ANALISIS ESPECTRAL DEL OLEAJE

MARIO TOSTADO BOJORQUEZ

TESIS

PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE
POSGRADO DE LA
FACULTAD DE INGENIERIA
DE LA
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MEXICO
COMO REQUISITO PARA OBTENER
EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERIA
(APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS)

CIUDAD UNIVERSITARIA, FEBRERO DE 1988

RESUMEN

SE DESARROLLA UN PROCEDIMIENTO PARA DEFINIR LA FUNCION DE DENSIDAD ESPECTRAL S(F), A PARTIR DE UN CONJUNTO DE DATOS DE UN REGISTRO DE ELEVACIONES DE SUPERFICIE LIBRE DEL MAR. CON EL ESPECTRO ES POSIBLE OBTENER LAS CARACTERISTICAS ALTURA Y PERIODO SIGNIFICANTES REPRESENTATIVAS DEL OLEAJE EN ESTUDIO. EL METODO SE BASA EN EL ANALISIS DE FOURIER. CON LOS RESULTADOS DE ESTE TRABAJO SE CONOCEN LAS CARACTERISTICAS DEL OLEAJE A QUE PUEDEN SOMETERSE ESTRUCTURAS EN INGENIERIA MARITIMA. EL PROCEDIMIENTO ES SIMPLE DE APLICAR Y REQUIERE DE POCO TIEMPO DE CALCULO EN MICROCOMPUTADORAS PERSONALES.

CONTENIDO

1. INTRODUCCION

Uno de los significados de la palabra espectro es el de la gráfica que resulta de pasar luz a través de un prisma. En forma más general, se tomó como el resultado que se obtiene cuando la energía radiante es dispersada quedando sus rayos arreglados o dispuestos en el orden de sus correspondientes longitudes de onda. Así el espectro ha venido a ser la separación por longitudes de onda (o lo que es lo mismo por frecuencias, si los datos son una función del tiempo) de cualquier señal no únicamente de la luz o energía radiante.Por otra parte la variación del nivel de la superficie libre del mar, se puede registrar mediante una señal eléctrica, de tal manera que de acuerdo a una transformación de esta señal, es posible estimar dicha variación y de ésta su espectro.

En ingeniería marítima, se ha utilizado el concepto de espectro de energía o potencia para referirse a la energía contenida en un conjunto o tren de olas. Como las características del oleaje tales como altura y periodo, principalmente, son función de esa energía, ello permite determinar la altura y periodo significante del grupo de olas de tal manera que si se cuenta con una colección de valores de alturas y periodos es posible escoger después de un análisis estadistico la de diseño, para estructuras maritimas sujetas a la acción del oleaje, de acuerdo a un periodo de retorno previamente seleccionado.

En ocasiones es dificil determinar el oleaje representativo que incide sobre un lugar de interés, sobre todo cuando no se cuenta con los datos necesarios. En este trabajo, se desarrolla un procedimiento que permite definir la función de densidad espectral s(f) o espectro, a partir de un conjunto de datos de un registro de elevaciones de superficie libre del mar en un punto fijo, el cual es una alternativa para definir las caracteristicas representativas del oleaje en estudio. El método se basa en el análisis espectral y se apoya principalmente en el análisis de Fourier.

Hasta hace algún tiempo la transformada de Fourier requería de mucho tiempo de cálculo, por la gran cantidad de operaciones que se tienen que realizar, lo que hacia necesario recurrir al uso de computadoras a las cuales en la mayoría de las veces no se tenía fácil acceso. Sin embargo, hoy en día mediante el empleo de la transformada de Fourier en microcomputadoras de uso común en centros educativos, de investigación y en una gran mayoría de empresas, es posible realizar estos cálculos con mayor facilidad y, además, sin demasiado tiempo de cálculo. Lo anterior ha hecho que la idea del análisis espectral sea más atractiva y un mayor número de profesionales dediquen más atención a este tipo de análisis como una alternativa más para la solución de problemas no solamente dentro de la Ingeniería Marítima sino también de otras especialidades que requieren el análisis de señales de tipo continuo.

Esta trabajo tiene como objetivo describir el análisis espectral del oleaje. Para ello, en el capitulo 2, se hace una breve descripción de algunos conceptos de estadistica que intervienen en el análisis de los datos de registro de oleaje considerado como aleatorio.

En el capitulo 3, se discuten las bases matemáticas que conducen a la obtención del espectro de energía del oleaje, función de densidad espectral. Se hace énfasis en el desarrollo de la transformada discreta de Fourier, por medio del algoritmo de la transformada rápida, lo cual reduce significativamente el tiempo de cálculo del espectro.

En el capitulo 4, se analiza la función de densidad espectral, obtenida por medio de la transformada de Fourier, a la vez que se describen y recomiendan algunos parámetros para su obtención. También se mencionan ciertas caracteristicas que se deben tomar en cuenta en la aplicación de la misma.

En ell capitulo 5, se presenta un resumen de las teorías del oleaje, recalcando la aplicación de la teoría lineal de Stokes primera aproximación, por la sencillez en su utilización a la vez que se obtienen resultados aceptables. Además se incluyen los criterios que permiten obtener una colección de valores de altura y periodo de la ola, cuando se dispone de un registro de la elevación de la superficie libre del mar encima en un punto fijo y basandose en esta colección de valores, se discute el análisis estadistico que permite disponer de los valores representativos como son, por ejemplo, altura y periodo significantes.

En el capitulo 6, se describen las funcionees de densidad espectral que tradicionalmente se emplean en el estudio del oleaje.

En el capitulo 7, se incluye un ejemplo completo donde se analiza, desde el punto de vista estadistico y espectral, un registro de una estación de mediciones de presión, siguiendo el procedimiento recomendado.

Por último, en el capitulo 8, se hace un resumen de resultados y se dan las conclusiones y recomendaciones, desde el punto de vista de la aplicación práctica en la obtención de las caracteristicas significantes para el oleaje.

2. ANTECEDENTES DE ESTADISTICA

Al soplar el viento sobre la superficie del mar, tanto por las fluctuaciones de presión, como por la acción del esfuerzo cortante entre los dos fluidos, una parte de la energía del viento se transfiere al mar, dando lugar a la formación del oleaje. Las olas generadas son irregulares, de manera que solo un tratamiento estadístico permite conocer sus características. Debido a esto, es necesario mencionar algunos conceptos que se utilizan en el estudio estadístico del oleaje.

2.1 Variable aleatoria discreta y continua

Aquellos fenómenos que no siguen ninguna ley especifica, de manera tal que no es posible predecir su comportamiento con una seguridad completa, se les conoce como fenómenos aleatorios. Su representación matemática se hace por medio de funciones que contienen variables aleatorias.

Una variable aleatoria que toma un número finito de valores se denomina "variable aleatoria discreta" mientras que una que toma un número no contable de valores se llama "variable aleatoria continua".

Así por ejemplo, para obtener la media o valor medio, x, de una variable discreta, x, simplemente se suman todos los valores x_1, x_2, x_3,..., x_N y se divide entre N, siendo N el número de valores de x, esto es

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\left[x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N\right] \tag{2.1}$$

o
$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k = \sum_{k=1}^{N}\frac{x_k}{N} \tag{2.2}$$

en cambio, para una variable continua, la suma de la ec. (2.2) tendría que ser escrita como una integral o sea

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} x(t)\,dt \tag{2.3}$$

o bien si $w(t) = 1/T$ y $x(t) = 0$ para $t_o \leq t \leq t_o+T$.

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)\,x(t)\,dt$$

Para calcular la media cuando se tienen valores discretos, se utilizan sumas y para valores continuos, se utilizan integrales.

2.2 Funciones de densidad de probabilidad

Cuando una variable aleatoria x toma valores infinitos en un intervalo, $a \leq x \leq b$, no es posible definir su distribución de probabilidad en forma tabular. En este caso deberá definirse a ella forma gráfica o analítica.

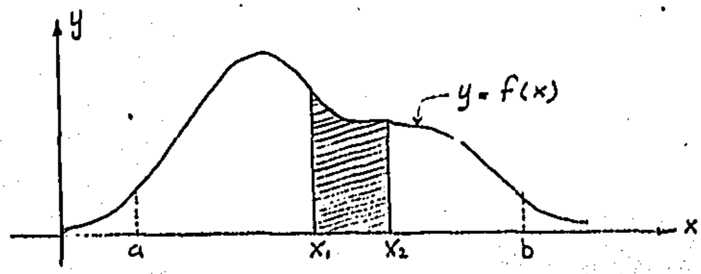


Fig. 2.1 Representación gráfica de la función de densidad de probabilidad

Por la continuidad de los valores de x en el intervalo, en este caso el polígono de probabilidad se convierte en una curva continua de ecuación $y = f(x)$, siendo $f(x)$ una función real de la variable aleatoria x en su intervalo de definición $a \leq x \leq b$. A la función $f(x)$ se le llama "función de densidad de probabilidad" de la variable aleatoria x. Su expresión algebraica constituye la representación analítica de la distribución de probabilidad de la variable.

Esta expresión analítica se determina de manera que la probabilidad $p(x_1 \leq x \leq x_2)$, sea igual al área bajo la curva de definición $f(x)$ entre $x = x_1$ y $x = x_2$, como se muestra en la figura 2.1. Entonces

$$p(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \qquad (2.4)$$

Para poder ser una función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua la función f(x) debe cumplir con dos condicines

a) La función f(x) no es negativa para todo valor de x

$$f(x) \geq 0 \quad \text{en} \; -\frac{T}{2} \leq x \leq \frac{T}{2} \tag{2.5}$$

b) El área bajo la curva de la función f(x) en el intervalo $-T/2 \leq x \leq T/2$ vale uno

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, dx = 1 \tag{2.6}$$

Algunas funciones de densidad de probabilidad que se usan en el estudio del oleaje sson: función Gauss o Normal, función Rayleigh y la función χ^2.

2.2.1 Función normal o de Gauss.

Se dice que la variable aleatoria continua x si sigue una distribución normal, si su función de densidad de probabilidad esta dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, d}\, e^{-(x-m)^2/2d^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty \tag{2.7}$$

en donde m y d son los parámetros.

Se puede demostrar que la media de la variable aleatoria x con distribución normal de probabilidad [14]

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ d} e^{-(x-m)^2/2d^2} \qquad (2.8)$$

es el parámetro m, es decir

$$\mu_x = m \qquad (2.9)$$

Asimismo, si la variancia de la variable aleatoria con distribución normal de probabilidad es

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^2\ f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ d} e^{-(x-m)^2/2d^2} dx$$

se obtiene al efectuar la integral que la desviación estándar de la distribución normal es el parámetro d, es decir

$$\sigma_x = d \qquad (2.10)$$

Tomando en cuenta (2.9) y (2.10) en (2.7), se establece que la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria x con distribución normal o Gauss de media μ_x y desviación estándar σ_x es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_x} e^{-(x-\mu_x)^2/2\sigma_x^2} \quad , -\infty < x < \infty \qquad (2.11)$$

Una simplificación de la funcion de distribución normal, se obtiene al realizar e l siguiente cambio de variable

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \qquad (2.12)$$

donde z se llama variable normal estandarizada

por lo que al considerar (2.12) en (2.11) para media cero y desviación estándar uno

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-z^2/2} \qquad , -\infty < z < \infty \tag{2.13}$$

la cual corresponnde a la función de densidad de probabilidad normal estándar

2.2.2 Función Rayleigh

Cuando una variable continua x tiene una función de densidad de probabilidad de la forma

$$f(x) = \frac{x}{\sigma_x^2} \; e^{-x^2/2\sigma_x^2} \tag{2.14}$$

se dice que la variable x tiene una distribución Rayleigh, donde σ_x es la desviación estándar de la población y se obtiene como en el inciso 2.2.1.

2.2.3 Función χ^2

La distribución χ^2 (léase ji cuadrada) es continua y se define para todo valor real mayor de cero de su variable aleatoria. Se utiliza para hacer pruebas estadísticas sobre la desviación estándar de poblaciones normalmente distribuidas y para investigar si resultados de experimentos aleatorios pueden representarse por medio de alguna distribución teórica de probabilidad.

Sean x_1, x_2, $x_3, \ldots, x_\nu$, ν variables aleatorias independientes, cada una con distribución normal estándar. La suma de los cuadrados de estas variables constituyen una nueva variable aleatoria que se representa por χ^2.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 \tag{2.15}$$

la cual tiene como función de densidad de probabilidad

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} (\chi^2)^{(\nu-2)/2} e^{-\chi^2/2} \tag{2.16}$$

donde ν es el número de variables aleatorias en (2.15) y $\Gamma(\nu/2)$ es la función gamma de parámetro $\nu/2$. La función (2.16) define la distrubución χ^2 con ν grados de libertad. una gráfica de distribución χ^2 para diferentes grados de libertad se presenta en la figura 2.2.

En la tabla 2.1, aparecen tabulados los valores de χ^2, con diferentes grados de libertad, de manera que los valores de la función de distribución de probabilidad χ^2

$$F(\chi_p^2) = \int_0^{\chi_p^2} \frac{1}{2^{\nu-2}\,\Gamma(\nu/2)} (\chi^2)^{(\nu-2)/2} e^{-(\chi^2/2)} d\chi^2 \tag{2.17}$$

sean 0.5, 1, 2.5, 5, 10, 25, 50, 75, 90, 95, 97.5, 99, y 99.5 % del área total.

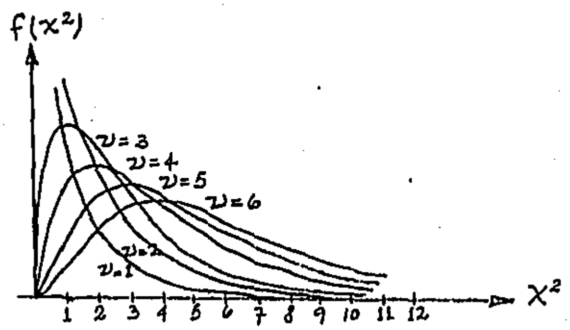


Fig.2.2 Gráfica de la distribución χ^2 para varios grados de libertad

Respecto a la función gamma de parámetro ν, que aparece en (2.16) esta se define como el resultado de la intregal impropia

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\nu-1}\, dt \tag{2.18}$$

donde puede demostrarse, integrando por partes que

$$\Gamma(\nu) = (\nu-1)\,\Gamma(\nu-1) \tag{2.19}$$

De lo anterior puede decirse quee basta con tener tablas de la función gamma para calcular cualquier valor real entre 1 y 2 para que pueda obtenerse el valor de la función gamma de cualquier parámetro.

Por otro lado la media y la variancia de la variable χ^2 con ν grados de libertad son, respectivamente,

$$\mu_{\chi^2} = \nu \tag{2.20}$$

$$\sigma^2_{\chi^2} = 2\nu \tag{2.21}$$

Para una aproximación a la normal, puede demostrarse que a medida que el número de grados de libertad ν crece, la variable

$$z = \sqrt{2\chi} - \sqrt{2\nu-1} \tag{2.22}$$

tiende a la distribución normal estándar (de media cero y desviación estándar uno). Este resultado puede utilizarse adecuadamente siempre que $\nu \geq 30$.

2.3 Estimadores

Un estimador es un valor aproximado de un parámetro poblacional, determinado de los estadísticos muestrales

Los estimadores pueden ser "puntuales" o por "intervalos de confianza". Si la estimación de un parámetro se hace a través de un número simple, generalmente el estadístico correspondiente, se tendrá un estimador puntual. Por el contrario, si la estimación del parámetro se hace por medio de dos números entre los que se considere esta ese parámetro, se tendrá una estimación por intervalo de confianza. En este caso, y asociado al intervalo de confianza que contiene al parámetro, se tiene la probabilidad de ocurrencia asociada a este evento.

A continuaci_ón se establecen algunos estimadores puntuales.

Estimador insesgado. Se dice que un estadístico es un estimador insesgado, si el valor esperado de la distribución muestral del estadístico es igual al parámetro por estimar.

Así, el estadístico $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que depende de los valores observados de una muestra aleatoria de tamaño n de la población de valores dde la variable aleatoria x, es un estimador insesgado del parámetro θ asociado a la población, si

$$E\{\hat{\theta}\} = \theta \tag{2.23}$$

donde $E\{\theta\}$ es la esperanza matemática de $\hat{\theta}$.

Si la expresión anterior no es cierta, se dice que el estimador $\hat{\theta}$ es "sesgado" y se llama "sesgo" a la diferencia

$$\text{sesgo} = \theta - E\{\hat{\theta}\}. \tag{2.24}$$

Se puede demostrar [14] que la media una muestra de una población es un estimador insesgado de la media poblacional, es decir

$$E\{\bar{X}\} = \mu_x \tag{2.25}$$

donde $\bar{x}$ es la media de la muestra, μ_x es la media de la población y $E(x)$ es la esperanza matemática de x.

Asimismo, la variancia de la muestra es un estimador sesgado de la variancia de la población, esto es

$$E(s_x^2) = \sigma_x^2 - \sigma_x^2/n$$

$$E(s_x^2) = \frac{n-1}{n}\ \sigma_x^2 \qquad (2.26)$$

donde s_x^2 es la variancia de la muestra, σ_x^2 es la variancia de la población y $E(s_x^2)$ es la esperanza matemática de s_x^2.

Estimador eficiente. Si las distribuciones muestrales de dos estimadores tienen el mismo valor esperado, es decir, los dos estimadores son insesgados, se preferirá al que tenga menor variancia, y se dirá que éste es "eficiente". De todos los estimadores posibless de un parámetro que tengan la misma media, se dice que es el "más eficiente" el que tiene la menor variancia.

La media y la mediana de la muestra son estimadores de la media de la población, y puede demostrarse que la variancia de la media de la muestra es menor que la variancia de la mediana de la misma. Por tanto, puede decirse que la media de la muestra es un estimador eficiente de la media de la población. Además, se demuestra [14] que la media de la muestra es el estimador insesgado más eficiente de la media de la población.

2.4 Intervalo de confianza para la variancia

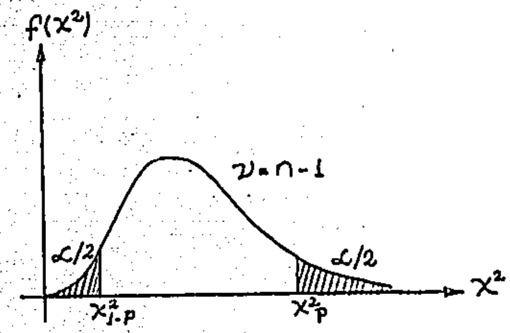
Sea una variable aleatoria normalmente distribuida con desviación estándar desconocida σ_x. De una muestra aleatoria de tamaño n se obtiene la desviación estándar muestral s_x a partir de la cual se trata de estimar σ_x.

En 2.2.3 se estableció que la suma de los cuadrados de ν variables aleatorias independientes con distribución normal estándar tiene distribución χ^2 con ν grados de libertad, por lo que puede afirmarse que la variable aleatoria

$$\nu^2 = \frac{n\ s_x^2}{\sigma_x^2} \tag{2.27}$$

tiene distribución χ^2 con n-1 grados de libertad. Al saberlo se puede decir que los valores de ν^2 a un cierto nivel de confianza están en el intervalo de confianza.

$$\chi^2_{1-p} \leq \frac{n\ s_x^2}{\sigma_x^2} \leq \chi^2_p$$



Despejando σ_x se obtiene el intervalo de confianza de la desviación estándar de una población con distribución normal

$$\frac{\sqrt{n\ s_x}}{\sqrt{\chi^2_p}} < \sigma_x < \frac{\sqrt{n\ s_x}}{\sqrt{\chi^2_{1-p}}} \tag{2.28}$$

Los valores críticos de χ^2 se obtienen de la tabla 2.1. Se recuerda que si n es grande, el estadístico

$$z = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu-1} \tag{2.29}$$

tiende a la distribución normal estándar, con el que se puede obtener los valores críticos de χ^2. Asi si χ^2 y z_p son los p-ésimos porcentiles de las ditribuciones χ^2 y normal estándar respectivamente, se obtiene

$$\chi_p^2 = \frac{1}{2} \left[z_p + \sqrt{(2\nu-1)}\right]^2 \tag{2.30}$$

2.5 Funciones de correlación

La función

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x(t+\tau)\, dt \tag{2.31}$$

se conoce como "función de correlación" cruzada de x con y de orden τ. Análogamente

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y(t+\tau)\, dt \tag{2.32}$$

La función de correlación cruzada $R_{xy}(\tau)$ o $R_{yx}(\tau)$ suministra una medida de la interdependencia lineal entre las funciones x(t) y y(t) en función del parámetro τ (desplazamiento de una función respecto a la otra). Si la función de correlación es cercana a cero para cierto valor de τ, entonces se dice que las funciones no están correlacionadas para tal valor de τ.

Si x(t) y y(t) son idénticas, entonces la función de correlación

$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (y)\ x(t+\tau)\ dt \tag{2.33}$$

se denomina "función de autocorrelación" de orden τ de x(t).

Un algoritmo del proceso de autocorrelación se puede representar gráficamente como se indica en la fig 2.3. Se acepta que inicialmente la función en el tiempo total a ser autocorrelacionada x(t), se obtiene por observación (registros). Posteriormente la función x(t), se analiza asi misma en una muestra de duración, T. Se obtiene el valor de la integral y se anota como $R_{xx}(0)$; después la muestra de x(t) se repite para τ segundos, por lo que x(t) se vuelve $x(t+\tau)$ y de nuevo se calcula el valor de la integral para $x(t+\tau)$. El proceso se repite para todos los valores positivos y negativos de τ. El resultado es la fuunción de autocorrelación

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\ x(t+\tau)\ dt \tag{2.34}$$

Se puede ver en la fig. 2.3 que cuando no hay desplazamiento esto es para $\tau=0$, la multiplicación de x(t) por si misma tiende a reforzar los valores grandes o picos y minimizar los pequeños. Además éste proceso siempre produce valores positivos de la función por lo que el valor de la integral es máximo para $\tau=0$. Este valor de $R_{xx}(\tau)$ se conoce como la media cuadrática de x(t), que por sustitución de $\tau=0$ en la ec.(2.34) se obtiene

$$R_{xx}(0) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\ dt = \bar{x}^2 \tag{2.35}$$

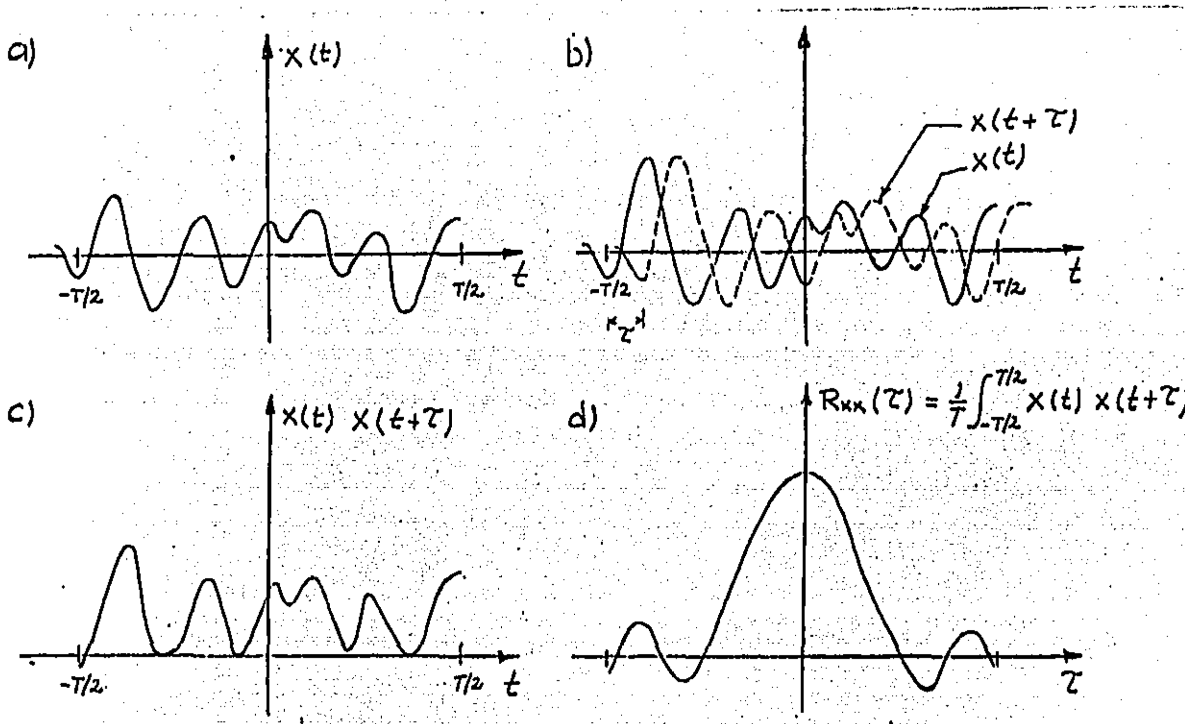


Fig. 2.3 Proceso de autocorrelación

que es una medida del promedio de la energía contenida en la serie del tiempo.

Para el caso discreto, la integral en la ecuación (2.31) se convierte en una suma, por lo que la función de corrrelación $R_{xy}(\tau)$ queda

$$R_{xy}(\tau) = \frac{\frac{1}{N} \Sigma \ (x_i - \bar{x}) \ (y_{i+\tau} + \bar{y})}{\frac{1}{N} \Sigma \ (x_i - \bar{x}) \ (x_i - \bar{x})} \tag{2.36}$$

de igual manera $R_{xx}(\tau)$ se transforma en

$$R_{xx}(\tau) = \frac{\frac{1}{N}\Sigma\ (x_i - \bar{x})\ (x_{i+\tau} - \bar{x})}{\frac{1}{N}\Sigma\ (x_i - \bar{x})\ (x_{i+\tau} - \bar{x})} \tag{2.37}$$

y cuando $\tau=0$, de la ecuación (2.37) se observa que

$$R_{xx}(0) = 1. \tag{2.38}$$

Otra manera de conocer si dos fuciones tienen dependenciaa lineal entre si, es a través de la covariancia (C_{xy}). Por definición en cualquier literatura sobre estadística C_{xy} está definida por

$$C_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})\ (y_i - \bar{y}) \tag{2.39}$$

si las funciones x(t) y y(t) se analizan de accuerdo al parámetro τ

$$C_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})\ (y_{i+\tau} - \bar{y}) \tag{2.39}$$

y de igual manera que en la ec. (2.33), la (2.39) se convierte en

$$C_{xx} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})\ (x_{i+\tau} - \bar{x}) \tag{2.40}$$

cuando las dos funciones son iguales se les conoce como "autocovariancia" de x(t). Además cuando la media $\bar{x}$, es cero, la autocovariancia de orden cero ($\tau=0$) se escribe como

$$C_{xx} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \tag{2.41}$$

Si la variancia de x(t) se define como

$$V_x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \tag{2.42}$$

entonces la autocovariancia C_{xx}, se puede normalizar, dividiendo entre la variancia V_x, obteniendose así el "coeficiente de autocorrelación" r_{xx} de orden τ

$$r_{xx} = \frac{C_{xx}}{V_x} = \frac{\frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})\ (x_{i+\tau} - \bar{x})}{\frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})\ (x_i - \bar{x})} \tag{2.43}$$

Para el caso de x(t) = y(t) la ec. (2.43) se conoce como "coeficiiente de correlación" de orden τ entre x(t) y y(t)

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}}{V_x} = \frac{\frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})\ (y_{i+\tau} - \bar{y})}{\frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})\ (x_i - \bar{x})} \tag{2.44}$$

Se puede demostrar que este coeficiente tiene la interesante propiedad de que

$$-1 \leq r_{xy} \leq 1 \tag{2.45}$$

2.6 Función de convolución

sean $f_1(t)$ y $f_2(t)$ dos funciones dadas. La "convolución" de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, esta dada por la función

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\ f_2(t-x)\ dx \tag{2.46}$$

la cual se expresa simbólicamente como

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) \qquad (2.47)$$

Un caso especial importante es aquel en el cual

$f_1(t) = 0$ para $t = 0$ y $f_2(t) = 0$ para $t < 0$

Entonces , (2.46) se convierte en

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t)\, f_2(t-x)\, dx \qquad (2.48)$$

se puede demostrar que la convolución cumple con las leyes conmutativa y asociativa [7] ; esto es

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \qquad (2.49)$$

$$\left[f_1(t) * f_2(t)\right] * f_3(t) = f_1(t) * \left[f_2(t) * f_3(t)\right] \qquad (2.50)$$

3. TRANSFORMADA DE FOURIER

El perfil de la superficie del mar puede considerarse como el resultado de una suma de ondas senoidales, las cuales tienen diferentes amplitudes y periodos. Como la serie de Fourier se puede expresar como una suma de senoides, resulta útil representar la superficie del mar por medio de esta serie.

3.1 Series de Fourier

Una serie trigonométrica de la forma

$$\frac{1}{2} a_o + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx + \ldots \tag{3.1}$$

en la cual los coeficientes a_n y b_n son constantes y se calculan a partir de una función $f(x)$ mediante las fórmulas de Euler

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots) \tag{3.2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots) \tag{3.3}$$

se conoce como "serie de Fourier" de f(x).

Estas se repiten con periodo $2\pi/n$, aunque también puede extenderse la teoria para cualquier periodo arbitrario.

3.1.1 Funciones de periodo arbitrario

Sea f(t) definida para toda $t > 0$ y $T > 0$, f es periódica con periodo T si $f(t+T) = f(t)$.

Una función periódica f(x) con periodo T también puede tener un desarrollo en series de Fourier. Para poder utilizar las fórmulas de Euler aplicables a funciones periódicas con periodo 2π se introduce el siguiente cambio de variable

$$t = \frac{T}{2\pi} x \quad \text{de donde} \quad x = \frac{2\pi t}{T}$$

entonces la función $f(2\pi t/T)$ es una función periódica de t, con periodo T.

La serie de Fourier correspondiente será

$$f(\frac{T}{2\pi} x) = a_o + \Sigma\ (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt)$$

con coeficientes

$$a_o = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{T}{2\pi} x)\ dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{T}{2\pi} x)\ dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{T}{2\pi} x)\ dx$$

Como $x = 2\pi t/T$ entonces $dx = 2\pi dt/T$.

Además cuando $x = -\pi$ resulta que $t = -T/2$ y

si $x = \pi$ se tiene que $t = T/2$

por lo que los coeficientes serán

$$a_o = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ ft$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ dt \end{aligned}\right\} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

y la serie queda

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t + b_n \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{T} t)$$

El intervalo de integración de los coeficientes puede remplazarse por cualquier intervalo de longitud T, por ejemplo, $0 \leq t \leq T$, $T/2 \leq t \leq 3T/2$, etc.

si se hace $w_1 = 2\pi/T$, la serie de Fourier y los coeficientes quedan

$$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nw_1t + b_n \text{ sen } nw_1t) \tag{3.4}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos nw_1t \, dt \tag{3.5}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{ sen } nw_1t \, dt \tag{3.6}$$

3.1.2 Otras formas de representar a las series de Fourier

La serie (2.1) puede ser escrita en términos de la amplitud (A_n) y ángulo de fase (Θ_n).

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{ sen } (nw_1t + \theta_n) \tag{3.7}$$

donde $\theta_n = \text{ang tan} \left(\frac{b_n}{a_n} \right)$ (3.8)

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \tag{3.9}$$

También la ecuación (3.1) es equivalente a la llamada "forma compleja de la serie de Fourier". Como se recordará si z es un número complejo

$$a + bj = z$$

donde a representa la parte real, b la parte imaginaria y $j = \sqrt{-1}$. Basándose en la identidad de Euler se puede escribir que

$$e^{\pm\theta j} = \cos \theta \pm j \text{ sen } \theta$$

el número complejo z se escribe como

$$z = r\, e^{j\theta}$$

en lo que $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y θ = ang tan b/a en (radianes)

De manera similar utilizando la identidad de Euler se expresa la serie de Fourier en términos de números complejos, haciendo $w_1 = 2\pi f_1$, es decir

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{jn2\pi f_1 t} \tag{3.10}$$

donde $c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-jn2\pi f_1 t}\, dt\, dt$ (3.11)

3.2 De la serie de Fourier a la transformada de Fourier

Sea f(t) una función periódica con perioddo T; cuando T se aproxima al infinito, f(t) se convierte en una función no periódica.

