14 2ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GRUPOS DE LIE DE DIMENSION BAJA

T E S I S

Que para obtener el Título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a:

JOSE RAMON GUZMAN

México, D. F. 1988

INDICE.

CAPITULO I.

GENERALIDADES DE GRUPOS Y ALGEBRAS DE LIE.

Prólogo

Desde niño, siempre llamaron mi atencion la cinta de Moebius y la botella de Klein. Trate de construir la botella de Klein ,lo cual nunca logré .

Después me di cuenta de que esta botella estaba , efectivamente formada por dos de estas cintas.

Posteriormente en los cursos universitarios estudié de manera sistemática estas dos superficies desde todos los ángulos.

Pensando en donde vivimos los seres humanos escuché varias pláticas sobre seres de dimensión 1,2,3.

Los seres de dimensión uno viven en un espacio difeomorfo a una recta .Los seres de dimensión dos vivirian en una variedad diferenciable de dimensión dos,es decir una superficie.Los posibles universos para estos seres como podemos ver tendrian formas muy caprichosas,sus propiedades topólogicas y sus propiedades geométricas serian muy variadas.

Si un espacio de estos, estuviera visible a un habitante de dimensión tres,él,podría tomar un ser de estos y colocarlo en otro lugar de ese mismo espacio, y el ser este sentiría que desaparece y aparece en otro lugar de su universo,ya que él no podría ver al ser tridimensional que lo mueve.

Nosotros, como habitantes del espacio,tridimensionales, estudiamos el universo en una localidad de él y, así, cualquier tridimensional piensa que el universo es un pedazo de espacio $\mathbb{R}^3$. Sin embargo,análogamente a la situación que ocurrió en dimensión dos , pueden seres cuadridimensionales , tomar un habitante tridimensional,y trasportarlo a otro lugar del universo (del tridimensional),y la impresión de este infeliz tridimensional sería análoga a la de la creatura bidimensional.

El objetivo de esta tesis es mostrar la parte matemática de algunos universos de dimensión tres en los que tal vez en alguno de estos podríamos vivir.

Los conocimientos necesarios para leerla son modestos .Un poco de álgebra abstracta y topología diferencial.

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es estudiar las álgebras de Lie de dimensión menor ó igual a 3 y sus grupos de Lie simplemente conexos asociados.
Al hacer lo anterior , usamos fuertemente de correspondencia entre subgrupos y subálgebras de Lie , que no demostraremos aquí.
En el primer capítulo se recuerdan los resultados básicos de grupos de Lie y la clasificación de las álgebras de Lie reales de dimensión menor ó igual a 3.
En el segundo capítulo se estudian los grupos que corresponden a las álgebras de Lie de dimensión 1 y 2.
En el tercer capítulo se estudian los grupos que corresponden a las álgebras de Lie de dimensión 3 y tales son : $\mathbb{R}^3$, el grupo de Heinsenberg, el grupo $Afin^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, y la cubriente universal del grupo de isometrías del plano que preservan orientación $Iso^+(\mathbb{R}^2)$, el grupo de isometrías del espacio de Minkowsky $E(1,1)$, el grupo especial lineal $SL(2,\mathbb{R})$ y la esfera de dimensión 3, S^3 .
El álgebra de Lie se esclarece de dos maneras ; a través de la representación matricial y a través de los campos vectoriales invariantes a izquierda .
Finalmente se asocia a cada grupo de Lie una métrica riemanniana invariante por traslación izquierda.
Las referencias principales son; el libro de N. Jacobson Lie Algebras, para la clasificación de las álgebras de Lie. Para la parte de grupos se utilizaron las tablas de clasificación de grupos de Lie contenidas en los siguientes artículos ;Flows on some three dimensional homogeneus spaces por Auslander L. Green L . y Hahn F. Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie groups por Milnor J. 3-Manifolds whose universal coverings are Lie Groups por Raymond F. Vasquez A. T.

Enero , 1988.

J.R.Guzmán .

CAPITULO I.
GENERALIDADES DE GRUPOS Y ALGEBRAS DE LIE.
§ 1.

GRUPOS DE LIE.

Empezaremos con la definición de grupo de Lie.

DEFINICION 1.1. Un grupo Lie es un grupo que también tiene una estructura de variedad diferenciable y tal que la operación producto y la operación inversa ,

$$* : G \times G \longrightarrow G \ ,$$
$$(\ )^{-1} : G \longrightarrow G \ ,$$

son diferenciables.
A continuación obtendremos algunos resultados a título de ejemplo que posteriormente vamos a utilizar.

LEMA 1.1. $\mathbb{R}^n$ con la operación de suma es un grupo de Lie.
DEMOSTRACION
Consideremos la operación de suma definida de la siguiente manera,

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n ,$$

$$+(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Que como podemos ver se verifican los axiomas de grupo.
Mostraremos que $\mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable .

Se puede considerar el atlas canónico, definido por

$$A = \{ (\mathbb{R}^n, id) \} .$$

Podemos ver que el cambio de coordenadas es $\mathscr{C}^\infty$.
Además la operación es diferenciable pues su jacobiano existe y es igual a

$$J_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots 0 & 1 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots 0 & 0 & 1 & \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots 1 & 0 & 0 & \ldots 1 \end{bmatrix} . \qquad \blacksquare$$

LEMA 1.2. Cualquier espacio vectorial de dimensión finita es un grupo de Lie.
DEMOSTRACION
Como ya se sabe, cualquier espacio vectorial es un grupo por definición , solo basta demostrar que se le puede dar una estructura de variedad diferenciable.
Consideremos una base del espacio vectorial

$\beta = \{ e_1, \ldots, e_n \}$,

entonces la siguiente aplicación ϕ, es una carta para el espacio , que llamaremos V .

$$\phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n ,$$

$$\phi(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) .$$

Podemos ver que el cambio de coordenadas es la identidad. Además la operación del grupo es diferenciable.

■

Recordemos que

$$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} ; \quad |z| = 1 \}.$$

LEMA 1.3 S^1 es un grupo de Lie.
DEMOSTRACION

Podemos considerar la multiplicación de números complejos como la operación del grupo .De ésta manera este conjunto deviene en un grupo .
Además S^1 es una variedad diferenciable .

Consideremos los abiertos de este espacio, donde S^1 tiene la topología heredada de $\mathbb{C}^1$,

$$V_1 = \{ (x,y) \in S^1 ; \quad y > 0 \},$$

$$V_2 = \{ (x,y) \in S^1 : y < 0 \},$$

$$V_3 = \{ (x,y) \in S^1 : x > 0 \},$$

$$V_4 = \{ (x,y) \in S^1 : x < 0 \},$$

(donde (x,y) está identificado con el número complejo $x + iy$).
También consideremos el intervalo abierto $(-1,1)$ y de esta manera podemos definir los sistemas de coordenadas en estos abiertos como a,b,c,d; si llamamos $U = (-1,1)$ se tiene

$$a : U \to V_1 \quad , \quad a(t) = (t, \sqrt{1-t^2}),$$

$$b : U \to V_2 \quad , \quad b(t) = (t, -\sqrt{1-t^2}),$$

$$c : U \to V_3 \quad , \quad c(t) = (\sqrt{1-t^2}, t),$$

$$d : U \to V_4 \quad , \quad d(t) = (-\sqrt{1-t^2}, t).$$

Aquí podemos ver que todos los cambios de coordenadas son de clase $\mathscr{C}^\infty$ también, podemos ver que los codominios de estas cartas cubren a S^1 .
Además es un ejercicio de rutina mostrar que la operación producto y la operación inversa son diferenciables.
Como consecuencia tenemos que S^1es un grupo de Lie. $\blacksquare$

Recordemos que S^3 está definido por

$$S^3 = \{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1 \}.$$

Como otro resultado más veremos el siguiente :

LEMA 1.4. S^3 es un grupo de Lie .
DEMOSTRACION
Consideremos los abiertos en este espacio , definidos como

$$V_i = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4)\in S^3 :\ x_i>0 \right\} ,$$
$$W_i = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4)\in S^3 :\ x_i<0 \right\} .$$

Los cuales son abiertos es este espacio, naturalmente, con la topología relativa inducida por el espacio $\mathbb{R}^3$.

A continuación , para completar la prueba podemos considerar el abierto de el espacio $\mathbb{R}^3$:

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+ y^2+ z^2 < 1 \right\} .$$

De esta manera podemos definir los sistemas de coordenadas locales como

$$\phi_i : V \longrightarrow V_i \qquad \text{ó} \qquad \phi_j : V \longrightarrow W_j$$

dadas de manera natural por

$$(x,y,z) \longrightarrow (x,y,\pm\sqrt{1-x^2-y^2-z^2},z),$$

$$(x,y,z) \longrightarrow (x,\pm\sqrt{1-x^2-y^2-z^2},y,z),$$

$$(x,y,z) \longrightarrow (\pm\sqrt{1-x^2-y^2-z^2},x,y,z),$$

$$(x,y,z) \longrightarrow (x,y,z, \pm\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}) .$$

Es fácil ver que estos cambios de coordenadas son de clase $\mathscr{C}^{\infty}$.
Y por todo lo anterior tenemos aquí una variedad diferenciable de dimensión 3 .
A continuación veremos que S^3 es un grupo .

Antes de iniciar la demostración haremos un paréntesis para que veamos el porque se ocurre equipar a S^3 con una operación de grupo.

Consideremos el grupo de Hamilton

$$\mathscr{H} = \left\{ a+ib+jc+kd \ : \ a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} ,$$

con su tabla correspondiente de multiplicar

*	i	j	k	1
i	-1	k	-j	i
j	-k	-1	i	j
k	j	-i	-1	k
1	i	j	k	1 .

Observemos además que el producto de 2 elementos de norma 1 es de norma 1, donde a+ib+jc+kd está identificado con $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$.

La operación anterior restringida a S^3 es

$$* : S^3 x\ S^3 \longrightarrow S^3 ,$$

$$* ((x,y,z,w,)(x,'y',z;w')) = \begin{bmatrix} xx'-yy'-zz'-ww' \\ xy'+x'y+zw-z'w \\ xz'+x'z+wy'-yw' \\ xw'+x'w+yz'-y'z \end{bmatrix} .$$

Con esta ley formidable de multiplicación S^3 deviene en un grupo.
También se puede ver que esta operación y la operación inversa son diferenciables.

■

Una pregunta natural es si toda esfera es un grupo de Lie .

Existe un teorema famoso para esferas .

TEOREMA 1.1. S^n es un grupo de Lie solo para $n = 1,3$.
La demostración de este teorema está fuera del alcance de esta tesis.

Pasemos al estudio de matrices.

Definamos ahora el espacio vectorial

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \left\{ T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid T \text{ es lineal} \right\}.$$

Así de esta manera llegamos al:

LEMA 1.5. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial ,isomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$.

DEMOSTRACION

Primero es fácil ver que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial porque podemos considerar la suma usual de matrices y la multiplicación por un escalar ,también la usual.

Para ver que es isomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$ podemos considerar el isomorfismo dado por

$$\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2},$$

$$\phi \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{11} \ldots a_{1n}, \ldots, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn}].$$

$\blacksquare$

LEMA 1.6. $\mathcal{M}$ $(\mathbb{R})$ es un espacio topológico.

DEMOSTRACIŌN

Consideremos la topología inducida por la función ϕ del teorema anterior y definamos los abiertos en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ asi:

$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ es abierto si y solo si $\phi(\mathcal{O})$ es abierto en $\mathbb{R}^{n^2}$.
Claramente podemos ver que los abiertos así definidos constituyen una topología para este conjunto.

$\blacksquare$

Utilizamos lo anterior para definir los grupos de matrices los cuales serán muy importantes a lo largo de este trabajo.

LEMA 1.7. $GL(n,\mathbb{R}) = \{ x \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) ; \det(x) \neq 0 \}$ es un grupo de Lie .

DEMOSTRACION

Para que este conjunto devenga en un grupo consideraremos la multiplicación usual de matrices .

Pues si tomamos $x, y \in GL(n,\mathbb{R})$ entonces podemos ver que $\det(xy) \neq 0$, de aquí , concluimos que $GL(n,\mathbb{R})$ es cerrado.

