ecuación que predice el comportamiento del trazador bajo estas condiciones, y se encontró que el tiempo necesario para alcanzar la máxima concentración, se relaciona directamente con el siguiente grupo de variables adimensionales

$$\left(\sqrt{9+x_D^2\, P_{e_1}^2}-3\right)/P_{e_1}.$$

Por lo tanto, es posible obtener el valor P_{e_1} dado una x_D o viceversa. Para valores prácticos de P_{e_1} y α, se generaron una serie de gráficas de C_{D_1} Vs t_D . Se encontró que si P_{e_1} se incrementa, en tanto α permanece constante, el tiempo de irrupción del trazador también se incrementa. Por otro lado, si P_{e_1} permanece constante, en tanto α varía, la solución límite para $\alpha=0$ es la envolvente de una familia de curvas en una gráfica de C_{D_1} Vs t_D. También se encontró que el tiempo de irrupción para una concentración dada, es función de α.

4.1 INFLUENCIA DEL ESPESOR DEL BLOQUE REPETITIVO, E.

El modelo propuesto en este trabajo, se representa matemáti camente por las siguientes ecuaciones en el espacio de Laplace:

$$\tilde{C}_{D_1} = \frac{1}{s}\exp\left(\frac{x_D P_{e1}}{2}\right)\exp\left(-x_D\sqrt{\frac{P_{e1}^2}{4} + P_{e1}(s+\gamma+\xi m_1 \tanh[m_1(\frac{E-2w+2\delta}{2L})])}\right) \tag{4.1}$$

$$\tilde{C}_{D_2} = \bar{C}_{D_1}(x_D, s)\left(\frac{\exp[-m_1(\frac{E}{L} - y_D] + \exp(-m_1 y_D)}{\exp[-m_1(\frac{E-w+\delta}{L})] + \exp[-m_1(\frac{w-\delta}{L})}\right) \tag{4.2}$$

donde:

$$m_1 = \sqrt{\frac{P_{e2}}{R}(s+\gamma)}$$

La influencia que pudiera tener la magnitud del espesor de bloque repetitivo, E, sobre el comportamiento de la concentración a lo largo de la fractura, depende del valor del argumento de la tangente hiperbólica de la ecuación (4.1). Si este argumento es mayor o igual a 10, el valor de la tanh es, practicamente 1, lo que implicaría que el espesor del bloque repetitivo no tiene ninguna influencia.

El argumento de la tangente hiperbólica tendría que ser mayor o igual a 10, para que el valor de la tanh no influya en la ecuación (4.1), lo que da origen a la siguiente desigualdad:

$$\sqrt{\frac{P_{e2}}{R}(s+\gamma)}\ \left(\frac{E-2w+2\delta}{2L}\right) \geq 10 \tag{4.3}$$

El rango de valores de las variables que intervienen en la ecuación (4.3); utilizados en este trabajo, son los siguientes: $\gamma=0$; $R=1$; $L=100m$; $10^7 \leq P_{e_2} \leq 10^{12}$ y suponiendo que se presente el caso más crítico para que la ecuación (4.3) no se cumpla; es decir, $P_{e_2}=10^7$, $L=100m$ y $E=0.5m$, el valor de "s" debe satisfacer la siguiente desigualdad:

$$s \geq \frac{10(200)}{0.5}^{2}(10^{7}) \tag{4.3a}$$

Si la desigualdad anterior se satisface, entonces, el espesor del bloque repetitivo no influye en el perfil de concentraciones, ya que la tangente hiperbólica de la ecuación (4.1) sería aproximadamente igual a uno.

Suponiendo que la ecuacion (4.3) se cumple, la ecuación (4.1) se reduce a la siguiente:

$$\bar{C}_{D1} = \frac{1}{s}\exp\left(\frac{x_D P_{e_1}}{2}\right)\exp\left(-x_D\sqrt{\frac{P_{e_1}^2}{4} + P_{e_1}\left(s+\xi\sqrt{\frac{P_{e_2}}{R}(s+\gamma)}\right)}\right) \tag{4.4}$$

Las ecuaciones (4.1) y (4.4) fueron evaluadas mediante un programa de cómputo, utilizando el algoritmo de Stehfest[37] como subrutina de inversión numérica, y se analizaron las distintas combinaciones de los valores prácticos de las variables, que invervienen en el proceso en estudio. En todos los casos probados se presentó la misma solución para las ecuaciones (4.1) y (4.4), lo que implica que para tiempos - prácticos y para los valores de los parámetros considerados en este trabajo, los valores que adquiere "s" son tales que la ecuación (4.3) es siempre válida y por tanto, el espesor del bloque repetitivo, E, no influye en el flujo del trazador, a través del medio poroso.

Las Tablas 4.1 y 4.2, presentan los valores de la concentración adimensional de la región móvil, obtenidos mediante la inversión numérica de las ecuaciones (4.1) y (4.4), respectivamente. Los datos que se utilizaron para elaborar estas - tablas, son los siguientes: $\zeta=1\times10^{-10}$; L=100m; $x_D=1$; diferentes valores de P_{e1}; y los valores más críticos de P_{e2} y de E. Comparando estas tablas se puede concluir, que para los valores considerados el espesor de bloque repetitivo E, no tiene - ninguna influencia sobre el comportamiento del trazador en el medio poroso.

Tomando en cuenta que lo anterior es válido para el caso más crítico; es decir, para el caso en el que los efectos de la frontera externa del segundo medio tienen mayor influencia; se puede concluir que, para fines prácticos, las ecuaciones (4.1) y (4.4) presentan la misma solución. Por otro lado, la ecuación (4.4) es equivalente a la ecuación (1.116), la cual, fue desarrollada por Tang y asociados[38]. Con base en lo anterior, se concluye que para la gama de valores de los parámetros considerados en este trabajo, el modelo propuesto se reduce al modelo presentado por Tang y asociados. Adicionalmente, en las tablas 4.1 y 4.2 se puede observar que para determinados valores del tiempo adimensional, existe dispersión numérica en la solución. Sin embargo, a pesar de que esta dispersión se presentó en la mayoría de los casos probados, es posible inferir, bajo diferentes condiciones de flujo, una tendencia bien definida del comportamiento del sistema.

4.2 DEFINICIÓN DEL PARÁMETRO

Partiendo de la ecuación (4.4) es posible definir otro parámetro adimensional, $\alpha=\xi\sqrt{P_{e_2}}$, con ello el sistema puede ser descrito por sólo dos parámetros adimensionales.

Suponiendo que el trazador en estudio es químico ($\gamma=0$) y que $R=1$, la ecuación (4.4) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\bar{C}_{D1}=\frac{1}{s}\exp\left(\frac{x_D P_{e_1}}{2}\right)\exp\left\{-x_D\sqrt{\frac{P_{e_1}^2}{4}+P_{e_1}(s+\alpha\sqrt{s})}\right\} \tag{4.5}$$

Donde:

$$\alpha=\xi\sqrt{P_{e_2}}=\frac{\phi_e D_e}{v(w-\delta)}\sqrt{P_{e_2}}=\frac{\phi_e}{(w-\delta)}\sqrt{\frac{D_e L}{v}} \tag{4.6}$$

Es importante hacer notar que la influencia de la región estancada sobre el comportamiento de la concentración adimensional de la región móvil depende exclusivamente del parámetro α. Esto es porque las variables incluídas en la ecuación (4.5) correspondientes al segundo medio, se encuentran dentro de la definición de α (ecuación (4.6)). Con base en lo anterior, para valores muy pequeños de α ($\alpha \to 0$), el sistema se comportaría como si estuviera constituído sólo por la región móvil. Por consiguiente, la ecuación (4.5) incluye el caso en que el trazador viaje a través de un sistema homogéneo. Bajo estas condiciones ($\alpha = 0$), la ecuación (4.5) se reduce a la siguiente:

$$\bar{C}_{D1} = \frac{1}{s}\exp\left(\frac{x_D P_{e_1}}{2}\right)\exp\left\{-x_D\sqrt{\frac{P_{e_1}^2}{4} + P_{e_1} s}\right\} \qquad (4.7)$$

La inversión analítica de la ecuación (4.7) es la siguiente:

$$C_{D1}(x_D, t_D) = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left\{\frac{\sqrt{P_{e_1}}\,x_D}{2\sqrt{t_D}} - \sqrt{\frac{P_{e_1} t_D}{4}}\right\} + \frac{1}{2}\exp(x_D P_{e_1}) \cdot \operatorname{erfc}\left\{\frac{x_D\sqrt{P_{e_1}}}{2\sqrt{t_D}} + \sqrt{\frac{P_{e_1} t_D}{4}}\right\} \qquad (4.8)$$

Como ya se mencionó en la sección 3.1, la ecuación (4.8) es equivalente a la ecuación (1.14), desarrollada por Coats[10]. Por otro lado, la ecuación (4.8) corresponde a la solución analítica límite, debido a que la máxima concentración se obtiene cuando no existe transferencia de masa al segundo medio, esto se presenta cuando la región estancada es prácticamente impermeable (α=0). Lo anterior equivale a decir que cuando α=0, el sistema es homogéneo y por tanto se tiene la máxima respuesta del trazador.

Las ecuaciones (4.5) y (4.8) fueron evaluadas para diferentes valores de α y se encontró que para valores de $\alpha \leq 0.01$ ambas soluciones presentan los mismos resultados, lo que implica que la solución límite es válida para los valores de α antes mencionados.

La Figura 4.1 (C_D) vs (t_D) fue elaborada con base en los datos obtenidos a partir de las ecuaciones (4.8) y (4.5), ésta última fue evaluada para distintos valores de α . En esta - figura se puede observar que para P_{e_1}=2 la envolvente de la familia de curvas corresponde a la solución límite (Ecuación (4.8)); la ecuación (4.5) evaluada para α=0.01 presenta prácticamente el mismo perfil de concentraciones que la ecuación (4.8); el decremento en el valor de C_{D1} se debe al incremento del valor de α; y que a pesar de la dispersión numérica - ocasionada por el algoritmo de inversión utilizado[37], es posible inferir una tendencia definida de los perfiles de - las concentraciones.

En el Apéndice D se presenta el programa de cómputo utilizado para generar los datos de la Figura 4.1, el cual se presenta como un ejemplo de aplicación.

La Figura 4.2 es similar a la Figura 4.1, con la salvedad de que en un caso las ecuaciones (4.5) y (4.8) fueron evaluadas para $P_{e_1}=10$ y en el otro para $P_{e_1}=2$. Al comparar estas dos figuras se puede ver que la respuesta del trazador se repite y por tanto, considerando la influencia del número de Peclet de la región móvil, las observaciones referentes a la Figura 4.1 son válidas para la Figura 4.2.

4.3 NUMERO DE PECLET DE LA REGION MOVIL (P_{e_1}).

De las Figuras 4.1 y 4.2 se puede concluir que la característica de la familia de curvas está dada por el valor de P_{e_1} y adicionalmente se puede observar que el tiempo de irrupción depende de P_{e_1}; si P_{e_1} se incrementa, el tiempo de irrupción también aumenta.

Lo anterior se puede observar con mayor claridad en una Figura de C_D vs T_D, en la cual α permanezca constante y P_{e_1} varíe. La Figura 4.3 presenta la variación de C_D con respecto a P_{e_1}, de aquí se puede ver que al aumentar el número de Peclet de la región móvil el tiempo de irrupción también aumenta. Adicionalmente se puede notar que a medida que P_{e_1} crece, la diferencia entre los perfiles de concentración respectivos tienden a disminuir, en tanto que las pendientes de éstos aumentan. Esto significa que la respuesta tiende a comportarse como una función tipo "escalón", en la cual, el intervalo de tiempo necesario para alcanzar la máxima concentración es pequeño.

Lo anterior se puede comprobar comparando los perfiles de concentraciones en las Figuras 4.4 y 4.5. Se puede observar la influencia de P_{e_1} sobre el retardamiento en la irrupción de la concentración y sobre el tipo de curvas.

De la Figura 4.4 puede verse que para $P_{e_1}=2$ el tiempo de irrupción es $t_D=0.15$ en tanto que para $P_{e_1}=50$ es de $t_D=0.65$, Figura 4.8. También se puede observar que las pendientes de las curvas de la Figura 4.4 es mucho más suave que las pendientes de las curvas correspondientes a la Figura 4.5 debido a lo mencionado anteriormente.

Cabe hacer notar que para mantener α constante es necesario fijar una velocidad, de tal forma que la única variable que afecte el valor de P_{e_1} sea el coeficiente de dispersión en la fractura. Bajo estas condiciones, el incremento de P_{e_1} se debe a la disminución del valor de D_m y por lo tanto, las concentraciones adimensionales que se alcanzan a determinados valores de t_D disminuyen según aumente el número de Peclet de la región móvil.

La Figura 4.3A es análoga a la 4.3, sólo que la primera fue obtenida a partir de la solución analítica (Ecuación (4.8)), en tanto que la Figura 4.3 se generó utilizando el algoritmo de Stehfest para invertir la ecuación (4.5), evaluada para $\alpha=0.007$. Comparando estas dos gráficas se puede concluír que efectivamente la solución límite, representada matemáticamente por la ecuación (4.8) es válida para valores de $\alpha<=0.01$.

4.4 INFLUENCIA DEL NUMERO DE PECLET DE LA REGION ESTANCADA (P_{e2}).

Con objeto de determinar la influencia del número de Peclet de la región estancada P_{e_2}, se analizó la ecuación (4.4), es decir, se estudió por separado la influencia de ξ y de P_{e_2}, con el fin de detectar cuáles son las características de la región estancada que afectan más el flujo del trazador a través de medios porosos. Las diferentes pruebas realizadas evaluando la ecuación (4.4) mediante un programa de cómputo que utiliza el algoritmo de Stehfest como subrutina de inversión arrojan los siguientes resultados:

a) De la Figura 4.6, C_D vs t_D en la que $P_{e_1}=2$, $\phi_e=1x10^{-6}$ y P_{e_2} adquiere distintos valores: se puede concluir que para un valor pequeño de porosidad, el número de Peclet de la región estancada no tiene ninguna influencia sobre el comportamiento del trazador. Lo anterior equivale a afirmar que el medio poroso se comporta como si fuera impermeable y por tanto actúa una sóla región, la móvil. En consecuencia para un valor de P_{e_1} determinado, no se alcanzará un perfil de concentraciones mayor al que se obtiene cuando el sistema se comporta como si estuviera constituído sólo por la región móvil. De aquí se puede corroborar lo que se mencionó en la sección 4.1; que la solución tiende a un límite y éste se presenta cuando la región estancada se comporta como impermeable. Esto ocurre para valores de $\emptyset_e$ pequeños, o bien, para una combinación de $\emptyset_e$ y D_e (α=0) tal que ocasione el efecto equivalente a la "impermeabilidad" del medio estancado.

b) La Figura 4.4 muestra la influencia que tiene P_{e_2} sobre el perfil de concentraciones. En esta Figura se puede ver que los rangos de valores de P_{e_2} que producen una diferencia considerable entre los perfiles de concentración, son los más pequeños. También se puede observar que a medida que disminuye el valor de P_{e_2}, la concentración adimensional de la región móvil también disminuye, conforme aumenta el coeficiente de difusión de esta misma región; lo anterior se refleja en un valor de C_{D_1} pequeño en el extremo de la salida.
Adicionalmente, de la Figura 4.4 se puede apreciar, una considerable diferencia entre los perfiles de concentración correspondientes a $P_{e_2}=10^8$ y $P_{e_2}=10^7$, en tanto que los perfiles de concentración para $P_{e_2}=10^{12}$ y $P_{e_2}=10^{11}$ son bastante parecidos. De aquí se concluye que existen rangos de valores de P_{e_2} en los que su influencia es determinante en la respuesta del trazador y otros en los que prácticamente la influencia de P_{e_2} no es considerable.

c) Las Figuras 4.4 y 4.7 denotan la influencia que tiene la porosidad sobre los perfiles de concentración correspon--

dientes a diferentes valores de P_{e2}. La única diferencia entre ambas Figuras es el valor de la porosidad, en un caso ϕ_e=0.01 y en el otro ϕ_e=0.1; de estas dos figuras se puede concluir lo siguiente:

i) A medida que la porosidad aumenta, se incrementa la difufusión en el segundo medio y como consecuencia la concentración en la fractura disminuye.

ii) Cuando la porosidad es relativamente alta (ϕ_e=0.1) existe una diferencia considerable en la respuesta del trazador aún para valores altos de P_{e2}, esto implica que a pesar de que el valor de D_e sea pequeño, existe difusión en la región estancada. Por lo anterior no es posible despreciar ninguno de estos parámetros por pequeños que sean; es necesario considerar la combinación de ambos ϕ_e y D_e, es decir, del parámetro α, para poder inferir sobre el grado de difusión del segundo medio o sobre la influencia de la región estancada en el perfil de concentraciones de la región móvil.

Las observaciones referentes a las Figuras 4.4 y 4.7 son también válidas para las Figuras 4.5 y 4.8 debido a que ambos pares de gráficas son similares, sólo que las Figuras 4.4 y 4.8 presentan la respuesta del trazador para P_{e1}=2 y en el otro grupo se presentan los perfiles de concentración evaluados para P_{e1}=50.

d) Al comparar las Figuras 4.6 y 4.4 se puede observar que para valores de P_{e_2} entre 10^7 y 10^{12}, $P_{e_1}=2$ y $\emptyset_e=10^{-6}$ (Figura 4.6, correspondiente al caso límite), el perfil de concontraciones es prácticamente igual que para $P_{e_2}=10^{12}$; $P_{e_1}=2$ y $\emptyset_e=0.01$ (Figura 4.4). Lo anterior vuelve a comprobar la solución analítica límite descrita en la sección 4.1.

4.5 INFLUENCIA DEL PARAMETRO ξ.

La Figura 4.8 muestra que existen ciertos valores de P_{e_2} para los cuales el comportamiento del sistema es independiente de los valores que adquiera ξ ($\xi= \frac{\emptyset_e D_e}{(w-\delta)}$). Esto es equivalente a decir que para ciertos valores del coeficiente de difusión en la región inmóvil, D_e, el perfil de concentraciones de la región móvil es independiente del valor de la porosidad de la región estancada $\emptyset_e$, esto también se presenta para el caso en que $\emptyset_e$ sea constante y D_e funja como parámetro (Figura 4.6). Es evidente que para $\emptyset_e=10^{-6}$, el perfil de concentraciones es independiente de los valores que puede adquirir P_{e_2}, aún los que impliquen comprobar la existencia de la solución límite, la cual se presentará en los casos antes mencionados (Figuras 4.6 y 4.8).

Tomando en cuenta que ξ depende básicamente de $\emptyset_e$ y que además ξ es directamente proporcional a ϕ_e, la influencia de ξ sobre el comportamiento del sistema es equivalente a la influencia de la porosidad sobre el mismo. Entonces, el análisis de la influencia de ξ es equivalente al análisis de la influencia de ϕ_e presentado en la sección 4.4c.

4.6 SOLUCION TIPO "PICO".

Con objeto de aproximarse más a lo que ocurre en un caso real, se determinó la solución pico, ya que el significado físico de esta solución es la inyección de trazador durante un intervalo de tiempo pequeño, a diferencia de la solución continua representada matemáticamente por la ecuación (4.1). En la práctica lo que se lleva a cabo es la inyección de una sustancia (química o radioactiva) en un intervalo corto.

