6
2 ejm

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Extensión de la Solución de Nash a Problemas de Negociación con Utilidades no Esperadas.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

LARISSA CAMPUZANO HERNANDEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. JAVIER PAEZ CARDENAS.

MEXICO, D. F. 1998.

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
Extensión de la Solución de Nash a Problemas de Negociación con Utilidades no Esperadas

realizado por Larissa Campuzano Hernández

con número de cuenta 9150599-6, pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Javier Páez Cárdenas	
Propietario	Dra. Irma Beatriz Rumbos Pellicer	
Propietario	M. en C. José Antonio Gómez Ortega	
Suplente	Dr. José Guillermo Pastor Jiménez	
Suplente	Act. Claudia Carrillo Quiroz	Claudia Carrillo Q.

Consejo Departamental de Matemáticas

Ma[illegible] Bravo

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

A mis padres

Agradecimientos

Agradezco a la UNAM y a la Facultad de Ciencias por haberme permitido tener la maravillosa experiencia de ser universitaria. A Fundación UNAM por haberme otorgado una beca para la realización de este trabajo.

A mis papas por todo el amor y apoyo que me han dado, a Yalí e Iván por ser unos grandes hermanos, a Pola y Lupe por la ayuda que siempre me han brindado.

A todos mis profesores especialmente a; Jose Antonio Amor, Ma. José Arroyo, Luis Briseño, Mónica Clapp, Francisco Raggi y Cesar Rincón, por haber sido fundamentales en mi formación como matemática.

A Beatriz Rumbos, Claudia Carrillo Q., Toño Gómez, y Guillermo Pastor por el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo.

A Javier Páez por su paciencia y dedidación al dirigir de este trabajo, por tener la puerta de su cubículo siempre abierta, y por su valiosa amistad.

A los amigos que compartieron conmigo tanto los momentos difíciles como las grandes ocasiones: Adriana, Peque, Yadira, Claudia, Gabi, Rocco, Marco, Eric, Bernardo, Toño, Galo, Alejandro, Jarocho, Bruno, Pablo, Jerónimo, Canek, y Kats.

Finalmente a Benjamín por su gran amor, por su apoyo incondicional y porque además de soportar mis peores momentos me ha hecho reir en ellos.

Índice General

Introducción

De manera informal podemos decir que los elementos de un problema de negociación entre dos individuos (jugadores) son un conjunto de acuerdos o resultados y una relación de orden (para cada jugador) que refleje las preferencias sobre dichos acuerdos. El azar puede intervenir en un problema de negociación y tal vez no sepamos con certeza a qué acuerdo se llegará sino sólo con qué probabilidad se llegará a éste. En este caso los jugadores necesitarían definir su relación de preferencia no sólo en los resultados posibles sino en las distribuciones de probabilidad sobre estos resultados. En un enfoque clásico para modelar matemáticamente un problema de negociación lo que se hace es, para cada jugador, asociar un pago numérico a cada resultado de manera que refleje las preferencias sobre los mismos. A esta asociación se le conoce como función de utilidad. Esto no es suficiente dado que no sólo se considerarán los acuerdos sino también las distribuciones de probabilidad sobre los mismos. En este sentido fue necesario extender el concepto de función de utilidad a las distribuciones de probabilidad. La manera clásica de hacerlo es a través de lo que se conoce función de utilidad esperada. Nash dio una solución a los problemas de negociación utilizando esta herramienta, sin embargo, este método de solución tiene algunos problemas. Existen muchas relaciones de preferencia que no son representadas adecuadamente por esta función de utilidad esperada. Además, empíricamente se ha visto que muchas personas utilizan este tipo de preferencias por lo que se han buscado formas alternativas de funciones de utilidad que las representen. Desafortunadamente no hay una manera estándar de construir funciones de utilidad que representen a este tipo de preferencias y se tiene que utilizar una distinta para cada caso.

Rubinstein, Zafra y Thompson (1992) dan condiciones para la existencia de una solución equivalente a la de Nash en problemas de negociación sin recurrir al concepto de función de utilidad. Ellos utilizan sólamente la relación de preferencia de los jugadores para dar la solución. Esto permite obtener una solución para los problemas que no necesariamente tienen funciones de utilidad esperada. Como ventaja adicional esta solución tiene una interpretación intuitiva lo cual es muy satisfactorio ya que nos da una idea del tipo de proceso de negociación se está llevando a cabo.

El objetivo principal de este trabajo es mostrar la forma en que se aborda este problema, y organizado de la siguiente manera. En el primer capítulo se estudian las funciones de utilidad, en el segundo capítulo se expone la solución que Nash dió a los problemas de negociación. Finalmente en el tercer capítulo se desarrollará el trabajo de Rubinstein, Zafra y Thompson.

Capítulo 1

Teoría de la Utilidad

Un juego es cualquier situación social donde intervienen varios individuos (jugadores) cuyas acciones tienen cierta influencia sobre el resultado final. La teoría de juegos intenta modelar matemáticamente este tipo de situaciones.
Formalmente llamaremos *juego* a una situación que tenga las siguientes características que llamaremos *elementos de un juego*:

1. Un conjunto de jugadores, entre los cuales puede estar el azar.

2. Un conjunto de sucesiones de movimientos, algunos simultáneos, que pueden ser decisiones de los jugadores o resultados del azar.

3. Una descripción de la información disponible para cada jugador en cualquier momento del juego.

4. Un conjunto de resultados de cada sucesión de movimientos. (En la teoría de juegos este conjunto puede tomar varios nombres, como conjunto de premios o conjunto de acuerdos, usaremos esos nombres indistintamente).

Lo primero que necesitamos para modelar un juego es una forma de ordenar los posibles resultados que reflejen nuestras preferencias sobre ellos. Consideraremos sólo aquellas preferencias que se puedan representar por una relación $\succeq$ sobre el conjunto de resultados posibles que cumpla las siguientes condiciones:

1. $a \succeq a$ para toda $a \in A$ donde A es el conjunto de resultados (reflexividad)
2. $a \succeq b$ y $b \succeq c$ implica que $a \succeq c$ (transitividad)
3. Para todas $a, b \in A$ tenemos $a \succeq b$ o $b \succeq a$ (completitud o totalidad)

Las dos primeras propiedades nos dicen que la relación es un *quasi-orden* y la tercera nos dice que es *total o completa*. Si a un jugador lo denotamos con i, a esta relación la llamaremos la *relación de preferencia del jugador* i y la denotaremos con $\succeq_i$. Interpretaremos a $a \succeq_i b$ como "a es preferido a b por el jugador i". Cuando $a \succeq_i b$ y $b \succeq_i a$ decimos que "a es indiferente a b para el jugador i" y lo denotaremos con $a \sim_i b$. Si $a \succeq_i b$ y no pasa $b \succeq_i a$ entonces decimos que a es estrictamente preferido a b y lo denotamos con $a \succ_i b$.

Supondremos que estamos tratando con individuos *racionales*, con esto queremos decir que escogerán sus acciones de manera que el resultado al que se preve llegar sea el máximo alcanzable según su relación de preferencia.

Para seguir modelando matemáticamente este tipo de situaciones quisiéramos poder asociar un pago (número real) a cada uno de los resultados posibles para así poder usar las herramientas del cálculo al tratar de maximizar la relación de preferencia. Por lo tanto el pago deberá asociarse de manera que respete esta relación de preferencia. Esta asociación se hace generalmente por medio de lo que llamamos una *función de utilidad.*

1.1 Funciones de Utilidad

Definición 1.1 *Sean A el conjunto de resultados posibles sobre el cual se tiene definida una relación de preferencia $\succeq$ y $u : A \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que u es una* ***función de utilidad*** *que representa la relación de preferencia $\succeq$ si se satisface que $u(a) \geq u(b) \Leftrightarrow a \succeq b$.*

Notemos que hay muchas funciones de utilidad que representan una misma relación de preferencia, en particular la composición $g \circ u$ de una función monótona creciente g con una función de utilidad u es también una función de utilidad que representa la misma relación de preferencia.

Podría parecer complicado manejar el hecho de que haya una infinidad de representaciones para una misma relación de preferencia por lo que gustaría tener un resultado que permitiera caracterizar a todas estas representaciones. Para esto podríamos preguntarnos si todas las funciones de utilidad que representan a una relación de preferencia resultan ser una transformación monótona creciente de la otra. La respuesta es afirmativa si el conjunto de resultados cuenta con elementos máximo y mínimo, respecto al orden de la preferencia. Formalmente, si existen a_m y $a_p \in A$ tales que $a_m \succeq a \succeq a_p$ para todo $a \in A$ tendremos que: si dos funciones de utilidad $u, v : A \to \mathbb{R}$ representan a la misma relación de preferencia $\succeq$ entonces, existe una función creciente (no necesariamente única) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $u = g \circ v$. Esta función g la podemos definir como $g(x) = u(a_i)$ si existe $a_i \in A$ tal que $v(a_i) = x$. Faltaría definirla en los valores en donde $x \neq v(a_i)$ para toda $a_i \in A$; esto lo podemos hacer de varias maneras siempre teniendo en cuenta que la función g tiene que ser creciente. Podemos definirla de manera que incluso sea continua; sean $s_x = \sup\{y = v(a_i) \text{ con } y < x\}$ e $i_x = \inf\{y = v(a_i) \text{ con } y > x\}$, entonces existe $p \in (0,1)$ tal que $x = ps_x + (1 - p)i_x$ y definiendo $g(s_x) = \sup\{g(z) \text{ con } z < x\}$ y $g(i_x) = \inf\{ g(z) \text{ con } z > x\}$ los cuales existen ya que hay un peor y un mejor resultado por lo que las funciones de utilidad están acotadas. Ahora podriamos definir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$g(x) = \begin{cases} u(a_p) & \text{si } x \leq v(a_p) \\ u(a_i) & \text{si existe } a_i \in A \text{ tal que } v(a_i) = x \\ pg(s_x) + (1-p)g(i_x) & \text{si no existe } a_i \in A \text{ tal que } v(a_i) = x \\ u(a_m) & \text{si } x \geq v(a_m) \end{cases}$$

y así $u = g \circ v$.

Todavía no hemos visto que estas funciones de utilidad existen, para el caso en que el número de resultados es finito es muy fácil construirla y es lo que se hará a continuación.

Dada una relación de preferencia $\succeq$ sobre A, donde A es finito podemos construir fácilmente una función de utilidad para que la represente. La relación de indiferencia $\sim$ es una relación de equivalencia sobre los resultados entonces, induce una partición en el conjunto las clases de equivalencia. Nótese que las clases de equivalencia son un número finito, y los elementos en cada una de ellas también son finitos. Numeramos las clases de equivalencia de tal manera que si $a \in A_i$ y $b \in A_{i+1}$ entonces $a \prec b$ para cada i. Ahora definimos $u : A \to \mathbb{R}$ como $u(a) = i$ para $a \in A_i$, por la forma en que se construyó u resulta ser una función de utilidad que representa a la relación de preferencia $\succeq$.

Si el conjunto de resultados A no es finito, ¿existirá una función de utilidad que represente a una relación de preferencia $\succeq$ en A? En general no, el siguiente ejemplo lo muestra.

Ejemplo 1.1 *Sea $A = \mathbb{R}^2_+$ y la relación de preferencia $\succeq$ el orden lexicográfico donde $(x_1, y_1) \succeq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2$ o $x_1 = x_2$ y $y_1 \geq y_2$. Con una relación de preferencia definida de esta manera no existe ninguna función de utilidad que la represente. Supongamos que existiera $u : A \to \mathbb{R}$ que la representara entonces como para toda $x \in R$ tenemos $(x, 1) \prec (x, 2)$ por ser función de utilidad debe suceder que $u(x, 1) < u(x, 2)$; podemos así elegir un número racional r_x tal que $u(x, 1) < r_x < u(x, 2)$ nótese que si $x \neq y$ entonces $r_x \neq r_y$ pero entonces estamos poniendo en correspondencia a los números reales con los números racionales y esto no puede ser ya que tienen cardinalidades diferentes por lo tanto no existe una función de utilidad que represente la relación de preferencia.*

El que exista o no una función de utilidad que represente la relación de preferencia depende de las propiedades de dicha relación. Si el conjunto de acuerdos o resultados es $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo entonces podemos definir las propiedades de continuidad y monotonía que nos permiten garantizar la existencia de una función de utilidad.

Definición 1.2 *Decimos que la relación de preferencia $\succeq$ en $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo es* ***continua*** *si para toda $b \in A$ los conjuntos $A_{b,+} = \{a \in A \mid a \succeq b\}$ y $A_{b,-} = \{a \in A \mid b \succeq a\}$*

son conjuntos cerrados (topológicamente).

