

00884
3
2-in

LA TOPOLOGIA DE LOS FLUJOS HOLOMORFOS
EN SUPERFICIES SINGULARES

Doctorado en Matemáticas

FEDERICO SANCHEZ BRINGAS.

Fac. de Ciencias

1988

**TESIS CON,
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

GENERALIDADES	1
CAPITULO 1 ESTABILIDAD DE CAMPOS EN SUPERFICIES CON SINGULARIDAD SIMPLE	5
1 PRELIMINARES	6
2 GERMENES DE CAMPOS Γ -EQUIVARIANTES	8
3 GRUPOS DIAGONALIZABLES	11
4 GRUPOS NO DIAGONALIZABLES	13
CAPITULO 2 RIGIDEZ TOPOLOGICA DE UNA CLASE DE CAMPOS EN VARIETADES HOMOGENEAS CON SINGULARIDAD AISLADA	15
PRELIMINARES	16
RIGIDEZ TOPOLOGICA	17
CAPITULO 3 RIGIDEZ TOPOLOGICA DE CAMPOS EN SUPERFICIES HOMOGENEAS CON SINGULARIDAD AISLADA	25
SUPERFICIES CON UNA TERCIA EQUILIBRADA	26
SUPERFICIES Y VERTICES PRINCIPALES	27
BIBLIOGRAFIA	33

PROLOGO

El problema central de este trabajo consiste en estudiar la estabilidad estructural de los gérmenes de campos vectoriales tangentes a ciertas variedades algebraicas con singularidad aislada que admiten una acción de C^n .

En el primer capítulo se estudian superficies con singularidad simple, es decir, superficies que son el cociente de C^2 bajo la acción de un subgrupo finito $\Gamma \subset SU(2)$.

En el segundo se trata el caso de variedades homogéneas de cualquier dimensión en C^n .

En el tercer capítulo se muestra que para superficies homogéneas en C^2 la rigidez topológica vale en un abierto denso.

El trabajo se presenta de la siguiente manera, para facilitar su lectura:

En la primera parte, Generalidades, se encuentra el material básico y definiciones que serán usados en el transcurso del mismo. Posteriormente, cada capítulo tiene su propia introducción, donde se describe el resultado fundamental. En los capítulos 1 y 2 se incluyen además, unos preliminares los cuales muestran algunos resultados básicos relativos a ese capítulo.

Finalmente quiero señalar que este trabajo fue apoyado económicamente en su primera parte por el PSPA de la UNAM y en su parte final por CONACYT.

GENERALIDADES.

A continuación se presentan algunas definiciones y resultados básicos sobre gérmenes de campos vectoriales holomorfos con singularidad aislada (el origen) en C^n , $X_0(C^n)$; es decir, gérmenes cuyas funciones coordenadas son funciones holomorfas que resultan convergentes en alguna vecindad del origen.

$$B_r = \{(z_1, \dots, z_n) \in C^n \mid \|z_1\|^2 + \dots + \|z_n\|^2 < r\}$$

Si X está en $X_0(C^n)$ sus funciones coordenadas son funciones holomorfas que se anulan en el origen desarrollandose en series de potencias se tiene que:

$$X(z_1, \dots, z_n) = \left(\sum_{i_1 \dots i_n} a_{i_1 \dots i_n}^1 z^{i_1} \dots z^{i_n}, \dots, \sum_{j_1 \dots j_n} a_{j_1 \dots j_n}^n z^{j_1} \dots z^{j_n} \right) = \\ \left(\sum_{I_1} a_{I_1}^1 z^{I_1}, \dots, \sum_{I_n} a_{I_n}^n z^{I_n} \right)$$

Su parte lineal A_X es el campo vectorial cuyas entradas son los sumandos de grado 1 de las funciones coordenadas.

Se dotará a la familia de estos gérmenes con la topología de las series de potencias [DUM].

Si se considera un germen de campo vectorial descrito por el desarrollo de series de potencias de sus funciones coordenadas, para cada número natural k , se define la siguiente relación de equivalencia: El germen de campo vectorial X está relacionado de orden k con el germen Y ($X \sim_k Y$) si y solo si coinciden en su k -ésimo desarrollo de series de potencias sus funciones coordenadas, [GUI]. Se denota por G^k al espacio de clases de equivalencia de orden k también llamadas k -jets. Se puede ver que G^k tiene estructura de espacio vectorial de dimensión finita sobre C y por lo tanto tiene una topología euclidiana.

Supongase que k y l son números naturales y que $k < l$, entonces la función $P_{lk} : G^l \rightarrow G^k$ que asocia a cada l -jet su jet de orden k , es una función continua y la familia $\{P_{lk}\}_{l,k \in \mathbb{N}}$ cumple las siguientes propiedades:

- i) $P_{lk} \circ P_{km} = P_{lm}$ donde $l \geq k \geq m$.
- ii) $P_{ll} = id$ para todo l .

Se considera el límite inverso G^∞ , de esta familia $\{G^k, P_{lk}\}$, que resulta ser por definición el conjunto

$$G^\infty = \{y \in \prod_i G^i; \text{ donde para todo } k, l; k > l \text{ se cumple que } P_k(y) = P_{lk} P_l(y)\}$$

donde $\Pi_i G^i$ es el producto cartesiano generalizado, las proyecciones $P_k : G^\infty \rightarrow G^k$ resultan ser continuas en esta topología

De manera natural se identifica a todo germen de campo vectorial con un único punto en G^∞ y todo punto en G^∞ con un único germen, siendo así dotado con una topología el espacio, G^∞ . Además obsérvese que el conjunto de gérmenes de campos vectoriales cuya parte lineal no se anula, es un conjunto abierto, en G^∞ .

De esta manera se ha dado una topología al espacio de todos los gérmenes, incluyendo aquellos que resultan no convergentes en toda vecindad B_r , $r > 0$, lo cual escapa al interés de este estudio.

Considérese $X_0(C^n)$ como subespacio de G . Las propiedades de abertura y densidad que se obtienen en este trabajo para los subespacios de $X_0(C^n)$ sujetos a las condiciones establecidas en cada caso, por ejemplo equivarianza bajo la acción de algún subgrupo Γ de $SU(2)$ (Capítulo I), o bien la tangencia a alguna variedad V (Capítulo II), son suficientemente satisfactorias, en el siguiente sentido: Si se concidera como espacio, para cualquier bola fija B_r , el subespacio de $X_0(C^n)$ cuyos elementos además de estar sujetos a la condición respectiva, convergen en B_r , entonces los resultados de abertura y densidad son válidos en este contexto; teorema 1.11 y teorema 2.5.

Ahora se definen las equivalencias de gérmenes de campos vectoriales que se estudiarán en este trabajo.

Se dice que dos gérmenes de campos vectoriales en la singularidad X y Y , son *topológicamente* (*diferenciabilmente*, *biholomórficamente*) equivalentes si existe un germen de homeomorfismo h (difeomorfismo, biholomorfismo) de la variedad en sí misma, que deja fija la singularidad y que lleva las curvas integrales definidas por X en las curvas integrales definidas por Y .

Si además h conjuaga el parámetro tiempo, se dice que X y Y son topológicamente (diferenciabilmente, biholomórficamente) conjugados.

Se dice que el germen X es *estructuralmente estable*, si existe una vecindad V_X de X tal que para todo $Y \in V_X$, X y Y son topológicamente conjugados.

Ahora se presentará un teorema clásico [PO,ARN] obtenido por Poincaré el cual será fundamental para las demostraciones de los capítulos posteriores.

Se dice que un campo vectorial lineal,

$$A(z_1, z_2) = (a_{11}z_1 + \dots + a_{1n}z_n, \dots, a_{n1}z_1 + \dots + a_{nn}z_n)$$

en C^n está en el *dominio de Poincaré* si los valores propios $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ de la matriz con coeficientes a_{ij} , no contienen en su envolvente convexa como puntos de C , al origen; $0 \notin \mathcal{N}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, si además para todo $i, j = 1, \dots, n$, $\lambda_i/\lambda_j \notin \mathbb{R}$ se dice que el campo es *hiperbólico*.

Se dice que el campo $A(z_1, \dots, z_n)$ es *resonante* si se cumple alguna relación del siguiente tipo:

$$\lambda_s = \sum_k m_k \lambda_k \quad \text{con } m_k \in \mathbb{N} \text{ y } \sum_k m_k \geq 2$$

Teorema 1 (Poincaré). Si los valores propios de la parte lineal de un germen de campo vectorial, con singularidad aislada en el origen de \mathbb{C}^n , están en el dominio de Poincaré y son resonantes, entonces el germen es biholomórficamente conjugado a su parte lineal en una vecindad del punto singular.

Cuando $n = 2$ el conjunto de gérmenes que están en el dominio de Poincaré y son no resonantes forman un conjunto abierto y denso en el espacio de todos los gérmenes.

A continuación se definirán algunos conceptos básicos que serán usados en todo el texto, una presentación detallada se encuentra en [GUN].

Si S es un conjunto de polinomios en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, el espacio de polinomios de n variables con coeficientes en \mathbb{C} , la *variedad algebraica* definida por S es el conjunto

$$V(S) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; F(z_1, \dots, z_n) = 0 \text{ para todo } F \in S\}$$

Obsérvese que si $V(S)$ es una variedad algebraica en \mathbb{C}^n entonces $I(V)$, el ideal generado por S es finitamente generado (teorema de la base de Hilbert), es decir, $I(V) = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$. Si la matriz jacobiana $J(V) = \frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$ tiene rango máximo en p , $\text{rang } J(V) = n - m$, se dice que p es un punto regular, si $\text{rang } J(V) < n - m$ se dice que p es un punto singular.

2. Teorema [MIL]. Sea V una variedad algebraica en \mathbb{C}^n y $z = (z_1, \dots, z_n)$ una singularidad aislada en V . Entonces cada esfera S_ϵ^{2n-1} de radio ϵ suficientemente pequeño, contrada en z interseca a V en una variedad diferenciable (posiblemente vacía). Este resultado es enunciado en un contexto más general, pero para los fines aquí planteados basta esta versión. Se puede afirmar aún más, si ϵ_1 y ϵ_2 son suficientemente pequeños y $S_{\epsilon_1}^{2n-1} \cap V = K_1$, $S_{\epsilon_2}^{2n-1} \cap V = K_2$, entonces $K_1 \cong K_2$. Respecto a los gérmenes de campos vectoriales holomorfos se tiene que si X es un germen transversal en todo punto a las esferas

$$S_r^{2n-1} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = r\} \quad r < r_0$$

con algún r_0 fijo, entonces X se puede descomponer en dos campos vectoriales diferenciables reales:

- i) El campo de *precipitación* dado por $X_p = \langle X, \bar{R} \rangle X$.
- ii) El campo *esférico* dado por $X_s = i \langle X, \bar{R} \rangle X$.

Donde \langle, \rangle es el producto hermitiano usual de \mathbb{C} . El flujo que integra al primero será siempre transversal a las esferas S_r^{2n-1} , en particular a las variedades K_r , para $r < r_0$.

El flujo del campo de tangencia definirá una foliación C^∞ sin singularidades en S_r^{2n-1} , en particular en K_r , si X resulta tangente a V .