La solución pico se define como sigue:

$$(C_{D_1})\ \text{pico} = \frac{\partial C_{D_1}}{\partial t} = \bar{L}^{1}\{S\ \bar{C}_{D_1}\} \qquad (4.9)$$

sustituyendo la ecuación (4.9) en (4.4):

$$S\bar{C}_{D_1} = \exp\left(\frac{X_D P_{e_1}}{2}\right) \exp\left\{ -X_D \sqrt{\frac{P_{e_1}}{4} + P_{e_1}\left(s+\gamma+\xi\sqrt{\frac{P_{e_2}}{R}(s+\gamma)}\right)} \right\} \qquad (4.10)$$

Evaluando la ecuación (4.9) para $\gamma=0$, $R=1$ y $X_D=1$, mediante un programa de cómputo que utiliza el algoritmo de Stehfest como subrutina de inversión numérica, los resultados mostrados en la Figura 4.9. En esta Figura se vuelve a observar que existe un límite de la solución, para valores $\alpha < .01$, y además que esta curva límite es la envolvente de las curvas correspondientes a α's mayores que el valor anterior.

Para efectos de comprobar la solución se evaluó la ecuación (4.9) para el caso en que $\alpha = 0$, en estas condiciones la ecuación (4.9) se reduce a la siguiente:

$$(s\overline{C}_{D_1})\,\text{límite} = \exp\left(\frac{X_D P_{e_1}}{2}\right) \exp\left\{-X_D \sqrt{\frac{P_{e_1}^2}{4} + P_{e_1}(s+\gamma)}\right\} \qquad (4.11)$$

cuya inversión analítica es:

$$C_{D_1}(X_D, t_D)\ \text{pico límite} = \frac{X_D \sqrt{P_{e_1}}}{2\sqrt{\pi t_D^{3}}} \exp\left\{\frac{P_{e_1}}{4}\left(2X_D - t_D - \frac{X_D^2}{t_D}\right)\right\} \qquad (4.12)$$

La ecuación anterior representa un sistema constituído sólo por la región móvil, es decir, el medio estancado corresponde a un medio impermeable, por lo cual no existe difusión en dirección "y".

La Figura 4.10 muestra que efectivamente la solución analítica de la inyección pico, para el caso límite, es la envolvente de las curvas respectivas para $\alpha \leq .01$.

Como se estableció con anterioridad es conveniente hacer notar que a pesar de las fluctuaciones ocasionadas por el algoritmo de inversión numérica utilizado, es posible inferir una tendencia definida, a partir de la solución general (ecuación (4.4)). Por todo lo anterior se vuelve a demostrar que la solución general es correcta.

La Figura 4.11 presenta las envolventes respectivas a diferentes números de Peclet para la región móvil obtenidas analíticamente. En esta figura se observa que el tiempo correspondiente a la máxima concentración depende del número de Peclet. Derivando la ecuación (4.12) e igualándola a cero se obtiene la siguiente expresión:

$$t_{DMáx} = \frac{\sqrt{9+X_D^2 P_{e_1}^{\,2}} - 3}{P_{e_1}} \tag{4.13}$$

Donde t_{DMax} es el tiempo al cual se tiene la máxima concentración a un P_{e_1} determinado.

Es importante hacer notar que la Figura 4.11, presenta valores de concentración adimensional mayores que la unidad, para valores relativamente pequeños y grandes la P_{e_1}, $2 \leq$ y ≥ 20, cuando $\alpha \leq 0.01$.

Esto indica que el tratamiento matemático de la solución pico, $C_{D_1}(0,t_D) = \delta(t_D)$, debe ser válida para ciertas condiciones. Estas condiciones se están investigando actualmente.

CAPITULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Con base en el análisis de la influencia que diferentes parámetros tienen en el comportamiento de la concentración del trazador al fluir a través del medio fracturado, es posible establecer las siguientes conclusiones:

1.- El modelo propuesto en este trabajo visualiza al sistema real como un sistema compuesto por dos medios; el medio fracturado a través del cual el trazador fluye debido a la convección y difusión, y una región inmóvil en la cual el trazador es transferido por el mecanismo de difusión.

La adsorción del trazador está presente en este medio.

2.- Para propósitos prácticos, el tamaño de los bloques de la matriz no afecta la respuesta del trazador. Bajo estas condiciones el sistema puede ser descrito por dos parámetros adimensionales, α y P_{e_1}.

3.- Se derivó una solución analítica para el caso en el que no exista difusión en la matriz. Se comprobó que esta solución se puede aplicar para valores de $\alpha \leq 0.01$.

4.- Para el caso de la inyección tipo pico y $\alpha \leq 0.01$, se -

encontró una relación analítica entre el tiempo de irrupción de la máxima concentración y P_{e_1}. Esta relación puede ser usada para estimar la longitud real de la trayectoria seguida por el trazador, entre los puntos de inyección y de observación.

5.- Las soluciones fueron obtenidas en el espacio de Laplace y el algoritmo de Stehfest fue utilizado como invertor numérico. Se encontró que este algoritmo arroja buenos resultados sólo para ciertos rangos de tiempo y ciertos valores de los parámetros de α y P_{e_1}.

NOMENCLATURA.

A : Area de la sección transversal expuesta al flujo, (L^2)

a : Espesor del bloque analizado, (L)

a_1 : Constante definida en la ecuación (1.95), adimensional

a_2 : Constante definida en la ecuación (1.96), adimensional

b : Constante definida en la ecuacion (1.94), adimensional

b : Mitad de la abertura de fractura, (L)

C : Concentración "in-situ", (M/L^3)

C_i : Concentración inicial en el medio, (M/L^3)

C' : Concentración fluyente, (M/L^3)

C_f : Concentración del trazador en las fracturas, (M/L^3)

C_{im} : Concentración del trazador en la zona inmóvil, (M/L^3)

C_n : Concentración en la celda "n", (M/L^3)

c_1 y c_2 : Constantes de integración, adimensionales

C_p : Concentración del trazador en la matriz, (M/L^3)

$\overline{C}_m$ y $\overline{C}_e$: Concentraciones en el espacio de Laplace de las regiones móvil y estancada, (M/L^3)

C_o : Concentración de inyección, (M/L^3)

C* : Concentración del fluido estancado, (M/L^3)

C_s : Concentración del trazador sobre la superficie de la roca, (M/L^3)

C_2 : Concentración adimensional de la región inmóvil

C_i : Concentración inicial existente en el medio (t=0), (M/L^3)

C_1 : Concentración adimensional de la región móvil

D : Coeficiente de dispersión en las fracturas, (L^2/t)

D : Coeficiente de difusión efectivo de un medio poroso, basado en el área media disponible para la difusión y la longitud total, (L^2/t)

D_a : Coeficiente de difusión aparente (L^2/t)

D_e : Coeficiente de difusión en la región estancada, (L^2/t)

D_m : Coeficiente de difusión en la región móvil, (L^2/t)

D_o : Coeficiente de difusión molecular en la matriz, (L^2/t)

d_p : Diámetro de la partícula, (L)

E : Coeficiente de dispersión convectivo longitudinal, (L^2/t)

E : Mitad del espesor del bloque respectivo

$erf(\xi)$: Función error $= \frac{2}{\pi} \int_0^{\xi} \exp(-\xi^2)\, d\xi$

$erf(\xi)$: Función error complementaria $= 1 - erf(\xi)$

f : Fracción del espacio poroso ocupado por el fluído móvil, adimensional

F : Factor de resistividad eléctrica de la formación, adimensional

G : Cantidad de materia que se difunde a través de un plano

I : Volúmenes de poros inyectados, $v\,t/L$, adimensional

I_o : Función Bessel

j : Flujo másico, (M/t)

j_c : Densidad de flujo convectivo, (M/t)

K : Coeficiente de dispersión (L^2/t)

k : Constante de equilibrio, adimensional

K_d : Coeficiente de adsorción (reacción química de primer orden), (L^3/M)

K_{av} : Coeficiente de dispersión promedio para el modelo de capacitancia, (L^2/t)

K_l : Coeficiente de dispersión longitudinal, (L^2/t)

K_t : Coeficiente de dispersión transversal, (L^2/t)

L : Operador de Laplace

L : Espaciamiento entre fracturas, (L)

L^{-1} : Operador inverso de Laplace

L : Longitud total del medio poroso, (L)

M : Coeficiente de transferencia de masa entre matriz y fractura, (1/t)

n : Concentración del trazador en la superficie sólida, (M/L^2)

p : Fracción total de adsorción en la región móvil, adimensional

P_e : Número de Peclet, $(\frac{V_e L}{D})$, adimensional

P_{e1} : Número de Peclet en la región móvil, $(\frac{V_m L}{D_m})$, adimensional

P_{e2} : Número de Peclet en la región estancada, $(\frac{V_m L}{D_e})$, adimensional

q : Gasto volumétrico, (L^3/t)

R : Coeficiente de retardamiento, adimensional

R : Parámetro adimensional, ecuación (1.133)

R' : Coeficiente de retardamiento de la matriz, adimensional

t : Tiempo, (t)

t_D : Tiempo adimensional

t_{Dmax} : Tiempo adimensional al cual se alcanza la máxima concentración.

w : Tiempo de residencia del agua, (t)

u : Velocidad intersticial, (L/t)

u : Constante definida en la ecuación (1.91), adimensional

$\bar{V}$: Velocidad media, (L/t)

V_f : Velocidad del sistema de fracturas, (L/t)

V : Velocidad media en las fracturas, (L/t)

V_m : Velocidad media en la región móvil, (L/t)

w : Constante definida en la ecuación (1.97), adimensional

w : Mitad del ancho de fractura, (L)

x : Coordenada tomada en la dirección del flujo

x : Distancia recorrida por el trazador, (L)

X_{90} : Distancia tomada a partir de la posición inicial en la interfase, donde la composición es 90% de la composición inicial

X_0 : Distancia recorrida desde el pozo inyector hasta el pozo productor

X_{10} : Distancia tomada a partir de la posición inicial de la interfase, donde la composición es 10% de la composición inicial

x_D : Distancia adimensional, ecuación (2.11), (x/L)

x_D : Distancia adimensional, ecuación (1.130), (x/w)

y : Coordenada tomada en la dirección perpendicular a la dirección del flujo

y : Distancia adimensional, (x/L)

y_D : Distancia adimensional, ecuación (2.12), (y/L)

y_D : Distancia adimensional, ecuación (1.131), (y/w)

Y : Constante definida en la ecuación (1.74)

Z : Coordenada al eje de fractura

LETRAS GRIEGAS.

α : Parámetro adimensional definido en la ecuación (1.135)

α : Parámetro adimensional definido en la ecuación (4.6)

β : Parámetro adimensional definido en la ecuación (1.135)

β : Parámetro adimensional definido en la ecuación (3.3)

γ : Parámetro adimensional definido en la ecuación (2.19)

γ : Variable adimensional de Coats, (V L/D)

γ : Constante igual a $(1-\lambda)$

δ : Factor de heterogenidad, adimensional

δ : Constante definida en la ecuación (1.30), adimensional

δ : Espesor de la película delgada de fluido,(L)

δ : Constante definida en la ecuación (1.30.a)

ε : Parámetro adimensional definido en la ecuación (2.18)

ε : Parámetro adimensional definido en la ecuación (1.118)

λ : Constante de decaimiento radioactivo, (1/t)

ν : Constante definida en la ecuación (1.118), adimensional

ξ : Constante definida en la ecuación (3.13), adimensional

ρ : Constante definida en la ecuación (2.2), adimensional

ρ_b : Densidad de la roca de la matriz, (M/L^3)

θ : Constante definida en la ecuación (1.90), adimensional

ϕ : Porosidad, adimensional

ϕ_e : Porosidad de la región estancada, adimensional

ϕ_f : Porosidad del sistema de fracturas, adimensional

ϕ_{im} : Porosidad en la región inmóvil, adimensional

ϕ_m : Porosidad en la región móvil, adimensional

ϕ_p : Porosidad en la matriz, adimensional

REFERENCIAS.

1. Abramowitz, M. y Stegun, I.A.: **"Handbook of Mathematical Functions"**, Dover Publications. Inc., New York (1972).

2. Aris, R. y Amudsson, N.R.: **"Some Remarks on Longitudinal Mixing or Diffusion** in Fixes **Beds"**, AIChe Journal (1975), Vol 3, 280.

3. Baron, Thomas: **"Chemical Engineering Program"**(1952), Vol. 48, 118.

4. Brigham, W.E., Reed, Philip, W. y Dew, John N.: **"Experiments on Mixing During Miscible Displacement in Porous Media"**, Society Petroleum Engineering Journal (Marzo, 1961) 1.

5. Brigham, W.E.: **"Mixing Equations** in **Short Laboratory Cores"**, Transactions (1974), Vol. 257, 91.

6. Carberry, J.J.: **"Axial Dispersion of Mass in Flow Trough Fixed Beds"**, D. Engineering Dissertation, Yale Univertity (1957).

7. Carberry, J.J. y Breton, R.H.: AIChe Journal (1958), Vol. 4, 161.

8. Carlaw, H.S. y Jaeger, J.C.: "Conduction of Heat in Solids" Carenden Press, Oxford 1959.

9. Carman, P.C.: "Fluid Flow Through Granulars Beds", Transactions Institute of Chemical Engineering. London (1937), Vol.15, 150.

10. Coats, K.H. y Smith, B.D.: "Dead-End Pore Volumen and Dispersion in Porous Media", Society Petroleum Engineering Journal (septiem bre 1963).

11. Deans, H.A.: "A Mathematical Model of Dispersion in the Direction of Flow in Porous Media", Society Petroleum Engineering Journal (Marzo 1963) 49, 52.

12. Ebach, E.A.: "The Mixing of Liquids Flowing Through Beds of Porous Solids", PhD Dissertation, University of Michigan (1957).

13. Ebach, E.A. y White, R.R.: "Mixing of Fluids Through Beds of Packeds Solids", AIChe Journal (1958) Vol. 6, 161.

14. Ergun, S.K.: "Fluid Flow Through Packed Columns", Chemical Engineering Program (1952), Vol. 48, 89.

15. Fatt, I.: "Pore Structure of Sintered Glass from Diffusion - and Resistence Measurements", Journal Phys. Chem (1959), Vol. 63, 751.

16. Fossum, M.P.: "Tracer Analysis in a Fractured Geothermal Reservior: Field Results from Wairakei, New Zeland", Stanford Geothermal Program, SGP-TR-56, (Junio 1982), Stanford, C.A.

17. Gershon, N.D. y Nir, A.: "Effects of Boundary Conditions of Models on Tracer Distribution in Flow Through Porous Media", Water Resources Research (Agosto 1969), 830-839.

18. Grane, F.E. y Gardiner, G.H.F.: "Measurements of Transverse Dispersion in Granular Media", Journal Chemical Engineering Data (1961) Vol. 6, 183.

19. Graton, L.C. y Fraser, H.J.: "Systematic Backing of Spheres with Particular Relation of Porosity and Permeability", Jour. Geol. (Nov-Dic, 1935), 785.

20. Horne, R.N.: "Geothermal Reinjection Experiences in Japan", Jour. Pet. Tech., (Marzo, 1982) 495-503.

21. Hugakorn, P.S., Lester, B.H. y Mercer, J.W.: "An Efficient Finite Element Technique for Modeling Transport in Fractured Porous Media - 1. Single Species Transport", Water Resources Research, Vol. 18, No. 3 (Junio, 1983) 841-854.

22. Jensen, C.L.: "Matrix Diffusion and its Effects on the modeling of Tracer Returns from the Fractured Geothermal Reservior at Wairakei, New Zeland", SGP-TR-71 (Dic. 1983) Stanford, C.A.

23. de Jong, G. y Josselin.: "Longitudinal and Transverse Diffusion Granular Deposits", Trans AGU (1958) Vol. 39, 67.

24. Klinkenberg, L.J.: "Analog Between Diffusion and Electrical Conductivity in Porous Solids", AIChe Jour. (1962) Vol. 62, 559.

25. Klinkenberg, A. y Sjenitzer, F.: Chemical Engineering Society (1956) Vol. 5, 258.

26. Maloszewski, P. y Zuber, A.: "On the Theory Tracers Experiments in Fissured Rocks with a Porous Matrix", Journal of Hydrology, 79 (1985) 333-358.

27. McHenry, K.W. y Wilhelm, R.H.: AIChe Jour (1957) Vol. 3, 83.

28. Orlob, G.T. y Radhakinshna, G.N.: "The Effects of Entrapped Gases on the Hydraulics Characteristics of Porous Media", Trans, AGU (1958) Vol. 39, 648.

29. Perkins, R.K. y Johnson, O.C.: "A Review of Diffusion and Dispersion in Porous Media", Trans, AIME (1963) Vol. 228, 70.

30. Raimondi, P., Gardner, G.H.F. y Petrick. C.B.: "Effects of Pore Structure and Molecular Diffusion on the Mixing of Miscible Liquids Flowing in Porous Media", Preprint 43 presentado en el AIChe-SPE Joint Symposium, San Francisco, Cal (Dic. 6-9, 1959).

32. Rivera, J.R., Vides, A.R., Cuéllar, G., Samaniego, F.V. y Neri, G.I.: "A Status Report on the Exploration Conditions of the Abuchapan Geothermal Field", Memorias Ninth Workshop on Geothermal Reservior Engineering, Stanford, C.A. (Dic. 1983).

33. Salfman, P.G.: "Dispersion in Flow Through a Network of Capillaries", Chem. Eng. Sci. (1959) Vol. 11, 125.

34. Salfman, P.G.: "Theory of Dispersion in Porous Media" Jour. Fluid. Mech. (1959) Vol. 6, 321.

35. Salfman, P.G.: "Dispersion Due to Molecular Diffusion Through a Network of Capillaries", Jour. Fluid Mech. (1960) Vol. 7, 194.

36. Scott, D.S. y Dulien, F.A.L.: "Diffusion of Ideal Gases in Capillaries ande Porous Solids", AIChe Jour. (1962), Vol. 8, 113.

37. Stehfest, H.: "Algorithm 368 Numerical Inversion of Laplace Transforms", Communications of the ACM, Enero (1970).

38. Tang, D.H., Frind, E.O. y Sudicky, E.A.: "Contaminant Transport in Fractured Porous Media: Analytical Solution for Single Fracture", Water Resources Research, Vol. 17, No. 3, Junio 1981.

39. Taylor, G.I.: **"Dispersion of Soluble Matter in Solvent Flowing Slowly Through a Tube"**, Proc. Roy. Soc. (1953), Vol. 219, 186.

40. Terry, W. M., Blackwell, R.J. y Rayne, J.R.: **"Factors Influencing the Efficiency of Miscible Displacement"**, - Trans. AIME (1959), Vol. 216, 1.

41. Tester, J.N., Bivens, R.L., y Potter, R.M.: **"Interwell Tracer Analysis of Hydraulically Fractured Granitic - Geothermal Reserviors"**, Society of Petroleum Engineering Journal, (1982), Vol. 22, 537-545.

42. Van Deeneterm H?H?m Bralder y Lawence: **"Fluid Desplacement in Capillaries"**, Chem. Eng. Sci. (1956), Vol. 5, 271.

43. Von Rosemberg, D.U.: **"Mechanics of Steady State Single-phase Fluid Desplacement from Porous Media"**, AIChe Jour. (1958), Vol. 2, 55.

44. Walkup, G.W., Jr. y Horne, R.N.: **"Characterization of Tracer Retention Processes and Their Effect on Tracer Transport in Fractured Geothermal Reserviors"**, Artículo SPE 13610 presentado en 1985 SPE California Regional - Meeting, Bakersfield, CA. (marzo, 1985) 229-240.

45. Wilhelm, R.H. y Bernard, R.A.: "Turbulent Diffusion in Fixed Beds of Packed Solids", Chem. Eng. Prog. (1950), Vol. 46, 233.

ANEXO 1

TABLA 1.1 Comparación de diferentes soluciones al problema de valores en la frontera en que se emplea el modelo de difusión. Las concentraciones están expresadas como función de la distancia recorrida en el medio poroso y del tiempo.