De acuerdo a la forma compleja de la serie de Fourier se tiene

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{jn2\pi f_1 t} \tag{3.12}$$

donde $c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-jn2\pi f_1 t}\, dt$ (3.13)

al sustituir (3.13) en (3.12) queda

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-j2n\pi f_1 t}\, dt \right] e^{jn2\pi f_1 t} \qquad (3.14)$$

puesto que f = 1/T la ecuación (3.14) se puede expresar como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-jn2\pi f_1 t}\, dt \right] f\, e^{jn2\pi f_1 t} \qquad (3.15)$$

Ahora se hace que $T \rightarrow \infty$, y así, f_1 se anula. Sea $f_1 = \Delta f$; entonces la frecuencia de cualquier armónico nf_1 debe corresponder a la variable general de frecuencia. En otras palabras, $n \rightarrow \infty$ a medida que $f_1 = \Delta f \rightarrow 0$, tal que el producto es finito; esto es

$$nf_1 = n\, \Delta f_1 \rightarrow f$$

de este modo (3.15) se convierte en

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-jn2\pi\Delta f t}\, dt \right] \Delta f\, e^{jn2\pi \Delta f t} \qquad (3.16)$$

En el límite, $T \rightarrow \infty$, $f \rightarrow df$, y la suma se convierte en la integral sobre f; es decir la función periódica f(t) equivale a

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \right] e^{j2\pi f t}\, df \qquad (3.17)$$

si se define

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \qquad (3.18)$$

entonces la ecuación (3.17) queda

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(f)\ e^{j2\pi ft} df \tag{3.19}$$

La función F(f) definida por (3.18) se conoce como "transformada de Fourier" de f(t) y la función (3.19) como la "antitransformada de Fourier" de F(f), las cuales se designan con los simbolos £ y $£^{-1}$, respectivamente; esto es las ecuaciones (3.18) y (3.19), se pueden representar como

$$F(f) = \pounds[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ e^{-j2\pi ft}\ dt \tag{3.20}$$

$$f(t) = \pounds^{-1}[F(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(f)\ e^{j2\pi ft}\ df \tag{3.21}$$

A las ecuaciones (3.20) y (3.21) a menudo se les conoce como un "par de transformadas de Fourier".

En lo sucesivo, para indicar la transformada de Fourier de una función también se utilizará una $\rightarrow$ (flecha) es decir $f(t) \rightarrow \pounds[f(t)]$ significa que f(t) tiene como transformada de Fourier a £[f(t)].

La condición para que exista F(f) esta dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\ dt < \infty \tag{3.22}$$

En otros términos la integral del valor absoluto de f(t) debe ser finita.

Para calcular la transformada de Fourier de f(t), expresada en 318 como F(f), existen dos procedimientos, una es con la transformada continua de Fourier y la otra con la transformada discreta de Fourier.

3.3 Transformada discreta de Fourier

En ocasiones es difícil obtener la transformada de Fourier de f(t), utilizando la forma de la ecuación (3.18),por lo que es común recurrir a una manera más simplificada, esto se logra usando valores discretos de la variable en la función f(t). La forma discretizada de la ecuación (3.18), se obtiene fácilmente al remplazar la integral por una suma (ver subcap. 2.1), esto es , si se escoge una muestra de tamaño T de la función f(t) y se seleccionan puntos a cada Δt, se tiene

$$N = \frac{T}{\Delta t} \tag{3.23}$$

siendo N el número de puntos discretizados. Se recomienda que siempre sea un número tal que resulte de elevar 2 a una potencia entero positiva.

Si ahora

$$f(t_n) = f_n \tag{3.24}$$

$$w_k = k\,\Delta w \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{3.25}$$

$$\Delta w = 1/T \tag{3.26}$$

$$t_n = n\Delta t \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{3.27}$$

considerando lo anterior la ecuación (3.18) llega a ser

$$F(w) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-jwt}\, dt \qquad (3.28)$$

Si no se considera el límite y pensando en que la integral se realize de 0 a T

$$F(w) = \int_{0}^{T} f(t)\, e^{-jwt}\, dt \qquad (3.29)$$

La ecuación (3.29) también se puede escribir

$$F(w) = \lim_{T\to\infty} F(w_k) \qquad (3.30)$$

la cual en forma de suma resulta

$$F(w_k) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n\, e^{-jw_k t_n}\, \Delta t \quad \text{para } k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots N-1 \qquad (3.31)$$

de tal manera que al considerar (3.25) y (3.27)

$$w_k\, t_n = \frac{k}{\Delta w}\, n\, \Delta t = \frac{2\pi k}{N\, \Delta t}\, n\, \Delta t = \frac{2\pi k n}{N} \qquad (3.32)$$

y sustituir en la ecuación (3.31), esta se transforma en

$$F(w_k) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f_n\, e^{-j2\pi kn/N} \quad \text{para } k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,N-1 \qquad (3.33)$$

Sabiendo que $f_k = w_k/(2\pi)$ la ec. (3.33), también se puede escribir como

$$F(f_k) = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \, e^{-j2\pi kn/N} \quad \text{para} \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, N-1 \qquad (3.34)$$

La función $F(f_k)$ definida por (3.34) es llamada ""transformada discreta de Fourier".

Del mismo modo la "antitransformada discreta de Fourier" de $F(f_k)$ está dada por la inversa de la ec.(3.34)

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N-1} F(f_k) \, e^{j2\pi kn/N} \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, N-1 \qquad (3.35)$$

3.4 Transformada Rápida de Fourier

La transformada rápida de Fourier es simplemente un algoritmo que puede calcular la transformada discreta de Fourier mucho más rápidamente que cualquier otro algoritmo disponible.

A continuación se presenta el desarrollo de este algoritmo.

Considere que se desea calcular la transformada de Fourier discreta para N = 8. Es decir, se quiere obtener

$$F(f_k) = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=0}^{7} f_n \, e^{-j2\pi kn/8} \qquad (3.36)$$

Sean $W = e^{-j2\pi/8}$, $F(k) = F(f_k)\,\frac{2\pi}{\Delta t}$, $f_n = f_o(n)$ asi

$$F(k) = \sum_{n=0}^{7} f_o(n)\, W^{nk} \qquad (3.37)$$

si k y n se escriben en sistema binario, es decir si

$$k = 2^2 k_2 + 2^1 k_1 + k_0$$

$$n = 2^2 n_2 + 2^1 n_1 + n_0$$

de manera que $F(k) = F(k_2, k_1, k_0)$ y $f_0(n) = f_0(n_2, n_1, n_0)$ por lo que la suma de la ec.(3.37) queda

$$F(k_2, k_1, k_0) = \sum_{n_0=0}^{1} \sum_{n_1=0}^{1} \sum_{n_2=0}^{1} f_0(n_2, n_1, n_0)\, W^{(4n_2+2n_1+n_0)(4k_2+2k_1+k_0)}$$

Por otro lado la exponencial se puede escribir como

$$\begin{aligned} W^{(4n_2+2n_1+n_0)(4k_2+2k_1+k_0)} &= W^{(4k_2+2k_1+k_0)4n_2 + (4k_2+2k_1+k_0)2n_1 + (4k_2+2k_1+k_0)n_0} \\ &= W^{(4k_2+2k_1+k_0)4n}\, W^{(4k_2+2k_1+k_0)2n_1}\, W^{(4k_2+2k_1+k_0)n_0} \end{aligned}$$

siendo

$$W^{(4k_2+2k_1+k_0)4n_2} = \underbrace{W^{8(2k_2n_2)}}_{1} \underbrace{W^{8k_1n_2}}_{1} W^{4k_0n_2} = W^{4k_0n_2}$$

$$W^{(4k_2+2k_1+k_0)2n_1} = \underbrace{W^{8(k_2n_1)}}_{1} W^{(2k_1+k_0)2n_1} = W^{(2k_1+k_0)2n_1}$$

por lo que

$$F(k_2, k_1, k_0) = \sum_{n_0=0}^{1} \sum_{n_1=0}^{1} \sum_{n_2=0}^{1} f_0(n_2, n_1, n_0)\, W^{4k_0n_2}\, W^{(2k_1+k_0)2n_1}\, W^{(4k_2+2k_1+k_0)n_0}$$

la cual es equivalente

$$F(k_2,k_1,k_0) = \sum_{n_0=0}^{1} W^{(4k_2+2k_1+k_0)n_0} \left[\sum_{n_1=0}^{1} W^{(2k_1+k_0)2n_1} \right.$$

$$\left. \left[\sum_{n_2=0}^{1} f_0(n_2,n_1,n_0)\ W^{4k_0 n_2} \right] \right]$$

Haciendo

$$f_1(k_0,n_1,n_0) = \sum_{n_2=0}^{1} f_0(n_2,n_1,n_0)\ W^{4k_0 n_2}$$

$$f_2(k_0,k_1,n_0) = \sum_{n_1=0}^{1} f_1(k_0,n_1,n_0)\ W^{(2k_1+k_0)2n_1}$$

$$f_3(k_0,k_1,k_2) = \sum_{n_0=0}^{1} f_2(k_0,k_1,n_0)\ W^{(4k_2+2k_1+k_0)n_0}$$

$$F(k_2,k_1,k_0) = f_3(k_0,k_1,k_2)$$

a) Cálculo de $f_1(k_0T,\ n_1,\ n_0)$. El índice n_2 de $f_0(n_2,\ n_1,\ n_0)$ varía de 0 a 1

		$n_2=0$		$n_2=1$	
	$n_2 n_1 n_0$	$n_2 n_1 n_0$		$n_2 n_1 n_0$	$k_0 n_1 n_0$
f_0	$= f_0(0,0,0)$	$f_0(0,0,0)$	+	$f_0(1,0,0)\ W^0$	$= f_1(0,0,0)$
f_1	$= f_0(0,0,1)$	$f_0(0,0,1)$	+	$f_0(1,0,1)\ W^0$	$= f_1(0,0,1)$
f_2	$= f_0(0,1,0)$	$f_0(0,1,0)$	+	$f_0(1,1,0)\ W^0$	$= f_1(0,1,0)$
f_3	$= f_0(0,1,1)$	$f_0(0,1,1)$	+	$f_0(1,1,1)\ W^0$	$= f_1(0,1,1)$
f_4	$= f_0(1,0,0)$	$f_0(0,0,0)$	+	$f_0(1,0,0)\ W^4$	$= f_1(1,0,0)$
f_5	$= f_0(1,0,1)$	$f_0(0,0,1)$	+	$f_0(1,0,1)\ W^4$	$= f_1(1,0,1)$
f_6	$= f_0(1,1,0)$	$f_0(0,1,0)$	+	$f_0(1,1,0)\ W^4$	$= f_1(1,1,0)$
f_7	$= f_0(1,1,1)$	$f_0(0,1,1)$	+	$f_0(1,1,1)\ W^4$	$= f_1(1,1,1)$

Con la primer columna se define n_1 y n_0. k_0 se determinó de manera que se tengan 8 elementos distintos. Para seguir un orden se prefirió tener 4 valores con k_0 = 0 y luego otros 4 con k_0 = 1.

b) Cálculo de $f_2(k_0, k_1, n_0)$. El índice n_1 de $f_1(k_0, n_1, n_0)$ varia de 0 a 1.

	$n_1=0$		$n_1=1$		
$k_0 n_1 n_0$	$k_0 n_1 n_0$		$k_0 n_1 n_0$		$k_0 k_1 n_0$
$f_1(0,0,0)$	$f_1(0,0,0)$	+	$f_1(0,1,0)\ w^0$	=	$f_2(0,0,0)$
$f_1(0,0,1)$	$f_1(0,0,1)$	+	$f_1(0,1,1)\ w^0$	=	$f_2(0,0,1)$
$f_1(0,1,0)$	$f_1(0,0,0)$	+	$f_1(0,1,0)\ w^4$	=	$f_2(0,1,0)$
$f_1(0,1,1)$	$f_1(0,0,1)$	+	$f_1(0,1,1)\ w^4$	=	$f_2(0,1,1)$
$f_1(1,0,0)$	$f_1(1,0,0)$	+	$f_1(1,1,0)\ w^2$	=	$f_2(1,0,0)$
$f_1(1,0,1)$	$f_1(1,0,1)$	+	$f_1(1,1,1)\ w^2$	=	$f_2(1,0,1)$
$f_1(1,1,0)$	$f_1(1,0,0)$	+	$f_1(1,1,0)\ w^6$	=	$f_2(1,1,0)$
$f_1(1,1,1)$	$f_1(1,0,1)$	+	$f_1(1,1,1)\ w^6$	=	$f_2(1,1,1)$

En la primera columna, se define k_0 y en n_0. k_1 . se determinó de manera que se tengan 8 elementos distintos. Para seguir un orden se alternaron de dos en dos los valores de k_0 = 0 y k_0 = 1.

c) Cálculo de $f_3(k_0, k_1, k_2)$. El índice n_0 de $f_2(k_0, k_1, n_2)$ varia de 0 a 1.

$k_o k_1 n_o$	$n_o=0$ $k_o k_1 n_o$		$n_o=1$ $k_o k_1 n_o$		$k_o k_1 k_2$
$f_2(0,0,0)$	$f_2(0,0,0)$	+	$f_2(0,0,1)\ W^0$	=	$f_3(0,0,0)$
$f_2(0,0,1)$	$f_2(0,0,0)$	+	$f_2(0,0,1)\ W^4$	=	$f_3(0,0,1)$
$f_2(0,1,0)$	$f_2(0,1,0)$	+	$f_2(0,1,1)\ W^2$	=	$f_3(0,1,0)$
$f_2(0,1,1)$	$f_2(0,1,0)$	+	$f_2(0,1,1)\ W^6$	=	$f_3(0,1,1)$
$f_2(1,0,0)$	$f_2(1,0,0)$	+	$f_2(1,0,1)\ W^1$	=	$f_3(1,0,0)$
$f_2(1,0,1)$	$f_2(1,0,0)$	+	$f_2(1,0,1)\ W^5$	=	$f_3(1,0,1)$
$f_2(1,1,0)$	$f_2(1,1,0)$	+	$f_2(1,1,1)\ W^6$	=	$f_3(1,1,0)$
$f_2(1,1,1)$	$f_2(1,1,0)$	+	$f_2(1,1,1)\ W^7$	=	$f_3(1,1,1)$

En la primera columna, se define k_o y k_1. k_2 se determinó de manera que se tengan 8 elementos distintos.

d) Por último como $F(k_2, k_1, k_o) = f_3(k_o, k_1, k_2)$.

$$f_3(0,0,0) = F(0,0,0) = F(0)$$

$$f_3(0,0,1) = F(1,0,0) = F(4)$$

$$f_3(0,1,0) = F(0,1,0) = F(2)$$

$$f_3(0,1,1) = F(1,1,0) = F(6)$$

$$f_3(1,0,0) = F(0,0,1) = F(1)$$

$$f_3(1,0,1) = F(1,0,1) = F(5)$$

$$f_3(1,1,0) = F(0,1,1) = F(3)$$

$$f_3(1,1,1) = F(1,1,1) = F(7)$$

El de_sarrollo anterior se puede generalizar para un número N tal que $N = 2^{\gamma}$ siendo, γ un número entero positivo (se dirá que N es po_tencia entera de dos). La validéz de este desarrollo es demostrada en la ref. 7 .

Para aplicar el desarrollo generalizado (o sea a un número N que es potencia entera de dos), se utilizan las ecuaciones

$$F_{\ell}(k + N/2^{\ell}) = F_{\ell-1}(k) - W^{p}\, F_{\ell-1}(k + N/2^{\ell-1}) \qquad (I)$$

$$F_{\ell}(k) = F_{\ell-1}(k) + W^{p}\, F_{\ell-1}(k + N/2^{\ell}) \qquad (II)$$

las cuales se usan de acuerdo al cuadro 3.1.

COMENTARIOS

Se entiende por distorsionar el número binario n_0, n_1, n_2, n_3 el expresarlo como n_3, n_2, n_1, n_0.

La secuela de cálculo se realizó siguiendo los pasos

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 primer columna del ejemplo
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 segunda columna del ejemplo
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 tercer columna del ejemplo.

Para ilustrar aún más el procedimiento de cálculo de la transformada rápida de Fourier, considérese la siguiente función f(t)

Cuadro 3.1. PROCEDIMIENTO PARA LA APLICACION DE LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER

PASO	DESCRIPCION	TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER (EJEMPLO)		
1	Cálculo del número de bits (γ) de $N=2^\gamma$	Sea $N=8$ entonces $\gamma=3$ (habrá γ etapas)		
2	ℓ	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$
3	Calcular el número de veces (rebote) en que se usará la fórmula I y II, es $N/2^\ell$	rebote $\frac{N}{2^\ell}=\frac{8}{2^1}=4$	rebote $\frac{N}{2^2}=2$	rebote $\frac{N}{2^3}=1$
4	Usar las fórmulas I, $N/2^\ell$ veces consecutivas y $N/2^\ell$ veces la fórmula II para definir $N/2^{\ell+1}$ valores sucesivos de k. Los valores de k son seleccionados de manera que se definan sucesivamente los valores $f_\ell(0)$, $f_\ell(1)$, ..., $f_\ell(N-1)$, para lo cual se pueden usar otra vez la fórmula I $N/2^\ell$ veces y luego $N/2^\ell$ la fórmula II	FOR I: $k=0$ $f_1(0)=f_0(0)+f_0(4)W^p$ $k=1$ $f_1(1)=f_0(1)+f_0(5)W^p$ $k=2$ $f_1(2)=f_0(2)+f_0(6)W^p$ $k=3$ $f_1(3)=f_0(3)+f_0(7)W$ FOR II: $k=0$ $f_1(4)=f_0(0)-f_0(4)W^p$ $k=1$ $f_1(5)=f_0(1)-f_0(5)W^p$ $k=2$ $f_1(6)=f_0(2)-f_0(6)W^p$ $k=3$ $f_1(7)=f_0(3)-f_0(7)W^p$	FOR I: $k=0$ $f_2(0)=f_1(0)+f_1(2)W^p$ $k=1$ $f_2(1)=f_1(1)+f_1(3)W^p$ FOR II: $k=0$ $f_2(2)=f_1(0)-f_1(2)W^p$ $k=1$ $f_2(3)=f_1(1)-f_1(3)W^p$ FOR I: $k=4$ $f_2(4)=f_1(4)+f_1(6)W^p$ $k=5$ $f_2(5)=f_1(5)+f_1(7)W^p$ FOR II: $k=4$ $f_2(6)=f_1(4)-f_1(6)W^p$ $k=5$ $f_2(7)=f_1(5)-f_1(7)W^p$	I {$k=0$ $f_3(0)=f_2(0)+f_2(1)W^p$ II {$k=0$ $f_3(1)=f_2(0)-f_2(1)W$ I {$k=2$ $f_3(2)=f_2(2)+f_2(3)W^p$ II {$k=2$ $f_3(3)=f_2(2)-f_2(3)W^p$ I {$k=4$ $f_3(4)=f_2(4)+f_2(5)W^p$ II {$k=4$ $f_3(5)=f_2(4)-f_2(5)W^p$ I {$k=6$ $f_3(6)=f_2(6)+f_2(7)W^p$ II {$k=6$ $f_3(7)=f_2(6)-f_2(7)W^p$
5	Escribir los valores de k en sistema binario	FOR I: $k=0$ 0 0 0 $k=1$ 0 0 1 $k=2$ 0 1 0 $k=3$ 0 1 1 REBOTE FOR II: $k=0$ 0 0 0 $k=1$ 0 0 1 $k=2$ 0 1 0 $k=3$ 0 1 1	FOR I: $k=0$ 0 0 0 $k=1$ 0 0 1 FOR II: $k=0$ 0 0 0 $k=1$ 0 0 1 FOR I: $k=4$ 1 0 0 $k=5$ 1 0 1 FOR II: $k=4$ 1 0 0 $k=5$ 1 0 1	I {$k=0$ 0 0 0 II {$k=0$ 0 0 0 I {$k=2$ 0 1 0 II {$k=2$ 0 1 0 I {$k=4$ 1 0 0 II {$k=4$ 1 0 0 I {$k=6$ 1 1 0 II {$k=6$ 1 1 0
6	Desplazar los valores de k binarios $\gamma-\ell$ cifras a la DERECHA y rellenar con CEROS los lugares que quedaron a la izquierda	DESP. / RELLENO FOR I: $k=0$ 0 $\cancel{0}\cancel{0}$ → 0 0 0 $k=1$ 0 $\cancel{0}\cancel{1}$ → 0 0 0 $k=2$ 0 $\cancel{1}\cancel{0}$ → 0 0 0 $k=3$ 0 $\cancel{1}\cancel{1}$ → 0 0 0 $\gamma-\ell=3-1=2$ (dos cifras)	DESP. / RELLENO FOR I: $k=0$ 0 0 $\cancel{0}$ → 0 0 0 $k=1$ 0 0 $\cancel{1}$ → 0 0 0 FOR II: $k=0$ 0 0 $\cancel{0}$ → 0 0 0 $k=1$ 0 0 $\cancel{1}$ → 0 0 0 $\gamma-\ell=3-2=1$ (una cifra)	I {$k=0$ 0 0 0 II {$k=0$ 0 0 0 I {$k=2$ 0 1 0 I {$k=2$ 0 1 0 $\gamma-\ell=3-3=0$ No se desp. y no rellena

	DESCRIPCION	EJEMPLO		
	continua paso 6	FOR II k=0 0 00 0 0 0 k=1 0 01 0 0 0 k=2 0 10 0 0 0 k=3 0 11 0 0 0	FOR I k=4 10 0 0 10 k=5 10 1 0 10 FOR II k=4 10 0 0 10 k=5 10 1 0 10	I{k=4 1 0 0 II{k=4 1 0 0 I{k=6 1 1 0 II{k=6 1 1 0
7	"DISTORSIONAR" los valores binarios y reconvertir a decimales identificando así los valores del exponente P de la W. Se puede tomar en cuenta que $-W^P = W^P + N/2$	FOR I. k=0 000 000 P=0 k=1 000 000 P=0 k=2 000 000 P=0 k=3 000 000 P=0 FOR II k=0 000 000 P=0 k=1 000 000 P=0 k=2 000 000 P=0 k=3 000 000 P=0	FOR I k=0 000 000 P=0 k=1 000 000 P=0 FOR II k=0 000 000 P=0 k=1 000 000 P=0 FOR I k=4 010 010 P=2 k=5 010 010 P=2 FOR II k=4 010 010 P=2 k=5 010 010 P=2	I{k=0 000 000 P=0 II{k=0 000 000 P=0 I{k=2 010 010 P=2 II{k=2 010 010 P=2 I{k=4 100 001 P=1 II{k=4 100 001 P=1 I{k=6 110 011 P=3 II{k=6 110 011 P=3
8	Sustituir valores y determinar $f_\ell(0), f_\ell(1), f_\ell(2), \ldots, f_\ell$	$f_1(0) = f_0(0) + f_0(4)W^0$ $f_1(1) = f_0(1) + f_0(5)W^0$ $f_1(2) = f_0(2) + f_0(6)W^0$ $f_1(3) = f_0(3) + f_0(7)W^0$ $f_1(4) = f_0(0) - f_0(4)W^0$ $f_1(5) = f_0(1) - f_0(5)W^0$ $f_1(6) = f_0(2) - f_0(6)W^0$ $f_1(7) = f_0(3) - f_0(7)W^0$	$f_2(0) = f_1(0) + f_1(2)W^0$ $f_2(1) = f_1(1) + f_1(3)W^0$ $f_2(2) = f_1(0) - f_1(2)W^0$ $f_2(3) = f_1(1) - f_1(3)W^0$ $f_2(4) = f_1(4) + f_1(6)W^2$ $f_2(5) = f_1(5) + f_1(7)W^2$ $f_2(6) = f_1(4) - f_1(6)W^2$ $f_2(7) = f_1(5) - f_1(7)W^2$	$f_3(0) = f_2(0) + f_2(1)W^0$ $f_3(1) = f_2(0) - f_2(1)W^0$ $f_3(2) = f_2(2) + f_2(3)W^2$ $f_3(3) = f_2(2) - f_2(3)W^2$ $f_3(4) = f_2(4) + f_2(5)W^1$ $f_3(5) = f_2(4) - f_2(5)W^1$ $f_3(6) = f_2(6) + f_2(7)W^3$ $f_3(7) = f_2(6) - f_2(7)W^3$
9	Hacer $\ell = \ell + 1$ y si ℓ es mayor que γ ir al paso 10, en caso contrario ir al paso 3	$\ell = 1+1$ $\ell = 2$ como $\ell \leq \gamma$ va al paso 3	$\ell = 2+1$ $\ell = 3$ como $\ell \leq \gamma$ va al paso 2	$\ell = 3+1$ $\ell = 4$ como $\ell > \gamma$ va al paso 10
10	Escribir las k de $f_\ell(k)$ en binario, distorsionarlos y reconvertir a decimal k estableciendo la correspondencia entre k originales y las k' decimales	$f_3(0)$ 000 → 000 ↦ 0 → $F(0) = f_3(0)$ $f_3(1)$ 001 → 100 ↦ 4 → $F(4) = f_3(1)$ $f_3(2)$ 010 → 010 ↦ 2 → $F(2) = f_3(2)$ $f_3(3)$ 011 → 110 ↦ 6 → $F(6) = f_3(3)$ $f_3(4)$ 100 → 001 ↦ 1 → $F(1) = f_3(4)$ $f_3(5)$ 101 → 101 ↦ 5 → $F(5) = f_3(5)$ $f_3(6)$ 110 → 011 ↦ 3 → $F(6) = f_3(6)$ $f_3(7)$ 111 → 111 ↦ 7 → $F(7) = f_3(7)$		

$$f(t) = 3 \text{ sen } \left[\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{8}\right] + 5 \text{ sen } \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right]$$

de la cual se desea obtener su transformada de Fourier discreta, para los 8 primeros segundos (N=8).

Utilzando el procedimiento descrito en el cuadro 3.1, se tiene.

Escogiendo Δt = 1 seg, los primeros 8 valores de f(t) (usando la simbologia indicada) serán;

$f_o(0) = 3.6481$ $\qquad$ $f_o(4) = 1.3520$

$f_o(1) = 7.1018$ $\qquad$ $f_o(5) = 1.5585$

$f_o(2) = 0.2716$ $\qquad$ $f_o(6) = -5.2716$

$f_o(3) = -3.1821$ $\qquad$ $f_o(7) = -5.4782$

Paso 1

para N = 8 ; de $N = 2^{\gamma}$ y $\gamma = 3$, habrá 3 etapas

Paso 2

Para la etapa 1 ; $\ell = 1$ (primer columna del cuadro 3.1)

Paso 3

El número de veces (rebote) en que se usará la formula I y II serán

$$N/2^{\ell} = 8/2^{1} = 4$$

Paso 4

Usando las fórmulas I y II, $N/2^{\ell} = 4$ veces consecutivas, para definir los valores sucesivos de k.

$k = 0 \quad f_1(0) = 3.6481 + 1.3520\ w^p$

$k = 1 \quad f_1(1) = 7.1018 + 1.5585\ w^p$

$k = 2 \quad f_1(2) = 0.2716 - 5.2716\ w^p$

$k = 3 \quad f_1(3) = -3.1821 - 5.4782\ w^p$

$k = 4 \quad f_1(4) = 3.6481 - 1.3520\ w^p$

$k = 5 \quad f_1(5) = 7.1018 - 1.5585\ w^p$

$k = 6 \quad f_1(6) = 0.2716 + 5.2716\ w^p$

$k = 7 \quad f_1(7) = -3.1821 + 5.4782\ w^p$

Paso 5, 6 y 7

En el cuadro 3.1, se desarrollaron estos pasos, encontrándose que p toma los siguientes valores para $k = 0 \quad p = 0$

$k = 1 \quad p = 0$

$k = 2 \quad p = 0$

$k = 3 \quad p = 3$

$k = 0 \quad p = 0$

$k = 1 \quad p = 0$

$k = 2 \quad p = 0$

$k = 3 \quad p = 0$

Paso 8

Sustituyendo los valores de p en el paso 4, se tiene

si $w = e^{-j2\pi/8}$ entonces $w^0 = e^{-j2\pi/8} = 1$

$f_1(0) = 3.6481 + 1.3520\ (1) = 5.0001$

$f_1(1) = 7.1018 + 1.5585\ (1) = 8.6603$

$f_1(2) = 0.2716 - 5.2716\ (1) = -5.0000$

$f_1(3) = -3.1821 - 5.4782\ (1) = -8.6603$

$f_1(4) = 3.6481 - 1.3520\ (1) = 2.2961$

$f_1(5) = 7.1018 - 1.5585\ (1) = 5.5433$

$f_1(6) = 0.2716 + 5.2716\ (1) = 5.5433$

$f_1(7) = -3.1821 + 5.4782\ (1) = 2.2916$

Paso 9

como (ℓ=1+1=2) < (Υ=3), regresamos al paso 2

Paso 2

Para la etapa 2 ; ℓ = 2 (segunda etapa del cuadro 3.1)

Paso 3

El número de veces (rebote) en que se usará la fórmula I y II, será

$$N/2^{\ell} = 8/2^{2} = 2$$

Paso 4

Usando las fórmulas I y II 2 veces consecutivas

$$k = 0 \qquad f_1(0) = 5.0001 - 5.0000\ w^{p}$$

$$k = 1 \qquad f_1(1) = 8.6603 - 8.6603\ w^{p}$$

$$k = 0 \qquad f_1(2) = 5.0001 + 5.0000\ w^{p}$$

$$k = 1 \qquad f_1(3) = 8.6603 + 8.6603\ w^{p}$$

$k = 4 \quad f_1(4) = 2.2961 + 5.5433\ w^p$

$k = 5 \quad f_1(5) = 5.5433 + 2.2961\ w^p$

$k = 4 \quad f_1(6) = 2.2961 - 5.5433\ w^p$

$k = 5 \quad f_1(7) = 5.5433 - 2.2961\ w^p$

Paso 5, 6 y 7

En el cuadro 3.1, para $\ell = 2$, se obtuvieron los valores de p

para $k = 0 \quad p = 0$

$k = 1 \quad p = 0$

$k = 0 \quad p = 0$

$k = 1 \quad p = 0$

$k = 4 \quad p = 2$

$k = 5 \quad p = 2$

$k = 4 \quad p = 2$

$k = 5 \quad p = 2$

Paso 8

Sustituyendo valores de p en el paso 4, se tiene

para $p = 0 \ ; \ w^0 = 1$

$p = 2 \ ; \ w^2 = (e^{-j2\pi/8})^2 = e^{-j\pi/2}$

al utilizar la identidad de Euler (ec.3.9·)

$e^{-j\pi/2} = \cos \pi/2 - j \operatorname{sen} \pi/2 = 0 - j * 1$

Por lo que

$f_2(0) = 5.0001 - 5.0000\ (1) \qquad = 0$

$f_2(1) = 8.6603 - 8.6603\ (1) \qquad = 0$

$f_2(2) = 5.0001 + 5.0000\ (1) \qquad = 10.0001$

$f_2(3) = 8.6603 + 8.6603\ (1) \qquad = 17\ 3206$

$f_2(4) = 2.2961 + 5.5433\ (0 - j * 1) = 2.2961 - j * 5.5433$

$f_2(5) = 5.5433 + 2.2961\ (0 - j * 1) = 5.5433 - j * 2.2961$

$f_2(6) = 2.2961 - 5.5433\ (0 - j * 1) = 2.2961 + j * 5.5433$

$f_2(7) = 5.5433 - 2.2961\ (0 - j * 1) = 5.5433 + j * 2.2961$

Paso 9

Como ($\ell = 2 + 1 = 3$) = ($\gamma = 3$), regresamos al paso 2

Paso 2

Para la etapa 3 ; $\ell = 3$ (tercer columna del cuadro 3.1)

Paso 3

El número de veces que se usará la fórmula I y II será

$$N/2^{\ell} = 8/2^{3} = 1$$

Paso 4

Usando las fórmulas I y II, una vez

$k = 0 \quad f_3(0) = 0$

$k = 0 \quad f_3(1) = 0$

$k = 2 \quad f_3(2) = 10.0000 + 17.3206\ w^p$

$k = 2 \quad f_3(3) = 10.0000 - 17.3206\ w^p$

$k = 4 \quad f_3(4) = (2.2961 - j * 5.5433) + (5.5433 - j * 2.2961)\ w^p$

$k = 4 \quad f_3(5) = (2.2961 - j * 5.5433) - (5.5433 - j * 2.2961)\ w^p$

$k = 6 \quad f_3(6) = (2.2961 + j * 5.5433) + (5.5433 + j * 2.2961)\ w^p$

$k = 6 \quad f_3(6) = (2.2961 - j * 5.5433) - (5.5433 + j * 2.2961)\ w^p$

Paso 5, 6 y 7

Los valores de p obtenidos en el cuadro 3.1 fueron

para $k = 0 \quad p = 0$

$k = 0 \quad p = 0$

$k = 2 \quad p = 2$

$k = 2 \quad p = 2$

$k = 4 \quad p = 1$

$k = 4 \quad p = 1$

$k = 6 \quad p = 3$

$k = 6 \quad p = 3$

Paso 8

para $W^0 = (e^{-j2\pi/8})^0 = 1$

$W^2 = (e^{-j2\pi/8})^2 = 0 - j * 1$

$W^1 = (e^{-j2\pi/8})^1 = e^{-j\pi/4} = \cos \pi/4 - j \text{ sen } \pi/4 =$

$0.7071 - j * 0.7071$

$W^3 = (e^{-j2\pi/8})^3 = \cos 3/4\, \pi - j \text{ sen } 3/4\, \pi =$

$- 0.7071 - j * 0.7071$

.Al considerar lo anterior en el paso 4, se tiene

$f_8(0) = 0$

$f_8(1) = 0$

$f_8(2) = 10.0001 - j * 17.3206$

$f_8(3) = 10.0001 + j * 17.3206$

$f_8(4) = 4.5922 - j * 11.0866$

$f_8(5) = 0$

$f_8(6) = 0$

$f_8(7) = 4.5922 + j * 11.0866$

Paso 9

Como ($\ell = 3 + 1 = 4$) > ($\gamma = 3$), se sigue al paso 10

$F(0) = f_8(0) = 0 + j * 0$

$F(4) = f_8(1) = 0 + j * 0$

$F(2) = f_8(2) = 10.0001 - j * 17.3206$

$F(6) = f_8(3) = 10.0001 + j * 17.3206$

$F(1) = f_8(4) = 4.5922 - j * 11.0866$

$F(5) = f_8(5) = 0 + j * 0$

$F(6) = f_8(6) = 0 + j * 0$

$F(7) = f_8(7) = 4.5922 + j * 11.0866$

Los valores anteriores corresponden a la transformada de Fourier de la función

$$f(t) = 3 \text{ sen } \left[\frac{3}{4} t + \frac{\pi}{8} \right] + 5 \text{ sen} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right]$$

4. FUNCION DE DENSIDAD ESPECTRAL

Las diferentes frecuencias que ocurren dentro de un registro de elevaciones de superficie libre, pueden ser usadas para describir el comportamiento de dicho registro si, por ejemplo, el registro puede ser representado por una función aleatoria en el tiempo f(t), ello permite obtener la función de densidad espectral s(f) de la función f(t).