Esta descomposición será de particular interés para la construcción de un germe de homeomorfismo $h : (V, 0) \rightarrow (V, 0)$ que lleve la foliación definida por un campo X en la foliación definida por otro Y , siempre que ambos sean transversales a las esferas S_r^{2n-1} para todo $r < r_0$. La idea será construir un homeomorfismo $g : K_r \rightarrow K_r$ que lleve la foliación definida por X_T en la foliación definida por Y_T , luego utilizando los flujos de precipitación se extiende el homeomorfismo g a todo un germe de V .

CAPITULO 1

ESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE CAMPOS EN SUPERFICIES CON SINGULARIDAD SIMPLE

INTRODUCCION

Sea Γ un subgrupo finito de $SU(2)$ actuando libremente en $C^2 - \{0\}$; aunque Γ no actúa libremente en el origen el cociente de C^2 bajo la acción tiene una estructura de variedad algebraica con singularidad aislada en el origen. [GA].

los gérmenes de campos vectoriales en la singularidad son identificados con los gérmenes de campos vectoriales holomorfos en C^2 equivariantes bajo la acción de Γ , $X_0(C^2/\Gamma)$.

Dótese el espacio de gérmenes de campos vectoriales holomorfos en el origen de C^2 , $X_0(C^2)$, con la topología de las series de potencias y considérese a $X_0(C^2/\Gamma)$ como subespacio. En este capítulo se prueba el siguiente resultado:

Teorema 1.11 Existe un subconjunto A abierto y denso de $X_0(C^2/\Gamma)$ cuyos elementos son estructuralmente estables, si además Γ no es diagonalizable, todo X elemento de A es homeomórficamente equivalente al campo radial, $R(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$.

En la sección 1, se dan algunas definiciones y herramientas básicas que se usarán posteriormente.

En la sección 2 se estudian las condiciones que el grupo impone a los gérmenes Γ -equivariantes.

En las secciones 3 y 4 se prueba el resultado para los dos casos cualitativamente distintos, Propositiones 1.9 y 1.10. Estos dos comportamientos dependen de que el grupo tenga o no una representación diagonal.

1 PRELIMINARES

Se dice que Γ un subgrupo de $SU(2)$ actúa libremente en $\mathbb{C}^2 - 0$ si se cumple la siguiente propiedad: Si $\gamma \in \Gamma$ y $\gamma(z) = z$, entonces γ es el elemento identidad.

Además como γ es una transformación lineal actúa como su derivada en $X_0(\mathbb{C}^2)$, es decir, si $X \in X_0(\mathbb{C}^2)$,

$$D\gamma(X(z_1, z_2)) = \gamma(z_1, z_2)$$

asi los gérmenes que quedan fijos bajo la acción del grupo Γ , llamados gérmenes Γ -equivariantes corresponden a los gérmenes de campos vectoriales que bajan al cociente de $\{\mathbb{C}^2 - 0/\Gamma\}$.

Desarrollando en sus series de potencias se tiene que

$$X(z_1, z_2) = \left(\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j} z_1^i z_2^j, \sum_{i,j=0}^{\infty} b_{i,j} z_1^i z_2^j \right)$$

su parte lineal es

$$A_X = (a_{10}z_1 + a_{01}z_2, b_{10}z_1 + b_{01}z_2) = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{01} \\ b_{10} & b_{01} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Si $X(z_1, z_2)$ es Γ -equivariante, $\gamma(X(z_1, z_2)) = X(\gamma(z_1, z_2))$. Escribiendo esta condición en coordenadas, si

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

$$\gamma(X(z_1, z_2)) = \gamma(A_X(z_1, z_2) + \sum_{i,j=0}^{\infty} (a_{i,j} z_1^i z_2^j, b_{i,j} z_1^i z_2^j)) =$$

$$\gamma(A_X(z_1, z_2)) + \sum_{i,j=0}^{\infty} \gamma(a_{i,j} z_1^i z_2^j, b_{i,j} z_1^i z_2^j) =$$

$$(A_X(\gamma(z_1, z_2)) + \sum_{i+j > 1} \gamma(a_{i,j} (\gamma_{11} z_1)^i (\gamma_{12} z_2)^j, b_{i,j} (\gamma_{21} z_1)^i (\gamma_{22} z_2)^j))$$

por lo tanto las siguientes afirmaciones son válidas:

i) Si X es Γ -equivariante, su parte lineal A_X también lo es.

ii) A_X es Γ -equivariante si y solo si $[A_X, \gamma] = 0$ para todo γ en Γ , donde $[A_X \hat{\gamma}, \gamma] = A_X \gamma - \gamma A_X$.

La esfera $S_r^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1|^2 + |z_2|^2 = r^2\}$ resulta equivariante bajo la acción de cualquier subgrupo Γ de $SU(2)$, por lo tanto el espacio cociente S_r^3/Γ es una subvariedad compacta real de $\mathbb{C}^2 - \{0\}/\Gamma$. Aún más en la teoría clásica desarrollada por Klein [K1] se construye explícitamente el encaje que transforma \mathbb{C}^2/Γ en una superficie algebraica con singularidad aislada S en \mathbb{C}^3 y resulta además que con esta estructura,

S es topológicamente equivalente en una vecindad de la singularidad, al cono sobre S_r^3/Γ ; es decir, $I \times S_r^3/\Gamma$ donde $I = (a, b)$ es un intervalo en \mathbb{R} que contiene a 0, [MIL].

Siempre que un germen X sea transversal a todas las variedades S_r^3/Γ con $0 < r < \epsilon_0$ para algún $\epsilon_0 > 0$ se tendrá que el flujo que define X en B_r/Γ donde $B_r = \cup_{r < \epsilon} S_r^3$ tiene una descomposición en dos flujos reales uno transversal a todas las esferas, lema 1.7 y otro tangente a ellas, corolario 1.8. Por lo tanto si X_1 y X_2 son dos campos vectoriales holomorfos, transversales a S_r^3/Γ , $0 < r < \epsilon_0$ y tales que las foliaciones que ellos definen sobre S_r^3/Γ sean topológicamente equivalentes, se podrá construir una equivalencia topológica local entre X_1 y X_2 .

Para el caso en que Γ sea un subgrupo no diagonalizable se tendrá que un subespacio abierto y denso de $X_0(C^2/\Gamma)$ definirá sobre S_r^3/Γ un fibrado de Seifert, proposición 1.10, a continuación se dan las definiciones básicas y un corolario de clasificación de fibrados de Seifert.

Un *fibrado de Seifert* es una 3-variedad topológica, cerrada, conexa, con una descomposición en fibras que cumple las siguientes propiedades:

- i) Cada fibra es una curva cerrada simple.
- ii) Cada punto se encuentra en una única fibra.

Un toro sólido fibrado se obtiene de fibrar un cilindro $D_2 \times I$ por las líneas $\{x\} \times I$, $x \in D_2$ y rotar $D_2 \times \{1\}$ un ángulo $2\pi(\mu/\eta)$ e identificar con $D_2 \times \{0\}$, $(\mu, \eta) = 1$. La fibra central es $\{0\} \times I$.

iii) Para cada fibra F existe una vecindad fibrada, es decir, un subconjunto abierto de la variedad que contiene a F , que es unión de fibras y que es homeomorfo a un toro sólido fibrado, por un homeomorfismo que manda fibras en fibras y a F en la fibra central.

Cuando la variedad es orientable por ejemplo S_r^3/Γ , el conjunto de invariantes es:

$$\{0, o, b; p, (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n)\}$$

o bien

$$\{0, n, b; k, (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n)\}$$

Donde 0 significa que la variedad M^3 es orientable, o (respectivamente n) significa que el espacio cociente de las fibras es orientable (no orientable), p (respectivamente k) es el género de la superficie cociente, b es la clase de Euler que determina de manera única la construcción del espacio sin fibras excepcionales, es decir sin fibras cuya holonomía no sea trivial, y finalmente los números α_i, β_i determinan de manera única, uno a uno, las fibras excepcionales. Estas se pueden describir de la siguiente manera: Considérese una vecindad fibrada V de la fibra F_i . Sobre la frontera de V , ∂V que topológicamente es un 2-toro, se toma una fibra G_i y una curva orientada Q_i tal que $G_i Q_i = 1$ así $M_i \cong \alpha_i Q_i + \beta_i G_i$ donde la igualdad es salvo homología, $0 < \beta_i < \alpha_i$, y

M_i es un meridiano, es decir, una curva simple orientada en V que no es contraíble en V pero sí en su complemento.

Las variedades de Seifert con grupo fundamental finito están clasificadas según el grupo [SE-TH], un corolario inmediato de esta clasificación es:

Corolario 1.1 Si Γ es un subgrupo finito no diagonalizable de $SU(2)$ actuando libremente en S^3 la variedad de Seifert queda determinada por los siguientes invariantes:

i) Si Γ es el subgrupo diédrico de orden $4n$,

$$M = \{0, o, -1; o, (2, 1), (2, 1), (n, 1)\}$$

ii) Si Γ es el tetraedro binario de orden 24,

$$M = \{0, o, -1; o, (2, 1), (3, 1), (3, 1)\}$$

iii) Si Γ es el octaedro binario de orden 48,

$$M = \{0, o, -1; o, (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$$

iv) Si Γ es el icosaedro binario de orden 120,

$$M = \{0, o, -1; o, (2, 1), (3, 1), (5, 1)\}$$

2 GERMENES DE CAMPOS DE VECTORES Γ -EQUIVARIANTES

Sea $X(x_1, x_2) = (\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} x_1^i x_2^j, \sum_{i,j=0}^{\infty} b_{ij} x_1^i x_2^j)$ un elemento de $X_0(C^2/\Gamma)$, su parte lineal A_X , cuando no es degenerada, determina en muchos casos la naturaleza topológica de X .

Esta situación no es muy restrictiva:

Lemma 1.2 El conjunto de gérmenes X en $X_0(C^2/\Gamma)$ cuya parte lineal no es degenerada, es decir, el determinante de su parte lineal no se anula, es un abierto y denso.

Demostración i) Densidad: Sea $X = (\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} x_1^i x_2^j, \sum_{i,j=0}^{\infty} b_{ij} x_1^i x_2^j)$ en $X_0(C^2/\Gamma)$, la familia $X' = \frac{1}{n}(x_1, x_2) + X$ es un germen equivariante bajo Γ . Si n crece, X_n se aproxima a X .

ii) **Abertura:** Se sigue del hecho de que $X_0(C^2/\Gamma)$ es subespacio de $X_0(C^2)$ y el resultado vale si sustituimos en el enunciado del lema C^2/Γ por C^2 . \square

La siguiente proposición permite diagonalizar campos lineales Γ -equivariantes. Cuando sean diagonalizables en C^2 .

Proposición 1.3 Sea X elemento de $X_0(\mathbb{C}^2/\Gamma)$ y $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ un biholomorfismo tal que $D\phi(X) = Y$, entonces el campo vectorial Y es equivariante bajo la acción del grupo $\tilde{\Gamma} = \phi\Gamma\phi^{-1}$, es decir Y es un elemento de $X_0(\mathbb{C}^2/\tilde{\Gamma})$.