Definición 1.3 *Decimos que la relación de preferencia $\succeq$ en $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo es* ***monótona*** *si dados $a = (a_1, ..., a_n)$, $b = (b_1, ..., b_n) \in A$ tales que $a_i > b_i$ para toda $i = 1, ..., n$, entonces $a \succ b$.*

Esta propiedad refleja el hecho de que "más es mejor".

Teorema 1.1 *Si una relación de preferencia $\succeq$ sobre $A = \mathbb{R}^n$ es continua y monótona entonces existe una función de utilidad $u : A \to \mathbb{R}$ que la representa.*

Demostración : Por continuidad los conjuntos $A_{a,+}$ y $A_{a,-}$ son cerrados entonces los conjuntos $B_+ = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha e \succeq a\}$ y $B_- = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid a \succeq \alpha e\}$ con $e = (1, 1, ..., 1)$ son cerrados (porque son la intersección de $A_{a,+}$ y $A_{a,-}$ con $\mathbb{R}$) y por monotonía son no vacíos, notemos que por la completitud o totalidad de la relación $\succeq$, $\mathbb{R} \subset (B_+ \cup B_-)$, como estos conjuntos son cerrados no vacíos y $\mathbb{R}$ es conexo se tiene que $(B_+ \cap B_-) \neq \emptyset$. Por lo tanto existe un escalar α tal que $\alpha e \sim a$, además por la monotonía $\alpha_1 e \succ \alpha_2 e$ siempre que $\alpha_1 > \alpha_2$. De lo cual deducimos que si $\alpha e \sim a$ entonces α es única, así podemos definir la función $u : A \to \mathbb{R}$ como $u(a) = \alpha$ (figura 2.1). Supongamos que $a \succeq b$ y $u(a) = \alpha$ y $u(b) = \beta$ como $\alpha e \sim a$ y $\beta e \sim b$ entonces tendremos que $\alpha e \succeq \beta e$, por monotonía $\alpha \geq \beta$ así $u(a) \geq u(b)$, el regreso es igual, por lo tanto $u : A \to \mathbb{R}$ será una función de utilidad que representa la relación de preferencia $\succeq$. ■

Podemos graficar las curvas de nivel de u en el caso de que $A = \mathbb{R}^2$. Sea $a \in A$ tal que $u(a) = \alpha$ entonces a pertenece a la curva de nivel $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid u(x) = \alpha\}$, a la que llamaremos **curva de indiferencia** de a, ya que todos los puntos de la curva son indiferentes a a $(a \sim x)$.

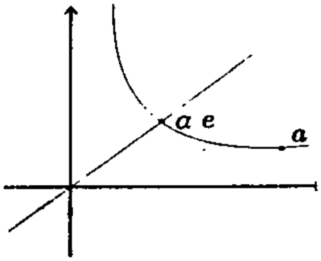

Figura 1.1: Curva de indiferencia de a

Con ésto queda garantizada la existencia de una función de utilidad para algunos casos.

Como vimos anteriormente el conjunto de jugadores puede contener al azar lo que introduce incertidumbre sobre el resultado. Esto es, no sabremos con certeza a qué resultado se llegará, sino solamente la próbabilidad con la que se llegará a éste. Por lo tanto la relación de preferencia tendrá que estar definida también para las distribuciones de probabilidad sobre los resultados, a las que llamaremos loterías. Esto trae un nuevo problema, definir una función de utilidad que represente a las relaciones de preferencia sobre las distribuciones de probabilidad sobre los resultados. Esto se abordará en la siguiente sección.

1.2 Utilidad Bajo Incertidumbre

Primero necesitaremos que la relación de preferencia no sólo esté definida para el conjunto de resultados A sino también para las loterías.

Si A es finito las posibles medidas de probabilidad son discretas y faciles de manejar. Si A es un continuo necesitariamos tener definida una $\sigma-$álgebra en A y una medida de probabilidad P, para poder trabajar con medidas de probabilidad (loterías) $f(a)$ continuas. Resulta mucho más fácil trabajar con medidas de probabilidad discretas, entonces para claridad de la exposición trabajaremos con el caso A finito o a lo más numerable, a menos que se haga la aclaración de otra cosa[1].

Definición 1.4 *Una lotería es una función $L : A \to [0,1]$ tal que $\sum_{a\in A} L(a) = 1$. También podemos decir que una lotería es una distribución de probabilidad sobre los acuerdos en A.*

Denotaremos $lot(A)$ el conjunto de todas las loterías sobre A.

Una forma muy útil de representar las loterías es por medio de una matriz

$$L = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \hline p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \\ \hline \end{array}$$

donde a_i representa un resultado y p_i la probabilidad de que se llegue a ese resultado.

Notemos que el conjunto de los resultados se puede representar como un subconjunto de las loterías identificando al resultado a_i con la lotería $L_{a_i} : A \to \mathbb{R}$ tal que

$$L_{a_i}(a_j) = \begin{cases} 1 & si\ a_i = a_j \\ \\ 0 & si\ a_i \neq a_j \end{cases}$$

Es en este sentido que decimos que el conjunto de loterías extiende al conjunto de resultados.

Ejemplo 1.2 *Sean $A = \{a, b\}$ el conjunto de resultados o premios. $L : A \to [0,1]$ definida como $L(a) = \frac{1}{2}$ y $L(b) = \frac{1}{2}$ es una lotería y $L(a)$ se interpreta como la probabilidad de que a sea el resultado (o premio) que resulte del juego. Generalmente*

[1]En la mayoría de los casos si tenemos un conjunto de resultados A que es un continuo sólo usaremos loterías discretas, esto es, medidas de probabilidad con soporte finito.

las presentaremos de la siguiente manera

$$L = \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline\end{array}$$

Esta lotería la podemos pensar como un "volado" en donde se da el premio a si cae sol y b si cae águila; ya que el "volado" tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ de que caiga águila y $\frac{1}{2}$ de que caiga sol.

Ahora pensemos en la siguiente situación, se tira un volado, si cae sol se gana b y si cae águila se tira otro volado, si en el segundo volado cae sol se gana b y si cae águila se gana a. Esto se puede representar por medio de una lotería de la siguiente forma

$$L = \begin{array}{|c|c|}\hline \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline\end{array} & b \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline\end{array}$$

en donde el primer volado está representado por la caja grande y donde los premios son: b (si cae sol) y otro volado, representado por la caja más pequeña, (si cae águila). Esta sería una lotería de loterías a la que llamaremos lotería compuesta.

Definición 1.5 *Una **lotería compuesta** es una lotería del conjunto de loterías. Es decir, es una función $L : lot(A) \to [0,1]$ tal que $\sum_{l \in lot(A)} L(l) = 1$*

En la lotería L se está abusando de la notación ya que en lugar de escribir

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline\end{array} & \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\end{array} \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline\end{array}$$

sólo escribimos los premios que tienen probabilidad positiva (mayor a cero), ésto se hace para facilitar la notación. De ahora en adelante sólo escribiremos la parte de la lotería en donde se les asigna a los resultados una probabilidad positiva.

Un individuo que supiera un poco de probabilidad se daría cuenta de que en términos de probabilidad la situación representada por L es la misma que si se tira un volado en donde la moneda está cargada con probabilidad $\frac{1}{4}$ para que caiga águila (y ganar a), y probabilidad $\frac{3}{4}$ para que caiga sol, (y ganar b). Esto se debe a que la probabilidad de sacar a en la lotería compuesta es $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ y la probabilidad de sacar b es $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. Entonces para este individuo la lotería compuesta L se puede sustituir por la lotería simple $\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \hline \end{array}$.

En general siempre podemos pasar de una lotería compuesta a una lotería simple "equivalente" en términos de probabilidades. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

$$M = \begin{array}{|c|c|}\hline \begin{array}{|c|c|c|}\hline a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline p_1 & p_2 & p_3 \\ \hline \end{array} & a_3 \\ \hline q_1 & q_2 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|}\hline a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline p_1 \times q_1 & p_2 \times q_1 & (p_3 \times q_1) + q_2 \\ \hline \end{array}$$

Una vez que se introduce el concepto de lotería surge la pregunta de cómo establecer una relación de preferencia sobre las loterías. Una manera natural de hacerlo sería hacer una extensión a partir de la relación de preferencia $\succeq$ que se tenía para los acuerdos. Como hemos visto los resultados se pueden identificar con un subconjunto de las loterías entonces la relación de preferencia sobre las loterías $\succeq_e$ deberá cumplir que

$$a_1 \succeq a_2 \Leftrightarrow L_{a_1} \succeq_e L_{a_2}$$

Si los resultados son premios monetarios un individuo racional preferirá los resultados con mayores premios a los de menor premio. Durante el desarrollo de la probabilidad en siglo XVII, matemáticos como Blaise Pascal y Pierre Fermat propusieron, para extender la relación de preferencia a las loterías, que dada una lotería $L(x_i) = p_i$, donde x_i representa el $i-$ésimo premio monetario que se obtiene con probabilidad p_i, se calculara el valor esperado de la lotería, o valor monetario esperado, mediante la función

$$E(L) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

y basándose en este valor, extender la relación de preferencia sobre las loterías prefiriendo la lotería que diera un valor esperado mayor, esto es,

$$L_i \succeq_e L_j \Leftrightarrow E(L_i) \geq E(Lj).$$

El hecho de que los individuos consideran algo más que el valor monetario esperado para extender sus preferencias se ilustró mediante un ejemplo propuesto por Nicholas Bernoulli en 1728 y se conoce como la *Paradoja de San Petersburgo.*

Ejemplo 1.3 *La lotería de San Petersburgo es un juego en donde se tira una moneda al aire hasta que salga cara por primera vez, si esto sucede en la $k-$ésima tirada se ganan 2^k pesos. Podemos representar este juego por medio de la lotería $L(2^k) = \frac{1}{2^k}$ que indica que 2^k es el premio resultante con probabilidad $\frac{1}{2^k}$, entonces el valor monetario esperado de esta lotería es*

$$E[L] = \sum_{k\in N} 2^k L(2^k) = \sum_{k\in N} 2^k \frac{1}{2^k} = 1 + 1 + 1 + \cdots$$

el cual es infinito. Entonces esta lotería sería preferida a cualquier otra que tuviera un valor esperado finito como por ejemplo la lotería que da probabilidad 1 a ganar 2^m para algún $m \in N$ y cero a 2^k para cualquier otro $k \neq m$. De aquí que la persona preferiría entrar a la lotería a recibir cualquier cantidad 2^m pero esto no es muy razonable. La gente racional preferiría tener la cantidad segura 2^m para algún m a entrar en la lotería de San Petersburgo, en donde sólo se puede ganar la cantidad 2^m con probabilidad $\frac{1}{2^m}$.

Con esta forma de extender las preferencias se pretendía deducir el comportamiento de los individuos en situaciones de incertidumbre tomando en cuenta sólo las preferencias de los individuos en situaciones seguras lo cuál es insuficiente. Cuando hay incertidumbre o riesgo necesitamos de una teoría que también tome en cuenta el grado de riesgo que los individuos desean asumir. Von Neumann y Morgenstern desarrollaron una teoría de este tipo. Ellos dieron una lista de postulados de racionalidad sobre las preferencias en situaciones de riesgo que implican que una persona racional, al elegir entre dos loterías, se comporta como si estuviera maximizando algo, que no es necesariamente el valor monetario esperado. Para esto definieron la utilidad esperada, que es la generalización más natural del valor esperado, ya que esta no sólo funciona para juegos en donde el premio sea monetario o numérico sino que al usar la función de utilidad podemos también contemplar juegos con pagos no numéricos. Además la actitud de los individuos frente al riesgo queda dada por la función de utilidad.

1.2.1 Utilidad Esperada

Definición 1.6 *La **utilidad esperada** de una función de utilidad $u : A \to \mathbb{R}$ es una función $Eu : lot(A) \to \mathbb{R}$ que se define como $Eu(L) = \sum_{a \in A} u(a)L(a)$.*

Von Neumann y Morgenstern proponían que la utilidad esperada representara las preferencias sobre las loterías. A continuación daremos dos ejemplos de relaciones de preferencia en donde la utilidad esperada no resulta ser función de utilidad que las representa.

Ejemplo 1.4 *Sea $A = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ con la relación de preferencia inducida por el orden*

$1 \succeq \frac{1}{2} \succeq 0$, *y sea la función de utilidad* $u : A \to \mathbb{R}$ *definida como la función identidad*

$$u(a) = \begin{cases} 0 & si\ a = 0 \\ \\ \frac{1}{2} & si\ a = \frac{1}{2} \\ \\ 1 & si\ a = 1 \end{cases}$$

ahora demos la relación de preferencia sobre las loterías de A *de la siguiente forma* $L_1 \succeq_e L_{\frac{1}{2}} \succeq_e L_* \succeq_e L \succeq_e L_0$*donde* $L_* = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$ *y* $L \in \{lot(A)/\{L_1, L_{\frac{1}{2}}, L_0, L_*\}\}$ *en este caso*

$$Eu(L_*) = \frac{1}{2} < Eu(L_1) = 1$$

pero

$$L_* \succeq_e L_1$$

por lo tanto la utilidad esperada no resulta ser una función de utilidad que represente la preferencia $\succeq_e$.