REFERENCIA	TIPO DE SISTEMA	CONDICIONES INICIALES	CONDICIONES DE FRONTERA		SOLUCION
			INTERNA	EXTERNA	
5,17	INFINITO (GRUPO 1)*	$C(x,0)=C_o, x<0$ $C(x,0)=0, x>0$	$C(-\infty,t)=C$ (Ref. 17) $C(0,t)=\frac{C_o}{2}$ (Ref. 9)	$C(+\infty,t)=0$	$\frac{C(x,t)}{C_o}=\frac{1}{2}\operatorname{erfc}(\frac{x-vt}{4Dt}$ $\frac{C^{*}(x,t)}{C_o}=\frac{1}{2}\operatorname{erfc}(\frac{x-vt}{4Dt}+\frac{D}{2v\ \pi t}\exp[-(\frac{x-vt}{4Dt})^2]$
5,10,17	SEMIINFINITO (GRUPO 1)*	$C(x,0)=0, x>0$	$C(0,t)=C_o$	$C(\infty,t)=0$	$\frac{C(x,t)}{C_o}=\frac{1}{2}[\operatorname{erfc}(\frac{x-vt}{4Dt})+\exp(\frac{vx}{D})\operatorname{erfc}(\frac{x+vt}{4Dt})]$
17	SEMIINFINITO (GRUPO 2)*	$C(x,0)=0, x>0$	$C(0+t)=\frac{D}{v}(\frac{\partial C}{\partial x})\Big\vert_{x=0+}=C_o$	$C(\infty,t)=0$	$\frac{C(x,t)}{C_o}=\frac{1}{2}\operatorname{erfc}(\frac{x-vt}{4Dt})-\frac{1}{2}\exp(\frac{vx}{D})\cdot$ $\operatorname{erfc}(\frac{x+vt}{4Dt})[1+v(\frac{x+vt}{D})]+\frac{v}{\pi}\ \frac{t}{D}$ $\exp[\frac{vx}{D}-\frac{1}{2}(\frac{x+vt}{Dt})^2]$
5,10	SEMIINFINITO (GRUPO 2)*	$C(x,0)=0, x>0$	$C(0,t)=C_o+\frac{D}{v}(\frac{\partial C}{\partial x})\Big\vert_{x=0}$	$C(\infty,t)=0$	$\frac{C(x,t)}{C_o}=\frac{1}{2}\operatorname{erfc}(\frac{x-vt}{4Dt})+\frac{vt}{\pi Dt}\exp[-(\frac{x-vt}{4Dt})^2]$ $-[\frac{v}{D}(x+vt)+1]\frac{1}{2}\exp(\frac{vx}{D})\operatorname{erfc}(\frac{x+vt}{4Dt})$ $\frac{C^{*}(x,t)}{C_o}=\frac{1}{2}[\operatorname{erfc}(\frac{x-vt}{4Dt})+\exp(\frac{vx}{D})\operatorname{erfc}(\frac{x+vt}{4Dt})]$
17	FINITO (GRUPO 4)*	$C(x,0)=0$ $0\leq x\leq L$	$C(0+,t)=\frac{D}{v}(\frac{\partial C}{\partial x})\Big\vert_{x=0+}=C_o$	$C(L+,t)=C(L-,t)-\frac{D}{v}(\frac{\partial C}{\partial x})\Big\vert_{x=L-}$	$\frac{C(L,t)}{C_o}=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n L\ \mathrm{Sen}(\alpha_n L)}{(\alpha_n L)^2+\frac{v^2L^2}{4D^2}+\frac{vL}{D}}$ $\exp[\frac{vL}{2D}-(\frac{v^2}{4D}+D\alpha_n^2)t]$ donde α_n son las raíces de la ecuación $\alpha_n L\ \mathrm{Cot}(\alpha_n L)+\frac{vL}{4D}=D(\alpha_n L)^2/vL$

TABLA 1.1 Comparación de diferentes soluciones al problema de valores en la frontera en que se emplea el modelo de difusión. Las concentraciones están expresadas como función de la distancia recorrida en el medio poroso y del tiempo. (cont.)

REFERENCIA	TIPO DE SISTEMA	CONDICIONES INICIALES	CONDICIONES DE FRONTERA INTERNA	CONDICIONES DE FRONTERA EXTERNA	SOLUCION
10	FINITO (GRUPO 3)*	$C(x,0)=0$ $0\ x\ L$	$C(0,t)=C_o+\frac{D}{v}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)\Big\vert_{x=0}$	$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)\Big\vert_{x=L}=0$	$\frac{C(L,t)}{C_o}=\frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{L-vt}{4Dt}\right)-\frac{Dt}{\pi L}$ $\exp\left[\frac{(L-vt)^2}{4Dt}\right]\ \left[1-\frac{6vt}{L+vt}-\frac{2(vt)^2}{(L+vt)^2}\ .\right]$

(*) : Grupos de condiciones de frontera empleadas.

TABLA 1.2 Comparación de diferentes soluciones al problema de valores en la frontera en el que se emplea el modelo de difusión. Las concentraciones corresponden a las que se obtienen en el afluente en el pozo productor.

REFERENCIA	TIPO DE SISTEMA	S O L U C I O N
5	INFINITO	$\frac{C(L,t)}{C_o} = \frac{1}{2}\ \mathrm{erfc}\ (\frac{1-I}{2\ I/\gamma})$ $\frac{C^*(L,t)}{C_o} = \frac{1}{2}\ \mathrm{erfc}\ (\frac{1-I}{2\ I/\gamma}) + \frac{1}{2\ \pi\gamma I}\ \exp[-(\frac{1}{2}\frac{I}{I/\gamma})]$
5	SEMIINFINITO	$\frac{C^*(L,t)}{C_o} = \frac{1}{2}\ \mathrm{erfc}\ (\frac{1-I}{2\ I/\gamma}) + \frac{1}{2\ \pi}\exp[-(\frac{1-I}{2\ I/\gamma})^2][\frac{2\ I/\gamma}{1+I} - \frac{1}{2}(\frac{2\ I/\gamma}{1+I})^3 \ldots]$
17	FINITO	$\frac{C(L,t)}{C_o} = 1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n L\ \mathrm{Sen}(\alpha_n L)}{(\alpha_n L)+\frac{v^2L^2}{4D^2}+\frac{vL}{D}}\exp[\frac{vL}{2D}-(\frac{v^2}{4D}+D\alpha_n^2)t]$ donde α_n son las raíces de la ecuación $\alpha_n L\ \mathrm{Cot}\ (\alpha_n L) + \frac{vL}{4D} = \frac{D(\alpha_n L)^2}{vL}$
10	FINITO	$\frac{C(L,t)}{C_o} = \frac{1}{2}\ \mathrm{erfc}(\frac{L-vt}{4Dt}) - \frac{Dt}{\pi L}\exp[\frac{(L-vt)^2}{4Dt}][1-\frac{6vt}{L+vt}-\frac{2(vt)^2}{(L+vt)^2}\ \ldots]$

(*) : Para el sistema infinito C corresponde a la concentración "in situ", mientras que C^* representa la concentración fluyente[5].

TABLA 3.1 Comparación numérica con el modelo de Tang y Asoc.

Valores de concentración a diferentes distancias de la fractura y a un tiempo de 4 días para distintos coeficientes de difusión en la región estancada (De).

x	$D_e = 1x10^{-6} (cm^2/s)$			$D_e = 1x10^{-7} (cm^2/s)$			$D_e = 1x10^{-8} (cm^2/s)$		
(cm)	(1.116)*	(1.116)**	(3.24)**	(1.116)*	(1.116)**	(3.24)**	(1.116)*	(1.116)**	(3.24)**
0.1	.77	.7708	.7708	.88	.8739	.8739	.95	.9655	.9655
0.2	.58	.5814	.5814	.78	.7642	.7642	.90	.9161	.9161
0.3	.44	.4524	.4524	.69	.6963	.6963	.84	.8470	.8470
0.4	.32	.3125	.3125	.59	.5720	.5720	.79	.7905	.7905
0.5	.23	.2307	.2307	.51	.5180	.5180	.74	.7433	.7433
0.6	.18	.1726	.1726	.44	.4340	.4340	.69	.7045	.7045
0.7	.11	.1150	.1150	.37	.3410	.3410	.63	.6341	.6341

* : Solución tipo integral de Tang y Asoc. Valores obtenidos de la Figura 9 de la referencia (38).

** : Ecuación (1.116) o ecuación (3.25) y ecuación (3.24) invertidas numéricamente mediante el algoritmo de Stehfest[37].

TABLA 3.2 Comparación numérica con el modelo de Tang y Asoc.

Valores de concentración en la cara sólida(x=0.76cm) para diferentes tiempos y distintos coeficientes de difusión en la región estancada.

t	$D_e = 1x10^{-6} (cm^2/s)$			$D_e = 1x10^{-7} (cm^2/s)$			$D_e = 1x10^{-8} (cm^2/s)$		
días	(1.116) *	(1.116) **	(3.24) *	(1.116) *	(1.116) **	(3.24) **	(1.116) *	(1.116) **	(3.24) **
.5	.0.0	.0076	.0076	.09	.0798	.0798	.24	.2387	.2387
.7	0.01	.0137	.0137	.11	.1107	.1107	.30	.2954	.2954
.9	0.02	.0187	.0187	.15	.1402	.1402	.36	.3525	.3525
1	0.025	.0232	.0232	.17	.1466	.1466	.38	.3818	.3818
1.5	0.03	.0361	.0361	.20	.1920	.1920	.45	.4460	.4460
2	0.05	.0495	.0495	.24	.2495	.2495	.51	.5106	.5106
3	0.07	.0738	.0738	.29	.2873	.2873	.58	.5849	.5849
4	0.09	.0967	.0967	.34	.3349	.3349	.62	.5498	.5498

* : Solución tipo integral de Tang y Asoc., Valores obtenidos de la Figura 10, de la referencia (38).

** : Ecuación (1.116) ρ (3.28) y ecuación (3.24), invertidas numéricamente mediante el algoritmo de Stehfest[37].

TABLA 4.1. Concentración adimensional para diferentes t_D (se utilizó la ecuación (4.1)).

$\xi=1x10^{-10}$, $R=1$, $x_D=1$, $P_{e_2}=10^6$ y $E=0.5m$

t_D	$P_{e_1}=1$	$P_{e_1}=4$	t_D	$P_{e_1}=1$	$P_{e_1}=4$
0.001	0.0000	0.0000	0.490	0.3147	0.3181
0.005	0.0000	0.0000	0.500	0.3214	0.3282
0.007	0.0000	0.0000	0.510	0.3420	0.3301
0.010	0.0000	0.0000	0.520	0.3355	0.3376
0.015	0.0000	0.0000	0.530	0.3514	0.3511
0.020	0.0000	0.0000	0.540	0.3630	0.3621
0.030	0.0000	0.0000	0.550	0.3765	0.3630
0.040	0.0000	0.0000	0.560	0.3789	0.3619
0.050	0.0000	0.0000	0.570	0.3886	0.3826
0.060	0.0000	0.0000	0.580	0.3966	0.3973
0.080	0.0002	0.0003	0.590	0.4045	0.4009
0.090	0.0006	0.0006	0.600	0.4173	0.4057
0.100	0.0013	0.0013	0.610	0.4252	0.4244
0.110	0.0024	0.0023	0.620	0.4114	0.4291
0.120	0.0040	0.0041	0.630	0.4276	0.4459
0.130	0.0060	0.0063	0.640	0.4362	0.4445
0.140	0.0091	0.0090	0.650	0.4353	0.4550
0.150	0.0126	0.0124	0.660	0.4595	0.4650
0.160	0.0165	0.0166	0.670	0.4624	0.4531
0.170	0.0215'	0.0211	0.680	0.4693	0.4810
0.180	0.0268	0.0269	0.690	0.4849	0.4738
0.190	0.0328	0.0326	0.700	0.4979	0.4816
0.200	0.0393	0.0387	0.710	0.4827	0.4974
0.210	0.0468	0.0456	0.720	0.5104	0.4925
0.220	0.0534	0.0541	0.730	0.5134	0.5194
0.230	0.0622	0.0612	0.740	0.5123	0.5173
0.240	0.0703	0.0708	0.750	0.5371	0.5133
0.250	0.0797	0.0773	0.760	0.5214	0.5363
0.260	0.0865	0.0875	0.770	0.5508	0.5184
0.270	0.0954	0.0962	0.780	0.5376	0.5174
0.280	0.1065	0.1050	0.790	0.5516	0.5359
0.290	0.1160	0.1154	0.800	0.5623	0.5520
0.300	0.1274	0.1259	0.810	0.5487	0.5480
0.310	0.1336	0.1328	0.820	0.5720	0.5538
0.320	0.1447	0.1497	0.830	0.5635	0.5793
0.330	0.1559	0.1527	0.840	0.5013	0.5655
0.340	0.1627	0.1606	0.850	0.5758	0.5780
0.350	0.1713	0.1761	0.860	0.5749	0.5897
0.360	0.1840	0.1853	0.870	0.5937	0.5782
0.370	0.1942	0.1910	0.880	0.6033	0.6086
0.380	0.2080	0.2064	0.890	0.5883	0.6073
0.390	0.2126	0.2102	0.900	0.6240	0.6037
0.400	0.2257	0.2273	0.910	0.6154	0.5916
0.410	0.2408	0.2369	0.920	0.6254	0.6175
0.420	0.2495	0.2446	0.930	0.6362	0.6295
0.430	0.2487	0.2524	0.940	0.6203	0.6371
0.440	0.2688	0.2638	0.950	0.6176	0.6308
0.450	0.2740	0.2814	0.960	0.6497	0.6298
0.460	0.2874	0.2914	0.970	0.6164	0.6442
0.470	0.2918	0.2962	0.980	0.6531	0.6410
0.480	0.2967	0.3007	0.990	0.6483	0.6269
			1.000	0.6687	0.6765

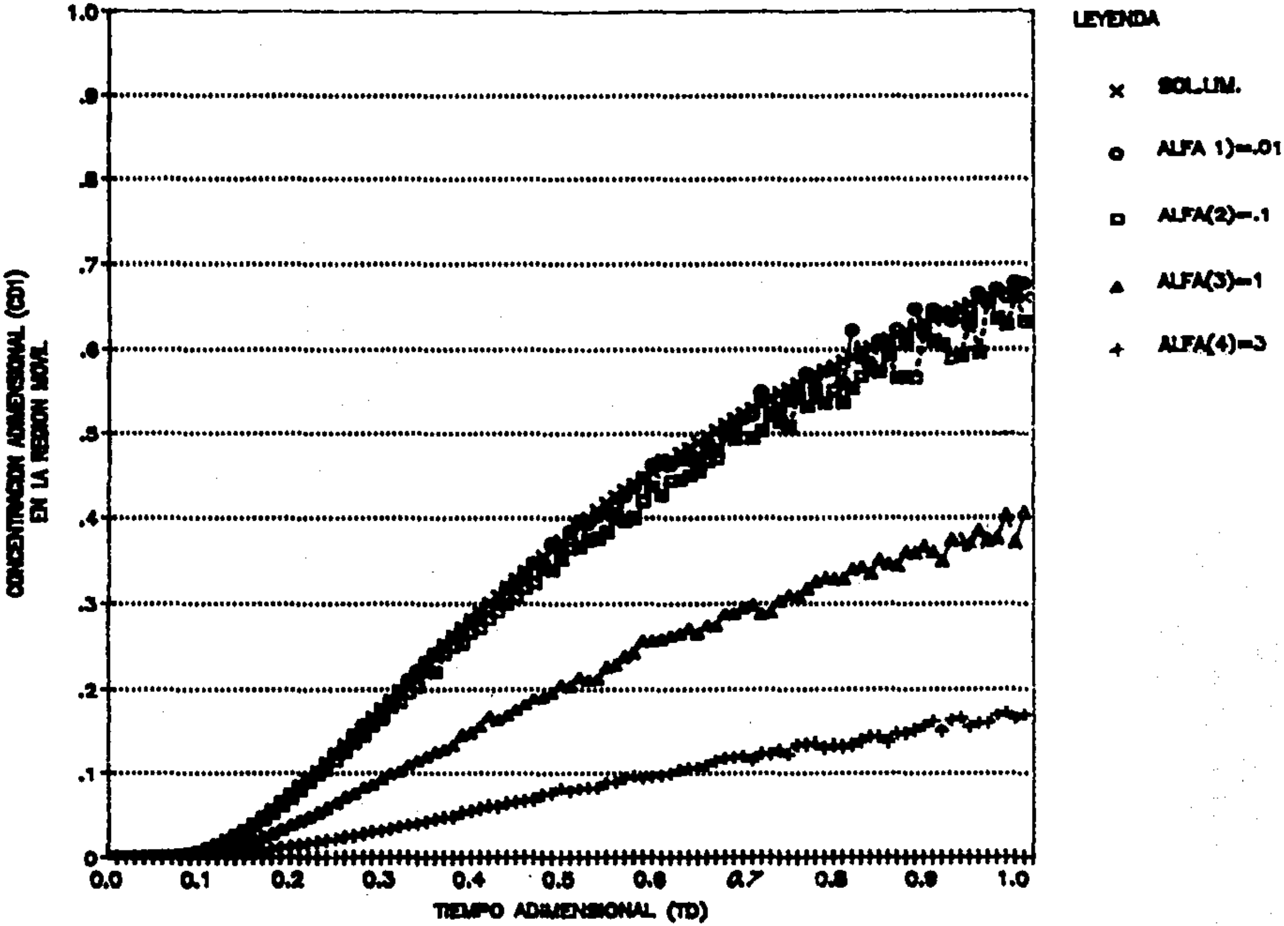
TABLA 4.2. Concentración adimensional para diferentes t_D (se utilizó la ecuación (4.4)).
$\xi = 1x10^{-10}$, $x_D=1$, $R=1$ y $P_{e2}=10$

t_D	$P_{e1}=1$	$P_{e1}=4$	t_D	$P_{e1}=1$	$P_{e1}=4$
0.001	0.0000	0.0000	0.490	0.3147	0.3181
0.005	0.0000	0.0000	0.500	0.3214	0.3282
0.007	0.0000	0.0000	0.510	0.3420	0.3301
0.010	0.0000	0.0000	0.520	0.3355	0.3376
0.015	0.0000	0.0000	0.530	0.3514	0.3511
0.020	0.0000	0.0000	0.540	0.3630	0.3621
0.030	0.0000	0.0000	0.550	0.3565	0.3630
0.040	0.0000	0.0000	0.560	0.3789	0.3619
0.050	0.0000	0.0000	0.570	0.3886	0.3826
0.060	0.0000	0.0000	0.580	0.3966	0.3973
0.080	0.0002	0.0003	0.590	0.4045	0.4089
0.090	0.0006	0.0006	0.600	0.4173	0.4057
0.100	0.0013	0.0013	0.610	0.4252	0.4244
0.110	0.0024	0.0023	0.620	0.4114	0.4291
0.120	0.0040	0.0041	0.630	0.4276	0.4459
0.130	0.0060	0.0063	0.640	0.4362	0.4445
0.140	0.0091	0.0090	0.650	0.4353	0.4550
0.150	0.0126	0.0124	0.660	0.4595	0.4650
0.160	0.0165	0.0166	0.670	0.4624	0.4531
0.170	0.0215	0.0211	0.680	0.4693	0.4810
0.180	0.0268	0.0269	0.690	0.4849	0.4738
0.190	0.0328	0.0326	0.700	0.4979	0.4816
0.200	0.0393	0.0387	0.710	0.4827	0.4974
0.210	0.0468	0.0456	0.720	0.5104	0.4925
0.220	0.0534	0.0541	0.730	0.5134	0.5194
0.230	0.0622	0.0612	0.740	0.5123	0.5173
0.240	0.0703	0.0708	0.750	0.5371	0.5133
0.250	0.0797	0.0773	0.760	0.5214	0.5363
0.260	0.0865	0.0875	0.770	0.5508	0.5184
0.270	0.0954	0.0962	0.780	0.5376	0.5174
0.280	0.1065	0.1050	0.790	0.5516	0.5359
0.290	0.1160	0.1154	0.800	0.5623	0.5520
0.300	0.1274	0.1259	0.810	0.5487	0.5480
0.310	0.1336	0.1328	0.820	0.5720	0.5538
0.320	0.1447	0.1497	0.830	0.5635	0.5793
0.330	0.1559	0.1527	0.840	0.5813	0.5655
0.340	0.1627	0.1606	0.850	0.5758	0.5780
0.350	0.1713	0.1761	0.860	0.5749	0.5897
0.360	0.1840	0.1853	0.870	0.5937	0.5782
0.370	0.1942	0.1910	0.880	0.6033	0.6086
0.380	0.2080	0.2064	0.890	0.5883	0.6073
0.390	0.2126	0.2102	0.900	0.6240	0.6037
0.400	0.2257	0.2273	0.910	0.6154	0.5916
0.410	0.2408	0.2369	0.920	0.6254	0.6175
0.420	0.2495	0.2446	0.930	0.6362	0.6295
0.430	0.2487	0.2524	0.940	0.6203	0.6371
0.440	0.2688	0.2638	0.950	0.6176	0.6308
0.450	0.2740	0.2814	0.960	0.6197	0.6298
0.460	0.2874	0.2914	0.970	0.6164	0.6442
0.470	0.2918	0.2962	0.980	0.6531	0.6410
0.480	0.2967	0.3007	0.990	0.6483	0.6269
			1.000	0.6687	0.6765

FIGURA 4.1

VARIACION DE LA CONCENTRACION ADIMENSIONAL CON RESPECTO ALFA

PE1=2



Los datos han sido obtenidos a partir de las ecuaciones (4.5) y (4.6).