Demostración Sea $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$, $\tilde{\gamma} = \phi\gamma\phi^{-1}$ por lo tanto,

$$\begin{aligned} D\tilde{\gamma}_*(Y(z)) &= D\phi\gamma\phi^{-1}(Y(z)) = D\phi\gamma(X(\phi^{-1}(z))) = \\ D\phi(X(\gamma\phi^{-1}(z))) &= Y(\phi\gamma\phi^{-1}(z)) = Y(\tilde{\gamma}(z)) \end{aligned}$$

□

Observación. Se puede considerar a $\mathbb{C}^2/\tilde{\Gamma}$ como una carta cocoordinada de \mathbb{C}^2/Γ , por lo que cada biholomorfismo de \mathbb{C}^2 induce una carta coordinada de \mathbb{C}^2/Γ . Utilizando el teorema de Poincaré enunciado en la introducción, se tiene que para campos que satisfacen las hipótesis de este teorema existe un biholomorfismo local $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ que linealiza el campo; sin embargo toda la simplificación hecha al campo produce una complicación equivalente del grupo $\tilde{\Gamma} = \phi\Gamma\phi^{-1}$.

Quando X es un campo lineal diagonalizable, existe B en $GL(2, \mathbb{C})$ tal que $BXB^{-1} = D$ es diagonal, sustituyendo en el enunciado de la proposición a ϕ por B , se tiene que D es un campo $\tilde{\Gamma}$ -equivariante, es decir en $X_0(\mathbb{C}^2/\tilde{\Gamma})$.

La siguiente proposición caracteriza los campos lineales en términos de la representación del grupo, para su demostración se desarrolla el lema 1.4.

Lema 1.4 Si Γ es un subgrupo finito de $GL(2, \mathbb{C})$ y

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \Gamma$$

en Γ entonces, $b = 0$ y a es raíz de la unidad.

Demostración Por su definición

$$\gamma^n = \begin{pmatrix} a^n & na_{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

si $b = 0$, $\gamma^n \neq I$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por lo que grupo cíclico generado por γ no es finito lo que resulta una contradicción. Análogamente si $a \neq 1$. □

Proposición 1.5 i) Si Γ es un subgrupo finito diagonal de $GL(2, \mathbb{C})$ y existe $\gamma \in \Gamma$ de la forma

$$\gamma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces el campo lineal $A \in X_0(\mathbb{C}^2)$ es Γ -equivariante implica que A es diagonal, es decir, $A(x_1, x_2) = (a_1x_1, a_2x_2)$, $a_i \in \mathbb{C}$.

ii) Sea Γ subgrupo finito de $GL(2, \mathbb{C})$ y supongase que no es diagonalizable, es decir, para todo $M \in GL(2, \mathbb{C})$ el grupo MTM^{-1} tiene un elemento no diagonal. Entonces un campo lineal $A \in X_0(\mathbb{C}^2)$ es Γ -equivariante si y solo si A es un múltiplo del campo radial, es decir, $A(x_1, x_2) = a(x_1, x_2)$ con $a \in \mathbb{C}$.

Demostración i) Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

asi $[A, \gamma] = 0$ si y solo si $a_{12}\lambda_1 = a_{12}\lambda_2$ y $a_{21}\lambda_1 = a_{21}\lambda_2$, asi $a_{12} = a_{21} = 0$ pues $\lambda_1 \neq \lambda_2$, el resultado se tiene de la afirmación ii) de los preliminares.

ii) La primera observación es que todo campo lineal A tiene los mismos valores propios. Supongamos que no, entonces A se puede diagonalizar. Sea

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

su expresión diagonal, por el mismo argumento que se usó en la parte i) se prueba que el grupo conjugado de Γ , $\tilde{\Gamma}$, debe ser diagonal pues cumple $[D, \gamma] = 0$ pero asi se contradice una hipótesis.

Ahora supóngase que existe un campo no diagonalizable y es transformado de ser necesario, a su forma de Jordan

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

entonces $[A, \gamma] = 0$ implica que

$$\gamma = \begin{pmatrix} \lambda & \beta \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

pero por el lema 1.4, $\beta = 0$ asi Γ es diagonal, y se contradice una hipótesis. Por lo anterior todo campo lineal es múltiplo del campo radial y su representación tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

□

Comentario. Siempre que el grupo Γ sea diagonalizable, su carta diagonal será el contexto adecuado para estudiar los gérmenes de campos lineales, proposición 1.3, los resultados que se tienen para campos lineales diagonales en el caso liso, es decir en $X_0(\mathbb{C}^2)$, son de gran utilidad con esta representación como se verá más adelante.

Si Γ tiene una expresión diagonal pero todo elemento tiene los mismos valores propios, el análisis se hace como en el caso liso.

Es interesante resaltar el hecho de que las condiciones de equivarianza de los campos bajo la acción del grupo no solo imponen restricciones sobre los campos, también pueden imponer restricciones al grupo: Si existe un campo lineal Γ -equivariante, con dos valores propios distintos, entonces Γ es diagonalizable.

La demostración de la afirmación anterior es como la del inciso i) de la proposición anterior.

A continuación se analizan las propiedades de genericidad y estabilidad estructural para cuando Γ es diagonalizable.

Para el caso liso se tiene que los campos vectoriales lineales que están en el dominio de Poincaré forman un conjunto abierto y denso en el espacio de los campos lineales, esto también ocurre para los campos hiperbólicos. Más aun, en dimensión dos, el dominio de Poincaré contiene al espacio de los gérmenes de campos vectoriales hiperbólicos.

Un resultado análogo vale para campos lineales Γ -equivariantes cuando Γ sea diagonalizable.

Proposición 1.6 Sea Γ un subgrupo diagonal de $SU(2)$, P_Γ el conjunto de campos vectoriales lineales Γ -equivariantes en el dominio de Poincaré y H_Γ el conjunto de campos hiperbólicos Γ -equivariantes. Entonces P_Γ y H_Γ son subespacios abiertos y densos en el espacio de los campos lineales Γ -equivariantes.

Demostración i) Los conjuntos P_Γ y H_Γ son abiertos pues son las restricciones de abiertos en el caso liso.

ii) La densidad basta probarla para $H_\Gamma \subset P_\Gamma$. Si A con valores propios distintos, es Γ -equivariante,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

con $\lambda_1 = k\lambda_2$, $k \in \mathbb{R}$ y $\text{Im}\lambda_i \neq 0$. Se tiene que la sucesión

$$A_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 1/n & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

es una sucesión de campos hiperbólicos que converge a A , cuando $n \rightarrow \infty$. □

Obsérvese que como en el caso liso la proposición anterior implica que el conjunto de campos en $X_0(\mathbb{C}^2/\Gamma)$ con parte lineal hiperbólica (o bien en el dominio de Poincaré) es un abierto denso.

3 GRUPOS DIAGONALIZABLES

El conjunto P_Γ resulta interesante aquí, no solo ser un abierto denso, sino también porque todo elemento es transversal a S_r^3 para todo r , real positivo. En general, si $X \in X_0(\mathbb{C}^2)$ es transversal a S_r^3 , X induce un foliación sin puntos críticos sobre S_r^3 , este hecho es fundamental para la demostración de estabilidad estructural. Cuando Γ es diagonalizable, la demostración de J. Guckenheimer [GU] para el caso liso $X_0(\mathbb{C}^2)$, se puede adaptar con algunas modificaciones.

Lema 1.7 Sea $X \in X_0(\mathbb{C}^2)$, un campo cuya parte lineal A_X es hiperbólico, entonces el campo esférico asociado a X , X_S en S_r^3 es Morse-Smale, con solo dos órbitas cerradas una atractora y otra repulsora, y sin puntos fijos, (r suficientemente pequeño).

Demostración La demostración consiste en construir un difeomorfismo entre (S_r^3, \mathfrak{F}_X) y $(S_r^3, \mathfrak{F}_{A_X})$ donde \mathfrak{F}_X es la foliación generada por X . Con esto basta pues \mathfrak{F}_{A_X} es una foliación definida por un campo lineal y en el trabajo de Guckenheimer se prueba la afirmación para estos casos.

Como A_X está en el dominio de Poincaré es transversal a S_r^3 , así existe $r_1 \in \mathbb{R}$ tal que si $r < r_1$, X es transversal a S_r^3 para todo $r < r_1$. Por el teorema de Poincaré (generalidades), existe un biholomorfismo $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ que linealiza al campo X , es decir, $D\phi(X) = A$. Así $\phi(S_r^3)$ es una esfera en \mathbb{C}^2 aunque no isométrica si transversal a A_X .

Considérese S_r^3 una esfera en \mathbb{C}^2 tal que su región acotada contiene a $\phi(S_r^3)$. Ahora el campo de precipitación asociado a A_X (generalidades),

$$A_p(x_1, x_2) = \overline{\langle A_X(x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle} A_X(x_1, x_2)$$

determina un flujo alrededor del origen,

$$\rho_{A_p} : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

que permite definir un difeomorfismo entre $(S_r^3, \mathfrak{F}_{A_X})$ y $(S_r^3, \mathfrak{F}_{A_X})$.

Se define $f : S_r^3 \rightarrow S_r^3$ como

$$f(x_1, x_2) = \rho_{A_p}(t_0, (x_1, x_2))$$

donde t_0 es el primer real positivo para el cual el flujo de precipitación toca a $\phi(S_r^3)$.

Las propiedades del flujo de precipitación inducen las propiedades requeridas de f .

Ahora la demostración se sigue de la composición de los difeomorfismos ϕ y f . \square

Corolario 1.8 Sea Γ un subgrupo finito de $SU(2)$. Sea $X \in \mathcal{X}_0(\mathbb{C}^2/\Gamma)$, con su parte lineal hiperbólica. Entonces el campo esférico X_s , definido por X sobre S_r^3/Γ , para r un número real suficientemente pequeño, es Morse-Smale sin puntos críticos y con solo dos órbitas cerradas, una atractora y otra repulsora.

Demostración Si X cumple las hipótesis, por el lema anterior se tiene que X_s sobre S_r^3 resulta Morse-Smale. Ahora:

$$X_s(x_1, x_2) = i \overline{\langle X(x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle} X(x_1, x_2)$$

es equivariante bajo la acción de Γ en S_r^3 ya que todo elemento $\gamma \in \Gamma$ preserva el producto hermitiano usual.

La fibra de la acción es finita por lo que en S_r^3/Γ solo puede haber dos órbitas cerradas, las que resultan de identificar las dos órbitas cerradas C_1 y C_2 en S_r^3 , bajo la acción de Γ . Además por el mismo argumento, si se identifica una órbita no cerrada, la cual tiene como conjunto atractor a C_1 y como repulsor a C_2 , esta nueva órbita en S_r^3/Γ tendrá como conjunto atractor a C_1/Γ y como repulsor C_2/Γ . \square

Proposición 1.9 Sea Γ un subgrupo finito diagonal de $SU(2)$. Sea $X \in \mathcal{X}_0(\mathbb{C}^2)$, Γ -equivariante tal que su parte lineal A_X es hiperbólica.

Entonces X es estructuralmente estable.

Demostración Supongase que X cumple las hipótesis de la proposición.

Sea r como en el corolario 1.2, entonces existe una vecindad V_{r_0} de X en $\mathcal{X}_0(\mathbb{C}^2/\Gamma)$ tal que si $Y \in V_{r_0}$, Y es transversal a S_r^3 y aún más X_s y Y_s son conjugados topológicamente como campos en S_r^3/Γ ya que X_s es Morse-Smale, corolario 1.8 y [PA].

Sea $h : S_r^3/\Gamma \rightarrow S_r^3/\Gamma$ el homeomorfismo que conjugue las foliaciones.

