

**Universidad Nacional Autónoma de México**

---

**Facultad de Ciencias**

**Descripción Dinámica de la Dispersión  
por un Potencial.**

**TESIS PROFESIONAL**

**JUAN MANUEL LOZANO MEJIA**

---

**México.**

**1953.**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mis Padres*

DESCRIPCION DINAMICA DE LA DISPERSION  
POR UN POTENCIAL

El autor agradece al Dr. Marcos Moshinsky su ayuda y estímulo para la realización de esta tesis.

-----

I. Introducción.

La finalidad de la presente tesis es estudiar la dispersión nuclear por medio de un potencial de corto alcance según el formalismo general de la matriz  $S$ ; se discuten algunos casos particulares para ilustrar el tratamiento general seguido en el trabajo, y por último, mediante el estu-

dio de la penetración de una barrera de potencial por un paquete de ondas inicialmente encerrado en el interior de la barrera, dar una interpretación a los diferentes términos que aparecen en la solución de las ecuaciones dependientes del tiempo, que son las que se usan en todo este trabajo.

El problema de la dispersión por un potencial tiene una solución bien conocida cuando se refiere solamente al estado estacionario del proceso, por lo que el interés de este estudio radica principalmente en describir en el tiempo el proceso de la dispersión y en encontrar su correlación con los polos de la matriz  $S$ . Del mismo modo al discutir el caso de penetración de una barrera de potencial, todo el interés estará radicado en dar la descripción dinámica del proceso, porque la descripción estática es bien conocida; este problema se trata también por medio del formalismo general de la matriz  $S$ .

En un trabajo reciente, se ha resuelto el problema del comportamiento dinámico de la dispersión nuclear por medio de condiciones a la frontera en un espacio de Fock convenientemente elegido. Este es el llamado proceso multinivelar<sup>1</sup>.

La dispersión nuclear puede considerarse como dispersión por medio de un potencial de corto alcance, y describirla usando el formalismo de la matriz  $S$ . En un trabajo anterior se planteó el problema así considerado para el caso particular de momento angular cero, usando un tipo de transformada especial para ese caso. Ahora se extenderá el estudio de la dispersión por un potencial de corto alcance al caso de momento angular arbitrario y singularidad esencial al infinito en la función  $S$ . Concretando el problema, este consiste en encontrar el comportamiento en el tiempo de un paquete de ondas arbitrario, originalmente situado fuera

$$-\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \psi_1 + V(r) \psi_1 = i \frac{\partial \psi_1}{\partial t}, \quad (1)$$

donde  $V(r)$  es el potencial de corto alcance definido por

$$V(r) = \begin{cases} V(r) , & \text{si } r \leq a , \\ 0 , & \text{si } r > a . \end{cases} \quad (2)$$

Para no complicar innecesariamente la manipulación matemática del problema, es conveniente que  $V(r)$  sea una función continua y con derivada continua, aunque el análisis puede generalizarse fácilmente a potenciales que no tengan esta restricción.

Llamando  $k$  al número de onda de la partícula incidente y  $E = \frac{1}{2} k^2$  a su energía, se tiene que en ausencia de potencial, la función  $\psi_1(r, k, t)$  toma la forma

$$\psi_1(r, k, t) = j_1(kr) \exp(-i \frac{1}{2} k^2 t), \quad (3)$$

ya que la función  $j_1(kr)$  satisface la ecuación

$$-\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] j_1(kr) - \frac{1}{2} k^2 j_1(kr) = 0 .$$

Se sugiere entonces definir una función  $u_1(\kappa, r)$  en la siguiente forma:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du_1}{dr} \right) + \left[ \kappa^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - 2V(r) \right] u_1 = 0, \quad (4)$$

y si  $V(r) \rightarrow 0$ , entonces  $u_1(\kappa, r) \rightarrow j_1(\kappa r)$ .  $0 \leq r < \infty$ .

del potencial dispersor; con este objeto, se verá que es útil introducir una función de Green apropiada al problema, cuya forma analítica se obtendrá explícitamente.

El análisis que se desarrolla en este estudio, se restringe a energías no relativistas para la partícula incidente sobre el potencial.

Por simplicidad, se supondrá que el potencial dispersor tiene simetría esférica. En este trabajo, potencial de corto alcance significa que su acción termina a una cierta distancia fija finita  $a$ , la cual se llama alcance del potencial; en símbolos, si  $V(r)$  es el potencial dispersor,

$$V(r) = \begin{cases} V(r) \neq 0 & , \quad \text{si } r \leq a & , \\ 0 & , \quad \text{si } r > a & . \end{cases}$$

Se supone además que el alcance  $a$  del potencial es comparable con la longitud de onda de la partícula incidente, de modo que la dispersión  $S$  no es preponderante y debe, en consecuencia, estudiarse el caso de momento angular arbitrario.

## II. Planteamiento del problema.

Es cómodo usar el sistema natural de unidades  $\hbar = c = 1$ , y además se supondrá que la masa de la partícula incidente es  $m = 1$ .

La ecuación que satisface la función de onda  $\psi_1$  que describe el estado del sistema es la ecuación de Schrödinger para momento angular  $l$  y con simetría esférica:

Se introduce la función  $w_1(\kappa, r)$  que satisface la ecuación

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dw_1}{dr} \right) + \left[ \kappa^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - 2V(r) \right] w_1 = 0, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (5)$$

y además la condición de que  $w_1(\kappa, r)$  es regular en  $r=0$ .

Se define la función  $R_1(\kappa^2)$  como sigue

$$R_1(\kappa^2) = \frac{w_1(\kappa, a)}{\left( \frac{dw_1}{dr} \right)_{r=a}}. \quad (6)$$

La función  $R_1(\kappa^2)$  es esencialmente el recíproco de la función  $f(E)$  introducida por Weisskopf<sup>2</sup> y otros en su formulación de la Teoría de las Reacciones Nucleares.

Con ayuda de  $w_1(\kappa, r)$  se puede construir una  $u_1(\kappa, r)$  que satisface la ecuación (4) y que tiene la forma

$$u_1(\kappa, r) = \begin{cases} A(\kappa) w_1(\kappa, r) & , \quad 0 \leq r \leq a, \\ \frac{1}{2} [h_1^-(\kappa r) + S_1(\kappa) h_1^+(\kappa r)] & , \quad r \geq a, \end{cases} \quad (7)$$

donde  $h_1^\pm(\kappa r)$  son las funciones de Hankel esféricas definidas en términos de las funciones de Bessel y de Neuman esféricas como sigue

$$h_1^\pm(x) = j_1(x) \pm in_1(x) \quad , \quad (8)$$

y por tanto

$$j_1(x) = \frac{1}{2} [h_1^-(x) + h_1^+(x)] \quad . \quad (9)$$

Usando el hecho de que las funciones  $u_1(\kappa, r)$  y  $\frac{du_1}{dr}$  son continuas en  $r = a$ , se puede poner la función  $R_1(\kappa^2)$  en términos de las funciones  $h_1^\pm(\kappa r)$  y de la función  $S_1(\kappa)$ :

$$R_1(\kappa^2) = \frac{1}{\kappa} \frac{h_1^-(\kappa a) + S_1(\kappa) h_1^+(\kappa a)}{h_1^{-\prime}(\kappa a) + S_1(\kappa) h_1^{+\prime}(\kappa a)}, \quad (10)$$

donde  $h_1^{\pm\prime}(\kappa a)$  significa la derivada de  $h_1^\pm(\kappa r)$  respecto a su argumento y calculada para el valor  $r = a$ .

De la ecuación (10) se obtiene

$$S_1(\kappa) = - \frac{h_1^-(\kappa a) - \kappa h_1^{-\prime}(\kappa a) R_1(\kappa^2)}{h_1^+(\kappa a) - \kappa h_1^{+\prime}(\kappa a) R_1(\kappa^2)}. \quad (11)$$

En el apéndice se demuestra que la función  $u_1(\kappa r)$  tiene la propiedad siguiente

$$\int_0^a u_1^\epsilon(\kappa', r) u_1(\kappa'', r) r^2 dr = \frac{\pi}{4} \left[ \frac{1 + (-1)^{1+\epsilon}}{\kappa'} S_1(\kappa') + \frac{1 - (-1)^{1+\epsilon}}{\kappa''} S_1(\kappa'') \right] \delta\left(\frac{\kappa'^2}{2} - \frac{\kappa''^2}{2}\right) = B_1(\kappa', \kappa'') \delta(\epsilon' - \epsilon''), \quad (12)$$

donde  $\epsilon = \frac{\kappa^2}{2}$ .

Si se hace la transformación  $u_1(\kappa, r) \rightarrow \frac{u_1(\kappa, r)}{\sqrt{B_1(\kappa', \kappa'')}}$ , las funciones  $u_1(\kappa, r)$  para diferentes valores de  $\kappa$ , forman un sistema completo ortonormal de soluciones de la ecuación (4). Este hecho permite, en virtud del teorema de desarrollo de Dirac, expresar cualquier función de  $r$  como combinación lineal de las eigensoluciones  $u_1(\kappa, r)$ .