4.1 Definición

La función de densidad espectral s(f) para f(t) está definida por el teorema de Wierner-Khintchine el cual establece que s(f) es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación.

4.2 Cáculo a partir de la función de autocorrelación

Una manera de obtener la función de densidad espectral s(f) es partiendo de la definición anterior. Habiendo establecido la función de autocorrelación como (ec. 2.34).

$$R(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, f(t+\tau)\, dt \tag{4.1}$$

por lo tanto al obtener su transformada de Fourier, s(f) se expresa

$$s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau} d\tau \tag{4.2}$$

y su antitransformada queda

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df \tag{4.3}$$

4.3 Cálculo a partir de la transformada de Fourier de los datos

Otra forma de calcular la función de densidad esp_ectral s(f) es la que a continuación se desarrolla.

Sea s(f) de la ec. (4.2), la transformada de Fourier de f(t) de la ec. (3.18) y la función de autocorrelación de la ec. (4.1).

$$s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \tag{4.4}$$

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \tag{4.5}$$

$$R(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, f(t+\tau)\, dt \tag{4.6}$$

Considerando la ec. (4.6) en la (4.4) se tiene

$$s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, f(t+\tau)\, dt \right\} e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

la que también se puede escribir como

$$s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ f(t+\tau)\ dt \right\} e^{-j2\pi f\tau}\ d\tau$$

intercambiando el orden de integración y poniendo fuera de la integral al límite y al recíproco de T

$$s(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)\ e^{-j2\pi f\tau}\ d\tau \right\} dt$$

si hacemos $t' = t+\tau$ entonces $dt' = dt$

$$s(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\ e^{-j2\pi f(t'-t)}\ dt' \right\} dt$$

Descomponiendo en dos factores la exponencial y ordenando

$$s(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ e^{j2\pi ft}\ dt \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\ e^{-j2\pi ft'}\ dt' \qquad (4.7)$$

Por otro lado de la identidad de Euler, se tiene

$$e^{-j2\pi ft} = \cos 2\pi ft - j \operatorname{sen} 2\pi ft \qquad (4.8)$$

Sustituyendo la ec. (4.8) en la (4.5)

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos 2\pi ft\ dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} 2\pi ft\ dt$$

siendo su conjugado complejo

$$\tilde{\tilde{F}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos 2\pi ft \, dt + j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} 2\pi ft \, dt$$

que también se puede escribir (el símbolo ≈ indica conjugado complejo de F(f)), como

$$\tilde{\tilde{F}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j2\pi ft} dt \tag{4.9}$$

Por lo que al tomar en cuenta las ecs. (4.9) y (4.5) en la (4.7), se tiene

$$s(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \tilde{\tilde{F}}(f) F(f) \tag{4.10}$$

O bien dado que F(f) F(f) es el cuadrado del módulo del número complejo F(f).

$$|F(f)| = \sqrt{R_e\{F(f)\}^2 + (Im\{F(f)\})^2} = \tilde{\tilde{F}}(f) F(f)$$

donde $R_e\{F(f)\}$ e $I_m\{F(f)\}$ son la parte real e imaginaria, respectivamente de F(f), resulta que

$$s(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} |F(f)|^2 \tag{4.11}$$

La ec. (4.11) es la función de densidad espectral s(f) de la función f(t), la cual demuestra que no es necesario calcular la función de autocorrelación para obtener la función de densidad espectral sino que se puede realizar calculando de f(t) la transformada de Fourier de los datos.

A la gráfica que relaciona $s(f)$ contra f se le llama "espectro" de $f(t)$.

4.4 Aspectos de la transformada discreta de Fourier

Para obtener la transforrmada de Fourier de funciones del tiempo obtenidas por mediciones, como en el caso de los registros de la elevaciones de la superficie libre del mar, se utiliza la versión disscreta. Esto se hace por la dificultad de precisar la ecuación del tiempo que se requiere para que la transformada continua pueda ser calculada.

Cuando se procede con la versión discreta de la transformada de Fourier resultan varios aspectos que deben tomarse en cuenta; ellos se listan a continuación.

a) Transformación de una secuencia de valores
b) Intervalo de integración finito
c) Intervalo de integración igual al periodo
d) Intervalo de integración diferente al periodo

a) Transformación de una secuencia de valores

Se debe tener cuidado al obtener la transformada de una función $f(t)$, ya que puede suceder que los resultados se superpongan.

Para encontrar la transformada de Fourier continua de una secuencia de valores de la función $f(t)$, es puede emplear el teorema de connvolución en la frecuencia (inciso 2.6), aplicado al producto de f(t) por un tren de impulsos unitarios $\delta_T(t)$ (donde entre un pulsso y otro existe una distancia Δt), esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \delta_T(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(f)\, F(f - l)\, dl \qquad (4.12)$$

Por ejemplo , para el caso de tres impulsos

$$\Delta(f) = \frac{1}{\Delta t}\left\{ \delta(f - \frac{1}{\Delta t}) + \delta(t) + \delta(f - \frac{1}{\Delta t}) \right\}$$

y si la transformada inversa de Fourier es

$$F(f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi f}{f_c}\right) \quad \text{para } |f| \le f_c$$

Resulta que la convolución de $\Delta(f) * F(f)$ de acuerdo a la ecuación (2.49), es igual a

$$\Delta(f) * F(f) = F(f - \frac{1}{\Delta t}) + F(t) + F(f + \frac{1}{\Delta t}) \qquad (4.13)$$

Si en la ecuación (4.13) se considera $1/\Delta t > 2f_c$ se obtiene la gráfica de la figura 4.1 a). En cambio, para $1/\Delta t < 2f_c$ sucede lo que se indica en la figura 4.1 b), esto es, los lóbulos en esta última figura se enciman provocando lo que se llama "alisamiento" (distorsión de resultados).

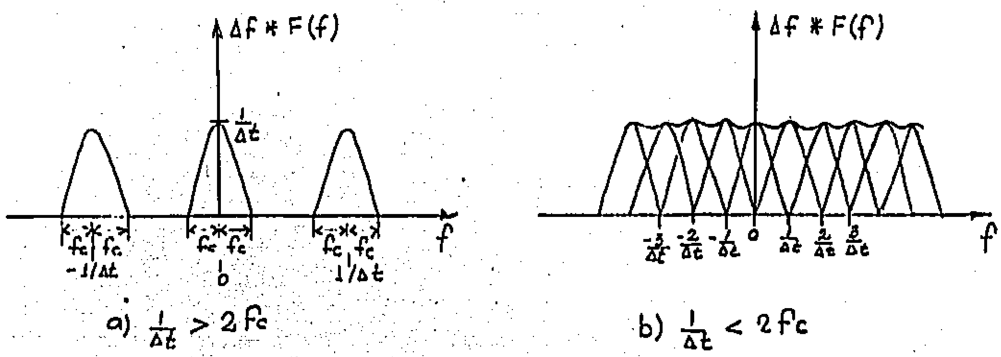


Fig. 4.1 Transformada de Fourier de $f(t)\ \delta_T(t)$

Para garantizar que no exista la superposición de resultados, como se puede observar en la fig. 4.1b, es necesario que $\Delta t \leq 1/2\ f_c$. donde f_c es la frecuencia más grande de la componente de la transformada de f(t). Ya que la transformada de f(t) es igual al lóbulo central de la figura, se afirma que para evitar los lóbulos en la frecuencia $-1/\Delta t$ y $1/\Delta t$, se considera., en general que

$$F(f) = 0 \quad \text{si } |f| > f_c \tag{4.14}$$

Con $\Delta t < 1/2\ f_c$ y lo mencionado anteriormente se evita el alisamiento en la frecuencia.

En forma análoga, para la transformada inversa de Fourier, se considera $f \leq 1/2\ T_c$, donde T_c es el tiempo más grande de la antitransformada de f(t). Para eliminar el alisamiento en el tiempo además se considera que

$$f(t) = 0 \quad \text{si } |t| > T_c \tag{4.15}$$

Con respecto al alisamiento en la frecuencia se tiene que el par de transformadas continuas estan definidas en las frecuencias positivas y negativas, pero en el caso discreto (ec. 3.34) solo aparecen frecuencias positivas por lo que en este último, se considera

$$F(-f) = F(2f_c - f) \tag{4.16}$$

Así las ordenadas en frecuencia 0 a $-f_c$ son iguales a las de las frecuencias positivas entre f_c y $2f_c$ con lo cual se cumple la ec. (3.18).

b) Intervalo de integración finito

Como en la práctica no se cuenta con frecuencias de tiempo de duración infinita, es necesario tomar en cuenta que la integral que aparece en la definición de la transformada de Fourier no sea desde $-\infty$ a ∞ sino desde $-T_c/2$ a $T_c/2$.

Además, cuando se procede con la transformada discreta, para evitar el alisamiento en el tiempo, se debe cumplir la ec. 4.14. Sucede que en realidad se maneja a la función f(t) (de duración infinita) multiplicada por una función h(t), llamada ventana, con cierto valor entre $t \leq T_c/2$ y cero para $t > T_c/2$.

En otras palabras, en la práctica se maneja una transformada de Fourier de $-T_c/2$ a $T_c/2$, por lo que conviene saber como cambian los resultados al manejar la transformada de f(t) h(t) en lugar de f(t). Para ello considérese el siguiente ejemplo.

Encontrar la transformada de Fourier de $y(t) = f(t)\ h(t)$, siendo $f(t) = e^{j2\pi f_1 t}$ y $h(t) = 1$ si $t \leq T_c/2$ y $h(t) = 0$ si $t \geq T_c/2$

Solución

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-j2\pi f_1 t}\ h(t)\ e^{-j2\pi f t}\ dt = \int_{-T_c/2}^{T_c/2} e^{j2\pi f_1 t}\ e^{-j2\pi f t}\ dt$$

$$= \int_{-T_c/2}^{T_c/2} e^{-j2\pi(f-f_1)}\ dt = -\frac{1}{j2\pi(f-f_1)} \left| e^{-j2\pi t(f-f_1)} \right|_{-T_c/2}^{T_c/2}$$

$$= \frac{1}{\pi(f-f_1)} \text{sen}\ (\pi(f-f_1)T_c) = T_c \frac{\text{sen}\ (\pi(f-f_1)T_c)}{\pi(f-f_1)T_c} \qquad (4.17)$$

Por otro lado, al obtener la transformada de Fourier para $f(t)$ (para límites de integración de $-\infty$ a ∞) resulta que es $\delta(f-f_1)$ [7] de modo que en la fig. 4.2 se muestran los resultados de las transformadas de Fourier, tanto para el límite de integración $-T_c$ a T_c (finito) como de $-\infty$ a ∞.

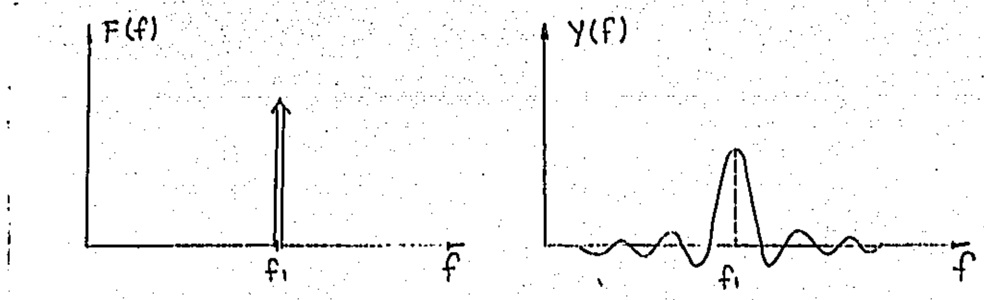


Fig. 4.2 Transformada de Fourier de $f(t) = e^{j2\pi f_1 t}$ para límites de intregación diferentes

La función Θ que aparece en la ec. 4.17, se encuentra representada en la fig. 4.3, en la que se puede hacer notar que al multiplicarla por T_c, se obtiene sobre todo que el lóbulo de Θ es más estrecho y muy alto conforme es mayor el valor de T_c, por lo que tiende a parecerse a la función impulso

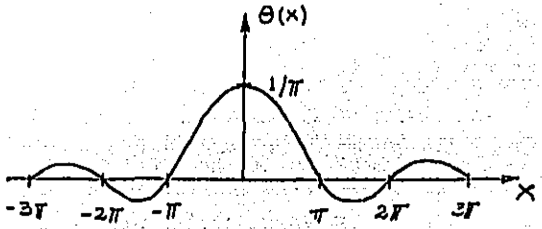


Fig. 4.3 Función $\Theta(x)$ = sen x/x

Debido a lo anterior, se puede afirmar,que por utilizar la función Θ en lugar de δ, la función ventana tiene el efecto de esparcir el resultado en el dominio de la frecuencia esto corresponde a una falta en la representacion en la frecuencia de f(t).

c) Intervalo de integración igual (o múltiplo) al periodo

Cuando el tiempo T que aparece en los limites de integración de la transformada de Fourier (ec. 3.18) es igual o múltiplo del periodo de la función f(t) por transformar resultan algunas simplificaciones en su cálculo, para ciertas funciónes de f(t); algunas de ellas se indican a continuación.

1) Para obtener la transformada discreta de Fourier de la función $f(t) = e^{j2\pi f_m t}$ cuando $f_m = m/T$, siendo m un número entero; se

propone la versión discreta de f(t) como $f_m = e^{j2\pi m/N}$ ya que $T = N\Delta t$.

De acuerdo a la ec. (3.34), la transformada discreta de Fourier es

$$F_k = \frac{T}{N}\sum_{n=0}^{N-1} (e^{j2\pi m/n})\, e^{-j2\pi kn/N} \qquad \text{par } k = 0,\ 1,\ 2,\ldots,N-1$$

que también se puede escribir como

$$F_k = \frac{T}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi n(kn)N}$$

Para el caso en el cual k = m, la exponencial es igual a la unidad y por lo tanto $F_k = T$. Para k = m, la suma es cero como puede verificarse para el caso particular en el que N = 8, k = 1 y N = 4. En la fig. 4.4, se ha representado en el plano de Argand a $e^{-j2\pi(k-m)/N}$ para n = o, 1,...,N-1.

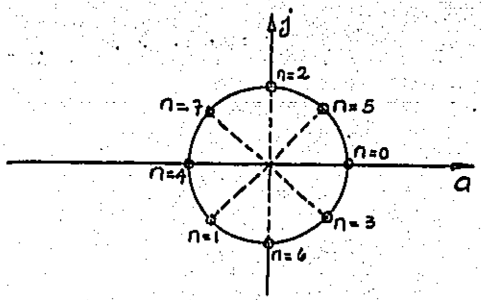


Fig. 4.4 Representación de $e^{-j2\pi n(1-4)/8}$

En la figura anterior se aprecia que

$$\sum_{n=0}^{7} e^{-j2\pi n(1-4)/8} = 0$$

En general se tiene que si m es un entero

$$\sum_{n=o}^{7} e^{-j2\pi(k-m)/N} = \begin{cases} N & \text{si } k = m \\ 0 & \text{si } k = m \end{cases} \qquad (4.18)$$

En la figura 4.5, se muestra la transformada discreta de Fourier de esta función f(t) la cual es equivalente al presentado en la figura 4.2a

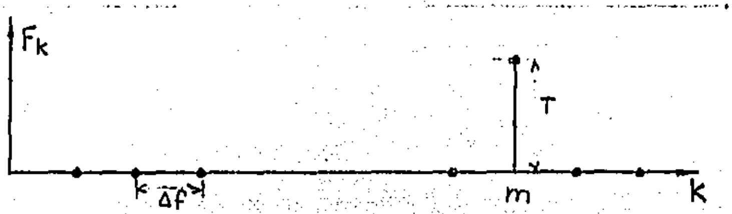


Fig. 4.5 Transformada discreta de Fourier de $e^{j2\pi f_m t}$

2) La transformada discreta de Fourier de f(t) = sen (2πfmt) siendo fm = m/T y m un entero, se puede deducir a partir del resultado del ejemplo anterior al considerar sen (2πfmt) = j/2 $e^{-j2\pi f_m t}$ - j/2 $e^{j2\pi f_m t}$ la cual resulta ser

$$S(f_k) = \begin{cases} \dfrac{jt}{2} & \text{si } k = -m \text{ o } k = N/2 - m \\ \dfrac{-jt}{2} & \text{si } k = m \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

En esas condiciones la función de densidad espectral (ec. 3.10) resulta ser

$$s(f_k) = \begin{cases} \frac{T}{4} & \text{si } k = -m \text{ o } k = N/2 - m \\ -\frac{T}{4} & \text{si } k = m \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

la cual se muestra en la figura 4.6

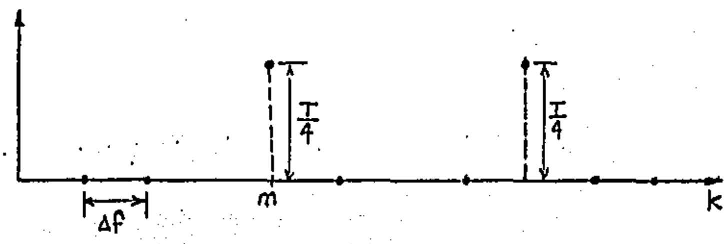


Fig. 4.6 Función de densidad espectral de sen $(2\pi f m t)$

d) Intervalo de integración diferente al periodo

Para el tiempo T de los límites de integración de la transformada de Fourier (ec. 3.18) no igual ni múltiplo del periodo de la función f(t) por transformar, no se cumple la ec. 4.18 y se tiene que para $k = m$ esta suma es cercana a N y para no tan parecida a m es prácticamente cero.

Para la transformada discreta de Fourier de $f(t) = e^{j2\pi f m t}$ cuando $f_m = m/T$ donde m no es un entero, para el caso $N = 8$, $k = 1$ y $m = 1.5$, se tiene al representar en el plano de Argand a $e^{j2\pi n(k-m)/N}$, para $n = 0, 1, \ldots, N-1$ que

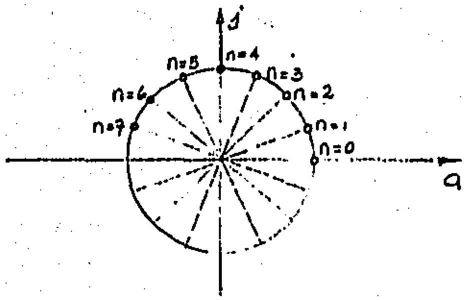


Fig. 4.7 Representación de $e^{-j2\pi(i-1.5)/8}$

Se calculó la transformada de Fourier conjuntamente con su función de densidad espectral de f(t) = sen (2πfmt) para dos casos; 1) tomando un intervalo de integración igual al periodo esto es T = 32 seg., N = 32 y fm = 1/8 y 2) para un intervalo de integración diferente al periodo o sea para T = 32 seg., N = 32 y fm = 1/9.143.

Al comparar los resultados en los dos casos anteriores, se puede observar que para el segundo caso (intervalo de integración diferente al periodo) la transformada tiene valores diferentes de cero pra toda k y que no coincide ninguna de las frecuencias discretas con la señal fm = 1/9.143 = 0.109944. Los valores de la función de densidad espectral son grandes cerca de esta frecuencia.

Los resultados muestran que una pequeña diferencia entre el periodo de función y el tiempo T considerado en la transformada de Fourier da lugar a valores prácticamente en toda la frecuencia.

En la práctica es difícil que se conozca el periodo de la función de tiempo por transformar. Esto es, dado un registro de elevaciones de superficie libre, existe una diferencia entre el periodo de la función y el tiempo de longitud del registro.

Con el objeto de destacar los valores de la transformada discreta de Fourier cercanos a la frecuencia de la función del tiempo y disminuir aquellos valores distantes a tal frecuencia, es recomendable utilizar una función que multiplique a f(t) antes de efectuar la transformada discreta de Fourier. Esta función se conoce como función ventana o filtro.

Se probaron varias funciónes ventana y se encontró que con la siguiente función se obtienen buenos resultados

$$h(t) = \begin{cases} \text{sen } (4\pi tT) & \text{para} \quad 0 \leq t \leq T/8 \\ 1 & \text{para} \quad T/8 \leq t \leq 7/8\ T \\ \text{sen } (4\pi/T(T-t)) & \text{para} \quad 7/8\ T \leq t \leq T \end{cases} \qquad (4.19)$$

En la figura 4.9, se muestra la gráfica de esta función

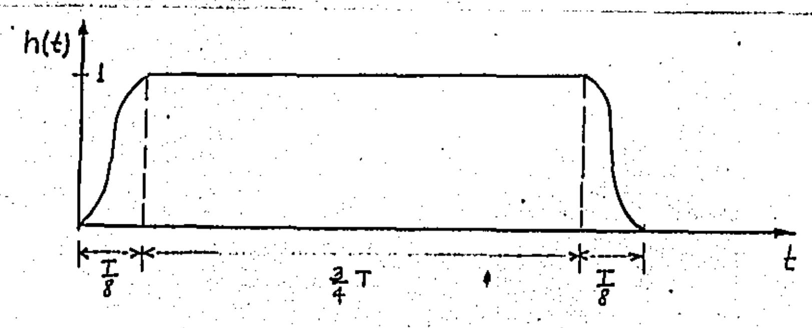


Fig. 4.9 Función ventana h(t)

Como la variancia de la señal original $f(t)$, es alterada por multiplicarse por la función $h(t)$, a la función de densidad espectral se le afecta por el producto de la constante 1/0.875 para que, el área bajo la curva de esta función corresponda a la variancia de $f(t)$.

4.5 Determinación de parámetros para la obtención de la función de densidad espectral (q, T_m, B_m, e_r)

La definición de la función de densidad espectral considera que los límites de integración en la transformada de Fourier de la función de autocorrelación es de $-\infty$ a ∞. Sin embargo, los registros de mediciones de cierto parámetro, por ejemplo, la elevación de la superficie libre del mar, tienen una longitud finita y al considerar esto en la integral de la transformada de Fourier da lugar a resultados diferentes.

Ahora bien considere que el regitro descrito esta dado en términos de la función $f(t)$ tal que

$$f(t) \neq 0 \text{ para } |t| \leq T/2$$

$$f(t) = 0 \text{ para } |t| > T/2$$

donde T es la duración total del registro (longitud finita).

En estas condiciones la ec. (4.10) resulta ser

$$\hat{S}(f) = \frac{1}{T} \stackrel{\approx}{F}(f)\, F(f) \tag{4.20}$$

la testa $\wedge$ indica que f(t) no tiene duración infinita

Por otro lado para la función f(t) se tiene que

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \tag{4.21}$$

y por la ec. (4.9), se tiene

$$\stackrel{\approx}{F}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{j2\pi ft}\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{k2\pi ft}\, dt \tag{4.22}$$

por lo que al sustituir las ecs. (4.21) y (4.22) en la (4.20)

$$\hat{S}(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{j2\pi ft}\, dt \tag{4.23}$$

Esto cambia los límites de integración como se muestra en la fig. 4.10.

Para obtener el área de la región de interés, se propone divvidir el área de la región (α, τ) en las partes abajo y arriba del eje horizontal, por lo que

$$\int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} d\alpha\, d\beta = \int_{-T}^{0} \int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{T/2} d\alpha\, d\tau + \int_{-T}^{0} \int_{-T/2}^{\frac{T}{2}-\tau} d\alpha\, d\beta \tag{4.24}$$

Con base en la ecuación anterior la ec. (4.23) se escribe como

$$
\begin{aligned}
\hat{S}(f) = & \int_{-T}^{0} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{T/2} \left[f(\alpha)\ f(\alpha+\tau)\ d\alpha \right] e^{-j2\pi f t}\ d\tau \ + \\
& + \int_{0}^{T} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{\frac{T}{2}-\tau} \left[f(\alpha)\ f(\alpha+\tau)\ d\alpha \right] e^{-j2\pi f t}\ d\tau
\end{aligned}
\qquad (4.25)
$$

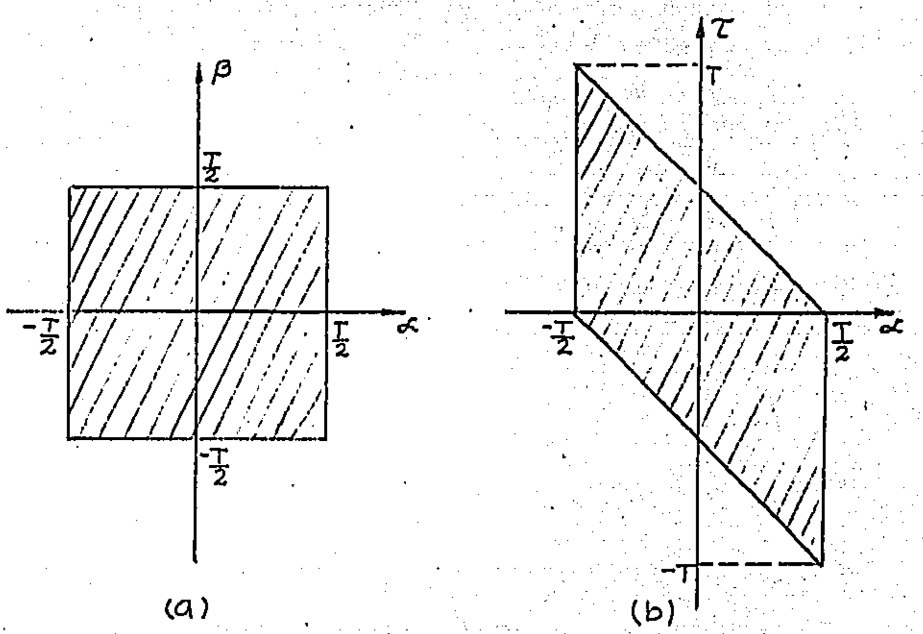


Fig. 4. Regiones de integración

Por definición la función de autocorrelación $R(\tau)$ esta dada por el valor esperado

$$R(\tau) = E\,[f(\alpha)\ f(\alpha+\tau)] \qquad (4.26)$$

Al tomar el valor esperado en ambos miembros de la ec. (4.25) y dado que este operador puede entrar a la integral sin alterar la igualdad, se tiene

$$E[\hat{S}(f)] = \int_{-\tau}^{0} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{T/2} E\,[f(\alpha)\ f(\alpha+\beta)]\ d\alpha\ e^{-j2\pi f\tau} d\tau\ + \tag{4.27}$$

$$+ \int_{0}^{T} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{\frac{T}{2}-\tau} E\,[f(\alpha)\ f(\alpha+\tau)]\ d\alpha\ e^{-j2\pi f\tau}\ d\tau$$

O sea al sustituir la ec. (4.26)

$$E[\hat{S}(f)] = \int_{-\tau}^{0} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{T/2} R(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \int_{0}^{T} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{\frac{T}{2}-\tau} R(\tau)\ d\alpha\ e^{-j2\pi i\tau}\ d\tau \tag{4.28}$$

Como $R(\tau)$ no cambia respecto a α, al integrar respecto a α

$$E[\hat{S}(f)] = \int_{-T}^{0} R(\tau)\ (1+\tau/T)\ e^{-j2\pi f\tau}\ d\tau + \int_{0}^{T} R(\tau)\ (1+\tau/T)\ e^{-2\pi f\tau}\ d\tau$$

$$E[s(f)] = \int_{-T}^{T} (1-\frac{|\tau|}{T})\ R(\tau)\ e^{-j2\pi f\tau}\ d\tau \tag{4.29}$$

En el limite cuando T tiende a infinito, se sigue que

$$\lim_{T\to\infty} E[\hat{S}(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\ e^{-j2\pi f\tau} d\tau \tag{4.30}$$

El segundo miembro de la ec. corresponde a la funcion de densidad espectral, por lo que

$$\lim_{T\to\infty} E[\hat{S}(f)] = s(f) \tag{4.31}$$

considerar que el tiempo T es grande

$$E[\hat{S}(f)] = s(f) \tag{4.32}$$

y al tomar en cuenta la ec. (4.20).

$$E\left[\frac{1}{T} \overset{\approx}{F}(f)\ F(f) \right] = s(f) \tag{4.33}$$

De la ec. anterior se afirma que para conocer la función de densidad espectral s(f), se requiere calcular el promedio de 1/T $\overset{\approx}{F}(f)\ F(f)$. En la ref. 14, se muestra que $\hat{s}(f)$ es un estimador sesgado de s(f) por lo que para calcular s(f) se debe utilizar la ec. (4.33).