Sean ϕ_X y ρ_Y los flujos de precipitación asociados a X y Y respectivamente. Se define $F : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ de la siguiente manera:

Si (x_1, x_2) está en la bola acotada definida por S_r^3 , $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, existe un único real positivo t y (w_1, w_2) en S_r^3 tal que $(x_1, x_2) = \rho_X(t, (w_1, w_2))$. Sea $F(x_1, x_2) = \rho_Y(t, h(w_1, w_2))$.

Claramente F es una función diferenciable cuya inversa se define de manera análoga y resulta diferenciable, además es inmediato que F manda la foliación compleja asociada a X , en la correspondiente asociada a Y , ya que los flujos de precipitación preservan las foliaciones complejas. \square

GRUPOS NO DIAGONALIZABLES

Para el caso en que Γ es un subgrupo no diagonalizable, existe un conjunto abierto y denso A en el espacio $\mathcal{X}_0(\mathbb{C}^2/\Gamma)$ cuyos elementos cortan transversalmente a todo punto de la variedad S_r^3/Γ para r suficientemente pequeño, de hecho A está constituido por los gérmenes de campos vectoriales en $\mathcal{X}_0(\mathbb{C}^2/\Gamma)$ cuya parte lineal no se anula. S_r^3/Γ con la foliación definida, constituye un fibrado de Seifert; este hecho será fundamental para la demostración de la estabilidad estructural.

Proposición 1.10 Sea Γ un subgrupo finito no diagonalizable de $SU(2)$. Entonces cualesquiera dos gérmenes de campo vectorial en $\mathcal{X}_0(\mathbb{C}^2/\Gamma)$ con parte lineal no nula, son topológicamente equivalentes.

Demostración La primera parte de la demostración consiste en probar el siguiente resultado:

Si X es un germen en $\mathcal{X}_0(\mathbb{C}^2/\Gamma)$ cuya parte lineal no es nula, para algún $r > 0$ suficientemente pequeño, X define una foliación \mathfrak{F}_X en S_r^3/Γ que es diferenciablemente equivalente a la foliación que define el campo radial \mathfrak{F}_R sobre S_r^3/Γ .

Supóngase que X es un germen en $\mathcal{X}_0(\mathbb{C}^2/\Gamma)$ cuya parte lineal es no nula, entonces

$$X(x_1, x_2) = \lambda R(x_1, x_2) + X^2(x_1, x_2)$$

donde R es el campo radial, X^2 es la parte no lineal y $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Sin perder generalidad se puede suponer que $\lambda = 1$.

Por su parte lineal se puede asegurar que existe un número real $r_0 > 0$ tal que si $0 < r < r_0$, X es transversal a S_r^3 en todo punto. Por lo que X define una foliación C^∞ sin puntos críticos en S_r^3 .

Sea $\psi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ el biholomorfismo tal que $D\psi(X(z_1, z_2)) = R(\psi(z_1, z_2))$; entonces $\psi(S_{r_0}^3)$ es transversal al campo radial y la foliación que éste define es diferenciablemente equivalente a la foliación que define X sobre $S_{r_0}^3$. El flujo de precipitación del campo radial establece un difeomorfismo entre $S_{r_0}^3$ y $\psi(S_{r_0}^3)$, que manda la foliación definida por el campo radial en $S_{r_0}^3$ en la foliación definida por el mismo campo en $\psi(S_{r_0}^3)$. Por lo tanto X define una foliación por círculos en $S_{r_0}^3$.

Como la foliación \mathfrak{F}_X en $S_{r_0}^3$ definida por $\langle R, X \rangle = X$ es equivariante bajo la acción de Γ , el cual es finito, se tiene que la foliación que define el mismo campo en el espacio cociente $S_{r_0}^3/\Gamma$ es una foliación donde cada órbita es un círculo. Por el teorema de Epstein [EP], existe una acción diferenciable, efectiva de S_1 sobre $S_{r_0}^3/\Gamma$ cuyas órbitas son las hojas de la foliación definida por X . Ahora como Γ es subgrupo finito de $SU(2)$, por el corolario 1.1, $S_{r_0}^3/\Gamma$ admite un solo fibrado de Seifert, por lo que los invariantes de Seifert que definen X y R son los mismos. Por lo tanto existe un homeomorfismo $f : S_{r_0}^3/\Gamma \rightarrow S_{r_0}^3/\Gamma$ que manda las hojas de la foliación definida por X en $S_{r_0}^3/\Gamma$ en las hojas de la foliación definida por R .

La demostración se concluye utilizando el flujo de precipitación del campo X , $\rho_X : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, el cual es equivariante bajo la acción de Γ .

Sea $B_{r_0} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < r_0^2\}$

Sea $g : B_{r_0}/\Gamma \rightarrow B_{r_0}/\Gamma$ tal que $g(z_1, z_2) = \rho_X(t_0, f(\rho_{R}(t_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2)))$, donde $(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \in \mathbb{C}^2$ es el único punto tal que al aplicarle el flujo de precipitación del campo radial con condición inicial en $S_{r_0}^3$, tiene como imagen (z_1, z_2) , es decir, $\rho_R(t_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = (z_1, z_2)$. \square

Finalmente cabe señalar que los resultados anteriores se pueden sumarizar en el siguiente teorema.

Teorema 1.11 Sea Γ un subgrupo finito de $SU(2)$. $X_0(\mathbb{C}^2/\Gamma)$ el espacio de gérmenes de campos vectoriales en el origen de \mathbb{C}^2 , equivariantes bajo la acción de Γ .

Entonces existe un subconjunto A abierto y denso de $X_0(\mathbb{C}^2/\Gamma)$ cuyos elementos son estructuralmente estables. Si además Γ no es diagonalizable, para todo $X \in A$, X es homeomórficamente equivalente al campo radial $R(z_1, z_2) = (z_1, z_2)$.

CAPITULO 2

RIGIDEZ TOPOLOGICA DE UNA CLASE DE CAMPOS EN VARIETADES HOMOGENEAS CON SINGULARIDAD AISLADA

INTRODUCCION

En este capítulo se prueba un teorema de rigidez topológica en una clase de gérmenes de campos vectoriales tangentes a una variedad homogénea V con singularidad aislada en \mathbb{C}^n .

Considérense los gérmenes de campos vectoriales en \mathbb{C}^n tangentes a V alrededor del origen (la singularidad de V), expresados en series de potencias se tiene que para la clase definida como:

$$L_\lambda = \{X(z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{X}_0(\mathbb{C}^n) \mid X(z_1, \dots, z_n) = \lambda(z_1, \dots, z_n) + \dots; X \text{ tangente a } V\}$$

Donde los puntos suponen términos de orden mayor o igual a dos. Se prueba el siguiente resultado.

Teorema 2.5 Sea $X \in L_\lambda$ y R el campo radial, $R(z_1, \dots, z_n) = \lambda(z_1, \dots, z_n)$. Entonces X y R restringidos a V son topológicamente equivalentes.

En la sección 1 se encuentran algunas herramientas básicas y definiciones que serán usadas posteriormente.

En la sección 2 se encuentra la demostración del resultado enunciado anteriormente; la parte más técnica se localiza en el lema 2.2 donde se prueba el resultado para familias en L_1 que dependen de un parámetro t en una vecindad del campo radial. En la proposición 2.4 se obtiene globalmente para L_1 , esto permitirá demostrar el resultado como ha sido enunciado.

1 PRELIMINARES

Una *variedad homogénea* en C^n es una variedad algebraica V tal que el ideal que la define $I(V)$, tiene un conjunto de generadores cuyos elementos son polinomios homogéneos.

Las variedades homogéneas están caracterizadas por el hecho de admitir al campo radial como campo tangente, compárese [OR].

Proposición 2.1 Sea V una variedad analítica en C^n y supongase que el campo radial R es tangente a V . Entonces V es homogénea.

Demostración Obsérvese que como $R(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$ es tangente a V , las soluciones del campo están en V . Es decir, si (x_1, \dots, x_n) es elemento de V , $e^T(x_1, \dots, x_n)$ está en V para todo $T \in C$, por lo tanto si $\lambda \in C$ $\lambda(x_1, \dots, x_n)$ está en V .

Ahora sea f el anillo de las series convergentes, sean f_i los únicos polinomios tales que

$$f(t(x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^{\infty} t^i f_i(x_1, \dots, x_n)$$

Supóngase que f se anula en V entonces si $(x_1, \dots, x_n) \in V$, $\sum_{i=1}^{\infty} t^i f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ para todo t cerca de 0, por lo tanto $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ para todo $(x_1, \dots, x_n) \in V$.

Sean $f^{(1)}, \dots, f^{(r)}$ generadores del ideal $I(V)$. Sea J el ideal generado por $\{f_i^{(j)}\}$, claramente $J \subset I(V)$.

Ahora si (x_1, \dots, x_n) no está en V y está en el radio de convergencia de $f^{(j)}$ para todo j , existe una pareja (i, j) tal que $f_i^{(j)}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, por lo tanto, si (x_1, \dots, x_n) está en la variedad que define J , necesariamente está en V .

Así el radical de J es $I(V)$. Sea J' el ideal generado por $\{f_i^{(j)}\}$ en $C[x_1, \dots, x_n]$, y sea I' su radical. Entonces $I' \subset C[x_1, \dots, x_n] = \text{rad} J = I(V)$ y por lo tanto $I(V)$ es generado por polinomios.

Ahora sea $I'(V)$ el ideal de V en $C[x_1, \dots, x_n]$, si $f \in I'(V)$ entonces $f_i \in I'(V)$. Si f es polinomial entonces hay un número finito de enteros tales que $f_i \neq 0$.

Sean $f^{(1)}, \dots, f^{(r)}$ generadores de $I'(V)$, entonces los polinomios homogéneos $\{f_i^{(j)}\}$ generan $I'(V)$. □

A continuación se da una definición que será usada en el enunciado del lema 2.1.

Definición: Un germen de campo vectorial $Y \in L$ es *L-estructuralmente estable* a un parámetro si para cualquier familia

$$\{Y_t = Y + tX | X \text{ es un germen de campo vectorial y } Y_t \in L\}_{t \in (-\epsilon, \epsilon)}$$

con $\epsilon > 0$, existen $\delta < \epsilon$ y una familia de gérmenes de homeomorfismos

$$\{\phi_t : (V, 0) \rightarrow (V, 0) | \phi_t(\mathfrak{S}_{Y_t}) = \mathfrak{S}_Y\}_{t \in (-\delta, \delta)}$$

Donde \mathfrak{S}_{Y_1} y \mathfrak{S}_Y son las foliaciones definidas por Y_1 y Y respectivamente.

Si además X varía en la familia de gérmenes de orden mayor o igual a p , se dice que el parámetro es mayor o igual a p .

En todo el capítulo las equivalencias topológicas entre campos de L_λ , $\lambda \in \mathbb{C}^*$ siempre serán equivalencias topológicas sobre la variedad V .

2 RIGIDEZ TOPOLOGICA

La parte más técnica de la demostración del resultado principal se encuentra en el siguiente lema.

Lema 2.2 Sea V una variedad homogénea con singularidad aislada en el origen.

Sea L_1 el conjunto de gérmenes de campos vectoriales tangentes a V en una vecindad del origen de \mathbb{C}^n tales que su parte lineal es el campo radial.

Entonces el campo radial es L_1 -estructuralmente estable a un parámetro de orden mayor o igual a dos.