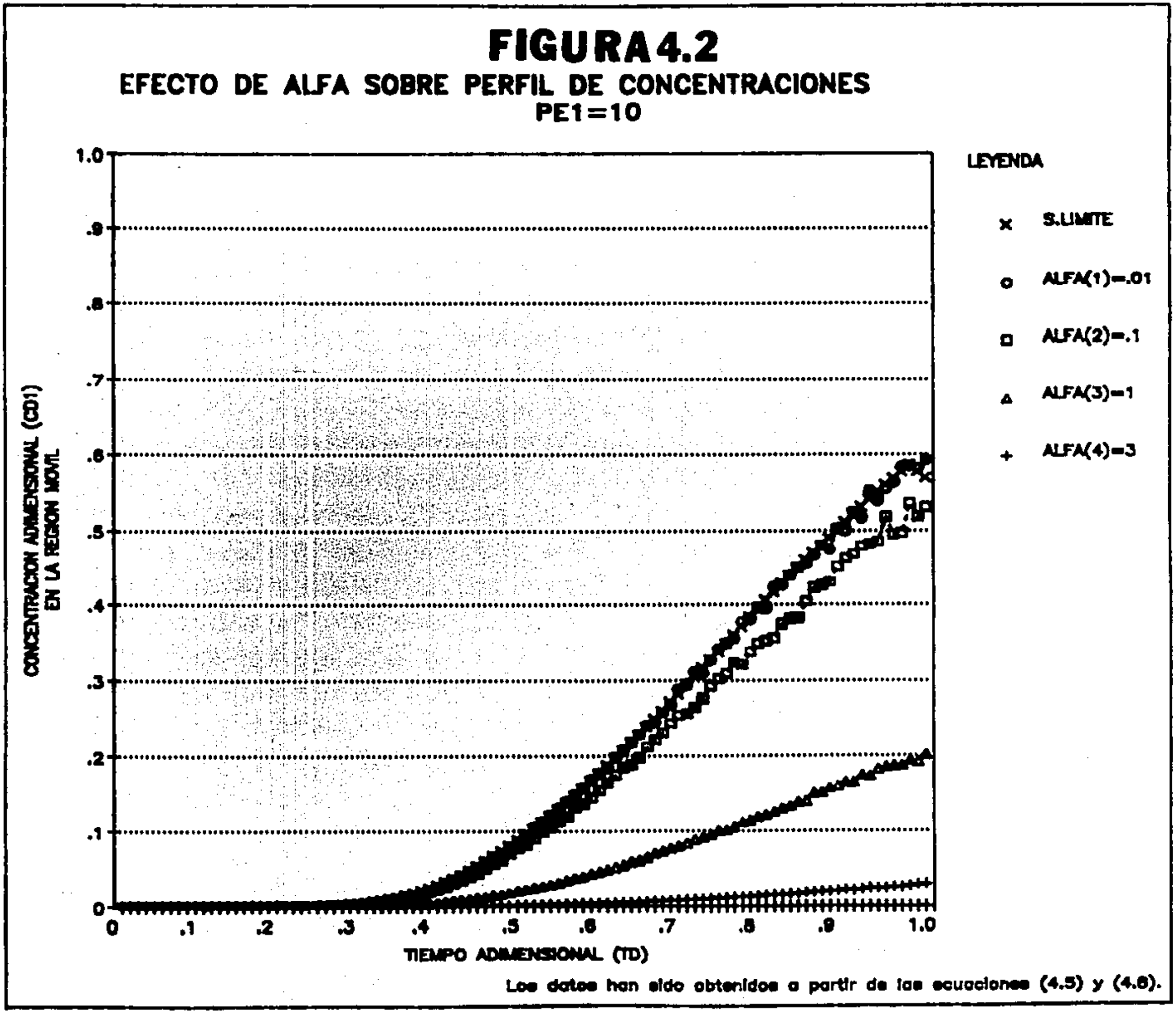
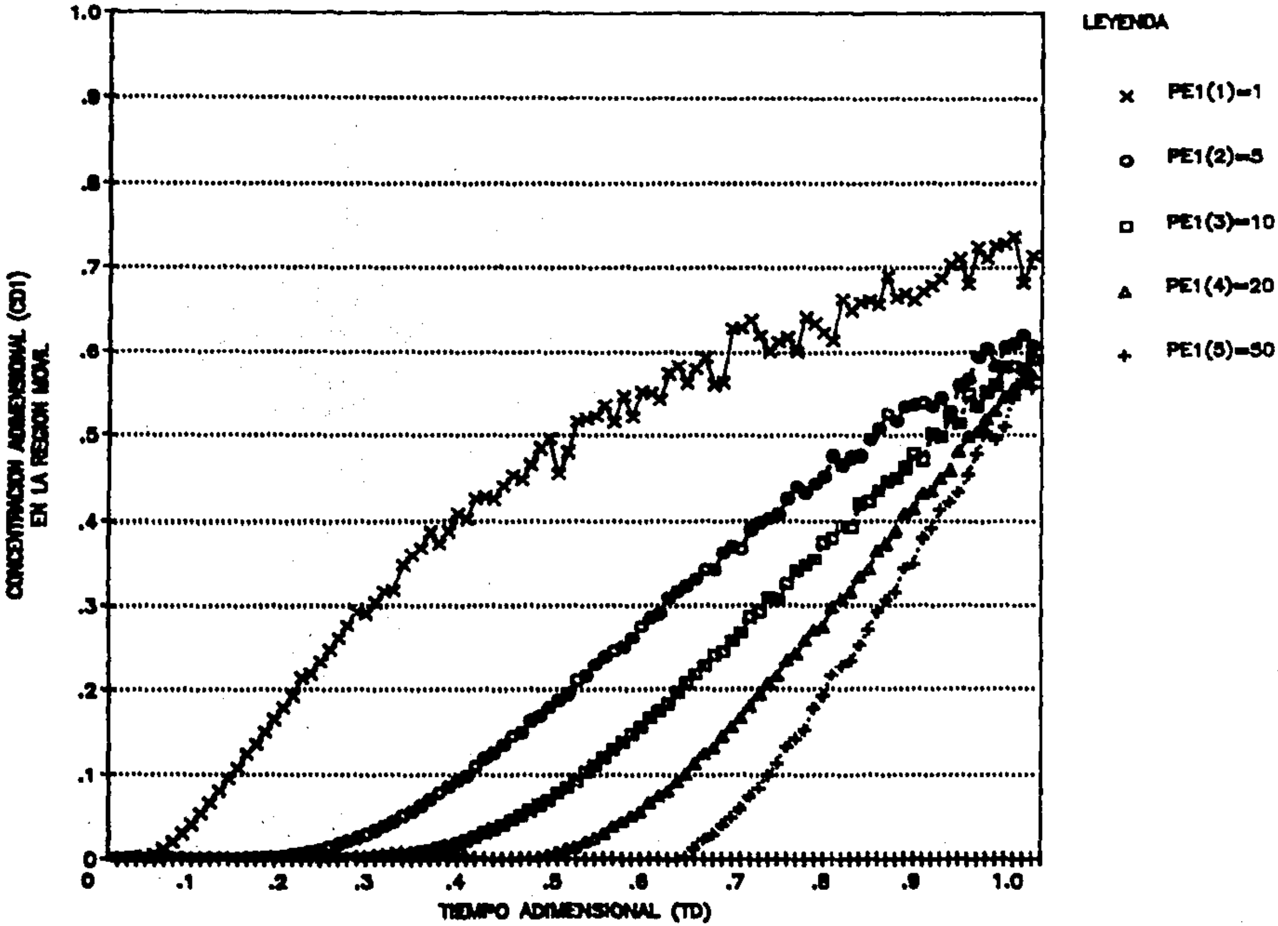


FIGURA 4.2
EFECTO DE ALFA SOBRE PERFIL DE CONCENTRACIONES
PE1=10
CONCENTRACION ADIMENSIONAL (CD1)
EN LA REGION MOVIL
TIEMPO ADIMENSIONAL (TD)
LEYENDA
S.LIMITE
ALFA(1)=.01
ALFA(2)=.1
ALFA(3)=1
ALFA(4)=3
Los datos han sido obtenidos a partir de las ecuaciones (4.5) y (4.6).

FIGURA 4.3

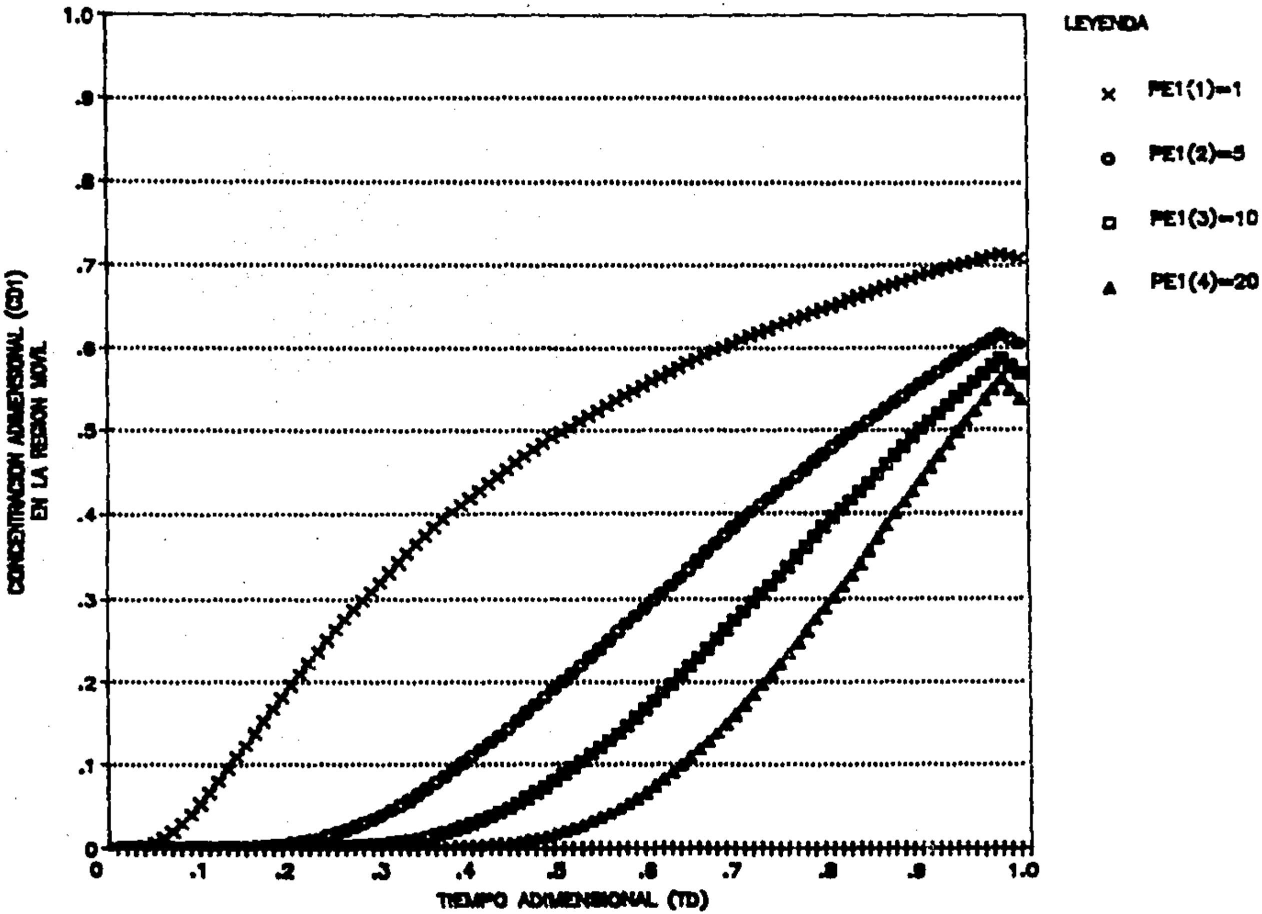
EFECTO DE PE1 SOBRE PERFIL DE CONCENTRACIONES
ALFA=0.01



Los datos han sido obtenidos a partir de la ecuacion (4.5).

FIGURA 4.3A

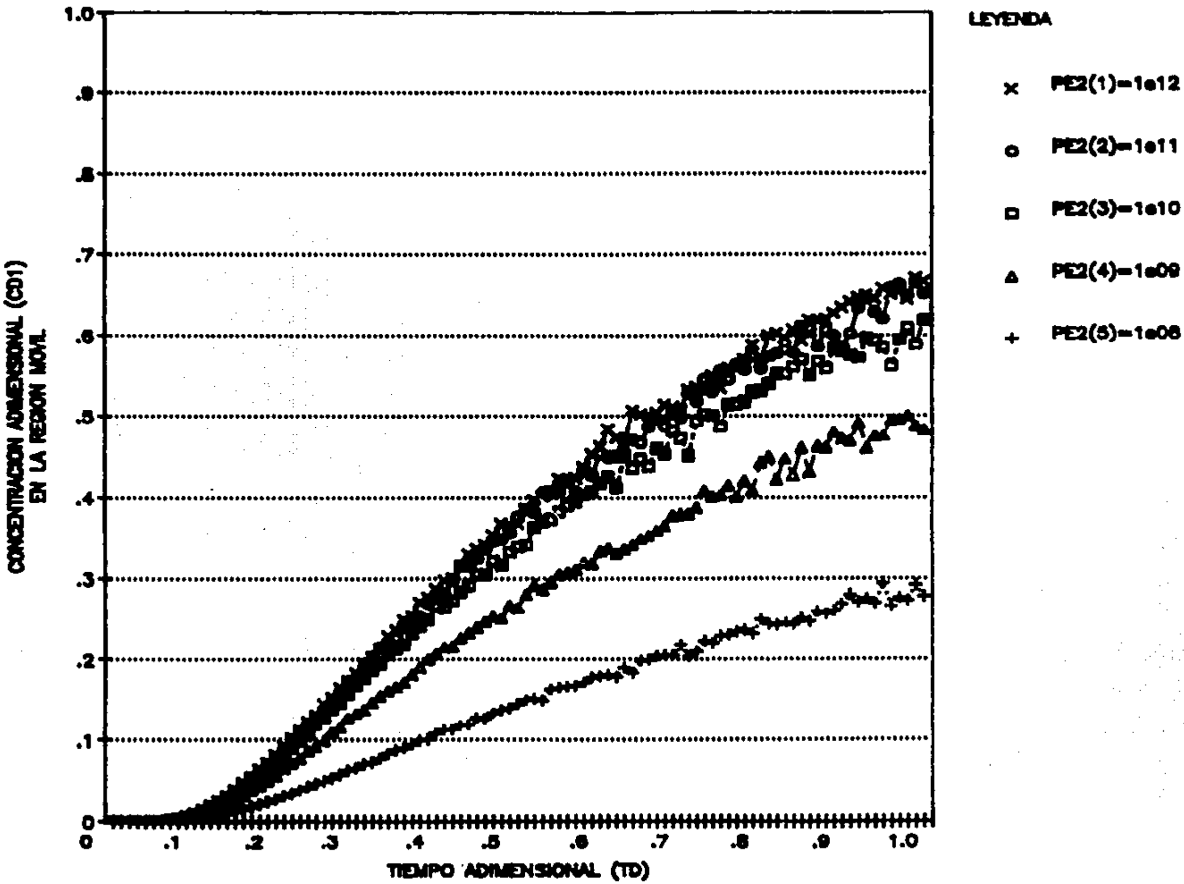
EFECTO DE PE1 SOBRE EL PERFIL DE CONCENTRACIONES
SOLUCION ANALITICA LIMITE



Los datos han sido obtenidos a partir de la ecuacion (4.8).

FIGURA 4.4

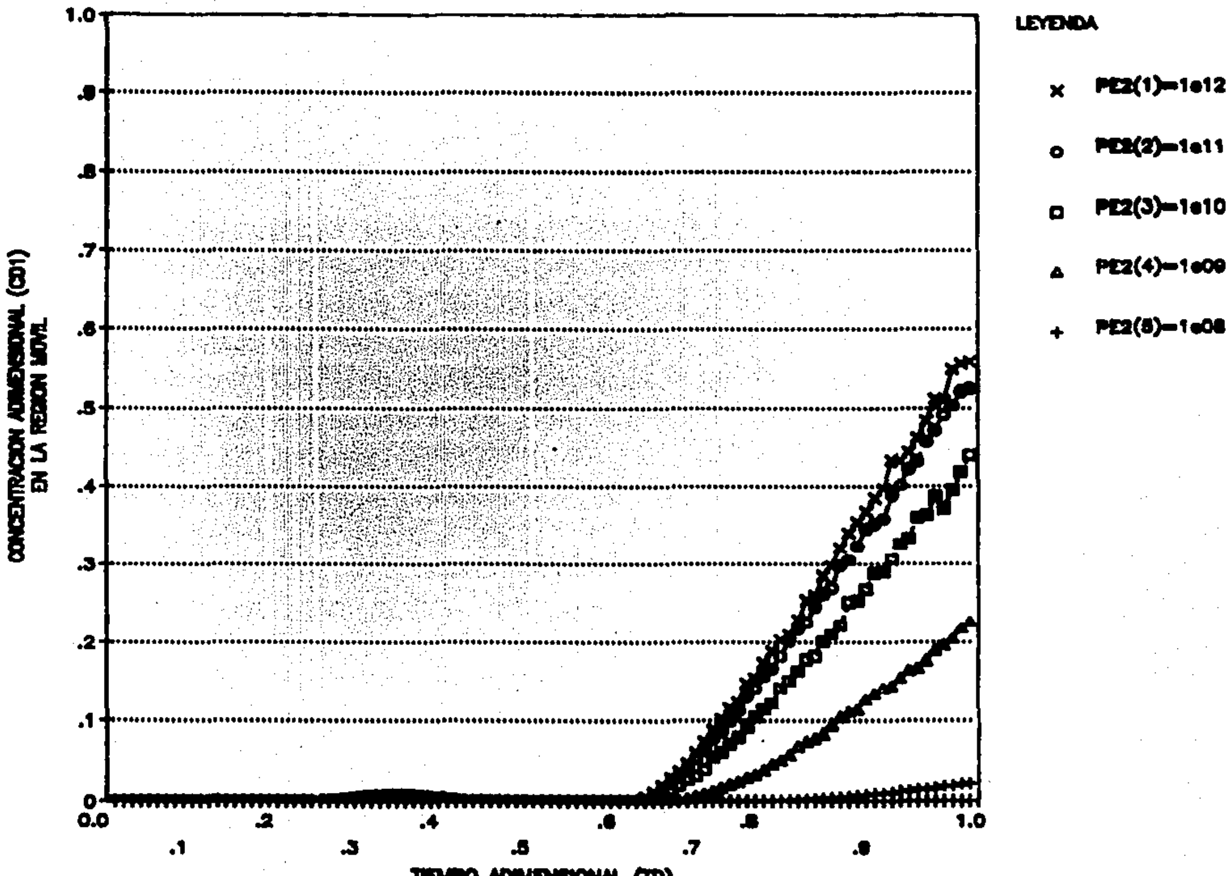
EFECTO DE PE2 SOBRE PERFIL DE CONCENTRACIONES
PE1=2 , POROSIDAD=.01



Los datos han sido obtenidos a partir de la ecuacion (4.4).