Ejemplo 1.5 *Sean* $A, \succeq$ *y* u *definidas como en el ejemplo anterior. La relación de preferencia sobre* $lot(a)$ *la definimos como* $L_1 \succeq_e L_{\frac{1}{2}} \succeq_e L'' \succeq_e L' \succeq_e L$ *donde*
$L' = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \hline \end{array}$ $L'' = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \hline \end{array}$ *y* $L \in \{lot(A)/\{L_1, L_{\frac{1}{2}}, L', L''\}\}$. *Tenemos que*

$$Eu(L') = \frac{1}{3} > Eu(L'') = \frac{1}{4}$$

pero

$$L'' \succeq_e L'$$

entonces la utilidad esperada tampoco resulta ser una función de utilidad que represente la preferencia $\succeq_e$.

Como vemos en los ejemplos no cualquier relación de preferencia sobre las loterías está representada por la función de utilidad esperada. Lo que significa que si queremos usar funciones de utilidad esperada para representar preferencias bajo incertidumbre nos tendremos que restringir a cierto tipo de las preferencias. Von Neumann y Morgenstern proponen dos condiciones, también llamadas principios de racionalidad, que caracterizan a este tipo de relaciones de preferencia. Con ellas se garantiza que la utilidad esperada representa a dichas preferencias sobre las loterías. Hemos invertido el orden en que se dieron los postulados originalmente para facilitar la comprensión de los mismos.

El *segundo supuesto de Von Neumann y Morgenstern* sobre las preferencias $\succeq_e$ es que cada premio intermedio entre el mejor, que denotaremos por $\mathcal{W}$ (del inglés win), y el peor, que denotaremos por $\mathcal{L}$ (del inglés loose) sea indiferente a alguna lotería $L \in lot(\{\mathcal{W},\mathcal{L}\})$. Esto es, para todo $a \in A$ existe $q \in (0,1)$ tal que $a \sim_e L_q$ donde L_q es la lotería que le asigna a $\mathcal{W}$ probabilidad q y a $\mathcal{L}$ probabilidad $(1-q)$. Notemos que se está cometiendo un abuso de la notación en la expresión $a \sim_e L_q$ ya que formalmente deberíamos de escribir $L_a \sim_e L_q$ donde L_a es la lotería que se identifica con el acuerdo a. Este supuesto implícitamente nos restringe a las relaciones de preferencia sobre los acuerdos tales que podamos decir cuál es el mejor y cuál es el peor, condición que siempre sucede cuando los resultados son finitos, de otra manera esta sería una condición más que tendría que cumplir la relación de preferencia sobre los acuerdos. Además nos dice que cualquier conjunto de resultados se puede identificar como un subconjunto de las loterías con sólo dos elementos, el mejor y el peor[2].

Von Neumann y Morgenstern suponen implícitamente que a un individuo no le importa que premios indiferentes sean sustituidos en las loterías. Formalmente si $a_i \sim b_i$

[2]Podemos extender este supuesto a conjuntos no acotados, teniendo dos resultados a y b tales que $a \prec b$ y para todo resultado $c \in A$ exista $q \in [0,1]$ tal que el resultado intermedio entre a, b y c sea indiferente a la lotería que asigna q al mejor de los tres resultados y $1-q$ al peor de los tres.

para $i = 1, ..., n$ entonces

$$L = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \hline p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \\ \hline\end{array} \sim_e M = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ \hline p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \\ \hline\end{array}.$$

Dados estos supuestos las loterías sobre el conjunto de resultados originales también quedarán identificadas con algunas loterías sobre el conjunto de estos dos resultados de la siguiente manera.

Sea $L = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \hline\end{array}$, usando que a cada acuerdo a_i lo podemos sustituir por una lotería L_{q_i} equivalente

$$L \sim_e \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \begin{array}{|c|c|}\hline \mathcal{W} & \mathcal{L} \\ \hline q_1 & 1-q_1 \\ \hline\end{array} & \begin{array}{|c|c|}\hline \mathcal{W} & \mathcal{L} \\ \hline q_2 & 1-q_2 \\ \hline\end{array} & \cdots & \begin{array}{|c|c|}\hline \mathcal{W} & \mathcal{L} \\ \hline q_n & 1-q_n \\ \hline\end{array} \\ \hline p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \hline\end{array}$$

y sustituyendo esta lotería compuesta por una simple equivalente

$$L \sim_e \begin{array}{|c|c|}\hline \mathcal{W} & \mathcal{L} \\ \hline \sum_{i=1}^{n} p_i q_i & 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \\ \hline\end{array}.$$

Suponiendo que tenemos un conjunto de resultados que se puede reducir de la manera anterior a un conjunto de sólo dos resultados podemos plantear el primer supuesto.

El *primer supuesto de Von Neuman y Morgenstern* sobre las preferencias $\succeq_e$ es que de entre dos loterías definidas sobre un conjunto de dos resultados que consisten en $\mathcal{W}$ (el mejor) y $\mathcal{L}$ (el peor), un jugador racional preferirá siempre la lotería que asigne mayor probabilidad a $\mathcal{W}$. Esto es si $L_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline \mathcal{W} & \mathcal{L} \\ \hline p_1 & 1-p_1 \\ \hline\end{array}$ $L_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline \mathcal{W} & \mathcal{L} \\ \hline p_2 & 1-p_2 \\ \hline\end{array}$ y $p_1 \geq p_2$ entonces $L_1 \succeq_e L_2$. Obsérvese que bajo este supuesto lo recíproco también sucede, esto es si $L_1 \succeq_e L_2$ entonces $p_1 \geq p_2$.

Ahora podemos mostrar que con estos dos supuestos el jugador se comportará como si estuviera maximizando la utilidad esperada cuando se desea establecer la preferencia entre dos loterías. Como el jugador asignó un orden de preferencia mayor a $\mathcal{W}$ que a $\mathcal{L}$, también su utilidad será mayor, es decir $u(\mathcal{W}) \geq u(\mathcal{L})$. Para simplificar los cálculos podemos suponer que $u(\mathcal{W}) = 1$ y $u(\mathcal{L}) = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
Eu(L_1) &= p_1 u(\mathcal{W}) + (1 - p_1)u(\mathcal{L}) = p_1 \text{ y} \\
Eu(L_2) &= p_2 u(\mathcal{W}) + (1 - p_2)u(\mathcal{L}) = p_2 \text{ lo que implica} \\
Eu(L_1) &\geq Eu(L_2) \Leftrightarrow p_1 \geq p_2 \Leftrightarrow L_1 \succeq_e L_2
\end{aligned}$$

es decir $Eu : lot(\{\mathcal{W},\mathcal{L}\}) \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad que representa la relación de preferencia $\succeq_e$ sobre $lot(\{\mathcal{W},\mathcal{L}\})$.

Como se mostró en los ejemplos anteriores no siempre la utilidad esperada resulta ser una función de utilidad que representa las preferencias sobre las loterías, cuando sí lo es la llamaremos *función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern.*

Definición 1.7 *Una función de utilidad $u : A \to \mathbb{R}$ que represente la relación de preferencia $\succeq$ sobre el conjunto de resultados A es una* ***función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern*** *o función de utilidad esperada, si $Eu : lot(A) \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad que representa a $\succeq_e$ la relación de preferencia sobre las loterías.*

La importancia de los supuestos de racionalidad es que garantizan la existencia de una función de utilidad, a saber la utilidad esperada, que representa a una relación de preferencia sobre las loterías. Esto se resume en el siguiente teorema.

Teorema 1.2 *Si la relación de preferencia $\succeq_e$ sobre el conjunto de loterías del conjunto de resultados A cumple con los supuestos de racionalidad de Von Neumann y Morgenstern entonces, existe una función $Eu : lot(a) \to \mathbb{R}$ que es una función de utilidad que representa a la relación de preferencia $\succeq_e$.*

Demostración : Por el segundo supuesto podemos definir $u : A \to \mathbb{R}$ como $u(a_i) = q_i$ donde q_i es tal que $L_{q_i} \sim_e a_i$. Primero verificaremos que es función de utilidad. Sean

$a_i, a_j \in A$ y supongamos $a_i \succeq a_j$, tenemos por el segundo supuesto que existen $q_i, q_j \in (0,1)$ tal que $a_i \sim_e L_{q_i}$ donde L_{q_i} es la lotería que le asigna a $\mathcal{W}$ probabilidad q y a $\mathcal{L}$ probabilidad $(1-q)$ y $a_j \sim_e L_{q_j}$. Como $a_i \succeq a_j$ tendremos que $L_{q_i} \succeq_e L_{q_j}$ y por el primer supuesto $q_i \geq q_j$ y $u(a_i) \geq u(a_j)$. Para el regreso supongamos que $u(a_i) \geq u(a_j)$ entonces $q_i \geq q_j$ por el primer supuesto $L_{q_i} \succeq_e L_{q_j}$ y como $L_{q_i} \sim_e a_i$ tendremos $a_i \succeq a_j$ por lo tanto tenemos que u es una función de utilidad que representa a la relación de preferencia $\succeq$. Para verificar que esta función de utilidad es de Von Neumann y Morgenstern recordaremos que a un jugador no le importa que en una lotería un premio (o resultado) sea sustituido por otro que le es indiferente, y que tampoco le importaría que la lotería compuesta sea sustituida por una lotería simple "equivalente". Sea $L \in lot(A)$ queremos confirmar que Eu es una función de utilidad que representa las preferencias del jugador sobre sus loterías

$$L = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \hline \end{array}$$

podemos sustituir a los premios a_i por un premio indiferente L_{q_i}, que existe por el segundo postulado,

$$L \sim \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{W} & \mathcal{L} \\ \hline q_1 & 1-q_1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{W} & \mathcal{L} \\ \hline q_2 & 1-q_2 \\ \hline \end{array} & \cdots & \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{W} & \mathcal{L} \\ \hline q_n & 1-q_n \\ \hline \end{array} \\ \hline p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \hline \end{array}$$

sustituimos la lotería compuesta por la lotería simple "equivalente"

$$L \sim \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{W} & \mathcal{L} \\ \hline \sum_{i=1}^{n} p_i q_i & 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \\ \hline \end{array}$$

podemos llamar $r = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$ y con esto $L \sim_e L_r$ entonces dadas dos loterías L y M podemos llegar a loterías indiferentes $L \sim_e L_r$ y $M \sim_e L_{r'}$ y por el primer supuesto de Von Neumann y Morgenstern un jugador racional preferirá la que tenga mayor r.

Tenemos entonces que $L \succeq_e M$ si y sólo si $L_r \succeq_e L_{r'}$, y por el primer supuesto, esto sucede si y sólo si $r \geq r'$ y como

$$r = p_1 q_1 + \cdots + p_n q_n = p_1 u(a_1) + \cdots + p_n u(a_n) = Eu(L)$$

esto último sucede si y sólo si $Eu(L) \geq Eu(M)$. Esto demuestra que $Eu : lot(A) \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad que representa la relación de preferencia $\succeq_e$ del jugador sobre las loterías y entonces $u : A \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern que representa la relación de preferencias $\succeq$ sobre los premios. ■

Observemos que con estas preferencias el individuo se comporta como si estuviera maximizando la utilidad esperada.

La racionalidad que está reflejada en el primer supuesto de Von Neumann se puede establecer por medio de la propiedad de preferencia estocástica dominada, que dicha de manera informal es: "se prefiere la lotería con más probabilidad de mejores premios y menor riesgo".

Definición 1.8 *Diremos que una relación de preferencia $\succeq$ tiene la propiedad de* ***preferencia estocástica dominada de primer orden*** *si cada vez que una lotería L se pueda obtener de M disminuyendo las probabilidades de ciertos resultados y aumentándolas en otros más preferidos (en cuyo caso diremos que L domina estocásticamente a M), entonces $L \succeq M$. Esto es, dadas* $L = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \hline \end{array}$ *y* $M = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \hline \end{array}$ *donde $a_1 \preceq a_2 \preceq \cdots \preceq a_n$, si*

$$\sum_{i=1}^{k} (p_i - q_i) \leq 0 \text{ para toda } 1 \leq k \leq n$$

entonces se debe tener que $L \succeq M$.

Ejemplo 1.6 $L = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 20 & 30 & 100 \\ \hline \frac{1}{3} - \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \\ \hline \end{array}$ *tiene que ser preferida a* $M = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 20 & 30 & 100 \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline \end{array}$ *ya que la probabilidad de ganar 100 aumentó de $\frac{1}{3}$ a $(\frac{1}{3} + \frac{1}{6})$, disminuyendo la de el menos* *preferido* 20.