Además los homeomorfismos que definen la estabilidad estructural dependen analíticamente de este parámetro.

Demostración A continuación se presenta un bosquejo de la demostración la cual es dividida en siete pasos, y que dará una perspectiva general.

Todo germen de campo vectorial $Y_t = R + tX^2$; tiene dos componentes real analíticas una transversal a las esferas S_r^{2n-1} para r suficientemente pequeño, paso 1; y otra tangente.

La componente tangente produce una foliación en $\tilde{K} = S_r^{2n-1} \cap V$, $\tilde{\mathfrak{S}}_{Y_t}$ infinitamente diferenciable sin singularidades. Para probar que Y_t y R son topológicamente equivalentes, se construye un homeomorfismo $f_t: \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}$ que manda la foliación $\tilde{\mathfrak{S}}_{Y_t}$ en \mathfrak{S}_R . Esto se hace construyendo un fibrado $\tilde{K} \times (-1, 1)$ con una acción de S^1 , la cual deja invariantes las subvariedades (\tilde{K}, t) y cuyas órbitas en el tiempo t corresponden a las órbitas de la foliación $\tilde{\mathfrak{S}}_{Y_t}$ en \tilde{K} , pasos 2 y 3.

El homeomorfismo f_t se construye con el flujo que integra a un campo $U(t)$ equivariante bajo la acción de S^1 y donde t varía en un intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ suficientemente pequeño, pasos 4, 5 y 6.

Finalmente la demostración se concluye con los flujos de precipitación de R y Y_t que permiten extender el homeomorfismo $f_t: \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}$ a toda una vecindad de la variedad V , de la singularidad.

1. Transversalidad de los gérmenes de campos vectoriales a las esferas de radio

pequeño.

Para todo $|t| \leq 1$, existe una bola centrada en el origen de radio r_0 tal que $|(x_1, \dots, x_n)|_2 > R e^{|t|} < X^2(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) > |$ para (x_1, \dots, x_n) en esta bola y donde $X^2(x_1, \dots, x_n)$ es la parte no lineal del campo. Por lo tanto el campo Y_t es transversal a la esfera $S_{r_1}^{2n-1}$ centrada en el origen y de radio $r_1 < r_0$.

2. Construcción de un difeomorfismo que transforma la foliación definida por Y_t , en la foliación definida por R sobre las variedades de intersección.

Sea $\tilde{K} = S_{r_1}^{2n-1} \cap S$, la variedad de intersección; todo campo Y_t define una foliación real analítica sin singularidades $\tilde{\mathfrak{F}}_{Y_t}$ sobre \tilde{K} .

Para cada t existe un biholomorfismo

$$\phi_t : (C^n, 0) \rightarrow (C^n, 0) \text{ tal que } D\phi_t(x)(Y_t(x)) = \phi_t(x)$$

Se denota por V_t la imagen bajo ϕ_t de la variedad V .

$\phi_t(\tilde{K})$ es una variedad diferenciable, compacta y transversal al campo radial contenida en V_t . Se denota por \mathfrak{F}_R la foliación real analítica definida por el campo radial sobre $\phi_t(\tilde{K})$.

Sea $K_t = S_{r_1}^{2n-1} \cap V_t$; K_t es también transversal al campo radial el cual define una foliación real analítica \mathfrak{F}_R en K_t . La foliación que define el campo radial sobre $S_{r_1}^{2n-1}$, es una foliación por círculos y el flujo induce una acción de S^1 en $S_{r_1}^{2n-1}$. Esto mismo pasa en K_t .

El flujo de precipitación asociado al campo radial R , define un difeomorfismo $\rho : (K_t, \mathfrak{F}_R) \rightarrow (\phi_t(\tilde{K}), \tilde{\mathfrak{F}}_R)$, que manda las hojas de la foliación de \mathfrak{F}_R en las de $\tilde{\mathfrak{F}}_R$. Componiendo con ϕ_t^{-1} se tiene que $g_t = \phi_t^{-1} \rho : (K_t, \mathfrak{F}_R) \rightarrow (\tilde{K}, \tilde{\mathfrak{F}}_{Y_t})$ es un difeomorfismo que manda \mathfrak{F}_R en $\tilde{\mathfrak{F}}_{Y_t}$.

3. Construcción de una acción de S^1 a lo largo de $\tilde{K} \times (-1, 1)$.

Sea σ_t la acción de S^1 definida en K_t ,

$$\sigma_t : S^1 \times K_t \rightarrow K_t, \sigma_t(\theta, k) = e^{i\theta}(k)$$

Ahora se define

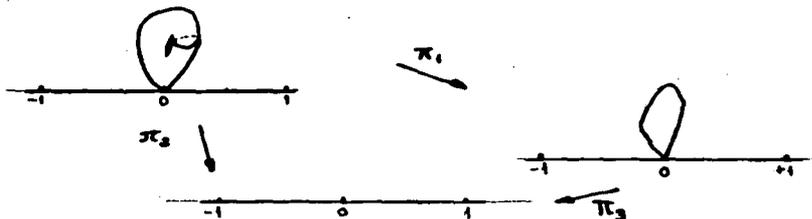
$$\sigma : S^1 \times (\tilde{K} \times (-1, 1)) \rightarrow \tilde{K} \times (-1, 1)$$

$$\sigma(\theta, k, t) = (\phi^{-1} \rho(\sigma_t(\theta, \rho^{-1} \sigma_t(k))), t)$$

Esta acción resulta ser libre y deja globalmente invariantes los conjuntos de la forma $(\tilde{K}, t_0), t_0 \in (-1, 1)$.

Ahora como la fibra es compacta, el espacio de las órbitas Ω es una variedad diferenciable (Hausdorff).

Sean $\pi_1 : \tilde{K} \times (-1, 1) \rightarrow \Omega$ la proyección natural y $\pi_2 : \tilde{K} \times (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$ la proyección al segundo factor que resulta ser una submersión de variedades. Se define entonces la submersión $\pi_3 : \Omega \rightarrow (-1, 1)$ como $\pi_3(m) = \pi_2(k, t)$ donde k varía en la fibra S^1 de K tal que $\pi_1(k, t) = m$.



4. Construcción de vecindades toroidales.

Existe un sistema de vecindades saturado por las fibras de la acción σ en $\tilde{K} \times (-1, 1)$ tal que uno de los campos tangentes a las curvas coordenadas se proyecta al campo unitario tangente al intervalo $(-1, 1)$.

Para la obtención de este sistema, se va a construir en todo punto una sección transversal a las fibras de la acción σ , la cual tendrá en su espacio tangente al campo $\frac{\partial}{\partial t}$, definido por las curvas

$$\alpha : (-1, 1) \rightarrow (\tilde{K} \times (-1, 1)) \text{ tales que } \alpha(t) = (k, t)$$

donde k es un punto fijo de \tilde{K} .

Nota: Si V tiene dimensión compleja l , \tilde{K} tiene dimensión real $2l - 1$, abusando de la notación a continuación se supondrá que \tilde{K} tiene dimensión real n .

Sea (k_0, t_0) un punto en $\tilde{K} \times (-1, 1)$. Sea $W = W_1 \times \dots \times W_{n+1}$ una vecindad producto con coordenadas (x_1, \dots, x_{n+1}) , donde W_i es difeomorfo a un intervalo y $\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}$ es el campo tangente a las órbitas de σ expresado en estas coordenadas. Sea $\frac{\partial}{\partial t}$ el campo vectorial $\frac{\partial}{\partial t}$ en estas nuevas coordenadas y supóngase que $\frac{\partial}{\partial t}$ tangente a la subvariedad

$$\mathcal{L} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in W \mid x_{n+1} = \pi_{n+1}(k_0, t_0) \text{ donde } \pi_{n+1} \text{ es la } n+1\text{-proyección}\}$$

Sea l una transversal a $\frac{\partial}{\partial t}(k_0, t_0)$ contenida en \mathcal{L} y que pasa por el punto (k_0, t_0) . Si l es suficientemente pequeña, debe ser transversal a $\frac{\partial}{\partial t}$ en todo punto para el cual $\frac{\partial}{\partial t}$ esté contenido en el espacio tangente a \mathcal{L} .

Ahora l es una $n - 1$ variedad que pasa por (k_0, t_0) . Dejando correr l bajo el flujo $\tilde{\phi}_t$ generado por el campo vectorial $\frac{\partial}{\partial t}$, se tiene una variedad $\Sigma(k_0, t_0) = \cup \tilde{\phi}_t(t, l)$ de dimensión n que contiene a (k_0, t_0) , tal que $\frac{\partial}{\partial t}$ es tangente y además resulta transversal al campo $\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}$.

La transversalidad se sigue del hecho de que $\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}(k_0, t_0)$ no es tangente a $\Sigma(k_0, t_0)$ en el punto (k_0, t_0) y por la continuidad del campo $\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}$ no está en el generado por $\{\frac{\partial}{\partial t}, TW_0\}$ en una vecindad de (k_0, t_0) .

Por otro lado, si $\frac{\partial}{\partial t}(k_0, t_0)$ no está contenido en \mathcal{L} , entonces cualquier subvariedad l de dimensión $n - 1$ contenida en \mathcal{L} puede ser utilizada para construir la sección $\Sigma(k_0, t_0)$ con las propiedades anteriores, lo importante es que el campo vectorial $\frac{\partial}{\partial t}$ no sea tangente a l en una vecindad del punto (k_0, t_0) . Ahora bien, por la transitividad de la acción sobre las fibras, la unión de las imágenes de $\Sigma(k_0, t_0)$ variando θ en S^1 , $\cup_{\theta \in S^1} \sigma(\theta, \Sigma(k_0, t_0))$ es una vecindad $V(k_0, t_0)$ formada por órbitas de la acción.

Así cada punto $(k, t) \in V(k_0, t_0)$ se identifica con un único punto $s \in \Sigma(k_0, t_0)$ al ser transformado por σ con un único ángulo $\theta \in S^1$, por lo que la función

$$\phi : V(k_0, t_0) \rightarrow \Sigma(k_0, t_0) \times S^1 \text{ tal que } \phi(k, t) = (s, \theta)$$

es claramente un difeomorfismo pues corresponde a componer acciones diferenciables. Además como el campo $\frac{\partial}{\partial t}$ es tangente a $\Sigma(k_0, t_0)$ se puede suponer que si (s_1, \dots, s_n) son las coordenadas de $\Sigma(k_0, t_0)$ como n -variedad, $s_n = \bar{t}$ es decir que $\frac{\partial}{\partial t}$ es un campo coordenado. A la pareja $(\phi, V(k_0, t_0))$ se le llama *vecindad toroidal*.

La acción σ expresada en estas coordenadas tiene la siguiente forma:

$$\sigma : S^1 \times (\Sigma(k_0, t_0) \times S^1), \sigma(\theta, (s_1, \dots, s_n), w) = (s_1, \dots, s_n, \theta + w)$$

por lo tanto el espacio de las hojas es identificado con $\Sigma(k_0, t_0)$, con su proyección $\pi_2 \Sigma(k_0, t_0) \times S^1 \rightarrow \Sigma(k_0, t_0)$, al segundo factor.

Análogamente la proyección π_1 al intervalo $(-1, 1)$ restringida a esta vecindad toroidal tiene la forma

$$\pi_1 : \Sigma(k_0, t_0) \times S^1 \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \pi_1(s_1, \dots, s_n, \theta) = s_n = t$$

Finalmente la proyección π_3 en esta carta coordenada se define como

$$\pi_3 : \Sigma(k_0, t_0) \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \pi_3(s_1, \dots, s_n) = s_n = t$$

Por lo que el diagrama conmuta.