Para utilizar la ec. (4.33), se recomiendan dos procedimientos equivalentes que implican un promedio, a saber

a) Promedio de varias funciones de densidad espectral

Este proceso consiste en dividir el tiempo T que dura la función del tiempo (registro) en q intervalos de tiempo de duración T_m, por lo que

$$T = q\ T_m \tag{4.34}$$

A partir de f(t) en cada intervalo de tiempo T_m, se calcula $\hat{s}(f)$ (fig.4.11) y luego para cada frecuencia f se toma el promedio de los valores de $\hat{s}(f)$, es decir

$$s(f) = \frac{1}{q} \left[\hat{s}_1(f) + \hat{s}_2(f) + \ldots + \hat{s}_q(f) \right] \tag{4.35}$$

donde $\hat{S}_i(f)$ corresponde a la función de densidad espectral del intervalo de tiempo T_{ei} de f(t)

Como en el cálculo de $\hat{S}(f)$, se toma al tiempo de registro a T_e, esto significa que las frecuencias en s(f) estarán espaciadas en B_e donde

$$B_e = \frac{1}{T_e} \tag{4.36}$$

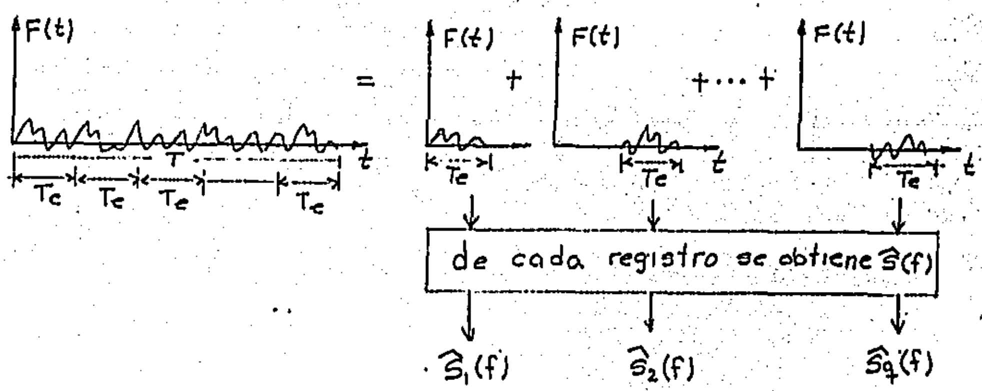


Fig. 4.11 Registro dividido en q intervalos de duración t_e

a) Promedio de ordenadas de una función de densidad espectral muestral

El otro camino para calcular s(f), se basa en obtener $\hat{S}(f)$ para todo el registro de f(t), es decir, sin dividir el registro en q partes

Una vez conocida $\hat{s}(f)$, se promedian sus ordenadas asociada a varias frecuencias, y se escoge el promedio como el valor de $s(f)$

para las frecuencias involucradas. En este caso se establece que al juntar q ordenadas de $\hat{s}(f)$ el espaciamiento de frecuencia en $s(f)$ es q veces el de $\hat{s}(f)$ e igual a $1/T$; de modo que para $s(f)$, se tiene

$$\Delta f = \frac{q}{T} = B_e \tag{4.37}$$

nótese que es igual a la ec. (4.36) por lo que se puede decir

$$s(f_c) = \frac{1}{q}\left[\hat{s}(f) + \hat{s}(f+1/T) + \hat{s}(f+2/T) + \ldots + \hat{s}(f+\frac{q-1}{T})\right] \tag{4.38}$$

donde $$f_c = \frac{f + (f+\frac{q-1}{T})}{2} = f + \frac{q-1}{2T} \tag{4.39}$$

En la fig. 4.12, se muestra este proceso

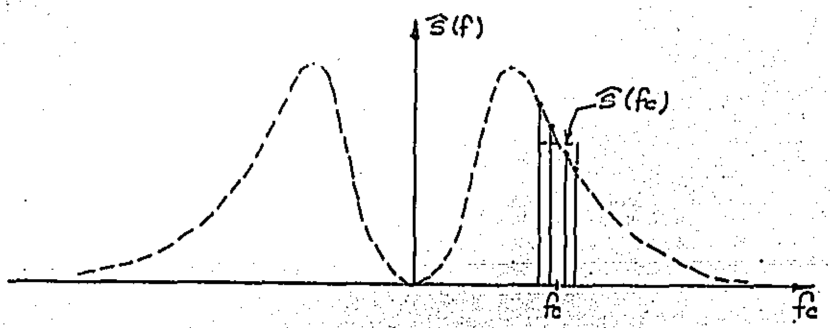


Fig. 4.12 Promedio de ordenadas en una función de densidad espectral muestral

De una manera similar a lo que sucede entre la variancia poblacional (σ_x^2) y la muestral (s_x^2) que estan relacionadas con una χ^2 de N-1 grados de libertad (inciso 2.2.3) mediante

$$\frac{n\ s^2}{\sigma_x} = \chi_n^2 \tag{4.40}$$

siendo n = N-1

Se tiene una asociación entre s(f) y $\hat{s}$(f), toda vez que al considerar s(f) Δf = σ_x^2 y $\hat{s}$(f) Δf = s_x^2, se encuentra

$$\frac{n\ \hat{s}(f)}{s(f)} = \chi_n \tag{4.41}$$

Cuando no se considera el promedio de $\hat{s}$(f) comentado en los incisos a) y b), se tiene que n = 2 apoyándose en que $\hat{s}$(f) = 1/T $R_e\{F(f)^2\}$ + 1/T $I_m\{F(f)^2\}$ porque son dos sumandos. En estas condiciones

$$\frac{\hat{s}(f)}{s(f)} = \frac{\chi_2^2}{2} \tag{4.42}$$

se llama error normal estándar ε_r, a la desviación estándar de $\hat{s}$(f) entre s(f), es decir

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma\ [\hat{s}(f)]}{s(f)} \tag{4.43}$$

y se considera igual a $\sqrt{\frac{2n}{n}}$, por lo que

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma[\hat{s}(f)]}{s(f)} = \frac{\sqrt{2n}}{n} \tag{4.44}$$

Si no se toma en cuenta el promedio de $\hat{s}$(f), n = 2 y por lo tanto

ε_r = 1, queriendo esto decir que el cambio aceptable en la cantidad estimada es igual a esta cantidad, lo cual no se puede aceptar. Por ello es comveniente tomar el promedio para que n sea mayor a 2 y se reduzca el error.

Usando la ec. (4.44), el error normal estándar es

$$\varepsilon_r = \frac{1}{\sqrt{B_e T}} \tag{4.45}$$

siendo $n = 2B_eT$

Cuando se toma en cuenta el promedio resulta

$$\frac{\hat{s}(f)}{s(f)} = \frac{\chi_n}{n} \tag{4.46}$$

donde $n = 2q = 2B_e\,T$ (4.47)

Así las cosas, la distribución muestral de $\hat{s}(f)$ promedio es apróxi_madamente χ^2 con $n = 2B_eT$ grados de libertad.

El intervalo de confianza $1-\alpha$ para la función de densidad espectral s(f) está basado en la estimación de $\hat{s}(f)$ medidas con frecuencias espaciadas en B_e y longitud de registro T, resulta ser

$$\frac{n\ \hat{s}(f)}{\chi^2_{n;\alpha/2}} \leq s(f) \leq \frac{n\ \hat{s}(f)}{\chi^2_{n;1-\alpha/2}} \tag{4.48}$$

con $n = 2B_eT$

Se recomienda que el número de valores discretos de la función por transformar, al utilizar el algoritmo de la transformada rápida de Fourier, se requiere que N sea un número igual a una potencia entera de 2, es decir $N = 2^{\gamma}$ donde γ es un número entero positivo

Cuando se dispone de menos datos que N, se recomienda agregar ceros del orden de un 10 %, sin alterar sustancialmente los resultados

4.6 Estimación de la función de densidad espectral

Con base en los distinttos aspectos que se han considerado respecto a la transformada de Fourier discreta, intervalos de estimación, estimadores, alisamiento y error normal estándar para obtener la función de densidad espectral, es conveniente en su estimación definir Δt y T.

seleccion de Δt y T

Para eviitar el alisamiento (inciso 4.4) Δt es fijado de manera que

$$\Delta t \le \frac{1}{2f_m} \tag{4.49}$$

donde f_m es la frecuencia más grande hasta donde interesa calcular s(f).

En algunos casos, las frecuencias no deseadas de una señal f(t), pueden ser eliminadas con un filtro antes de ser registradas. Si un registro con frecuencia de corte f_c es usado, es recomendable que el intervalo de tiempo de muestreo sea igual a

$$\Delta t \leq \frac{1}{4f_c} \tag{4.50}$$

o al menos

$$\Delta t = \frac{1}{2f_c} \tag{4.51}$$

Por otra parte, con base en el error normal estándar que se desea admitir, se encuentra T. Usualmente errores ε entre 0.01 y 0.1, son considerados como adecuados. por ello, de la ec. (4.34) y (4.45)

$$q = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{4.52}$$

De la ec. (4.34) y (4.36)

$$T = T_c\, q = \frac{q}{B_e} \tag{4.52}$$

B_e, es el intervalo de frecuencia en la función de densidad espectral.

B_e, se selecciona a partir de la importancia de la función de densidad espectral y el grado de precisión deseados en ella.
Con B_e se encuentra T_e.

Una vez que se define Δt y T_e, se puede seguir cualquiera de los dos procedimientos que se describen a continuación, para estimar la función de densidad espectral.

a) Procedimiento basado en varios registros de duración t_m

Para obtener la función de densidad espectral s(f) a partir de varios registros de duración T_m, primeramente se ajusta el valor de Δt o N para que

$$T_m = N \, \Delta t \tag{4.53}$$

donde $N = 2^{\gamma}$ siendo γ un entero positivo

Para cada registro de duración T_m, se siguen estos pasos

a.1) Multiplicar $f_i(t)$ por una función ventana

Los valores discretos de $f_i(t)$, se multiplican por una función ventana h(t) para que resalten las ordenadas de s(f), para las frecuencias importantes (inciso 4.4), $y(t) = f_i(t)\, h(t)$.

a.2) Obtener la transformada de Fourier discreta $\underline{y}(t)$.

Es recomendable utilizar la transformada rápida de Fourier, para obtener $\underline{y}(f_k)$, donde $f_k = k\, 1/T_m$.

a.3) Obtener $\widehat{s}_i^{\prime}(f_k)$

Se calcula $\hat{S}'_i(f_k) = 1/T\ \bar{Y}_k\ Y_k$.

a.4) Se ajusta $\hat{S}'_i(f_k)$

Para reducir la alteración en la variancia de f(t) por usar la función ventana, se considera

$$\hat{S}_i(f_k) = F\ \hat{S}'_i(f_k)$$

donde F, es un factor correctivo.

En caso de usar la ec. (4.19), F es igual a 1/0.875.

a.5) Calcular s(f)

Los pasos 1 a 4 se aplican a cada secuencia $f_i(t)$, (i= 1, 2,...,q) y posteriomente se obtiene.

$$s(f_k) = \frac{1}{q}\left[\hat{S}_1(f_k) + \hat{S}_2(f_k) + \ldots + \hat{S}_q(f_k)\right]$$

donde $f_k = \frac{k}{T_e}$; k = 0, 1,..., N-1 .

b) Procedimiento basado en un registro de duración T

La función de densidad espectral es obtenida a partir de la transformada de Fourier de todo el registro de f(t), sin necesidad de separarlo en varios registros.

En este caso para calcular s(f), se siguen los siguientes pasos

b.1) Multiplicar f(t) por una función ventana

Los valores discretos de f(t), se multiplican por h(t) por las razones discutidas en el inciso 4.4. Asi se encuentra

$$y(t) = f(t)\ h(t)$$

b.2) Calcular la transformada de Fourier discreta $Y(t)$

Se obtiene la transformada de Fourier discreta de y(t) la cual es $Y(f_k)$, donde $f_k = k/T$. Es aconsejable utilizar la transformada rápida de Fourier.

b.3) Obtener $\hat{s}'(f)$

Se determina $\hat{s}'(f_k) = 1/T\ \tilde{Y}_k\ Y_k$

b.4)) Se ajusta $\hat{s}'(f_k)$ como

$$\hat{s}(f_k) = F\ \hat{s}'(f_k)$$

donde F es un factor para que la varianza del registro f(t) no se altere. Para la ec. (4.19) $F = 1/0.875$

b.5) Se obtiene s(f) a partir de $\hat{s}(f)$

Se utiliza la ec. (4.38), es decir

$$s(f) = s(f_k + \frac{q-1}{2T}) = \frac{1}{q}\left[\hat{s}(f_k) + \hat{s}(f_k + \frac{1}{T}) + \hat{s}(f_k + \frac{2}{T}) + \right.$$

$$\left. + \hat{s}(f_k + \frac{q-1}{T})\right] \quad \text{para} \quad k = 0,\ q,\ 2q, \ldots, N-1$$

4.7 Características de la función de densidad

El área bajo el espectro es igual a la variancia

Al comparar la ec.(4.1) y (4.3) con la (2.42), se encuentra que cuando la media $\bar{x}$ es nula la correlación de orden cero de f(t) (ec. 2.35), es igual a la variancia, es decir

$$\bar{\sigma}_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s(f)\, df \tag{4.54}$$

Esto significa que el área bajo el espectro es igual a la variancia.

Espectro de uno y dos lados

El espectro tal y como se ha definido, resulta de los valores que se dibujan de s(f) contra f de tal manera que se obtiene una curva simétrica lo cual se puede decir que se tiene un espectro de dos lados (fig. 4.13), por tanto se escribe

$$s(f) = s(-f) \tag{4.55}$$

de manera que al dibujar $\emptyset(f) = 2\, s(f)$, se obtiene el espectro de un solo lado

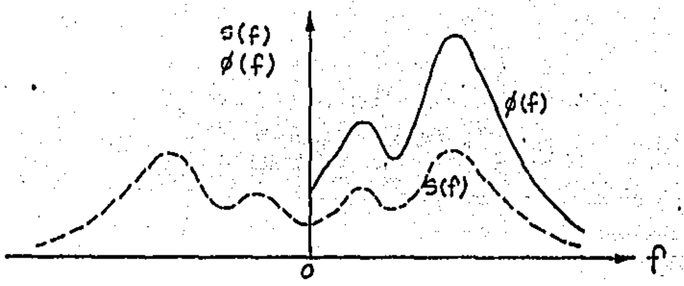


Fig.4.13 Función de densidad espectral de uno y dos lados

Parámetro ancho de banda espectral

La apariencia del perfil de las elevaciones de la superficie libre del mar, esta relacionado con la forma que tiene el espectro. Cuando el perfil tiene muy pocos mínimos positivos o máximos negativos (ver fig. 5.9), es parecido a una onda senoidal modulada, el espectro es alargado y angosto, concentrándose su área (energía) en un intervalo de frecuencia corto, se dice en este caso que se trata de un espectro de banda angosta (fig. 4.14a)). Del mismo modo cuando el registro posee una gran cantidad de mínimos positivos o máximos negativos, su espectro se extiende sobre un intervalo de frecuencia grande con una ordenada menor. En este caso se dice que se trata de un espectro de banda ancha (fig. 4.14b).

Para estimar que tan ancho o que tan angosto es el espectro, se utiliza el parámetro llamado "ancho de banda espectral".

$$\epsilon^2 = 1 - \frac{m_2}{m_o\ m_4} \qquad (4.56)$$

donde

$$m_n = \int_o^\infty f^n\ \phi(f)\ df \qquad (4.57)$$

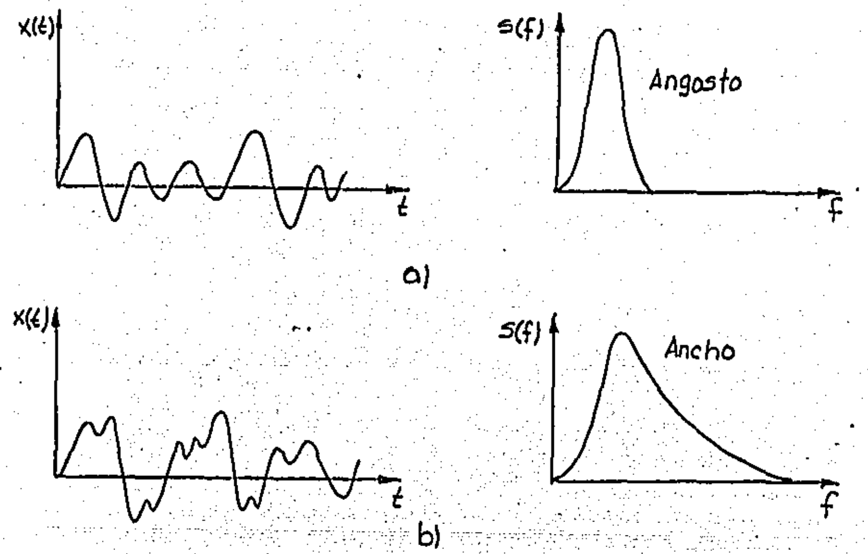


Fig. 4.14 Registro de ellevaciones de la superficie libre del mar y su espectro correspondiente

siendo $\emptyset(f)$ la función de densidad espectral de las elevaaciones de la superficie libre (de un solo lado), es decir $\emptyset(f) = 2\ s(f)$ para $f \geq 0$.

Cuando ϵ es cercano a cero se tiene un espectro de banda angosto y si es próximo a uno el espectro es de banda ancha.

Cartwright y Longuet-Higgings [6], mediante un argumento geométrico encontraron una relación entre ϵ y el número de máximos positivos y negativos. Por medio de ellos se puede estimar el parámetro ϵ sin conocer el espectro, es decir se tiene que

$$\epsilon^2 = 1 - (1 - 2r)^2 \tag{4.58}$$

donde

$$r = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{NMP - NMN}{NMP + NMN} \right] \tag{4.59}$$

siendo

NMP número de máximos positivos en el registro

NMN número de máximos negativos en el registro

De esta manera, por medio de las ecuaciones (4.58) y (4.59) contando en el registro a los máximos positivos (NMP) y máximos negativos (NMN), se calcula ϵ. La variable r se conoce como "proporción de máximos negativos".

5. OLEAJE

5.1. Introdución

Las olas se generan por la tranferencia de energía del movimiento del aire a la superficie del agua, además de la variación en el nivel del agua por la diferencia de presión del aire en movimiento, el esfuerzo tangencial entre el viento y el agua permite que gran parte de la energía sea transmitida al agua. El lugar donde ocurre esta transferencia se llama "zona de generación" del oleaje (sea) y en ella, la configuración de las olas es irregular. Despúes, el oleaje engendrado puede viajar grandes distancias, a lo largo de la cual tiende a hacerse regular, disminuye la altura de las olas y se incrementa su periodo. El tramo donde esto ocurre se llama zona de propagación o "decaimiento" (swell). Finalmente, en la cercanía de la costa las olas sufren transformaciones por la presencia de obstáculos, y/o fondo del mar, disispando su energía, llamándose "zona de rompiente" al lugar donde esto sucede. La fig. 5.1 muestra un croquis indicando desde la zona de generación de la ola hasta donde rompe.

Deben distinguirse dos tipos de olas producidas por el viento y generadas mar adentro. El primero está formado por las olas "ordinarias", que son las que ocurren en un sitio a lo largo del año y son más o menos persistentes, variando su dirección, altura y periodo. El segundo tipo está constituido por las olas "extraordinarias", que en México, generalmente, son producidas por ciclones. Estas olas duran relativamente poco, pero tienen una energía muy superior al de las olas ordinarias,y son por tanto mucho más destructivas.

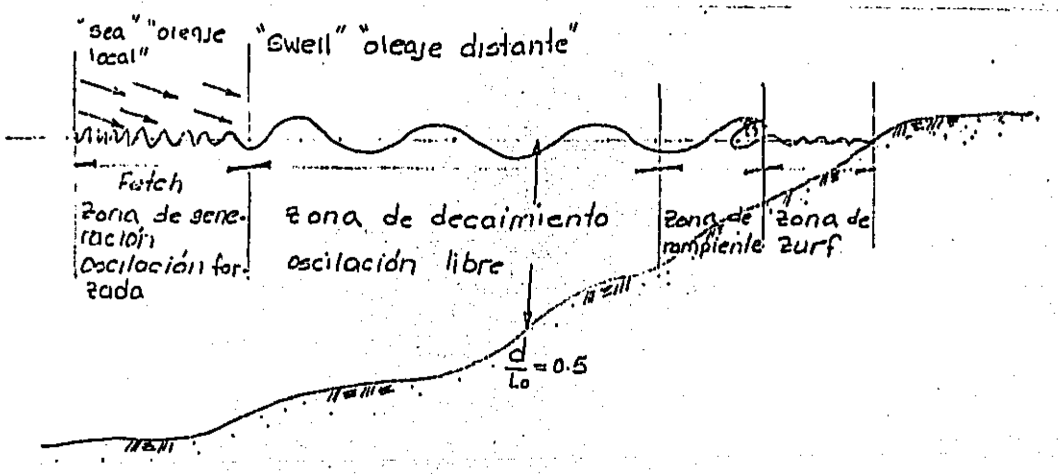


Fig. 5.1 Esquema general del oleaje por viento

En este trabajo solo se tratará el estudio del oleaje ordinario a menos que se especifique lo contrario.

Como a menudo se hará mención de algunos conceptos y vocablos propios del lenguaje marítimo es conveniente que se den algunas definiciones las cuales se describen a continuación.

5.2 Características más importantes de una ola

Se conoce como oleaje al movimiento alternativo de ascenso y descenso de la superficie del mar. La figura 5.2 muestra una ola y sus características más comúnmente usadas.

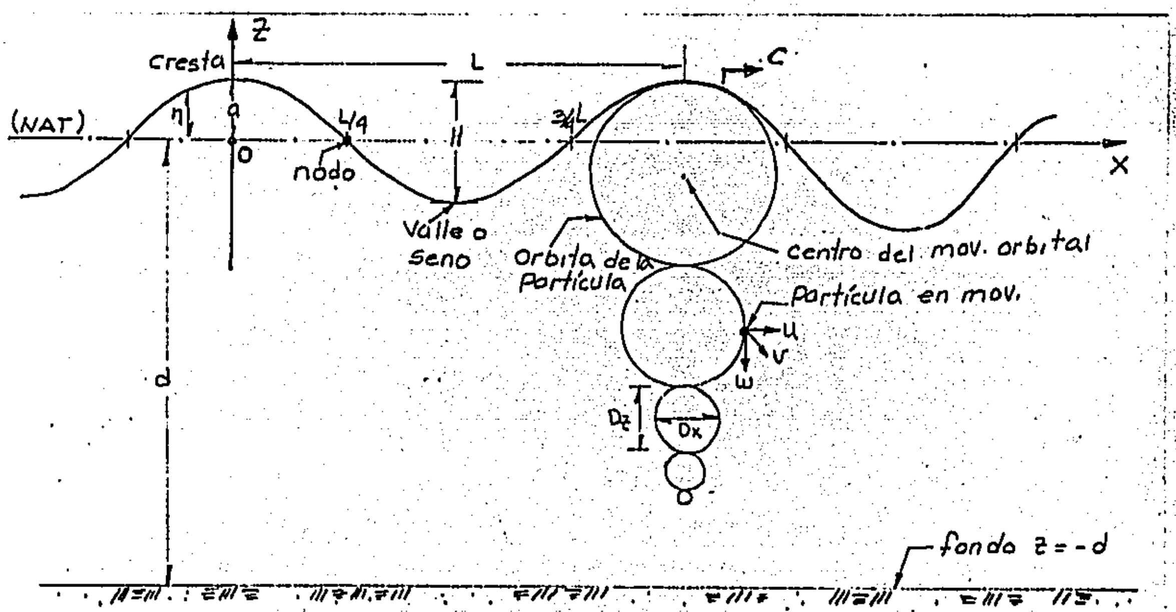


Fig. 5.2 Representación esquemática de una ola

Con referencia a la fig. 5.2 se presentan algunas definiciones de las características de una ola.

Cresta.- Punto donde el perfil de la ola tiene la mayor altura.

Valle.- Punto donde el perfil de la ola tiene el nivel más bajo.

Altura de la ola (H).- Distancia vertical medida entre una cresta y un valle.

Amplitud de la ola (a).- Distancia vertical entre la cresta y el nivel de aguas tranquilas.

Nivel de aguas tranquilas (N.A.T.).- Nivel del agua en ausencia del oleaje.

Elevación de la superficie libre (η).- Es la distancia vertical a cualquier punto de la superficie libre medida a partir de N.A.T. .

Periodo (T).- Es el tiempo que transcurre para que pasen dos crestas o dos valles consecutivos por un mismo punto.

Longitud (L).- Es la distancia horizontal que existe entre dos crestas o dos valles consecutivos.

Celeridad (c).- Velocidad de desplazamiento de la ola a tráves de la superficie del liquido. Es igual al cociente de la longitud entre el periodo ($C = L/T$).

Frecuencia angular (σ).- Es el reciproco del periodo multiplicado por dos veces π.

Frecuencia cíclica (f).- Es el recíproco del período; es el número de olas que pasan por un punto fijo por unidad de tiempo.

Número dee ola (k).- Es el recíproco de la longitud multiplicado por dos veces π.

Profundidad del agua (d).- Es la distancia vertical entre el fondo del mar y el N.A.T. (en el fondo, z = -d).

Orbita de la partícula .- Es la trayectoria que describe una partícula de agua con el oleaje.

Velocidad orbital de la partículas (v).- Desplazamiento de las partículas respecto al centro de su movimiento orbital.

5.3 Teorías del oleaje

Para obtener las características del oleaje, no se dispone de una solución matemàtica única sino que se han elaborado diversas teorías que permiten obtener respuestas adecuadas dentro de rangos acotados de aplicaciòn entre las que se pueden mencionar la teoría lineal de Airy (1845) sobre ondas de pequeña amplitud y la de Stokes (1847) que se refiere a ondas de amplitud finita.

5.3.1 Teoría lineal del oleaje

Esta teoría considera que en la ecuación de Bernoulli, el término de la carga de velocidad es despreciable, la pendiente de la superficie del agua es muy pequeña y que la amplitud es mucho menor que la longitud de ola y su profundidad. Desarrollada inicialmente por Airy en 1845, esta teoría también se conoce como teoría de Airy, teoría de olas de pequeña amplitud o primera aproximación.

La teoría lineal es de gran utilidad, tanto porque su exactitud es adecuada para muchos problemas de ingeniería, como porque es fácil de aplicar.

Las olas que resultan de la teoría lineal son olas cuyas fases se presentan alternativamente en un mismo sitio sin que exista ningúún transporte de masa con la ola. Esto es las partículas de agua no viajan con la ola, pero tienden a oscilar respecto a una posición media cuando la ola pasa por ella, resultando con esto movimientos orbitales cerrados.

Se presentan a continuación las expresiones que permiten obtener las características del oleaje según la teoría lineal, la demostración de estas se puede ver en la Ref.20, dejando para el lector interesado su estudio.

a).- Periodo de la ola, T.

El periodo de la ola permanece constante al tra_sladarse ésta a otras profundidades.

b).- Longitud de la ola, L.

Esta dada por la relación

$$L = \frac{g\,T^2}{2\pi} \tanh\,(2\pi d/L) \tag{5.1}$$

c).- Celeridad de la ola, C

La velocidad con que se traslada la ola se obtiene de

$$C = \frac{L}{T} = \left[\frac{gL}{2\pi} \tanh\,(2\pi d/L) \right]^{1/2} = \frac{gT}{2\pi} \tanh\,(kd) \tag{5.2}$$

donde k se conoce como el número de ola y es igual a $2\pi/L$.

d).- Perfil de la superficie libre,

Una ecuación simple para representar el oleaje pprogresivo (cuando la cresta se desplaza horizontalmente) como el mostrado en la fig. 5.1 es mediante la ecuación

$$\eta = a \cos\,(kx - \sigma t) \tag{5.3}$$

donde σ, se conoce como la frecuencia angular del oleaje y es igual a $(2\pi/T)$.

e).- Velocidades orbitales de las partículas (v).

Las componentes horizontal y vertical de la velocidad de las partículas de agua, u y w, (ver fig. 5.1) son

$$u = \frac{kga}{\sigma}\,\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\,\cos\,(kx - \sigma t) \qquad (5.4)$$

$$w = \frac{kga}{\sigma}\,\frac{\text{senh } k(z+d)}{\cosh kd} \qquad (5.5)$$

f).- Aceleraciones de las partículas en sus movimientos orbitales

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = (kga)\,\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\,\text{sen}\,(kx - \sigma t) \qquad (5.6)$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} = -kga\,\frac{\text{senh } k(z+d)}{\cosh kd}\,\cos\,(kx - \sigma t) \qquad (5.7)$$

g).- Desplazamiento de las partículas respecto al centro de sus movimientos orbitales.

De un modo general, dichos desplazamientos se pueden esquematizar de la siguiente manera:

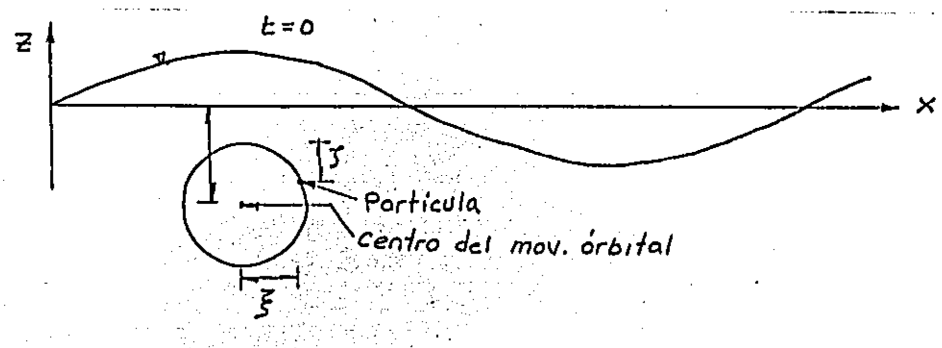


Fig. 5.3 Desplazamiento horizontal y vertical de la partícula

ξ , desplazamiennto horizontal

ζ , desplazamiento vertical

y están dados por

$$\xi = \int u \, dt = -a \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \operatorname{sen} (kx - \sigma t) \tag{5.8}$$

$$\zeta = \int w \, dt = a \frac{\operatorname{senh} k(z+d)}{\operatorname{senh} kd} \cos (kx - \sigma t) \tag{5.9}$$

h).- Presión abajo de la superficie libre.

La presión está dada por

$$P = -\gamma z + \gamma a k \cos (kx - \sigma t) \tag{5.10}$$

siendo k el factor de respuesta de presión dado por

$$K = \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \tag{5.11}$$

Gráficamente, al inspeccionar las ecuaciones anteriores, se obtiene la siguiente distribución de presion

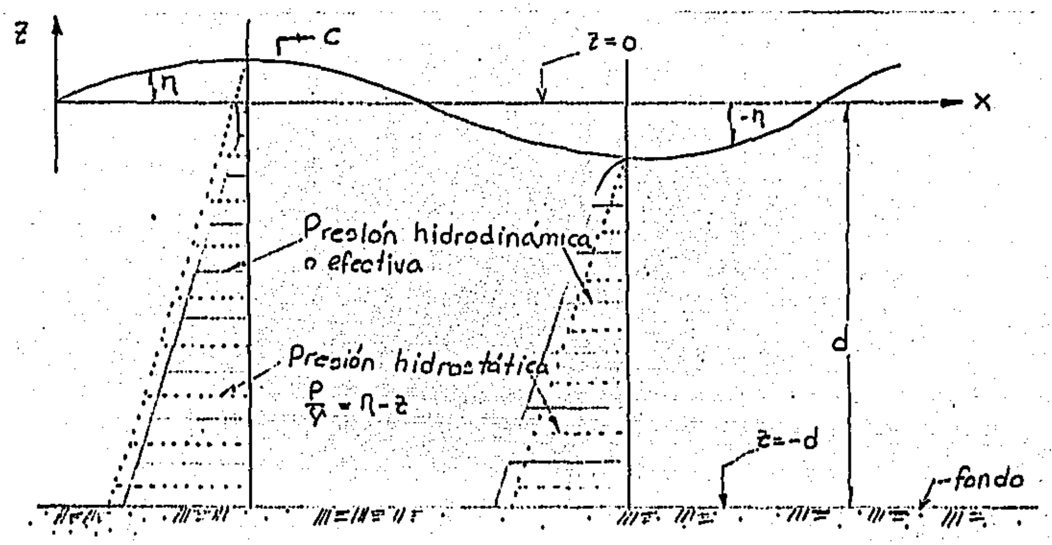


Fig. 5.4 Distribución de presiones bajo la ola

i).- Enerrgía y potencia del oleaje.

La energía cinética (por unidad de longitud), resultado del movimiento de las partículas de fluido por efecto del oleaje es

$$E_c = \frac{\gamma a^2 L}{4} \tag{5.12}$$

La energía potencial (por unidad de longitud de creesta), debida a la diferencia de elevaciones de la superficie del agua es

$$E_p = \frac{\gamma a^2 L}{4} \tag{5.13}$$

La energía del oleaje (por unidad de longitud de cresta), es igual a la suma de la energía cinética y potencial, de modo que

$$E_T = E_c + E_P = \frac{\gamma a^2 L}{8} \qquad (5.14)$$

La razón por la cual la energía es transmitida en la dirección de propagación del oleaje através de un plano vertical, es la potencia del oleaje, la cual resulta ser

$$p = \frac{\gamma a^2 L}{2\sigma} \frac{\cos^2 (kx - \sigma t)}{\cosh^2 kd} \left[kd + \frac{\operatorname{senh} 2kd}{2}\right] \qquad (5.15)$$

La potencia promedio (temporal) durante un periodo es

$$\overline{p} = \frac{1}{T} \int_o^T p\, dt = \frac{n\, E_T}{T} \qquad (5.16)$$

donde $n = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2kd}{\operatorname{senh} 2kd} \right]$ (5.17)

j).- Velocidad de grupo.