En consecuencia, con ayuda de las funciones  $u_1(\kappa, r)$  se puede definir una transformada adecuada para estudiar el desarrollo en el tiempo de un paquete de ondas que incide sobre el potencial y es dispersado por éste.

En ausencia de potencial, la transformada de Fourier se emplea ordinariamente para encontrar el desarrollo temporal de un paquete; en forma análoga se puede utilizar la transformada generalizada para describir el desarrollo temporal de un paquete cuando se encuentra en presencia de un potencial de la forma (2).

En el momento  $t = 0$ , la función de onda  $\psi_1(r, t)$  es

$$\psi_1(r, 0) = f_1(r) \quad , \quad (13)$$

entonces se define la transformada

$$F_1(\kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_1(r) u_1^*(\kappa, r) r^2 dr \quad , \quad (14)$$

y la función de onda dependiente del tiempo toma la forma

$$\psi_1(r, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_1(\kappa) u_1(\kappa, r) \exp(-i \frac{1}{2} \kappa^2 t) \kappa^2 d\kappa \quad . \quad (15)$$

La función de onda  $\psi_1(r, t)$  obtenida en (15) satisface la ecuación (1) debido a que la función  $u_1(\kappa, r)$  satisface la ecuación (4); entonces, si se comprueba que para  $t = 0$  la ecuación (15) se reduce a la ecuación (13), queda demostrado que la función  $\psi_1(r, t)$  dada por (15) describe el desarrollo en el tiempo del paquete de ondas inicial.

La transformada de Hankel del paquete inicial es

$$\bar{F}_1(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a f_1(r) j_1(kr) r^2 dr \quad . \quad (16)$$

Ahora bien, sólo se quiere conocer el desarrollo en el tiempo de un paquete de onda inicialmente fuera del potencial dispersor, por lo que el paquete es nulo en el interior del potencial para  $t = 0$ , esto es,

$$f_1(r) = 0 \quad . \quad 0 \leq r \leq a \quad . \quad (17)$$

La inversa de la transformada de Hankel (16) es

$$f_1(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{F}_1(k) j_1(kr) k^2 dk \quad . \quad (16a)$$

Substituyendo (16a) en (14), y teniendo en cuenta (17), se tiene

$$F_1(\kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \int_0^{\infty} \bar{F}_1(k) j_1(kr) k^2 dk \right\} u_1^*(\kappa, r) r^2 dr \quad . (18)$$

Esta ecuación puede ponerse, cambiando el orden de integración,

$$F_1(\kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} H_1(k, \kappa) \bar{F}_1(k) k^2 dk \quad , \quad (19)$$

donde

$$H_1(k, \kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^{\infty} j_1(kr) u_1^*(\kappa, r) r^2 dr \quad . \quad (20)$$

Se puede ahora definir la función de Green del pro-

blema, que se designa por  $\Omega_1(r, k, t)$  como sigue:

$$\Omega_1(r, k, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} H_1(k, \kappa) u_1(\kappa, r) \times \\ \times \exp(-i \frac{1}{2} \kappa^2 t) \kappa^2 d\kappa \quad r > a \quad (21)$$

La función  $\Omega_1(r, k, t)$  satisface la ecuación (1) y, como se demostrará más adelante, para  $t = 0$  toma la forma

$$\Omega_1(r, k, 0) = j_1(kr) \quad r > a \quad (22)$$

y por tanto, por la ecuación (16a),

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_1(k) \Omega_1(r, k, 0) k^2 dk = f_1(r) \quad \text{cuando } r > a \quad (16b)$$

Del análisis anterior, por las ecuaciones (19) y (21), la función de onda  $\psi_1(r, t)$  dada por la ecuación (17), se puede expresar

$$\psi_1(r, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_1(k) \Omega_1(r, k, t) k^2 dk \quad (17a)$$

y por la ecuación (16b), la función  $\psi_1(r, t)$  satisface la condición (13).

### III. Propiedades de las funciones $R_1(\kappa^2)$ y $S_1(\kappa)$ .

En esta sección se encuentran algunas propiedades de la función  $S_1(\kappa)$  deducidas de las propiedades de la función  $R_1(\kappa^2)$ , que es una función R de Wigner.

Una función R de Wigner<sup>3</sup> es una función meromorfa,

cuya parte imaginaria es no negativa cuando su argumento tiene parte imaginaria positiva, y es no positiva cuando su argumento tiene parte imaginaria negativa.

La función  $R_1(\kappa^2)$  definida en la ecuación (6) es una función R de Wigner, como puede verse en la siguiente forma:

Multiplicando la ecuación (5) por  $w_1^*$ , la compleja conjugada de la ecuación (5) por  $w_1$  y restando, se obtiene

$$\frac{d}{dr} \left[ r w_1^* \frac{drw_1}{dr} - r w_1 \frac{drw_1^*}{dr} \right] = (\kappa^{*2} - \kappa^2) r^2 |w_1|^2 \quad (23)$$

Por otra parte, de la definición (6), se tiene

$$\begin{aligned} 2i \operatorname{Im} R_1(\kappa^2) &= \frac{w_1(\kappa, a)}{\left(\frac{dw_1}{dr}\right)_{r=a}} - \frac{w_1(\kappa, a)^*}{\left(\frac{dw_1^*}{dr}\right)_{r=a}} = \\ &= \frac{\frac{1}{a^2} \int_0^a \frac{d}{dr} \left[ r w_1 \frac{drw_1^*}{dr} - r w_1^* \frac{drw_1}{dr} \right] dr}{\left[\frac{dw_1}{dr}\right]_{r=a}^2} \end{aligned}$$

y por la ecuación (23), se tiene

$$2i \operatorname{Im} R_1(\kappa^2) = 2i \gamma(\kappa^2) \operatorname{Im} \kappa^2$$

donde

$$\gamma(\kappa^2) = \frac{\int_0^a r^2 |w_1|^2 dr}{a^2 \left[\frac{dw_1}{dr}\right]_{r=a}^2} > 0$$

Con esto queda demostrado que la función  $R_1(\kappa^2)$  cumple la segunda parte de la definición de una función R. Para demostrar que la función  $R_1(\kappa^2)$  es meromorfa, basta observar que, por un teorema muy conocido<sup>4</sup>, las funciones  $w_1$  y  $\frac{dw_1}{dr}$  son funciones enteras de  $\kappa^2$  y por tanto su razón es una función meromorfa.

Ahora pueden usarse las propiedades conocidas de la función R para encontrar algunas propiedades de la función  $S_1(\kappa)$ .

- 1- Los polos de la función  $S_1(\kappa)$  están en la parte inferior del plano complejo o sobre el eje imaginario<sup>5</sup>.
- 2- Los polos de  $S_1(\kappa)$  están simétricamente colocados respecto al eje imaginario.

Demostración. Los polos de la función  $S_1(\kappa)$  son las raíces de la ecuación

$$h_1^+(\kappa a) - h_1^+(\kappa a) R_1(\kappa^2) = 0 .$$

Tomando la conjugada compleja de esta ecuación y usando las relaciones siguientes

$$h_1^+(\rho)^* = h_1^-(\rho^*); \quad h_1^+(-\rho) = (-1)^1 h_1^-(\rho); \quad h_1^{+'}(-\rho) = (-1)^{1+1} h_1^{-'}(\rho);$$

$$R_1(\kappa^2)^* = R_1(\kappa^{2*}) = R_1[(-\kappa^*)^2] ,$$

se obtiene la ecuación

$$h_1^+(-\kappa^* a) - (-\kappa^*) h_1^{+'}(-\kappa^* a) R_1[(-\kappa^*)^2] = 0 ,$$

la cual indica que si  $\kappa a$  es un polo de  $S_1(\kappa)$ ,  $-\kappa^*$  también lo es.

3- Para  $\kappa$  real,  $S_1(\kappa) S_1^*(\kappa) = 1$ .

La demostración es inmediata.

4- La función  $S_1(\kappa) \exp(i2\kappa a)$  es acotada cuando  $\kappa \rightarrow \infty$  en la parte superior del plano complejo.

Demostración. De la ecuación (10) y del hecho de que

$$h_1'(\kappa r) \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} (\mp i)^1 \frac{\exp(\pm i\kappa r)}{\pm i\kappa r}$$

se sigue que

$$R_1(\kappa^2) \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} -\frac{1}{i\kappa} \frac{|+(-1)^{1+1} S_1(\kappa) \exp(i2\kappa a)|}{|+(-1)^1 S_1(\kappa) \exp(i2\kappa a)|}$$

y si  $S_1(\kappa) \exp(i2\kappa a) \rightarrow \infty$  cuando  $\kappa \rightarrow \infty$  en la parte superior del plano complejo, se tiene que

$$R_1(\kappa^2) \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} \frac{1}{i\kappa} = -\frac{\kappa_y}{|\kappa|^2} - i \frac{\kappa_x}{|\kappa|^2}$$

Pero debe cumplirse

$$\kappa_x \kappa_y \operatorname{Im} R_1(\kappa^2) \geq 0$$

esto es,

$$-\frac{\kappa_x^2 \kappa_y}{|\kappa|^2} \geq 0$$

lo cual es contradictorio si  $\kappa_y > 0$  y  $\kappa_x \neq 0$ .