Y como la multiplicación de matrices es asociativa y $\det(x^{-1}) \neq 0$ se tiene entonces que $GL(n,\mathbb{R})$ es un grupo.
-La función definida como sigue es un homomorfismo de grupos ; $\det : GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}-\{0\}$, $x \longrightarrow \det(x)$.
Lo anterior lo usaremos para ver que $GL(n,\mathbb{R})$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^k$, $k=n^2$, en efecto ;

$GL(n,\mathbb{R})$ es un abierto en $\mathbb{R}^{n^2}$, ya que $\det^{-1}(\mathbb{R}-\{0\}) = GL(n,\mathbb{R})$ pero la función det es continua de donde se sigue el resultado. Además la operación del grupo es diferenciable ya que usando las carta canónica ϕ de $GL(n,\mathbb{R})$ la expresión para la operación es polinomial. ∎

LEMA 1.8. $GL(n,\mathbb{R})$ tiene dos componentes .
DEMOSTRACION
Una disconexión para este espacio es

$$GL^+(n,\mathbb{R}) = \left\{ x \in GL(n,\mathbb{R}) \ ; \ \det(x) > 0 \right\} ,$$

$$GL^-(n,\mathbb{R}) = \left\{ x \in GL(n,\mathbb{R}) \ ; \ \det(x) < 0 \right\} .$$

Ya que , como conjuntos ,es inmediato que

$$GL(n,\mathbb{R}) = GL^+(n,\mathbb{R}) \cup GL^-(n,\mathbb{R}).$$

Primero, podemos ver que $GL^+(n,\mathbb{R})$ y que $GL^-(n,\mathbb{R})$ son dos abiertos en $GL(n,\mathbb{R})$, lo cual se sigue de que la función determinante es continua .Observemos .

$$GL^+(n,\mathbb{R}) \cap GL^-(n,\mathbb{R}) = \emptyset .$$

Además $GL^+(n,\mathbb{R})$ es arco conexo . Para ver esto basta mostrar que existe un camino continuo que une al elemento identidad del grupo con un $p \in GL^+(n,\mathbb{R})$. Para encontrar tal camino se puede usar la forma canónica de Jordan de la matriz p .
Por otra parte no existe una curva continua que una un $p \in GL^+(n,\mathbb{R})$ con un $q \in GL^-(n,\mathbb{R})$.
Pues si existiera, se tendría entonces

$$\gamma : I \longrightarrow GL(n,\mathbb{R}) \quad \gamma(0)=p \quad , \gamma(0)=q \text{ es continua.}$$

Ahora si consideramos que

el $\det(\gamma(0)) > 0$ y $\det(\gamma(1)) < 0$.
al ir de p a q pasamos por el cero por ser $\det\gamma$ continua. Y obtenemos una contradicción ya que $0 \notin Im(\det \gamma)$.

§ 2.

ALGEBRAS DE LIE.

DEFINICION 2.1. Un álgebra de Lie es una pareja $(\mathfrak{g}, [,])$ donde $\mathfrak{g}$ es un $\mathbb{R}$- espacio vectorial de dimensión finita junto con una operación bilineal que llamaremos paréntesis

$$[,]: V\times V \longrightarrow V,$$

y tal que esta operación satisface las condiciones

a) $[x,y] = -[y,x]$, (antisimetría).
b) $[x,[y,z]] + [z,[x,y]] + [y,[z,x]] = 0.$
(identidad de Jacobi) .

Aquí consideraremos espacios de dimensión finita, aunque existen otros como $\mathfrak{X}(M)$ que es el espacio vectorial de campos vectoriales sobre la variedad diferenciable M que tienen dimensión infinita y forman con el paréntesis de campos un álgebra de Lie.

DEFINICION 2.2.
Las constantes de estructura del álgebra de Lie son los números c_{ij}^k tales que si $(X_1,\ldots,X_n)$ es una base para $\mathfrak{g}$ entonces $[X_i,X_j] = \sum c_{ij}^k X_k$.

Estas constantes determinan el álgebra de Lie.
Por abuso de notación denotaremos simplemente por $\mathfrak{g}$ a $(\mathfrak{g},[,])$.

EJEMPLO 2.1. El espacio vectorial $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = \left\{ x \in M(n,\mathbb{R}) \right\}$ junto con la operación $[x,y]=xy-yx$ es un álgebra de Lie .

EJEMPLO 2.2. $\mathbb{R}^3$ junto con la operación del producto cruz es un álgebra de Lie.

El siguiente lema nos ayuda a obtener más ejemplos de álgebras de Lie .

LEMA 2.1. Si $(V,[,])$ es un álgebra de Lie , $W\subseteq V$ es subespacio vectorial , $[,]$ cerrado en W , entonces W es una álgebra de Lie.

EJEMPLO 2.3. $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \left\{ x \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \ : \ \text{traza}(x)=0 \right\}$ es una álgebra de Lie con la misma operación que $M(n,\mathbb{R})$.

Para ello consideremos el mismo paréntesis de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, se puede ver que ésta operación es cerrada en $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ además también podemos ver que este es un subespacio vectorial de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

§ 3.
CORRESPONDENCIA ENTRE SUBGRUPOS Y SUBALGEBRAS DE LIE.

Resumiremos ahora rápidamente como a partir de un grupo de Lie puede obtenerse una álgebra de Lie asociada. En lo que sigue ,G y H serán grupos de Lie , $\mathcal{X}(G)$ será el conjunto de campos vectoriales en G y $\mathcal{X}(H)$ el conjunto de campos vectoriales en H.

DEFINICION 3.1. Si tenemos una función

$$\phi : G \longrightarrow H \qquad \text{diferenciable ,}$$

diremos que $X \in \mathcal{X}(G)$ y $Y \in \mathcal{X}(H)$ están ϕ - relacionados si

$$d\phi\ X(p) = Y\ \phi(p) \quad .$$

LEMA 3.1. Si X está ϕ - relacionado con Y , y si X_1 está ϕ - relacionado con Y_1 , entonces $[X,X_1]$ está ϕ-relacionado con $[Y,Y_1]$.

DEMOSTRACION .

Tenemos que mostrar que

$$d\phi\ [X,X_1](p) = [Y,Y_1](\phi(p)),$$

lo cual es inmediato , porque

$$\begin{aligned} d\phi\ [X,X_1](p) &= d\phi\ (\ X\ X_1 - X_1 X\ )(p), \\ &= d\phi\ X\ X_1(p) - d\phi\ X_1 X\ (p), \\ &= Y\ \phi\ X_1\ (p) - Y_1 \phi\ X\ (p), \\ &= Y\ Y_1(\phi(p)) - Y_1 Y(\phi(p))\ , \\ &= [Y,Y_1]\phi(p)\ . \end{aligned}$$

■

DEFINICION 3.2. Si G es un grupo de Lie la función $L_g : G \longrightarrow G$ definida por $L_g(x) = g\ x$ se llama la traslación izquierda en G y si $X \in \mathcal{X}(G)$ es tal que $dL_g\ X(p) = X(L_g(p))$ decimos que X es invariante izquierdo.

Esto es posible ya que L_g es siempre un difeomorfismo lo que se sigue inmediatamente de que la operación producto en el grupo es $\mathcal{C}^{\infty}$.
Análogamente si $R_g:G \longrightarrow G$, $R_g(x) = xg$, es la traslación derecha en G y si $X\in\mathcal{X}(G)$ es tal que $dR_gX(p) = X(R_g(p))$, entonces decimos que X es invariante derecho.

TEOREMA 3.1. El espacio de campos invariantes $\mathcal{G}$ es isomorfo al espacio tangente en el elemento identidad del grupo subyacente.
DEMOSTRACION

Consideremos el isomorfismo

$$\phi\ (X)= X(\ e\ )$$, donde e es la identidad en G ,

que, como podemos ver es un isomorfismo de espacios vectoriales.

■

TEOREMA 3.2. El conjunto definido por $\mathcal{G}= \left\{\text{campos vectoriales en } G \text{ invariantes izquierdos}\right\}$ es un álgebra de Lie con respecto al paréntesis de campos vectoriales .
DEMOSTRACION

Fácilmente se puede ver que este conjunto deviene en un espacio vectorial si se usa la suma y producto por un escalar usuales en los campos vectoriales , además por el lema 2.2. tenemos que este espacio es cerrado respecto al paréntesis de Lie de los campos vectoriales .

■

DEFINICION 3.3. Sea G y H grupos de Lie ,V una vecindad de la identidad en G, ϕ es un homomorfismo local de Lie de G a H si :

para toda $x,y \in V$ $xy \in V$,

$$\phi(xy) = \phi(x)\ \phi(y)\ .$$

DEFINICION 3.4.
Si $[\ \mathcal{G}\ ,\ [,]_1]:= \mathcal{G}$ y $[\ \mathcal{H}\ ,\ [,]_2]:= \mathcal{H}$ son dos álgebras de Lie , diremos que $\phi:\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$,aplicación lineal, es un homomorfismo de álgebras si

$$\phi([x,y]_1) = [\phi(x),\phi(y)]_2.$$

Decimos que ϕ es un isomorfismo si ϕ tiene inversa.
TEOREMA 3.3. Si $\phi\ :\ V \subseteq G \longrightarrow H$ es un homomorfismo local deLie y V es una vecindad de la identidad de G entonces

$$d\phi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \ ,$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie .
DEMOSTRACION

Por la continuidad del producto existe $V \leq V_o$ tal que para toda $x,y \in V$ $x.y \in V$.

Si L es la traslación izquierda en G . se sigue que ;

$$(L_{\phi(x)} \phi)(Y) = (\phi L_x) (Y) \ ,$$

$$\begin{aligned} d\phi (X)_{\phi(x)} &= dL_{\phi(x)} \, d\phi(X_o) \ , \\ &= d(L_{\phi(x)} \phi) X_o \ , \\ &= d(\phi L_x)(X_o) \ , \\ &= d\phi \, dL_x (X_o) \ , \\ &= d\phi(X_o) \ . \end{aligned}$$

De donde X y $d\phi(X)$ están ϕ - relacionados entonces

$$d\phi([X,Y]_o) = [d\phi(X), d\phi(Y)]_{\phi(o)}$$

$\blacksquare$

Y $d\phi$ es el homomorfismo de álgebras buscado.
En este apartado recordaremos que si conocemos un álgebra de Lie , esta nos determina un grupo de Lie localmente
COROLARIO .- Grupos de Lie isomorfos tienen álgebras de Lie isomorfas .
Inversamente , si conocemos un álgebra de Lie. esta nos determina un grupo de Lie.
TEOREMA 3.4. Sean G y H grupos de Lie con álgebras de Lie $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ respectivamente y G simplemente conexo . Sea $\zeta : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ un homomorfismo de álgebras de Lie . Entonces existe un único homomorfismo de grupos de Lie $\phi : G \longrightarrow H$, tal que $d\phi = \zeta$.

Observación : Existen grupos que tienen algebras de Lie isomorfas que no son isomorfos , por ejemplo $\mathbb{R}$ y S^1 .

COROLARIO Si G y H son simplemente conexos y tienen álgebras de Lie isomorfas entonces G y H son isomorfos .
Existe un teorema debido a Ado que no probaremos que dice que toda álgebra de Lie se puede representar en el álgebra de Lie general lineal $gl(n,\mathbb{F})$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Como consecuencia , si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie entonces existe un grupo de Lie , en particular uno simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.
En vista de esto se tiene el :
TEOREMA 3.5. Existe una correspondencia inyectiva entre clases de isomorfismo de álgebras de lie y clases de isomorfismo de grupos de Lie .

§ 4.

CLASIFICACION .
DE ALGEBRAS DE DIMENSIONES 1.2.3.

El tema de este apartado será clasificar todas las álgebras de Lie de dimensión baja,salvo isomorfismo, de dimensión menor ó igual a 3.

En lo que sigue , $\mathfrak{g}$ será un álgebra de Lie de dimensión menor ó igual 3 , con su operación [,].

DEFINICION 4.1. Si β es una base de $\mathfrak{g}$ definimos

$$\mathfrak{g}^2 = \left\{ \sum \lambda_i [x_i, y_i] \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \; ; \; x_i, y_j \in \beta \right\}.$$

DEFINICION 4.2. $Z(\mathfrak{g}) = \left\{ x \in \mathfrak{g} \mid [x,y]=0 \; , \; y \in \mathfrak{g} \right\}$, que llamaremos el centro de $\mathfrak{g}$.

DEFINICION 4.3 $M \subseteq \mathfrak{g}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ si :

a) M es un subespacio vectorial de $\mathfrak{g}$.
b) Cuando $x \in \mathfrak{g}$, $y \in M$ ó $x \in M$. $y \in \mathfrak{g}$, entonces $[x,y] \in M$

Denotaremos por gen(x) el subespacio generado por $x \in \mathfrak{g}$, y diremos que la dimensión de un álgebra de Lie $[\mathfrak{g},[,]]$, es la dimensión de $\mathfrak{g}$ como espacio vectorial.

DIMENSION UNO.

TEOREMA 4.1 Sea un álgebra de Lie de dimensión 1, $[\mathfrak{g},[,]]$ entonces es isomorfa a la dada por el paréntesis

$$[X,X]=0,$$

donde (X) es una base de $\mathfrak{g}$.

DEMOSTRACION

Se puede ver que por la antisimetría del paréntesis necesariamente se tiene [X,X]=0.

■

Entonces en dimensión 1, existe una álgebra de Lie.

DEFINICION 4.4. Un álgebra de Lie $[\mathfrak{g},[,]]$ es abeliana cuando [X,Y]=0 , para todo X,Y en la base de $\mathfrak{g}$.

LEMA 4.1. El álgebra definida por [X,X]=0 es abeliana.

DEMOSTRACION ■

La idea en el caso de dimensión 2 y 3 es estudiar las álgebras de acuerdo con la dimensión de $\mathfrak{g}^2$ que puede ser de dimensión 0,1,2,3.

DIMENSION DOS.

TEOREMA 4.2. Sea un álgebra de dimensión 2, $[\mathfrak{g},[,]]$, y $\dim(\mathfrak{g}^2)=0$ entonces $\mathfrak{g}$ es abeliana.

DEMOSTRACION

Se sigue de que $\mathfrak{g}^2$ está generada por el elemento $0\in\mathfrak{g}$. $\blacksquare$

TEOREMA 4.3. Sea un álgebra de Lie de dimensión 2, $[\mathfrak{g},[,]]$ tal que $\dim(\mathfrak{g}^2)\neq 0$ entonces es isomorfa a la dada por

$$[X,Y]= X.$$

donde $\{X,Y\}$ es una base de $\mathfrak{g}$.