FIGURA 4.5

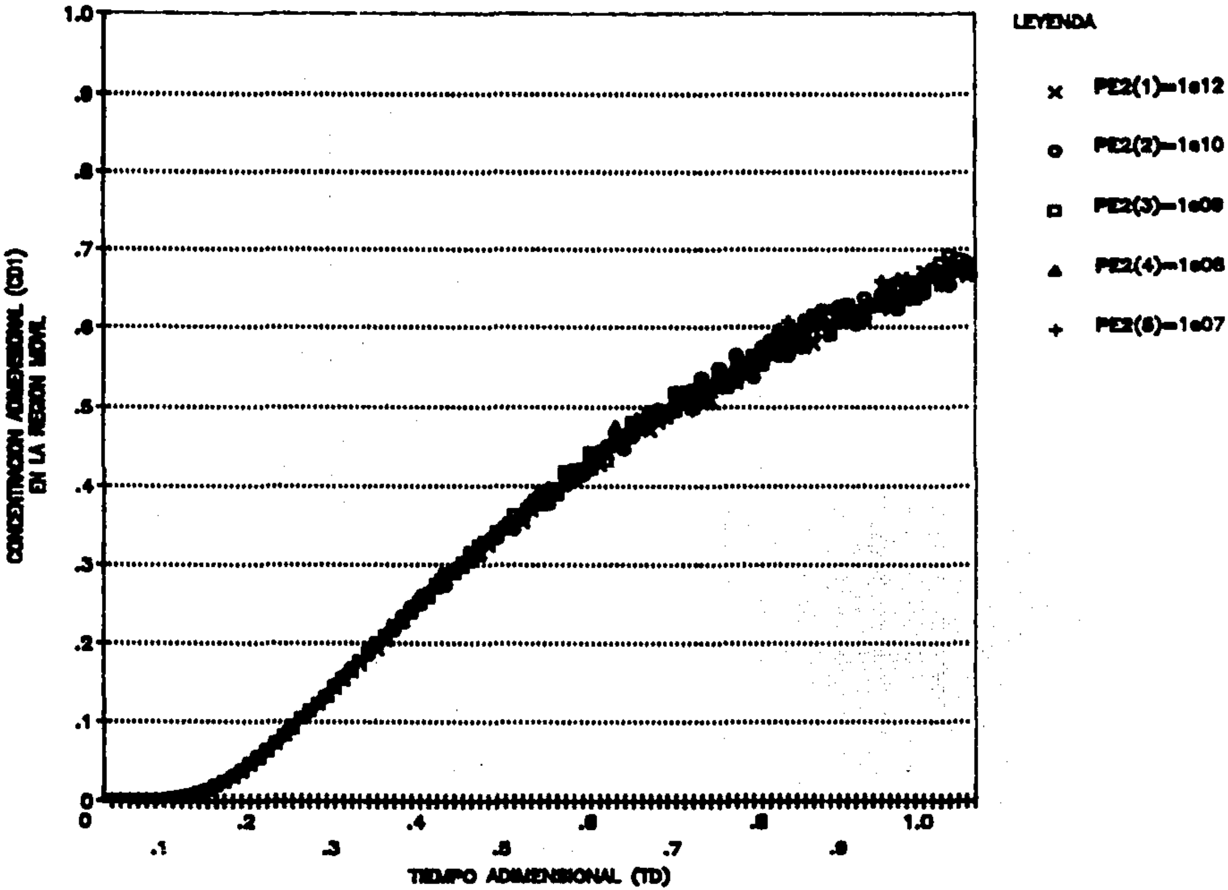
EFECTO DE PE2 SOBRE PERFIL DE CONCENTRACIONES
PE1=50 , POROSIDAD=.01



Los datos han sido obtenidos a partir de la ecuacion (4.4).

FIGURA 4.6

EFECTO DE PE2 SOBRE PERFIL DE CONCENTRACIONES
PE1=2 , POROSIDAD=1e-05



Los datos han sido obtenidos a partir de la ecuacion (4.4).

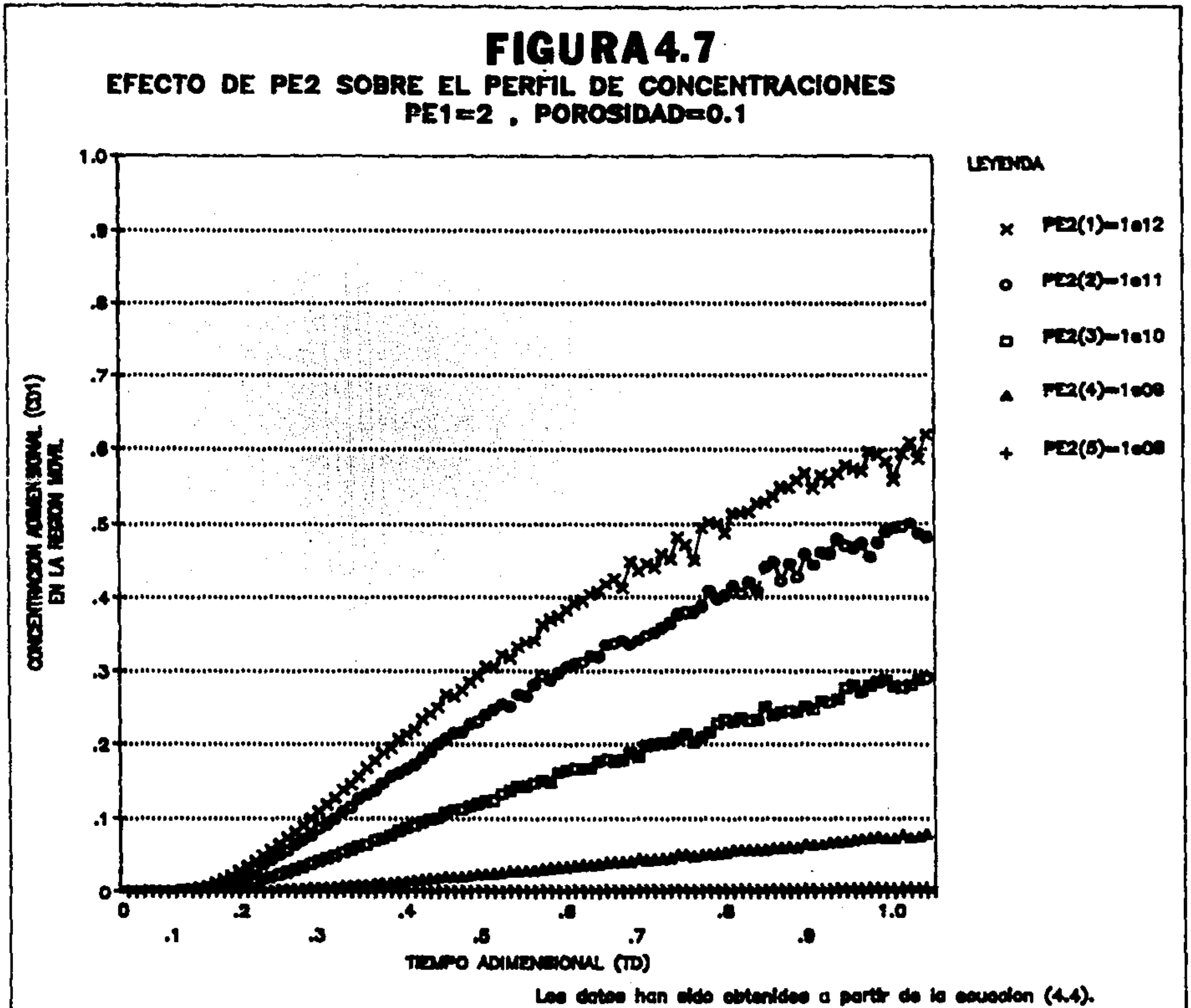
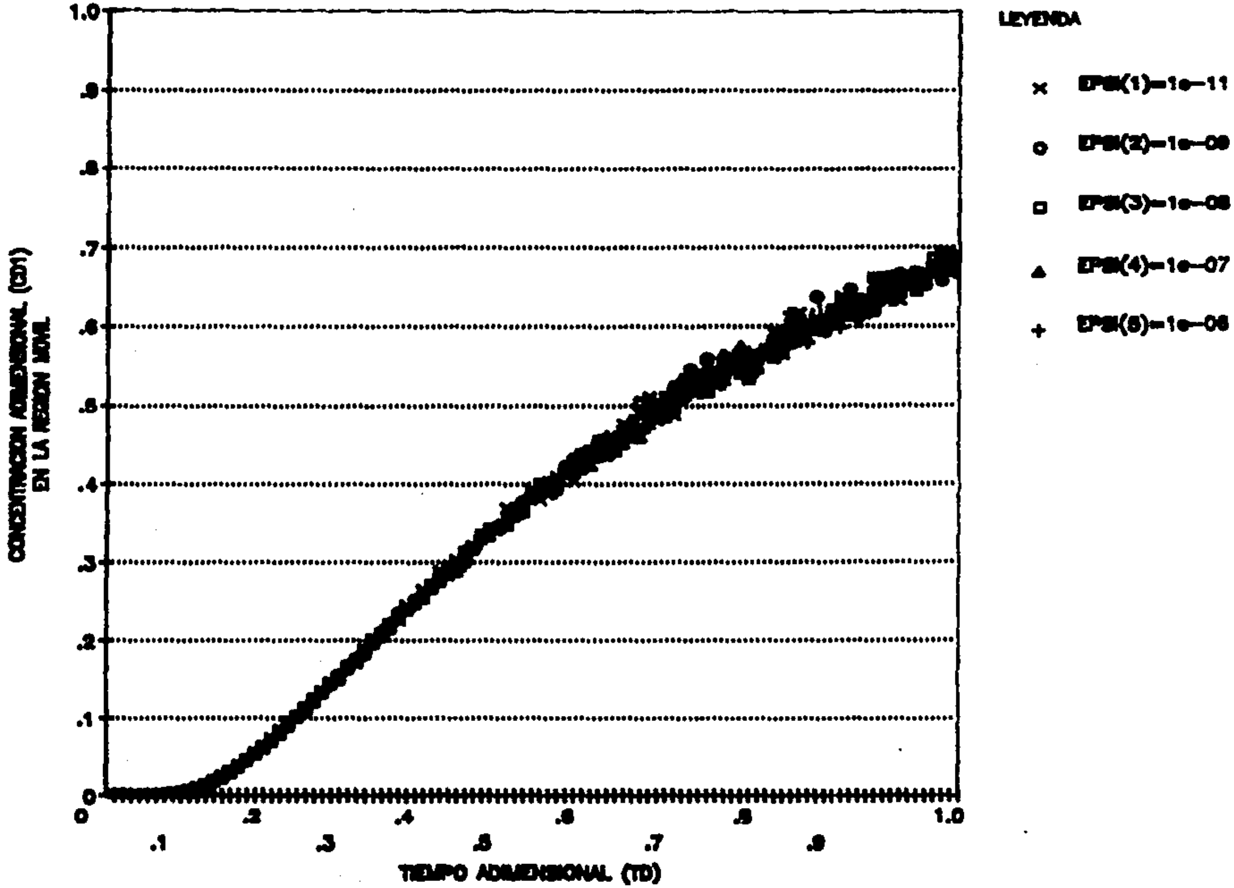


FIGURA 4.7
EFECTO DE PE2 SOBRE EL PERFIL DE CONCENTRACIONES
PE1=2 , POROSIDAD=0.1
LEYENDA
PE2(1)=1e12
PE2(2)=1e11
PE2(3)=1e10
CONCENTRACION ADIMENSIONAL (CD1) EN LA REGION MOVIL
TIEMPO ADIMENSIONAL (TD)
Los datos han sido obtenidos a partir de la ecuacion (4.4).

FIGURA4.8

EFECTO DE EPSI SOBRE EL PERFIL DE CONCENTRACIONES
PE1=2 , PE2=1e10

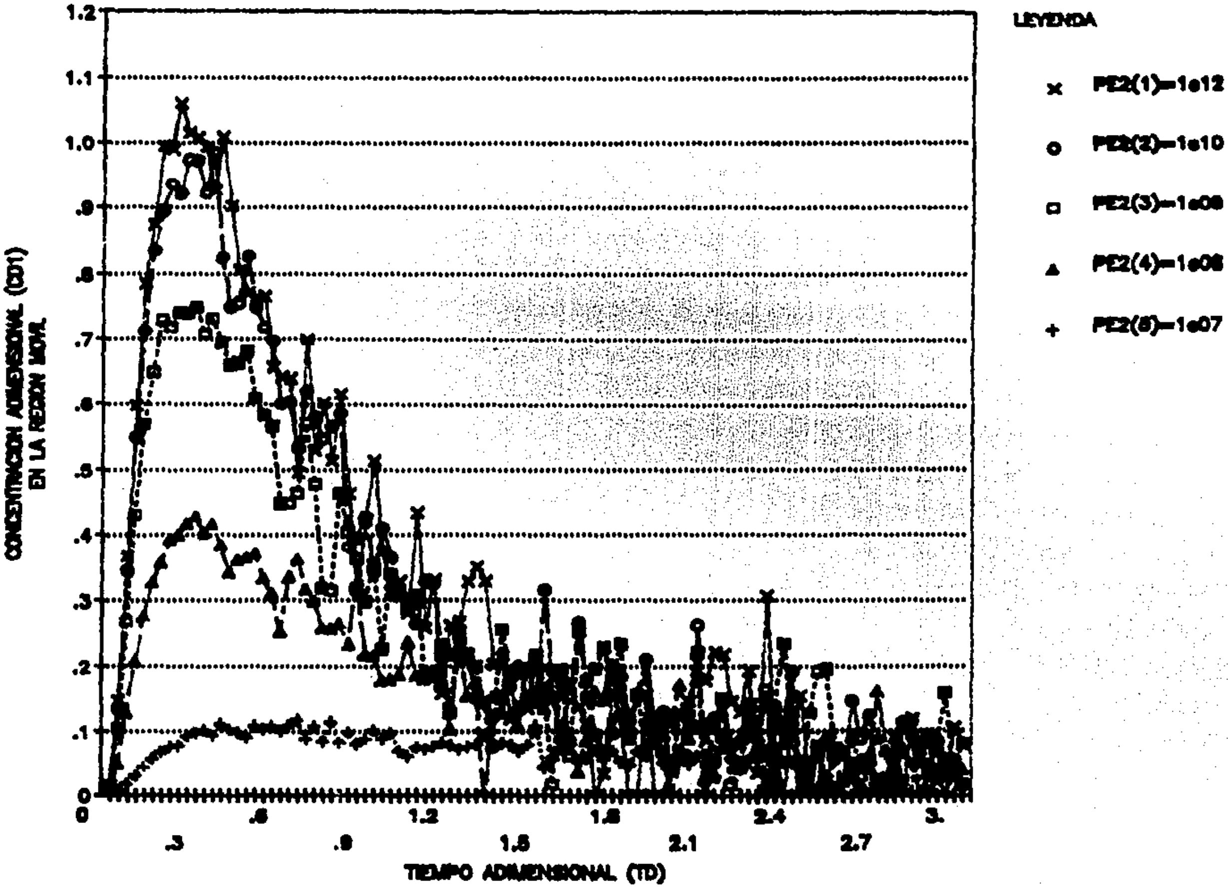


Los datos han sido obtenidos a partir de la ecuacion (4.4).

FIGURA 4.9

SOLUCION TIPO PICO

PE2=2 , POROSIDAD=.01

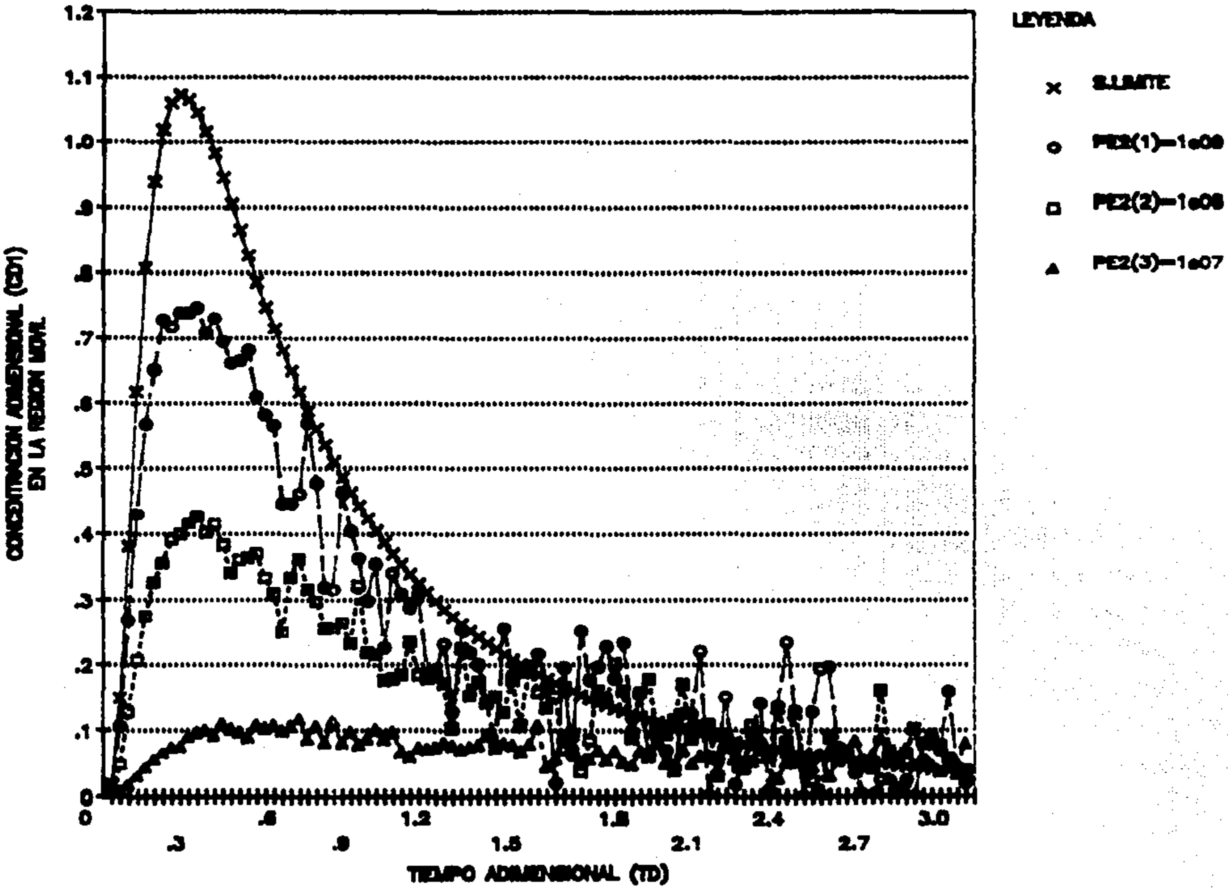


Los datos han sido obtenidos a partir de la ecuacion (4.6).