5- El comportamiento asintótico de la función  $S_1(\kappa) \exp(i2\kappa a)$  está dado por

$$S_1(\kappa) \exp(i2\kappa a) \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} (-1)^{1+1} \left[ \frac{2}{|-1\kappa R_1(\kappa^2)|} - 1 \right]$$

La demostración se sigue de la definición.

IV. Determinación explícita de la función de Green del problema.

Por un procedimiento análogo al indicado en el apéndice se puede calcular la función  $H_1(k, \kappa)$  que se definió en la ecuación (20), obteniéndose el resultado siguiente:

$$H_1(k, \kappa) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4k\kappa} \left\{ \left[ 1 + S_1^*(\kappa) \right] \delta(\kappa - k) + (-1)^{i+1} \left[ 1 + S_1^*(\kappa) \right] \delta(\kappa + k) \right\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{k^2 - \kappa^2} \left\{ u_1^*(\kappa, a) [ka j_1(ka)]' - j_1(ka) [ka u_1^*(\kappa, a)]' \right\}. \quad (25)$$

Ahora bien, de la ecuación (7) y de la propiedad 3 de la función  $S_1(\kappa)$ , se obtiene que

$$S_1(\kappa) H_1(k, \kappa) = (-1)^1 H_1(k, -\kappa). \quad (26)$$

La función  $\Omega_1(r, k, t)$  dada en (21) se puede poner, por la ecuación (7), bajo la forma

$$\Omega_1(r, k, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\infty} H_1(k, \kappa) S_1(\kappa) h_1^+(k\kappa r) \exp(-i \frac{1}{2} \kappa^2 t) \kappa^2 d\kappa + \int_0^{\infty} H_1(k, \kappa) h_1^-(k\kappa r) \exp(-i \frac{1}{2} \kappa^2 t) \kappa^2 d\kappa \right\}.$$

y haciendo en la segunda integral el cambio de variable  $\kappa \rightarrow -\kappa$ , se obtiene, por la ecuación (26),

$$\Omega_1(r, k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} P \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\kappa) H_1(k, \kappa) h_1^+(k\kappa r) \exp(-i \frac{1}{2} \kappa^2 t) \kappa^2 d\kappa. \quad (27)$$

La P delante de la integral indica que se toma el valor principal de Cauchy debido a que la función  $H_1(k, \kappa)$  tiene polos en  $\kappa = \pm k$ , como puede verse de la ecuación (25).

Al substituir el valor (25) de la función  $H_1(k, \kappa)$  en la integral (27), pueden integrarse inmediatamente los términos que contienen funciones  $\delta$  de Dirac, quedando únicamente por integrar el término que contiene el factor  $\frac{1}{k^2 - \kappa^2}$ .

Se tiene entonces,

$$\Omega_1(r, k, t) = \frac{1}{2} \{ [1 + S_1(k)] h_1^+(kr) + [1 + S_1(-k)] h_1^-(kr) \} \times \\ \times \exp(-i \frac{1}{2} k^2 t) + I_1, \quad (a)$$

donde la Integral  $I_1$  puede ponerse en la forma

$$I_1 = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\kappa^2 - k^2} (u_1(\kappa, a) [ka j_1(ka)]' - j_1(ka) [\kappa a u_1(\kappa, a)]') \times \\ \times h_1^+(\kappa r) \exp(-i \frac{1}{2} \kappa^2 t) \kappa^2 d\kappa.$$

Es conveniente considerar la integral anterior en la forma siguiente:

$$I_1 = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} = -\frac{1}{\pi} \int_C -i \operatorname{Res} [ ]_{\kappa=-k} -i \operatorname{Res} [ ]_{\kappa=+k}$$

donde el contorno C está indicado en la figura 1.

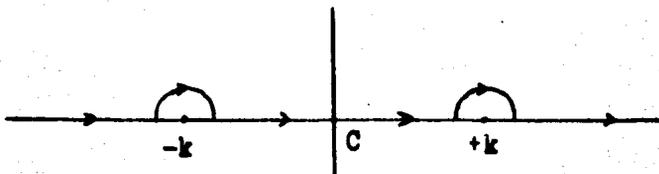


Fig. 1.

Calculando directamente los residuos, se obtiene finalmente

$$I_1 = -\frac{1}{\pi} \int_C + \frac{1}{2} \{ [1-S_1(-k)] h_1^-(kr) + [1-S_1(k)] h_1^+(kr) \} \times \\ \times \exp(-i \frac{1}{2} k^2 t) ,$$

y substituyendo en la ecuación (a), se tiene

$$\Omega_1(r, k, t) = \frac{1}{2} [h_1^-(kr) + h_1^+(kr)] \exp(-i \frac{1}{2} k^2 t) - \frac{1}{\pi} \int_C = \\ = j_1(kr) \exp(-i E t) - \\ - \frac{1}{\pi} \int_C \frac{a u_1(\kappa a)}{\kappa^2 - k^2} \left\{ \kappa a j_1'(\kappa a) - j_1(\kappa a) \frac{u_1'(\kappa, a)}{u_1(\kappa, a)} \right\} \times \\ \times h_1^+(\kappa r) \exp(-i \frac{1}{2} \kappa^2 t) \kappa^2 d\kappa \quad , \quad (28)$$

y puesto que<sup>6</sup>

$$h_1^{\pm}(\kappa r) = \frac{(\mp i)^1}{\pm i \kappa r} \exp(\pm i \kappa r) P_1 [(\mp i \kappa r)^{-1}] = \\ = \frac{(\mp i)^1}{\pm i \kappa r} \exp(\pm i \kappa r) \sum_{p=0}^1 \frac{c_p}{(\mp i \kappa r)^p} ,$$

la integral queda

$$\int_C = (-i)^{1+p} \frac{a^2}{r} \sum_{p=0}^1 \frac{c_p}{(-ir)^p} \int_C \frac{\phi_1(\kappa)}{\kappa^p} \exp(-i \frac{1}{2} \kappa^2 t) \times \\ \times \exp[i\kappa(r-a)] d\kappa \quad , \quad (29)$$

donde la función  $\phi_1(\kappa)$  está dada por

$$\phi_1(\kappa) = \kappa \exp(i\kappa a) \frac{u_1(\kappa, a)}{(\kappa+k)(\kappa-k)} \left[ \kappa j_1'(\kappa a) - \frac{j_1(\kappa a)}{R_1(\kappa^2)} \right] \quad (30)$$

Se considera que los polos en  $\pm k$  del integrando se pueden poner en  $\kappa_1 = k - i\epsilon$ ,  $\kappa_2 = -k - i\epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ , tomando posteriormente el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . La integral sobre el contorno C se convierte entonces en la integral de  $-\infty$  a  $+\infty$  y por el teorema de la convolución<sup>7</sup>, se tiene

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) G(\kappa) \exp(-i\kappa x) d\kappa = \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) f(x-\eta) d\eta \quad (31)$$

donde

$$F(\kappa) = \exp(-i \frac{1}{2} \kappa^2 t) ; \quad G(\kappa) = \frac{\phi_1(\kappa)}{\kappa^2} ; \quad x = a - r$$

$$f(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) \exp(-i\eta\kappa) d\kappa ; \quad g(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\kappa) \exp(-i\eta\kappa) d\kappa$$

La función  $f(x-\eta)$  se puede evaluar inmediatamente:

$$\begin{aligned} f(x-\eta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i \frac{1}{2} \kappa^2 t) \exp[-i(x-\eta)\kappa] d\kappa = \\ &= \frac{\exp \left[ i \frac{(x-\eta)^2}{2t} \right]}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -i \left[ \kappa \sqrt{\frac{t}{2}} + \frac{(x-\eta)}{\sqrt{2t}} \right]^2 \right\} d\kappa = \\ &= \exp \left( -i \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{\frac{1}{t}} \exp \left[ i \frac{(x-\eta)^2}{2t} \right] \quad (31a) \end{aligned}$$

La función  $g(\eta)$  es

$$g(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_1(\kappa)}{\kappa^2} \exp(-i\eta\kappa) d\kappa \quad (31b)$$

Para evaluar la función  $g(\eta)$  deben considerarse dos casos  $\eta < 0$  y  $\eta > 0$ .