DEMOSTRACION

Se tiene que necesariamente

$$\dim(\mathfrak{g}^2)=1,$$

pues $\mathfrak{g}^2 = \mathrm{gen}([X,Y])$, entonces se puede elegir X tal que

$$\mathfrak{g}^2 = \mathrm{gen}(X),$$

es decir

$$[X,Y]=\alpha X \neq 0$$

, pues si $\alpha X = 0$ entonces este es el caso abeliano. Si ahora hacemos

$$Y \longrightarrow \alpha^{-1}Y,$$

un cambio de base, se tiene que

$$[X,Y]=X.$$

Entonces existe un álgebra no abeliana de dimensión 2. $\blacksquare$

DEFINICION 4.5. Un álgebra $\mathfrak{g}$ es soluble si existe $n\in\mathbb{N}$ tal que

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g},$$
$$\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathfrak{g}^n = [\mathfrak{g}^{n-1},\mathfrak{g}^{n-1}] = 0.$$

TEOREMA 4.4. Un álgebra de Lie de dimensión 2 tal que $[X,Y]=X$, es soluble.

DEMOSTRACION

Se puede ver que en este caso

$$\mathfrak{g}^2 = 0, \text{ entonces } n=2.$$

$\blacksquare$

DIMENSION TRES.

TEOREMA 4.5. Sea un álgebra de Lie de dimensión 3, $[\mathfrak{g},[,]]$ tal que $\dim(\mathfrak{g}^2)= 0$ entonces $\mathfrak{g}$ es abeliana .

DEMOSTRACION

Ya que $\mathfrak{g}^2$ está generada por $[X,Y]$ entonces se tiene que

$[X,Y]=0, \quad [Y,Z]=0, \quad [X,Z]=0.$

Entonces se sigue que existe un álgebra abeliana de dimensión 3.

$\blacksquare$

TEOREMA 4.6. Sea un álgebra de Lie de dimensión 3, $[\mathfrak{g},[,]]$ tal que $\dim(\mathfrak{g}^2) = 1$ y $\mathfrak{g}^2 \subseteq Z(\mathfrak{g})$ entonces es isomorfa a la dada por los paréntesis

$$[X,Y]=0 \ , \ [Y,Z]=X \ , \ [X,Z]=0,$$

donde $\{X,Y,Z\}$ es una base de $\mathfrak{g}$.

DEMOSTRACION

Podemos suponer

$$\mathfrak{g}^2=\mathrm{gen}(X),$$

donde

$$\mathfrak{g} = \mathrm{gen}(X,Y,Z),$$

entonces

$$\mathfrak{g}^2 = \mathrm{gen}([Y,Z]),$$

ya que $[W,X]=0$ por estar X en $Z(\mathfrak{g})$,

y podemos suponer

$$[Y,Z]=X \ ,$$

se tiene

$$[X,Y]=0, \ [X,Z]=0, [Y,Z]=X.$$

$\blacksquare$

DEFINICION 4.6. Un álgebra de Lie es nilpotente si existe $n\in\mathbb{N}$ tal que

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathfrak{g}^n = [\mathfrak{g} \ ,\mathfrak{g}^{n-1}] = 0.$$

TEOREMA 4.7. Un álgebra de Lie de dimensión 3 tal que

$$[X,Y]=0 \ , \ [Y,Z]=X \ , \ [X,Z]=0 \ .$$

es nilpotente y $\dim(\mathfrak{g}^2) = 1$

DEMOSTRACION

Se tiene $\mathfrak{g}^2 = \{X\}$, $\mathfrak{g}^3 = \{0\}$, entonces $\mathfrak{g}$ es nilpotente.

$\blacksquare$

TEOREMA 4.8. Sea un álgebra de Lie de dimensión 3, $[\mathfrak{g},[,]]$ tal que $\dim(\mathfrak{g}^2) = 1$ y $\mathfrak{g}^2$ no está contenida en $Z(\mathfrak{g})$ entonces es isomorfa a la dada por los paréntesis

$$[X,Z]=X, \quad [X,Z]=0 \quad , \quad [Y,Z]=0,$$

donde $\{X,Y,Z\}$ es una base de $\mathfrak{g}$.

DEMOSTRACION

Si suponemos que $\mathfrak{g}^2 = \mathrm{gen}(X)$, entonces existe Y tal que $[X,Y]\neq 0$ por no estar X en $Z(\mathfrak{g})$ es decir, por ejemplo

$$[X,Y] = \beta X \,,$$
haciendo un cambio de base $\quad X \longrightarrow \beta^{-1}X$

$$[X,Y] = X.$$

Si ahora hacemos
$$R = \mathrm{gen}(X,Y), \quad \mathfrak{g}^2 \subseteq R,$$
entonces $\mathfrak{g}$ se puede escribir como
$$\mathfrak{g} = R \oplus B \,,\ B = \mathrm{gen}(Z),$$
luego, la tabla de multiplicar de esta álgebra es
$$[X,Z]=X \quad , \quad [X,Z]=0 \quad , \quad [Y,Z]=0.$$

pues si $[X,Z] \neq 0$ ó $[Y,Z] \neq 0$ se tendría $\dim(\mathfrak{g}^2) \neq 1$, pues en el caso que
$$[X,Z]=X \,, \qquad [Y,Z] = X \,,$$
sería una contradicción con que $\dim(\mathfrak{g}^2)=1$.

Observación ; $\mathfrak{g}$ es la suma directa de dos álgebras de Lie. ■

TEOREMA 4.9. Sea un álgebra de Lie de dimensión 3, $[\mathfrak{g},[\,,]]$ tal que $\dim(\mathfrak{g}^2) = 2$, entonces es isomorfa a la dada por los paréntesis
$$[X,Y]= 0 \quad , [X,Z]=\alpha X + \beta Y \ , [Y,Z]=\gamma X + \delta Y,$$
$$\text{con} \quad \det\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \neq 0,$$

donde $\{X,Y,Z\}$ es una base de $\mathfrak{g}$.

DEMOSTRACION

Se puede ver que $\mathfrak{g}$ se puede escribir como
$$\mathfrak{g} = R \oplus B,$$
donde
$$R = \mathrm{gen}(X,Y),\ R \text{ es ideal de } \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}^2 \subseteq R \ ,$$
entonces se tiene
$$\mathfrak{g}^2 = \mathrm{gen}([X,Z],[Y,Z]),$$

entonces $[X,Z]$ y $[Y,Z]$ son linealmente independientes porque $\dim(\mathfrak{g}^2) = 2$, y también si $\mathrm{ad}_g:\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ se define por
$$\mathrm{ad}_g(x)=[x,g],$$

entonces
$$\mathrm{ad}_z\Big|_{\mathfrak{g}^2} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix},$$

de donde se sigue

$$[X,Y]=0\ ,\ [X,Z]=\alpha X+\beta Y\ ,\ [Y,Z]=\gamma X+\delta Y\ .$$

y $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ ya que $\dim(\mathfrak{g}^2)=2.$

■

TEOREMA 4.10. Si $[X,Y]=0$,$[X,Z]=\alpha X+\beta Y$, $[Y,Z]=\gamma X+\delta Y$, entonces $\dim(\mathfrak{g}^2)=2$ y $\mathfrak{g}$ es soluble.

DEMOSTRACION

Se tiene que si los paréntesis satisfacen lo anterior entonces

$$\mathfrak{g}^3=\{0\}.$$

■

TEOREMA 4.11. Sea un álgebra de Lie de dimensión 3, $[\mathfrak{g},[\,,]]$ tal que $\dim(\mathfrak{g}^2)=3$, entonces es isomorfa a la dada por los paréntesis

$$[X,Y]=Z\ ,\ [Y,Z]=\alpha X\ ,\ [Z,X]=\beta Y.$$

y se puede elegir

$$\alpha=\beta=1\ \text{ó}\ \alpha=-1=-\beta,$$

donde $\{X,Y,Z\}$ es una base de $\mathfrak{g}$.

DEMOSTRACION

Consideremos la base

$$\{X,Y,Z\}\ \text{de}\ \mathfrak{g}^2,$$

hagamos

$$[Y,Z]=M,\ [Z,X]=N\ ,\ [X,Y]=P\ ,$$

y tenemos entonces una matriz (α_{ij}) tal que

$$\begin{bmatrix} M\\ N\\ P\end{bmatrix}=(\alpha_{ij})\begin{bmatrix} X\\ Y\\ Z\end{bmatrix},$$

por la identidad de Jacobi se tiene

$$[M,X]+[N,Y]+[P,Z]=0,$$

sustituyendo M,N,P,en lo anterior llegamos a que la matriz (α_{ij}) satisface que

$$\alpha_{ij}=\alpha_{ji}\ ,$$

de donde la matriz (α_{ij}) es simétrica .

Sea ahora otra base

$$\{X',Y',Z'\},$$

y si definimos analogamente una matriz (μ_{ij})

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = (\mu_{ij}) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix},$$

entonces

$$\det(\mu_{ij}) \neq 0.$$

Sea ahora

$$[Y',Z']=M', \qquad [Z',X']=N', \qquad [X',Y']=P'.$$

Sustituyendo

$$\begin{bmatrix} M' \\ N' \\ P' \end{bmatrix} = (\nu_{ij}) \begin{bmatrix} M \\ N \\ P \end{bmatrix},$$

donde se puede ver que la matriz (ν_{ij}) está dada por

$$(\nu_{ij}) = \operatorname{adj}((\mu_{ij})^t) = ((\mu_{ij})^t)^{-1}\det(\mu_{ij}),$$

antes de proseguir daremos la siguiente

DEFINICION 4.6. Si R,S son dos matrices decimos que son multiplicativamente cogredientes si existe Q , matriz invertible y $\rho \neq 0$ tal que

$$R = \rho\, Q^t\, S\, Q \ . \text{ (Donde } Q^t \text{ es la traspuesta).}$$

Con todo lo anterior obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} (X,Y,Z) & \xrightarrow{(\alpha_{ij})} & (M,N,P) \\ (\mu_{ij})\downarrow & & \downarrow(\nu_{ij}) \\ (X',Y',Z') & \xrightarrow{(\beta_{ij})} & (M',N',P'). \end{array}$$

Y calculando se tiene entonces

$$\beta = \det(\mu') \, (\mu')^{-1} \, \alpha \, (\mu^{-1}),$$

de donde se sigue que α y β son multiplicativamente cogredientes. Entonces cada álgebra de Lie corresponde a una clase de cogrediencia. Es posible elegir el representante como

$$(\overline{a_{ij}}) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde $(\overline{\quad\quad})$ significa tomar clase.
Y como $\dim(\mathfrak{g}^2) = 3$, se sigue que $ab \neq 0$, de donde se puede elegir $a=b=1$ ó $a=-1$, $b=1$, en los paréntesis

$$[X,Y]=Z\ , \quad [Y,Z]=aX\ , \quad [Z,X]=b\,Y.$$

■

DEFINICION 4.7. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es simple si $\mathfrak{g}^2=\mathfrak{g}$, y si $Z(\mathfrak{g})=0$.

TEOREMA 4.12. El álgebra de Lie definida como $[X,Y]=Z$, $[Y,Z]=aX$, $[Z,X]=bY$, es simple.
DEMOSTRACION

■

CAPITULO II.

LOS GRUPOS DE LIE DE DIMENSION 1 y 2.

§ 1.

DIMENSION 1 y 2.

Estudiaremos aquí a los grupos de Lie más sencillos y veremos algunos resultados asociadas a estos grupos.

CASO DE DIMENSION 1.

TEOREMA 1.1. $\mathbb{R}$ es un grupo de Lie .
Este grupo corresponde al álgebra de Lie descrita en el teorema 4.1. del capítulo I.
Enunciamos rápidamente algunas propiedades básicas de este grupo.
TEOREMA 1.2. $\mathbb{R}$ no es compacto .
TEOREMA 1.3. La función $R:\mathbb{R} \longrightarrow GL(2,\mathbb{R})$ definida por

$$R(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix},$$

es una representación de $\mathbb{R}$.
DEMOSTRACION
Observemos que R es un homomorfismo de grupos , de hecho es un difeomorfismo sobre su imagen. $\blacksquare$
TEOREMA 1.4. El espacio tangente a $R(\mathbb{R})$ está dado por

$$T_e\mathbb{R} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} ; a\in\mathbb{R} \right\}.$$

DEMOSTRACION
Pues si consideramos cualquier curva en $\mathbb{R}$, y derivando ,evaluando en $0\in\mathbb{R}$, obtenemos este resultado . $\blacksquare$

Y calculando el conmutador de matrices se tiene lo siguiente:
COROLARIO La constante de estructura es 0.
Enumeramos ahora algunos grupos de Lie asociados a $\mathbb{R}$.
Recordemos que el grupo de isometrías de $\mathbb{R}$ es $Iso(\mathbb{R}) = \{ f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = x + a , a\neq 0 \}$.

TEOREMA 1.5. $Iso(\mathbb{R})$ es isomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2$.
DEMOSTRACION
Consideremos la aplicación

$$\phi:\mathbb{R} \longrightarrow Iso^+(\mathbb{R}),$$

$$t \longrightarrow f(x)= x + t,$$

donde $Iso^{+}(\mathbb{P})$ son las isometrías que preservan la orientación , es posible ver que ϕ es un isomorfismo y observando que toda $\alpha \in Iso(\mathbb{R})$ es composición de alguna $\beta \in Iso^{+}(\mathbb{P})$ con la aplicación $x \longrightarrow -x$ ó la identidad , el resultado se sigue.