Cuando dos o más olas de periodo o longitud similares se suman, dan lugar a un conjunto de olas tales que sus amplitudes entre olas consecutivas disminuyen y aumentan desde un máximo hasta un mínimo, dando con ello una apariencia de grupos o trenes de olas (Fig. 5.5)

La velocidad con que se desplaza el centroide del grupo o bien la envolvente del tren de olas se conoce como velocidad de grupo. La velocidad de grupo es menor o igual a la celeridad de las olas que forman el grupo. En la Ref. 20 se demuestra que la velocidad de grupo está dada por

$$c_g = cn \tag{5.18}$$

$$\text{donde} \quad n = \frac{1}{2}\,\frac{2kd}{2\ \text{senh}\ 2kd} \tag{5.19}$$

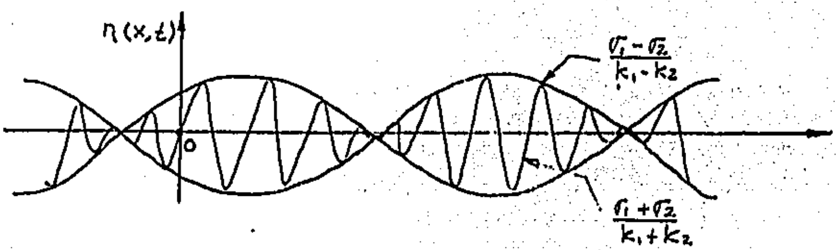


Fig. 5.5 Suma de dos olas senoidales de igual amplitud

Las expresiones indicadas anteriormente son de caracter general y sirven tanto en aguas profundas, como en intermedias y someras; sin embargo, en aguas profundas y someras, las funciones hiperbolicas alcanzan valores límetes lo que permite expresar las ecuaciones generales en forma más simple

Aguas profundas

Se cumple para esta condición que $(d/L) > 0.5$. Por tanto senh (kd) $\approx$ cosh (kd), tanh (kd) = 1; senh (kd) = (1/22) e^{kd} y senh k(z+d) = (1/2) $e^{k(z+d)}$. Por tanto

$$\frac{\text{senh}\ k(z+d)}{\text{senh}\ kd} = e^{kz} \tag{5.20}$$

En ésta última relación puede haber función cosh en el numerador y/o denominador

Aguas someras

Para esta condición se cumple que $(d/L) \leq 0.5$, por lo que kd tiende a cero. Por tanto senh (kd) = tanh kd = kd y cosh (kkd) tiende a uno.

En la tabla 5.1, se presentan las caracteristicas del oleaje, según la teoria lineal, para aguas profundas intermedias y someras[4]. En lo sucesivo el subindice $_o$ idicará aguas profundas y $_s$ en aguas someras.

5.3.2 Onda estacionaria

Las ondas estacionarias son aquellas donde las crestas no se mueven horizontalmente aunque si cambian periodicamente, formándose y desapareciendo, (Fig. 5.6). Esta clase de ondas se generan cuando se suman dos olas progresivas de igual amplitud que viajan en sentidos opuestos en la misma dirección y con igual celeridad (en valor absoluto), lo que ocurre, por ejemplo, cuando una ola progresiva choca con una pared vertical impermeable sin disipar energia. Esto último se conoce como "clapotis".

En función de los potenciales de velocidad de las olas progresivas anteriores, se puede encontrar el de las olas estacionarias y con éste definir algunos de los parámetros del oleaje.

Tabla 5.1 Compendio de ecuaciones de la teoría lineal [4]

Característica de la onda	No. de ec. del Apéndice A	Expresión general (aguas intermedias)	Aguas profundas ($d/L > 1/2$)	Aguas poco profundas ($d/L < 1/25$)
Forma de la superficie (η)	A.3.11	$\eta = a\cos(kx-\sigma t) = a\cos\theta$		
Celeridad ($C=L/T$)	A.3.23	$C=\sqrt{\frac{g}{k}\tanh kd}$	$C=\sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$	$C=\sqrt{gd}$
Longitud (L)	A.3.25	$L=\frac{gT^2}{2\pi}\tanh kd$	$L=\frac{gT^2}{2\pi}=1.56T^2$	$L=T\sqrt{gd}$
Velocidad de grupo (C_g)	A.3.62	$C_g=nC=\frac{C}{2}\left[1+\frac{2kd}{\operatorname{senh} 2kd}\right]$	$C_g=C/2$	$C_g=\sqrt{gd}$
Velocidad horizontal de la partícula (u)	A.3.26	$u=\frac{kga}{\sigma}\frac{\cosh(k(z+d))}{\cosh kd}\cos\theta$	$u=\frac{a}{\sigma}e^{kz}\cos\theta$	$u=a\sqrt{\frac{g}{d}}\cos\theta$
Velocidad vertical de la partícula (w)	A.3.27	$w=\frac{kga}{\sigma}\frac{\operatorname{senh}(k(z+d))}{\cosh kd}\operatorname{sen}\theta$	$w=\frac{a}{\sigma}e^{kz}\operatorname{sen}\theta$	$w=a\sigma(1+\frac{z}{d})\operatorname{sen}\theta$
Aceleración horizontal de la partícula (a_x)	A.3.28	$a_x=\sigma kga\frac{\cosh(k(z+d))}{\cosh kd}\operatorname{sen}\theta$	$a_x=a\sigma^2e^{kz}\operatorname{sen}\theta$	$a_x=a\sigma\sqrt{\frac{g}{d}}\operatorname{sen}\theta$
Aceleración vertical de la partícula (a_z)	A.3.29	$a_z=-kga\frac{\operatorname{senh}(k(z+d))}{\cosh kd}\cos\theta$	$a_z=-a\sigma^2e^{kz}\cos\theta$	$a_z=-a\sigma^2(1+\frac{z}{d})\cos\theta$
Desplazamiento horizontal de la partícula (ξ)	A.3.35	$\xi=-a\frac{\cosh(k(z+d))}{\operatorname{senh} kd}\operatorname{sen}\theta$	$\xi=-ae^{kz}\operatorname{sen}\theta$	$\xi=-\frac{a}{\sigma}\sqrt{\frac{g}{d}}\operatorname{sen}\theta$
Desplazamiento vertical de la partícula (ζ)	A.3.36	$\zeta=a\frac{\operatorname{senh}(k(z+d))}{\operatorname{senh} kd}\cos\theta$	$\zeta=ae^{kz}\cos\theta$	$\zeta=a(1+\frac{z}{d})\cos\theta$
Presión abajo de la superficie (p)	A.3.40	$p=\gamma\eta\frac{\cosh(k(z+d))}{\cosh kd}-\gamma z$	$p=\gamma\eta e^{kz}-\gamma z$	$p=\gamma(\eta-z)$
Energía total por unidad de cresta (E_T)	A.3.49	$E=\frac{\gamma a^2}{2}L$	$E=\frac{\gamma gT^2a^2}{4\pi}$	$E=\frac{\gamma a^2}{2}T\sqrt{gd}$
Potencia por unidad de cresta promedio ($\bar{P}$)	A.3.55	$\bar{P}=\frac{nE}{T}$	$\bar{P}=\frac{\gamma gTa^2}{8\pi}$	$\bar{P}=\frac{\gamma a^2}{2}\sqrt{gd}$
Potencial de velocidad (ϕ)	A.3.20	$\phi=\frac{ga}{\sigma}\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\operatorname{sen}\theta$	$\phi=\frac{ga}{\sigma}e^{kz}\operatorname{sen}\theta$	$\phi=\frac{ga}{\sigma}\operatorname{sen}\theta$

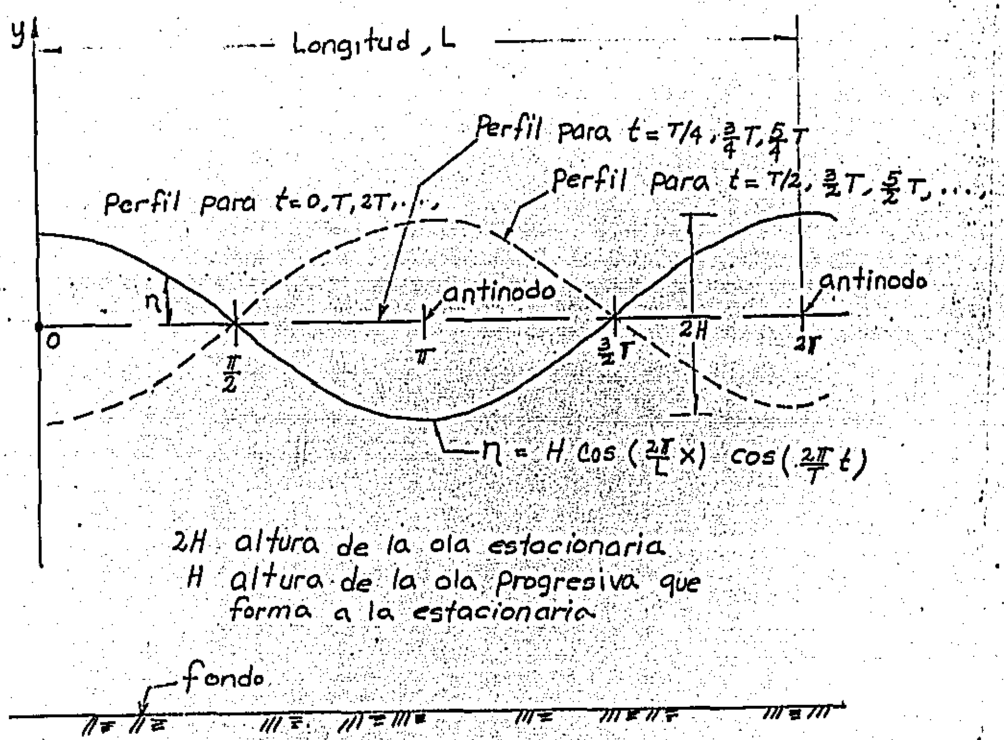


Fig. 5.6 Ondas estacionarias (clapotis).

En la tabla 5.2, se anotan las fórmulas del oleaje para la primera aproximación. El periodo de esta clase de oleaje ayuda a entender mejor el fenómeno de reflexión [7]

5.3.3 Teorías de amplitud finitas

Cuando la amplitud de las olas no es tan pequeña comparada con su longitud deben considerarse términos no lineales en los

Tabla 5.2. Compendio de ecuaciones de ondas estacionarias (teoría lineal) [4]

Característica de la onda	Expresión general $\frac{1}{25} < d/L < \frac{1}{2}$ (aguas intermedias)	Aguas profundas ($d/L > 1/2$)	Aguas poco profundas ($d/L < 1/25$)
Forma de la superficie (η)	$\eta = -a \cos kx \cos \sigma t$		
Relación de dispersión	$C = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kd}$	$C = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$	$C = \sqrt{gd}$
Longitud (L)	$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh kd$	$L = \frac{gT^2}{2\pi} = 1.56T^2$	$L = T(gd)^{1/2}$
Velocidad horizontal de la partícula (u)	$u = -a\sigma \frac{\cosh(k(z+d))}{\mathrm{senh}\, kd} \cos kx\, \mathrm{sen}\, \sigma t$	$u = -a\sigma e^{kz} \mathrm{sen}\, kx\, \mathrm{sen}\, \sigma t$	$u = -a(\frac{g}{d})^{1/2} \mathrm{sen}\, kx\, \mathrm{sen}\, \sigma t$
Velocidad vertical de la partícula (w)	$w = a\sigma \frac{\mathrm{senh}(k(z+d))}{\mathrm{senh}\, kd} \cos kx\, \mathrm{sen}\, \sigma t$	$w = a\sigma e^{kz} \cos kx\, \mathrm{sen}\, \sigma t$	$w = 0$
Aceleración horizontal de la partícula (a_x)	$a_x = a\sigma^2 \frac{\cosh(k(z+d))}{\mathrm{senh}\, kd} \mathrm{sen}\, kx \cos \sigma t$	$a_x = -a\sigma^2 e^{kz} \mathrm{sen}\, kx \cos \sigma t$	$a_x = -a(\frac{g}{d})^{1/2} \sigma\, \mathrm{sen}\, kx \cos \sigma t$
Aceleración vertical de la partícula (a_z)	$a_z = a\sigma^2 \frac{\mathrm{senh}(k(z+d))}{\mathrm{senh}\, kd} \cos kx \cos \sigma t$	$a_z = a\sigma^2 e^{kz} \mathrm{sen}\, kx \cos \sigma t$	$a_z = 0$
Desplazamiento horizontal de la partícula (ξ)	$\xi = \frac{a \cosh(k(z+d))}{\mathrm{senh}\, kd} \mathrm{sen}\, kx \cos \sigma t$	$\xi = a e^{kz} \mathrm{sen}\, kx \cos \sigma t$	$\xi = \frac{1}{\sigma}(\frac{g}{d})^{1/2} \mathrm{sen}\, kx \cos \sigma t$
Desplazamiento vertical de la partícula (ζ)	$\zeta = \frac{-a\, \mathrm{senh}(k(z+d))}{\mathrm{senh}\, kd} \cos kx \cos \sigma t$	$\zeta = -a e^{kz} \cos kx \cos \sigma t$	$\zeta = 0$
Presión bajo la superficie (p)	$p = -\gamma z - \frac{\gamma a \cosh(k(z+d))}{\cosh kd} \cos kx \cos \sigma t$	$p = -\gamma z - \gamma a e^{kz} \cos kx \cos \sigma t$	$p = -\gamma z - \gamma a \cos kx \cos \sigma t$
Energía total por unidad de cresta (E)	$E = \frac{\gamma}{4} a^2 L$	$E = \frac{\gamma g a^2 T^2}{8\pi}$	$E = \frac{\gamma a^2}{4} T(gd)^{1/2}$
Potencial de velocidad (ϕ)	$\phi = \frac{ga}{\sigma} \frac{\cosh(k(z+d))}{\mathrm{sodh}\, kd} \cos kx \cos \sigma t$	$\phi = \frac{ga}{\sigma} e^{kz} \cos kx \cos \sigma t$	$\phi = \frac{ga}{\sigma} \cos kx \cos \sigma t$

desarrollos matemáticos del oleaje. El manejo de las ecuaciones en las características de las olas, es más complicado y de acuerdo a la profundidad relativa (d/L)), y la relación de profundidad a altura de ola (d/H), se recomienda la aplicación de una teoría del oleaje [23].

Teoría de Stokes

En 1847 y 1880, Stokes desarrolló una teoría para olas de amplitud finita, partiendo del teorema de Bernoulli deducido de las ecuaciones de Navier-Stokes.A diferencia de la teoría lineal la cual desprecia los términos que no son lineales, la teoría de Stokes considera términos correctivos basados en desarrolllos en series de Taylor de tal manera que incluye efectos no lineales o de orden superior. Así por ejemplo, las olas obtenidas con esta teoría para varios órdenes de aproximación, dan perfiles de olas más angostos en las crestas y más planos en los valles que aquellos obtenidos con la teoría de pequeña amplitud, lo cual está más cercano a lo que realmente se observa en los océanos.

Uno de los efectos que no toma en cuenta la teoría lineal y que la teoría de Stokes, sí considera es que en aguas intermedias y someras el nivel medio no coincide con el nivel de reposo; el nivel medio de ola es aquel en el cual el volumen de la cresta arriba de él es igual al del valle bajo él. Otro de los efectos que considera la teoría de Stokes es el hecho de que las trayectorias de las partículas no son cerradas, sino que al final de un periodo, la partícula termina en una posición ligeramente delante de la posición inicial, es decir, existe un desplazamiento lento de toda la masa de agua en la dirección de avance de la ola.

En la Fig. 5.7 se muestra una trayectoria de las partículas de agua.

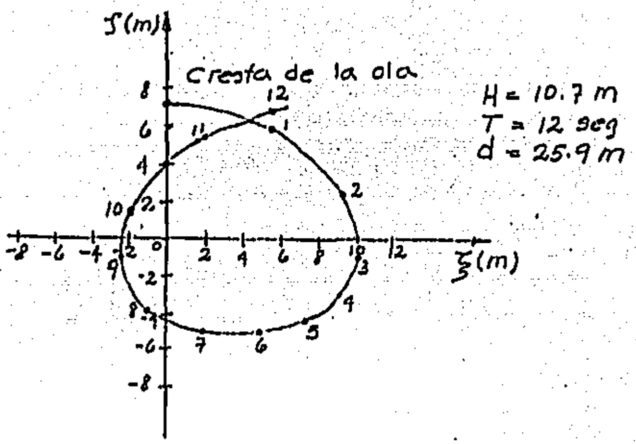


Fig. 5.7 Diagrama típico de la órbita de una partícula

Se llama velocidad de transporte de masa, al desplazamiento horizontal neto obtenido en un ciclo completo del oleaje dividido entre el periodo de éste, y se calcula con

$$\overline{u}(z) = \left(\frac{\pi H}{L} \right)^2 \frac{c}{2} \frac{\cosh 2k(z+d)}{\operatorname{senh} kd} \qquad (5.21)$$

La velocidad de transporte de masa en aguas profundas está dada por

$$\overline{u} = \frac{\pi H}{L} c\, e^{2kz} \qquad (5.22)$$

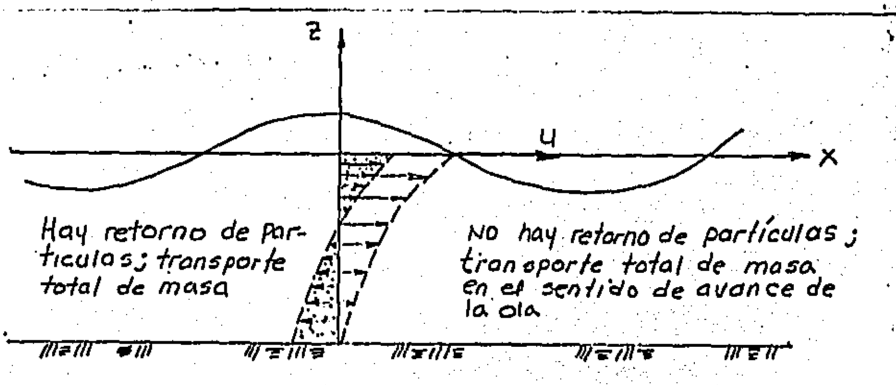


Fig. 5.8 Transporte de masa

En la tabla 5.3, se han reunido algunas fórmulas para calcular las características del oleaje de acuerdo con la teoría de Stokes, segunda aproximación.

Además de las teorías que se han visto en este trabajo, que son las que más se utilizan en los problemas de ingeniería en el orden establecido, existen otras como lo son la teoría cnoidal, teoría de la ola solitaria y la teoría trocoidal de Gersner, por mencionar las más importantes. El desarrollo de estas teorías no se incluye en este trabajo, pero el interesado puede recurrir a las Ref.6 y 20.

5.4 Ondas oceánicas

Las olas generadas por el viento en realidad tienen una apariencia irregular y caótica.

Cuando se dispone de un registro de la elevación de la superficie libre encima de un punto fijo en el espacio, es difícil a simple

Tabla 5.3 Compendio de ecuaciones de la teoría de Stokes (segunda aproximación) [4]

Características de la onda	Expresión general (aguas intermedias)
Forma de la superficie (η)	$\eta = a\cos(kx-\sigma t) + \frac{ka^2}{8}\frac{\cosh kd(2-\cosh 2kd)}{\text{senh}^3 kd}\cos 2(kx-\sigma t)$
Celeridad (c)	$C = \left[\frac{g}{k}\tan h\frac{2\pi d}{L}\right]^{1/2}$
Transporte de masa (U)	$U = k^2a^2C\frac{\cosh^3 k(z+d)}{2\,\text{senh}^2 kd}$
Longitud (L)	$L = \frac{2T}{\sigma}\tanh kd$
Potencial de velocidad (ϕ)	$\phi = a\left(\frac{\cosh k(z+d)}{\text{senh } kd}\right)\text{sen}(kx-\sigma t) + \frac{3}{4}\frac{\pi a^2 C}{L}\frac{\cosh^3 k(z+d)}{\text{senh}^4 kd}\text{sen}2(kx-\sigma t)$
Velocidad horizontal de la partícula (u)	$u = \sigma a\frac{\cosh k(z+d)}{\text{senh } kd}\cos(kx-\sigma t) + \frac{3}{4}k a^2\frac{\cosh(2k(z+d))}{\text{senh}^4 kd}\cos 2(kx-\sigma t)$
Velocidad vertical de la partícula (w)	$w = \sigma a\frac{\text{senh } k(z+d)}{\text{senh } kd}\text{sen}(kx-\sigma t) + \frac{3}{4}k\sigma a^2\frac{\text{senh}(2k(z+d))}{\text{senh}^4 kd}\text{sen}2(kx-\sigma t)$
Desplazamiento horizontal de la partícula (ξ)	$\xi = -a\frac{\cosh k(z+d)}{\text{senh } kd}\text{sen}(kx-\sigma t) + \frac{ka^2}{4}\left[1-\frac{3}{2}\frac{\cosh 2k(z+d)}{\text{senh}^4 kd}\right]\text{sen}2(kx-\sigma t) + \frac{1}{4}ka^2\frac{\text{senh } 2(z+d)}{\text{senh}^2 kd}\sigma t$
Desplazamiento vertical de la partícula (ζ)	$\zeta = a\frac{\text{senh } k(z+d)}{\text{senh } kd}\cos(kx-\sigma t) + \frac{3}{8}\frac{ka^2\,\text{senh } 2k(z+d)}{\text{senh}^4 kd}\cos 2(kx-\sigma t) + \frac{1}{4}ka^2\frac{\text{senh } 2k(z+d)}{\text{senh}^2 kd}$
Aceleración horizontal de la partícula a_x	$a_x = a\sigma^2\frac{\cosh k(z+d)}{\text{senh } kd}\text{sen}(kx-\sigma t) + \frac{3}{2}\frac{\sigma^2 ka^2\cosh 2k(z+d)}{\text{senh}^4 kd}\cos(kx-\sigma t)\,\text{sen}2(kx-\sigma t)$
Aceleración vertical de la partícula a_z	$a_z = -\sigma^2 a\frac{\text{senh } k(z+d)}{\text{senh } kd}\cos(kx-\sigma t) - \frac{3}{2}\frac{\sigma^2 ka^2\,\text{senh } 2k(z+d)}{\text{senh}^4 kd}\cos 2(kx-\sigma t)$
Presión bajo la superficie libre (p)	$p = -\gamma z + a\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\cos(kx-\sigma t) + \frac{3}{4}\frac{ka^2\tanh kd}{\text{senh}^2 kd}\left[\frac{\cosh 2k(z+d)}{\text{senh}^2 kd} - \frac{1}{3}\right]\cos 2(kx-\sigma t) - \frac{1}{4}ka^2\frac{\tanh kd}{\text{senh}^2 kd}\cos 2k(z+d)$

vista estimar la altura y periodo de la ola: los procedimientos que se han propuestos, como los del inciso 5.4.1 al respecto permiten encontrar una sucesión de valores de ellos. Un análisis estadístico de los valores así encontrados permiten obtener algunos parámetros característicos de altura y periodo del registro

5.4.1 Métodos para calcular altura y periodo de ola

Para definir altura y periodo de ola de registros como el de la fig. 5.9, se utilzan los métodos "máximo-mínimo" y "cruce-cero". Para el primero, la altura de ola (H_1) es la diferencia entre dos ordenadas máxima y mínima consecutivas y el periodo (T_1) es el intervalo de tiempo entre dos ordenadas máximas consecutivas. Para el segundo, la altura de ola (H_2), es la máxima distancia vertical entre dos cruces hacia arriba consecutivos y el periodo (T_2) es el intervalo de tiempo entre dichos cruces.

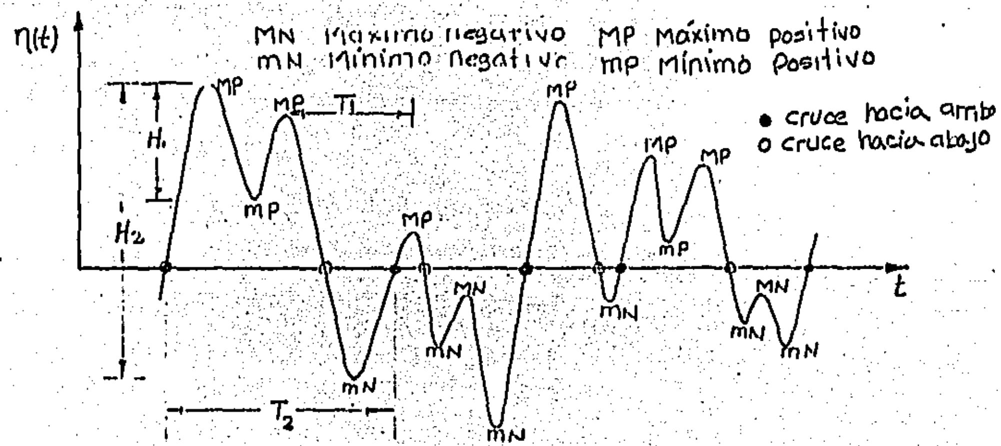


Fig.5.9 Registro de la elevación de la superficie libre del mar.

5.4.2 Estadísticas de las alturas de olas

Como se mencionó anteriormente la altura y periodo del olaeje son aleatorios y por ello el anàlisis para obtener los valores de referencias como son, por ejemplo, altura de ola significante ($H_{1/3}$) y la altura media ($\bar{H}$), se debe efectuar utilizando las técnicas estadísticas. Para ello por supuesto es necesario contar con registros del oleaje.

En hidráulica maritima las dos técnicas o modelos más frecuentemente usados se llaman de distribución normal (o de Gauss) y la distribución de Rayleigh (ver capitulo 2).

Longuet- Higgins encontró que la probabilidad de ocurrencia $p(H_i)$ de una altura de ola H_i contenida en el registro con N alturas puede ser obtenida a partir de la función de densidad de probabilidad de Rayleigh que se define , para el caso de alturas de ola, como

$$p(H_i) = \frac{2H_i \, e^{-H_i^2/H_{rms}^2}}{H_{rms}^2} \qquad (5.23)$$

donde

$H_{rms}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} H_i^2$ (para valoresdiscretos)

H_{rms} media cuadrática de las altura de ola

H_i altura de ola i

N número total de las alturas de ola

H_{rsm} raiz cuadrada de la altura media cuadrática

Para valores continuos se tiene

$$H^2_{rms} = \int_0^{\infty} H^2 \; p(H) \; dH = 8 \; m_o \qquad (5.24)$$

donde m_o es igual a la varianccia del registro de elevaciones de la superficie libre

El valor de la media aritmética ($\bar{H}$) y la altura máxima probable de la ola (H_{max}), según Longuet- Higgins, en un registro con N alturas de olas, son obtenidas como

$$\bar{H} = \int_0^{\infty} H \; p(H) \; dH = \sqrt{2\pi m_o} \qquad (5.25)$$

$$H_{max} = 0.707 \; H_{1/3} \sqrt{\log_e N} \qquad (5.26)$$

La función de distribución correspondiente a la ecuación (5.22) está dada por

$$p(H_i) = \int_0^{H_i} p(H_i) \; dH_i = 1 - e^{-H_i/H^2_{rms}} \qquad (5.27)$$

Con la ecuación (5.27) se obtiene la probabilidad de tener olas con altura menor o igual que H_i

Si se desea calcular $H_{1/n}$, la altura de ola que tiene la probabilidad de ser excedida igual a 1/n, siendo n el número de olas, se utiliza el siguiente procedimiento

Cosiderando una altura de ola $H_{1/n}$ que corresponde al inicio de la parte (1/n) de las olas más altas la ecuación (5.27) se puede escribir

$$1 - p(H_{1/n}) = \text{prob}\ (H > H_{1/n}) \equiv \int_{H_{1/n}}^{\infty} p(H)\ dH = 1/n \qquad (5.28)$$

sustituyendo en la ecuación (5.28) el valor de p(H), indicado por la ecuación (5.22) se obtiene

$$\frac{H_{1/n}}{H_{rms}} = (l_n\ n)^{1/2} \qquad (5.29)$$

Despejando $H_{1/n}$ y sustituyendo la ecuación (5.24) en (5.29)

$$H_{1/n} = \sqrt{8\ m_o\ l_n n} \qquad (5.30)$$

El valor medio de las alturas mayores que $H_{1/n}$ se obtiene de

$$\overline{H}_{1/n} = \frac{\int_{H_{1/n}}^{\infty} H\ p(H)\ dH}{\int_{H_{1/n}}^{\infty} p(H)\ dH} = \frac{\int_{H_{1/n}}^{\infty} H\ p(H)\ dH}{1/n} = n \int_{H_{1/n}}^{\infty} H\ p(H)\ dH \qquad (5.31)$$

Integrando la ec. (5.31) y tomando en cuenta la (5.29) se llega a

$$\overline{H}_{1/n} = H_{rms} \left\{ (\ln\ (n))^{1/2} + \frac{n\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - \text{erf}\ (\ln\ (n))^{1/2} \right] \right\} \qquad (5.32)$$

donde la función erf(x) se define como

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{o}^{x} e^{-t^2}\ dt \qquad (5.33)$$

Los valores de erf(x) llamada error se puede obtener de tablas

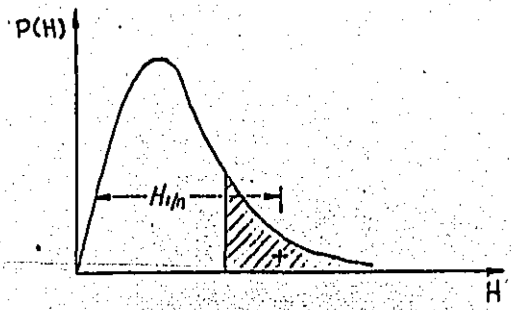


Fig.5.10 Definición de la 1/n-ésima ola más alta.

De la ec. (5.32), se encuentran las bien conocidas relaciones

$$\overline{H}_{1/10} = 2.03\ \overline{H} \tag{5.34}$$

$$\overline{H}_{1/3} = 1.597\ \overline{H} \tag{5.35}$$

Algunas otras relaciones de altura de ola, se reunen en la tabla 5.4.

Del análisis estadístico de 25 registros del oleaje con duración de 20 minutos cada uno , Putz obtuvo las siguientes relaciones

$$\overline{H}_{1/3} = 1.603\ \overline{H}$$

$$\overline{H}_{1/10} = 2.067\ \overline{H}$$

$$H_{max} = 2.998\ \overline{H}$$

Estas mismas relaciones fueron verificadas con un registro de 300 olas , resultando

Tabla 5.4 Algunas relaciones de altura de ola basadas en la distribución Rayleigh [4]

Altura característica	símbolo	$\frac{H}{H_{rms}}$	$\frac{H}{\sqrt{m_o}}$	$\frac{H}{H_s}$
Desviación estándar de la superficie libre	$\sigma = \sqrt{m_o}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}=0.354$	1.	0.25
Raíz de la media cuadrática	H_{rms}	1.	$2\sqrt{2}=2.828$	0.706
Altura más frecuente (moda)	H_f	$\frac{1}{\sqrt{2}}=0.707$	2.	0.499
Altura mediana (prob. igual a $\frac{1}{2}$)	H_M	$\sqrt{\ln 2}=0.833$	$\sqrt{8\ln 2}=2.355$	0.588
Altura media	$\bar{H}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}=0.866$	$\sqrt{2\pi}=2.507$	0.626
Altura significante	$H_s=\bar{H}_{1/3}$	1.416	4.005	1.
Promedio de la décima de las olas más altas	$\bar{H}_{1/10}$	1.8	5.091	1.271
Promedio de la centésima de las olas más altas	$\bar{H}_{1/100}$	2.359	6.672	1.666

$\overline{H}_{1/3} = 1.60\ \overline{H}$

$\overline{H}_{1/10} = 2,032\ \overline{H}$

$H_{max} = 2.832\ \overline{H}$

Se puede observar que estas relaciones no son muy diferentes respecto a las que se obtuvieron mediante la deducción teórica de Longuet- Higgins

5.4.3 Estadistica de los periodos de ola

La distrubución de probabilidad de los periodos de ola para un espectro cualquiera es más dificil para ser tratada. Sobre la base de datos experimentales, Bretschneider (1959), ha supuesto que la función de densidad Rayleigh (fig.5.11), se mantiene para el cuadrado del periodo de la ola (por el método cruce-cero), mediante

$$p(T_i) = 2.7\ \frac{(T_i)}{(\overline{T})^4}\ \exp\left[-0.675\ (T_i/\overline{T})^4\right] \qquad (5.36)$$

donde

$p(T_i)$ función de densidad de probabilidad de los periodos de ola

$\overline{T}$ media de los periodos de ola contenidos en el registro

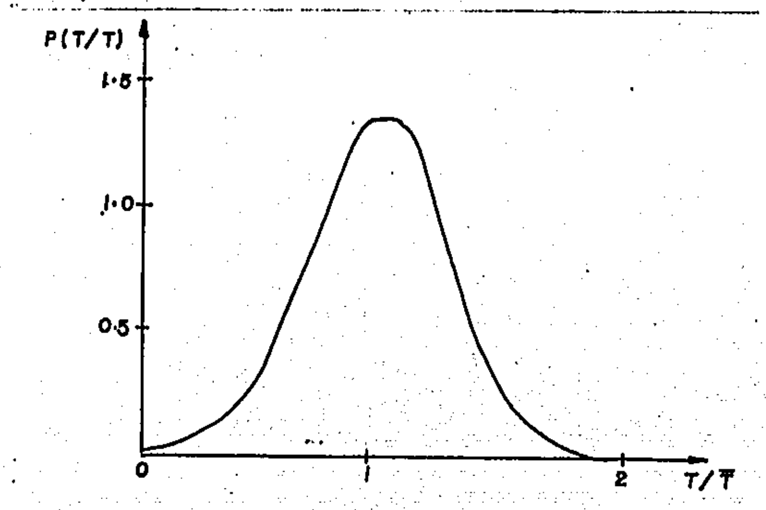


Fig. 5.11 Función de densidad del periodo de ola.