Por la propiedad 4 de la función  $S_1(\kappa)$ , la función  $\phi_1(\kappa)$  está acotada en la parte superior del plano complejo y por tanto para  $n > 0$ , la integral se evalúa cerrando el contorno por arriba; los únicos polos encerrados en esta forma son los polos de  $S_1(\kappa)$  que estén sobre el eje imaginario, pero en la suposición de que no hay estados estacionarios, no hay polos en el eje imaginario y en consecuencia,

$$g(\eta) = 0 \quad \text{si} \quad \eta > 0 \quad .$$

Por otra parte, la función  $\phi_1(\kappa)$  para  $\kappa \rightarrow \infty$ , toma la forma

$$\phi_1(\kappa) \rightarrow \frac{i^{1+l}}{2a(\kappa+\kappa_1)(\kappa+\kappa_2)} \left[ i + (-1)^{1+l} S_1(\kappa) \exp(i2\kappa a) \right] \left[ k j_1'(ka) - \frac{j_1(ka)}{R_1(\kappa^2)} \right] ,$$

y por la propiedad 5 de la función  $S_1(\kappa)$ , se tiene que

$$\phi(\kappa) \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} \frac{i^{1+l}}{a} \frac{1}{|-i\kappa R_1(\kappa^2)} \frac{1}{(\kappa+\kappa_1)(\kappa+\kappa_2)} \times$$

$$\times \left[ k j_1'(ka) - \frac{j_1(ka)}{R_1(\kappa^2)} \right]$$

en consecuencia, para  $\eta < 0$ , considerando que se tiene una sucesión de circunferencias que cierran el contorno y que no pasan por los polos de  $S_1(\kappa)$ , cuando el radio de esas circunferencias tiende a infinito, la integral sobre la circunferencia del integrando de (3b) tiende a cero, y enton-

con  $g(\eta)$  se expresa, para  $\eta < 0$ , como

$$g(\eta) = \sqrt{2\pi} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\Lambda_a}{\kappa_a^p} \exp(-i\eta\kappa_a) ,$$

donde  $\kappa_a$  son los polos en  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  y los polos de la función  $S_1(\kappa)$ , y las constantes  $\Lambda_a$  son los residuos

$$\Lambda_a = \text{Res} [\phi_1]_{\kappa=\kappa_a} .$$

Substituyendo los valores de  $f(x-\eta)$  y de  $g(\eta)$  en la ecuación (31), se tiene

$$I_2 = \sqrt{2\pi} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\Lambda_a}{\kappa_a^p} \exp[i(x\kappa_a - \frac{1}{2}\kappa_a^2 t)] \times \\ \times \int_0^{\infty} \exp \left[ i \frac{(\eta-x-t\kappa_a)^2}{2t} \right] \exp(-i \frac{\pi}{4}) \frac{1}{\sqrt{t}} d\eta ,$$

y entonces, usando la definición de la función  $\chi(r, k, t)$  dada por Moshinsky<sup>1</sup>, se tiene

$$I_2 = i\pi \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\Lambda_a}{\kappa_a^p} \chi(r-a, \kappa_a, t) , \quad (32)$$

y substituyendo (32) en (29), se tiene

$$\int_c = (-i)^{1+p} \frac{a^2}{r} i\pi \sum_{p=0}^1 \left\{ \frac{c_p}{(-ir)^p} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\Lambda_a}{\kappa_a^p} \chi(r-a, \kappa_a, t) \right\} ;$$

y substituyendo este valor en la ecuación (28), se obtiene la forma explícita de la función de Green:

$$\Omega_1(r, k, t) = j_1(kr) \exp(-iEt) - (-1)^1 \frac{a^2}{r} \times$$

$$\times \sum_{p=0}^1 \left\{ \frac{C_p}{(-ir)^p} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{A_a}{\kappa_a^p} \chi(r-a, \kappa_a, t) \right\} =$$

$$= j_1(kr) \exp(-iEt) - \frac{a^2}{r} \sum_{a=1}^{\infty} A_a \chi_1(r-a, \kappa_a, t) \quad (33)$$

donde las funciones  $\chi_1(r-a, \kappa_a, t)$  están dadas por

$$\chi_1(r-a, \kappa_a, t) = (-1)^1 \sum_{p=0}^1 \frac{C_p}{(-ir)^p \kappa_a^p} \chi(r-a, \kappa_a, t) \quad (34)$$

y la forma explícita de la función  $\chi(r, \kappa, t)$  en términos de funciones integrales de error es

$$\chi_1(r, \kappa, t) = \exp i[\kappa r - \frac{1}{2} \kappa^2 t] \operatorname{erfc} \left[ \exp(-i \frac{\pi}{4}) (2t)^{-\frac{1}{2}} (r-kt) \right] \quad (35)$$

donde la función  $\operatorname{erfc}(z)$  está definida por

$$\operatorname{erfc}(z) = 2\pi^{-\frac{1}{2}} \int_z^{\infty} \exp(-s^2) ds \quad (36)$$

Ahora bien, cuando  $r > 0$  y  $t \rightarrow 0$ , se tiene

$$\chi(r, \kappa_a, t) \rightarrow \exp(i \frac{r^2}{2t}) \exp(i \frac{\pi}{4}) \pi^{-\frac{1}{2}} r^{-1} (2t)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$$

en consecuencia para  $r > a$  y  $t = 0$ , la función de Green toma la forma

$$\Omega_1(r, k, 0) = j_1(kr)$$

que es la condición (22) que debe cumplirse.

Cuando  $r > 0$  y  $t \rightarrow \infty$ , la función  $X(r, \kappa a, t)$  toma la forma asintótica siguiente:

$$X(r, \kappa a, t) \rightarrow - \left( \frac{\pi \kappa a^2 t}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \exp\left(\frac{ir^2}{2t}\right) \rightarrow 0, \quad \frac{3\pi}{4} < \arg \kappa a < \frac{7\pi}{4}$$

$$X(r, \kappa a, t) \rightarrow 2 \exp(i\kappa a r - i \frac{1}{2} \kappa a^2 t), \quad -\frac{\pi}{4} < \arg \kappa a < \frac{3\pi}{4}$$

Entonces la función  $X(r, \kappa a, t)$  tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $r > a$ , para todos los polos  $\kappa a$  en la parte inferior del plano complejo, siendo diferente de cero sólo para el polo situado en la parte positiva del eje real, esto es, para el polo situado en el punto  $k$ . Para este polo, la función  $X_1(r-a, k, t)$  toma la forma asintótica

$$X_1(r-a, \kappa, t) \xrightarrow[t > a]{t \rightarrow \infty} 2 \exp(-ika) h_1^+(kr) \exp(-iEt) \quad (37)$$

Por otra parte, usando el hecho de que la expresión

$$ka^2 [h_1^-(ka) h_1^{+'}(ka) - h_1^+(ka) h_1^{-'}(ka)] = 2,$$

como puede verse por el hecho que la expresión anterior es el Wronskiano y tiene un valor constante para todo valor del argumento, se tiene, substituyendo la ecuación (35) en la (33),

$$\Omega_1(r, k, t) \xrightarrow[t > a]{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [h_1^-(kr) + h_1^+(kr)] \exp(-iEt) -$$

$$- \frac{1}{2} [1 - S_1(k)] h_1^+(kr) \exp(-iEt) \quad .$$

y simplificando, se tiene, finalmente,

$$\Omega_1(r, k, t) \xrightarrow[\substack{t \rightarrow \infty \\ r > a}]{\quad} \frac{1}{2} [h_1^-(kr) + S_1(k) h_1^+(kr)] \exp(-iEt), \quad (38)$$

que es el valor asintótico de la función de Green cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $r > a$ . Esta es la solución para el caso estacionario.

### V. Conclusión.

En el presente trabajo se ha encontrado una solución al problema de describir el proceso dinámico de la dispersión de un paquete de onda incidente sobre un potencial de corto alcance, reduciendo el problema a encontrar una función de Green que permite expresar el desarrollo en el tiempo del paquete de ondas mediante la ecuación (17a). El procedimiento que se siguió consiste esencialmente en definir un tipo de transformada útil para el problema, y en aplicar una serie de propiedades de la función  $S_1(\kappa)$  de dispersión que se encontraron exclusivamente a partir del hecho de que la función  $S_1(\kappa)$  se puede expresar en términos de la función  $R_1(\kappa^2)$  de Wigner.

Debe notarse que las condiciones que sobre los polos de la función  $S_1(\kappa)$ , y sobre su comportamiento asintótico al infinito que permitieron dar la descripción del proceso dinámico que se investigó, y que provienen de su definición, posibilitan la descripción causal del proceso, pues si los polos de la función  $S_1(\kappa)$  tuvieron posibilidad de estar en la parte superior del plano complejo, las funciones - - -

$\chi(r-a, \kappa, t)$  que aparecen en la forma explícita de la función de Green  $\Omega_1(r, \kappa, t)$ , serían divergentes cuando  $t \rightarrow \infty$  y el proceso no se describiría causalmente.

La suposición que se hizo a lo largo de este trabajo acerca de que la función  $S_1(\kappa)$  no tiene polos sobre el eje imaginario, y que equivale a afirmar que el potencial no tiene estados estacionarios, sólo se hizo por comodidad, ya que si se considera que existen tales estados estacionarios, sólo se modifica el resultado por la adición de unos términos que provienen de los residuos de la función  $\phi_1(\kappa)$  definida en (30) en los polos de  $S_1(\kappa)$  que están sobre el eje imaginario.

El autor agradece al Dr. Marcos Moshinsky su valiosa ayuda para la realización de este trabajo.