¿qué diagrama?

5. Construcción de un campo $U(k, t)$, equivariante bajo la acción de σ tal que $D\pi_2(U) = \frac{\partial}{\partial r}$, el campo unitario canónico en $(-1, 1)$.

En $\tilde{K} \times (-1, 1)$ se considera el campo diferencial $\frac{\partial}{\partial t}$ que en cada punto (k, t_0) está definido por la curva

$$\gamma : (-s, s) \rightarrow \tilde{K} \times (-1, 1) \quad \gamma(t) = (k, t_0 + t)$$

Este campo no es equivariante bajo σ , sin embargo al promediarlo a lo largo de cada fibra, genera un campo equivariante. Se define

$$U(k, t) = 1/2\pi \int_0^{2\pi} D\sigma(\theta, \sigma(-\theta, (k, t))) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) d\theta$$

Obsérvese que $U(k, t)$ es equivariante bajo la acción de σ .

Para $\theta_0 \in S^1$ se tiene que

$$\begin{aligned} D\sigma(\theta_0, k, t)(U(k, t)) &= \\ D\sigma(\theta_0, k, t)(1/2\pi \int_0^{2\pi} D\sigma(\theta, \sigma(-\theta, k, t)) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) d\theta) &= \\ 1/2\pi \int_0^{2\pi} D\sigma(\theta_0 + \theta, \sigma(-\theta, k, t)) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) d\theta &= \\ 1/2\pi \int_0^{2\pi} D\sigma(\theta_0 + \theta, \sigma(-\theta_0 - \theta, \sigma(\theta_0, k, t))) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) d\theta &= \\ 1/2\pi \int_{\theta_0}^{2\pi + \theta_0} D\sigma(\theta', \sigma(-\theta', \sigma(\theta_0, k, t))) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) d\theta' &= \\ 1/2\pi \int_{\theta_0}^{2\pi} D\sigma(\theta', \sigma(-\theta', \sigma(\theta_0, k, t))) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) d\theta' + & \\ 1/2\pi \int_{2\pi}^{2\pi + \theta_0} D\sigma(\theta', \sigma(-\theta', \sigma(\theta_0, k, t))) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) d\theta' &= \\ 1/2\pi \int_{\theta_0}^{2\pi} D\sigma(\theta', \sigma(-\theta', \sigma(\theta_0, k, t))) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) d\theta' + & \\ 1/2\pi \int_0^{\theta_0} D\sigma(\theta', \sigma(-\theta', \sigma(\theta_0, k, t))) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) d\theta' &= \\ U(\sigma(\theta_0, k, t)) & \end{aligned}$$

La penúltima igualdad se da por la periodicidad de la acción σ .

Ahora para mostrar que $D\pi_2(U) = \frac{\partial}{\partial r}$, se utilizan las cartas toroidales.

Sea $(\phi, V_{(k_0, t_0)})$ una carta toroidal alrededor del punto (k_0, t_0) . Sean $\frac{\partial}{\partial t} = D\phi \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t}, \dots, 1, \frac{\partial \phi_n}{\partial t} \right)$ Donde las ϕ_i son las funciones coordenadas de ϕ . Así en estas coordenadas el campo vectorial U tiene la forma

$$1/2\pi \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t}(\theta, \phi(k, t)) d\theta =$$

$$1/2\pi \left(\int_0^{2\pi} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} d\theta, \dots \right.$$

$$\left. \dots, 2\pi, \int_0^{2\pi} \frac{\partial \phi_n}{\partial t} d\theta \right)$$

Por lo tanto $D\pi_2(U) = \frac{\partial}{\partial t}$.

6. Construcción de un difeomorfismo $f_t : (\tilde{K}, t_0) \rightarrow (\tilde{K}, t)$, $t_0 = 0$ el cual manda la foliación \mathfrak{F}_R en la foliación \mathfrak{F}_Y para t suficientemente pequeño.

Sea $(\phi, V_{(k_0, t_0)})$ una vecindad toroidal de (k_0, t_0) . Sea K' la restricción de \tilde{K} en la vecindad. Así, (K', t) está contenida en $V_{(k_0, t_0)}$ si t es suficientemente pequeña.

Por el inciso anterior, el campo $U(k, t)$ es un campo transversal a las subvariedades $K'_t = \{(K', t) | t \text{ fijo}\}$, para todo t . Por la compacidad de K' y un argumento conocido de la teoría básica de ecuaciones diferenciales, existe un número real positivo δ y un flujo Φ con dominio $(-\delta, \delta) \times K' \times (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ y codominio $K' \times (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ que integra al campo $U(k, t)$ restringido a $K' \times (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$. En coordenadas toroidales se tiene que:

$$\Phi(u, s_1, \dots, s_n, \theta) = (\Phi_1(u, s_1, \dots, \theta), \dots, s_n + u, \Phi_n(u, s_1, \dots, s_n, \theta))$$

Por lo tanto $\pi_2 \Phi(u, s_1, \dots, s_n, \theta) = u + s_n$ y entonces se tiene que

$$\Phi(u, K', t_0) : (K', t_0) \rightarrow (K', t_0 + u)$$

es un difeomorfismo. Pero en coordenadas toroidales $D\pi_1 = Id$, así que

$$D\pi_1(U) = 1/2\pi \left(\int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} d\theta, \dots, 2\pi \right)$$

es el campo vectorial tal que $\pi_1 \Phi$ es el flujo que lo integra localmente, es decir, si se define $f_{t_0+u} : (K', t_0) \rightarrow (K', t_0 + u)$. Como $f_{t_0+u}(k) = \Phi(u, k, t_0)$, se tiene un difeomorfismo que induce otro \tilde{f}_{t_0+u} en el espacio de las hojas y que conmuta con la proyección.

Finalmente, como todo esto se puede hacer para todo t en la vecindad toroidal se extiende el dominio de definición a toda la vecindad.

Por otro lado como \tilde{K} es compacto, existen un número finito de vecindades toroidales, $V_{(k_1, 0)}, \dots, V_{(k_r, 0)}$ donde se tienen definidos difeomorfismos locales los cuales

coinciden en las intersecciones debido a que están definidos por el flujo de un campo definido globalmente.

Sea u un número real positivo tal que $t_0 + u$ sea un valor accesible en todas las vecindades $V_{(k_i, 0)}$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Entonces se define $f_{t_0+u} : (\tilde{K}, t_0) \rightarrow (\tilde{K}, t_0+u)$ de manera natural con los difeomorfismos locales de las vecindades toroidales.

Lo anterior permite definir si t_1 y t_2 están en un mismo intervalo suficientemente pequeño $(-\epsilon_0, \epsilon_0)$ un difeomorfismo

$$F_{t_1}^{t_2} : (\tilde{K}, \mathfrak{S}_{Y_i}) \rightarrow (K, \mathfrak{S}_{Y_i})$$

$$F_{t_1}^{t_2}(k) = \phi_{t_2}^{-1} \rho f(\rho^{-1} \phi_{t_1}) k$$

donde aquí la f se define como se hizo para la pareja $(t_0, t_0 + u)$.

7. Construcción de un germen de homeomorfismo $g_t : (V, \mathfrak{S}_R, 0) \rightarrow (V, \mathfrak{S}_{Y_i}, 0)$ para t en un intervalo suficientemente pequeño $(-\epsilon, \epsilon)$ vecindad de 0.

Supongase que $\rho_R, \rho_{Y_i} : [0, \infty) \times \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}$ son los flujos de precipitación asociados a los campos R y Y_i respectivamente.

Para todo $z \in V$ tal que $|z| < r_1$ existen únicos $s \in (0, \infty)$, $k \in \tilde{K}$ tales que $\rho_R(s, k) = z$.

Sea $g_t : (V, 0) \rightarrow (V, 0)$ definida por $g_t(z) = \rho_{Y_i}(s, f_t(k))$. de esta manera se obtiene el difeomorfismo deseado. \square

Corolario 2.3 Supóngase ahora que L_λ es el conjunto de gérmenes de campos vectoriales tangentes a V en una vecindad del origen de C^n tales que su parte lineal es un múltiplo complejo del campo radial, es decir $X \in L_\lambda$ si y solo si $X(x_1, \dots, x_n) = \lambda(x_1, \dots, x_n) + \dots$ $\lambda \in C^n$.

Entonces el campo $\lambda R(x_1, \dots, x_n)$ es L_λ -estructuralmente estable a un parámetro.

Teorema 2.4 Sea V una variedad homogénea con singularidad aislada en el origen de C^n .

Sea L el conjunto de gérmenes de campos vectoriales tangentes a V en una vecindad del origen de C^n , tales que su parte lineal es el campo radial.

Entonces si $X \in L$, X es topológicamente equivalente al campo radial $R \in V$.

Demostración Considérese la familia de campos vectoriales $Y_t = tR + (1-t)X$ donde t varía en el intervalo $(-\epsilon, 1+\epsilon)$ con ϵ un real positivo. La demostración consiste en probar que para todo Y_{t_0} campo de esta familia, existe una vecindad de Y_{t_0} tal que si Y_t está en esa vecindad, Y_t es homeomórficamente equivalente a Y_{t_0} . Si ocurre lo anterior, todo campo Y_t determina una componente conexa de la familia, el conjunto de campos vectoriales que son homeomórficamente equivalentes a Y_t ; pero la conexidad del intervalo implica que solo hay una componente y el teorema queda demostrado.

Sea Y_{t_0} un elemento de la familia. Existe un cambio de coordenadas

$$\phi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$$

tal que $D\phi_x(Y_{t_0}(z)) = R(\phi(z))$ Ahora si $t \neq t_0$ se tiene que

$$D\phi_x(Y_t(z)) = D\phi_x(tR(z) + (1-t)X(z)) =$$

$$D\phi_x(t_0R(z) + (t-t_0)R(z) + (1-t_0)X(z) + (t_0-t)X(z)) =$$

$$D\phi_x(t_0R(z) + (1-t_0)X(z) + (t-t_0)(R-X)(z)) = R(\phi(z)) + D\phi_x((t-t_0)(R-X)(z))$$

Así que $D\phi_x(Y_t(z)) \in L$.

Obsérvese además que si $\phi(V)$ es la imagen de la superficie V bajo ϕ , el campo vectorial radial es tangente, y por lo tanto $\phi(V)$ es homogénea con singularidad aislada, por lo tanto existe $\delta > 0$ y una familia analítica de homeomorfismos

$$\psi_r : (\phi(V), 0) \rightarrow (\phi(V), 0), \quad |r| < \delta$$

tal que ψ_r manda la foliación definida por el campo $D\phi(Y_t)$ en la foliación definida por el campo radial.

Finalmente la familia analítica de homeomorfismos definida como

$$\phi_r = \phi^{-1}\psi_r\phi : (V, 0) \rightarrow (V, 0)$$

transforma la foliación definida por el campo Y_t en la foliación definida por el campo Y_{t_0} , donde $r = t_0 - t$ varía en el intervalo $(-\delta, \delta)$. □

Por los resultados anteriores se tiene que si $X \in L_\lambda$, X y λR restringidos a V son topológicamente equivalentes en V , pero la identidad hace que R y λR sean topológicamente equivalentes, por lo que se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.5 Sea V una variedad homogénea con singularidad aislada en el origen de \mathbb{C}^n . Si $X \in L_\lambda$, entonces es topológicamente equivalente al campo radial en V .