$\overline{T}$, también puede ser valuado como

$$\overline{T} = T_z = \left(\frac{m_o}{m_2} \right)^{1/2} \tag{5.37}$$

La función de distribución correspondiente a la ec. (5.36) esta dada por

$$p(T_i) = 1 - e^{-0.675(T_i/\overline{T})^4} \tag{5.38}$$

donde $p(T_i)$ es la probabilidad de tener periodos menores a T_i.

Para el análisis estadistico de los periodos, el periodo significante ($\overline{T}_{1/3}$) no es un parámetro estadistico de la función de densidad y por tanto su valor se recom_ienda calcularlo con las siguientes relaciones empiricas

$$\overline{T}_{1/3} = 1.1\ \overline{T}$$

$$T_{1/3} = 3.86 \sqrt{H_{1/3}}$$

donde $T_{1/3}$ y T estan dados en seg y $H_{1/3}$ em m.

En la tabla 5.5, se anotan algunas relaciones de interés de los periodos de ola.

Tabla 5.5 Algunas características de los periodos y frecuencias de las olas[4]

Periodo o frecuencia	Símbolo	Descripción	Ecuación
Periodo de crestas	T_c	Periodo promedio entre crestas sucesivas	$T_c=\sqrt{m_2/m_4}$
Periodo cruce-cero	T_z	Periodo promedio entre dos cruces hacia arriba sucesivos	$T_z=\sqrt{m_o/m_2}$
Frecuencia de pico	f_p	Frecuencia en la cual S(f) es máximo	$\frac{dS(f)}{df}=0$ en $f=f_p$
Periodo de pico	T_p	Periodo en el cual S(f) es máximo	$T_p=\frac{1}{f_p}$
Periodo modal	T_o	Periodo en el cual S(T) es un máximo	$\frac{dS(T)}{dT}=0$ en $T=T_o$
Frecuencia media	$\bar{f}$	Primer momento respecto al origen	$\bar{f} = m_1/m_o$
Periodo significante	T_s	Periodo promedio de la tercera parte de las olas más altas	$T_s=\sqrt[4]{4/5}\, f_p^{-1}$ (Bretschneider,1977)

6. ESPECTROS PROPUESTOS

En capitulos anteriores, se desarrolló un procedimiento para calcular la función de densidad espectral s(f). Como se ha mencionado, al dibujar la curva que relaciona s(f) con la frecuencia f se obtiene el espectro del oleaje correspondiente y de éste sus caracteristicas representativas.

Además del procedimiento expuesto, existen otras expresiones para calcular s(f), propuestas por diferentes autores, basados tanto en análisis de datos como en consideraciones teóricas. Con el propósito de que se conozcan, se mencionan en este capitulo algunas de las más representativas, indicándose la expresión s(f), propuesta por cada autor y su secuencia de cálculo. Una explicación más detallada de los e pectros anteriores, se puede consultar en las Refs. 7,12 y 15.

6.1 Espectro de Pierson-Moskowitz

Esta representado por la siguiente ecuación

$$s(f) = \frac{8.1\ (10^{3})\ g^{2}}{(2\pi)^{4}\ f^{5}} \exp\left[-\ 0.74 \left(\frac{g}{2\pi\ U_{19.5} f}\right)^{4} \right] \qquad (6.1)$$

donde s(f) densidad de energía, en $m^2(s)$.

f frecuencia cíclica, en cps (ciclos por segundo).

g aceleración de la gravedad, em m/s^2.

$U_{19.5}$ velocidad media del viento medida o calculada a la altura de 19.5 m. arriba del nivel medio del mar, en m/s.

La ec. (6.1) es válida para oleaje en completo estado de desarrollo y para velocidades de viento, medidas a 19.5 m, entre 10.3 y 23.1 m/s. Esta ecuación se encuentra dibujada en la fig. 6.1, para diferentes valores de $U_{19.5}$.

Para calcular el valor de $H_{1/3}$, se procede de la siguiente manera.

a) De acuerdo con el valor de $U_{19.5}$, se escoge un espectro de los que aparecen en la fig. 6.1.

b) Se calcula el área total bajo el espectro seleccionado y se designa como $A_m(f)$.

c) Como el área bajo el espectro es igual a la energía y ésta a su vez es igual a la variancia y aceptando que las alturas de ola tengan una función de probabilidad Rayleigh

$$H_{1/3} = 4\sigma \qquad (6.2)$$

del tal manera que

$$A_s(f) = \left[\frac{1}{4} H_{1/3} \right]^2 \tag{6.3}$$

de donde se puede despejar $H_{1/3}$ (altura de ola significante).

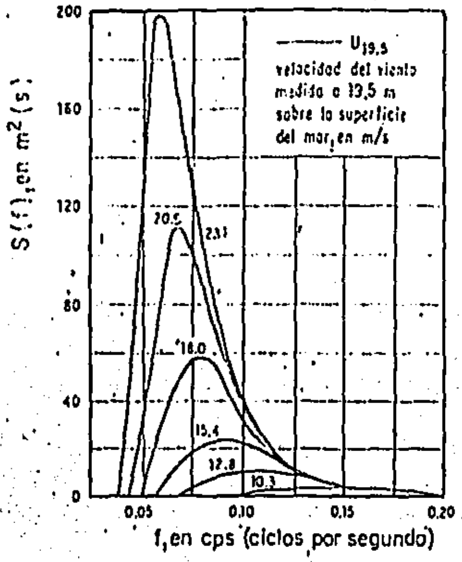


fig. 6.1 Espectro Pierson-Moskowitz

6.2 Espectro de Bretschneider (1959)

El autor propone la siguiente expresión

$$s(f) = 0.43 \left(\frac{\overline{H}}{g\overline{T}^2} \right)^2 \frac{g^2}{f^5} \exp \left[- 0.675 \left(\frac{1}{\overline{T}f} \right)^4 \right] \tag{6.4}$$

donde s(f) dendidad de energía, en $m^2(s)$

f frecuencia cíclica, en cps (ciclos por segundos)

H y T altura y periodo medio de la ola, en m y s, respectivamente. Se obtiene a partir del registro

La ec. (6.4), es aplicable a oleaje generado por viento para longitudes de fetch finito y se dispone del registro del oleaje que permite obteener estadísticamente H y T.

Para estimar $H_{1/3}$ en base a este espectro, se procede como a continuación se señala

a) Del registro de oleaje, se calculan los valores de H y T

b) Con la expresión de la ec. (6.4), se estima y dibuja el espectro correspondiente a los valores de H y T.

c) Se obtiene el área total bajo el espectro y se designa como $A_m(f)$.

d) El valor de $H_{1/3}$, se calcula como en el inciso c) del método de Pierson-Moskowitz, esto es

$$A_m(f) = \left[\frac{1}{4} H_{1/3} \right]^2$$

6.4 Espectro de Mitsuyasu

Mitsuyasu propuso el siguiente espectro como una forma generalizada

$$s(f) = 8.58\ (10^{-4}) \left(\frac{gF}{u_*^2}\right)^{-0.312} g^2 f^{-5} \exp\left[-1.25 \left(\frac{gF}{u_*^2}\right)^{-1.32} \left(\frac{u_* f}{g}\right)^{-4}\right] \quad (6.5)$$

ddonde s(f) densidad de energía espectral, en m2(s)

g aceleración de la gravedad, en m/s2

F longitud del fetch

U_* velocidad de fricción del viento en la supereficie del mar, en m/s

Mitsuyasu recomienda la siguiente expresión como una aproximación a la ec. (6.5).

$$s(f) = \quad (6.6)$$

$$= 1.15(10^{-4}) \left(\frac{gF}{u_{10}^2}\right)^{-0.312} g^2 f^{-5} \exp\left[-9.96 \left(\frac{gF}{u_{10}^2}\right)^{-1.32} \left(\frac{u_{10}F}{g}\right)^{4}\right]$$

7. APLICACIONES

Con la finalidad de ilustrar la aplicación a casos prácticos del método desarrollado en este trabajo, se analiza desde el punto de vista del análisis espectral y estadístico el registro de mediciones de presión de la estación localizada en Tuxpa, Veracruz, correspondiente a la cinta número 28, bloque de las 15 hrs. del dia 5 de Junio de 1987. En la estación el sensor de presión se encuentra a 6.5 m. de prufundidad . E l intervalo de tiempo entre los valores medidos es de 0.5 seg.. En la tabla 7.1, aparece este registro.

7.1 Analisis espectral

El proceso que se siguio en este caso se presenta en los siguientes incisos.

7.1.1 Obtención del registro de elevaciones de superficie libre del mar

Es necesario transformar los datos que se obtuvieron del sensor en

Tabla 11. Registros de presiones de la estación Tuxpan, Ver. (cinta 28; bloque de las 15 hrs. del día 5 de junio de 1987).

7.040	7.020	7.000	6.980	6.980	6.990	7.030	7.070	7.080	7.050
7.010	6.960	6.930	6.940	6.970	7.000	7.030	7.050	7.060	7.060
7.050	7.040	7.020	7.000	6.990	6.980	6.980	6.980	6.990	7.000
7.020	7.040	7.050	7.060	7.040	7.010	6.980	6.970	6.980	7.000
7.030	7.040	7.050	7.050	7.040	7.020	7.020	7.010	7.010	7.010
7.010	7.010	7.010	7.010	7.010	7.020	7.030	7.050	7.050	7.050
7.040	7.020	7.010	7.000	6.990	6.980	6.990	7.000	7.030	7.050
7.070	7.080	7.080	7.060	7.030	6.990	6.970	6.960	6.970	7.010
7.040	7.060	7.060	7.050	7.030	7.000	6.990	7.000	7.020	7.030
7.040	7.030	7.010	7.010	7.010	7.020	7.020	7.030	7.030	7.040
7.030	7.020	6.990	6.970	6.980	7.000	7.040	7.070	7.090	7.070
7.040	6.990	6.950	6.940	6.950	6.990	7.050	7.100	7.120	7.110
7.060	7.010	6.960	6.940	6.960	7.000	7.050	7.080	7.090	7.070
7.030	6.990	6.960	6.960	6.980	7.000	7.010	7.000	6.980	6.960
6.980	7.010	7.030	7.050	7.050	7.050	7.030	7.010	6.980	6.940
6.920	6.930	6.960	7.020	7.060	7.090	7.100	7.090	7.050	7.010
6.970	6.940	6.920	6.910	6.940	6.980	7.040	7.080	7.100	7.090
7.060	7.010	6.970	6.960	6.970	7.000	7.040	7.070	7.070	7.050
7.020	6.990	6.970	6.970	6.990	7.010	7.030	7.050	7.070	7.080
7.080	7.060	7.020	6.980	6.940	6.930	6.940	6.980	7.020	7.060
7.070	7.070	7.050	7.020	7.000	6.990	7.010	7.040	7.070	7.090
7.080	7.050	7.000	6.950	6.930	6.930	6.970	7.020	7.070	7.100
7.090	7.070	7.050	7.020	6.990	6.980	6.980	6.990	7.000	7.020
7.040	7.050	7.050	7.040	7.020	7.010	7.000	7.010	7.010	7.020
7.010	7.000	7.000	7.000	7.020	7.050	7.070	7.070	7.060	7.040
7.010	7.000	6.990	6.990	6.980	6.980	7.010	7.040	7.080	7.100
7.090	7.060	7.030	7.000	7.000	7.020	7.030	7.030	7.010	6.990
6.980	7.000	7.020	7.030	7.030	7.020	7.020	7.020	7.020	7.010
7.010	7.020	7.030	7.050	7.050	7.030	6.990	6.960	6.950	6.970
7.020	7.060	7.080	7.080	7.070	7.040	7.020	7.020	7.020	7.020
7.010	7.010	7.000	6.990	7.000	7.030	7.060	7.080	7.080	7.050
7.000	6.960	6.950	6.960	6.990	7.020	7.040	7.040	7.040	7.020
7.010	6.990	6.990	6.990	7.000	7.010	7.020	7.030	7.040	7.040
7.030	7.010	6.990	6.980	6.970	6.970	7.000	7.040	7.090	7.110
7.100	7.050	7.000	6.950	6.930	6.930	6.950	6.980	7.040	7.080
7.110	7.100	7.050	7.000	6.950	6.940	6.970	7.020	7.060	7.070
7.070	7.040	7.020	7.000	7.000	7.000	7.000	7.000	7.010	7.020
7.040	7.060	7.080	7.090	7.070	7.040	7.010	6.990	6.980	6.990
7.010	7.020	7.030	7.040	7.060	7.070	7.080	7.080	7.060	7.040
7.020	7.000	6.990	7.000	7.020	7.040	7.070	7.070	7.050	7.030
7.020	7.020	7.040	7.060	7.060	7.030	7.010	6.980	6.970	6.980
6.990	7.000	7.020	7.040	7.050	7.040	7.020	7.010	7.000	7.000
7.017	6.990	6.970	6.960	6.980	7.010	7.040	7.060	7.060	7.050
7.030	7.010	7.000	7.000	7.010	7.020	7.020	7.030	7.030	7.030
7.020	7.020	7.030	7.050	7.080	7.080	7.060	7.020	6.980	6.970
6.990	7.010	7.030	7.040	7.040	7.040	7.030	7.030	7.020	7.020
7.020	7.020	7.020	7.020	7.030	7.030	7.030	7.010	7.000	6.980
6.970	6.980	7.010	7.040	7.070	7.080	7.060	7.020	6.990	6.960
6.950	6.960	6.970	7.000	7.030	7.060	7.070	7.080	7.070	7.040
7.000	6.960	6.950	6.970	7.020	7.060	7.080	7.060	7.020	7.000
6.990	7.000	7.020	7.030	7.050	7.060	7.070	7.070	7.060	7.030
7.010	6.990	6.990	7.010	7.030	7.040	7.050	7.050	7.050	7.050

7.040	7.030	7.030	7.020	7.020	7.020	7.020	7.020	7.020	7.030
7.040	7.050	7.050	7.040	7.020	7.000	6.990	6.990	6.990	7.000
7.010	7.040	7.060	7.060	7.050	7.030	7.010	7.010	7.020	7.030
7.030	7.030	7.020	7.000	6.980	6.980	7.000	7.030	7.060	7.080
7.070	7.040	7.000	6.960	6.940	6.950	6.990	7.030	7.050	7.060
7.040	7.010	6.970	6.950	6.960	7.010	7.070	7.110	7.120	7.090
7.050	7.000	6.960	6.950	6.960	6.990	7.020	7.050	7.080	7.100
7.110	7.090	7.050	7.010	6.970	6.950	6.960	6.990	7.030	7.060
7.070	7.060	7.040	7.010	6.980	6.970	6.980	7.000	7.030	7.050
7.060	7.060	7.050	7.030	7.000	6.970	6.960	6.980	7.030	7.070
7.090	7.080	7.050	7.010	6.990	6.990	7.010	7.040	7.060	7.070
7.060	7.030	7.000	7.000	7.020	7.050	7.070	7.070	7.050	7.020
7.000	7.000	7.010	7.020	7.040	7.060	7.070	7.070	7.070	7.060
7.040	7.020	7.000	6.980	6.980	6.980	7.000	7.020	7.050	7.080
7.100	7.110	7.080	7.030	6.970	6.920	6.920	6.960	7.020	7.080
7.120	7.120	7.080	7.020	6.970	6.940	6.950	6.980	7.020	7.050
7.060	7.050	7.040	7.050	7.070	7.090	7.080	7.050	7.000	6.950
6.940	6.950	7.000	7.050	7.100	7.110	7.090	7.050	7.000	6.960
6.940	6.950	6.990	7.030	7.070	7.090	7.100	7.080	7.050	7.010
6.970	6.940	6.940	6.960	7.010	7.060	7.110	7.120	7.110	7.060
7.010	6.970	6.970	6.990	7.020	7.040	7.040	7.030	7.020	7.010
7.010	7.020	7.030	7.050	7.060	7.050	7.040	7.010	6.990	6.990
7.000	7.020	7.030	7.040	7.050	7.060	7.060	7.060	7.040	7.020
7.000	6.990	6.980	6.990	7.010	7.040	7.070	7.080	7.070	7.040
7.010	6.990	6.990	7.000	7.030	7.050	7.050	7.050	7.030	7.010
7.010	7.020	7.040	7.060	7.070	7.060	7.040	7.010	6.990	6.990
7.010	7.030	7.050	7.040	7.030	7.010	6.990	6.980	7.000	7.030
7.060	7.090	7.100	7.080	7.050	7.000	6.950	6.920	6.930	6.970
7.030	7.090	7.130	7.130	7.100	7.040	6.980	6.940	6.930	6.950
7.000	7.050	7.090	7.100	7.090	7.050	7.020	7.000	6.990	7.000
7.020	7.040	7.050	7.050	7.040	7.030	7.020	7.020	7.020	7.030
7.040	7.050	7.060	7.050	7.040	7.020	7.010	7.020	7.030	7.040
7.050	7.030	7.000	6.970	6.970	7.000	7.040	7.080	7.100	7.090
7.050	7.000	6.960	6.950	6.970	6.990	6.970	7.020	7.020	7.040
7.060	7.080	7.090	7.080	7.050	6.990	6.930	6.900	6.910	6.950
7.020	7.080	7.120	7.140	7.130	7.100	7.040	6.980	6.920	6.910
6.940	7.000	7.060	7.100	7.100	7.080	7.050	7.020	7.000	7.000
7.000	7.010	7.040	7.060	7.070	7.070	7.050	7.020	6.980	6.960
6.960	6.970	7.000	7.030	7.060	7.090	7.110	7.100	7.060	7.010
6.970	6.950	6.950	6.970	7.000	7.030	7.060	7.070	7.080	7.070
7.050	7.030	7.010	7.010	7.010	7.020	7.030	7.040	7.040	7.030
7.010	7.000	7.010	7.040	7.060	7.060	7.040	7.010	6.990	6.980
6.990	7.020	7.040	7.050	7.050	7.040	7.040	7.050	7.060	7.070
7.050	7.010	6.980	6.960	6.970	6.990	7.010	7.040	7.070	7.100
7.110	7.100	7.060	7.000	6.950	6.930	6.950	7.000	7.060	7.090
7.090	7.070	7.040	7.020	7.010	7.010	7.010	7.010	7.020	7.030
7.050	7.060	7.060	7.050	7.040	7.040	7.030	7.020	7.010	7.000
6.990	6.990	7.000	7.020	7.050	7.080	7.090	7.080	7.060	7.010
6.960	6.930	6.930	6.980	7.040	7.100	7.120	7.100	7.040	6.980
6.930	6.930	6.960	7.020	7.070	7.090	7.080	7.040	7.000	6.980
6.980	6.990	7.000	7.020						

el punto en estudio a elevaciones de superficie libre del mar, para obtener su perfil, puesto que éste solo registra presiones. Esto se realizó de acuerdo con la teoria lineal del oleaje, para el registro de presiones con que se cuenta.

La expresión que relaciona a la presión y la elevación de la superficie libre es

$$\frac{p}{\gamma} + z = K\,\eta \qquad (7.1)$$

donde

- p presión a la profundidad z
- γ peso especifico del agua
- η elevación de la superficie libre
- k factor de respuesta de presión

Las dos últimas variables estan dadas como

$$\eta = a \cos (kx - \sigma t) \qquad (7.2)$$

$$K = \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \qquad (7.3)$$

donde

- a amplitud del oleaje
- k número de onda (igual al reciproco de la longitud L

multiplicada por dos veces π ; $k=2\pi/L$)

σ frecuencia angular (igual al reciproco del periodo T multiplicado por dos veces π ; $\sigma=2\pi/T$)

d profundidad del fondo

x distacia a lo largo de la ola

t tiempo

Para calcular η en una posición fija en el espacio, conviene hacer en al ec.(7.2), x = 0. Sin embargo, en este caso se consideró que podría obtenerse a partir de la ec.(7.1) como

$$\eta(t) = \left[\frac{p(t)}{\gamma} + z \right] \frac{1}{K} \qquad (7.4)$$

Para el caso del sensor de presión, se propuso que d = 6.5 m y por medio del método "cruce-cero" (inciso 5.4.1), se estimaron del registro de presiones, los periodos. Del conjunto de valores de periodos se obtuvo su media aritmética, la cual resultó ser T = 5.30 seg..

Se encontró para un periodo T = 5.30 seg. y profundidad d = 6.5 m, la longitud de la ola de acuerdo a la ec.(5.1) resultando L = 35.70 m. Para z = -d = -6.5 m se obtuvo con la ec.(7.3) que $k' = 0.5785$. Aceptando que para el agua de mar = 1.025 ton/m³ y tomando en cuenta que la presión esta dada en columna de agua, la ec.(7.4) quedó en este caso como

$$\eta(t) = (p'(t) - 6.5) \, 1.7285 \qquad (7.5)$$

siendo $p'(t) = p(t)/\gamma$, la presión que aparece en el registro del sensor

Con la ec.(7.5), se obtuvo el registro de elevaciones de superficie libre del mar.

7.1.2 Cálculo de la función de desidad espectral s(f)

Para obtener la función de densidad espectral primero se propone estimar el valor de varios parámetros (inciso 4.5).

Aunque en este caso se especificó el intervalo de tiempo Δt entre los valores descritos como 0.5 seg. y el tiempo de registro T, como 512 seg. = 8.533 min., se considera adecuado el tamaño de Δt porque la frecuencia máxima es (ver ec.(4.449))

$$f_m = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{1}{2(0.5)} = 1.0 \text{ hz}$$

y de este modo se abarca a las ondas generadas por el viento llamadas de gravedad en la región donde tiene mayor amplitud, como se aprecia en la clasificación de las ondas oceánicas de Munk, 1951 [19].

En cuanto al tiempo de registro, si se escoge el valor de 4 para el parámetro q, se tiene que el error estándar normal es (ver ec.(4.52))

$$\varepsilon = \frac{1}{q^2} = \frac{1}{4^2} = 0.0625$$

La magnitud de este error se estima adecuada (inciso 4.6).

El tiempo T_e resulta ser (ver ec.(4.34))

$$T_e = \frac{T}{q} = \frac{512}{4} = 128 \text{ seg} = 2.13 \text{ min}$$

El ancho de frecuencia (ver ec.(4.36))

$$B_e = \frac{1}{T_e} = \frac{1}{128} = 0.00781 \text{ hz}$$

El número de grados de libertad es (ver ec. (4.47))

$$n = 2q = 2(4) = 8$$

Las variables χ^2 (ji cuadrada) para $\alpha = 5\%$ y $n = 8$, de la tabla (2.1) resultaron ser (inciso 2.2.3)

$$\chi^2_{16;0.05} = 15.51$$

$$\chi^2_{16;0.95} = 2.73$$

El intervalo de confianza del 95% para la función de densidad espectral es (inciso 2.4)

$$\frac{8\ s(f)}{\chi^2_{8;0.05}} \leq s(f) \leq \frac{8\ s(f)}{\chi^2_{8;0.95}}$$

$$0.5158\ s(f) \leq s(f) \leq 2.93\ s(f)$$

De acuerdo a lo visto en los incisos 4.5 y 4.6 se estima la función de densidad espectral con los dos promedios a saber

a) Promedio de varias funciones de densidad espectral

Se forman 4 conjuntos con los valores de f(t). Cada conjunto tiene un grupo de N valores (ver ec.(4.53)), donde

$$N = \frac{T_e}{\Delta t} = \frac{128}{0.5} = 256$$

y las frecuencias tienen un ancho de

$$\Delta f = \frac{1}{T_e} = B_e = 0.00781 \text{ hz}$$

Utilizando la transformada rápida de Fourier (inciso 3.4), se obtuvieron 4 funciones de densidad espectral muestral $\hat{S}_i(f)$. En la tabla 7.2 se consigna la primera de ellas y en la 7.3 se anota la promedio de las 4 calculadas. Los valores de esta última tabla corresponden a la función de densidad espectral buscada, ella se muestra en la fig.7.2.

La función ventana fue la de la fig. 4.9

De cada una de las funciones de densidad espectral se obtuvo, (espectro de dos lados).

	m_o 10^{-8} m^2	m_1 10^{-4} m^2/s	m_2 10^{-5} m^2/s^2	m_4 10^{-6} m^2/s^4
$s_1(f)$	2.0438	3.6828	7.2105	4.9999
$s_2(f)$	1.4612	2.6924	5.6430	5.0374
$s_3(f)$	2.2242	4.2171	8.4845	5.0238
$s_4(f)$	2.6350	4.8671	9.6185	6.6608

De la función de densidad espectral se obtuvo los momentos respectivos (ver ec.(4.57)), (espectro de dos lados).

$$m_o = 2.0911\ (10^{-8})\ m^2$$

$$m_1 = 3.8648\ (10^{-4})\ m^2/seg$$

$$m_2 = 7.7391\ (10^{-5})\ m^2/seg^2$$

$$m_4 = 5.4305\ (10^{-6})\ m^2/seg^4$$

El parámetro ancho de banda fue

$$\varepsilon = 0.6874$$

El periodo promedio es

$$\bar{T} = \sqrt{\frac{m_o}{m_2}} = 5.20\ seg$$

Tabla 7.2 Función de densidad espectral (espectro no 1)

k	f	S(k)
0	0.0000	0.0000
1	0.0078	0.0004
2	0.0156	0.0013
3	0.0234	0.0001
4	0.0313	0.0006
5	0.0391	0.0002
6	0.0469	0.0002
7	0.0547	0.0000
8	0.0625	0.0002
9	0.0703	0.0003
10	0.0781	0.0006
11	0.0859	0.0001
12	0.0938	0.0002
13	0.1016	0.0002
14	0.1094	0.0005
15	0.1172	0.0039
16	0.1250	0.0030
17	0.1328	0.0042
18	0.1406	0.0032
19	0.1484	0.0055
20	0.1563	0.0092
21	0.1641	0.0154
22	0.1719	0.0063
23	0.1797	0.0083
24	0.1875	0.0155
25	0.1953	0.0113
26	0.2031	0.0146
27	0.2109	0.0050
28	0.2188	0.0108
29	0.2266	0.0003
30	0.2344	0.0038
31	0.2422	0.0008
32	0.2500	0.0024
33	0.2578	0.0000
34	0.2656	0.0002
35	0.2734	0.0001
36	0.2813	0.0001
37	0.2891	0.0004
38	0.2969	0.0002
39	0.3047	0.0001
40	0.3125	0.0001
41	0.3203	0.0000
42	0.3281	0.0002
43	0.3359	0.0001
44	0.3438	0.0001
45	0.3516	0.0000
46	0.3594	0.0000
47	0.3672	0.0000
48	0.3750	0.0000
49	0.3828	0.0000
50	0.3906	0.0000

Tabla 7.3 Función de densidad espectral (promedio de varias funciones

k	f	s(f)
1	0.00000	0.00032
2	0.00781	0.00075
3	0.01563	0.00031
4	0.02344	0.00053
5	0.03125	0.00067
6	0.03906	0.00018
7	0.04688	0.00011
8	0.05469	0.00027
9	0.06250	0.00012
10	0.07031	0.00017
11	0.07813	0.00007
12	0.08594	0.00013
13	0.09375	0.00023
14	0.10156	0.00053
15	0.10938	0.00167
16	0.11719	0.00128
17	0.12500	0.00475
18	0.13281	0.00594
19	0.14063	0.00278
20	0.14844	0.00534
21	0.15625	0.01475
22	0.16406	0.01279
23	0.17188	0.01699
24	0.17969	0.01234
25	0.18750	0.01049
26	0.19531	0.01204
27	0.20313	0.00235
28	0.21094	0.00639
29	0.21875	0.00464
30	0.22656	0.00446
31	0.23438	0.00175
32	0.24219	0.00321
33	0.25000	0.00072
34	0.25781	0.00101
35	0.26563	0.00071
36	0.27344	0.00067
37	0.28125	0.00021
38	0.28906	0.00038
39	0.29688	0.00027
40	0.30469	0.00012
41	0.31250	0.00020
42	0.32031	0.00016
43	0.32813	0.00017
44	0.33594	0.00009
45	0.34375	0.00006
46	0.35156	0.00004
47	0.35938	0.00003
48	0.36719	0.00005
49	0.37500	0.00003
50	0.38281	0.00002

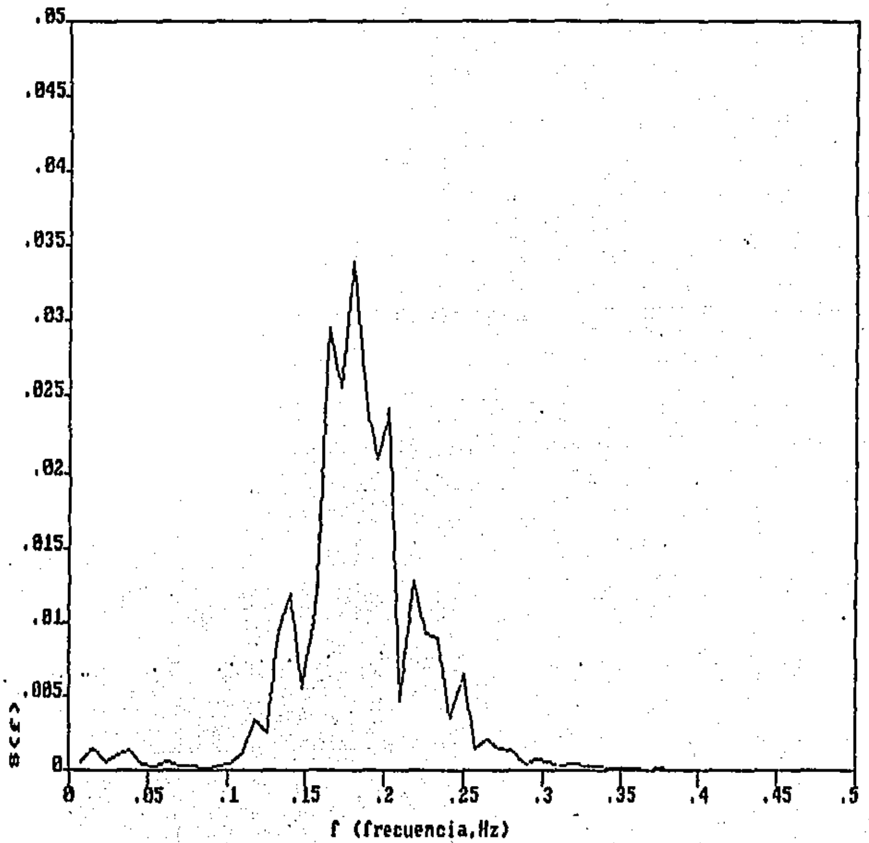


Fig. 7.2 Función de densidad espectral (promedio de varias funciones)

Este valor es muy parecido al obtenido con el registro de presiones (5.30 seg.).

b) Promedio de ordenadas en una función de densidad espectral

En este caso se consideró que el número de valores por transformar fue

$$N = 1024$$

de donde resultó que el ancho de frecuencia es

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{512} = 0.00195 \text{ hz}$$

$$B_e = \frac{q}{T} = q\ \Delta f = 0.00781 \text{ hz}$$

También se utilizó la ventana h(t) mostrada en la fig. 4.9 y se encontró que, según la ec.(4.11), la función de densidad espectral corresponde al conjunto de valores apuntados en la tabla 7.3 y dibujados en la fig. 7.4.

Los momentos de las función de densidad espectral resultaron ser (espectro de dos lados)

$$m_o = 2.3200\ (10^{-3})\ m^2$$

$$m_1 = 4.2618\ (10^{-4})\ m^2/seg$$

$$m_2 = 8.5582\ (10^{-5})\ m^2/seg^2$$

$$m_4 = 6.0660\ (10^{-6})\ m^2/seg^4$$

El parámetro ancho de banda es

$$\varepsilon = 0.6925$$

El periodo promedio es

$$\bar{T} = \sqrt{\frac{m_o}{m_2}} = 5.21 \text{ seg}$$

Este valor es parecido al obtenido con el registro de presiones (5.30 seg.).

7.2 Analisis estadistico

La secuencia que se siguio en este caso, es presenta en los incisos siguientes.

7.2.1 Ajuste de las alturas de ola a una distribución Rayleigh

Por medio del método "cruce-cero" se obtuvieron 96 alturas de ola y periodos los cuales aperecen en la tabla 7.4.