#### Apéndice.

Tomando el producto de  $u_1(\kappa'', r)$  por la conjugada de la ecuación (5) para  $\kappa = \kappa'$ , el producto de  $u_1^*(\kappa', r)$  por la ecuación (5) y restando se tiene

$$\begin{aligned} u_1^*(\kappa', r) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du_1(\kappa'', r)}{dr} \right) - u_1(\kappa'', r) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du_1^*(\kappa', r)}{dr} \right) = \\ = (\kappa'^2 - \kappa''^2) u_1^*(\kappa', r) u_1(\kappa'', r), \end{aligned}$$

integrando esta expresión entre 0 e  $\infty$ , se obtiene

$$(\kappa'^2 - \kappa''^2) \int_0^{\infty} u_1^*(\kappa', r) u_1(\kappa'', r) r^2 dr =$$

$$= \left[ r u_1^*(\kappa', r) \frac{dr u_1(\kappa'', r)}{dr} - r u_1(\kappa'', r) \frac{dr u_1^*(\kappa', r)}{dr} \right]_{r \rightarrow \infty} \quad (a)$$

por otra parte se sabe que

$$h_1^{\pm}(\kappa r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} (\mp i)^1 \frac{\exp(\pm i \kappa r)}{\pm i \kappa r}$$

y de la ecuación (8) se obtienen las expresiones

$$r u_1(\kappa'', r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \kappa''} \left[ i^{1+1} \exp(-i \kappa'' r) + S_1(\kappa'') (-i)^{1+1} \exp(i \kappa'' r) \right]$$

$$\frac{dr u_1(\kappa'', r)}{dr} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[ i^1 \exp(-i \kappa'' r) + (-i)^1 S(\kappa'') \exp(i \kappa'' r) \right],$$

y substituyendo en la ecuación (a),

$$(\kappa'^2 - \kappa''^2) \int_0^{\infty} u_1^*(\kappa', r) u_1(\kappa'', r) r^2 dr = \frac{1}{4 \kappa'' \kappa'} \times$$

$$\times \lim_{r \rightarrow \infty} \{ (-i) \exp[i(\kappa' - \kappa'') r] (\kappa' + \kappa'') + i S_1^*(\kappa') S_1(\kappa'') \times$$

$$\times \exp[i(\kappa'' - \kappa') r] (\kappa' + \kappa'') + i (-i)^{1+1} (\kappa'' - \kappa') S_1(\kappa'') \exp[i(\kappa' + \kappa'') r] -$$

$$- i (-i)^{1+1} (\kappa' - \kappa'') S_1^*(\kappa') \exp[i(\kappa' + \kappa'') r] \}$$

$$\text{Pero } \lim_{r \rightarrow \infty} \exp(i \rho r) = i \pi \delta(\rho) \quad ,$$

y del inciso III,

**BIBLIOTECA CENTRAL**

**U. B. A. M.**

$$S_1^*(\kappa') S_1(\kappa'') \delta(\kappa' - \kappa'') = S_1^*(\kappa'') S_1(\kappa') \delta(\kappa' - \kappa'') = \delta(\kappa' - \kappa'')$$

$$S_1^*(\kappa') \delta(\kappa' + \kappa'') = S_1^*(-\kappa'') \delta(\kappa' + \kappa'') = S_1(\kappa'') \delta(\kappa' + \kappa'') ,$$

por tanto

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} u_1^*(\kappa', r) u_1(\kappa'', r) r^2 dr &= \frac{\pi}{4\kappa' \kappa''} \left[ 2\delta(\kappa' - \kappa'') + 2(-1)^{1+l} S_1(\kappa'') \delta(\kappa' + \kappa'') \right] = \\ &= \frac{\pi}{4\kappa' \kappa''} \{ [1 + (-1)^{1+l} S_1(\kappa'')] [\delta(\kappa' - \kappa'') + \delta(\kappa' + \kappa'')] \} + \\ &+ [1 - (-1)^{1+l} S_1(\kappa'')] [\delta(\kappa' - \kappa'') - \delta(\kappa' + \kappa'')] \} , \end{aligned}$$

pero

$$\frac{\delta(\kappa' + \kappa'') + \delta(\kappa' + \kappa'')}{2\kappa''} = \frac{\delta(\kappa' - \kappa'') - \delta(\kappa' + \kappa'')}{2\kappa'} = \delta(\kappa'^2 - \kappa''^2)$$

y

$$2\delta(x) = \delta\left(\frac{x}{2}\right)$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} u_1^*(\kappa', r) u_1(\kappa'', r) r^2 dr &= \frac{\pi}{4} \left[ \frac{1 + (-1)^{1+l} S_1(\kappa')}{\kappa'} + \frac{1 - (-1)^{1+l} S_1(\kappa'')}{\kappa''} \right] \times \\ &\times \delta\left(\frac{\kappa'^2}{2} - \frac{\kappa''^2}{2}\right) = B(\kappa', \kappa'') \delta(\epsilon' - \epsilon'') . \end{aligned} \quad (12)$$

## VI. Barrera infinita de potencial.

En esta sección se discute el efecto transitorio de la dispersión de un paquete de ondas por una esfera rígida impenetrable, esto es, por una barrera infinita de potencial. El interés de esta discusión consiste en que, como es bien sabido, fuera de las resonancias, los núcleos tienden a comportarse como esferas rígidas; además, es éste un caso simple que aclara e ilustra el tratamiento general de la dispersión por un potencial de corto alcance, que ha sido estudiado anteriormente.

Considérese un potencial de la forma

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 \leq r \leq a \\ 0 & \text{si } r > a \end{cases} .$$

Como el paquete de ondas incidente se refleja totalmente al chocar con la barrera debido a que ésta es de altura infinita, se tiene que

$$R_1(\kappa^2) = 0 ,$$

y por tanto, la función  $S_1(\kappa)$  toma la forma

$$S_1(\kappa) = - \frac{h_1^-(\kappa a)}{h_1^+(\kappa a)} . \quad (39)$$

Los polos de la función  $S_1(\kappa)$  están en los ceros de la función  $h_1^+(\kappa a)$ , cuya forma es la siguiente:

$$h_1^+(\kappa a) = \frac{(-1)^j}{i\kappa a} \exp(i\kappa a) \sum_{p=0}^j \frac{c_p}{(-i\kappa a)^p} . \quad c_p > 0 .$$

Para encontrar los polos de la función  $S_1(\kappa)$  basta

encontrar las raíces de la ecuación

$$\sum_{p=0}^1 \frac{c_p}{(-i\kappa a)^p} = 0 \quad (40)$$

que por ser de grado 1, tiene 1 raíces.

La ecuación diferencial que satisface la función  $h_1^+(\kappa a)$  es

$$\frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d}{dr} h_1^+(\kappa r) \right] + \left[ \kappa^2 r^2 - 1(1+1) \right] h_1^+(\kappa r) = 0. \quad (41)$$

Multiplicando la ecuación (40) por  $h_1^+(\kappa r)^*$ , la conjugada de la ecuación (40) por  $h_1^+(\kappa r)$  y restando, se obtiene

$$\frac{d}{dr} \left[ (rh_1^{+*}) \frac{d}{dr} (rh_1^+) - (rh_1^+) \frac{d}{dr} (rh_1^{+*}) \right] = (\kappa^{*2} - \kappa^2) r^2 h_1^+ h_1^{+*}.$$

Ahora bien, poniendo  $\kappa = \kappa_x + i\kappa_y$ , se tiene que si  $\kappa_y > 0$ ,  $rh_1(\kappa r) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} e^{i\kappa_x r} e^{-\kappa_y r} \rightarrow 0$ ; entonces, integrando la ecuación anterior entre  $a$  e  $\infty$ , se obtiene

$$-a^2 [\kappa^* h_1^{+*} h_1^+ - \kappa h_1^+ h_1^{+*}]_{r=a}^{\infty} = (\kappa^2 - \kappa^{*2}) \int_a^{\infty} r^2 |h_1^+|^2 dr$$

pero en los ceros de  $h_1^+(\kappa a)$ ,  $h_1^+(\kappa a) = h_1^+(\kappa a)^* = 0$  y por tanto, puesto que  $\int_a^{\infty} r^2 |h_1^+|^2 dr > 0$ , debe tenerse

$$\kappa^2 - \kappa^{*2} = 4i\kappa_x \kappa_y = 0$$

y como se ha supuesto que  $\kappa_y > 0$ , entonces  $\kappa_x = 0$ , esto es si hay algún cero de la función  $h_1^+(\kappa a)$  en la parte superior del plano complejo, esta sobre el eje imaginario, fuera de dicho eje sólo puede haber ceros en la parte inferior del plano

complejo. En consecuencia, los polos de la función  $S_1(\kappa)$  están en la parte inferior del plano complejo o sobre el eje imaginario. Pero si en la ecuación (40) se pone  $\kappa = i|\kappa|$ , se obtiene un polinomio en el que todos los términos son positivos y, en consecuencia no puede ser nulo; por tanto no hay polos sobre el eje imaginario.

En el libro Table of Functions de Jahnke-Emde, p.243 estan los ceros de la función  $h_1^+(\kappa a)$  para diferentes valores de  $l$ .

La función  $\phi_1(\kappa)$  definida en (30) toma en este caso la forma

$$\phi_1(\kappa) = - \frac{\kappa \exp(i\kappa a)}{(\kappa+k)(\kappa-k)} j_1(ka) u_1'(\kappa, a) ,$$

debido a que, por la forma especial de la función  $S_1(\kappa)$  dada en la ecuación (39), la función  $u_1(\kappa, a) = 0$ .