$\blacksquare$

Consideremos otro importante grupo.

El grupo $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$.
Como ya vimos , S^1 es un grupo de Lie .
Este grupo corresponde al álgebra de Lie descrita en el teorema 4.1. del capítulo 1.
TEOREMA 1.6. S^1 es compacto .
DEMOSTRACION $\blacksquare$
TEOREMA 1.7.. Existe un monomorfismo de S^1 en $GL(3,\mathbb{R})$.
DEMOSTRACION
Definamos la función

$$\phi : S^1 \longrightarrow GL(3,\mathbb{R}),$$

$$\phi(e^{2\pi i t}) = \begin{bmatrix} \cos(2\pi t) & \sin(2\pi t) & 0 \\ -\sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

se puede ver que esta funcion es un difeomorfismo sobre su imagen asi que podemos identificar a la esfera de dimensión uno con el conjunto

$$S^1 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(2\pi t) & \sin(2\pi t) \\ -\sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\blacksquare$

Llegamos pues al siguiente :
TEOREMA 1.8. Existe un monomorfismo de grupos de Lie entre $\mathbb{R}$ y S^1
DEMOSTRACION
$\mathbb{R}$ es la cubriente universal de S^1 ya que se puede considerar la aplicación cubriente

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1,$$

$$p(t) = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t).$$

$\blacksquare$

Estudiaremos otro importante grupo , el llamado grupo de Lorentz que es muy usado en física .

Este grupo está definido por

$$O(1,1) = \Big\{ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid T \text{ es lineal } ; \phi(T(x,y)) = \phi(x,y) \text{ donde } \phi(x,y) = x^2 - y^2 \Big\}.$$

TEOREMA 1.9. El conjunto definido por $O(1,1)$es un grupo de Lie con cuatro componentes conexas y la componente identidad es isomorfa a $\mathbb{R}$.

DEMOSTRACION

Es fácil ver que este es un subgrupo de $GL(2,\mathbb{R})$ ya que

$$O(1,1) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,\middle|\, a^2 - c^2 = 1 ,\ b^2 - d^2 = 1, ab - cd = 0 \right\},$$

de lo anterior se puede despejar

$$b = \frac{cd}{a} \quad ; \quad -1 = \frac{c^2 d^2}{a^2} - d^2 = \frac{d^2(c^2 - a^2)}{a^2},$$

$$= \frac{-d^2}{a^2} \quad \text{entonces} \quad d = \pm a \neq 0 ,$$

se sigue que

$$\text{si } d = a \quad \text{entonces} \quad b = c ,$$
$$\text{si } d = -a \quad \text{entonces} \quad b = -c ,$$

por lo que tenemos :

$$O(1,1) = \left\{ \begin{bmatrix} a & \pm c \\ c & \pm a \end{bmatrix} : \quad a^2 - c^2 = 1 \right\}.$$

De aquí , podemos ver que este grupo de Lie tiene cuatro componentes conexas (véase la figura 0) y es de dimensión 1.

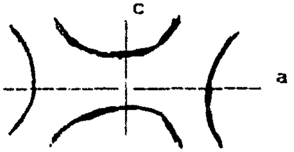

fig 0.

Casi siempre tendremos en cuenta solamente la componente de la identidad $O^+(1,1)$ de este grupo que frecuentemente aparece en relatividad y mecánica cuántica .
Es posible mostrar que la aplicación ϕ dada por

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow O^+(1,1),$$
$$t \longrightarrow \begin{bmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{bmatrix},$$

es un isomorfismo de grupos de Lie.

■

CASO DE DIMENSION 2.
Consideremos ahora otro importante grupo que se estudia en la siguiente serie de teoremas .

TEOREMA 1.10. $\mathbb{R}^2$ es un grupo de Lie.
Este grupo corresponde al álgebra de Lie descrita en el teorema 4.2. del capítulo 1 .
TEOREMA 1.11. $\mathbb{R}^2$ es no compacto.
TEOREMA 1.12. La función $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow GL(3,\mathbb{R})$ definida por

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

es una representación de $\mathbb{R}^2$.
DEMOSTRACION
Podemos ver que este es un homomorfismo de grupos.
■
TEOREMA 1.13. El espacio tangente de $f(\mathbb{R}^2)$ en la identidad es

$$T_e\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : x,y \in \mathbb{R} \right\}.$$

COROLARIO Las constantes de estructura son 0,0.
TEOREMA 1.14. Los campos vectoriales invariantes a izquierda de $\mathbb{R}^2$ están dados por

$$\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial y},$$

con respecto a (x,y) coordenadas canónicas en $\mathbb{R}^2$.

DEMOSTRACION $\blacksquare$

TEOREMA 1.15. Una métrica riemanniana invariante a izquierda sobre $\mathbb{R}^2$ es

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

DEMOSTRACION $\blacksquare$

El resultado que sigue se relaciona con el conjunto de trasformaciones afines de $\mathbb{R}$, $Afin^+(\mathbb{R})$.

TEOREMA 1.16. $Afin^+(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b \ : a,b \in \mathbb{R}, a>0 \right\}$ es un grupo de Lie.

Este grupo corresponde al álgebra de Lie descrita en el teorema 4.3. del capitulo 1.

DEMOSTRACION

Es fácil ver que bajo la composición de funciones este conjunto es un grupo.

$Afin^+(\mathbb{R})$ es una variedad diferenciable ya que podemos considerar la carta natural para este grupo como la definida por

$$c : Afin^+(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^+ x \mathbb{R}^2,$$
$$f(x) \longrightarrow (a,b).$$

Además la operación producto y la operación inversa son diferenciables de ahi que el grupo Afin es un grupo de Lie de dimensión 2. $\blacksquare$

TEOREMA 1.17. La función $f : Afin^+(\mathbb{R}) \longrightarrow GL(2,\mathbb{R})$ definida por

$$f(ax + b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{bmatrix},$$

es una representación de $Afin^+(\mathbb{R})$.

DEMOSTRACION

Fácilmente se puede ver que este es un homomorfismo de grupos. $\blacksquare$

TEOREMA 1.18. El espacio tangente de $f(Afin^+(\mathbb{F}))$ en la identidad es

$$T_e(Afin^+(\mathbb{R})) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}.$$

DEMOSTRACION $\blacksquare$

COROLARIO Las constante de estructura es -1.

DEMOSTRACION

Pues si consideramos la base del espacio tangente :

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

de esta manera podemos ver que el paréntesis

$$\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$= - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\blacksquare$

TEOREMA 1.19. Los campos invariantes a izquierda de $Afin^+(\mathbb{R})$ están dados por

$$y \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad y \frac{\partial}{\partial y} .$$

DEMOSTRACION

Para ello calculamos la diferencial de la traslación y la valuamos en los vectores canónicos. $\blacksquare$

TEOREMA 1.20. Una métrica riemanniana invariante a izquierda sobre $Afin^+(\mathbb{R})$ es

$$ds^2 = \frac{1}{y^2} (dx^2 + dy^2).$$

DEMOSTRACION $\blacksquare$

TEOREMA 1.21. Con la métrica anterior $Afin^+(\mathbb{R})$ es isométrico al espacio hiperbólico $\mathbb{H}^2$, definido por

$$\mathbb{H}^2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ ; \ y>0 \}.$$

DEMOSTRACION

Consideremos el difeomorfismo

$$ax + b \longrightarrow (b,a). \qquad \blacksquare$$

CAPITULO III.

DIMENSION 3.

Estudiaremos ahora los grupos de dimensión tres. Este es un caso muy especial ya que los seres humanos vivimos presisamente en un universo que tiene dimensión tres[1] (*excluyendo las interpretaciones físicas de la cuarta dimensión ,.... etc.*) .Lo anterior lo podemos saber ya que podemos ver que todas las cosas de nuestro universo tienen largo , ancho y espesor .Asi que de esta manera, como dijimos en el prólogo , cualquier ser humano pensaría que vive en un abierto del espacio cartesiano $\mathbb{R}^3$.

§ 1.

El grupo $\mathbb{R}^3$.

TEOREMA 1.1. $\mathbb{R}^3$ es un grupo de Lie.
Este grupo corresponde al álgebra de Lie descrita en el teorema 4.5. del capítulo 1.
TEOREMA 1.2. $\mathbb{R}^3$ no es compacto.

TEOREMA 1.3. El grupo $\mathbb{R}^3$ admite un monomorfismo a $GL(4,\mathbb{R})$.
DEMOSTRACION
Consideremos la función

$$\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow GL(4,\mathbb{R}),$$

$$\phi(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$ ■

TEOREMA 1.4. El grupo $\mathbb{R}^3$ visto así tiene por álgebra de Lie asociada al espacio vectorial

$$\mathcal{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$$

[1] Es decir , la parte espacial de nuestro universo es de dimensión tres , ya que de acuerdo con el Dr. Einstein el universo es una variedad diferenciable de dimensión cuatro. Se reserva una dimensión para el tiempo.

asi que de manera obvia se pueden identificar los vectores básicos que como veremos son los campos invariantes a izquierda.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que producen el mismo efecto al trabajar con el paréntesis de matrices .

■

COROLARIO Las constantes de estructura son 0,0,0.

TEOREMA 1.5. Los campos invariantes a izquierda de $\mathbb{R}^3$ son los campos

$$\frac{\partial}{\partial x} , \quad \frac{\partial}{\partial y} , \quad \frac{\partial}{\partial z} .$$

donde hemos considerado el sistema de coordenadas canónico en $\mathbb{R}^3$.

DEMOSTRACION

Sabemos que la traslación en el grupo de Lie $\mathbb{R}^3$ está dada por la función

$$L_A(x,y,z) = (a + x , b + y , c + z),$$

y , por supuesto la diferencial está dada por

$$dL_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

asi que podemos ver que se satisface

$$dL_A(\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x} (L_A(x,y,z)) ,$$

y como podemos ver la situación es análoga para los otros dos campos vectoriales .

■

En otro ejemplo que estudiemos quedará más claro , como obtener los campos invariantes a izquierda .

TEOREMA 1.6. La métrica $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. invariante por traslación izquierda .

DEMOSTRACION

■

§ 2.

El grupo de Heinsenberg.

Consideraremos ahora otro importante grupo que por simplicidad llamaremos Nil , abreviación de Nilpotente. También se le conoce como grupo de Heinsenberg y que a saber está dado por el conjunto

$$\mathrm{Nil} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : x,y,z \in \mathbb{R} \right\}.$$

TEOREMA 2.1. Nil es un grupo de Lie .
Este grupo corresponde al álgebra de Lie descrita en el teorema 4.6. del capítulo 1.
DEMOSTRACION
Se puede considerar la multiplicación usual de matrices y así podemos ver que el elemento neutro es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

también se deduce que el elemento inverso de $\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es

$$\begin{bmatrix} 1 & -x & zx - y \\ 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tenemos ahora la afirmación,

Nil es una variedad diferenciable . Para ello se puede considerar la carta canónica que está definida por la función

$$\phi : \mathrm{Nil} \longrightarrow \mathbb{R}^3 ,$$

$$\phi \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (x,y,z) ,$$

que como se puede ver el dominio es la totalidad de Nil , asi que el cambio de coordenas es la identidad y por lo tanto el jacobiano de cambio de coordenadas existe .
Tenemos pues que Nil es una variedad diferenciable nos faltaría

por demostrar que la operación es diferenciable, y efectivamente , como

$$\mathcal{O}\ ((x,y,z),(u,v,w)) = (x+u\ ,\ v+xw+y\ ,\ w+z)\ ,$$

entonces se sigue que el jacobiano es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ w & 0 & 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = d\mathcal{O}\ .$$

Así , queda pues demostrado que Nil es un grupo de Lie . ■

Del resultado anterior tenemos el siguiente ;

COROLARIO Nil es difeomorfo a $\mathbb{R}^3$.

TEOREMA 2.2. El álgebra de Lie de Nil está dada por el conjunto

$$\mathcal{N}il = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$$

DEMOSTRACION

Consideremos cualquier curva en Nil , es decir

$$\gamma : I \longrightarrow \text{Nil}.$$

definida por

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} 1 & x(t) & y(t) \\ 0 & 1 & z(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde x,y,z son funciones continuamente diferenciables . Derivando tenemos

$$\gamma\ '(0) = \begin{bmatrix} 0 & x'(0) & y'(0) \\ 0 & 0 & z'(0) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

asi que , de este modo

$$T_e(\text{Nil}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\},$$

COROLARIO Las constantes de estructura son 0,0,1.

Como podemos ver una base para este espacio está dada por el conjunto

$$\beta = \left\{ X=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Y=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Z=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Se tiene asi

$$\left[X , Y \right] = 0 ,$$

$$\left[Y , Z \right] = 0 , \qquad \left[X , Z \right] = Y .$$

TEOREMA 2.3. Los campos invariantes a izquierda del grupo de Lie Nil están dados por

$$\frac{\partial}{\partial x} , \quad \frac{\partial}{\partial y} , \quad \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial y} .$$

DEMOSTRACION

Evidentemente estamos trabajando en la carta global de Nil. Para obtener estos campos obsérvemos el jacobiano de Nil . Para ver que , efectivamente son invariantes a izquierda ya sabemos que Nil difeomorfo $\mathbb{R}^3$ pero con otra operación distinta de la suma es decir la inducida por la multiplicación de matrices de los elementos típicos de Nil . De este modo la traslación izquierda sobre el grupo de Heinserberg está dada por

$$L_A(u,v,w) = (u + a , v + aw + b , w + c) ,$$

donde hemos identificado a la matriz A con (a,b,c) via el difeomorfismo que vimos arriba .