Para ajustar el parámetro α de la distribución Rayleigh (inciso 5.4.2).

$$p = 1 - e^{-H^2/2\alpha^2} \tag{7.6}$$

se siguieron dos procedimientos

Tabla 7.3' Función de densidad espectral (promedio de varias frecuencias)

k	f	S(f)
1	0.004883	0.001079
2	0.012695	0.000827
3	0.020508	0.000375
4	0.028320	0.000962
5	0.036133	0.000228
6	0.043945	0.000630
7	0.051758	0.000219
8	0.059570	0.000190
9	0.067383	0.000241
10	0.075195	0.000193
11	0.083008	0.000020
12	0.090820	0.000104
13	0.098633	0.000116
14	0.106445	0.001013
15	0.114258	0.001283
16	0.122070	0.001293
17	0.129883	0.003668
18	0.137695	0.009776
19	0.145508	0.002075
20	0.153320	0.003921
21	0.161133	0.007928
22	0.168945	0.019320
23	0.176758	0.018091
24	0.184570	0.008349
25	0.192383	0.019707
26	0.200195	0.007118
27	0.208008	0.011039
28	0.215820	0.007184
29	0.223633	0.002472
30	0.231445	0.005286
31	0.239258	0.002439
32	0.247070	0.004300
33	0.254883	0.001632
34	0.262695	0.000762
35	0.270508	0.000796
36	0.278320	0.000687
37	0.286133	0.000595
38	0.293945	0.000365
39	0.301758	0.000469
40	0.309570	0.000057
41	0.317383	0.000147
42	0.325195	0.000352
43	0.333008	0.000163
44	0.340820	0.000195
45	0.348633	0.000063
46	0.356445	0.000050
47	0.364258	0.000027
48	0.372070	0.000047
49	0.379883	0.000032
50	0.387695	0.000020

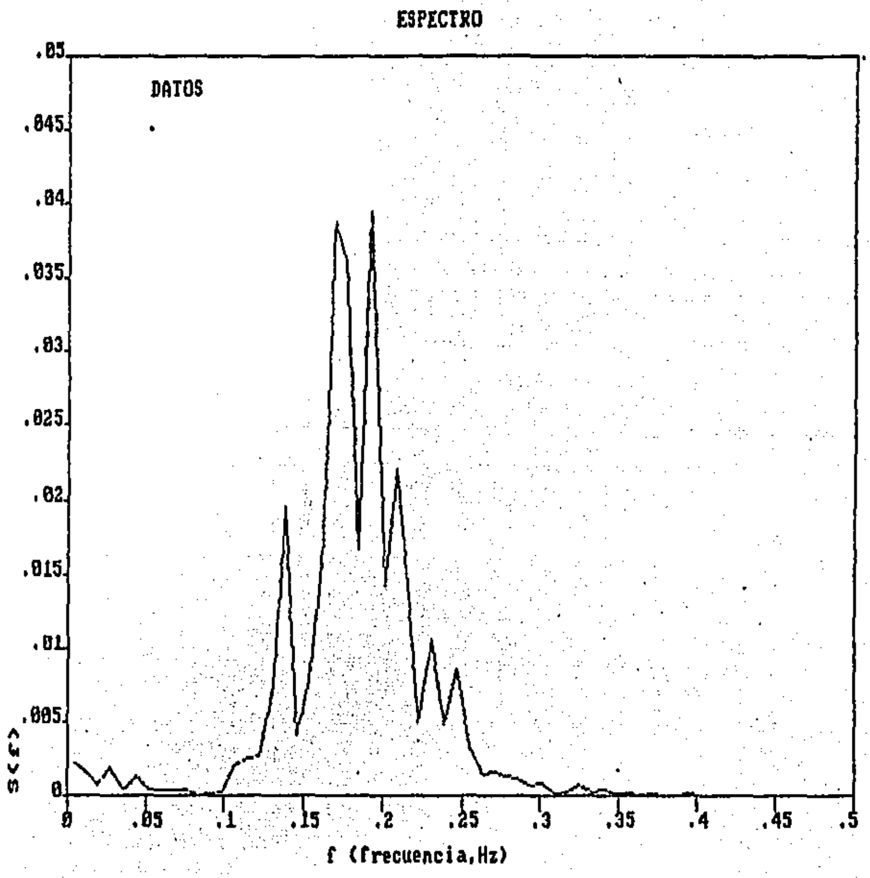


Fig. 7.4 Función de densidad espectral (promedio de varias frecuencias)

a) Ajuste por minimos cuadrados

De la ec.(7.6), se tiene que para cada altura de ola , la probabilidad de no exceder H es.

$$p = 1 - e^{-H^2/2\alpha^2}$$

$$\frac{1}{1-p} = e^{H^2/2\alpha^2}$$

En función del periodo de retorno es igual a

$$T = e^{H^2/2\alpha^2}$$

$$\ln T = \frac{1}{2\alpha^2} H^2$$

cambiando de variable

$$z = \beta H^2 \qquad (7.7)$$

por lo que la suma de los errores es

$$s = \Sigma \ (\beta H_i^2 - z_i)^2$$

$$\frac{\partial s}{\partial \beta} = 2 \ \Sigma \ (\beta H_i^2 - z_i) \ H_i^2 = 0$$

$$\beta = \frac{\Sigma \ z_i H_i^2}{\Sigma \ H_i^4}$$

El coeficiente de correlación lineal resulta

$$r = \sqrt{\frac{\Sigma(z_{est} - \bar{z})^2}{\Sigma(z_i - \bar{z})^2}}$$

Tabla 7.4 Cálculo de las características de las olas con el método cruce-cero

a) Alturas de ola

0.1728	0.1729	0.1210	0.1210	0.1556
0.3284	0.3083	0.2593	0.1383	0.1556
0.0691	0.1210	0.2074	0.1210	0.0519
0.1210	0.2593	0.3111	0.2247	0.2074
0.3111	0.0928	0.0864	0.1383	0.2420
0.3284	0.3976	0.1383	0.2247	0.1729
0.2593	0.1383	0.2766	0.1901	0.0864
0.1901	0.2766	0.1210	0.0694	0.1383
0.1901	0.3111	0.1556	0.1164	0.0784
0.0346	0.1729	0.1556	0.2547	0.1383
0.1210	0.2766	0.3284	0.1901	0.0864
0.2074	0.2766	0.2938	0.1210	0.1901
0.1556	0.2593	0.1510	0.2593	0.2593
0.0519	0.1210	0.1383	0.0864	0.1556
0.1555	0.1037	0.0173	0.1901	0.0346
0.1556	0.0691	0.1383	0.1637	0.3610
0.1729	0.2938	0.1037	0.2247	0.2247
0.1556	0.1383	0.0519	0.1037	0.0873
0.0864	0.2420	0.1901	0.2938	0.2766
0.1729				

b) Periodos de ola

5.00	7.50	4.50	8.00	6.00
6.00	4.50	4.00	4.50	5.00
5.00	8.00	6.00	6.00	5.00
5.00	6.50	4.00	5.50	6.00
7.50	6.00	4.50	3.50	4.50
4.50	7.00	5.50	5.50	5.00
5.50	5.00	6.00	6.00	6.50
3.50	5.50	6.50	5.50	2.50
5.00	6.00	4.50	5.50	5.50
4.00	5.50	7.50	6.50	4.00
4.00	5.00	4.50	5.50	5.50
5.00	5.00	4.50	4.00	4.50
7.50	5.50	5.00	7.00	5.00
6.00	5.00	3.50	5.00	6.50
4.50	4.00	4.50	4.00	5.50
5.50	5.00	4.00	4.50	4.00
6.50	6.00	5.50	5.00	5.50
6.00	5.50	3.50	4.50	7.50
5.50	5.50	7.50	5.00	5.00
5.00				

En la tabla 7.5 se anotan los valores y sumas de interés utilizados para estimar el valor del coeficiente de correlación r, para el caso del registro en estudio

Los periodos de retorno se calculan despúes de ordenar de mayor a menor las alturas de olas y por medio de la ec.(7.8),se encontró que

$$\beta = 27.7927$$

por lo que

$$2\alpha^2 = 0.1897$$

y al utilizar la ec.(7.9), el coeficiente de correlación fue de

$$r = 0.9338$$

b) Ajuste por momentos

Mediante el ajuste por momentos, se sabe que [4]

$$2\alpha^2 = H_{rms}$$

De acuerdo a los valores de altura de ola que se obtuvieron del registro

$$H_{rms} = 0.1960$$

Tabla 7.8 Cálculo por mínimos cuadrados del parámetro β

i	Tr_i	H_i	Z_i	$H_i^2 Z_i \times 10^2$	$H_i^4 \times 10^4$
1	97.0000	0.3976	4.5747	72.3284	249.9713
2	48.5000	0.3610	3.8816	50.5896	169.8672
3	32.3333	0.3284	3.4761	37.4867	116.2975
4	32.3333	0.3284	3.4761	37.4867	116.2975
5	32.3333	0.3284	3.4761	37.4867	116.2975
6	16.1667	0.3111	2.7830	26.9316	93.6507
7	16.1667	0.3111	2.7830	26.9316	93.6507
8	16.1667	0.3111	2.7830	26.9316	93.6507
9	10.7778	0.3083	2.3775	22.6017	90.3746
10	9.7000	0.2938	2.2721	19.6094	74.4845
11	9.7000	0.2938	2.2721	19.6094	74.4845
12	9.7000	0.2938	2.2721	19.6094	74.4845
13	7.4615	0.2766	2.0098	15.3785	58.5521
14	7.4615	0.2766	2.0098	15.3785	58.5521
15	7.4615	0.2766	2.0098	15.3785	58.5521
16	7.4615	0.2766	2.0098	15.3785	58.5521
17	7.4615	0.2766	2.0098	15.3785	58.5521
18	5.3889	0.2593	1.6843	11.3261	45.2167
19	5.3889	0.2593	1.6843	11.3261	45.2167
20	5.3889	0.2593	1.6843	11.3261	45.2167
21	5.3889	0.2593	1.6843	11.3261	45.2167
22	5.3889	0.2593	1.6843	11.3261	45.2167
23	5.3889	0.2593	1.6843	11.3261	45.2167
24	5.3889	0.2547	1.6843	10.9282	42.0959
25	3.8800	0.2420	1.3558	7.9407	34.3004
26	3.8800	0.2420	1.3558	7.9407	34.3004
27	3.5926	0.2247	1.2789	6.4569	25.4913
28	3.5926	0.2247	1.2789	6.4569	25.4913
29	3.5926	0.2247	1.2789	6.4569	25.4913
30	3.5926	0.2247	1.2789	6.4569	25.4913
31	3.1290	0.2074	1.1407	4.9062	18.4989
32	3.1290	0.2074	1.1407	4.9062	18.4989
33	3.1290	0.2074	1.1407	4.9062	18.4989
34	2.8529	0.1901	1.0483	3.7877	13.0544
35	2.8529	0.1901	1.0483	3.7877	13.0544
36	2.8529	0.1901	1.0483	3.7877	13.0544
37	2.8529	0.1901	1.0483	3.7877	13.0544
38	2.8529	0.1901	1.0483	3.7877	13.0544
39	2.8529	0.1901	1.0483	3.7877	13.0544
40	2.8529	0.1901	1.0483	3.7877	13.0544
41	2.3659	0.1729	0.8612	2.5752	8.9423
42	2.3659	0.1729	0.8612	2.5752	8.9423
43	2.3659	0.1729	0.8612	2.5752	8.9423
44	2.3659	0.1729	0.8612	2.5752	8.9423
45	2.3659	0.1729	0.8612	2.5752	8.9423
46	2.1087	0.1728	0.7461	2.2271	8.9106
47	2.0638	0.1637	0.7245	1.9425	7.1876
48	2.0208	0.1556	0.7035	1.7037	5.8647
49	2.0208	0.1556	0.7035	1.7037	5.8647
50	2.0208	0.1556	0.7035	1.7037	5.8647
51	2.0208	0.1556	0.7035	1.7037	5.8647
52	2.0208	0.1556	0.7035	1.7037	5.8647

53	2.0208	0.1556	0.7035	1.7037	5.8647
54	2.0208	0.1556	0.7035	1.7037	5.8647
55	2.0208	0.1556	0.7035	1.7037	5.8647
56	1.7321	0.1555	0.5493	1.3277	5.8416
57	1.7018	0.1510	0.5317	1.2127	5.2021
58	1.6724	0.1383	0.5143	0.9838	3.6595
59	1.6724	0.1383	0.5143	0.9838	3.6595
60	1.6724	0.1383	0.5143	0.9838	3.6595
61	1.6724	0.1383	0.5143	0.9838	3.6595
62	1.6724	0.1383	0.5143	0.9838	3.6595
63	1.6724	0.1383	0.5143	0.9838	3.6595
64	1.6724	0.1383	0.5143	0.9838	3.6595
65	1.6724	0.1383	0.5143	0.9838	3.6595
66	1.6724	0.1383	0.5143	0.9838	3.6595
67	1.4478	0.1210	0.3700	0.5418	2.1438
68	1.4478	0.1210	0.3700	0.5418	2.1438
69	1.4478	0.1210	0.3700	0.5418	2.1438
70	1.4478	0.1210	0.3700	0.5418	2.1438
71	1.4478	0.1210	0.3700	0.5418	2.1438
72	1.4478	0.1210	0.3700	0.5418	2.1438
73	1.4478	0.1210	0.3700	0.5418	2.1438
74	1.4478	0.1210	0.3700	0.5418	2.1438
75	1.4478	0.1210	0.3700	0.5418	2.1438
76	1.2763	0.1164	0.2440	0.3306	1.8362
77	1.2597	0.1037	0.2309	0.2482	1.1562
78	1.2597	0.1037	0.2309	0.2482	1.1562
79	2.2597	0.1037	0.8152	0.8766	1.1562
80	1.2125	0.0928	0.1927	0.1660	0.7423
81	1.1975	0.0873	0.1802	0.1374	0.5810
82	1.1829	0.0864	0.1680	0.1253	0.5569
83	1.1829	0.0864	0.1680	0.1253	0.5569
84	1.1829	0.0864	0.1680	0.1253	0.5569
85	1.1829	0.0864	0.1680	0.1253	0.5569
86	1.1829	0.0864	0.1680	0.1253	0.5569
87	1.1149	0.0784	0.1088	0.0669	0.3782
88	1.1023	0.0694	0.0974	0.0469	0.2318
89	1.0899	0.0691	0.0861	0.0411	0.2277
90	1.0899	0.0691	0.0861	0.0411	0.2277
91	1.0659	0.0519	0.0638	0.0172	0.0727
92	1.0659	0.0519	0.0638	0.0172	0.0727
93	1.0659	0.0519	0.0638	0.0172	0.0727
94	1.0319	0.0346	0.0314	0.0038	0.0144
95	1.0319	0.0346	0.0314	0.0038	0.0144
96	1.0104	0.0173	0.0103	0.0003	0.0009
Suma				686.1565	2468.8370

Beta=6.861564 / .2468837 = 27.7927

2*(alfa)^2=.1896857

Coeficiente de correlacion r=.9338413

el cual es muy parecido a 0.1897. Por ello, se estima que las alturas de ola si se distribuyen según una función del tipo Rayleigh.

En la fig. 7.5, se muestra la distribución ajustada respecto a los datos.

Una vez conocido que los datos se ajustan a una función de distribución Rayleigh, se puede utilizar las expresiones derivadas de la misma para obtener los valores de las alturas de ola.

7.2.2 Valores estadísticos de las alturas de olas

I. Obtención de los valores estadísticos de las alturas de olas a partir de la función de distribución Rayleigh.

$$H_{rms} = \alpha \sqrt{2} = 0.1960$$

$$m_o = \frac{H_{rms}^2}{8} = 0.004802$$

y con esto los siguientes valores

a) Altura de ola media ($\bar{H}$)

$$\bar{H} = \sqrt{2\pi\ m_o} = \sqrt{2\pi\ (0.00480)} = 0.1737\ \text{m}$$

b) Altura significante ($\bar{H}_{1/3}$)

$$\bar{H}_{1/3} = 1.597\ \bar{H} = 1.597\ (0.1737) = 0.2774\ \text{m}$$

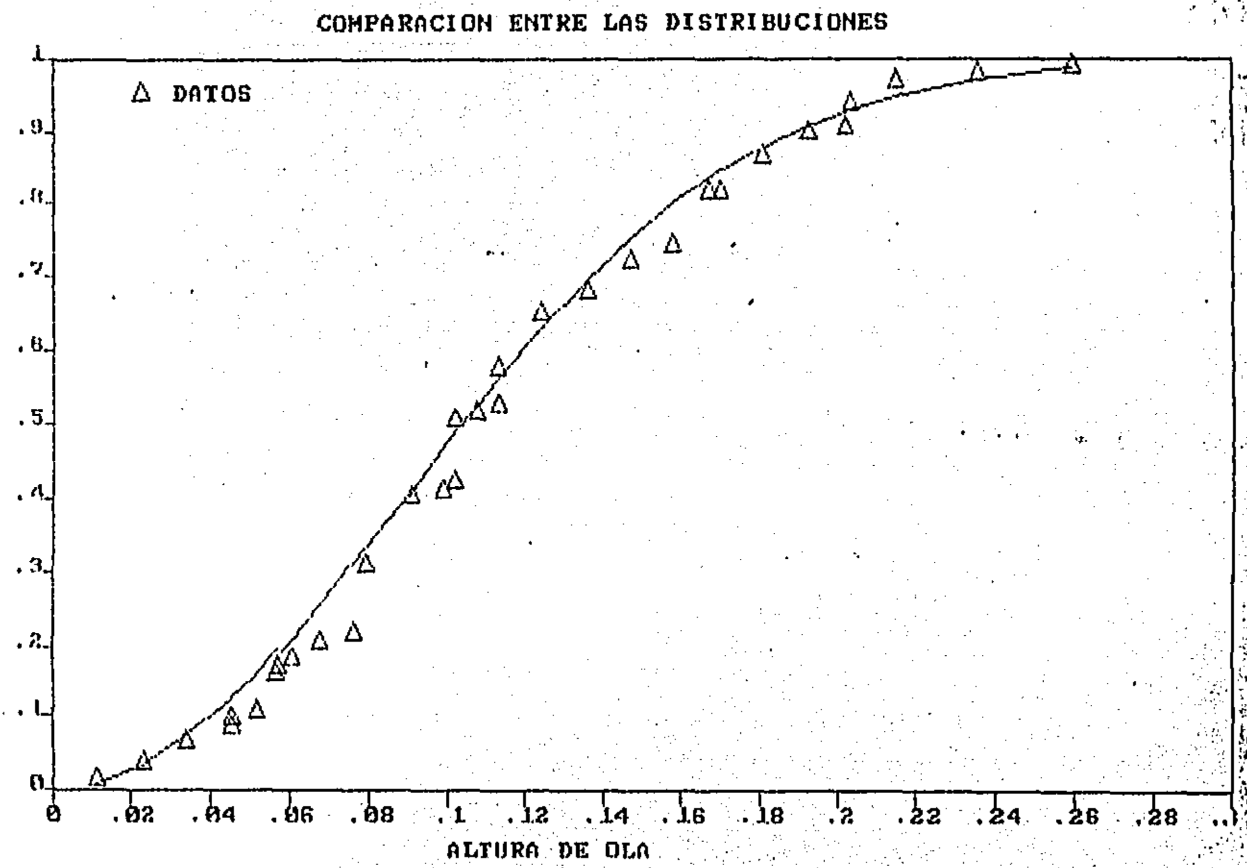


Fig. 7.5 Distribución de las alturas de ola

c) Altura un tercio ($H_{1/3}$)

$$H_{1/3} = H_{rms} \sqrt{\ln n} = 0.196 \sqrt{\ln 3} = 0.2054 \text{ m}$$

d) Altura ($\overline{H}_{1/10}$)

$$\overline{H}_{1/10} = 2.03 \, \overline{H} = 2.03 \, (0.1737) = 0.3526 \text{ m}$$

e) Altura un décimo ($H_{1/10}$)

$$H_{1/10} = H_{rms} \sqrt{\ln n} = 0.1960 \sqrt{\ln 10} = 0.1596 \text{ m}$$

f) Altura ($\overline{H}_{1/50}$)

$$\overline{H}_{1/50} = 2.2083 \, H_{rms} = 2.2083 \, (0.1960) = 0.4330 \text{ m}$$

g) Altura ($H_{1/50}$)

$$H_{1/50} = H_{rms} \sqrt{\ln n} = 0.1960 \sqrt{\ln 50} = 0.3878 \text{ m}$$

h) Altura máxima esperada en 10 cruces hacia arriba (n_o = 10)

$$\zeta = (2 \ln N_o)^{1/2} + \frac{0.5772}{(2 \ln N_o)^{1/2}}$$

$$\zeta = (2 \ln 10)^{1/2} + \frac{0.5772}{(2 \ln 10)^{1/2}} = 2.4146$$

$$\bar{\eta}_{max} = \zeta \sqrt{m_o} = 2.4146\ (0.00480)^{1/2} = 0.1674\ m$$

$$\bar{H}_{max}\ 2\ \bar{\eta}_{max} = 2\ (0.1674) = 0.3348\ m$$

i) Altura máxima esperada en 15 cruces hacia arriba (n_o = 15)

$$\zeta = (2\ \ln 15)^{1/2} + \frac{0.5772}{(2\ \ln 15)^{1/2}} = 2.5753$$

$$\bar{\eta}_{max} = \zeta \sqrt{m_o} = 2.5353\ (0.00480)^{1/2} = 0.1784\ m$$

$$\bar{H}_{max} = 2\ \bar{\eta}_{max} = 2\ (0.1784) = 0.3569\ m$$

II. Obtención de los valores estadísticos de las alturaas de olas a partir del conjunto de 96 alturas de ola.

a) Altura de ola media ($\bar{H}$)

$$\bar{H} = \frac{\Sigma\ H}{N} = \frac{17.057}{96} = 0.1777\ m$$

b) Altura significante ($\bar{H}_{1/3}$)

El tercio de las alturas de ola con mayor altura de un grupo de 96 es 32

$$\bar{H}_{1/3} = \frac{1}{32} \Big[0.3976 + 0.3670 + 0.3284\ (3) + 0.3111\ (3) + 0.3083 + 0.2938\ (3) + 0.2766\ (5) + 0.2593\ (6) + 0.2547 + 0.4840\ (2) + 0.2244\ (4) + 0.2074\ (2) \Big] = 0.2771\ m$$

c) Altura un tercio ($H_{1/3}$)

Del conjunto de alturas de ola se encuentra que la altura tal que 32 olas son más altas o iguales a ella es

$$H_{1/3} = 0.2074 \text{ m}$$

d) Altura ($\overline{H}_{1/10}$)

El 10% de las olas con mayor altura del grupo de 96 es 10

$$\overline{H}_{1/10} = \frac{1}{10}\left[0.3976 + 0.3610 + 0.3284\ (3) + 0.3111\ (3) + 0.3083 + 0.2938 \right] = 0.3279 \text{ m}$$

e) Altura un décimo ($H_{1/10}$)

Del conjuntos de 96 alturas de olas, se encuentra la altura tal que 10 olas son mayores o iguales a ella

$$H_{1/10} = 0.2938 \text{ m}$$

f) Altura ($\overline{H}_{1/50}$)

La 1/50 parte de las olas con mayor altura de un grupo de 96 olas es

$$\overline{H}_{1/50} = \frac{1}{2}\left[0.3976 + 0.3610 \right] = 0.3792 \text{ m}$$

g) Altura ($H_{1/50}$)

Del conjunto de 96 alturas de olas, se encuentra la altura tal que 2 olas son más altas o iguales que ella es

$$H_{1/50} = 0.3671 \text{ m}$$

h) Altura máxima esperada en 10 cruces hacia arriba (N_o = 10)

De cada conjunto de 10 cruces hacia arriba, se escogió la elevación máxima, obteniéndose los valores

(0.0991, 0.1683, 0.1337, 0.1510, 0.0991, 0.1683, 0.1683, 0.1857 y 0.2028)

siendo su promedio

$$\overline{\eta}_{max} = 0.1529$$

$$\overline{H}_{max} = 2\ \overline{\eta}_{max} = 2\ (0.1529) = 0.3057 \text{ m}$$

i) Altura máxima esperada en 15 cruces hacia arriba (N_o = 15)

De cada conjunto de 15 cruces hacia arriba, se escogio la elevación máxima, obteniéndose

(0.1683, 0.1337, 0.1510, 0.1683, 0.1683, 0.2028)

siendo su promedio

$$\overline{\eta}_{max} = 0.1674$$

$$\overline{H}_{max} = 2\ \overline{\eta}_{max}\ 2\ (0.1654) = 0.3308 \text{ m}$$

7.2.3 Ajuste de los periodos de ola a una distribución Rayleigh

Los periodos siguen una distribución del tipo Rayleigh dada por la ec.(5.38)

$$p = 1 - e^{-\theta\tau^4}$$

siendo $\tau = T/\overline{T}$

Para ajustar el parámetro Θ, se siguen dos procedimientos

a) Ajuste por mínimos cuadrados

En términos del periodo de retorno T_r, la ec.(7.10) queda

$$T_r = \frac{1}{1 - p} = e^{\theta\tau^4}$$

Por lo que al obtener el logaritmo natural en ambos miembros y haciendo cambio de variable, se tiene

$$\ln T_r = \theta\ \tau^4$$

$$z = \theta\ \tau^4$$

por lo que la suma de los errores es

$$s = \Sigma \ (\theta \ \tau_i^4 - z_i)^2$$

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} = 2 \ \Sigma \ (\theta \tau_i^4 - z_i) \ \tau^4 = 0$$

$$\theta = \frac{\Sigma \ z_i \ \tau_i^4}{\Sigma \ \tau^4}$$

El coeficiente de correlación lineal es

$$r = \sqrt{\frac{\Sigma \ (z_{est} - \overline{z})^2}{\Sigma \ (z_i - \overline{z})}}$$

En la tabla 7.6, se anotan los valores y sumas de interés utilizados para estimar el valor del coeficiente de correlación r, para el caso del registro en estudio, de esta manera se encontró que

$$\theta = 0.1145$$

y el coeficiente de correlación fue

$$r = 0.992308$$

b) Ajuste por momentos

En este caso se tiene de acuerdo a la ec.(5.38) que

$$\theta = 0.675$$

Se estima que los periodos del registro si siguen la distribución de probabilidad propuesta (Fig. 7.6).

Sabiendo que los periodos se ajustan a una distribución Rayleigh,

Tabla 7.6 Cálculo por mínimos cuadrados del parámetro θ

i	T_{ri}	T_i	z_i	$T_i^4 z_i$	T_i^4
1	97.0000	0.7529	4.5747	1.4703	0.1033
2	97.0000	0.7529	4.5747	1.4703	0.1033
3	32.3333	0.7059	3.4761	0.8630	0.0616
4	32.3333	0.7059	3.4761	0.8630	0.0616
5	32.3333	0.7059	3.4761	0.8630	0.0616
6	32.3333	0.7059	3.4761	0.8630	0.0616
7	32.3333	0.7059	3.4761	0.8630	0.0616
8	32.3333	0.7059	3.4761	0.8630	0.0616
9	10.7778	0.6588	2.3775	0.4479	0.0355
10	10.7778	0.6588	2.3775	0.4479	0.0355
11	8.8182	0.6118	2.1768	0.3049	0.0196
12	8.8182	0.6118	2.1768	0.3049	0.0196
13	8.8182	0.6118	2.1768	0.3049	0.0196
14	8.8182	0.6118	2.1768	0.3049	0.0196
15	8.8182	0.6118	2.1768	0.3049	0.0196
16	8.8182	0.6118	2.1768	0.3049	0.0196
17	5.7059	0.5647	1.7415	0.1771	0.0103
18	5.7059	0.5647	1.7415	0.1771	0.0103
19	5.7059	0.5647	1.7415	0.1771	0.0103
20	5.7059	0.5647	1.7415	0.1771	0.0103
21	5.7059	0.5647	1.7415	0.1771	0.0103
22	5.7059	0.5647	1.7415	0.1771	0.0103
23	5.7059	0.5647	1.7415	0.1771	0.0103
24	5.7059	0.5647	1.7415	0.1771	0.0103
25	5.7059	0.5647	1.7415	0.1771	0.0103
26	5.7059	0.5647	1.7415	0.1771	0.0103
27	5.7059	0.5647	1.7415	0.1771	0.0103
28	5.7059	0.5647	1.7415	0.1771	0.0103
29	3.3448	0.5176	1.2074	0.0867	0.0052
30	3.3448	0.5176	1.2074	0.0867	0.0052
31	3.3448	0.5176	1.2074	0.0867	0.0052
32	3.3448	0.5176	1.2074	0.0867	0.0052
33	3.3448	0.5176	1.2074	0.0867	0.0052
34	3.3448	0.5176	1.2074	0.0867	0.0052
35	3.3448	0.5176	1.2074	0.0867	0.0052
36	3.3448	0.5176	1.2074	0.0867	0.0052
37	3.3448	0.5176	1.2074	0.0867	0.0052
38	3.3448	0.5176	1.2074	0.0867	0.0052
39	3.3448	0.5176	1.2074	0.0867	0.0052
40	3.3448	0.5176	1.2074	0.0867	0.0052
41	3.3448	0.5176	1.2074	0.0867	0.0052
42	3.3448	0.5176	1.2074	0.0867	0.0052
43	3.3448	0.5176	1.2074	0.0867	0.0052
44	3.3448	0.5176	1.2074	0.0867	0.0052
45	3.3448	0.5176	1.2074	0.0867	0.0052
46	3.3448	0.5176	1.2074	0.0867	0.0052
47	3.3448	0.5176	1.2074	0.0867	0.0052
48	2.0208	0.4706	0.7035	0.0345	0.0024
49	2.0208	0.4706	0.7035	0.0345	0.0024
50	2.0208	0.4706	0.7035	0.0345	0.0024
51	2.0208	0.4706	0.7035	0.0345	0.0024
52	2.0208	0.4706	0.7035	0.0345	0.0024

53	2.0208	0.4706	0.7035	0.0345	0.0024
54	2.0208	0.4706	0.7035	0.0345	0.0024
55	2.0208	0.4706	0.7035	0.0345	0.0024
56	2.0208	0.4706	0.7035	0.0345	0.0024
57	2.0208	0.4706	0.7035	0.0345	0.0024
58	2.0208	0.4706	0.7035	0.0345	0.0024
59	2.0208	0.4706	0.7035	0.0345	0.0024
60	2.0208	0.4706	0.7035	0.0345	0.0024
61	2.0208	0.4706	0.7035	0.0345	0.0024
62	2.0208	0.4706	0.7035	0.0345	0.0024
63	2.0208	0.4706	0.7035	0.0345	0.0024
64	2.0208	0.4706	0.7035	0.0345	0.0024
65	2.0208	0.4706	0.7035	0.0345	0.0024
66	2.0208	0.4706	0.7035	0.0345	0.0024
67	2.0208	0.4706	0.7035	0.0345	0.0024
68	1.4265	0.4235	0.3552	0.0114	0.0010
69	1.4265	0.4235	0.3552	0.0114	0.0010
70	1.4265	0.4235	0.3552	0.0114	0.0010
71	1.4265	0.4235	0.3552	0.0114	0.0010
72	1.4265	0.4235	0.3552	0.0114	0.0010
73	1.4265	0.4235	0.3552	0.0114	0.0010
74	1.4265	0.4235	0.3552	0.0114	0.0010
75	1.4265	0.4235	0.3552	0.0114	0.0010
76	1.4265	0.4235	0.3552	0.0114	0.0010
77	1.4265	0.4235	0.3552	0.0114	0.0010
78	1.4265	0.4235	0.3552	0.0114	0.0010
79	1.4265	0.4235	0.3552	0.0114	0.0010
80	1.4265	0.4235	0.3552	0.0114	0.0010
81	1.4265	0.4235	0.3552	0.0114	0.0010
82	1.1829	0.3765	0.1680	0.0034	0.0004
83	1.1829	0.3765	0.1680	0.0034	0.0004
84	1.1829	0.3765	0.1680	0.0034	0.0004
85	1.1829	0.3765	0.1680	0.0034	0.0004
86	1.1829	0.3765	0.1680	0.0034	0.0004
87	1.1829	0.3765	0.1680	0.0034	0.0004
88	1.1829	0.3765	0.1680	0.0034	0.0004
89	1.1829	0.3765	0.1680	0.0034	0.0004
90	1.1829	0.3765	0.1680	0.0034	0.0004
91	1.1829	0.3765	0.1680	0.0034	0.0004
92	1.0543	0.3294	0.0529	0.0006	0.0001
93	1.0543	0.3294	0.0529	0.0006	0.0001
94	1.0543	0.3294	0.0529	0.0006	0.0001
95	1.0543	0.3294	0.0529	0.0006	0.0001
96	1.0104	0.2353	0.0103	0.0000	0.0000
Suma				15.5026	1.0544

Theta = 15.50261 / 1.054379 = 14.70308

coeficiente de correlacion r = .9923081

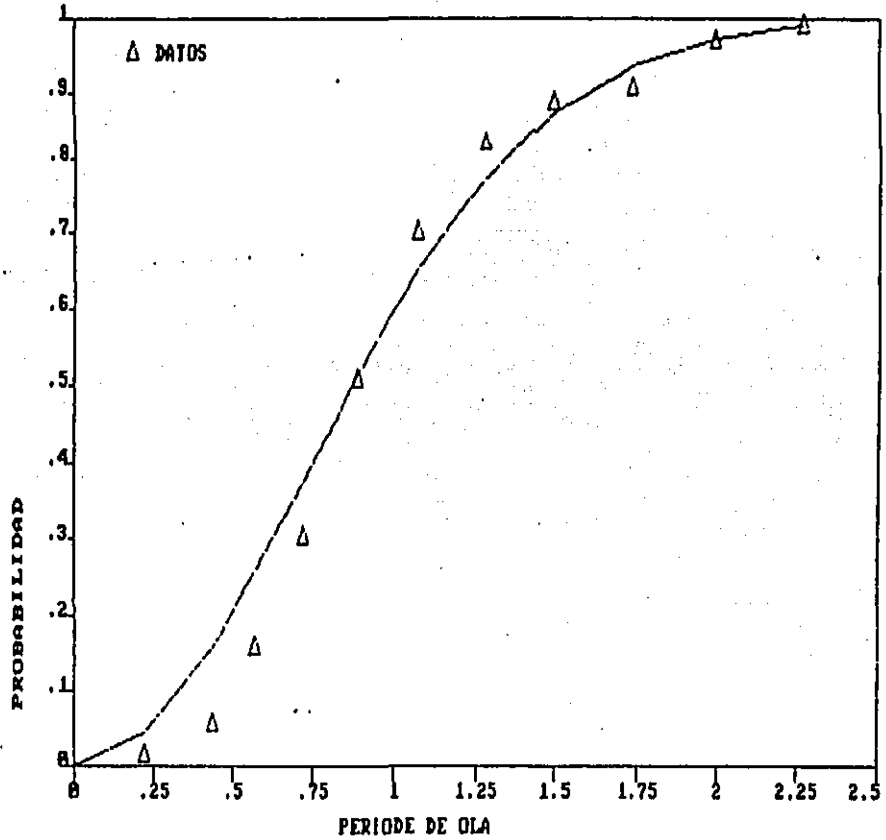


Fig. 7.6 Distribución de los periodos de ola

se procede a estimar algunos valores de los mismos.