La integral (31b) no ofrece ninguna dificultad para evaluarse porque el número de polos de la función  $S_1(\kappa)$  es finito y la función de Green se expresa entonces,

$$\Omega_1(r, k, t) = j_1(kr) \exp(-iEt) - \frac{a^2}{r} \sum_{s=1}^{l+2} A_s \chi_1(r-a, \kappa_s, t) , \quad (42)$$

donde  $A_s$  son los residuos de  $\phi_1(\kappa)$  en  $\kappa_1 = -k$ ,  $\kappa_2 = k$  y los  $l$  ceros de la función  $h_1^+(\kappa a)$

## VII. Pozo de potencial.

Otro caso particular ilustrativo del tratamiento general de la descripción dinámica de la dispersión por un potencial de corto alcance, es el de un pozo rectangular de poten-

cial de anchura  $a$  y profundidad  $-\frac{1}{2} k_0^2$ . En esta sección se tratará este caso.

Considérese un paquete de ondas que incide sobre un potencial de la forma siguiente:

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2} k_0^2 & \text{con } k_0 \text{ real} & \text{si } 0 \leq r \leq a \\ 0 & & \text{si } r > a \end{cases}$$

La función  $R_1(\kappa^2)$  definida en la ecuación (6) toma la forma

$$R_1(\kappa^2) = \frac{j_1(ka)}{kj_1'(ka)}$$

donde

$$k = \sqrt{\kappa^2 + k_0^2}$$

La función  $S_1(\kappa)$  es, por consiguiente,

$$S_1(\kappa) = - \frac{h_1^-(\kappa a) - \kappa h_1^{-\prime}(\kappa a) \frac{j_1(ka)}{kj_1'(ka)}}{h_1^+(\kappa a) - \kappa h_1^{+\prime}(\kappa a) \frac{j_1(ka)}{kj_1'(ka)}} \quad (43)$$

Es conveniente estudiar la distribución de los polos de la función  $S_1(\kappa)$  para valores muy grandes de  $\kappa$ . Con este fin debe encontrarse la forma asintótica de la función  $S_1(\kappa)$ . Teniendo en cuenta que<sup>6</sup>

$$h_1^{\pm}(\kappa a) \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} (\mp i)^1 \frac{\exp(\pm i\kappa a)}{\pm i\kappa a}$$

$$j_1(ka) \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} \frac{\cos(ka - \frac{1+1}{2}\pi)}{ka}$$

se obtiene el comportamiento asintótico de la función  $S_1(\kappa)$ :

$$S_1(\kappa) \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} (-1)^l \exp(-2i\kappa a) \frac{|+i \frac{\kappa}{k} \left[ -\cot(ka - \frac{1+l}{2} \pi) \right]|}{|-i \frac{\kappa}{k} \left[ -\cot(ka - \frac{1+l}{2} \pi) \right]|} \quad (43a)$$

Entonces, los polos de la función  $S_1(\kappa)$  tienden asintóticamente a las raíces de la ecuación

$$|-i \frac{\kappa}{k} \left[ -\cot(ka - \frac{1+l}{2} \pi) \right]| = 0 .$$

Es posible encontrar las raíces de esta ecuación, pero para ello conviene hacer un cambio de notación:

$$\zeta = \kappa a ; \quad z = ka ; \quad z_0 = k_0 a \quad \text{real} ;$$

se tiene entonces  $\zeta = \sqrt{z^2 - z_0^2}$  .

La ecuación cuyas raíces se quieren encontrar se puede poner

$$i = -i \frac{\sqrt{z^2 - z_0^2}}{z} \cot(z - \frac{1+l}{2} \pi) = - \frac{\sqrt{|-(\frac{z}{z_0})^2|}}{\frac{z}{z_0}} \cot(z - \frac{1+l}{2} \pi) ,$$

y por tanto

$$\cot(z - \frac{1+l}{2} \pi) = \frac{\cos(z - \frac{1+l}{2} \pi)}{\text{sen}(z - \frac{1+l}{2} \pi)} = - \frac{\frac{z}{z_0}}{\sqrt{|-(\frac{z}{z_0})^2|}} ,$$

y se puede hacer la identificación

$$\cos(z - \frac{1+l}{2} \pi) = \frac{z}{z_0} ; \quad \text{sen}(z - \frac{1+l}{2} \pi) = - \sqrt{|-(\frac{z}{z_0})^2|} ;$$

es claro que también puede hacerse la identificación con los

signos cambiados, pero como se elevará despues al cuadrado, no tiene importancia el signo adoptado.

Puesto que  $z$  es una variable compleja, se puede poner  $z = x+iy$ , con  $x$  y  $y$  reales.

Por tanto se tiene

$$\cos\left(x - \frac{1+i}{2} \pi + iy\right) = \cos\left(x - \frac{1+i}{2} \pi\right) \cosh y - i \sin\left(x - \frac{1+i}{2} \pi\right) \sinh y = \frac{x+iy}{z_0}$$

de donde

$$\cos\left(x - \frac{1+i}{2} \pi\right) \cosh y = \frac{x}{z_0} ; \quad \sin\left(x - \frac{1+i}{2} \pi\right) \sinh y = -\frac{y}{z_0} ; \quad (44)$$

despejando las funciones circulares, elevando al cuadrado y restando, se obtiene

$$1 = \left(\frac{x}{z_0}\right)^2 \frac{1}{\cosh^2 y} + \left(\frac{y}{z_0}\right)^2 \frac{1}{\sinh^2 y} ;$$

despejando de aqui la variable  $x$  y substituyendo su valor en la segunda ecuación (43), se obtiene

$$\sin \left[ z_0 \sqrt{\cosh^2 y - \left(\frac{x}{z_0}\right)^2} \coth^2 y - \frac{1+i}{2} \pi \right] \sinh y = -\frac{y}{z_0} . \quad (45)$$

Ahora bien,  $y$  es una variable real y las ecuaciones (44) son reales, entonces en la ecuación (45) deben excluirse los valores complejos, entonces el radical en la ecuación (45) debe ser real y para esto, debe cumplirse la condición

$$\cosh^2 y - \left(\frac{y}{z_0}\right)^2 \coth^2 y \geq 0 ,$$

que puede ponerse

$$\sinh^2 y \geq \left(\frac{y}{z_0}\right)^2 \quad \text{o sea} \quad |\sinh y| \geq \left|\frac{y}{z_0}\right| .$$

Esta relación se cumple para valores suficientemente grandes de  $|y|$  y en consecuencia la ecuación (45) tiene soluciones para valores grandes crecientes de  $|y|$ , independientemente del signo de  $z_0$ .

En la figura 2 se muestra la distribución de las soluciones de la ecuación (45) para momento angular cero.

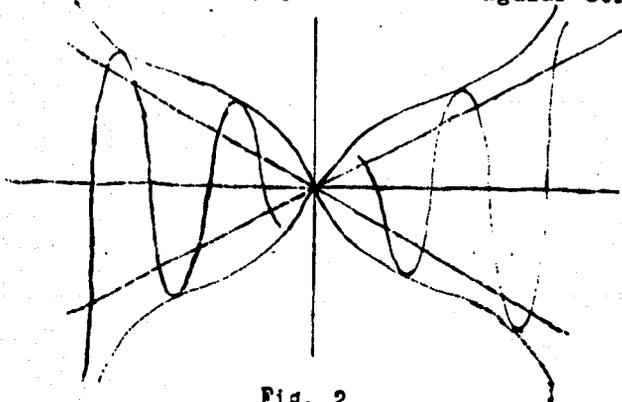


Fig. 2

Ahora bien, como se ve de la condición que debe cumplirse y que se ilustra en la figura 2, puede haber soluciones de la ecuación (45) tanto en la parte superior como en la parte inferior del plano complejo; esta situación proviene de que para encontrar la ecuación (45), se elevaron al cuadrado las ecuaciones (44) quedando, entonces, sin importancia sus signos, y en consecuencia quedaron introducidos los ceros y no sólo los polos de la función  $S_1(\kappa)$ . Para eliminar del resultado los ceros de la función  $S_1(\kappa)$ , basta considerar la propiedad que tiene la función  $S_1(\kappa)$  de tener sus polos exclusivamente en la parte inferior del plano complejo.

Para encontrar las soluciones de la ecuación (45) para valores suficientemente grandes de  $y$ , se procede como sigue: de la segunda ecuación (44) se sigue que cuando  $|y| \rightarrow \infty$ ,  $\text{sen}(x - \frac{1+i}{2} \pi) \rightarrow \infty$ , por tanto  $x \rightarrow (n\pi + \frac{1+i}{2} \pi)$ , con  $n$  en

tero positivo o negativo. Además, de la primera ecuación (44), si  $|y| \rightarrow \infty$  y  $x \rightarrow (n\pi + \frac{1+l}{2} \pi)$ ,  $\text{cosh } y \rightarrow \frac{1}{z_0} (n + \frac{1+l}{2}) \pi \rightarrow \frac{1}{2} e^{|y|}$ , entonces  $|y| \rightarrow \log \frac{2}{z_0} (n + \frac{1+l}{2}) \pi$ . En resumen, los polos de la función  $S_1(\kappa)$  tienden a los puntos de coordenadas

$$x = (n + \frac{1+l}{2}) \pi, \quad y = -\log \frac{2}{z_0} (n + \frac{1+l}{2}) \pi \quad \text{cuando } n \gg 1. \quad (46)$$

Cuando se discutió el caso general de dispersión por un potencial cualquiera, se supuso que el integrando de la ecuación (31b) tendía a cero sobre una circunferencia de radio infinito que no pasara por ningún polo. Es posible ahora, en el caso del pozo de potencial, hacer ver que la función  $S_1(\kappa)$ , fuera de los polos, decrece si  $\kappa \rightarrow \infty$  en la parte inferior del plano complejo.