$L' = $

20	30	100
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

tiene que ser preferida a $M =$

20	30	100
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

ya que la probabilidad de ganar 30 *aumenta sin afectar la de mayor ganancia* 100.

Supongamos que tenemos resultados monetarios, esto es $A = \{a_1, ..., a_n\}$ con $a_i \in \mathbb{R}$ y una relación de preferencia tal que $a_1 \preceq \cdots \preceq a_n$. Recordemos que cada resultado a_i se puede identificar con la lotería

$L_{a_i} =$

a_1	a_2	$\cdots$	a_i	$\cdots$	a_n
0	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0

de tal forma que es fácil ver que L_{a_i} domina estocásticamente a L_{a_j} si y sólo si $a_i \succeq a_j$. Los individuos se comportarán de manera racional si su relación de preferencia es compatible con la relación de orden común de los resultados de la siguiente forma: $a_i \geq a_j \Leftrightarrow a_i \succeq a_j$. La función de utilidad esperada representa la propiedad de preferencia estocástica dominada si cada vez que $a_i > a_j$ entonces $u(a_i) > u(a_j)$ esto es si $u : A \to \mathbb{R}$ es una función creciente.

Supongamos que tenemos una relación de preferencia sobre las loterías con los mismos premios que la lotería de San Petersburgo, que cumple con los supuestos de Von Neumman y Morgenstern. Entonces la utilidad esperada de la lotería de San Petersburgo sería de la forma

$$Eu(L) = \frac{1}{2}u(2) + \cdots + \frac{1}{2^k}u(2^k) + \cdots$$

Si la función de utilidad sobre los premios $u : A \to \mathbb{R}$ se definiera como $u(a) = 4\sqrt{a}$. La lotería de San Petersburgo tendría una utilidad esperada

$$Eu(L) = 4\{\frac{1}{2}\sqrt{2} + \cdots + \frac{1}{2^k}\sqrt{2^k} + \cdots\} = \frac{4}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Así la lotería de San Petersburgo sería equivalente a una cantidad finita de dinero mayor o menor dependiendo de cómo fuera la función de utilidad u. En el caso anterior ya no se prefiere la lotería de San Petersburgo a cualquiera otra que diera una cantidad finita, de hecho podemos encontrar muchas que sean preferidas. Pensemos otra vez en las loterías L_k, definidas como $L_k(2^k) = 1$ y $L_k(2^j) = 0$ tenemos que

$$L_k \succeq_e L \Leftrightarrow Eu(L_k) \geq Eu(L)$$

entonces para que L_k fuera preferida a L tendría que pasar que

$$Eu(L_k) = u(2^k) = 4\sqrt{2^k} \text{ fuera mayor que } Eu(L) = \frac{4}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

De aquí obtenemos la condición

$$\begin{aligned} 4\sqrt{2^k} &\geq \frac{4}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \Leftrightarrow 2^k \geq (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})^{-2} \Leftrightarrow k \ln(2) \geq -2\ln(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \Leftrightarrow \\ k &\geq -2\ln(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})/\ln(2). \end{aligned}$$

Así ya tenemos muchas loterías que son preferidas a L, todas las loterías L_k con k que cumpla la condición anterior.

Las funciones de utilidad de Von Neumann y Morgenstern nos dan una idea de la actitud de el individuo hacia el riesgo. En el siguiente sentido, suponga que se le ofrece al individuo una lotería

$$M = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 16 \\ \hline \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \hline \end{array}$$

este jugador le asignará a la lotería una utilidad de

$$Eu(M) = \frac{4}{5}u(1) + \frac{1}{5}u(16) = \frac{4}{5} \times 4\sqrt{1} + \frac{1}{5} \times 4\sqrt{16} = 6.4$$

El valor monetario esperado de la lotería es

$$E(M) = \frac{4}{5} \times 1 + \frac{1}{5} \times 16 = 4$$

En este caso el jugador le da una mayor preferencia a tener 4 con seguridad que entrar a la lotería que tendría como valor esperado 4 ya que

$$Eu(L_4) = u(4) = 4\sqrt{4} = 8 \text{ es mayor que } Eu(M) = 6.4$$

Recordemos que el premio 4 está identificado con la lotería L_4 definida como $L_4(4) = 1$ $L(2^j) = 0$ si $j \neq 2$ así $u(4) = Eu(L_4)$. En este ejemplo el jugador prefiere un resultado seguro al riesgo de una lotería que involucra probabilidades.

Trataremos de definir de manera más precisa las actitudes de los individuos frente al riesgo empezando con un caso ideal en donde los premios (o acuerdos) sean un continuo en los reales y la función de utilidad que representa a nuestra relación de preferencia es continua y de Von Neumann y Morgenstern. Entonces el valor esperado de una lotería (sólo tomamos las loterías con soporte finito) resulta ser un número real que cae en el continuo de los premios, es decir, el valor esperado de una lotería coincide con un premio. Al hacer esto vemos a la lotería como un premio más y parecieran no importar las probabilidades de la lotería, y podemos calcular la utilidad del valor esperado de la lotería (visto como premio). A diferencia de lo anterior al calcular la utilidad esperada de la lotería no perdemos la información sobre las probabilidades, ni sobre la utilidad de los acuerdos. La comparación de estos dos valores, la utilidad del valor esperado de una lotería y la utilidad esperada de la misma lotería, nos permite establecer un criterio para determinar la actitud del individuo frente al riesgo. Si la utilidad del valor esperado de la lotería resulta ser mayor que la utilidad esperada de la misma, es decir,

$$u(E(L)) > Eu(L)$$

podemos pensar que al no tomar en cuenta las probabilidades (que implican un riesgo) el individuo valoró más la lotería (vista como premio) que al tomar en cuenta el riesgo, por lo tanto es averso al riesgo.

Para los casos en donde la función de utilidad es de Von Neuman y además el conjunto de acuerdos o premios es un continuo en los reales y las loterías con las que trabajamos son aquellas que tienen soporte finito, podemos dar la siguiente definición.

Definición 1.9 *Decimos que un individuo es* ***averso al riesgo*** *si prefiere tener el valor monetario esperado de una lotería con seguridad, más que entrar a la lotería, esto es* $E(L) \succeq_e L$ *donde* $L \in lot(A)$. *Si* u *es función de utilidad de Von Neumann esta condición es*

$$u(E(L)) = Eu(E(L)) > Eu(L) \text{ para toda } L \in lot(A)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} uE(L) &> Eu(L) \\ u(\sum_{a\in A} a_i p_i) &> \sum_{a\in A} u(a_i)p_i \end{aligned}$$

Como $\sum_{a\in A} p_i = 1$, *esta condición es equivalente a decir que la función de utilidad* u *debe ser cóncava.*

En resumen, si la función de utilidad es cóncava decimos que el jugador es averso al riesgo, y por el contrario, si es convexa, decimos que es *amante del riesgo*. Cuando la función u es lineal, decimos que el jugador es *neutral al riesgo*.

Siguiendo la idea anterior, si el conjunto de premios (dados en números reales) es discreto podemos decir en este caso que el individuo es averso al riesgo si el conjunto de parejas ordenadas $\{(a_1, u(a_1)), ..., (a_n, u(a_n))\}$ tiene una "forma cóncava". Es decir, un individuo es averso al riesgo si $\frac{u(a_{i+1})-u(a_i)}{a_{i+1}-a_i} < \frac{u(a_i)-u(a_{i-1})}{a_i-a_{i-1}}$ para $i = 2, ..., n$. Análogamente, si el conjunto de parejas ordenadas $\{(a_1, u(a_1)), ..., (a_n, u(a_n))\}$ tiene una "forma convexa", o están en una recta, diremos que el individuo es *amante del riesgo* o *neutral al riesgo*, respectivamente.

En la siguiente figura damos un ejemplo de una función de utilidad de un individuo averso al riesgo, con premios en los reales. Sean $a_1 \prec a_n$, $L = \begin{array}{|c|c|} \hline a_1 & a_n \\ \hline \alpha & 1-\alpha \\ \hline \end{array}$ y $\overline{a} \sim_e l$, nótese que $\overline{a} = E(L)$, graficamente la función de utilidad es:

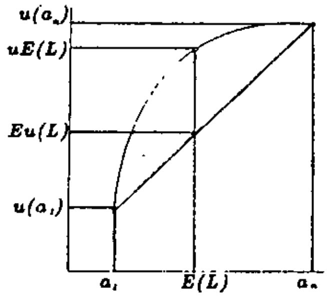

Figura 1.2: Función de utilidad de un individuo averso al riesgo

Ya habíamos notado que las relaciones de preferencia tenían varias funciones de utilidad que las podían representar y podíamos encontrar algunas componiendo la función de utilidad con una función monótona creciente. Con las funciones de utilidad de Von Neumann Morgenstern esto no necesariamente sucede ya que a pesar de que transformaciones monótonas crecientes de una función de utilidad vuelven a ser una función de utilidad sobre los premios o acuerdos, no siempre el valor esperado de la función compuesta resulta ser una función de utilidad sobre las loterías. Únicamente las transformaciones de la forma

$$b \cdot u(x) + c, \text{ con } b > 0$$

llamadas transformaciones afines, resultan ser a su vez funciones de utilidad de Von Neumann y Morgenstern. Efectivamente, si u es función de utilidad de Von Neumman y definimos $u' = b \cdot u(x) + c$ con $b > 0$, la utilidad esperada de

$$L = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \hline \end{array}$$

será

$$\begin{aligned} Eu'(L) &= \sum_{i=1}^{n} u'(a_i)p_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (b \cdot u(a_i) + c)p_i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}(b \cdot u(a_i))p_i + c \\
&= b\sum_{i=1}^{n} u(a_i)p_i + c \\
&= bEu(L) + c.
\end{aligned}
$$

Que al ser una composición monótona creciente de $Eu(L)$, que es función de utilidad sobre las loterías, resulta ser también una función de utilidad sobre las loterías y entonces u' es una función de utilidad de Von Neumman y Morgenstern.

Más aún, se tiene que cualesquiera dos funciones de Von Neumman y Morgenstern que representen a la misma relación de preferencia se relacionan de esta manera, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.3 *Supongamos que $u_1 : A \to \mathbb{R}$ y $u_2 : A \to \mathbb{R}$ son funciones de utilidad de Von Neumann y Morgenstern que representan a la relación de preferencia $\succeq_e$ definida en $lot(A)$, que cumple con los supuestos de Von Neumann y Morgenstern. Entonces existen constantes $B > 0$ y C tales que $u_2 = Bu_1 + C$.*

Demostración : Sean B_i y C_i las soluciones de

$$
\begin{aligned}
0 &= B_i u_i(\mathcal{L}) + C_i; \\
1 &= B_i u_i(\mathcal{W}) + C_i
\end{aligned}
$$

para $i = 1, 2$ (se puede checar que $B_i > 0$). Definimos las funciones de utilidad $U_i = B_i u_i + C_i$ para $i = 1, 2$. Consideremos ahora cualquier premio $w \in A$ y escojamos q tal que $w \sim_e L_q$, donde L_q es la lotería que da a $\mathcal{W}$ la probabilidad q y a $\mathcal{L}$ la probabilidad $1 - q$. Entonces

$$U_i(w) = EU_i(w) = EU_i(L_q) = qU_i(\mathcal{W}) + (1 - q)U_i(\mathcal{L}) = q \text{ para } i = 1, 2$$

esto implica que

$$B_1 u_1(w) + C_1 = q = B_2 u_2(w) + C_2$$

y resolviendo para $u_2(w)$,

$$u_2(w) = Bu_1(w) + C, \text{ con } B > 0 \text{ donde } B = \frac{B_1}{B_2} \text{ y } C = \frac{C_1 - C_2}{B_2} .$$

■

Notemos que este tipo de transformaciones conserva la concavidad de la función y entonces también conserva la actitud del individuo frente al riesgo.

Ya vimos que la función de utilidad nos puede dar información sobre las actitudes que los individuos tienen frente al riesgo. Teniendo dos individuos aversos al riesgo, nos podríamos preguntar cuál es más averso al riesgo. En ocasiones se dice que la concavidad de la función de utilidad podría medir la aversión al riesgo, pero esto no puede ser ya que podemos cambiar la concavidad de la función de utilidad por una transformación afín y obtener otra función de utilidad que represente a la misma relación de preferencia, pero que sea más cóncava. Es por esto que para medir la aversión al riesgo de una cierta relación de preferencia $\succeq$ se necesita que la medida sea invariante bajo transformaciones afines. Arrow y Pratt, modificando la manera de medir la curvatura de una función, propusieron una medida tal que tuviera esta característica (que por lo mismo ya no es una buena medida de la curvatura).