Tenemos pues que la diferencial de ésta traslación esta dada por :

$$dL_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

con lo que las identificaciones

$$\frac{\partial}{\partial x} = (1,0,0) , \qquad \frac{\partial}{\partial y} = (0,1,0) , \quad x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} = (0,x,1),$$

producen los campos de acuerdo a la definición

$$dL_A X = X(L_A(x,y,z)) .$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} = X(x + a , y + az + c , z + c),$$

$$= (0, x + a , 1),$$

que era lo que esperabamos .

Podemos identificar los campos invariantes a izquierda por

$$\frac{\partial}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \qquad x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

■

TEOREMA 2.4. La métrica $ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - xdy)^2$, es invariante por traslación izquierda en Nil.

DEMOSTRACION

Basta observar que las traslaciones izquierdas son isometrías . ■

§ 3.

El grupo $\mathrm{Afin}^+(\mathbb{R})\times\mathbb{R}$.

Ya sabemos que $\mathrm{Afin}^+(\mathbb{R})$ es un grupo de Lie, también sabemos que también $\mathbb{R}$ lo es, de modo que es fácil demostrar el:

TEOREMA 3.1. $\mathrm{Afin}^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ es un grupo de Lie.
Este grupo corresponde al álgebra de Lie descrita en el teorema 4.8. del capítulo 1.
DEMOSTRACION
Se puede considerar la operación producto directo de grupos y la carta producto de las cartas de las variedades $\mathrm{Afin}^+(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}$, de esta forma $\mathrm{Afin}^+(\mathbb{R})$ es un grupo de Lie.

TEOREMA 3.2. $\mathrm{Afin}^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^3$.
DEMOSTRACION
■

TEOREMA 3.3. La función $R\colon \mathrm{Afin}^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to GL(4,\mathbb{R})$ definida por

$$R(ax+b,t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

es una representación del grupo $\mathrm{Afin}^+(\mathbb{R})\times\mathbb{R}$.
DEMOSTRACION
Este es un ejercicio de rutina.
■

TEOREMA 3.4. El álgebra de Lie está dada por

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : x,y,z\in\mathbb{R} \right\}.$$

DEMOSTRACION
Analogamente a como se obtuvo para Nil.
COROLARIO Las constantes de estructura son 1,0,0.
DEMOSTRACION
Basta elegir una base del álgebra de Lie anterior y calcular los conmutadores de base.
■
TEOREMA 3.5. Los campos invariantes a izquierda están dados por

$$y\frac{\partial}{\partial x}\ ,\ y\,\frac{\partial}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial}{\partial z}.$$

donde (x,y,z) son coordenadas para el producto $\mathrm{Afin}^+(\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ de acuerdo al teorema 1.19. del capítulo I.

DEMOSTRACION

Basta observar que las trasformaciones izquierdas en $Afin^{+}(\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ son composición de traslaciones izquierdas en $Afin^{+}(\mathbb{R})$ y traslaciones izquierdas en $\mathbb{R}$.

TEOREMA 3.6. La métrica $ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2) + dz^2$ es una métrica invariante por traslación izquierda en $Afin^{+}(\mathbb{R})\times\mathbb{R}$.

DEMOSTRACION

La métrica es el producto de métricas invariantes izquierdas en $Afin^{+}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}$. ■

§ 4.

El grupo de isometrías del plano.

Aquí estudiaremos otro grupo muy importante , que a saber , es el grupo de isometrías del plano , es decir de $\mathbb{R}^2$, que notaremos por el símbolo $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$, algunos autores llaman a este grupo los movimientos rígidos del plano.

TEOREMA 4.1. El grupo de isometrías del plano que preservan la orientación esta definido por el conjunto

$$\left\{ f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = (x\cos\zeta + y\sin\zeta + a, -x\sin\zeta + y\cos\zeta + b) \right\}.$$

DEMOSTRACION

Consideremos la métrica riemanniana canónica en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Además siempre estaremos en el sistema de coordenadas canónico del plano . Por la propiedad que tiene una isometría tenemos que si la función $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un difeomorfismo del plano , tenemos que se satisface la relación

$$g_{\phi(p)}\left(d\phi \frac{\partial}{\partial x_i} , d\phi \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = g_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i} , \frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

En este problema tenemos la base del espacio tangente canónica definida como

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial y} \right\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} , \frac{\partial}{\partial x_2} \right\} ,$$

si además suponemos que las componentes del difeomorfismo ϕ están dadas por

$$\phi(x,y) = (f(x,y) , h(x,y)),$$

se sigue que la diferencial es

$$d\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix} ,$$

y ahora, identificando los vectores básicos tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x} = (1,0) , \qquad \frac{\partial}{\partial y} = (0,1).$$

De este modo tenemos la siguiente serie de identidades que darán origen a un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que es difícil de resolver .

$$d\phi \frac{\partial}{\partial x} (g_{ij}) \, d\phi \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (g_{ij}) \frac{\partial}{\partial x}.$$

De aquí desglosando

$$g_{\phi(p)}(d\phi \frac{\partial}{\partial x} , d\phi \frac{\partial}{\partial x}) = 1,$$

$$g_{\phi(p)}(d\phi \frac{\partial}{\partial y} , d\phi \frac{\partial}{\partial y}) = 1,$$

$$g_{\phi(p)}(d\phi \frac{\partial}{\partial x} , d\phi \frac{\partial}{\partial y}) = 0.$$

Es decir , en otras palabras

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0.$$

Este sistema de ecuaciones en derivadas parciales tiene por soluciones

$$f(x,y) = x \cos\zeta + y \sin\zeta + a ,$$
$$h(x,y) = -x \sin\zeta + y \cos\zeta + b ,$$

donde $\zeta ,a,b \in \mathbb{R}$.

Se puede ver que $\phi(x,y)$ son rotaciones , traslaciones ó composición de ellas para ζ ,a,b elegidos de manera conveniente .
Inversamente si $\phi:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una isometría que preserva orientación y $\phi(0)=0$ entonces es posible mostrar que ϕ es una trasformación lineal y ortogonal de donde es una rotación . Si $\phi(0)\neq 0$ entonces componiendo con una traslación adecuada ϕT fija el origen y el resultado se sigue . $\blacksquare$

Consideremos la cubriente universal de $Iso^{+}(\mathbb{R}^2)$ dada por

$$\left\{ \begin{bmatrix} \cos\zeta & \sin\zeta & 0 & a \\ -\sin\zeta & \cos\zeta & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \zeta, a, b \in \mathbb{R} \right\} = \widetilde{Iso^{+}(\mathbb{R}^2)}$$

TEOREMA 4.2. $\widetilde{Iso^{+}(\mathbb{R}^2)}$ es un grupo de Lie.
Este grupo corresponde al álgebra de Lie descrita en el teorema 4.9. del capítulo 1 con matriz asociada $\left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.
DEMOSTRACION

Se puede ver que bajo multiplicación de matrices este conjunto deviene en un grupo. Para ver que es variedad diferenciable podemos considerar la carta

$$c:\widetilde{Iso^{+}(\mathbb{R}^2)} \to \mathbb{R}^3,$$

$$c(\tilde{f}) = (\zeta, a, b) \ , \ \tilde{f} \in \widetilde{Iso^{+}(\mathbb{R}^2)}.$$

Identificando $\widetilde{Iso^{+}(\mathbb{R})}$ con $\mathbb{R}^3$ mediante ésta carta tenemos que $\mathbb{R}^3$ es un grupo con la operacion

$$\Theta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 ,$$

$$\Theta\left[\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} x'\cos z + y'\sin z + x \\ -x'\sin z + y'\cos z + y \\ z + z' \end{bmatrix}.$$

Podemos encontrar que el jacobiano asociado que es

$$\begin{vmatrix} -x'\cos\zeta - y'\sin\zeta & 0 & 0 & 0 & \sin\zeta & \cos\zeta \\ -x'\sin\zeta + y'\cos\zeta & 1 & 0 & 0 & \cos\zeta & -\sin\zeta \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = d\Theta .$$

Entonces el jacobiano existe y por lo tanto el conjunto $\widetilde{Iso^{+}(\mathbb{R}^2)}$ es un grupo de Lie . Resultado que también se puede deducir de que $\widetilde{Iso^{+}(\mathbb{R}^2)}$ es un subgrupo cerrado de $GL(4,\mathbb{R})$, sin embargo usaremos $d\Theta$ para hacer algunos cálculos de la estructura de $\widetilde{Iso^{+}(\mathbb{R})}$. ∎

TEOREMA 4.4.. El álgebra de Lie de $\overrightarrow{\mathrm{Is\dot{o}}}(\mathbb{R}^2)$ está dada por el espacio vectorial

$$\overrightarrow{\mathfrak{iso}}(\mathbb{R}^2) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & c & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$$

DEMOSTRACION

Consideremos cualquier curva en el grupo $\overrightarrow{\mathrm{Iso}}(\mathbb{R}^2)$ entonces se tiene

$$\gamma : I \to \overrightarrow{\mathrm{Is\dot{o}}}(\mathbb{R}^2) ,$$

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos(\zeta(t)) & \sin(\zeta(t)) & 0 & x(t) \\ -\sin(\zeta(t)) & \cos(\zeta(t)) & 0 & y(t) \\ 0 & 0 & 1 & \zeta(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

derivando y evaluando en t=0 obtenemos

$$\gamma '(0) = \begin{bmatrix} -\zeta'(0)\sin(\zeta(0)) & \zeta'(0)\cos(\zeta(0)) & 0 & x'(0) \\ -\zeta'(0)\cos(\zeta(0)) & -\zeta'(0)\sin(\zeta(0)) & 0 & y'(0) \\ 0 & 0 & 0 & \zeta(0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tenemos la condición

$$\gamma(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

lo que implica

$$\zeta(0) = x(0) = y(0) = 0 \quad ,$$

de este modo llegamos al resultado requerido , es decir

$$T_e(\overrightarrow{\mathrm{Is\dot{o}}}(\mathbb{R}^2)) = \overrightarrow{\mathfrak{iso}}(\mathbb{R}^2). \qquad \blacksquare$$

TEOREMA 4.6. Los campos vectoriales invariantes a izquierda de $\overrightarrow{\mathrm{Is\dot{o}}}(\mathbb{R}^2)$ están dados por .

$$X = \cos(z)\,\frac{\partial}{\partial x} - \sin(z)\,\frac{\partial}{\partial y},$$

$$Y = \sin(z)\,\frac{\partial}{\partial x} + \cos(z)\,\frac{\partial}{\partial y}.$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial z}\ .$$

DEMOSTRACION

Para la obtención de estos campos vectoriales se puede observar la operación del teorema de arriba .Otra cosa que tenemos que observar es que la traslación izquierda sobre $\widetilde{Iso^{+}(\mathbb{R}^2)}$ está definida por

$$L_A : \widetilde{Iso^{+}(\mathbb{R}^2)} \to \widetilde{Iso^{+}(\mathbb{R}^2)},$$

$$L_A\left[\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} x\cos(c) + y\sin(c) + a \\ -x\sin(c) + y\cos(c) + b \\ z + c \end{bmatrix}.$$

Aquí , hemos identificado la matriz A correspondiente a el vector

(a,b,c).

Continuando tenemos que la diferencial de ésta función en la carta canónica está dada por

$$dL_A = \begin{bmatrix} \cos(c) & \sin(c) & 0 \\ -\sin(c) & \cos(c) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

es decir si identificamos

$$X = (\ \cos(z), -\sin(z)\ ,\ 0\ ),$$

$$Y = (\ \sin(z),\ \cos(z)\ ,\ 0\ ),$$

$$Z = (\ 0,0,1)\ ,$$

tenemos , por ejemplo que la condición de invarianza se cumple ya que

$$\begin{bmatrix} \cos(c) & \sin(c) & 0 \\ -\sin(c) & \cos(c) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(z) \\ \cos(z) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(z+c) \\ \cos(z+c) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

los otros casos son análogos . $\blacksquare$
Estudiaremos ahora el paréntesis de Lie de esta álgebra de Lie
Tenemos pues el resultado
.
LEMA 4.1. Las constantes de estructura son 0,-1,-1. De donde la matriz asociada a esta álgebra de Lie de acuerdo al teorema 4.9. del capítulo I es $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

DEMOSTRACION

Calcularemos los paréntesis estos campos vectoriales, de este modo se tiene

$$-\left[X,Z\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left(\cos(z)\frac{\partial}{\partial x} - \sin(z)\frac{\partial}{\partial y}\right) - \left(\cos(z)\frac{\partial}{\partial x} - \sin(z)\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= \cos(z)\frac{\partial^2}{\partial z\partial x} - \sin(z)\frac{\partial}{\partial x} - \sin(z)\frac{\partial^2}{\partial z\partial y} - \cos(z)\frac{\partial}{\partial y} -$$

$$- \cos(z)\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} + \sin(z)\frac{\partial^2}{\partial y\partial z},$$

$$= Y.$$

De aquí , podemos ver que una constante de estructura es -1.
De igual manera

$$\left[Y,Z\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sin(z)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(z)\frac{\partial}{\partial y}\right) -$$

$$- \left(\sin(z)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(z)\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial z}$$

es decir

$$= \sin(z)\frac{\partial^2}{\partial z\partial x} + \cos(z)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(z)\frac{\partial^2}{\partial z\partial y} - \sin(z)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$- \sin(z)\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} - \cos(z)\frac{\partial^2}{\partial y\partial z},$$

$$= X.$$

De aquí , podemos ver que otra constante de estructura es 1. Y por último podemos ver que la otra constante de estructura es cero ya que

$$[X,Y] = 0$$

Otra forma de obtener las constantes de estructura es elegir una base β del álgebra de Lie como espacio de matrices y calcular los conmutadores de matrices.

$$\beta = \left\{ X = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

$\blacksquare$

TEOREMA 4.8. Una métrica invariante a izquierda sobre $\overline{Iso^+(\mathbb{R}^2)}$ es la métrica plana $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

DEMOSTRACION

Basta observar que las diferenciales de las traslaciones izquierdas en $\overline{Iso^+(\mathbb{R}^2)}$ son isometrías de $\mathbb{R}^3$ (vease teorema 4.6.) y como estamos identificando $\mathbb{R}^3$ con $\overline{Iso^+(\mathbb{R}^2)}$ el resultado se sigue .