Para valores muy grandes de  $\kappa$ , y con la notación introducida, la función  $S_1(\kappa)$  se puede poner, según la ecuación (43a),

$$S_1 = (-1)^1 \exp(-2i\kappa a) \frac{\text{sen}(z - \frac{1+l}{2} \pi) - i \frac{\zeta}{z} \cos(z - \frac{1+l}{2} \pi)}{\text{sen}(z - \frac{1+l}{2} \pi) + i \frac{\zeta}{z} \cos(z - \frac{1+l}{2} \pi)}.$$

Escribiendo las funciones trigonométricas en términos de exponenciales, se tiene

$$S_1(\kappa) = (-1)^1 \exp(-2i\kappa a) \times$$

$$\frac{\frac{1}{2i} (1 + \frac{\zeta}{z}) \exp[i(z - \frac{1+l}{2} \pi)] - \frac{1}{2i} (1 - \frac{\zeta}{z}) \exp[-i(z - \frac{1+l}{2} \pi)]}{\frac{1}{2i} (1 - \frac{\zeta}{z}) \exp[i(z - \frac{1+l}{2} \pi)] - \frac{1}{2i} (1 + \frac{\zeta}{z}) \exp[-i(z - \frac{1+l}{2} \pi)]}$$

pero poniendo  $z = x+iy$ ; y recordando que  $y$  es negativa, se tiene que la exponencial  $\exp[-i(z - \frac{1+i}{2} \pi)] \rightarrow 0$ ; entonces se puede poner

$$S_1(\kappa) \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} (-1)^1 \exp(-2i\kappa a) \frac{1 + \frac{\zeta}{z}}{1 - \frac{\zeta}{z}}, \quad (47)$$

por último, poniendo

$$\frac{\zeta}{z} = \sqrt{1 - \left(\frac{z_0}{z}\right)^2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 + \dots,$$

se tiene

$$S_1(\kappa) \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} (-1)^1 \exp(-2i\kappa a) \frac{4z^2}{z_0^2}, \quad (48)$$

lo cual indica que fuera de los polos, la función  $S_1(\kappa) \rightarrow 0$  si  $\kappa \rightarrow \infty$  en la parte inferior del plano complejo, pues aunque  $z^2$  tiende a  $+\infty$ ,  $\exp(-2i\kappa a)$  tiende a  $-\infty$  más rápidamente.

### VIII. Penetración de barrera.

El problema de la penetración de barreras de potencial está íntimamente relacionado con la dispersión de paquetes de ondas por un potencial dispersor. En esta sección se da un esquema del tratamiento de la penetración de una barrera de potencial por un procedimiento análogo, en esencia, al de dispersión.

Considérese un potencial de la forma siguiente:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq r < a \\ V(r) > 0 & \text{si } a \leq r \leq b \\ 0 & \text{si } r > b \end{cases}$$

y un paquete de ondas encerrado en  $r < a$ ; el problema que se quiere estudiar consiste en encontrar como sale el paquete a través de la barrera de potencial. Podría pensarse el problema diciendo que inicialmente el paquete estaba encerrado por una barrera infinita y que en el instante  $t = 0$ , tomó la forma (49). Por simplicidad, la discusión se hará solamente para momento angular cero.

Por analogía con la ecuación (14), se define la transformada del paquete de ondas inicial  $f(r)$  como

$$F(\kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a f(r) u^*(\kappa, r) dr, \text{ donde } f(r) = 0 \text{ si } r > a. \quad (50)$$

que puede decirse que es la transformada de Fourier en  $u(\kappa, r)$

La función de onda que describe el proceso es, con auxilio de (50),

$$\psi(r, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a F(\kappa) u(\kappa, r) \exp(-i \frac{1}{2} \kappa^2 t) d\kappa. \quad (51)$$

A diferencia del caso de dispersión, en el que se desarrolló el paquete de ondas inicial  $f(r)$  en integral de Fourier, aquí conviene desarrollar en serie de Fourier:

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \text{ sen } \frac{n\pi r}{a}; \quad (52)$$

este desarrollo es posible por la forma de la función  $f(r)$ ; el coeficiente numérico  $g_n$  está dado por

$$g_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a f(r) \text{ sen } \frac{n\pi r}{a} dr.$$

Substituyendo la función  $f(r)$  en su forma (52), en

la ecuación (50), se tiene

$$\begin{aligned}
 F(\kappa) &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \operatorname{sen} \frac{n\pi r}{a} u^*(\kappa, r) dr = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n G_n(\kappa) \quad . \quad (51)
 \end{aligned}$$

Ahora bien, en la región  $a \leq r \leq b$ , se tiene que la función de onda satisface la ecuación

$$\frac{d^2 ru}{dr^2} + [\kappa^2 - 2V(r)] ru = 0 \quad ,$$

esta ecuación, por conocidas propiedades de las ecuaciones diferenciales<sup>4</sup>, tiene dos soluciones linealmente independientes  $w_1(\kappa, r)$  y  $w_2(\kappa, r)$  que son funciones enteras cuyas derivadas son también funciones enteras. Las funciones  $w_1(\kappa, r)$  y  $w_2(\kappa, r)$  cumplen las condiciones

$$\begin{aligned}
 w_1(\kappa, a) &= 1 & w_2(\kappa, a) &= 1 \\
 w_1'(\kappa, a) &= -\frac{1}{2} & w_2'(\kappa, a) &= \frac{1}{2} \quad . \quad (53)
 \end{aligned}$$

La función  $u(\kappa, r)$  queda definida en todo el intervalo  $0 \leq r < \infty$  en la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned}
 u(\kappa, r) &= -\frac{1}{2i} [\exp(-i\kappa r) - S(\kappa) \exp(i\kappa r)], & \text{si } r > b, \\
 u(\kappa, r) &= A(\kappa) \operatorname{sen} \kappa r, & \text{si } r < a, \\
 u(\kappa, r) &= B(\kappa) w_1(\kappa, r) + C(\kappa) w_2(\kappa, r), & \text{si } a \leq r \leq b;
 \end{aligned} \right\} (54)$$

con las condiciones de continuidad de la función  $u(\kappa, r)$  y

su derivada en  $r = a$  y  $r = b$  es posible determinar las cuatro funciones desconocidas  $S(\kappa)$ ,  $A(\kappa)$ ,  $B(\kappa)$  y  $C(\kappa)$ .

La función  $R(\kappa^2)$  se define del modo siguiente:

$$R(\kappa^2) = \frac{u(\kappa, b)}{\left[ \frac{du(\kappa, r)}{dr} \right]_b} ; \quad (55)$$

aprovechando la continuidad de la función  $u(\kappa, r)$  y de su derivada en  $r = b$ , la función  $R_1(\kappa^2)$  toma la forma

$$R(\kappa^2) = \frac{1}{\kappa} \frac{\exp(-i\kappa b) - S(\kappa)\exp(i\kappa b)}{\exp(-i\kappa b) + S(\kappa)\exp(i\kappa b)} . \quad (56)$$

Despejando la función  $S(\kappa)$  se obtiene

$$S(\kappa) = \exp(-2i\kappa b) \frac{1+i\kappa R(\kappa^2)}{1-i\kappa R(\kappa^2)} . \quad (57)$$

Ahora bien, es inmediato que para  $\kappa$  real,  $u(\kappa, r) S^*(\kappa) = -u(-\kappa, r)$ , y, en consecuencia, de la ecuación (54) se sigue que  $A(\kappa) S^*(\kappa) = A(-\kappa)$ .