CAPITULO 3

RIGIDEZ TOPOLOGICA DE CAMPOS EN SUPERFICIES HOMOGENEAS CON SINGULARIDAD AISLADA

INTRODUCCION

En el capítulo anterior se prueba un teorema de rigidez en el espacio L de campos vectoriales tangentes a una variedad homogénea con singularidad aislada, cuya parte lineal es un múltiplo del campo radial; sin embargo no se especificó qué tan general es este conjunto L , en el espacio de todos los gérmenes de campos vectoriales tangentes a la variedad V .

En este capítulo se analiza y precisa este problema cuando V es una superficie encajada en C^3 .

En el Teorema 3.1 se hace una descripción del conjunto de gérmenes de campos vectoriales tangentes a S cuya parte lineal es no nula. Este conjunto resulta ser L , el cual con la topología de las series de potencias es un subconjunto abierto y denso. Finalmente, utilizando los Teoremas 2.5 y 3.1 se obtiene un resultado de rigidez: En un abierto y denso en el espacio de gérmenes tangentes a una superficie S homogénea, irreducible, con singularidad aislada en C^3 , todos los gérmenes son topológicamente equivalentes al campo radial, Teorema 3.2.

1 SUPERFICIES CON UNA TERCIA EQUILIBRADA

3.1 Definición. Supóngase que

$$p(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=1}^n a_k x_1^{a_k^1} x_2^{a_k^2} x_3^{a_k^3}$$

es un polinomio tal que $a_k \in \mathbb{C}^0$. El polígono asociado a $p(x_1, x_2, x_3)$ es el conjunto de n puntos o vértices distintos en \mathbb{C}^3 cuyas coordenadas son las potencias de cada sumando, es decir, $\{(a_1^1, a_2^1, a_3^1), \dots, (a_n^1, a_n^2, a_n^3)\}$.

3.2 Lema Sea S una superficie homogénea, irreducible, no lineal con singularidad aislada en el origen. Entonces el polinomio homogéneo que la define tiene un polígono asociado con al menos tres vértices.

Demostración Supóngase que $p(x_1, x_2, x_3)$ es un polinomio que define a S tal que su polígono tiene solo dos vértices. $p(x_1, x_2, x_3) = ax_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} + bx_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3}$. Sin perder generalidad se puede suponer que $b_3 > 1$ (de no ser así, S estaría constituida por planos). $\frac{\partial p}{\partial x_i}(bx_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3})|_{(x_1, x_2, 0)} = 0$.

Supóngase que a_1 o a_2 son mayores que 1. Entonces $\frac{\partial p}{\partial x_i}(0, x_2, 0) \equiv 0$ y la singularidad no sería aislada. Por lo que solo es posible que $a_1 = a_2 = 1$ (si alguna se anula, la singularidad no sería aislada).

Pero la transformación lineal que define la matriz

$$\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

transforma al polinomio $p(x_1, x_2, x_3)$ en $\tilde{p}(x_1, x_2, x_3) = -av_1^2 - av_2^2 + bv_3^2$. Nótese que en tal caso S corresponde al cociente $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. \square

Definición 3.3 Sea $p(x_1, x_2, x_3)$ un polinomio; se define A_i^p como el subconjunto de vértices del polígono de p para los cuales su i -ésima coordenada siempre se anula.

Nótese que A_i^p corresponde al conjunto de sumandos de p , para los cuales no aparece la i -ésima coordenada.

Una condición necesaria para que los únicos campos lineales diagonales tangentes a una superficie homogénea sean múltiplos del campo radial en \mathbb{C}^3 es dada en el siguiente Lema. Dado un polinomio se dice que su polígono define dos vectores linealmente independientes, si existen tres vértices a, b, c tales que los vectores $a - b$ y $a - c$ son linealmente independientes.

3.4 Lema Sea S una superficie homogénea en \mathbb{C}^3 , definida por un polinomio cuyo polígono define dos vectores linealmente independientes.

Entonces los únicos campos lineales diagonales en \mathbb{C}^3 , tangentes a S son los múltiplos del campo radial. Es decir; $\chi(x_1, x_2, x_3) = \lambda(x_1, x_2, x_3)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demostración Sean $a = (a_i)$, $b = (b_i)$, $c = (c_i)$ $i = 1, 2, 3$ tres vértices del polígono para los cuales $a - b$ y $a - c$ son linealmente independientes. Sea $\bar{X}(x_1, x_2, x_3) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3)$ un campo lineal diagonal en C^3 , tangente a S . Sea

$$p(x_1, x_2, x_3) = d_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} + d_2 x_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3} + d_3 x_1^{c_1} x_2^{c_2} x_3^{c_3} + \dots + d_m x_1^{e_1} x_2^{e_2} x_3^{e_3},$$

el polinomio que define a S . La condición de tangencia $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial p}{\partial x_i} \lambda_i x_i = 0$ determina las siguientes igualdades:

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^3 \lambda_i b_i = \sum_{i=1}^3 \lambda_i c_i = \dots = \sum_{i=1}^3 \lambda_i e_i$$

Una condición necesaria de tangencia es que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ satisfaga el siguiente sistema:

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i (a_i - c_i) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i (b_i - c_i) = 0.$$

Por la homogeneidad de p se sabe que $(\lambda, \lambda, \lambda)$ es solución del sistema. Así el núcleo de la matriz de coeficientes es de dimensión mayor o igual a 1. Si tuvieran dimensión dos, sus vectores columna serían linealmente dependientes, pero por hipótesis esto no ocurre. \square

Nota: Como la condición de tangencia no depende de los coeficientes d_i (no cero) del polinomio $p(x_1, x_2, x_3)$, en adelante se supondrá que estos coeficientes valen siempre la unidad.

Afirmación 3.5 Si S es irreducible y $p(x_1, x_2, x_3)$ es el polinomio que la define, existe una pareja de vértices a y b del polígono de p tales que $a \neq b$ y $a \in \mathcal{A}_i^p$, $b \in \mathcal{A}_j^p$ para $i \neq j$.

Demostración Por el lema 3.2, existen tres vértices distintos a, b, c . Suponer que los tres están en \mathcal{A}_i^p implica que S no es irreducible o que hay otro vértice $d \in \mathcal{A}_j^p$ con $j \neq i$. \square

2 SUPERFICIES Y VERTICES PRINCIPALES

A continuación se define una clase de superficies para las cuales se cumplen las hipótesis del lema 3.4.

Lema 3.6 Sea S una superficie homogénea e irreducible, no lineal en C^3 , con singularidad aislada y considérese la pareja de vértices a y b como en la afirmación anterior, supóngase que existe un tercer vértice c distinto de a y b tal que esté en \mathcal{A}_k^p , $k \neq i, j$.

Entonces los vectores del polígono que generan son linealmente independientes.

Demostración Supóngase que los vectores con entradas $a_i - b_i$ y $a_i - c_i$ con $i = 1, 2, 3$, son linealmente dependientes, entonces existe $\lambda \in \mathbb{Q}^*$ tal que $\lambda(a_i - b_i) = a_i - c_i$ para $i = 1, 2, 3$ generando así un sistema de ecuaciones lineales

$$(\lambda - 1)a_i - \lambda b_i + c_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

El núcleo de la transformación definida por la matriz cuyos vectores columna son $(\lambda - 1)(1, 1, 1)$; $-\lambda(1, 1, 1)$; $(1, 1, 1)$ respectivamente tiene dimensión dos. Una base de este espacio está formada por los vectores $(0, 1, \lambda)$ y $(1, 1, 1)$; nótese que $\lambda = 1$ implica $b_i = c_i$.

Toda solución (a_i, b_i, c_i) del sistema anterior puede expresarse como $m_1(0, 1, \lambda) + n_1(1, 1, 1)$, por lo que sin perder generalidad, se puede suponer que $a \in A_1^P$, $b \in A_2^P$ y $c \in A_3^P$. Entonces.

$$(0, b_1, c_1) = m_1(0, 1, \lambda) + n_1(1, 1, 1)$$

$$(a_2, 0, c_2) = m_2(0, 1, \lambda) + n_2(1, 1, 1)$$

$$(a_3, b_3, 0) = m_3(0, 1, \lambda) + n_3(1, 1, 1)$$

De la primera ecuación se concluye: $n_1 = 0$ lo que implica $b_1 = m_1 > 0$, y como $c_1 = m_1\lambda$, entonces $\lambda > 0$. De la tercera ecuación se concluye: $\lambda m_3 = -n_3$ entonces $m_3 < 0$ pues $n_3 > 0$ pero $n_3 + m_3 = b_3 > 0$ por lo que $\lambda > 1$, pues $\lambda < 1$ implica que $|m_3| > n_3$. De la segunda ecuación se concluye $m_2 = -n_2$ y $\lambda m_2 + n_2 \geq 0$ entonces $-\lambda n_2 + n_2 \geq 0$ lo cual es una contradicción. \square

Definición 3.7 Una tercia de vértices distintos a, b y c de un polígono se dice que está *equilibrada* si $a \in A_1$, $b \in A_2$ y $c \in A_3$.

La siguiente proposición se sigue inmediatamente de los lemas 3.4 y 3.6.

Proposición 3.8 Sea S una superficie homogénea, irreducible y con singularidad aislada en \mathbb{C}^3 tal que el polinomio que la define posee un polígono con una tercia equilibrada de vértices.

Entonces los únicos campos lineales diagonales tangentes a S son múltiplos del campo radial, es decir, $X(x_1, x_2, x_3) = \lambda(x_1, x_2, x_3)$ con $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

A continuación se especifica una condición suficiente para que los únicos campos lineales diagonales tangentes a una superficie homogénea, irreducible, con singularidad aislada, sean los múltiplos del campo radial.

Definición 3.9 Un vértice de un polígono se dice que es *principal* si tiene dos coordenadas nulas.

Proposición 3.10 Supóngase que S es una superficie homogénea, irreducible con singularidad aislada en \mathbb{C}^3 tal que dos vértices del polígono del polinomio que la define son principales.

Entonces, los únicos campos lineales, diagonales tangentes a S , son múltiplos del campo radial.

Demostración Sin perder generalidad se puede suponer que los vértices principales son $(n, 0, 0)$ y $(0, n, 0)$. Así se tiene que

$$p(x_1, x_2, x_3) = z_1^n + z_2^n + \sum_{\alpha} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} + \sum_{\beta} z_1^{\beta_1} z_3^{\beta_2} + \sum_{\gamma} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} + \sum_{\delta} z_1^{\delta_1} z_2^{\delta_2} z_3^{\delta_3}$$

donde $\sum_{\alpha} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}$, $\sum_{\beta} z_1^{\beta_1} z_3^{\beta_2}$ y $\sum_{\gamma} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3}$ determinan los vértices en A_3^p , A_2^p y A_1^p respectivamente.

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = n z_1^{n-1} + A(x_2, x_3) + x_1(C(x_1, x_2, x_3))$$

donde A corresponde a la suma de los monomios cuyos vértices están en $A_1^{\frac{\partial p}{\partial x_1}}$.