$\blacksquare$

§5.

El grupo de isometrías del espacio de Minkowsky.

Estudiaremos ahora un espacio muy importante que llamaremos el espacio de Minkowsky .
Aquí entenderemos por espacio de Minkowsky el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con la siguiente métrica semiriemanniana , a saber

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

tenemos pues , el primer resultado relacionado con este espacio que simbolizaremos

$$M = [\mathbb{R}^2, (g_{ij})]$$

TEOREMA 5.1..Los movimientos rígidos de M y que preservan la orientación están dados por el siguiente conjunto que llamaremos E(1,1) :

$$\Big\{ f : M \to M \mid f(x,y) = (x\cosh(\zeta) + y\sinh(\zeta) + a \ ,$$
$$-x\sinh(\zeta) + y\sinh(\zeta) + b) \text{ donde } \zeta, a, b \in \mathbb{R} \Big\}$$

DEMOSTRACION

Consideremos cualquier difeomorfismo con las componentes siguientes , es decir

$$\phi(x,y) = (f(x,y), g(x,y)),$$

se tiene entonces

$$df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix},$$

identificando los vectores básicos asociados al sistema de coordenadas canónico de $\mathbb{R}^2$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x} = (1,0), \qquad \frac{\partial}{\partial y} = (0,1) \ ,$$

entonces

$$d\phi \frac{\partial}{\partial x} (g_{ij}) \, d\phi \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(g_{ij}) \frac{\partial}{\partial x},$$

$$d\phi \frac{\partial}{\partial y} (g_{ij}) \, d\phi \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(g_{ij}) \frac{\partial}{\partial y},$$

$$d\phi \frac{\partial}{\partial x} \, (g_{ij}) \, d\phi \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (g_{ij}) \frac{\partial}{\partial y}.$$

o, en otras palabras , hemos llegado al siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales , que , como ya habiamos dicho representa un problema salvaje .

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

el sistema anterior tiene por soluciones efectivamente a

$$f(x,y)= x\cosh(\zeta) + y\sinh(\zeta) + a,$$

$$g(x,y)=-x\sinh(\zeta) + y\cosh(\zeta) + b.$$

Inversamente si $\phi:M \longrightarrow M$ es una isometría que preserva orientación y $\phi(0)=0$ entonces es posible mostrar que ϕ es una trasformación lineal que preserva el producto punto semiriemnniano y la orientación debe de ser un elemento de $O^{+}(1,1)$, ver teorema 1.9. Si $f(0)\neq 0$ entonces componiendo con una traslación adecuada ϕT fija el origen y el resultado se sigue.

■

Análogamente a como se hizo para las isometrías de $\mathbb{R}^2$ podemos considerar la cubriente universal de $E(1,1)$ en forma matricial como

$$E(1,1)=\left\{\begin{bmatrix} \cosh(\zeta) & \sinh(\zeta) & 0 & a \\ -\sinh(\zeta) & \cosh(\zeta) & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a,b,c\in\mathbb{R} \right\}.$$

De aquí podemos observar que el grupo de matrices

$$\begin{bmatrix} \cosh(\zeta) & \sinh(\zeta) \\ -\sinh(\zeta) & \cosh(\zeta) \end{bmatrix},$$

es isomorfo como grupo de Lie a $O^{+}(1,1)$ y como este grupo es isomorfo a $\mathbb{R}$. Que a su vez admite un isomorfismo de la forma

$$\zeta \longrightarrow \begin{bmatrix} e^{-\zeta} & 0 \\ 0 & e^{\zeta} \end{bmatrix}.$$

Entonces tenemos un isomorfismo de grupos tal que identifica

$$\begin{bmatrix} \cosh(\zeta) & \sinh(\zeta) \\ -\sinh(\zeta) & \cosh(\zeta) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} e^{-\zeta} & 0 \\ 0 & e^{\zeta} \end{bmatrix}.$$

Con todo lo anterior y para simplificar los cálculos podemos hacer

$$E(1,1) = \left\{ \begin{bmatrix} e^{-z} & 0 & 0 & x \\ 0 & e^{z} & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; x,y,z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es posible también usar matrices de la forma

$$\begin{bmatrix} e^{-kz} & 0 \\ 0 & e^{kz} \end{bmatrix} ,$$

para $k \in \mathbb{R}-\{0\}$ fijo , obteniendo con ello una familia de grupos de Lie , por simplicidad nos restringimos a usar k=1.

TEOREMA 5.3. E(1,1) es un grupo de Lie .
Este grupo corresponde al álgebra de Lie descrita en el teorema 4.9. del capítulo 1. Con matriz asociada $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

DEMOSTRACION

Se puede considerar la operación de producto de matrices y de esta manera podemos obtener que este conjunto deviene en un grupo .

E(1,1) es una variedad diferenciable .

Consideremos la función

$$\phi : E(1,1) \to \mathbb{R}^3,$$

definida por

$$\phi \begin{bmatrix} e^{-z} & 0 & 0 & x \\ 0 & e^{z} & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (x,y,z),$$

se puede ver que el dominio de esta carta es la totalidad de E(1,1) , asi que el cambio de coordenadas es de clase $\mathcal{C}^{\infty}$. De esta manera estamos próximos a demostrar que E(1,1) es un grupo de Lie.
Consideremos el siguiente resultado .

La operación es diferenciable ya que

$$\Theta : E(1,1) \times E(1,1) \longrightarrow E(1,1) ,$$

$$\Theta(X,Y) = XY .$$

Pues si

$$X = \begin{bmatrix} e^{-c} & 0 & 0 & a \\ 0 & e^{c} & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} e^{-c'} & 0 & 0 & a' \\ 0 & e^{c'} & 0 & b' \\ 0 & 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\Theta\,(X,Y) = \begin{bmatrix} e^{-(c+c')} & 0 & 0 & x + x'e^{-c} \\ 0 & e^{c+c'} & 0 & y + y'e^{c} \\ 0 & 0 & 1 & c + c' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que compuesta con la carta φ es φ^{-1} ,de donde , obtenemos la diferencial de la operación es

$$dF = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x'e^{z} & e^{z} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -y'e^{-z} & 0 & e^{-z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces el jacobiano existe , por lo tanto podemos concluir , que $E(1,1)$ es un grupo de Lie .

■

TEOREMA El álgebra de Lie de $E(1,1)$ está dada por (visto como en el grupo $GL(4,\mathbb{R})$)

$$\mathfrak{e}(1,1) = \left\{ \begin{bmatrix} -c & 0 & 0 & a \\ 0 & c & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$$

DEMOSTRACION

Se puede ,nuevamente considerar cualquier curva en $E(1,1)$ es decir

$$\gamma : I \to E(1,1),$$

definida por

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} e^{-z(t)} & 0 & 0 & x(t) \\ 0 & e^{z(t)} & 0 & y(t) \\ 0 & 0 & 1 & z(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

derivando tenemos el resultado deseado si consideramos la condición de que

$$\gamma(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

de este modo se tiene

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0 . \qquad \blacksquare$$

Como corolario tenemos el resultado que sigue .
TEOREMA 5.8. Los campos vectoriales invariantes a izquierda de $E(1,1)$ están dados por

$$X = e^{-z} \frac{\partial}{\partial x} ,$$

$$Y = e^{z} \frac{\partial}{\partial y} ,$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial z} .$$

DEMOSTRACION .

Se puede ver que la traslación izquierda está definida por

$$L_A : E(1,1) \longrightarrow E(1,1),$$

$$((a,b,c),(x,y,z)) \to (a + x\, e^{-c} , b + y\, e^{c} , z + c),$$

podemos ver que la diferencial de ésta traslación es

$$dL_A = \begin{bmatrix} e^{-c} & 0 & 0 \\ 0 & e^{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos ver ahora

$$dL_A E(x,y,z) = E(a + x\, e^{-c} , b + y\, e^{c}, z + c),$$

como por ejemplo si $i = 2$, entonces

$$\begin{bmatrix} e^{-c} & 0 & 0 \\ 0 & e^{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2-c} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

■

Ahora podemos ver el siguiente resultado y que es , básicamente calcular el álgebra de Lie de $E(1,1)$.

LEMA 5.1. Las constantes de estructura del álgebra de Lie de $E(1,1)$ son 1 , -1 , 0 .

DEMOSTRACION

Los paréntesis de estos campos son

$$[Z,X] = \frac{\partial}{\partial z}(e^{z}\frac{\partial}{\partial x}) - e^{z}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial z}) ,$$

$$= e^{z}\frac{\partial}{\partial x} + e^{z}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} - e^{z}\frac{\partial^2}{\partial z\partial x} ,$$

$$= X,$$

$$[-Y,Z] = \frac{\partial}{\partial z}(e^{-z}\frac{\partial}{\partial y}) - e^{-z}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial z}),$$

$$= Y .$$

$$[X,Y] = 0 .$$

Ahora obtendremos las identificaciones con matrices que corresponden a estos campos vectoriales .

Consideremos la siguiente base para el espacio vectorial subyacente a el álgebra de Lie $\mathcal{E}(1,1)$.

$$\beta = \left\{ Z=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, -Y=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Calculando los conmutadores tenemos otra forma de hallar las constantes de estructura .
Se puede ver también que la base X,Y,Z produce el álgebra de Lie generada por $\{ X, Y, Z \}$ con conmutadores $[X,Y]=0$, $[X,Z]=-X$, $[Y,Z]=Y$ que es la dada en el teorema 4.9. del capítulo I para la matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. $\blacksquare$

TEOREMA 5.9. La métrica $ds^2 = e^{-2z}\, dx^2 + e^{2z}\, dy^2 + dz^2$ es invariante por traslación izquierda .
DEMOSTRACION
Basta observar que las traslaciones izquierdas son isometrías. $\blacksquare$

§ 6.

El grupo especial lineal.

Nos referimos al grupo especial lineal que se define como

$$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ x \in GL(2,\mathbb{R}) \ ; \ \det(x) = 1 \right\}.$$

El resultado que surge a primera vista es:

TEOREMA 6.1. $SL(2,\mathbb{R})$ es un grupo de Lie .
Este grupo corresponde al álgebra de Lie descrita en el teorema 4.11 del capítulo 1.

DEMOSTRACION

Se puede ver esto ya que el determinante del producto de dos matrices de determinante 1 es también 1 . de donde $SL(2,\mathbb{R})$ es un subgrupo de $GL(2,\mathbb{R})$.

$SL(2,\mathbb{R})$ es una variedad diferenciable .

Consideremos la función

$$\det \ : GL(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \ ,$$

Entonces si consideramos la imagen inversa de $1 \in \mathbb{R}$, es decir

$$\det^{-1}(1) = SL(2,\mathbb{R}) \ ,$$

solo falta probar que $1 \in \mathbb{R}$ es un valor regular , pero esto es inmediato porque

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc \ ,$$

y en las cartas usuales de $GL(2,\mathbb{R})$ y de $\mathbb{R}$ se puede ver que la representación coordenada de det

$$F\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = ad - bc \ .$$

que tiene por diferencial a

$$F = [d,-c,-b,a \ ],$$

que como podemos ver tiene rango uno , ya que a,b,c,d $\in$ $\mathbb{R}$ no son simultáneamente iguales a cero .Se sigue pues que 1 es un valor regular de det .Luego, SL(2,$\mathbb{R}$) es una subvariedad de GL(2,$\mathbb{R}$).
Para mostrar que la operación es $\mathscr{C}^{\infty}$ calculamos explícitamente su expresión en una carta . Este cálculo nos será útil para obtener los campos invariantes izquierdos. Consideremos la función

$$\phi : A \subseteq SL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{+}\times \mathbb{R}^{2},$$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & \dfrac{1+yz}{x} \end{bmatrix} \longrightarrow (x,y,z),$$

donde A es un abierto en SL(2,$\mathbb{R}$) tal que sus elementos pueden escribirse como antes con $x > 0$. Sea

$$\Theta : (\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}^{2})\times(\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}^{2}) \longrightarrow \mathbb{R}^{+}\times \mathbb{R}^{2},$$

$$\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) \longrightarrow \begin{bmatrix} ax + bz \\ ay + b(1+yz)/x \\ cx + z(1+bc)/a \end{bmatrix},$$

entonces el jacobiano es

$$\begin{bmatrix} x & z & 0 & a & 0 & b \\ y & 1+yz/x & 0 & -b(1+yz)/x^{2} & a & by/x \\ z(1+bc)/a^{2} & c/a & x & c & 0 & (1+bc)/a \end{bmatrix},$$

entonces la operación es $\mathscr{C}^{\infty}$ y SL(2,$\mathbb{R}$) es un grupo de Lie.