7.2.4 Valores estadísticos de los periodos de ola

I. Obtención de los valores estadísticos de los periodos de ola apartir de la función de distribución Rayleigh usual ($\theta = 0.675$)

a) Periodo promedio ($\bar{T}$)

$$\bar{T}_{1/n} = 1.1032\ \bar{T}\ \sqrt[4]{\ln n} \qquad (7.10)$$

de la ecuación anterior para n = 2

$$\bar{T}_{1/2} = 1.1032\ \bar{T}\ \sqrt[4]{\ln 2} = 5.302 \text{ seg}$$

b) Periodo modal o más frecuente (T_F)

$$T_F = 1.026\ \bar{T} = 1.026\ (5.302) = 5.44 \text{ seg}$$

c) Periodo significannte ($T_{1/3}$)

No se define a partir de la función de distribución de probabilidad.

d) Periodo ($T_{1/3}$) (no es el significante)

De la ec. (7.10) para n = 3

$$T_{1/3} = 1.1032\ \bar{T}\ \sqrt[4]{\ln 3} = 1.1294\ \bar{T} = 1.1294\ (5.302) = 5.99 \text{ seg}$$

e) Periodo ($\bar{T}_{1/10}$)

de ec. (7.10) para n = 10

$$\bar{T}_{1/10} = 1.1032\ \bar{T}\ \sqrt[4]{\ln 10} = 1.359\ \bar{T} = 1.359\ (5.302) = 7.20 \text{ seg}$$

II. Obtencción de los valores estadísticos de los periodos de ola a partir de la distribución de probabilidad ajustada por mínimos cuadrados.

En este ejercicio resultó que Θ = 0.9189

a) Periodo promedio (T)

de la ec. 7.10, para n = 2

$$T_{1/2} = \frac{1}{\sqrt[4]{\theta}}\ \bar{T}\ \sqrt[4]{\ln 2} = \frac{1}{\sqrt[4]{0.9189}}\ (5.302)\ \sqrt[4]{\ln 2} = 4.45 \text{ seg}$$

b) Periodo más frecuente (T_F)

$$T_F = \frac{1}{\sqrt[4]{\theta}}\ \bar{T}\ (0.9306) = \frac{1}{\sqrt[4]{0.9189}}\ (5.302)\ (0.9306) = 5.05 \text{ seg}$$

c) Periodo significante ($\bar{T}_{1/3}$)

No se define a partir de la función de distribución de probabilidad

d) Periodo ($T_{1/3}$) (no es el significante)

De la ec. (7.10), para n = 3

$$T_{1/3} = \frac{1}{\sqrt[4]{\theta}} \, \overline{T} \sqrt[4]{\ln 3} = \frac{1}{\sqrt[4]{0.9189}} (5.302) \sqrt[4]{\ln 3} = 5.56 \text{ seg}$$

e) Periodo ($T_{1/10}$)

De la ec. (7.10), para n = 10

$$T_{1/10} = \frac{1}{\sqrt[4]{\theta}} \, \overline{T} \sqrt[4]{\ln 10} = \frac{1}{\sqrt[4]{0.9189}} (5.302) \sqrt[4]{\ln 10} = 6.69 \text{ seg}$$

III. Obtención de los valores estadísticos de los periodos de ola a partir del conjunto de periodos obtenidos del registro

a) Periodo promedio (T)

$$\overline{T} = \frac{\Sigma T}{N} = \frac{509}{96} = 5.302 \text{ seg}$$

b) Periodo modal o más frecuente (T_m)

El periodo que más se pressentó fue el de 5 seg., apareciendo en 19 olas, por ello el periodo modal es 5 seg.

c) Periodo significante ($\overline{T}_{1/3}$)

El promedio de periodos del tercio de las olas con mayor altura del grupo de 96 es

$$\overline{T}_{1/3} = \frac{1}{32} \left[10\ (5) + 12\ (5.5) + 6\ (6) + 2\ (6.5) + 7 + 8 \right]$$
$$= 5.625 \text{ seg}$$

d) Periodo ($T_{1/3}$) (no es el significante)

El periodo tal que se supera o iguala en 32 ocasiones es

$$T_{1/3} = 6.5 \text{ seg}$$

e) Periodo ($T_{1/10}$)

El periodo que se supera o iguala en 10 ocasiones es

$$T_{1/10} = 7 \text{ seg}$$

IV. Obtención de los valores estadisticos de los periodos de ola a partir del espectro

Del espectro obtenido con varias funciones de densidad espectral.

a) Periodo promedio ($\bar{T}$)

$$\bar{T} = \sqrt{\frac{m_o}{m_2}} = \sqrt{\frac{2.0911(10^{-3})}{}} = 5.20 \text{ seg}$$

b) Periodo más frecuente (T_p)

No se encuentra con el espectro

c) Periodo significante ($T_{1/3}$)

$$T_s = \sqrt[4]{4/5}\ (0.0858)\ f_p^{-1} = 5.5 \text{ seg}$$

7.2.5 Parámetro ancho de banda espectral (ϵ)

Del registro de elevaciones de superficie libre del mar, se tiene que

$$NMP = 98$$

$$NMN = 4$$

por lo que de la ec. (4.59)

$$r = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{NMP - NMN}{NMP + NMN}\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{98 - 4}{98 + 4}\right] = 0.0392$$

$$\epsilon^2 = 1 - (1 - 2\ (0.0392))^2 = 0.1507$$

$$= 0.3882$$

Del espectro obtenido con varias funciones de densidad espectral

$$\epsilon = \left[1 - \frac{m_2}{m_0\ m_4}\right]^{1/2} = \left[1 - \frac{(1.9448(10^{-5}))^2}{(2.0686(10^{-6}))(3.5038(10^{-7}))}\right] = 0.6915$$

se aprecia diferencia entre los dos métodos para obtener ϵ.

7.3 Resumen

Se presenta en la tabla 7.7, el resumen de las características más representativas del registro de elevaciones de la superficie libre del mar del ejemplo. Ellas se calcularon mediante diferentes procedimientos.

Tabla 7.7 Resumen de resultados

	valor obtenido a partir de			
	función Rayleig	conjunto de 96 valores	espec. prom. varias funs.	espec. prom. varias frec.
H_{rms}	0.189	0.1960	0.182	0.192
m_o	0.004802	-	0.004182	0.00464
$\overline{H}$	0.173	0.177	0.162	0.170
$\overline{H}_{1/3}$	0.277	0.277	0.258	0.272
$H_{1/3}$	0.205	0.207	0.192	0.202
$\overline{H}_{1/10}$	0.353	0.328	0.330	0.347
$H_{1/10}$	0.160	0.294	0.278	0.292
$\overline{H}_{1/50}$	0.433	0.379	0.404	0.425
$H_{1/50}$	0.388	0.367	0.362	0.381
$\overline{H}_{máx}$	0.335	0.306	0.312	0.329
$\overline{H}_{máx}$	0.357	0.331	0.333	0.175
$\overline{T}$	5.3	5.3	5.3	5.2
T_F	5.4	5.0		
$\bar{\bar{T}}_{1/3}$		5.6	5.5	5.5
$T_{1/3}$	6.0	6.5		
$T_{1/10}$	7.2	7.0	7.2	7.1
ε		0.388	0.687	

Además de los cálculos presentados en la tabla 7.7, se realizó para el espectro obtenido de varias funciones de densidad espectral (4 para el caso del registro del ejemplo), un análisis en relación con los periodos, longitud y altura de ola y porcentajes de energía, observandose los resultados que se presentan en la tabla 7.8.

La mayor energía (80%) se concentra entre los periodos 7.5 a 4.0 seg , con longitudes y alturas de ola entre 58.6 a 23.8 m y 0.02 a 0.066 m respectivamente.

Lo mismo se realizó para el espectro obtenido del promedio de varias frecuencias, resultando que el 80% de la energía se concentra entre los periodos con 7.6 a 4.0 seg, y longitudes y alturas de ola de 57.0 a 22.0 m y 0.015 a 0.05 seg, respectivamente (ver tabla 7.9)

Se observa que en los dos espectros se presentan resultados similares.

Tabla 7.8 Relaciones entre la función de densidad espectral obtenida del promedio de varias funciones y algunas características (T, H, L y EP.)

f	B(f)	T	L	H	EP(%)
0.00000	0.00032	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00781	0.00075	128.00000	1021.84300	0.00631	0.00238
0.01563	0.00031	64.00000	510.51360	0.00970	0.00563
0.02344	0.00053	42.66667	339.88860	0.00625	0.00233
0.03125	0.00067	32.00000	254.44010	0.00817	0.00399
0.03906	0.00018	25.60000	203.06250	0.00918	0.00504
0.04688	0.00011	21.33334	168.71930	0.00480	0.00138
0.05469	0.00027	18.28572	144.11040	0.00378	0.00085
0.06250	0.00012	16.00000	125.58540	0.00579	0.00201
0.07031	0.00017	14.22222	111.11600	0.00387	0.00089
0.07813	0.00007	12.80000	99.48534	0.00466	0.00130
0.08594	0.00013	11.63636	89.91974	0.00305	0.00055
0.09375	0.00023	10.66667	81.90254	0.00407	0.00099
0.10156	0.00053	9.84615	75.07611	0.00533	0.00170
0.10938	0.00167	9.14286	69.18596	0.00817	0.00399
0.11719	0.00128	8.53333	64.04438	0.01445	0.01247
0.12500	0.00475	8.00000	59.51190	0.01265	0.00957
0.13281	0.00594	7.52941	55.48005	0.02436	0.03549
0.14063	0.00278	7.11111	51.86659	0.02725	0.04439
0.14844	0.00534	6.73684	48.60535	0.01863	0.02075
0.15625	0.01475	6.40000	45.64389	0.02584	0.03992
0.16406	0.01279	6.09524	42.94049	0.04294	0.11021
0.17188	0.01699	5.81818	40.45940	0.03999	0.09558
0.17969	0.01234	5.56522	38.17320	0.04608	0.12695
0.18750	0.01049	5.33333	36.05803	0.03928	0.09222
0.19531	0.01204	5.12000	34.09366	0.03621	0.07839
0.20313	0.00235	4.92308	32.26517	0.03879	0.08995
0.21094	0.00639	4.74074	30.55707	0.01713	0.01754
0.21875	0.00464	4.57143	28.95923	0.02826	0.04776
0.22656	0.00446	4.41379	27.46032	0.02409	0.03469
0.23438	0.00175	4.26667	26.05320	0.02362	0.03336
0.24219	0.00321	4.12903	24.73011	0.01478	0.01306
0.25000	0.00072	4.00000	23.48450	0.02004	0.02401
0.25781	0.00101	3.87879	22.31219	0.00951	0.00540
0.26563	0.00071	3.76471	21.20783	0.01126	0.00758
0.27344	0.00067	3.65714	20.16664	0.00943	0.00532
0.28125	0.00021	3.55556	19.18684	0.00913	0.00498
0.28906	0.00038	3.45946	18.26365	0.00510	0.00155
0.29688	0.00027	3.36842	17.39411	0.00693	0.00287
0.30469	0.00012	3.28205	16.57642	0.00578	0.00199
0.31250	0.00020	3.20000	15.80640	0.00380	0.00086
0.32031	0.00016	3.12195	15.08287	0.00502	0.00150
0.32813	0.00017	3.04762	14.40166	0.00451	0.00121
0.33594	0.00009	2.97674	13.76157	0.00466	0.00130
0.34375	0.00006	2.90909	13.15962	0.00328	0.00064
0.35156	0.00004	2.84444	12.59403	0.00279	0.00046
0.35938	0.00003	2.78261	12.06122	0.00232	0.00032
0.36719	0.00005	2.72340	11.56059	0.00206	0.00025
0.37500	0.00003	2.66667	11.08857	0.00241	0.00035
0.38281	0.00002	2.61224	10.64396	0.00194	0.00023

Tabla 7.9 Relaciones entre la función de densidad espectral obtenida del promedio de varias frecuencias y algunas características (T,H, L y EP).

f	S(f)	T	L	H	EP(%)
0.004883	0.001079	204.800000	1635.214000	0.008211	0.007265
0.012695	0.000827	78.769230	628.551800	0.007190	0.005571
0.020508	0.000375	48.761910	388.662900	0.004841	0.002526
0.028320	0.000962	35.310350	280.976500	0.007752	0.006476
0.036133	0.000228	27.675680	219.739400	0.003775	0.001536
0.043945	0.000630	22.755560	180.178400	0.006273	0.004240
0.051758	0.000219	19.320760	152.477500	0.003703	0.001478
0.059570	0.000190	16.786880	131.970800	0.003447	0.001280
0.067383	0.000241	14.840580	116.156300	0.003877	0.001620
0.075195	0.000193	13.298700	103.570200	0.003472	0.001299
0.083008	0.000020	12.047060	93.301970	0.001110	0.000133
0.090820	0.000104	11.010750	84.752540	0.002547	0.000699
0.098633	0.000116	10.138610	77.514280	0.002688	0.000779
0.106445	0.001013	9.394495	71.298130	0.007956	0.006821
0.114258	0.001283	8.752137	65.894920	0.008955	0.008641
0.122070	0.001293	8.192001	61.147890	0.008989	0.008707
0.129883	0.003668	7.699249	56.939030	0.015141	0.024703
0.137695	0.009776	7.262411	53.177160	0.024718	0.065838
0.145508	0.002075	6.872484	49.790760	0.011387	0.013972
0.153320	0.003921	6.522293	46.722630	0.015654	0.026407
0.161133	0.007928	6.206061	43.926250	0.022260	0.053396
0.168945	0.019320	5.919075	41.365300	0.034749	0.130118
0.176758	0.018091	5.657459	39.009360	0.033626	0.121842
0.184570	0.008349	5.417990	36.832220	0.022844	0.056232
0.192383	0.019707	5.197970	34.813620	0.035095	0.132724
0.200195	0.007118	4.995122	32.935650	0.021092	0.047940
0.208008	0.011039	4.807512	31.184050	0.026266	0.074346
0.215820	0.007184	4.633485	29.546280	0.021190	0.048385
0.223633	0.002472	4.471616	28.011620	0.012429	0.016646
0.231445	0.005286	4.320675	26.571110	0.018176	0.035598
0.239258	0.002439	4.179592	25.217030	0.012347	0.016426
0.247070	0.004300	4.047431	23.942810	0.016393	0.028958
0.254883	0.001632	3.923372	22.743690	0.010101	0.010994
0.262695	0.000762	3.806692	21.614290	0.006900	0.005130
0.270508	0.000796	3.696751	20.549860	0.007052	0.005359
0.278320	0.000687	3.592983	19.547410	0.006552	0.004625
0.286133	0.000595	3.494881	18.603370	0.006096	0.004004
0.293945	0.000365	3.401993	17.714150	0.004776	0.002458
0.301758	0.000469	3.313916	16.877390	0.005413	0.003158
0.309570	0.000057	3.230284	16.089490	0.001882	0.000382
0.317383	0.000147	3.150769	15.348680	0.003034	0.000992
0.325195	0.000352	3.075075	14.651970	0.004692	0.002372
0.333008	0.000163	3.002933	13.996980	0.003190	0.001097
0.340820	0.000195	2.934098	13.381330	0.003489	0.001312
0.348633	0.000063	2.868348	12.802030	0.001985	0.000425
0.356445	0.000050	2.805480	12.257300	0.001764	0.000335
0.364258	0.000027	2.745309	11.744750	0.001307	0.000184
0.372070	0.000047	2.687664	11.262000	0.001711	0.000315
0.379883	0.000032	2.632391	10.807860	0.001418	0.000217
0.387695	0.000020	2.579345	10.379340	0.001132	0.000138

8. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se presenta en este trabajo un desarrollo matemático del estudio espectral del oleaje fundamentado en el análisis de Fourier, el cual es un procedimiento para conocer las alturas y periodos de la ola. A partir de la función de densidad espectral del oleaje es posible obtener algunos valores característicos como son la altura y periodo significante, las cuales son de interés en el diseño de estructuras marítimas. Esta técnica no es complicada, ya que para aplicarla basta con disponer de registros de la presión debida al oleaje en un lugar en estudio y seguir el procedimiento que se incluye en el desarrollo del ejemplo (capítulo 7).

Los aspectos mas importantes que se toman en cuenta en el análisis espectral son:

a) La obtención de la función de densidad espectral s(f).

b) El uso de la transformada discreta de Fourier por medio del algoritmo de la transformada rápida, ya que éste reduce y simplifica significativamente el tiempo de cálculo. Se recomienda utilizar el procedimiento que se incluye en el cuadro 3.1, para lo cual se presenta un ejemplo donde se detalla su uso intentando lograr su comprensión.

c) Es conveniente utilizar una función llamada "ventana" que resalte las componentes mas importantes del oleaje y que distorsione lo menos posible los resultados al aplicar la transformada de Fourier. En este trabajo se empleó la función descrita por la ec. (4.19).

d) La función de densidad espectral se debe estimar con base en los promedios de una o varias funciones como se propone en el capítulo 4. Los resultados obtenidos en el ejemplo de aplicación mostraron que es indistinto utilizar cualquiera de los dos procedimientos de promedios sugeridos, ya que se obtuvieron espectros similares. Sin embargo, se debe tener presente el estimar adecuadamente los parámetros que se mencionan en los incisos 4.5 y 4.6 (t, T, q, B_e etc.).

e) Al comparar los resultados tanto del análisis estadístico como del espectral, se observa que son similares, es decir, existe una mínima diferencia entre los valores obtenidos con los dos procedimientos con la ventaja de que la aplicación del análisis espectral es mas rápida, sobre todo cuando se utiliza una microcomputadora.

f) Por último se remarca que el método del análisis espectral es útil en el estudio del oleaje de corta duracion, y para calcular las caracteristicas de diseño se requiere del análisis de largo plazo. Esto se hace con base en el estudio de registro de varios años, estimándose para cada año su altura de ola significante máxima , para que de acuerdo al tipo de estructura maritima se pueda definir la ola de diseño asociada a cierta probabilidad de ocurrencia.

ANEXO A

La finalidad de esta sección, es mostrar el programa que se utilzó en el ejemplo, para ello se incluye el listado y los resultados de una corrida utilizando los datos del ejercicio que se presenta en el capítulo 3.

Programa de computador en lenguaje BASIC, empleado en la solución del ejemplo de aplicación.

```
10 REM  *** OBTIENE EL ESPECTRO DE UN CONJUNTO DE DATOS ***
20 REM  EL PROGRAMA SE LLAMA ESPECTRO
30 DIM A(2,128),B(2,128),L(1000)
40 PRINT "NUMERO DE DATOS, N";
50 READ  N
55 PRINT "DT, EN SEG": READ  DT
56 FM = 1 / (N * DT)
60 FOR I = 1 TO N
70 PRINT "A"I;
80 READ  A(1,I)
90 B(1,I) = 0
100 NEXT I
104 DATA 8,1
105 DATA 3.6481,7.1018,0.2716,-3.1821,1.3520,1.5585,-5.2716,-5.4782
110 G = INT (LOG (N) * 1.443)
120 L1 = 1
130 X = 2 * 3.14159 / N
140 PRINT "DATOS POR TRANSFORMAR"
150 PRINT " "
180 PRINT " "
190 FOR I=1 TO N
200 PRINT I, A(1,I)
210 NEXT I
215 PRINT:PRINT:PRINT
220 S = N / (2 ^ L1)
230 L1 = L1 + 1
240 PRINT "ITERACION NO."L1
250 PRINT
252 PRINT"  K         f        Re(x(k))    Im(x(k))
253 PRINT
260 M = 1
270 E = G + 1 - L1
280 K1 = 0
290 K = M
300 GOSUB 1030
310 IF J > E THEN 340
320 P = 0
```

```
330 GOTO 460
340 J2 = J - E
350 FOR I = 1 TO J2
360 L(I) = L(I + E)
370 NEXT I
380 J2 = J2 + 1
390 FOR I = J2 TO J
400 L(I) = 0
410 NEXT 1
420 P = 0
430 FOR I = 1 TO J
440 P = P + L(I) * 2 ^ (G - I)
450 NEXT I
460 X1 = X * P
470 C1 = COS (X1)
480 D1 = - 1 * SIN (X1)
490 M1 = M + S
500 A(2,M) = A(1,M) + C1 * A(1,M1) - D1 * B(1,M1)
510 B(2,M) = B(1,M) + C1 * B(1,M1) + D1 * A(1,M1)
520 K1 = K1 +1
530 M = M + 1
540 IF K1 = S THEN 560
550 GOTO 490
560 K1 = 0
570 P = P + N / 2
580 X1 = X * P
590 C1 = COS (X1)
600 D1 = SIN (X1) * ( -1)
610 K = M - S
620 M1 = K + S
630 A(2,M1) = A(1,K) + C1 * A(1,M1) - D1 * B(1,M1)
640 B(2,M1) = B(1,K) + C1 * B(1,M1) + D1 * A(1,M1)
650 K1 = K1 + 1
660 M = M + 1
670 IF K1 = S THEN 690
680 GOTO 610
690 IF M > N THEN 710
700 GOTO 280
710 IF L1 > G THEN 770
720 FOR I = 1 TO N
730 B(1,I) = B(2,I)
740 A(1,I) = A(2,I)
750 NEXT I
752 FOR I=1 TO N
754 PRINT USING"###";I;:PRINT USING"######.####";FM,A(1,I),B(1,I)
756 NEXT I
758 PRINT:PRINT:PRINT
760 GOTO 220
770 FOR M = 1 TO N
780 K = M
790 GOSUB 1030
800 P = 0
810 FOR I = 1 TO J
820 P = P + L(I) * 2 ^ (G - I)
830 NEXT I
840 P = P + 1
850 A(1,P) = A(2,M)
860 B(1,P) = B(2,M)
```

Para ejecutar el programa, los datos se proporcionan por medio de la intrucción DATA. Por ejemplo si escogemos los 8 primeros valores de la funcion coseno del ejercicio del capi tulo 3 y corremos el programa, se tienen los siguientes resultados.

DATOS POR TRANSFORMAR

1	3.6481
2	7.1018
3	.2716
4	-3.1821
5	1.352
6	1.5585
7	-5.2716
8	-5.4782

Resultados correspondientes a la primer etapa o columna 1 del cuadro 3.1.

K	Re(x(k))	Im(x(k))
1	5.0001	0.0000
2	8.6603	0.0000
3	-5.0000	0.0000
4	-8.6603	0.0000
5	2.2961	-0.0000
6	5.5433	-0.0000
7	5.5432	0.0000
8	2.2961	0.0000

Resultados correspondientes a la segunda etapa o columna 2 del cuadro 3.1.

K	Re(x(k))	Im(x(k))
1	0.0001	0.0000
2	0.0000	0.0000
3	10.0001	0.0000
4	17.3206	0.0000
5	2.2961	-5.5432
6	5.5433	-2.2961
7	2.2961	5.5432
8	5.5433	2.2961

Resultados correspondientes a la tercer etapa o columna 3 del cuadro 3.1

K	Re(x(k))	Im(x(k))
1	0.0001	0.0000
2	0.0001	0.0000
3	10.0001	-17.3206
4	10.0000	17.3206
5	4.5922	-11.0865
6	-0.0000	0.0001
7	-0.0000	-0.0001
8	4.5921	11.0865

k	f	Re(x(k))	Im(x(k))	S(k)	a(k)	0(k)
0	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000		
1	0.1250	4.5922	-11.0865	17.9999	3.0000	0.3927
2	0.2500	10.0001	-17.3206	50.0007	5.0000	0.5236
3	0.3750	-0.0000	-0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.5000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.6250	-0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.7500	10.0000	17.3206	50.0005	5.0000	-0.5236
7	0.8750	4.5921	11.0865	17.9997	3.0000	-0.3927
8	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Las columnas 2 y 4 de los resultados anteriores corresponden al paso 10 del cuadro 3.1; donde s(k), es la función densidad espectral obtenida con la ec. 4.11, a(k) es la amplitud de la ola estimada como $a(k) = (2*s(k)\ \Delta f)^{1/2}$ y O(k) es el ángulo de fase calculado de O(k) = ang tan (Im / Re).

Notese que los resultados son los mismos que los obtenidos manualmente (ver ejercicio del capitulo 3).

O NOTACION.

a_n	
b_n	Coeficientes de Fourier.
c_n	
a	Amplitud de ola, otros.
C_{xy}, C_{yx}	Covariancia.
C_{xx}, C_{yy}	Autocovariancia.
d	Paràmetro de la función de densidad de probabilidad normal, profundidad respecto al nivel de aguas tranquilas.
B_o	Ancho de frecuencia, intervalo de frecuencia.
A_e	Area total bajo el espectro.
$E\{\ \}$	Esperanza matemática de { }.
$f(\ )$	Función de la variable ( ).
$F(z)$	Función de probabilidad normal estandarizada
f	Frecuencia ciclica.
$F(f)$	Tranfrmada de Fourier de f(t).
$F(fk)$	Transformada discreta de Fourier de f(t).
$\tilde{F}(f)$	Conjugado complejo de F(f).
f_c	Frecuencia más grande de la componente de la trasnformada de f(t), frecuencia de corte.
f'_m	Frecuencia más grande en el cálculo de s(f).
f_p	Frecuencia de pico.
$\bar{f}$	Frecuencia media.
H	Altura de ola.
$H_{1/n}$	Altura de ola con probabilidad 1/n de ser excedida.

H_F	Altura de ola más frecuente.
$\overline{H}_{1/3}$	Altura de ola significante.
h(t)	Función ventana.
K	Factor de respuesta de presión.
m	Parámetro de la función de densidad de distrubución de probabilidad normal.
MN	Máximo negativo.
MP	Máximo positivo.
mN	Mínimo negativo.
mP	Mínimo positivo.
m_n	Momento de orden n.
N	Número de puntos discretizados.
NMP	Número de máximos positivos.
NMN	Número de máximos negativos.
NmP	Número de mínimos positivos.
NmN	Número de mínimos negativos.
NAT	Nivel de aguas tranquilas.
p(T)	Distribución de probabilidad de los periodos de ola.
p(H)	Distrubución de probabilidad de las alturas de ola.
m_o	Area bajo el espectro.
p	Presión.
R_{xy}, R_{yx}	Función de correlación.
R_{xx}, R_{yy}	Función de autocorrelación.
r_{xx}	Coeficiente de autocorrelación.
r_{yx}	Coeficiente de correlación.
r	Proporción de máximos negativos.
s(f)	Función de densidad espectral de f(t).

$s(f)$	Función de densidad espectral de $f(t)$ con duración finita.
t	tiempo.
T	Periodo.
T_c	Tiempo más grande de la antitransformada de $F(f)$.
T_e	Intervalo de tiempo.
$\overline{T}$	Periodo medio.
$T_{1/3}, T_s$	Periodo significante.
T_o	Periodo modal.
V_x	Variancia.
x	Variable.
$x(t)$	Función en el tiempo.
$y(t)$	Función en el tiempo.
$Y(f)$	Transformada de Fourier de $y(t)$.
$\tilde{Y}(f)$	Conjugado complejo de $F(f)$.
z	Número complejo.
z	Variable normal estandarizada.
$\Gamma(\nu)$	Función gamma de parámetro ν.
$\delta(t)$	Función impuso unitario.
$\Delta(\ )$	Incremento en ( ).
η	Ordenada del nivel de aguas tranquilas a la superficie de la ola.
μ_x	Media de la variable aleatoria con distribución normal de probabiliedad.
μ_x^2	Media poblacional.
τ	Orden de la función de autocorrelación.
ε_r	Error normal estandar.
σ_x^2	Media de la variable aleatoria con distribución

normal de probabilidad.

$\phi(f)$ Espectro de un lado.

χ^2 Variable aleatoria, (suma de los cuadrados de las variables independientes con distribución normal estandar).

ν Número de variables aleatorias independientes.

θ Estadístico de una muetra aleatoria.

ϵ Parámetro ancho de banda espectral.

REFERENCIAS

1. Bringham E. O., The Fast Fourier Transform, Prentice Hall, USA, 1974.

2. Carmona J. I., Ecuaciones Diferenciales, Alhambra Mexicana", México, 1985.

3. Demidovich B., Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático, MIR, Moscú, 1987.

4. Fuentes M. O. A. y Sánchez B. J. L., "Compendio de Hidráulica Maritima", México, Instituto de Ingeniería, UNAM, 1985, Proy. 4314.

5. Fuentes M. O., "Diseño Optimo de Escolleras", Informe Interno del Instituto de Ingeniería, UNAM, Proy. 3328, 58 pp..

6. Horikawa K., Coastal Engineering, Halsted Pressbook.

7. Hsu Hwei P., Análisis de Fourier, Fondo Educativo Interamericano, USA, 1973.

8. Ippen A., Estuary and Coastline Hydrodinamic, Mc Graw Hill, Nueva York, 1966.

9. Kinsman, B., Wind Waves, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, USA, 1965.

10. Kaplan W., Cálculo Avanzado, CECSA, México, 1983.

11. Kreysig E., Matemáticas Avanzada para Ingeniería, Limusa, méxico, 1980.

12. Maza A. J. A., "Hidráulica Maritima", cap. A.2.13 del manual de CFE, México, 1983, 468 pp

13. Memorias, "VI Congreso Nacional de Hdráulica", Mérida, Yucatán, 1980.

14. Olivera S. y Zuñiga B., Serie de Probabilidad y estadistica, Impos Editores, S.A., México, 1979.

15. Papoulis A., Signal Analysis, Mc Graw Hill, USA, 1977.

16. Silvester R., Coastal Engineering (Vol 1, 2), Elsevier scientific Publishing Co., Nueva York, 1974.

17. Sorensen R., Basic Coastal Engineering, John Wiley and Sons, Nueva York, 1978.

18. Spiegel M. R., Transformadas de Laplace, Serie Schaum, Mc Graw Hill, México, 1971.

19. Spiegel M. R., Probabilidad y Estadisatica", Serie Schaum, Mc Graw Hill, México, 1975.

20. U.S. Army Coastal Engineering Research Center, Shore protection Manual, Vol. 1,2 y 3, USA, 1977.

21. Wilie C. R., Matemáticas Superiores para Ingenieros, Mc Graw Hill, México, 1971.

22. Williams W. E., Series de Fourier y Problemas con Valores en la Frontera, Selección de Problemas Resueltos, Limusa.

23. Wiegel R. L., Oceanographical Engineering, Prentice-Hall, englewood Cliffs, Nueva Jersey, USA, 1964.