La función  $G_n(\kappa)$  de la ecuación (50a) es, explícitamente,

$$G_n = A^*(\kappa) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\text{sen}(n\pi - \kappa a)}{\frac{n\pi}{a} - \kappa} - \frac{\text{sen}(n\pi + \kappa a)}{\frac{n\pi}{a} + \kappa} \right] . \quad (58)$$

Poniendo la función de onda  $\psi(r, t)$  en la forma

$$\psi(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(r, t) . \quad (59)$$

donde

$$\psi_n(r, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} g_n \int_0^{\infty} G_n(\kappa) u(\kappa, r) \exp(-i \frac{1}{2} \kappa^2 t) d\kappa,$$

se obtiene, por substitución de la función  $G_n(\kappa)$ ,

$$\begin{aligned} \psi_n(r, t) &= \frac{1}{\pi} g_n \int_0^{\infty} \Lambda^*(\kappa) \left[ \frac{\text{sen}(n\pi - \kappa a)}{\frac{n\pi}{a} - \kappa} - \frac{\text{sen}(n\pi + \kappa a)}{\frac{n\pi}{a} + \kappa} \right] \times \\ &\quad \times \left( -\frac{1}{2i} \right) [\exp(-i\kappa r) - S(\kappa) \exp(i\kappa r)] \exp(-i \frac{1}{2} \kappa^2 t) d\kappa = \\ &= \frac{1}{2\pi i} g_n \int_0^{\infty} \Lambda^*(\kappa) \left[ \frac{\text{sen}(n\pi - \kappa a)}{\frac{n\pi}{a} - \kappa} - \frac{\text{sen}(n\pi + \kappa a)}{\frac{n\pi}{a} + \kappa} \right] \times \\ &\quad \times S(\kappa) \exp(i\kappa r) \exp(-i \frac{1}{2} \kappa^2 t) d\kappa \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} g_n \int_0^{\infty} \Lambda^*(\kappa) \left[ \frac{\text{sen}(n\pi - \kappa a)}{\frac{n\pi}{a} - \kappa} - \frac{\text{sen}(n\pi + \kappa a)}{\frac{n\pi}{a} + \kappa} \right] \times \\ &\quad \times \exp(-i\kappa r) \exp(-i \frac{1}{2} \kappa^2 t) d\kappa. \end{aligned}$$

Ahora bien, haciendo en la segunda integral el cambio de variable  $\kappa \rightarrow -\kappa$ , se puede poner la función  $\psi_n(r, t)$  como una integral entre los límites  $-\infty$  e  $\infty$ :

$$\begin{aligned} \psi_n(r, t) &= \frac{1}{2\pi i} g_n \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda^*(\kappa) \left[ \frac{\text{sen}(n\pi - \kappa a)}{\frac{n\pi}{a} - \kappa} - \frac{\text{sen}(n\pi + \kappa a)}{\frac{n\pi}{a} + \kappa} \right] \times \\ &\quad \times S(\kappa) \exp(i\kappa r) \exp(-i \frac{1}{2} \kappa^2 t) d\kappa. \end{aligned} \quad (60)$$

El integrando tiene polos sólo en los polos de la función  $S(\kappa)$ , pues en  $\pm \frac{n\pi}{a}$ ,  $\frac{\text{sen}(n\pi \pm \kappa a)}{\frac{n\pi}{a} \pm \kappa} \rightarrow 1$ . La analogía for

mal de la ecuación (80) con la ecuación (29), sugiere definir la función  $\phi(\kappa)$  como sigue:

$$\phi(\kappa) = A^*(\kappa) \left[ \frac{\text{sen}(\pi\pi - \kappa a)}{\frac{\pi\pi}{a} - \kappa} - \frac{\text{sen}(\pi\pi + \kappa a)}{\frac{\pi\pi}{a} + \kappa} \right] S(\kappa) \quad , \quad (61)$$

de modo que la función  $\psi_n(r, t)$  se expresa brevemente en la forma

$$\psi_n(r, t) = \frac{1}{2\pi i} g_n \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\kappa) \exp(i\kappa r) \exp(-i \frac{1}{2} \kappa^2 t) d\kappa \quad , \quad (62)$$

que, a semejanza con el caso de la dispersión, se puede evaluar por el teorema de la convolución del modo siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) \phi(\kappa) \exp(-i\kappa r) d\kappa = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta) f(r-\eta) d\eta \quad ,$$

donde

$$F(\kappa) = \exp(-i \frac{1}{2} \kappa^2 t) \quad ,$$

$$f(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\eta) \exp(-i\eta\kappa) d\kappa \quad ,$$

y

$$\varphi(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\kappa) \exp(-i\eta\kappa) d\kappa \quad .$$

Efectuando el cálculo, se obtiene que la función  $f(\eta)$

es

$$f(r-\eta) = \exp(-i \frac{\pi}{4}) \sqrt{\frac{1}{t}} \exp\left[i \frac{(r-\eta)^2}{2t}\right] \quad ;$$

para la función  $\varphi(\eta)$ , se distinguen dos casos:  $\eta > 0$  y  $\eta < 0$ . Si  $\eta > 0$ , como la función  $S(\kappa)$  está acotada en el semiplano superior complejo,  $\varphi(\eta) = 0$ , y para  $\eta < 0$ ,  $\text{supp}$

niendo que el integrando está acotado en la parte inferior del plano complejo y que si se cierra el contorno por una circunferencia de radio infinito, la integral sobre ésta es nula, se obtiene

$$\varphi(\eta) = \sqrt{2\pi} i \sum_{a=1}^n B_a \exp(-i\eta\kappa_a) \quad , \quad \eta < 0 \quad ,$$

donde  $\kappa_a$  son los polos de la función  $S(\kappa)$  y las constantes  $B_a$  son los residuos

$$B_a = \text{Res}[\phi]_{\kappa=\kappa_a} \quad .$$

La función  $\psi_n(r, t)$  se hace, entonces, en términos de la función  $\chi(r, \kappa, t)$ ,

$$\psi_n(r, t) = \frac{1}{2} g_n \sum_{a=1}^n B_a \chi(r, \kappa_a, t) \quad . \quad (63)$$

#### IX. Estados quasi estacionarios.

El problema de la descripción dinámica de la dispersión por un potencial de corto alcance se planteó en la sección II, mediante la introducción de una función de Green que permite encontrar la función de onda dependiente del tiempo. En la sección IV se evaluó explícitamente dicha función de Green, expresándola en términos de unas funciones dependientes del tiempo. El objeto de esta sección es interpretar el significado de los diferentes términos que aparecen en la función de Green.

El desarrollo en el tiempo de un paquete de ondas arbitrario que se dispersa al incidir sobre un potencial de corto alcance  $V(r)$  dado en la ecuación (2), se da en la ecuación

(17a) en términos de una función de Green  $\Omega_1(r, k, t)$  explícitamente evaluada en la ecuación (33). Substituyendo la ecuación (33) en la ecuación (17a) se obtiene

$$\begin{aligned} \psi_1(r, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{F}_1(k) j_1(kr) \exp(-i \frac{1}{2} k^2 t) k^2 dk \\ &- \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a^2}{2r} \int_0^{\infty} \bar{F}_1(k) \left[ k j_1(kr) - \frac{j_1'(ka)}{R_1(k^2)} \right] \times \\ &\times [\exp(-ika) u_1(-k, a) \chi_1(r-a, -k, t) + \exp(ika) u_1(k, a) \chi_1(r-a, k, t)] k^2 dk \\ &- \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a^2}{r} \sum_{a=3}^{\infty} A'_a \chi_1(r-a, \kappa_a, t) \end{aligned}$$

donde los polos  $\kappa_a$  con  $a = 3, \dots, \infty$  son los polos de la función  $S_1(\kappa)$ , y las constantes  $A'_a$  están dadas por la ecuación siguiente:

$$A'_a = \int_0^{\infty} A_a \bar{F}_1(k) k^2 dk$$

Ahora bien, la función  $\chi_1(r-a, -k, t)$  es muy pequeña para todo valor de  $t$ , entonces, despreciando la contribución de dicha función, se puede poner la función  $\psi_1(r, t)$ , con ayuda de la forma asintótica de las funciones  $\chi_1(r-a, \kappa_a, t)$ , en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \psi_1(r, t) &\xrightarrow[r \gg k^{-1}, |\kappa_a|^{-1}]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \bar{F}_1(k) \times \\ &\times [h_1^-(kr) + S_1(k) h_1^+(kr)] \exp(-i \frac{1}{2} k^2 t) k^2 dk \\ &- \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{a^2}{r} \sum_a A'_a \exp(-i \kappa_a a) \exp[+i(\kappa_a r - \frac{1}{2} \kappa_a^2 t)] \end{aligned} \quad (64)$$

en donde la suma se efectúa sobre los polos de la función  $S_1(\kappa)$  cuyo argumento sea  $\theta$  con la condición  $-\frac{\pi}{4} < \theta < 0$ .

Los términos de la ecuación (64) se pueden interpretar en la siguiente forma: el primer término, o sea la integral, corresponde al estado estacionario del proceso en el que se tiene una onda incidente y una onda dispersa saliente; éste es el término que corresponde propiamente al caso de dispersión. Ahora bien, la analogía de los términos de la suma con los términos que aparecen en el caso de penetración a través de una barrera de potencial y que están dados en la ecuación (63), indica que al incidir la onda sobre el potencial, existe estados quasi estacionarios con una vida media de  $-\frac{1}{\kappa \alpha \kappa \alpha}$ .

#### REFERENCIAS.

1. M. Moshinsky, Phys. Rev. 84, 525 (1951)  
F. M. Medina, Rev. Mexicana Fis., II, 117 (1953).
2. Feshbach, Peaslee, Weisskopf, Phys. Rev. 71, 145 (1947).
3. E. P. Wigner, Ann. of Math. 53, 36 (1951).
4. E. L. Ince, Ordinary Differential Equations, p. 72.  
Dover Publications.
5. M. Moshinsky, comunicación privada.
6. J. A. Stratton, Electromagnetic Theory, p. 406, McGraw-Hill Book Co. Inc. (1941).
7. I. N. Snedon, Fourier Transforms, p. 23, McGraw-Hill Book Co. Inc. (1951).