∎

COROLARIO SL(2,$\mathbb{R}$) es cerrado en GL(2,$\mathbb{R}$).
DEMOSTRACION
Se sigue de que SL(2,$\mathbb{R}$) es la imagen inversa del cerrado {1} bajo la función determinante ,que como se sabe es continua.

Una propiedad interesante es que SL(2,$\mathbb{R}$) no es simplemente conexo. Pero por simplicidad trabajaremos con SL(2,$\mathbb{R}$) y no con su cubriente universal.

TEOREMA 6.2. El álgebra de Lie de $SL(2,\mathbb{R})$ está dada por el conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\} = sl(2,\mathbb{R}).$$

DEMOSTRACION

Consideremos cualquier curva en $SL(2,\mathbb{R})$ entonces , se tiene

$$\gamma : I \to SL(2,\mathbb{R}),$$

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{bmatrix},$$

además

$$a(t)\, d(t) - c(t)\, b(t) = 1,$$

derivando esta relación

$$a'(0)d(0) + d'(0)a(0) - c'(0)b(0) - b'(0)c(0) = 0,$$

y como se satisface la condición

$$\gamma(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

se puede ver que

$$a(0) = 1,$$

$$b(0) = 0 ,$$

$$c(0) = 0 ,$$

$$d(0) = 1 ,$$

de modo que , efectuando operaciones ,

$$a'(0) + d'(0) = 0,$$

en otras palabras tenemos que , el álgebra de Lie tiene la forma

$$sl(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$$

■

COROLARIO Las constantes de estructura son 1,1 -1.

DEMOSTRACION

Pues si elegimos la base canónica de $sl(2,\mathbb{R})$.

$$\left\{X=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},Y=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},Z=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\}=\beta,$$

se tiene que

$$[X,Y]=2Y,\quad [X,Z]=-2Z,\quad [Y,Z]=X.$$

Haciendo un cambio de base $X \longrightarrow -\frac{1}{2}X$,

$$Y \longrightarrow Y,$$

$$Z \longrightarrow Z,$$

se obtienen constantes -1,1,1, que corresponde al segundo caso de álgebra de Lie en el teorema 4.11. en el capítulo I.

■

TEOREMA 6.3. Los campos invariantes a izquierda del grupo de Lie están dados por

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z},$$

$$Y = x\frac{\partial}{\partial y},$$

$$Z = y\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{1+yz}{x}\right)\frac{\partial}{\partial z}.$$

DEMOSTRACION

Si se observa la diferencial de la operación

$$\odot:(\mathbb{R}^{+}x\mathbb{R}^{2})x(\mathbb{R}^{+}x\mathbb{R}^{2}) \longrightarrow \mathbb{R}^{+}x\mathbb{R}^{2},$$

definida páginas arriba, se obtiene el resultado.

Tenemos que la diferencial de la traslación izquierda está dada por

$$dL_{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & b\\ -b(1+yz)/x^{2} & (bz/x)+a & by/x\\ c & 0 & (1+bc)/a\end{bmatrix}.$$

Ahora con las identificaciones

$$x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} = (x,-y,z),$$

$$x\frac{\partial}{\partial y} = (0,x,0),$$

$$y\frac{\partial}{\partial x} + (1+yz)/x\,\frac{\partial}{\partial z} = \left(y\ ,\ 0\ ,\ \frac{1+yz}{x}\right).$$

se puede observar que

$$dL_A\begin{bmatrix} x \\ -y \\ z \end{bmatrix} = X(L_A(x,y,z)).$$

Podemos identificar los campos invariantes a izquierda por

$$x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$x\frac{\partial}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad y\frac{\partial}{\partial x} + (1+yz)/x\,\frac{\partial}{\partial z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

TEOREMA 6.4. Una métrica invariante a izquierda sobre $SL(2,\mathbb{R})$ está dada por

$$ds^2 = \frac{dx^2}{x^2} + \frac{(xdz - zdx)^2}{(1+yz)^2} + \left(\frac{dy}{x} + y\frac{dx}{x^2} - \frac{y}{x}\frac{(xdz-zdx)}{1+yz}\right)^2$$

DEMOSTRACION

Basta observar que las traslaciones izquierdas son isometrías .

■

§ 7 .

El grupo S^3.

El último grupo que necesitamos es la esfera S^3.

TEOREMA 7.1. S^3 es un grupo de Lie .
Este grupo corresponde al álgebra de Lie descrita en el teorema 4.11. del capítulo I primer caso con todas las constantes de estructura 1.

DEMOSTRACION

Ver el teorema 1.4. del capítulo I.

Para mayor simplicidad en los cálculos , análogamente a como lo hicimos en $SL(2,\mathbb{R})$, no trabajaremos con el grupo simplemente conexo S^3 sino con $SO(3)$ que tiene las mismas propiedades locales como grupo de Lie . Este grupo se define como

$$SO(3) = \left\{ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid f \text{ es lineal } ; \det(f)=1 \ ; ff^t = I \right\},$$

o de otra manera equivalente que se presta más fácil al cálculo ;

$$SO(3) = \left\{ x \in GL(3,\mathbb{R}) \ : \ \det(x) = 1 \ ; \ x^t x = I \right\}.$$

el primer resultado que se puede ver es;

TEOREMA 7.2. $SO(3)$ es un grupo de Lie.

DEMOSTRACION

Se puede ver que este conjunto bajo la multiplicación usual de matrices es un grupo porque
si $x,y \in SO(3)$ entonces

$$\det(xy) = 1,$$

$$xy(xy)^t = I.$$

Para dar una carta a $SO(3)$ consideremos los siguintes elementos típicos de $SO(3)$ que a saber están definidos por

$$\begin{vmatrix} \cos\zeta \cos\xi - \cos\alpha \sin\xi \sin\zeta & -\cos\zeta \sin\xi - \cos\alpha \cos\xi \sin\zeta & \sin\zeta \sin\alpha \\ \sin\zeta \cos\xi + \cos\alpha \sin\xi \cos\zeta & -\sin\zeta \sin\xi + \cos\alpha \cos\xi \cos\zeta & -\cos\zeta \sin\alpha \\ \sin\alpha \sin\xi & \sin\alpha \cos\xi & \cos\alpha \end{vmatrix} = M$$

La matriz anterior la obtuvimos del teorema de los ángulos Eulerianos , que se demuestra en geometría elemental.
Cualquier rotación es el producto de las siguientes trasformaciones lineales .

$$\begin{bmatrix} \cos\zeta & -\sin\zeta & 0 \\ \sin\zeta & \cos\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \cos\xi & -\sin\xi & 0 \\ \sin\xi & \cos\xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Consideremos la función

$$c : A \subseteq SO(3) \longrightarrow (-\pi,\pi)^3 \subseteq \mathbb{R}^3,$$

definida por

$$c(M) = (\alpha,\zeta,\xi),$$

donde M es elemento de A si puede escribirse como arriba para $\alpha,\zeta,\xi \in (-\pi,\pi)$,como se puede ver ésta carta tiene como dominio a la identidad de $SO(3)$ y el cambio de cooordenada es continuamente diferenciable.

Solo restaría por demostrar que la operación del grupo es compatible con la de variedad diferenciable , pero esto es inmediato de calcularlo explícitamente.

■

Recordemos que

$$SU(2) = \{x \in GL(2,\mathbb{C}) ; xx^* = I \text{ , } \det(x) = 1 \},$$

donde x^* significa conjugar y trasponer a la matriz x.

TEOREMA 7.3. $S^3 \cong SU(2)$ como grupos .

DEMOSTRACION

Se puede considerar el isomorfismo

$$\phi : S^3 \longrightarrow SU(2),$$

$$\phi(x + iy + jz + kw) = \begin{bmatrix} x + iy & -z - iw \\ z + iw & x - iy \end{bmatrix},$$

donde hemos usado la identificación de un elemento de grupo de Hamilton de norma 1 a un elemento de la esfera de dimensión 3.

■

TEOREMA 7.4. $\dfrac{S^3}{\langle +Id, -Id \rangle} \cong SO(3).$

DEMOSTRACION

Se puede considerar la función

$$\Phi : SU(2) \to SO(3),$$

sabiendo que el grupo SU(2) consta de los elementos

$$SU(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\frac{\zeta}{2}) \exp(i(\alpha + \zeta)/2) & \sin(\frac{\zeta}{2}) \exp(i(\alpha - \zeta)/2) \\ i\sin(\frac{\zeta}{2}) \exp(-i(\alpha - \zeta)/2) & \cos(\frac{\zeta}{2}) \exp(-i(\alpha + \zeta)/2 \end{bmatrix} \right\}$$

definamos pues la función Φ de la manera canónica , es decir

$$\Phi(B) = A,$$

donde B es un elemento típico de SU(2) y donde A es un elemento típico de SO(3).

Fácilmente , con un poco de álgebra se puede ver que el núcleo de esta función es

$$\ker(\Phi) = \left\{ +I , -I \right\}.$$

y por un conocido teorema de álgebra

$$S^3/\ker(\Phi) = SU(2)/\ker(\Phi) \cong SO(3),$$

■

TEOREMA 7.5. SO(3) es compacto.

DEMOSTRACION

Este grupo se puede ver como

$$SO(3) = SL(3) \cap O(3),$$

por lo que si demostramos que O(3) es cerrado en $GL(3,\mathbb{R})$, tendriamos que SO(3) es cerrado en $GL(3,\mathbb{R})$ ya que sabemos que SL(3) es cerrado en $GL(3,\mathbb{R})$, pero esto es fácil de ver si consideramos la función

$$f : GL(3,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(3,\mathbb{R}),$$

$$X \longrightarrow X X^t.$$

Se puede ver que la matriz identidad es un cerrado de $GL(3,\mathbb{R})$, de modo que la imagen inversa de ella es

$$f^{-1}(I) = O(3).$$

Además fácilmente se puede ver que esta función es continua , de hecho diferenciable , de modo que $SO(3)$ es un cerrado de $GL(3,\mathbb{R})$. También se puede ver que las entradas de la matriz típica de $SO(3)$ están siempre en el intervalo cerrado $[-1,+1]$, por lo que se sigue que $SO(3)$ es acotado, y entonces se concluye que $SO(3)$ es compacto en $GL(3,\mathbb{R})$.

TEOREMA 7.6. El álgebra de Lie de Lie de $SO(3)$ está dada por el espacio vectorial

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{bmatrix} : b,c,f \in \mathbb{R} \right\} = so(3),$$

DEMOSTRACION

Consideremos cualquier curva en $SO(3)$,

$$\gamma : I \to SO(3),$$

entonces

$$\gamma(t)(\gamma(t))^t = I,$$

con la condición de que $\gamma(0) = I$.

Derivando podemos obtener

$$\gamma'(0)\,\gamma^t(0) + \gamma(0)(\gamma^t(0))' = (0),$$

es decir

$$\gamma'(0) + (\gamma^t(0))^t = (0).$$

Entonces los elementos típicos del álgebra de Lie de $SO(3)$ satisfacen la condición

$$A + A^t = 0,$$

y si ahora tenemos que $\det(\gamma(t)) = 1$, se sigue

$$\det{}'(\gamma(t))\,\gamma'(0) = 0 ,$$

de donde

$$\text{traza}(A) = 0 \in \mathbb{R}.$$

$$so(3) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{bmatrix} ; c,b,f \in \mathbb{R} \right\}.$$

■

COROLARIO Las constantes de estructura son -1,-1,1.
DEMOSTRACION
Como podemos ver , una base para este espacio vectorial , subyacente a esta álgebra de Lie es :

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$[X ,Y] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$= - Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Analogamente se sigue

$$[Y ,Z] = - X,$$

$$[X ,Z] = Y.$$

Haciendo el cambio de base

$$X \longrightarrow X,$$

$$Y \longrightarrow - Y,$$

$$Z \longrightarrow Z.$$

obtenemos constantes de estructura 1,1,1, que corresponden al primer caso de álgebra de Lie citada en el teorema 4.11. del capítulo I.

■

APENDICE.

TABLA GENERAL DE GRUPOS Y ALGEBRAS DE DIMENSION 2 Y 3.

NOMBRE $\mathbb{R}^2$.

REPRESENTACION MATRICIAL .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

ESPACIO TANGENTE EN ELEMENTO NEUTRO.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : x,y\in\mathbb{R} \right\}.$$

CONSTANTES ESTRUCTURALES.

0.

ALGEBRA DE LIE .

Abeliana.

TRASLACION IZQUIERDA.

$$L_A(x,y) = (x + a , y + b).$$

CAMPOS INVARIANTES A IZQUIERDA.

$$\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}.$$

UNA METRICA INVARIANTE POR TRASLACION IZQUIERDA.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

NOMBRE Grupo $\mathrm{Afin}^{+}(\mathbb{R})$.