Definición 1.10 *Si u es una función de utilidad de clase C^2 que representa a la relación de preferencia $\preceq$ definimos $r : A \to \mathbb{R}$,* ***la medida Arrow-Pratt de aversión al riesgo de la preferencia*** $\preceq$*, como $r_u(a) = -\frac{u''(a)}{u'(a)}$.*

Si $r_u(a) = -\frac{u''(a)}{u'(a)} \geq r_v(a) = -\frac{v''(a)}{v'(a)}$ para toda $a \in A$, el individuo con preferencias representadas por la función de utilidad u es más averso al riesgo que el individuo con preferencias representadas por la función de utilidad v.

Veamos que esta medida es invariante bajo las transformaciones afines. Sea $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de utilidad que representa las preferencias $\succeq$ y $v = Au + B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una transformación afín de u. Si calculamos la medida de Arrow-Pratt r_v tenemos

$$r_v(a) = -\frac{v''(a)}{v'(a)} = -\frac{Au''(a)}{Au'(a)} = -\frac{u''(a)}{u'(a)} = r_u(a)$$

Entonces no importa qué función de utilidad usemos, la medida de aversión al riesgo es igual si la relación de preferencia que representan es la misma.

La siguiente proposición establece la relación que debe existir entre las funciones de utilidad para que una refleje más aversión al riesgo que la otra.

Proposición 1.1 *Sean $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones de utilidad de clase C^2 que representan distintas preferencias. Entonces, $r_v(a) > r_u(a)$ para toda $a \in A$ si y sólo si existe $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente y cóncava tal que $v = \alpha \circ u$*

Demostración : Supongamos que existe $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente y cóncava tal que $v = \alpha \circ u$, derivamos y obtenemos

$$\begin{aligned} v' &= \alpha'(u) \cdot u' \\ v'' &= \alpha''(u) \cdot [u']^2 + u'' \cdot \alpha'(u) \end{aligned}$$

entonces la medida de Arrow Pratt $r_v(a)$ es

$$\begin{aligned} -\frac{v''}{v'} &= -\frac{\alpha''(u) \cdot [u']^2 + u'' \cdot \alpha'(u)}{\alpha'(u)u'} \\ &= -\frac{u''}{u'} - \frac{\alpha''(u) \cdot u'}{\alpha'(u)}. \end{aligned}$$

Como α es cóncava y creciente tendremos que $-\frac{\alpha''(u) \cdot u'}{\alpha'(u)} > 0$, entonces

$$r_v(a) = -\frac{v''}{v'} > -\frac{u''}{u'} = r_u(a).$$

Ahora supongamos que $r_v(a) = -\frac{v''}{v'} > -\frac{u''}{u'} = r_u(a)$ entonces tenemos $\frac{u''}{u'} - \frac{v''}{v'} < 0$. Quisiéramos encontrar una función α cóncava creciente tal que $v = \alpha \circ u$. Como u es creciente (por racionalidad) su inversa existe y podemos definir $\alpha = v \circ u^{-1}$, así $\alpha \circ u = v \circ u^{-1} \circ u = v$ sólo falta ver $\alpha' > 0$ y $\alpha'' < 0$ por la forma en que se definió

$$\alpha' = v' \cdot (u^{-1})' \tag{1.1}$$

$$\alpha'' = v'' \cdot [(u^{-1})']^2 + (u^{-1})'' \cdot v' \tag{1.2}$$

como $u \circ u^{-1} = I$ entonces

$$\begin{aligned} (u^{-1})' &= \frac{1}{u'} \\ (u^{-1})'' &= -\frac{u''}{[u']^2} \end{aligned}$$

sustituyendo en 1.1 y 1.2 tenemos

$$\begin{aligned} \alpha' &= v' \cdot \frac{1}{u'} \\ \alpha'' &= v'' \cdot \frac{1}{u'} - \frac{u''}{[u']^2} \cdot v' \\ &= \frac{v'}{u'} \cdot (\frac{v''}{v'} - \frac{u''}{u'}) \end{aligned}$$

como u y v son crecientes $\alpha' > 0$ por otro lado teníamos por hipótesis que $\frac{u''}{u'} - \frac{v''}{v'} < 0$ entonces $\alpha'' < 0$. ■

Notemos que Eu, la función de utilidad esperada, es lineal en probabilidades y está totalmente determinada por los valores $u(a_i)$, los cuales sirven para determinar las propiedades de las preferencias como racionalidad o actitudes frente al riesgo. En este sentido, podemos decir que la función de utilidad esperada Eu exhibe ciertas propiedades de la preferencia a través de sus coeficientes $u(a_i)$.

Pensemos a Eu como función de las probabilidades, esto es, renombrándola como $V : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ donde $S^{n-1} = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ tendremos que $V(P) = V(p_1, ..., p_n) = \sum_{a \in A} u(a_i)p_i$.

- La función $V : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ definida como $V(P) = V(p_1, ..., p_n) = \sum_{a \in A} u(a_i)p_i$

exhibe la propiedad de preferencia estocástica dominada si y sólo si los coeficientes $\{u(a_i)\}$ preservan el orden de los a_i, inducido por la relación de preferenica.

- La función $V : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $V(P) = V(p_1, ..., p_n) = \sum_{a \in A} u(a_i)p_i$ exhibe aversión al riesgo si y sólo si los coeficientes $\{u(a_i)\}$ son cóncavos en a_i, esto es la relación $\frac{u(a_{i+1})-u(a_i)}{a_{i+1}-a_i} < \frac{u(a_i)-u(a_{i-1})}{a_i-a_{i-1}}$ se cumple para toda i.

- La función de utilidad esperada $V^*(P) = V^*(p_1, ..., p_n) = \sum u^*(a_i)p_i$ exhibe más aversión al riesgo que la función $V(P) = V(p_1, ..., p_n) = \sum u(a_i)p_i$ si y sólo si existe una función cóncava y creciente $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que los coeficientes $u^*(a_i) = \alpha(u(a_i))$ para toda i.

Ya hemos visto que los modelos que usan este tipo de funciones de utilidad son muy útiles, ya que con sólo conocer una función de utilidad que represente a la relación de preferencia, tenemos mucha información de las actitudes del individuo frente al riesgo. Estos modelos, llamados de utilidad esperada, han tenido mucha aceptación y la mayoría de los trabajos en teoría de juegos están basados en este tipo de modelos. Pero aún hay problemas ya que los individuos no son muy racionales frente a situaciones de riesgo, como se ilustrará por medio de un ejemplo en la siguiente sección.

1.2.2 Utilidad no Esperada

Hay situaciones reales en las que se dan relaciones de preferencias que no necesariamente satisfacen los supuestos de Von Neuman y Morgenstern, Allais lo mostró mediante el siguiente ejemplo, llamado la paradoja de Allais.

Ejemplo 1.7 *Tenemos cuatro loterías sobre el conjunto de premios {\$0,\$1m,\$5m} (se dan en millones de pesos).*

$J =$

$\$0m$	$\$1m$	$\$5m$
0	1	0

$$K = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \$0m & \$1m & \$5m \\ \hline .01 & .89 & .1 \\ \hline \end{array}$$

$$L = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \$0m & \$1m & \$5m \\ \hline .89 & .11 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$M = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \$0m & \$1m & \$5m \\ \hline .9 & 0 & .1 \\ \hline \end{array}$$

Se le pregunta a un individuo cuál lotería prefiere entre J y K, la mayoría de los individuos prefieren J ya que tienen un millón con seguridad y en la otra hay un riesgo de obtener nada, entonces $J \succeq_e K$. Al hacerles la misma pregunta entre L y M prefieren M ya que si el riesgo se va a correr es mejor la lotería que paga más es caso de ganar, así $M \succeq_e L$. El problema es que con estas preferencias la utilidad esperada Eu de cualquier función de utilidad u no resulta ser una función de utilidad que las represente (es decir ninguna función de utilidad u es de Von Neumann y Morgenstern para estas preferencias). Supongamos que Eu fuera la función de utilidad esperada que representa a estas preferencias y que $u(0) = 0$ y $u(5) = 1$ entonces

$$\begin{aligned} Eu(J) &= u(0) \times 0 + u(1) \times 1 + u(5) \times 0 = u(1) \\ Eu(K) &= u(0) \times .01 + u(1) \times .89 + u(5) \times .1 = (u(1) \times .89) + .1 \end{aligned}$$

como $J \succeq_e K$ debe ser cierto que

$$\begin{aligned} u(1) &> (u(1) \times .89) + .1 \\ u(1) \times (1 - .89) &> .1 \\ u(1) &> 10/11 \end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} Eu(L) &= u(0) \times .89 + u(1) \times .11 + u(5) \times 0 = u(1) \times .11 \\ Eu(M) &= u(0) \times .9 + u(1) \times 0 + u(5) \times .1 = .1 \end{aligned}$$

como $M \succeq_e L$ *entonces*

$$\begin{aligned} .1 &> u(1) \times .11 \\ 10/11 &> u(1) \end{aligned}$$

Y esto no puede ser posible por la condición anterior; por lo tanto Eu no representa a estas preferencias. Por el teorema 1.2 sabemos que las preferencias dadas no son consistentes con los principios de racionalidad de Von Neumann y Morgenstern ya que si lo fueran existiría una función de utilidad esperada que las representara.

Intuitivamente podemos notar que la mayoría de los individuos a los que les fue presentada esta situación, se comportaron como aversos al riesgo al escoger la primera vez ya que el incentivo para entrar en la lotería K era muy poco, pero se comportaron como amantes del riesgo al escoger la segunda vez ya que se sacrifica seguridad por expectativas de ganar más dinero.

Vamos a hacer notar que en el caso de tener sólo tres premios, como en ejemplo anterior, este comportamiento no es posible si las preferencias cumplen los supuestos de Von Neumann y Morgenstern . Supongamos que tenemos tres premios, dados en números reales, y $a_1 < a_2 < a_3$ entonces las loterías están determinadas por ternas de números (p_1, p_2, p_3) tales que $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$. Si despejamos $p_2 = 1 - p_1 - p_3$ podemos "representar" a las loterías como los puntos de el triángulo unitario en el plano (p_1, p_3).
Movimientos hacia arriba dejando a p_1 fijo aumentan p_3 al ir disminuyendo p_2 y movimientos hacia el eje p_3 sobre líneas paralelas a la hipotenusa del triángulo aumentan p_3 disminuyendo p_1 (ver figura 1.3). Entonces, como la utilidad esperada de las loterías va

aumentando (al aumentar la probabilidad de los más preferidos) las preferencias aumentan en esas direcciones. Veamos como son las curvas de nivel de la función de utilidad (figura 1.3), a las que llamaremos curvas de indiferencia.

$$\begin{aligned} Eu_0 &= \sum_{i=1}^{3} u(a_i)p_i = u(a_1)p_1 + u(a_2)(1 - p_1 - p_3) + u(a_3)p_3 \\ p_3 &= Eu_0 - u(a_2) + (u(a_2) - u(a_1))/(u(a_3) - u(a_2))p_1 \end{aligned}$$

Entonces las curvas de indiferencia son rectas con pendiente

$$(u(a_2) - u(a_1))/(u(a_3) - u(a_2))$$

y la preferencia va aumentando hacia la izquierda de dichas rectas.

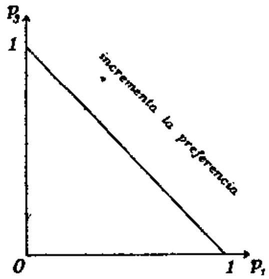

Figura 1.3: Curvas de indiferencia de la utilidad esperada

Las curvas de nivel del valor esperado son:

$$\begin{aligned} a_0 &= \sum_{i=1}^{3} a_i p_i = a_1 p_1 + a_2(1 - p_1 - p_3) + a_3 p_3 \\ p_3 &= a_0 - a_2 + (a_2 - a_1)/(a_3 - a_2)p_1 \end{aligned}$$

que es una recta con pendiente

$$(a_2 - a_1)/(a_3 - a_2)$$

y las llamaremos curvas de iso-valor esperado, esto se puede ver en la figura 1.4.

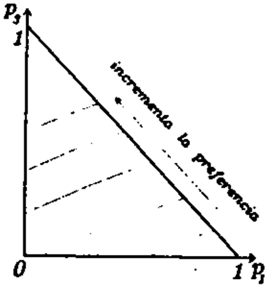

Figura 1.4: Curvas de iso-valor esperado

Si el individuo es averso al riesgo la función de utilidad que representa sus preferencias será cóncava y como $a_1 < a_2 < a_3$ tendremos de acuerdo a la definición de averso (amante) al riesgo que

$$\begin{aligned}(u(a_2) - u(a_1))/(a_2 - a_1) &> (u(a_3) - u(a_2))/(a_3 - a_2)\\ (u(a_2) - u(a_1)/u(a_3) - u(a_2)) &> (a_2 - a_1)/(a_3 - a_2)\end{aligned}$$

que implica que las curvas de indiferenoia tienen pendiente mayor que las curvas de iso-valor esperado. Y el individuo es amante del riesgo las curvas de indiferencia tendrán pendiente menor que las de iso-valor esperado.