Si el polinomio $A(x_2, x_3)$ tiene dos o más sumandos y ningún factor común, entonces aparecen sumandos de la forma x_2^{n-1}, x_3^{n-1} los cuales generan una tercia equilibrada del polinomio $p(x_1, x_2, x_3)$ y por la proposición anterior se tiene el resultado. Por tanto A factoriza una variable o tiene a lo más un sumando.

Supóngase ahora que

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = n z_2^{n-1} + B(x_1, x_3) + x_2(D(x_1, x_2, x_3))$$

donde B corresponde a la suma de monomios cuyos vértices están en $A_2^{\frac{\partial p}{\partial x_2}}$. Por un argumento como el anterior se concluye que B factoriza una variable o tiene a lo más un sumando.

Si $p(x_1, x_2, x_3) \neq 0$ sobre la línea $(0, 0, x_3)$, entonces $p(0, 0, x_3) = x_3^n$ lo que implica que el vértice $(0, 0, n)$ está en el polígono y se tiene una tercia en equilibrio. Por lo tanto se puede suponer que la línea $(0, 0, x_3)$ pertenece a S . Ahora $\frac{\partial p}{\partial x_1}(0, 0, x_3) = A(0, x_3) \neq 0$ implica que el monomio x_3^{n-1} es sumando de $A(x_2, x_3)$ por lo tanto el vértice $(1, 0, n-1)$ está en el polígono y genera junto a los anteriores una tercia equilibrada. Por lo tanto se puede suponer que $A(0, x_3) = 0$. Así que $\frac{\partial p}{\partial x_1}(0, 0, x_3) = 0$. Un argumento análogo muestra que $B(0, x_3) = 0$ por tanto $\frac{\partial p}{\partial x_2}(0, 0, x_3) = 0$. Pero como la singularidad es aislada entonces $\frac{\partial p}{\partial x_3}(0, 0, x_3) \neq 0$ y por tanto $\frac{\partial p}{\partial x_3}(0, 0, x_3) = n x_3^{n-1}$ lo que obliga a que el vértice $(0, 0, n)$ esté en el polígono y así se tenga una tercia equilibrada. \square

Proposición 3.11 Supóngase que S es como en la proposición anterior y que el polígono del polinomio (con grado mayor que dos) que la define tiene solamente un vértice principal. Entonces todo campo lineal, diagonal, tangente, debe ser un múltiplo del campo radial.

Demostración Sin perder generalidad se puede suponer que $p(x_1, x_2, x_3) = x_1^n + A(x_2, x_3) + B(x_1, x_2, x_3)$ donde todo sumando de B tiene a x_1 como factor.

$A(x_2, x_3)$ no puede ser nulo pues x_1 sería factor de p . Así, existe un vértice en A_1^p . B no puede tener sumandos que definan vértices en $A_2^p \cup A_3^p$ porque se consigue una tercia equilibrada inmediatamente. Por lo tanto todo vértice definido por monomios de B está en el complemento de $(\cup_{i=1,2,3} A_i^p)$. Entonces $\frac{\partial p}{\partial x_1}(0, 0, x_3) = 0 = \frac{\partial p}{\partial x_1}(0, x_2, 0)$. Además $\frac{\partial p}{\partial x_2}(0, x_2, 0) = 0 = \frac{\partial p}{\partial x_3}(0, 0, x_3)$ pues de otra forma habría otro vértice principal.

Como los ejes x_2 y x_3 están en S y la singularidad es aislada, $\frac{\partial p}{\partial x_2}(0, 0, x_3) \neq 0$ por lo tanto p tiene un monomio de la forma $x_2 x_3^{n-1}$ y análogamente $\frac{\partial p}{\partial x_3}(0, x_2, 0) \neq 0$ implica que p tiene un monomio de la forma $x_2^{n-1} x_3$. Entonces los vértices $(n, 0, 0)$, $(0, n-1, 1)$ y $(0, 1, n-1)$ están definidos por p .

La condición de tangencia de un campo lineal diagonal implica la resolución del sistema $\lambda_1 n = \lambda_2(n-1) + \lambda_3 = \lambda_2 + (n-1)\lambda_3$ con variables λ_i . Entonces si $n > 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1$ y el campo debe ser un múltiplo del radial. \square

Observación: Para el caso $n = 2$ la afirmación no es cierta. Considérese el ejemplo

$$p(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_3 x_2$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 2x_1; \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = 2x_3; \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = 2x_2$$

la condición de tangencia:

$$2\lambda_1 x_1^2 + 2\lambda_2 x_2 x_3 + 2\lambda_3 x_2 x_3 = 2\lambda_1 x_1^2 + 2(\lambda_2 + \lambda_3)x_2 x_3 = 0$$

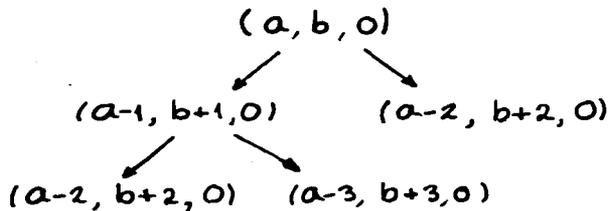
entonces $\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3$. Pero este caso ha sido analizado en el capítulo 1.

Teorema 3.12 Si S es una superficie homogénea de grado mayor que dos, irreducible con singularidad aislada en C^3 , los únicos campos lineales tangentes son múltiplos del campo radial, es decir son de la forma $X(x_1, x_2, x_3) = \lambda(x_1, x_2, x_3)$, $\lambda \in C^\circ$.

Demostración La primera parte de la demostración consiste en observar que el resultado es cierto si se restringe el enunciado a la familia de campos lineales diagonales tangentes a S .

Por las dos proposiciones anteriores, se tiene que si $p(x_1, x_2, x_3)$ tiene uno o dos vértices principales el teorema es cierto con la restricción anterior. Si $p(x_1, x_2, x_3)$ no tiene vértices principales, por la afirmación 2.1 se tiene que hay dos vértices $a \in A_i^p$ y $b \in A_j^p$ con $i \neq 0$ por lo que si $k \neq i, j$ y $A_k^p = \emptyset$ entonces la superficie no es irreducible por tanto se tiene una tercia equilibrada y por la proposición 3.8 se tiene el resultado, en la familia de los campos lineales diagonales.

Supóngase ahora que $X(x_1, x_2, x_3)$ es un campo lineal diagonalizable. Entonces existe $M \in GL(3, C)$ tal que $MXM^{-1} = D$, donde D es una matriz diagonal, es decir si se aplica el cambio de coordenadas definido por $M \in C^3$, el campo lineal $D(x_1, x_2, x_3)$



es diagonal y tangente a la superficie homogénea \tilde{S} obtenida de S . Pero \tilde{S} cumple las hipótesis del teorema, por tanto el campo $D(x_1, x_2, x_3)$ es un múltiplo del radial y como D conmuta con M se tiene que X es un múltiplo del campo radial.

Supóngase que $X(x_1, x_2, x_3)$ no es diagonalizable. Se probará que entonces no puede ser tangente a S , para lo cual se analizarán sus posibles formas de Jordan.

Por un cambio de coordenadas se puede suponer que X está expresada en su forma de Jordan directamente.

a) Supóngase que $X(x_1, x_2, x_3) = D(x_1, x_2, x_3) + N(x_1, x_2, x_3)$ donde D es un múltiplo del campo radial y $N(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, 0)$; la condición de tangencia a S aplicada a $N(x_1, x_2, x_3)$ tiene la forma $0 = \frac{\partial p}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial p}{\partial x_2} x_1$ a lo largo de S . Obsérvese $\frac{\partial p}{\partial x_i} x_j$ es un polinomio homogéneo del mismo grado que $p(x_1, x_2, x_3)$ o bien el polinomio nulo. Como p es irreducible $p | \frac{\partial p}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial p}{\partial x_2} x_1$ y por el grado $p(x) = k(\frac{\partial p}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial p}{\partial x_2} x_1)(x)$.

Si $p(x_1, x_2, x_3)$ tiene algún sumando de la forma x_1^n se sigue inmediatamente la imposibilidad de la tangencia.

Analizando a los posibles vértices de $p(x_1, x_2, x_3)$ se tiene que por hipótesis p tiene un vértice de la forma $(a, b, 0)$, pero la igualdad anterior implica que $\frac{\partial p}{\partial x_1} x_2$ tiene uno de la forma $(a-1, b+1, 0)$ el cual se cancela con algunos de $\frac{\partial p}{\partial x_2} x_1$; lo anterior implica que p tiene un vértice de la forma $(a-2, b+2, 0)$, o bien p mismo tiene un vértice de la forma $(a-1, b+1, 0)$.

Repetiendo este argumento se llega a que p tiene un vértice principal lo cual es una contradicción, esto completa la prueba para esta forma de Jordan.

b) Asociada a la otra forma de Jordan se tiene una construcción como la anterior; la ecuación que determina la condición de tangencia es $p(x) = k \frac{\partial p}{\partial x_1} x_2$, lo cual conduce a una contradicción inmediata pues p no sería irreducible. \square

Los resultados anteriores con la topología de las series de potencias se pueden

sumarizar en el siguiente teorema.

Teorema 3.13 Sea S una superficie homogénea de grado mayor que dos; irreducible, con singularidad aislada en \mathbb{C}^3 . Sea $X_0(S)$ el espacio de gérmenes de campos vectoriales tangentes a S en la singularidad. Entonces, existe un conjunto abierto y denso de $X_0(S)$ formado por gérmenes que son topológicamente equivalentes al campo radial. \square

BIBLIOGRAFIA

1. [ARN] ARNOLD, V., Chapitres supplementaires de la theorie des equations differentielles ordinaires. Editions MIR 1980.
2. [DUM-ROS] DUMORTIER, F. et ROUSSARIE, R., Etude locale des champs de vecteurs a parametres. Soc. Math. de France Astérisque 59-60 1978, 7-42.
3. [EP] EPSTEIN, D., Periodic flows on three-manifolds. Ann. of Math. 95, 1972, 75-82.
4. [GU] GUCKENHEIMER, J., Hartman's theorem for complex flow in the Poincaré domain. Compositio Mathematica, Vol.24, Fasc.1, 1972, 75-82.
5. [GUI] GUILLEMIN, V. and GOLUBITSKI, M., Stable mappings and their singularities, Graduate texts in Math. Springer-Verlag, 1973.
6. [GUN] GUNNING, R. and ROSSI, H., Analytic functions of several complex variables. Prentice Hall, N.J., 1965.
7. [KLE] KLEIN, F., Lectures on the Icosahedron and the solution of the equations of the fifth degree. Teubner 1884, Dover 1956.
8. [MIL] MILNOR, J., Singular points of complex hypersurfaces. Ann. of Math. Studies. Princeton University. Press. Study 61.
9. [MILN] Ibid, On the 3-Dimensional Brieskorn manifolds $M(p,q,r)$. Ann. of math. Studies Princeton University. Press. 84.
10. [OR] ORLIK, P., Seifert Manifolds., Springer-Verlag Lectures Notes 291, 1972.
11. [PA] PALIS, J., On Morse-Smale dynamical systems, Topology 8, 1969.
12. [PO] POINCARÉ, H., Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles, thèse. Paris, 1879.
13. [SE-THE] SEIFERT, H.- THRELHALL, W., Topologische Untersuchungen der Diskontinuitätsbereiche endlicher bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes I. Math. Ann. 104 1931, 1-70, II Math. Ann. 107 1933. 543-596.