REPRESENTACION MATRICIAL.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{bmatrix} \longrightarrow f(x)= ax + b. \quad a>0.$$

TOPOLOGIA.

Difeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

ESPACIO TANGENTE EN ELEMENTO NEUTRO.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{bmatrix} ; \; x,y \in \mathbb{R} \right\}.$$

CONSTANTES DE ESTRUCTURA.

$$-1.$$

ALGEBRA DE LIE.

Soluble.

TRASLACION IZQUIERDA.

$$L_A(x,y) = (b + ay \;,\; ax).$$

CAMPOS INVARIANTES A IZQUIERDA.

$$y\,\frac{\partial}{\partial x} \;, \quad y\,\frac{\partial}{\partial y}.$$

UNA METRICA INVARIANTE POR TRASLACION IZQUIERDA.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{bmatrix}.$$

NOMBRE $\mathbb{R}^3$.

REPRESENTACION MATRICIAL(CUBRIENTE UNIVERSAL).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow [x,y,z] \in \mathbb{R}^3.$$

ESPACIO TANGENTE EN EL ELEMENTO NEUTRO.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : x,y,z\in\mathbb{R} \right\}.$$

CONSTANTES ESTRUCTURALES.

0 , 0, 0 .

ALGEBRA DE LIE .

Abeliana .

TRASLACION IZQUIERDA.

$L_A:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad L_A(x,y,z)=(a + x,b + y,c + z).$

CAMPOS INVARIANTES A IZQUIERDA.

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z} \ .$$

UNA METRICA INVARIANTE POR TRASLACION IZQUIERDA .

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

NOMBRE Grupo de Heinsenberg.

REPRESENTACION MATRICIAL .
(la misma que su definición).

$$Nil = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;x,y,z\in\mathbb{R} \right\}.$$

TOPOLOGIA.
Difeomorfo a $\mathbb{R}^3$.

ESPACIO TANGENTE EN EL ELEMENTO NEUTRO.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

CONSTANTES DE ESTRUCTURA .

0 , 0 , 1 .

ALGEBRA DE LIE .

Nilpotente.

TRASLACION IZQUIERDA.

$$L_A : Nil \approx \mathbb{R}^3 \longrightarrow Nil \overset{3}{\approx} \mathbb{R} \quad .$$

$$L_A(x,y,z) = (a + x \ , \ b + y + az \ , \ z + c \ ) \ .$$

CAMPOS INVARIANTES A IZQUIERDA .

$$\frac{\partial}{\partial x} \ , \ \frac{\partial}{\partial y} \ , \ \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial y} \ .$$

UNA METRICA INVARIANTE POR TRASLACION IZQUIERDA.

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & -x & 1 + x^2 \end{bmatrix}.$$

NOMBRE Afin$^+(\mathbb{R})\times\mathbb{R}$.

REPRESENTACION MATRICIAL.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow f \in \text{Afin}^+(\mathbb{R})\times\mathbb{R}.$$

ESPACIO TANGENTE EN ELEMENTO NEUTRO.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : x,y,z\in\mathbb{R} \right\}.$$

CONSTANTES ESTRUCTURALES .

1,0,0.

ALGEBRA DE LIE.

Soluble.

TRASLACION IZQUIERDA.

$$L_A(x,y,z)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b+ay & ax & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z+c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

CAMPOS INVARIANTES A IZQUIERDA.

$$y\frac{\partial}{\partial x} \ , \ y\frac{\partial}{\partial y} \ , \ \frac{\partial}{\partial z} \ .$$

UNA METRICA INVARIANTE POR TRASLACION IZQUIERDA.

$$(g_{ij}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

NOMBRE Grupo de movimientos rígidos del Plano .

DEFINICION

Distancia en $\mathbb{R}^2$:

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) \to \left|\left| \begin{bmatrix} x - x' \\ y - y' \end{bmatrix} \right|\right|.$$

$||.||$ es la norma usual .

$$Iso(\mathbb{R}^2) = \left\{ f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ | \ || f(x,y) - f(x',y') || = ||(x-x',y-y')|| \right\}$$

$$Iso(\mathbb{R}^2) = \left\{ f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ | \ f(x,y)= A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \ ; \ A\in O(2) \right\}.$$

$O(2)$= matrices x t.q. xx^t = matriz identidad .

REPRESENTACION MATRICIAL (CUBRIENTE UNIVERSAL).

$$\begin{bmatrix} \cos\zeta & \sin\zeta & 0 & a \\ -\sin\zeta & \cos\zeta & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \quad f \in Iso^+(\mathbb{R}^2).$$

TOPOLOGIA.

Consta de dos componentes ($Iso(\mathbb{R}^2)$) conexas i.e. las isometrias que preservan la orientación y las que la invierten.

La cubriente universal i.e. las que preservan la orientación es difeomorfa a $\mathbb{R}^3$.

ESPACIO TANGENTE EN EL ELEMENTO NEUTRO .

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & c & 0 & a \\ -c & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$$

CONSTANTES DE ESTRUCTURA.

$$0 \ , -1 \ , \ -1 \ .$$

ALGEBRA DE LIE.

Soluble.

TRASLACION IZQUIERDA.

$$L_A : Iso^+(\mathbb{R}^2) \longrightarrow Iso^+(\mathbb{R}^2)$$

$$L_A(x,y,z) = \begin{bmatrix} x\cos(c) + y\sin(c) + a \\ -x\sin(c) + y\cos(c) + b \\ z + c \end{bmatrix}.$$

CAMPOS INVARIANTES POR TRASLACION IZQUIERDA.

$$\frac{\partial}{\partial z} \ , \ \cos(z)\frac{\partial}{\partial x} - \sin(z)\frac{\partial}{\partial y} \ ,$$

$$\sin(z)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(z)\frac{\partial}{\partial y} \ .$$

UNA METRICA INVARIANTE A IZQUIERDA .

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

NOMBRE Movimientos rígidos del espacio de Minkowsky.

DEFINICION.

Distancia en $\mathbb{R}^2$:

$$d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} ,$$

$$((x,y),(z,w)) \longrightarrow xz - yw.$$

El semiproducto escalar que induce esta distancia es definido por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

El espacio

$$M = [\mathbb{R}^2 , d],$$

se llama espacio de Minkowsky .

$E(1,1) = \left\{ \text{isometrías de } M \right\}$ está dado por

$$E(1,1) = \left\{ f: M \longrightarrow M \mid f(x,y) = (x\, e^{-c} + a \ , \ y\, e^{c} + b); a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

REPRESENTACION MATRICIAL (CUBRIENTE UNIVERSAL).

$$\begin{bmatrix} e^{-z} & 0 & 0 & x \\ 0 & e^{z} & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow f \in E(1,1).$$

TOPOLOGIA.

Difeomorfo a $\mathbb{R}^3$.

ESPACIO TANGENTE EN EL ELEMENTO NEUTRO .

$$\left\{ \begin{bmatrix} -z & 0 & 0 & x \\ 0 & z & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : x,y,z \in \mathbb{R} \right\}.$$

CONSTANTES DE ESTRUCTURA .

1. - 1 . 0 .

ALGEBRA DE LIE .

Soluble .

TRASLACION IZQUIERDA .

$$L_A : E(1,1) \longrightarrow E(1,1),$$

$$L_A(x,y,z) = (x\, e^{-c} + a\ ,\ y\, e^{c} + b\ ,\ z + c\ ).$$

CAMPOS INVARIANTES POR TRASLACION IZQUIERDA .

$$\frac{\partial}{\partial z}\ ,\qquad e^{-z}\frac{\partial}{\partial x}\ ,\qquad e^{z}\frac{\partial}{\partial y}.$$

UNA METRICA INVARIANTE A IZQUIERDA .

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} e^{-2z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

NOMBRE Grupo especial lineal .

DEFINICION.

$$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : ad - bc = 1\ ;\ a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}.$$

TOPOLOGIA.

Cerrado en $GL(2,\mathbb{R})$. No acotado .
En este caso no estamos usando la cubriente universal como modelo.

ESPACIO TANGENTE EN EL ELEMENTO NEUTRO .

$$\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix} : x,y,z\in\mathbb{F} \right\}.$$

CONSTANTES DE ESTRUCTURA .

2, 1 , -2 . ó bien -1,1,1.

ALGEBRA DE LIE .

Simple .

TRASLACION IZQUIERDA.

$$L_A(x,y,z) = \begin{bmatrix} ax & + & bz \\ ay & + & b(1+yz)/x \\ cx & + & z(1+bc)/a \end{bmatrix}.$$

CAMPOS INVARIANTES A IZQUIERDA.

$$x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z},$$

$$x\frac{\partial}{\partial y} ,$$

$$y\frac{\partial}{\partial x} + ((1+ yz)/x)\frac{\partial}{\partial z} .$$

UNA METRICA INVARIANTE POR TRASLACION IZQUIERDA.

$$ds^2 = \frac{dx^2}{x^2} + \frac{(xdz - zdx)^2}{(1+yz)^2} + \left(\frac{dy}{x} + y\frac{dx}{x^2} - \frac{y}{x}\frac{(xdz-zdx)}{(1+yz)}\right)^2$$

NOMBRE Grupo especial ortogonal .

DEFINICION

$$SO(3) = \left\{ x\in GL(3,\mathbb{R});\ det(x)=1\ ,\ xx^t = I \right\}.$$

REPRESENTACION MATRICIAL.

Véase la página 4.

TOPOLOGIA .

Compacto.

En este caso no estamos usando la cubriente universal como modelo.

ESPACIO TANGENTE EN EL ELEMENTO NEUTRO.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \; ; \; a,b,c \in \mathbb{R} \right\} .$$

CONSTANTES DE ESTRUCTURA.

-1,-1,1. ó bien 1,-1,1.

ALGEBRA DE LIE.

Simple.

LISTA DE SIMBOLOS USADOS

$\mathbb{R}$ números reales

S^n esfera de dimensión n

$\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ espacio de matrices de n x n

$GL(n,\mathbb{R})$ grupo lineal general de grado 3

det función determinante

$[\,,]$ paréntesis de Lie

$g\ell(n,\mathbb{R})$ álgebra general lineal

T_pM espacio tangente a la variedad diferenciable M

L_g traslación en un grupo de Lie

dL_g diferencial de la traslación

$SL(n,\mathbb{R})$ grupo especial lineal

$\mathfrak{X}(M)$ espacio vectorial de campos vectoriales en la variedad diferenciable M

gen(x) generado por el elemento x

ad_x función adjunta asociada a un grupo de Lie

(g_{ij}) métrica riemanniana en la variedad diferenciable M

$Iso(\mathbb{R})$ grupo de Lie de isometrías de la recta real

id función identidad

$\overline{Iso(\mathbb{R})}$ cubriente universal de $Iso(\mathbb{R})$

$O(1,1)$ grupo de Lorentz de tipo (1,1)

Afin($\mathbb{P}$) grupo de transformaciones afines de la recta real

Nil grupo de Lie de Heinsenberg

$\mathcal{N}il$ álgebra de Lie de Nil

Iso($\mathbb{R}^2$) Grupo de Lie de isometrías del plano

$\mathcal{I}so(\mathbb{R}^2)$ álgebra de Lie de Iso($\mathbb{R}^2$)

$M=[\mathbb{P}^2, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}]$ espacio de Minkowsky

E(1,1) grupo de isometrías del espacio de Minckowsky

$\mathcal{E}(1,1)$ álgebra de Lie del grupo E(1,1)

SO(3) grupo de Lie especial ortogoanal

SU(2) grupo de Lie especial unitario

Ker(ϕ) núcleo de ϕ

BIBLIOGRAFIA.

El material medular de esta tesis proviene de los siguientes artículos y libros.

AuslanderL. GreenL. HahnF. Flows on some three dimensional homogeneus spaces. ANNALS OF MATHEMATICS STUDIES 53 (Princeton University Press) U.S.A.

[B-C] Brickell F. & Clark R.S. Differentiable Manifolds. Van Nostrand Reinholds Company . 1970. England.

[Cu] Curtis L.M. Matrix Groups Springer Verlag .1984. New York.

[Do-Ca] Do Carmo M.P. Notas en Grupos de Lie. I.M.P.A. 1974. Brasil .

[H] Helgason S. Lie Groups and Symetric Spaces . Lectures Notes in Mathematics and Physics. Academic Press Inc. 1984. U.S.A.

[He] Hernstein I. Algebra Moderna . Trillas . 1983. México.

[Hu] Humphreys J.E. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory .Springer Verlag. 1972. U.S.A.

[J] Jacobson N. Lie Algebras . Dover Publications, Inc. 1979. New York.

[M] Matsushima Y. Differentiable Manifolds. Marcel Dehler . 1972. New York.

Milnor J. Curvatures of Left Invariants Metrics on Lie Groups ADVANCES IN MATHEMATICS 21 (1976) U.S.A.

[Mu] Munkres J.R. Topology . Prentice Hall, Inc. 1980. New York.

[Q] Quan P.M. Introduction á la Géométrie des Variétés Différentiables . Donud. 1969. Paris.

Raymond F. VasquezA.T. 3-Manifolds whose universal coverings are Lie Groups TOPOLOGY AND ITS APPLICATION 12 (1981) U.S.A.

[Sp]
Michael Spivack . A Comprehensive Introduction to Differential Geometry . Second Edition . Volume I . Publish or Perish , Inc .1979 U.S.A.