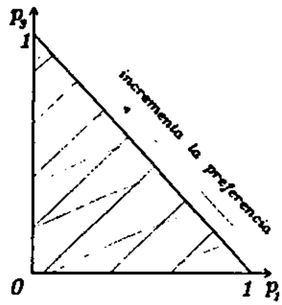

Figura 1.5: Curvas de indiferencia de un averso al riesgo y curvas de iso-valor esperado

Entonces si la función de utilidad es de Von Neumman y Morgenterm, independientemente de las probabilidades de ganar o de perder el individuo mantiene su actitud frente al riesgo, lo cual no sucedió en el ejemplo anterior de la paradoja de Allais.

Por las preferencias que se dieron en la paradoja de Allais las curvas de indiferencia tendrían que ser de mayor pendiente que el iso-valor esperado en el caso de comparar J con K y de pendiente menor al comparar L con M. Esto se muestra en la siguiente figura.

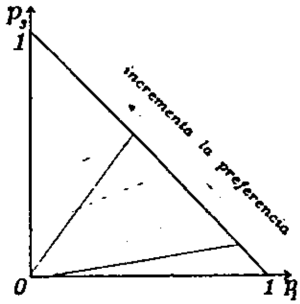

Figura 2.6: Ejemplo de la paradoja de Allais

Debido a que la función de utilidad esperada es lineal en probabilidades por la forma en que se definió

$$Eu(L) = \sum_{a \in A} u(a_i)p_i$$

las curvas de nivel de la función de utilidad esperada serán rectas paralelas, es decir, las curvas de indiferencia son independientes de las probabilidades.

Si queremos trabajar con preferencias del tipo de las que se presentaron en la paradoja de Allais necesitamos considerar otros tipos de funciones de utilidad que no sean lineales en probabilidades, a las que llamaremos funciones de utilidad no esperada.

Se han propuesto varias funciones de utilidad no esperada como

$\sum_{a \in A} u(a_i)\pi(p_i)$	*Edwards (1955) Kahneman y Tversky (1979)*
$\sum_{a \in A} u(a_i)p_i / \sum_{a \in A} \tau(a_i)p_i$	*Chew (1983) Fishburn (1983)*
$\sum_{a \in A} u(a_i)\pi(p_i) / \sum_{a \in A}(p_i)$	*Karamar (1978)*
$\sum_{a \in A} u(a_i)[g(p_1 + \cdots + p_i) - g(p_1 + \cdots + p_{i-1})$	*Quiggin (1982)*
$\sum_{a \in A} u(a_i)p_i + [\sum_{a \in A} \tau(a_i)p_i]^2$	*Machina (1982)*

Las funciones $\pi(\cdot), \tau(\cdot), g(\cdot), etc.$ no tienen una forma explícita lo que hace es dar condiciones sobre ellas para que las funciones de utilidad definidas por medio de estas funciones exhiban las propiedades de dominancia estocástica, aversión al riesgo etc. Macchina dió un enfoque más general para tratar con este tipo de funciones. Para estudiarlas a todas en conjunto y no una por una, utiliza el Cálculo Diferencial para recuperar las propiedades que se habían obtenido. A continuación se describe bevemente este enfoque.

Como se recordará en el caso de la función de utilidad esperada $V : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ donde $S^{n-1} = \{(x_1, ..., x_n) \mid \sum x_i = 1\}$ definida como $V(P) = V(p_1, ..., p_n) = \sum_{i=1}^{n} u(a_i)p_i$ se obtuvieron las siguientes condiciones:

- La función $V : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ definida como $V(P) = V(p_1, ..., p_n) = \sum_{i=1}^{n} u(a_i)p_i$ exhibe la propiedad de preferencia estocástica dominada si y sólo si los coeficientes $\{u(a_i)\}$ preservan el orden de los a_i.

- La función $V : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ definida como $V(P) = V(p_1, ..., p_n) = \sum_{i=1}^{n} u(a_i)p_i$ exhibe aversión al riesgo si y sólo si los coeficientes $\{u(a_i)\}$ son cóncavos en a_i, esto es la relación $\frac{u(a_{i+1})-u(a_i)}{a_{i+1}-a_i} < \frac{u(a_i)-u(a_{i-1})}{a_i-a_{i-1}}$ se cumple para toda i.

- La función de utilidad esperada $V^*(P) = V^*(p_1, ..., p_n) = \sum_{i=1}^{n} u^*(a_i)p_i$ exhibe más aversión al riesgo que la función $V(P) = V(p_1, ..., p_n) = \sum_{i=1}^{n} u(a_i)p_i$ si y sólo si existe una función $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cóncava y creciente tal que los coeficientes $u^*(a_i) = \alpha(u(a_i))$ para toda i.

La idea es que si las funciones de utilidad no son lineales en probabilidades, entonces exhibirán las mismas propiedades si sus mejores aproximaciones lineales las exhiben para cada distribución P de probabilidades.

Tomemos la función de utilidad $\mathcal{V}(P) = \mathcal{V}(p_1, ..., p_n)$ diferenciable y considere sus derivadas parciales. Sean $\mathcal{U}(a_i; P) = \frac{\partial \mathcal{V}(P)}{\partial p_i}$. Sabemos que la mejor aproximación lineal L_P a la función $\mathcal{V}$ alrededor de un punto P está dada por $L_P(Q) = L_P(q_1, ..., q_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{U}(a_i; P)q_i$. Siguiendo las ideas anteriores diremos que:

- La función de utilidad no esperada $V : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ exhibe preferencia estocástica dominada si y sólo si $\{\mathcal{U}(a_i, P)\}$ son crecientes con respecto a a_i para toda P.

- La función de utilidad no esperada $V : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ exhibe aversión al riesgo si y sólo si $\{\mathcal{U}(a_i, P_0)\}$ son cóncavos respecto a a_1, para cada P.

- La función de utilidad no esperada $V^* : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ será al menos tan adversa al riesgo como $V : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ si y solo si para cada P existe una función $\alpha_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cóncava y creciente tal que los coeficientes $\mathcal{U}^*(a_i, P) = \alpha_P(\mathcal{U}(a_i, P))$ para cada i.

Macchina logra obtener condiciones que deben de cumplir las aproximaciones lineales de las funciones de utilidad no esperada para recuperar las propiedades que tenía la teoría de utilidad esperada. En el siguiente capítulo veremos como se resuelven los juegos de negociación suponiendo modelos de utilidad esperada y después se resolverán juegos de negociación para modelos de utilidad no esperada que exhiben todas las propiedades que se tenían con la función de utilidad esperada.

Capítulo 2

Enfoque Axiomático de la Teoría de Negociación

2.1 Teoría de Negociación

Usaremos el término de "negociación" para referirnos a una situación en la que

1. Los individuos o jugadores tienen la posibilidad de llegar a un acuerdo para beneficio mutuo.

2. Hay un conflicto de intereses sobre el acuerdo al que se llegará.

3. No se puede imponer ningún acuerdo a ningún jugador sin su aprobación.

La teoría de negociación es una exploración de la relación entre el resultado de la negociación y las características de la situación.

Suponemos que los jugadores son racionales, que todos tienen la misma habilidad para negociar, que sus preferencias sobre los posibles resultados están bien definidas y cuando tienen que escoger un resultado escogen el más preferido.

Para dar un modelo teórico de negociación usamos la teoría de juegos y la solución se da, en este caso, con el modelo axiomático de Nash.

2.2 Enfoque Axiomático

En 1950 Nash estableció un marco teórico para estudiar los problemas de negociación.

Los **problemas de negociación** tiene los siguientes elementos:

- Un conjunto de *negociadores* N, al que llamaremos *conjunto de jugadores*, en general sólo consta de dos jugadores $N = \{1, 2\}$.
- Un conjunto de acuerdos posibles al que denotaremos con A.
- Un desacuerdo al que denotaremos con D.
- Para cada jugador (i) una relación de preferencia $\succeq_i$ sobre el conjunto $A \cup \{D\}$.

Los jugadores pueden llegar a un acuerdo en el conjunto A y si no lo hacen el desacuerdo D ocurre. Así $(N, A, D, \succeq_i$ con $i \in N)$ define una situación de negociación.

El conjunto de posibles acuerdos o resultados A puede tomar varias formas. Un acuerdo puede ser un precio o contrato detallado que especifique las acciones que se tendrán para distintas contingencias. No pondremos ninguna restricción sobre A, pero sí se necesita que haya un único desacuerdo D.

Las actitudes frente al riesgo de los jugadores tienen un papel importante en la teoría de negociación de Nash. Requerimos que la relación de preferencia de cada jugador esté definida sobre el conjunto de loterías sobre los acuerdos y no sólo sobre el conjunto de acuerdos [1]. Esto se debe a que muchas veces no sabemos a que acuerdo se llegará, pero tenemos idea de la probabilidad con la que se llega a él.

Suponemos que la relación de preferencia de cada jugador satisface los supuestos de von Neumann y Morgenstern. Entonces tendremos que para cada jugador i existe una función de utilidad de Von Neumann $u_i : A \cup \{D\} \to \mathbb{R}$ es decir, una lotería se prefiere a otra si y sólo si la utilidad esperada de la primera lotería es mayor que la de la segunda. Y por el teorema 1.3 sabemos que la función es única salvo transformaciones afines.

[1] Puede ser que el conjunto de acuerdos no sea finito, pero para facilitar los cálculos sólo tomaremos loterías con soporte finito.

Dados el conjunto de posibles acuerdos A, el desacuerdo D, y las funciones de utilidad para cada jugador podemos construir el conjunto de pares de utilidad, que representan los posibles resultados de la negociación, esto es, S donde
$S = \{(u_1(a), u_2(a))$ para toda $a \in A \cup \{D\}\}$ y denotamos $d = (u_1(D), u_2(D))$. Nash usa a la representación $\langle S, d\rangle$ para resolver el problema, ya que resume la misma información que $(N, A, D, \succeq_i \text{con } i \in N)$. De ahora en adelante entenderemos por un problema de negociación a lo siguiente:

Definición 2.1 *Un* ***problema de negociación*** *es un par $\langle S, d\rangle$ donde $S \subset \mathbb{R}^2$ es compacto y convexo, $d = (d_1, d_2) \in S$ es un punto distinguido de S que representa al desacuerdo y al menos existe $s = (s_1, s_2) \in S$ tal que $s_i > d_i$ para $i = 1, 2$.*

Gráficamente un problema de negociación se representa como un compacto convexo S en $\mathbb{R}^2$ con un punto interior distinguido (d) que será el desacuerdo.

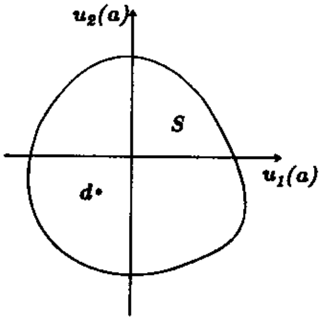

Figura 2.1: Ejemplo de Problema de Negociación

Notemos que de esta manera eliminamos al conjunto de acuerdos A de la discusión y dos situaciones de negociación que induzcan el mismo par $\langle S, d\rangle$ serán tratados igual, aunque los conjuntos de acuerdos y las relaciones de preferencia no sean iguales. El supuesto de que S es compacto significa que las utilidades que se obtienen en un acuerdo son limitadas. El supuesto de convexidad de S es una restricción mayor, se necesitan condiciones sobre el conjunto de acuerdos y sobre las funciones de utilidad. Esto se satisface, por ejemplo, en el caso de que A sea el conjunto de todas las loterías sobre un conjunto de acuerdos, ya que A, resulta ser la cápsula convexa de los acuerdos. También suponemos que hay un acuerdo preferido por los dos jugadores al desacuerdo así aseguramos que haya incentivos a negociar y llegar a un acuerdo.

Ahora quisiéramos encontrar una solución para el problema de negociación, para lo cual definiremos lo que se entiende por una solución de negociación.

Definición 2.2 *El conjunto de todos los problemas de negociación se denota con $\mathcal{B}$. Una* ***solución de negociación*** *es una función $f : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^2$ que asigna a cada problema de negociación $\langle S, d\rangle \in \mathcal{B}$ un único elemento de S.*

De acuerdo a esta definición habría muchas soluciones de negociación. Nash propuso que la solución cumpliera cuatro propiedades, llamadas axiomas de Nash, las cuales reflejarían las propiedades mínimas que tendría que cumplir una "buena" solución. Más adelante aclararemos que es una "buena" solución.