FIGURA 4.10

SOLUCION TIPO PICO

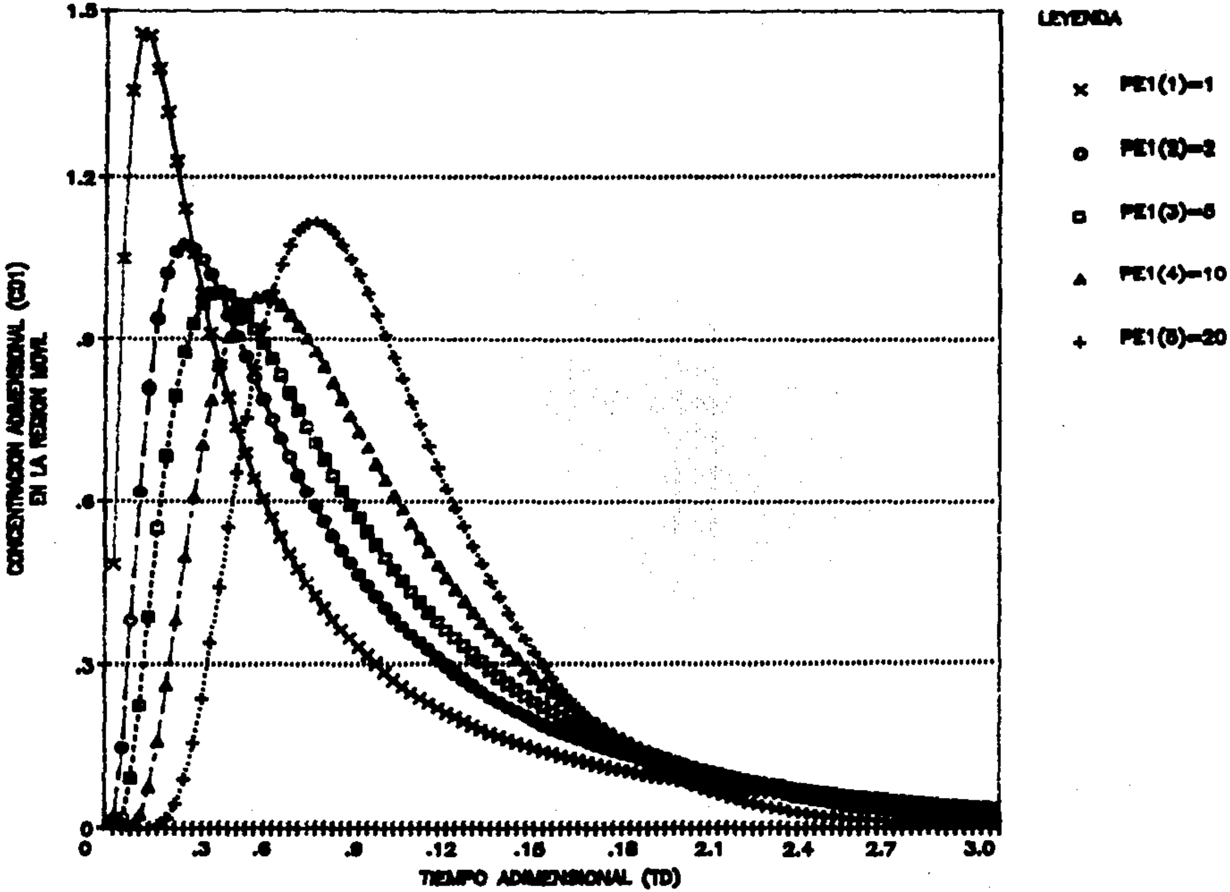
PE2=2 , POROSIDAD=.01



Los datos han sido obtenidos a partir de las ecuaciones (4.6) y (4.8).

FIGURA 4.11

SOLUCION ANALITICA LIMITE TIPO PICO
(ENVOLVENTES CORRESPONDIENTES A DIFERENTES PE1'S)



Los datos han sido obtenidos a partir de la ecuacion (4.8).

APENDICE "A"

"DESARROLLO DE LAS SOLUCIONES AL MODELO DE DIFUSIÓN (ECUACIÓN (1.109)) PARA DOS GRUPOS DE CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA (ECUACIONES (1.15) Y (1.19))".

APÉNDICE "A"

Soluciones al modelo de difusión (ecuación (1.09)) para dos grupos de condiciones iniciales y de frontera (ecuaciones (1.15) y (1.19))

1. Primer grupo de condiciones iniciales y de frontera (condiciones (1.11) a (1.13)).

Aplicando el método de Transformada de Laplace, con respecto a t, a la ecuación (1.09):

$$L\left\{\frac{\partial C}{\partial t}\right\} = L\left\{D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right\} - L\left\{v\frac{\partial C}{\partial x}\right\}$$

Aplicando la condición (1.11):

$$L\left\{\frac{\partial C}{\partial t}\right\} = s\bar{C} - C(x,0) = s\bar{C}$$

Entonces la ecuación (1.09) en el espacio de Laplace es:

$$D\frac{d^2\bar{C}}{dx^2} - v\frac{d\bar{C}}{dx} - s\bar{C} = 0 \qquad \text{(A.1)}$$

Las raíces de la ecuación (A.1) son las siguientes:

$$m_1 = \frac{v}{2D}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4sD}{v^2}}\right)$$

$$m_2 = \frac{v}{2D} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4sD}{v2}} \right)$$

Por lo que la solución general de la ecuación A.1 es:

$$\bar{C}(x,s) = C_1 \exp(m_1 x) + C_2 \exp(m_2 x) \qquad (A.2)$$

Las condiciones (1.11) y (1.12) en el espacio de Laplace son las siguientes:

$$L\ \{C(0,t)=C_o\} = \frac{C_o}{s} \qquad (A.3)$$

$$L\ \{C(\infty,t)=0\} = 0 \qquad (A.4)$$

Sustituyendo (A.3) y (A.4) en (A.2), se tiene que:

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = \frac{C_o}{s}$$

Sustituyendo C_1 y C_2 en (A.2), se obtiene:

$$\bar{C}(x,s) = C_o \ \exp\left(\frac{vx}{2D}\right) \frac{1}{s} \exp\left(-\left(\sqrt{\frac{v^2}{4D^2} + \frac{s}{D}}\right) x\right) \qquad (A.5)$$

La ecuación A.5 se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\bar{C}(x,s) = C_o \exp\left(\frac{vx}{2D}\right) \cdot \left\{\frac{\exp\left[-\sqrt{\left(s+\frac{v^2}{4D}\right)\frac{1}{D}}\,x)\right]}{\left(s+\frac{v^2}{4D}\right) - \frac{v^2}{4D}}\right\} \qquad (A.6)$$

La inversión de la ecuación A.6 es la siguiente:

$$C(x,t) = C_o \exp\left(\frac{vx}{2D}\right) L^{-1}\left\{\frac{\exp\left[-x\ \left(s+\frac{v}{4D}\right)\frac{1}{D}\right]}{\left(s+\frac{v^2}{4D}\right) - \frac{v^2}{4D}}\right\} \qquad (A.7)$$

Utilizando la fórmula 19 del Apéndice V de la referencia -
(8) es la siguiente:

$$L^{-1}\left\{\frac{\exp(-x\sqrt{s/K})}{s-\alpha}\right\} = \frac{1}{2}\, e^{\alpha t}\}\exp(-x\sqrt{\alpha/K}\ \mathrm{erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{Kt}} - \sqrt{\alpha t}\right]$$

$$+ \exp(x\sqrt{\alpha/K}) \cdot \mathrm{erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{Kt}} + \sqrt{\alpha t}\right] \qquad (A.8)$$

Para el caso de la ecuación (A.8):

$$\alpha = \frac{v^2}{4D} \qquad y \qquad K = D$$

Y aplicando el teorema de traslación:

$$L^{-1}\{f(s-\alpha_1)\} = \exp(\alpha_1 t)$$

siendo, en este caso, $\alpha_1 = -\frac{v^2}{4D}$

Sustituyendo las ecuaciones (A.8) en (A.7) se tiene:

$$C(x,t) = C_0 \exp\left(\frac{vx}{2D}\right)\left\{\exp\left(-\frac{v^2 t}{4D}\right)\exp\left(\frac{v^2 t}{4D}\right)\left[\exp\left(-\frac{xv}{2D}\right)\cdot\operatorname{erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{tD}}-\sqrt{\frac{v^2 t}{4D}}\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.+\exp\left(\frac{xv}{2D}\right)\cdot\operatorname{erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{tD}}-\sqrt{\frac{v^2 t}{4D}}\right]\right]\right\}$$

Simplificando y rearreglando términos:

$$\frac{C(x,t)}{C_0} = \frac{1}{2}\left\{\operatorname{erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{tD}} - \frac{v}{2}\sqrt{\frac{t}{D}}\right] + \exp\left(\frac{vx}{D}\right)\operatorname{erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{tD}} + \frac{v}{2}\sqrt{\frac{t}{D}}\right]\right\} \qquad \text{(A.9)}$$

La ecuación (A.9) es la solución del modelo de Difusión desarrollada por Coats, con las condiciones (1.11) a (1.13), es decir, la ecuación (1.15).

Sustituyendo las variables adimensionales de Coats:

$$I=\frac{vt}{L};\ \ y=\frac{x}{L};\ \ \gamma=\frac{vL}{D};\ \ v=\frac{IL}{t};\ \ x=yL;\ \ D=\frac{vL}{D}$$

en la ecuación (A.9) se tiene la equivalencia de los siguientes términos:

$$\frac{vx}{D} = \gamma y \qquad \text{y} \qquad \frac{x-\frac{v}{2}t}{2\sqrt{Dt}} = \frac{\sqrt{\gamma}\ \ y-I}{2\ \sqrt{I}}$$

por lo que la ecuación (A.9) expresada en términos de las variables adimensionales de Coats es la siguiente:

$$\frac{C(x,t)}{C_o} = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left[\frac{\sqrt{\gamma}}{2}\frac{y-I}{\sqrt{I}}\right] + \exp(\gamma y)\,\mathrm{erfc}\left[\frac{\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{I}}\,y+I\right] \qquad (A.10)$$

La ecuación (A.10) es la ecuación (1.14)

2. <u>Segundo grupo de condiciones iniciales y de frontera (condiciones (1.16) a (1.18))</u>.

   Las condiciones de frontera (1.17) y (1.18) en el espacio de Laplace son las siguientes:

$$\text{para} \quad x = 0; \qquad \frac{vC_o}{s} = v\bar{C} - D\,\frac{d\bar{C}}{dx} \qquad (A.11)$$

$$\lim_{x\to\infty} \bar{C}(x) = 0 \qquad (A.12)$$

   Sustituyendo la condición de frontera (A.12) en la solución general (A.2) se tiene que $C_1 = 0$, por lo que la ecuación (A.2) se reduce a la siguiente:

$$\bar{C} = C_2\,\exp(m_2 x) \qquad (A.13)$$

donde $$m_2 = \frac{v}{2D}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4sD}{v^2}}\right)$$

Aplicando la condición(A.12)a la ecuación(A.13):

$$\frac{vC_o}{s} = vC_2 - D\,C_2\,m_2 = C_2\,(v - D\,m_2)$$

lo que implica:

$$C_2 = \frac{vC_o}{s(v-Dm_2)} = \frac{2\,C_o}{s\left(1+\sqrt{1+\frac{4sD}{v^2}}\right)}$$

Sustituyendo C_2 en(A.13):

$$\bar{C}(x,s) = \frac{2\,C_o}{s\left(1+\sqrt{1+\frac{4sD}{v^2}}\right)}\exp\left\{\frac{vx}{2D}\left(1-\sqrt{1+\frac{4sD}{v^2}}\right)\right\} \qquad (A.14)$$

Si $a = \frac{\sqrt{D}v}{2D}$ se tiene la siguiente igualdad:

$$a + \sqrt{a^2 + s} = \frac{v\sqrt{D}}{2D}\left(1+\sqrt{1+\frac{4Ds}{v^2}}\right)$$

multiplicando y dividiendo la ecuación(A.14)por $\left(\frac{v\sqrt{D}}{2D}\right)$ y re arreglando términos se tiene:

$$\bar{C}(x,s) = 2C_o\,\frac{v^2\sqrt{D}}{2D}\exp\left(\frac{vx}{2D}\right)\cdot\frac{\exp\left\{-\frac{vx}{2D}\sqrt{1+\frac{4sD}{v^2}}\right\}}{s\,\frac{v^2\sqrt{D}}{2D}\left(1+\sqrt{1+\frac{4sD}{v^2}}\right)}$$

rearreglando términos se tiene:

$$\bar{C}(x,s) = Co\frac{v\sqrt{D}}{D}\exp\left(\frac{vx}{2D}\right)\frac{\exp\left\{-\frac{x\sqrt{D}}{D}\sqrt{\frac{v}{4D}+s}\right\}}{s\left(\frac{v\sqrt{D}}{2D}+\sqrt{\frac{v}{4D}+s}\right)} \qquad (A.15)$$

si $a = \frac{\sqrt{D}v}{2D}$ la ecuación (A.15) se puede escribir de la siguien te forma:

$$\bar{C}(x,s) = A\,\frac{1}{s}\,\frac{\exp(-K\sqrt{a^2+s})}{a+\sqrt{a^2+s}} \qquad (A.16)$$

donde:

$$A = C_o\,\frac{Dv}{D}\exp\left(\frac{vx}{2D}\right)$$

$$K = \frac{x\ D}{D}$$

Reemplazando s por p-a (Teorema de traslación), en la ecua ción (A.16):

$$C(x,s) = \frac{1}{(p-a^2)}\,\frac{\exp(-K\sqrt{P})}{(P+a)} \qquad (A.17)$$

La ecuación 31 del Apéndice V de la referencia (8) es:

$$L^{-1}\left\{\frac{\exp(-X\sqrt{p/k})}{(p-\alpha)\,(\sqrt{p/k}+h)}\right\}, \text{con } \alpha \neq kh^2 = \frac{1}{2}e^{\alpha t}\left\{\frac{k^{1/2}}{hk^{1/2}+\alpha^{1/2}}\exp\left[-X\sqrt{\alpha/k}\right]\cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{kt}}-\sqrt{\alpha t}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{k^{1/2}}{hk^{1/2}-\alpha^{1/2}}\exp(X\sqrt{\alpha/k})\cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{kt}}+\sqrt{\alpha t}\right)\right\}$$

(A.18)

Para aplicar la ecuación (A.18) a la ecuación (A.17) se requiere lo siguiente:

- Emplear el teorema de traslación con $\alpha = a^2 = \frac{v^2}{4D}$
- Hacer $k=1$ y $X=K=\frac{x\sqrt{D}}{D}$
- Hacer tender el límite de $\{f(s)\}$– lim $f(t)$ cuando – $\alpha \to h^2$, para que:

$$\lim_{\alpha\to h^2}\left\{\frac{\exp(-X\sqrt{p})}{(p-h^2)\;(\sqrt{p}+h)}\right\} = \left\{\frac{\exp(-X\sqrt{p})}{(p-a^2)\,(\sqrt{p}+a)}\right\}.$$

que es la antitrasformada que se aplicará.

Entonces, aplicando el límite cuando $\alpha \to h^2$, a la ecuación A.18:

$$\lim_{\alpha\to h^2} L^{-1}\left\{\frac{\exp(-X\sqrt{p})}{(p-\alpha)\,(\sqrt{p}+h)}\right\} = \lim_{\alpha\to h^2}\frac{1}{2}e^{\alpha t}\,\frac{1}{h+\alpha^{1/2}}\exp(-X\sqrt{\alpha})\cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{t}}-\sqrt{\alpha t}\right)$$

$$+\lim_{\alpha\to h^2}\frac{e^{\alpha t}}{2(h-\sqrt{\alpha})}\exp(X\sqrt{\alpha})\cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{t}}+\sqrt{\alpha t}\right)$$

$$-\lim_{\alpha\to h^2}\frac{h}{(h^2-\alpha)}\exp(hX+h^2t)\cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{t}}+h\sqrt{t}\right)$$

(A.19)

El primer límite de la ecuación (A.19) es el siguiente:

$$\lim_{\alpha\to h^2} \frac{1}{2} e^{\alpha t} \frac{1}{h+\alpha^{\frac{1}{2}}} \exp(-X\sqrt{\alpha})\, \mathrm{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{t}} - \sqrt{\alpha t}\right) = \frac{1}{2}\exp(h^2 t)\frac{1}{h+h}\exp(-Xh) \cdot \mathrm{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{t}} - h\sqrt{t}\right)$$

$$= \frac{1}{4h}\exp(h^2 t)\exp(-Xh)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{t}} - h\sqrt{t}\right)$$

(A.20)

Para evaluar el segundo límite de la ecuación (A.19) es necesario aplicar la regla de L'hospital:

$$\lim_{\alpha\to h^2} \frac{e^{\alpha t}}{2(h-\sqrt{\alpha})} \exp(X\sqrt{\alpha}) \cdot \mathrm{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{t}} + \sqrt{\alpha t}\right) = \frac{\frac{d}{d\alpha}[\exp(\alpha t)\exp(X\sqrt{\alpha}) \cdot \mathrm{erfc}(\frac{X}{2\sqrt{t}} + \sqrt{\alpha t})]}{\frac{d}{d\alpha}[2(h-\sqrt{\alpha})]} \qquad (A.21)$$

la derivada de la función error complementaria es la siguiente:

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\mathrm{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{t}} - \sqrt{\alpha t}\right)\right] = \frac{d}{d\alpha}(1) - \frac{d}{d\alpha}\left[\mathrm{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{t}} - \sqrt{\alpha t}\right)\right] \qquad (A.22)$$

por definición: $\mathrm{erf}\ (Z) = \frac{2}{\pi} \int_0^Z e^{-u}\, du$ (A.23)

ecuación 7.1.1. de la referencia (1)

derivando la ecuación (A.23)

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{X}{2\sqrt{t}} + \sqrt{\alpha t}\right)\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left[-\frac{X}{2\sqrt{t}} + \sqrt{\alpha t}\right]\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{X}{2\sqrt{t}} + \sqrt{\alpha t}\right) \qquad (A.24)$$

Sustituyendo (A.25) en (A.22) y efectuando las derivadas y rearreglando términos:

$$\frac{d}{d\alpha}[\operatorname{erfc}(\frac{X}{2\sqrt{t}} - \sqrt{\alpha t})] = - \frac{t}{\sqrt{\pi\alpha}}\exp[-(\frac{X}{2\sqrt{t}} + \sqrt{\alpha t})^2] \qquad (A.25)$$

Sustituyendo (A.25) en (A.21) y efectuando las derivadas se tiene que el númerados de (A.21) es:

$$\frac{d}{d\alpha}[e^{\alpha t}e^{x\sqrt{\alpha}}\cdot\operatorname{erfc}(\frac{X}{2\sqrt{t}} + \sqrt{\alpha t})] = e^{\alpha t}e^{x\sqrt{\alpha}} - \frac{t}{\sqrt{\pi\alpha}}\exp[-(\frac{X}{2\sqrt{t}} + \sqrt{\alpha t})^2]$$

$$+\operatorname{erfc}(\frac{X}{2\sqrt{t}} + \sqrt{\alpha t})\{e^{\alpha t}(\frac{X}{2\sqrt{\alpha}}e^{x\sqrt{\alpha}}+te^{x\sqrt{\alpha}})\} \qquad (A.26)$$

Sustituyendo (A.26) en (A.21) y derivando el denominador de (A.21) se tiene que el segundo límite de la ecuación A.19 es el siguiente:

$$\lim_{\alpha\to h^2} - \alpha(\frac{X}{2\sqrt{\alpha}}e^{x\sqrt{\alpha}}e^{\alpha t}\operatorname{erfc}(\frac{X}{2\sqrt{t}} + \sqrt{\alpha t}) + te^{\alpha t}e^{x\sqrt{\alpha}}\operatorname{erfc}(\frac{X}{2\sqrt{t}} + \sqrt{\alpha t})$$

$$- \frac{t}{\sqrt{\pi\alpha}}\; e^{\alpha t}\, e^{x\sqrt{\alpha}}\, \exp[-(\frac{X}{2\sqrt{t}} + \sqrt{\alpha t})^2])$$

entonces:

$$\lim_{\alpha\to h^2}\frac{e^{\alpha t}}{2(h-\alpha)}\exp(X\sqrt{\alpha})\,\mathrm{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{t}}+\sqrt{\alpha t}\right)=\frac{X}{2}\exp(xh)\exp(h^2t)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{t}}+h\sqrt{t}\right)$$

$$-ht\,\exp(h^2t)\exp(xh)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{t}}+h\sqrt{t}\right)$$

$$+\frac{t}{\sqrt{\pi}}\exp(h^2t)\exp(xh)\exp\left[-\left(\frac{X}{2\sqrt{t}}+h\sqrt{t}\right)^2\right]$$

$$\text{(A.27)}$$

El tercer límite de la ecuación (A.19) es cero, porque el numerador no depende de α.

Sustituyendo (A.20) y (A.27) en (A.19) se tiene que:

$$\left\{\frac{\exp(-X\,p)}{(p-\alpha)(p+h)}\right\}=\frac{1}{4h}\exp(h^2t)\exp(-Xh)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{t}}-h\sqrt{t}\right)$$

$$+\frac{X}{2}\exp(h^2t)\exp(Xh)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{t}}+h\sqrt{t}\right)$$

$$-ht\,\exp(h^2t)\exp(Xh)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{t}}+h\sqrt{t}\right)$$

$$+\frac{t}{\sqrt{\pi}}\exp(h^2t)\exp(Xh)\exp\left[-\left(\frac{X}{2\sqrt{t}}+h\sqrt{t}\right)^2\right] \qquad \text{(A.28)}$$

Aplicando la ecuación A.28 para invertir la ecuación (A.17), empleando el teorema de traslación y considerando las siguientes variables:

$$A = C \quad \exp\left(\frac{vx}{2D}\right) \frac{v\sqrt{D}}{D}; \quad a = \frac{v\sqrt{D}}{2D} = h; \quad X = K = \frac{x\sqrt{D}}{D}$$

$\alpha = a^2 = \frac{x^2}{4D}$; se tiene que:

$$C(x,t) = C \quad \exp\left(\frac{vx}{2D}\right)\frac{v\sqrt{D}}{D} \exp\left(-\frac{v^2 t}{4D}\right) \left\{\frac{2D}{4v\sqrt{D}} \exp\left(\frac{v^2 t}{4D}\right) \exp\left(\frac{-vx}{2D}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} - \frac{v\sqrt{t}}{2\sqrt{D}}\right)\right.$$

$$- \frac{x\sqrt{D}}{2D} \exp\left(\frac{vx}{2D}\right) \exp\left(\frac{v^2 t}{4D}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{Dt}} + \frac{v}{2}\sqrt{\frac{t}{D}}\right)$$

$$- \frac{v\sqrt{Dt}}{2D} \exp\left(\frac{vx}{2D}\right) \exp\left(\frac{v^2 t}{4D}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{Dt}} + \frac{v}{2}\sqrt{\frac{t}{D}}\right)$$

$$+ \frac{t}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{vx}{2D}\right) \exp\left(\frac{v^2 t}{4D}\right) \exp\left[-\left(\frac{X}{2\sqrt{Dt}} + \frac{v}{2}\sqrt{\frac{t}{D}}\right)^2\right] \tag{A.29}$$

Simplificando y rearreglando términos en la ecuación (A.29):

$$\frac{C(x,t)}{C} = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{t}} - \frac{v}{2}\sqrt{\frac{t}{D}}\right) - \frac{1}{2}\frac{xv}{D}\exp\left(\frac{vx}{D}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{Dt}} + \frac{v}{2}\sqrt{\frac{t}{D}}\right)$$

$$- \frac{v^2 t}{2D} \exp\left(\frac{vx}{D}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{Dt}} + \frac{v}{2}\sqrt{\frac{t}{D}}\right) + V \frac{vt}{\pi D} \exp\left(\frac{vx}{D}\right) \cdot \exp\left[-\left(\frac{X}{2\sqrt{Dt}} + \frac{v}{2}\sqrt{\frac{t}{D}}\right)^2\right]$$

(A.30)

La ecuación (A.30) es la solución del modelo de Difusión desarrollada por Coats, con las condiciones iniciales y de frontera (1.16) a (1.18), es decir la ecuación (1.20).

Sustituyendo las variables adimensionales de Coats en la ecuación A.30; se tiene la equivalencia de los siguientes términos:

$$\frac{X}{2\ tD} + \frac{v}{2}\ \frac{t}{D} = \frac{\gamma}{2}\ \frac{y - I}{I}$$

$$v\sqrt{\frac{t}{\pi D}} = \frac{\gamma I}{\pi} \qquad \frac{vx}{D} = \gamma Y$$

Por lo que la expresión A.30 expresada en términos de las variables adimensionales de Coats es la siguiente:

$$\frac{C(\gamma,I)}{C_o} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\gamma}{2}\ \frac{y-I}{I}\right) - \gamma y\ \exp(\gamma y) \operatorname{erfc}\left(\frac{\gamma}{2}\ \frac{y+I}{I}\right)\right]$$

$$- \frac{\gamma}{2}\exp(\gamma y)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\gamma}{2}\,\frac{y+I}{I}\right) + \frac{\gamma I}{\sqrt{\pi}} \exp\left[- \frac{\gamma}{4I}(y+I)^2\right] \qquad (A.31)$$

La ecuación(A.31) es la ecuación (1.19).

APENDICE "B"

"DESARROLLO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO DEL MODELO PROPUESTO".

APÉNDICE "B"

"Desarrollo de las ecuaciones de flujo del modelo propuesto".

Ecuación de flujo para la región móvil.

Aplicando un balance de materia a la región móvil (1) de la Figura 2.1, se tiene:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Velocidad de cambio}\\ \text{de masa de la espe-}\\ \text{cie A dentro del vo}\\ \text{lumen de control.}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{Velocidad neta de en}\\ \text{trada de masa de la}\\ \text{especie A al volumen}\\ \text{de control.}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{Velocidad de}\\ \text{producción de}\\ \text{masa de la es}\\ \text{pecie A dentro}\\ \text{del volumen de}\\ \text{control.}\end{array}\right\} \qquad (B.1)$$

Suposiciones:

1. Densidad de la especie A constante
2. La especie A no es producida mediante algún tipo de reacción química dentro del volumen de control.

La ecuación (B.1) se puede escribir como:

$$\frac{\partial M_A^T}{\partial t} = -\mathrm{div}\,(j_A^T) + r_A \qquad (B.2)$$

donde:

M_A^T : masa total de la especie A

j_A^T : densidad de flujo másico total

r_A : término de liga de las dos regiones

Por otra parte, la masa total por unidad de volumen, M_A^T, puede ser expresada como:

$$M_A^T = M_{Af} + M_{Aa} + M_{Ard} \qquad (B.3)$$

donde:

M_{Af} : masa fluyente

M_{Aa} : masa adsorbida

M_{Ard}: masa perdida por decaimiento radioactivo

Debido a que no existe adsorción en la región móvil, la velocidad de cambio de masa total se puede escribir como:

$$\frac{\partial M_A^T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\phi_m C_m) + \lambda \phi_m C_m \qquad (B.4)$$

donde:

λ : constante de decaimiento radioactivo, definida por:

$$\frac{\partial(C_{rad})}{\partial t} = \lambda C_m \qquad (B.5)$$

Por otro lado, el término de la densidad de flujo total puede - ser desarrollado para:

$$j_A^T = J_c\ C_m + j_A^d \qquad (B.6)$$

Entonces, la divergencia de (B.6) es:

$$\mathrm{div}(j_A^T) = J_c^x \frac{\partial C_m}{\partial x} + C_m \frac{\partial J_c^x}{\partial x} + J_c^y \frac{\partial C_m}{\partial y} + C_m \frac{\partial J_c^y}{\partial y} + \frac{\partial j_A^{d,y}}{\partial x} + \frac{\partial j_A^{d,y}}{\partial y} \qquad (B.7)$$

Suposiciones adicionales:

3. No existe componente de la velocidad en dirección "y", $J_c^y=0$
4. El cambio de velocidad en la dirección de flujo es despreciable, $\frac{\partial J_c^y}{\partial x} = 0$
5. No existe gradiente de concentraciones en dirección "y", $\frac{\partial J_A^{d,y}}{\partial y} = 0$

La ecuación (B.7) se reduce a la siguiente:

$$\mathrm{div}(j_A^T) = J_c^x \frac{\partial C_m}{\partial x} + \frac{\partial j_A^{d,y}}{\partial x} \qquad (B.8)$$

Suponiendo:

6. Que el volumen de la región móvil permanece constante, $\bar{}$ $\bar{}$ ϕ_m = cte, y considerando que la suposición 4 implica flujo permanente; el término convectivo de la ecuación (B.6) se - puede expresar de la siguiente forma:

$$J_c^x = \phi_m V_m \tag{B.9}$$

El término de difusión de la ecuación (B.3), puede ser descrito por la Ley de Fick de Difusión:

$$J_k^{d,x} = \phi_m\ D_m^x\ \frac{\partial C_m}{\partial x} \tag{B.10}$$

Sustituyendo la ecuación (B.9) y (B.10) en (B.8), se obtiene:

$$\text{div}(j_A^T) = \phi_m V_m\ \frac{\partial C_m}{\partial x} - \phi_m\ D_m^x\ \frac{\partial C_m}{\partial x^2} \tag{B.11}$$

Por otro lado, el término que liga las regiones móvil e inmóvil, es la transferencia de masa hacia la región estancada, mediante el mecanismo de difusión, en $y = w - \delta$:

$$r_A = -\ \frac{2}{E}\ \phi_e D_e\ \frac{\partial C_e}{\partial y}\Bigg|_{y\ =\ w\ -\ \delta} \tag{B.12}$$

Sustituyendo las ecuaciones (B.4), (B.11) y (B.12) en la ecua--

ción (B.2):

$$\phi_m \frac{\partial C_m}{\partial t} + \phi_m \lambda C_m = -[\phi_m V_m \frac{\partial C_m}{\partial x} - \phi_m D_m^x \frac{\partial^2 C_m}{\partial x^2}] - \frac{2}{E} \phi_e D_e \frac{\partial C_e}{\partial y}\bigg|_{y=w-\delta} \tag{B.13}$$

Dividiendo la ecuación (B.13) entre ϕ_m y rearreglando términos:

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} = D_m^x \frac{\partial^2 C_m}{\partial x^2} - V_m \frac{\partial C_m}{\partial x} - \quad C_m - \frac{2}{E} \frac{\phi_e}{\phi_m} D_e \frac{\partial C_e}{\partial y}\bigg|_{y=w-\delta} \tag{B.14}$$

Ahora bien, considerando que para el modelo propuesto:

$$\phi_m = \frac{aL[2(w-\delta)]}{aLE} = \frac{2(w-\delta)}{E} \tag{B.15}$$

Sustituyendo (B.15) en (B.14):

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} = D_m^x \frac{\partial^2 C_m}{\partial x^2} - V_m \frac{\partial C_m}{\partial x} - \lambda C_m - \frac{\phi_e D_e}{(w-\delta)} \frac{\partial C_e}{\partial y}\bigg|_{y=w-\delta} \tag{B.16}$$

La ecuación (B.16) es la que rige el comportamiento del trazador en la región móvil y su interacción con la región estancada.

2. ECUACIÓN DE FLUJO PARA LA REGIÓN ESTANCADA

Aplicando el balance de materia (B.1) a la región inmóvil (2), de la Figura 2.1 y considerando que no existe producción de la especie A dentro del volumen de control:

$$\frac{\partial M_{Ae}^{T}}{\partial t} = - \operatorname{div}(j_{Ae}^{T}) \qquad \text{(B.17)}$$

donde:

$$\frac{\partial M_{Ae}^{T}}{\partial t} = \emptyset_e \frac{\partial C_e}{\partial t} + \frac{M_{ad}}{\partial t} + \frac{M_{rd}}{\partial t} \qquad \text{(B.18)}$$

Suponiendo:

7. La adsorción se realiza mediante una reacción de primer orden, debido a las bajas concentraciones del trazador, entonces:

$$\frac{\partial M_{ad}}{\partial t} = k(1-\emptyset_e)\rho\frac{\partial C_e}{\partial t} \qquad \text{(B.19)}$$

donde:

k : constante de equilibrio

ρ ; densidad de la roca.

Considerando para la masa perdida por decaimiento radioactivo, que existe una porción de esta masa que se adsorbe roca:

$$\frac{\partial}{\partial t} M_{rad} = \lambda [\emptyset_e C_e + (1-\emptyset_e) \rho_k C_e] \qquad (B.20)$$

Sustituyendo (B.19) y (B.20) en (B.18):

$$\frac{\partial M_{Ae}^{T}}{\partial t} = [\emptyset_e + \rho_k (1-\emptyset_e)] \frac{\partial C_e}{\partial t} + \lambda [\emptyset_e C_e + (1-\emptyset_e) \rho_k C_e] \qquad (B.21)$$

El término de flujo es el siguiente:

$$j_{Ae}^{T} = J_c C_e + j_{Ae}^{d} \qquad (B.22)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (B.22) es cero porque no existe convección en la región estancada. Tomando en cuenta lo anterior y diferenciando la ecuación (B.22) se obtiene:

$$\operatorname{div}(j_{Ae}^{T}) = \frac{\partial j_{Ae}^{x,d}}{\partial x} + \frac{\partial j_{Ae}^{y,d}}{\partial y} \qquad (B.23)$$

Suponiendo que en la región estancada la difusión en dirección "x" es despreciable y aplicando la ley de Fick:

$$j_{Ae}^{y,d} = -\emptyset_e D_e \frac{\partial C_e}{\partial y} \tag{B.24}$$

Sustituyendo (B.24) en (B.23):

$$\operatorname{div}(j_{Ae}^{T}) = -\emptyset_e D_e \frac{\partial^2 C_e}{\partial y^2} \tag{B.25}$$

Sustituyendo (B.21) y (B.25) en (B.17):

$$[\emptyset_e+\rho_k(1-\emptyset_e)]\frac{\partial C_e}{\partial t} +\lambda[\emptyset_e C_e+(1-\emptyset_e)\rho_k C_e]= \emptyset_e D_e\frac{\partial^2 C_e}{\partial y^2} \tag{B.26}$$

Dividiendo (B.26) entre el coeficiente de $\frac{\partial C_e}{\partial t}$ y rearreglando términos:

$$\frac{\partial C_e}{\partial t} +\lambda C_e\frac{[\emptyset_e+(1-\emptyset_e)\rho_k]}{[\emptyset_e+\rho_k(1-\emptyset_e]} - \frac{\emptyset_e D_e}{[\emptyset_e+\rho_k(1-\emptyset_e)]} \quad \frac{\partial^2 C_e}{\partial y^2} = 0$$

por lo que:

$$\frac{\partial C_e}{\partial t} - [\frac{D_e}{1+\frac{(1-\emptyset_e)\rho k}{\emptyset_e}}] \frac{\partial^2 C_e}{\partial y^2} +\lambda C_e= 0 \tag{B.27}$$

Las ecuaciones (B.16) y (B.27) son las ecuaciones en deriva-

Suponiendo que en la región estancada la difusión en dirección "x" es despreciable y aplicando la ley de Fick:

$$j_{Ae}^{y,d} = -\phi_e D_e \frac{\partial C_e}{\partial y} \tag{B.24}$$

Sustituyendo (B.24) en (B.23):

$$\mathrm{div}(j_{Ae}^{T}) = -\phi_e D_e \frac{\partial^2 C_e}{\partial y^2} \tag{B.25}$$

Sustituyendo (B.21) y (B.25) en (B.17):

$$[\phi_e+\rho_k(1-\phi_e)]\frac{\partial C_e}{\partial t} +\lambda\ [\phi_e C_e+(1-\phi_e)\rho_k C_e]= \phi_e D_e\frac{\partial^2 C_e}{\partial y^2} \tag{B.26}$$

Dividiendo (B.26) entre el coeficiente de $\frac{\partial C_e}{\partial t}$ y rearreglando términos:

$$\frac{\partial C_e}{\partial t} +\lambda C_e\frac{[\phi_e+(1-\phi_e)\rho_k]}{[\phi_e+\rho_k(1-\phi_e)]} - \frac{\phi_e D_e}{[\phi_e+\rho_k(1-\phi_e)]}\ \frac{\partial^2 C_e}{\partial y^2} = 0$$

por lo que:

$$\frac{\partial C_e}{\partial t} - [\frac{D_e}{1+\frac{(1-\phi_e)\rho_k}{\phi_e}}]\ \frac{\partial^2 C_e}{\partial y^2} +\lambda C_e= 0 \tag{B.27}$$

Las ecuaciones (B.25) y (B.27) son las ecuaciones en derivadas parciales que gobiernan el comportamiento del trazador, en las regiones móvil e inmóvil respectivamente, del modelo propuesto.

APENDICE "C"

"SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DEL MODELO PROPUESTO (ECUACIONES (2.1) Y (2.2))".