2.3 Axiomas de Nash

Nash impuso cuatro axiomas a la solución de la negociación $f : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^2$.

El primero formaliza la suposición de que las preferencias de los jugadores son lo importante para resolver los problemas de negociación, y no las funciones de utilidad que se usan para representarlas. Recordemos que dada una relación de preferencia $\succeq$ podemos construir varias funciones de utilidad esperada que las representen, pero todas son una transformación afín de la otra (Teorema 1.3). Entonces una "buena" solución debería de respetar estas transformaciones, en el siguiente sentido. Si pensamos en un conjunto de acuerdos A, un desacuerdo D y unas relaciones de preferencia $\succeq_i$, podemos tomar $S = \{(u_1(a), u_2(a))$ para toda $a \in A \cup \{D\}\}$ o
$S' = \{(\alpha_1 u_1(a)+\beta_1, \alpha_2 u_2(a)+\beta_2)$ para toda $a \in A \cup \{D\}\}$ como posibles representaciones del juego y quisiéramos que si $u_i(a^*) = f_i(S, d)$ entonces $f_i(S', d) = \alpha_i u_i(a^*) + \beta_i$ para $i = 1, 2$. Esta propiedad queda reflejada en el siguiente axioma.

- INV (*Invarianza a Representaciones de Utilidad Equivalentes*) Suponga que el problema de negociación

$\langle S', d' \rangle$ se obtuvo de $\langle S, d \rangle$ por medio de la transformación $s_i \mapsto \alpha_i s_i + \beta_i$ donde $\alpha_i > 0$ para $i = 1, 2$. Entonces $f_i(S', d') = \alpha_i f_i(S, d) + \beta_i$ para $i = 1, 2$.

Nótese que en la formulación de este axioma no imponemos la condición de que $\langle S', d' \rangle$ y $\langle S, d \rangle$ se obtengan a partir del mismo problema de negociación, lo que lo hace más general.

El segundo axioma plantea que si los jugadores tienen el mismo poder de negociación, esto es si los jugadores pueden obtener las mismas utilidades (posiblemente en distintos acuerdos), la solución deberá ser equitativa, dando la misma utilidad a los dos. Formalmente esto se puede establecer de la siguiente manera, si $(s_1, s_2) \in S$ entonces $(s_2, s_1) \in S$, en cuyo caso decimos que S es simétrico. Entonces la solución de negociación deberá asignar un elemento de S para el cual los jugadores obtienen la misma utilidad.

Formalmente, el problema de negociación $\langle S, d \rangle$ es *simétrico* si $d_1 = d_2$ y $(s_1, s_2) \in S$ si y sólo si $(s_2, s_1) \in S$.

- SYM (*Simetría*) Si el problema de negociación $\langle S, d \rangle$ es simétrico entonces $f_1(S, d) = f_2(S, d)$.

El siguiente axioma es el más controvertido ya que tiene que ver con lo que tendría que suceder si hay una reducción en el dominio S de negociación. Si pensamos en un conjunto de acuerdos A, un desacuerdo D y unas relaciones de preferencia $\succsim_i$ y suponemos que $u_i(a^*) = f_i(S, d)$ con $S = \{(u_1(a), u_2(a))$ para toda $a \in A \cup \{D\}\}$ al reducir el conjunto de acuerdos A a un subconjunto de acuerdos A' que contenga a a^* entonces se deberá tener que $f_i(T, d) = u_i(a^*)$ donde $T = \{(u_1(a), u_2(a))$ para toda $a \in A' \cup \{D\}\}$. La idea detrás de este axioma es que si se escogió a^* cuando se tenían los acuerdos de A, al reducir los acuerdos a A' se tendrán menos de los que se tenían antes y por lo tanto el resultado se debería conservar. Entonces todos los elementos de T , menos $(u_1(a^*), u_2(a^*))$ se vuelven "irrelevantes", en este caso podemos decir que la solución no depende de alternativas irrelevantes.

- IIA (*Independencia de alternativas irrelevantes)* Si $\langle S, d\rangle$ y $\langle T, d\rangle$ son problemas de negociación con $T \subset S$ y $f(S,d) \in T$, entonces $f(S,d) = f(T,d)$.

En un principio parecería muy natural pensar que si $f(S,d) = s^*$ es la solución de un problema de negociación entonces para todo conjunto $T \subset S$ tal que $s^* \in T$ debería dar la misma solución, es decir, $f(T,d) = s^*$. Pero bajo este axioma pueden presentarse situaciones como la que se ve en la figura 2.2:

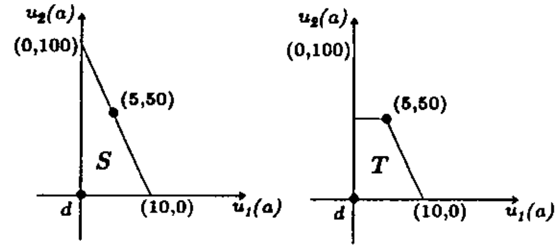

Figura 2.2: Ejemplo de alternativas irrelevantes

En este ejemplo, en S los jugadores llegan a un acuerdo (5,50) donde ambos ganan la mitad de lo posible. Pero en T (5,50) ya no es una solución muy adecuada ya que el jugador 2 ganará todo lo posible y el jugador 1 sólo la mitad de lo posible. Es difícil pensar que el jugador 1 estaría dispuesto a dejar que 2 ganara todo, siendo que él gana sólo la mitad. Es debido a este tipo de problemas que el axioma es controvertido.

Por último debería de suceder que una "buena" solución f deberá ser óptima en el siguiente sentido. Si se eligió $f(S,d) = s^*$ no debería existir otra alternativa que dejara a un jugador tan bien como en s^* y mejorara al otro. En este caso se dice que la solución es Pareto óptima.

- PAR (*Pareto Eficiencia)* Suponga que (S, d) es un problema de negociación, $s \in S$, $t \in S$, y $t_i \geq s_i$ para $i = 1, 2$ y la desigualdad es estricta para alguna $i = 1, 2$. Entonces $f(S, d) \neq s$.

Notemos que con este axioma se garantiza que $f(S, d)$ será distinto al desacuerdo ya que en un problema de negociación existe $s \in S$ tal que $s_i > d_i$ para $i = 1.2$.

Es importante observar que SYM y PAR restringen el comportamiento de la solución en problemas de negociación particulares, mientras que INV y IIA requieren que la solución sea "consistente" entre problemas de negociación que guardan ciertas relaciones.

2.4 Teorema de Nash

Se demostrará que siempre existe una única solución que cumpla los cuatro axiomas anteriores, a la que llamaremos **solución de Nash**. Se mostrará que la solución es la que selecciona al par de utilidad $s \in S$ que maximiza el producto de las diferencias entre la utilidad de cada jugador y el desacuerdo para el dominio en que cada diferencia es positiva. De hecho el siguiente lema muestra que este producto tiene un máximo en estos casos y que el par en el que se alcanza es único.

Lema 2.1 *Si existe un punto $s = (s_1, s_2) \in S$ tal que $s_i > d_i$ para $i = 1, 2$, entonces la función $g : S_{>d} \rightarrow \mathbb{R}$ con $S_{>d} = \{s \in S \mid s_i > d_i \text{ para } i = 1, 2\}$ definida como $g(s) = (s_1 - d_1)(s_2 - d_2)$ tiene un máximo en $S_{>d}$ y es único.*

Demostración : Como S es un conjunto compacto su intersección con $\{s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 \mid s_i \geq d_i \text{ para } i = 1, 2\}$, que es cerrado, será también compacto (cerrado y acotado). Como la función g es continua, alcanzará un máximo sobre dicho compacto, y como existe $s \in S$ tal que $s_i > d_i$ para $i = 1, 2$, este máximo será estrictamente mayor que cero. Si $s_i = d_i$ para alguna i entonces $g(s) = 0$, por lo tanto el máximo de g está en $S_{>d} = \{s \in S \mid s_i > d_i \text{ para } i = 1, 2\}$.

Para probar que el máximo es único suponga que hay dos puntos s y $s' \in S_{>d}$ donde

g toma su máximo, y sea $M = g(s) = g(s') = (s_1 - d_1)(s_2 - d_2) = (s_1' - d_1)(s_2' - d_2)$ ese máximo. Si $s_1 = s_1'$ entonces $s_2 = s_2'$ y ya acabamos. Supongamos que $s_1 < s_1'$, entonces $s_2 > s_2'$. Como $S_{>d}$ es convexo, ya que es la intersección de los convexos S y $\{s \in \mathbb{R}^2 \mid s_i > d_i \text{ para } i = 1,2\}$, se tiene que el punto $s_0 = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s' \in S_{>d}$. Ahora

$$\begin{aligned}
g(s_0) &= (\frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_1' - d_1) \cdot (\frac{1}{2}s_2 + \frac{1}{2}s_2' - d_2) \\
&= (\frac{(s_1 - d_1) + (s_1' - d_1)}{2}) \cdot (\frac{(s_2 - d_2) + (s_2' - d_2)}{2}) \\
&= \frac{(s_1 - d_1)(s_2 - d_2)}{2} + \frac{(s_1' - s_1)(s_2 - s_2')}{4} + \frac{(s_1' - d_1)(s_2' - d_2)}{2} \\
&= \frac{1}{2}g(s) + \frac{1}{2}g(s') + \frac{(s_1' - s_1)(s_2 - s_2')}{4} \\
&= M + \frac{(s_1' - s_1)(s_2 - s_2')}{4} > M \text{ porque } s_1 < s_1' \text{ y } s_2 > s_2'
\end{aligned}$$

Esto contradice que M sea el máximo, entonces tiene que suceder que $s_1 = s_1'$ y $s_2 = s_2'$ y se probó que el máximo es único. ■

Teorema 2.1 *Hay una única solución de negociación $f^N : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^2$ que satisface los axiomas INV, SYM, IIA y PAR, y está definida como $f^N(S,d) = s^*$ donde s^* maximiza a $g : S_{>d} \to \mathbb{R}$, $g(s) = (s_1 - d_1)(s_2 - d_2)$ donde $S_{>d} = \{s \in S \mid s_i > d_i \text{ para } i = 1,2\}$.*

Demostración :

1. Por el lema 2.1 la función está bien definida ya que s^* existe y es único.

2. Hay que verificar que f^N satisface los cuatro axiomas.

   - INV: Si $\langle S', d' \rangle$ se obtuvo de $\langle S, d \rangle$ por medio de la transformación $s_i \mapsto s_i' = \alpha_i s_i + \beta_i$, donde $\alpha_i > 0$ para $i = 1,2$, tenemos que

$$\begin{aligned}
g(s') &= (s_1' - d_1)(s_2' - d_2) = (\alpha_1 s_1 + \beta_1 - (\alpha_1 d_1 + \beta_1))(\alpha_2 s_2 + \beta_2 - (\alpha_2 d_2 + \beta_2)) \\
&= \alpha_2\alpha_1(s_1 - d_1)(s_2 - d_2) \\
&= \alpha_2\alpha_1 g(s) \text{ con } \alpha_2\alpha_1 > 0
\end{aligned}$$

entonces si s^* maximiza $g(s)$ sobre $S_{>d}$ tendremos que

$s'^* = (\alpha_1 s_1^* + \beta_1, \alpha_2 s_2^* + \beta_2)$ también maximiza $g(s')$ sobre $S'_{>d}$, y se cumple INV.

- SYM: Supongamos que $\langle S, d\rangle$ es simétrico *i.e.* $d_1 = d_2$ y $(s_1, s_2) \in S$ si y sólo si $(s_2, s_1) \in S$. Supongamos que $(s_1^* - d_1)(s_2^* - d_2) = M$; entonces como $d_1 = d_2$ tendremos que $(s_2^* - d_1)(s_1^* - d_2) = M$ y como el máximo es único y $(s_2^*, s_1^*) \in S$ se tiene que $s_1^* = s_2^*$.
- IIA: Sea $T \subset S$ y $f^N(S, d) = s^* \in T$. Entonces g alcanza su máximo sobre $S_{>d}$ en s^*. Por otro lado como $T \subset S$ tendremos que $T_{>d} \subset S_{>d}$ de modo que g también alcanza su máximo sobre $T_{>d}$ en $s^* \in T_{>d}$ y por lo tanto $f^N(T, d) = s^*$.
- PAR: Sea $s \in S$ tal que $s_i \geq s_i^*$ para $i = 1, 2$ con alguna desigualdad estricta. Entonces $s \in S_{>d}$ y $(s_1 - d_1)(s_2 - d_2) > (s_1^* - d_1)(s_2^* - d_2)$ de modo que s^* no maximiza a g sobre $S_{>d}$ y por lo tanto $f^N(S, d) \neq s^*$.