APÉNDICE "C"

Solución de las ecuaciones diferenciales del modelo propuesto (ecuaciones (2.1) y (2.2))

Las ecuaciones que gobiernan el proceso en estudio (ecuaciones (2.1) y (2.2), son las siguientes:

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} = D_m^x \frac{\partial^2 C_m}{\partial x^2} - v_m \frac{\partial C_m}{\partial x} - \lambda C_m - \frac{\phi_e}{(w-\delta)} D_e^y \left.\frac{\partial C_e}{\partial y}\right|_{(w-\delta)} \qquad (C.1)$$

$$\frac{\partial C_e}{\partial t} + \lambda C_e - \left[\frac{D_e^y}{1+\frac{\rho K(1-\phi_e)}{\phi_e}}\right] \frac{\partial^2 C_e}{\partial y^2} = 0 \qquad (C.2)$$

Para simplificar la solución de las ecuaciónes (C.1) y (C.2) se definieron las siguientes variables adimensionales (ecuaciones (2.9) a (2.13))

$$C_{D1} = \frac{C_m - C_i}{C_o - C_i} \qquad (C.3)$$

$$C_{D_2} = \frac{C_e - C_i}{C_o - C_i} \qquad (C.4)$$

$$X_D = \frac{X}{L} \qquad (C.5)$$

$$y_D = \frac{y}{L} \tag{C.6}$$

$$t_D = \frac{v_m t}{L} \tag{C.7}$$

empleando las definiciones de las variables adimensionales (C.3) a (C.7) se obtiene:

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} = (C_o - C_i)\ \frac{v_m}{L}\ \frac{\partial C_{D1}}{\partial t_D} \tag{C.8}$$

$$\frac{\partial C_m}{\partial x} = \frac{(C_o - C_i)}{L} \frac{\partial C_{D1}}{\partial x_D} \tag{C.9}$$

$$\frac{\partial^2 C_m}{\partial x^2} = \frac{(C_o - C_i)}{L^2}\ \frac{\partial^2 C_{D1}}{\partial x_D{}^2} \tag{C.10}$$

$$\frac{\partial C_e}{\partial y} = \frac{(C_o - C_i)}{L}\ \ \frac{\partial C_D}{\partial y_D} \tag{C.11}$$

$$\frac{\partial^2 C_e}{\partial y^2} = \frac{(C_o - C_i)}{L^2}\ \frac{\partial^2 C_D}{\partial y_D{}^2} \tag{C.12}$$

Sustituyendo las ecuaciones (C.8) a (C.12) en (C.1) y (C.2):

$$(C_o - C_i)\frac{v_m}{L}\,\frac{\partial C_{D1}}{\partial t_D} = \frac{D_m}{L}(C_o - C_o)\frac{\partial^2 C_{D1}}{\partial x_D{}^2} - \frac{v_m}{L}(C_o - C_i)\frac{\partial C_{D1}}{\partial x_D} - \lambda(C_o - C_i)C_{D1}$$

$$+ \frac{\emptyset_e \; D_e^y}{(w-\delta)} \; \frac{(C_o - C_i)}{L} \; \frac{\partial C_{D_2}}{\partial y_D} \Bigg|_{\frac{w-\delta}{L}} \qquad (C.13)$$

$$(C_o - C_i)\frac{v_m}{L} \; \frac{\partial C_{D1}}{\partial t_D} + \lambda (C_o - C_i) C_{D_2} - [\frac{D_e^y}{1 + \frac{\rho_K (1-\emptyset_e)}{\emptyset_e}}] \frac{(C_o - C_i)}{L^2} \; \frac{\partial^2 C_e}{\partial y_{D^2}} = 0 \qquad (C.14)$$

multiplicando (C.13) y (C.14) por $[\frac{L}{v_m (C_o - C_i)}]$:

$$\frac{\partial C_{D1}}{\partial t_D} = \frac{D_m}{v_{mL}} \; \frac{\partial^2 C_{D1}}{\partial x_{D^2}} - \frac{\partial C_{D1}}{\partial x_D} - \frac{L}{v_m} \lambda C_{D1} + \frac{\emptyset e}{(w-\delta)} \frac{1}{v_m} \; D_e^y \; \frac{\partial C_D}{\partial y_D} \Bigg|_{\frac{w-\delta}{L}} \qquad (C.15)$$

$$\frac{\partial C_D}{\partial t_D} + \frac{L}{v_m} \; \lambda C_{D_2} - [\frac{1}{1 + \frac{\rho_K (1-\emptyset_e)}{\emptyset_e}}] \; \frac{De^y}{vmL} \; \frac{\partial^2 C_{D^2}}{\partial^2 y_{D^2}} \qquad (C.16)$$

Los parámetros adimensionales definidos en este trabajo, - ecuaciones (2.16) a (2.20), son los siguientes:

$$Pe_1 = \frac{v_{mL}}{D_m} \qquad (C.17)$$

$$Pe_2 = \frac{v_{mL}}{D_e} \qquad (C.18)$$

$$\xi = \frac{\emptyset_e \; D_e^y}{v (w-\delta)} \qquad (C.19)$$

$$\gamma = \frac{L}{V} \lambda \tag{C.20}$$

$$R = \frac{\phi_e}{\phi_e + \rho_K (1-\phi_e)} \tag{C.21}$$

Sustituyendo las ecuaciones (C.17) a (C.21) en (C.15) y - (C.16).

$$\frac{1}{P_e} \frac{\partial^2 C_{D1}}{\partial x_D^2} - \frac{\partial C_{D1}}{\partial X_D} - \gamma C_{D1} + \xi \left. \frac{\partial C_{D2}}{\partial Y_D} \right|_{\frac{W-\delta}{L}} - \frac{\partial C_{D1}}{\partial t_D} = 0 \tag{C.22}$$

$$\frac{R}{P_{e^2}} \frac{\partial^2 C_D}{\partial y_D^2} - \gamma C_D - \frac{\partial C_{D2}}{\partial t_D} = 0 \tag{C.23}$$

Las condiciones iniciales y de frontera en términos de las variables reales están dadas por las ecuaciones (2.3) a (2.8), estas mismas condiciones en términos de las variables adimensionales son las siguientes (2.21) a (2.26).

$$C_{D1} (x_D, 0) = 0 \tag{C.24}$$

$$C_{D_2} (x_D, y_D, 0) = 0 \tag{C.25}$$

$$C_{D_1} (0, t_D) = 1 \tag{C.26}$$

$$\gamma = \frac{L}{v} \lambda \tag{C.20}$$

$$R = \frac{\emptyset_e}{\emptyset_e + \rho_K (1-\emptyset_e)} \tag{C.21}$$

Sustituyendo las ecuaciones (C.17) a (C.21) en (C.15) y - (C.16).

$$\frac{1}{P_e} \frac{\partial^2 C_{D1}}{\partial x_D^2} - \frac{\partial C_{D1}}{\partial X_D} - \gamma C_{D1} + \xi \left. \frac{\partial C_{D_2}}{\partial Y_D} \right|_{\frac{w-\delta}{L}} - \frac{\partial C_{D1}}{\partial t_D} = 0 \tag{C.22}$$

$$\frac{R}{P_{e^2}} \frac{\partial^2 C_D}{\partial y_D^2} - \gamma C_D - \frac{\partial C_{D_2}}{\partial t_D} = 0 \tag{C.23}$$

Las condiciones iniciales y de frontera en términos de las variables reales están dadas por las ecuaciones (2.3) a (2.8), estas mismas condiciones en términos de las variables adimen sionales son las siguientes (2.21) a (2.26).

$$C_{D1} \ (x_D, 0) = 0 \tag{C.24}$$

$$C_{D_2} \ (x_D, y_D, 0) = 0 \tag{C.25}$$

$$C_{D_1} \ (0, t_D) = 1 \tag{C.26}$$

$$C_{D1}\ (\infty, t_D) = 0 \tag{C.27}$$

$$C_{D_2}(x_D, \frac{w-\delta}{L}, t_D) = C_{D_1}(x_D, t_D) \tag{C.28}$$

$$\left.\frac{\partial C_D}{\partial y_D}\right|_{(x_D, \frac{E}{2L}, t_D)} = 0 \tag{C.29}$$

Para encontrar la distribución de concentración en la región móvil es necesario resolver primero la ecuación (C.23); derivar la solución de (C.23); evaluar esta derivada en $y=w-\delta$ y sustituirla en (C.22); con lo anterior la ecuación (C.22) estará en función de "x" y "t" sólamente, y se podrá transformar al espacio de Laplace sólo con respecto a "t"

Solución de (C.23)

Aplicando el método de transformada de Laplace a la ecuación (C.23), aplicando la condición (C.25) y rearreglando términos se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2\bar{C}_{D_2}}{dy_{D^2}} - C_{D_2}\ \beta = 0 \tag{C.30}$$

donde: $\beta = (s+\gamma)\ \frac{P_{e_2}}{R}$ (C.31) las raíces de (C.30) son las siguientes:

$$m_1 = \sqrt{\beta}$$

$$m_2 = -\sqrt{\beta}$$

Entonces la solución general de (C.30) es:

$$\bar{C}_{D_2} = C_1 \exp(m_1 y_D) + C_2 \exp(m_2 y_D) \qquad (C.32)$$

Aplicando la condición de frontera (C.29) a (C.32):

$$0 = m_1 C_1 \exp(m_1 \frac{E}{2L}) + m_2 C_2 \exp(m_2 \frac{E}{2L})$$

sustituyendo m_1 y m_2 se tiene que:

$$C_1 = C_2 \exp(-\sqrt{\beta}\,\frac{E}{L}) \qquad (C.33)$$

Aplicando la condición (C.28) a (C.32):

$$\bar{C}_{D_1}(x_D, s) = C_1 \exp(m_1 \frac{(w-\delta)}{L}) + C_2 \exp(m_2 \frac{W-\delta}{L}) \qquad (C.34)$$

Sustituyendo (C.34) en (C.33) se tiene:

$$\bar{C}_{D_1}(x_D, s) = C_2 \exp(m_2 \frac{E}{L}) \exp(m_1 \frac{W-\delta}{L}) + C_2 \exp(m_2 \frac{W-\delta}{L})$$

lo que implica que:

$$C_2 = \frac{\bar{C}_{D1}(x_D, s)}{\exp[\frac{m_2}{L}(E-w+\delta) + \exp[m_2\frac{w-\delta}{L}]} \tag{C.35}$$

Sustituyendo (C.35) y (C.33) en (C.32) y rearreglando términos se tiene la distribución de la concentración en la región estancada en función de la concentración de la región móvil:

$$\bar{C}_{D_2} = \bar{C}_{D1}(x_D, s)\{\frac{\exp[-\sqrt{\beta}(\frac{E}{L} - y_D)] + \exp[-\sqrt{\beta}\ y_D]}{\exp[-\sqrt{\beta}\ (\frac{E-w+\delta}{L}) + \exp[-\sqrt{\beta}\ (\frac{w-\delta}{L})]}\} \tag{C.36}$$

donde: β está dada por (C.31)

<u>Solución de (C.22)</u>

La derivada de (C.36) evaluada en $y_D = \frac{w-\delta}{L}$ es la siguiente:

$$\left.\frac{d\bar{C}_{D_2}}{dy_D}\right|_{\frac{w-\delta}{L}} = -\bar{C}_{D_1}(x_D, s)\sqrt{\beta}\{\frac{\exp[-\sqrt{\beta}\ (\frac{w-\delta}{L})]-\exp[-\sqrt{\beta}\ (\frac{E-w+\delta}{L})]}{\exp[-\sqrt{\beta}\ (\frac{w-\delta}{L})]+\exp[-\sqrt{\beta}\ (\frac{E-w+\delta}{L})]}\}$$

rearreglando términos:

$$\left.\frac{d\bar{C}_{D_2}}{dy}\right|_{\frac{w-\delta}{L}} = -\bar{C}_{D1}(x_D,s)\sqrt{\beta}\left(\frac{1-\exp[-\sqrt{\beta}\,(\frac{E-2(w-\delta)}{L})]}{1+\exp[-\sqrt{\beta}\,(\frac{E-2(w-\delta)}{L})]}\right) \tag{C.37}$$

La ecuación (C.37) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\left.\frac{dC_{D_2}}{dy}\right|_{\frac{w-\delta}{L}} = -C_{D1}(x_D,s)\sqrt{\beta}\,\tanh\left(-\frac{\sqrt{\beta}}{2}\,\left(\frac{E-2(w-\delta)}{L}\right)\right) \tag{C.38}$$

considerando lo siguiente:

$$\frac{1-e^{-a}}{1+e^{-a}} = \frac{1-e^{\frac{-a}{2}}\,^{\frac{-a}{2}}}{1+e^{\frac{-a}{2}}\,^{\frac{-a}{2}}} = \frac{e^{\frac{a}{2}}\,e^{\frac{-a}{2}} - e^{\frac{-a}{2}}\,e^{\frac{-a}{2}}}{e^{\frac{a}{2}}\,e^{\frac{-a}{2}} + e^{\frac{-a}{2}}\,e^{\frac{-a}{2}}}$$

$$= \frac{e^{\frac{-a}{2}}\,(e^{\frac{a}{2}} - e^{\frac{-a}{2}})x2}{e^{\frac{-a}{2}}\,(e^{\frac{a}{2}} + e^{\frac{-a}{2}})x2} = \frac{\operatorname{senh}\,(\frac{a}{2})}{\cosh\,(\frac{a}{2})}$$

$$= \tanh\,(\tfrac{a}{2})$$

Aplicando el método de transformada de Laplace a la ecuación

(C.22) y la condición (C.24):

$$s\ \bar{C}_{D1} = \frac{1}{Pe_1}\frac{d^2\bar{C}_{D1}}{dx_D^2} - \frac{d\bar{C}_{D1}}{dx_D} - \gamma\bar{C}_{D1} + \zeta\left.\frac{d\bar{C}_{D2}}{dy_D}\right|_{\frac{w-\delta}{L}} \tag{C.39}$$

Sustituyendo (C.38) en (C.39) y rearreglando términos:

$$\frac{d^2\bar{C}_{D1}}{dX_D^2} - Pe_1\frac{d\bar{C}_{D1}}{dx_D} - \zeta\ \bar{C}_{D1} = 0 \tag{C.40}$$

donde:

$$\zeta = Pe_1\left\{ s+\gamma+\sqrt{\beta}\tanh[-\frac{\sqrt{\beta}}{2}(\frac{E-2(w-\delta)}{L})]\right\} \tag{C.41}$$

las raíces de (C.40) son las siguientes:

$$r_1 = \frac{Pe_1}{2} + \frac{Pe_1^2}{4} + \zeta$$

$$r_2 = \frac{Pe_1}{2} - \frac{Pe_1^2}{4} + \zeta$$

Por lo que la solución general de (C.40) es la siguiente:

$$\bar{C}_{D1}(x_D, s) = C_1 \exp(r_1 x_D) + C_2 \exp(r_2 x_D) \qquad (C.42)$$

Las condiciones de frontera (C.26) y (c.27) en el espacio - de Laplace son las siguientes:

$$\bar{C}_{D1}(0, s) = \frac{1}{s} \qquad (C.43)$$

$$\bar{C}_{D1}(\infty, s) = 0 \qquad (C.44)$$

Sustituyendo (C.43) y (C.44) en (C.42) se obtiene que:

$$C_1 = 0 \qquad y \qquad C_2 = \frac{1}{s}$$

Sustituyendo estas constantes en (C.42), se obtiene la distribución de concentración en la región móvil en el espacio de Laplace

$$\bar{C}_{D1}(x_D, s) = \frac{1}{s} \exp\left\{\left(\frac{Pe_1}{2} - \sqrt{\frac{Pe_1^2}{4} + \zeta}\right) x_D\right\} \qquad (C.45)$$

Sustituyendo (C.41) y (C.31) en (C.45) se obtiene:

$$C_{D1}(x_D, s) = \frac{1}{x}\exp\left\{\left[\frac{Pe_1}{2} - \sqrt{\frac{Pe_1^2}{4} + Pe_1\left(s+\gamma+\zeta\sqrt{(s+\gamma)Pe_2}\tanh\left[-\frac{\sqrt{(s+\gamma)Pe_2/R}}{2}\left(\frac{E-2(w-\delta)}{L}\right)\right]\right)}\right]x_D\right\} \tag{C.46}$$

Las ecuaciones (C.36) y (C.46) gobiernan el comportamiento del flujo del trazador a través del medio poroso, idealizado por medio de dos regiones. Estas ecuaciones están expresadas en el espacio de Laplace, su inversión analítica presenta serias dificultades, por lo que fue necesario invertirlas numéricamente mediante el aloritmo de Stehefest[37], para obtener la distribución de concentraciones en el espacio real.

APENDICE "D"

"PROGRAMA DE CÓMPUTO UTILIZADO"

```
10 REM ******PROGRAMA DE COMPUTO UTILIZADO PARA LA GRAFICA 4.1******
20 REM          ******EVALUA LAS ECUACIONES (4.5) Y (4.8)******
30 REM
40 DEFDBL A-H,O-Z
50 DEFINT I-N
60 OPEN"A:DAPE2F1.TXT" FOR OUTPUT AS #1
70 DIM T(150),C(150,1),A(150,6),ALFA(6)
80 DIM G(50),V(50),H(25)
90 DEFINT I-N
100 INPUT "TIEMPO INICIAL=";TI
110 INPUT "INTERVALO DE TIEMPO=";DT
120 INPUT "NUMERO DE TIEMPOS";NT
130 T(1)=TI
140 FOR K=2 TO NT
150 T(K)=T(K-1)+DT
160 NEXT K
170 NX=6
180 XD=1!
190 PE1=2!
200 ALFA(1)=.01   :ALFA(2)=.1   :ALFA(3)=1!:ALFA(4)=3! :ALFA(5)=5!:ALFA(6)=10!
210 LPRINT "*****DISPERSION DE TRAZADORES EN YACIMIENTOS GEOTERMICOS*****"
220 LPRINT "                    "
230 LPRINT "              SOLUCION NUMERICA DEL MODELO PROPUESTO      "
240 LPRINT "                                Y            "
250 LPRINT "                   SOLUCION ANALITICA LIMITE        "
260 LPRINT "                    ECUACIONES (4.5) Y (4.8)    "
270 LPRINT "    "
280 LPRINT " EJEMPLO DE APLICACION"
290 LPRINT " DATOS UTILIZADOS "
300 LPRINT "XD=";XD :PRINT "PE1=";PE1
310 FOR I=1 TO NX :PRINT "ALFA(";I;")="ALFA(I):NEXT I
320 N=12
330 M= 0
340 FOR KX=1 TO NX
350 FOR II=1 TO NT
360 TIME = T(II)
370 GOSUB 1080
380 GOSUB 550
390 A(II,KX) = SINV
400 IF A(II,KX)<0 THEN A(II,KX)=0!
410 NEXT II
420 NEXT KX
430 LPRINT "                         "
440 LPRINT "          TD     LIMITE    ALFA(1)   ALFA(2)   ALFA(3)   ALFA(4)   ALFA(5)   A
LFA(6)
450 FOR K=1 TO NT
460 LPRINT USING "######.###";T(K);
470 LPRINT USING "####.####";C(K,1);A(K,1);A(K,2);A(K,3);A(K,4);A(K,5);A(K,6)
480 PRINT #1,USING "######.###";T(K);
490 PRINT #1,USING "####.####";C(K,1);A(K,4);A(K,5);A(K,6)
500 NEXT K
510 CLOSE #1
520 STOP
530 REM *****SUBRUTINA DE INVERSION*****
540 REM *****ALGORITMO DE STEHFEST******
550 IF N=M THEN 690
560 M=N
570 DLOGTW = .6931471805599453#
580 NH= INT(N/2)
```

```
590 G(1) = 1!
600 FOR I=2 TO N  : G(I)=G(I-1)*I : NEXT I
610 H(1) = 2!/G(NH-1)
620 FOR J=2 TO NH
630 FI = J
640 IF J=NH THEN 670
650 H(J) = FI^NH *G(2*J)/(G(NH-J)* G(J)*G(J-1) )
660 GOTO 680
670 H(J) = FI^NH *G(2*J)/( G(J)*G(J-1) )
680 NEXT J
690 IK = INT(NH/2)
700 SN = 2*(NH - IK*2) - 1
710 FOR I=1 TO N
720 V(I) = 0!
730 K1 =INT((I+1)/2)
740 K2 = I
750 IF K2 < NH THEN 770
760 K2 = NH
770 FOR K=K1 TO K2
780 IF 2*K = I THEN 820
790 IF I=K THEN 840
800 V(I) = V(I) + H(K)/(G(I-K)*G(2*K-I))
810 GOTO 850
820 V(I) = V(I) + H(K)/G(I-K)
830 GOTO 850
840 V(I) = V(I) + H(K)/G(2*K-I)
850 NEXT K
860 V(I) = SN*V(I)
870 SN = -SN
880 NEXT 1
890 SINV = 0!
900 AA = DLOGTW/TIME
910 FOR I=1 TO N
920 ARG = AA*I:GOSUB 980
930 IF(I<N)THEN GOTO 940
940 SINV = SINV + V(I)*SFUNC
950 NEXT I
960 SINV = SINV*AA
970 RETURN
980 REM *****FUNCION EN EL ESPACIO DE LAPLACE******
990 REM *****ECUACION (4.5) ******
1000 F1=FEI!(ARG)(ALFA(KK)*SQR(ARG))
1010 F2=EXP(-XD*SQR(PE1*PE1/4!+F1))
1020 F3=EXP(PE1*XD/2)
1030 F5=F2*F3/ARG
1040 SFUNC=F5
1050 RETURN
1060 REM ****FUNCION LIMITE*******
1070 REM ****ECUACION (4.8)*******
1080 C1=EXP(XD*PE1)
1090 C2=XD*SQR(PE1)/(2*SQR(T(I1)))
1100 C3=SQR(PE1*T(II)/4!)
1110 ARG=C2+C3
1120 GOSUB 1180
1130 C(II,1)=FUN*C1/2
1140 ARG=ARG-2*C3
1150 GOSUB 1180
1160 C(II,1)=FUN/2 +C(II,1)
1170 RETURN
```

```
1180 REM *****FUNCION ERROR COMPLEMENTARIA*****
1190 P=.3275911
1200 B1=.254829592#
1210 B2=-.284496736#
1220 B3=1.421413741#
1230 B4=-1.453152027#
1240 B5=1.061405429#
1250 T=1!/(1!+P*ABS(ARG))
1260 FUN=1!-((((B5*T+B4)*T+B3)*T+B2)*T+B1)*T*EXP(-ARG*ARG)
1270 FUN=1!-FUN
1280 RETURN
```