3. Falta probar que la función f^N es la única solución de negociación que satisface los axiomas. Supongamos que existe $f : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^2$ que satisface los axiomas INV, SYM, IIA y PAR, probaremos que $f^N = f$. Sea $\langle S, d\rangle \in \mathcal{B}$ y $f^N(S, d) = s^* = (s_1^*, s_2^*)$ tomemos la transformación afín de S definida por $s \mapsto s' = (\frac{s_1 - d_1}{s_1^* - d_1}, \frac{s_2 - d_2}{s_2^* - d_2})$ (es una transformación afín ya que $s_i^* > d_i$) y llamemos S' a su imagen. Bajo esta transformación $(d_1, d_2) \mapsto (0, 0)$ y $(s_1^*, s_2^*) \mapsto (1, 1)$, entonces por INV $f^N(S', (0, 0)) = (1, 1) = (\alpha_1 s_1^* + \beta_1, \alpha_2 s_2^* + \beta_2)$. Como f es solución también tendremos que $f(S', (0, 0)) = (\alpha_1 f_1(S, d) + \beta_1, \alpha_2 f_2(S, d) + \beta_2)$. De aquí que $f^N(S, d) = f(S, d)$ si y sólo si $f^N(S', (0, 0)) = f(S', (0, 0))$, por lo que bastará demostrar que $f(S', (0, 0)) = (1, 1)$. Primero notemos que todos los puntos que pertenecen a S' satisfacen que $s_1 + s_2 \leq 2$, ya que si hubiera un punto de la forma $(1 + x, 1 - x + \varepsilon)$ en S' con $x, \varepsilon > 0$, tenemos que la línea que lo une a $(1, 1)$ está contenida en S' (por convexidad). Evaluando g en cualquier punto de esta

línea

$$
\begin{aligned}
g((1-\lambda)(1,1)+\lambda(1+x,1-x+\varepsilon)) &= g(1+\lambda x, 1+\lambda(x-\varepsilon)) \text{ con } 0<\lambda<1 \\
&= (1+\lambda x)(1+\lambda(x-\varepsilon)) \\
&= 1+\lambda\varepsilon+\lambda^2 x(\varepsilon - x)
\end{aligned}
$$

Si $\varepsilon \geq x$ o en caso de que $\varepsilon < x$ si elegimos λ suficientemente cerca del 0, podemos asegurar que $1+\lambda\varepsilon+\lambda^2x(\varepsilon-x) > 1$ lo que contradice que $(1,1)$ es máximo. Sea S'' la intersección de todos los conjuntos convexos, cerrados y simétricos respecto a la recta $y = x$ que contienen a S' (a este conjunto se le llama la cerradura simétrica de S'). Obsérvese que S'' es un conjunto compacto y convexo, y como $\{s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 \mid s_1 + s_2 \leq 2\}$ es un conjunto cerrado, convexo y simétrico que contiene a S', los puntos de S'' siguen cumpliendo con la propiedad de que $s_1'' + s_2'' \leq 2$. Así, por SYM la solución $f(S'', (0,0))$ debe ser de la forma (s'', s''). Por PAR si $s = (s_1, s_2) \in S''$ y $s_i \geq f_i(S'', d)$ para $i = 1,2$ entonces $s_i = f_i(S'', d)$ para $i = 1,2$ esto implica que $f(S'', (0,0)) = (1,1)$. Por IIA $f(S', (0,0)) = (1,1)$ y esto completa la prueba. ■

La siguiente figura ilustra como se obtiene la solución de Nash $f^N(S, d)$.

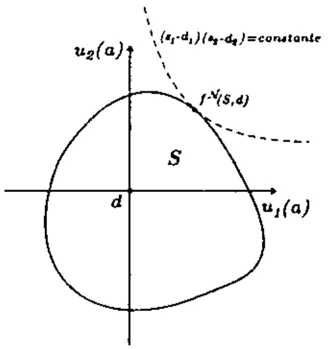

Figura 2.3: Solución de Nash de un problema de negociación

Ejemplo 2.1 *Dos individuos quieren dividir un peso de cualquier manera. Si no se logran poner de acuerdo el peso se pierde. Los individuos pueden tirar parte del peso. En términos de nuestro modelo tenemos*

$$A = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 + a_2 \leq 1 \text{ con } a_i \geq 0 \text{ para } i = 1,2\}$$

y $D = (0,0)$.

Cada jugador i estará interesado sólo en la parte del peso que recibe y preferirá al acuerdo $(a_1, a_2) \in A$ sobre el acuerdo $(b_1, b_2) \in A$ si y sólo si $a_i \geq b_i$ para $i = 1,2$. Obsérvese que el acuerdo $(0,0)$ es el peor para cada jugador y para cada uno de ellos existe el mejor, $B_1 = (1,0)$ y $B_2 = (0,1)$ para el 1 y el 2 respectivamente. Para que las relaciones de preferencia sobre las loterías satisfagan los supuestos de Von-Neumman vamos a suponer que para cada jugador i la pareja (a_1, a_2) es equivalente a la lotería $\begin{array}{|c|c|}\hline (0,0) & B_i \\ \hline 1-a_i & a_i \\ \hline \end{array}$. *Así, se cumplirán los dos supuestos de Von Neumman y Morgenstern. Entonces existe una función de utilidad $u_i : A \to \mathbb{R}$ que representa a la relación de preferencia $\succeq_i$ para $i = 1,2$ y la función de utilidad esperada representa la relación de preferencia sobre las loterías. Obsérvese que, por la forma en que están definidas las preferencias, el valor de la función de utilidad u_i sólo depende de la coordenada i, de tal forma que podemos pensar que estas funciones están definidas en el $[0,1]$, llamemos $u_i'(a) = u_i(a,b)$ con $(a,b) \in A$. De esta forma podemos saber qué actitud tienen los jugadores frente al riesgo, viendo si u_i' es cóncava o convexa. Supongamos que los jugadores son aversos al riesgo, esto es que cada función de utilidad $u_i' : [0,1] \to \mathbb{R}$ es cóncava y también que $u_i'(0) = 0$ para $i = 1,2$. Notemos también que los conjuntos*

$$\begin{aligned} u_i^{-1}([b,c]) &= \{(a_1, a_2) \in A \mid \ b \leq u_i((a_1, a_2)) \leq c\} \\ &= \{(a_1, a_2) \in A \mid u_i^{-1}(b) \leq a_i \leq u_i^{-1}(c)\} \end{aligned}$$

son cerrados, por lo tanto las funciones u_i son continuas. Por esto y dado que A es un compacto tenemos que el conjunto

$$S = \{(u_1(a_1, a_2), u_2(a_1, a_2)) \in \mathbb{R}^2 \mid (a_1, a_2) \in A\}$$

es compacto. Para probar que S es convexo tomemos $(u_1(a_1, a_2), u_2(a_1, a_2))$ y $(u_1(a_1', a_2'), u_1(a_1', a_2'))$ y demos una combinación convexa de estos
$\alpha(u_1(a_1, a_2), u_2(a_1, a_2)) + (1-\alpha)\ (u_1(a_1', a_2'), u_2(a_1', a_2')) =$
$(\alpha u_1(a_1, a_2') + (1-\alpha)\ u_1(a_1', a_2'), \alpha u_2(a_1, a_2) + (1-\alpha) u_2(a_1', a_2'))$,
si suponemos que $a_i < a_i'$ tendremos que
$u_i(a_1, a_2) \leq \alpha u_i(a_1, a_2) + (1-\alpha) u_i(a_1', a_2') \leq u_i(a_1', a_2')$.
Ya mostramos que u_i es continua y como A es conexo existe $(x_i, y_i) \in A$ tal que
$u_i(x_i, y_i) = \alpha u_i(a_1, a_2) + (1-\alpha) u_i(a_1', a_2')$ *y*
$(u_1(x_1, y_2), u_2(x_1, y_2)) = (\alpha u_1(a_1, a_2') + (1-\alpha)\ u_1(a_1', a_2'), \alpha u_2(a_1, a_2) + (1-\alpha) u_2(a_1', a_2'))$
donde $(x_1, y_2) \in A$ porque al ser u_i creciente en cada coordenada se debe tener que $x_1 \leq a_1'$ y $y_2 \leq a_2'$ entonces $x_1 + y_2 \leq a_1' + a_2' \leq 1$.
Además S contiene a $d = (u_1(0), u_2(0)) = (0,0)$ y existe $s \in S$ tal que $s_i > d_i$ para $i = 1, 2$. Entonces $\langle S, d\rangle$ es un problema de negociación.
Para que el problema de negociación sea equitativo supongamos que las preferencias de los jugadores son iguales ($u_1 = u_2 = u$), lo que se reflejará en que $\langle S, d\rangle$ sea simétrico. En este caso por SYM la solución es de la forma $(u(x,x), u(x,x))$ y por PAR la solución será $(u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ que corresponde al acuerdo en el que el peso se divide en partes iguales. Esto se ilustra en la figura 2.4.

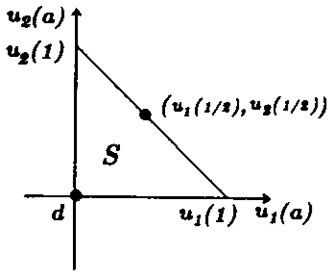

Figura 2.4: Ejemplo 2.1

Nos podríamos preguntar cómo cambia el resultado anterior si las preferencias no son iguales, digamos que uno es más averso al riesgo que el otro, intuitivamente su poder de negociación se irá reduciendo mientras más averso al riesgo se vuelva. Supongamos que el jugador 2 se vuelve más averso al riesgo entonces por la proposición 1.1 podemos pensar que su nueva función de utilidad será $v_2 = h \circ \underline{u_2}$, donde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 cóncava creciente y continua con $h(0) = 0$, lo que implica que $v_2(0) = 0$. Las preferencias del jugador 1 quedan igual, es decir, $v_1 = \underline{u_1}$. Sea $\langle \underline{S}, \underline{d} \rangle$ el nuevo problema de negociación donde

$$\underline{S} = \{(v_1(a_1), v_2(a_2)) \in \mathbb{R}^2 \mid \ (a_1, a_2) \in A\}$$

por argumentos similares a los anteriores se puede demostrar que $\underline{S}$ es un compacto y convexo. La solución de Nash al problema de negociación del ejemplo anterior $\langle S, d \rangle$ es $(\underline{u_1}(z_u), \underline{u_2}((1 - z_u))$ donde $z_u = \frac{1}{2}$ maximiza la función $\underline{u_1}(z)\underline{u_2}(1 - z)$ con $z \in [0, 1]$. Análogamente podemos plantear la solución de Nash de $\langle \underline{S}, \underline{d} \rangle$ como $(v_1(z_v), v_2(1 - z_v))$ donde z_v maximiza la función $v_1(z)v_2(1 - z)$ con $z \in [0, 1]$. Si $\underline{u_1}$, $\underline{u_2}$ y h son derivables en $(0, 1)$ entonces, utilizando la condición de primer orden para máximos, si $z_u \in (0, 1)$ tendremos que z_u es tal que

$$\frac{\underline{u_1}'(z_u)}{\underline{u_2}(z_u)} = \frac{\underline{u_1}'(1 - z_u)}{\underline{u_2}(1 - z_u)} \tag{2.1}$$

Análogamente para z_v se tiene

$$\frac{\underline{u}_1'(z_v)}{\underline{u}_1(z_v)} = \frac{h'(\underline{u}_2(1-z_v))\underline{u}_1'(1-z_v)}{h(\underline{u}_2(1-z_v))} \tag{2.2}$$

Por la concavidad de h y dado que $h(0)=0$ tenemos que $h'(t) \leq \frac{h(t)}{t}$ para toda t, entonces

$$\frac{\underline{u}_1'(z_v)}{\underline{u}_1(z_v)} \leq \frac{h(\underline{u}_2(1-z_v))\underline{u}_1'(1-z_v)}{\underline{u}_2(1-z_v)h(\underline{u}_2(1-z_v))} = \frac{\underline{u}_1'(1-z_v)}{\underline{u}_2(1-z_v)}$$

de modo que por 2.1 tenemos que

$$\frac{\underline{u}_1'(z_v)}{\underline{u}_1(z_v)} \leq \frac{\underline{u}_1'(z_u)}{\underline{u}_1(z_u)}$$

Como $\underline{u}_1$ es cóncava, creciente y positiva entonces el lado izquierdo de las ecuaciones 2.1 y 2.2 es una función decreciente en z, y por lo tanto $z_u \leq z_v$. Como sabemos que $z_u = \frac{1}{2}$ tenemos que $z_v \geq \frac{1}{2}$. Resumiendo tenemos que si el jugador 2 se vuelve más averso al riesgo entonces el jugador 1 obtiene una mayor porción del dólar que cuando tenían la misma actitud frente al riesgo.

Ya vimos que si pedimos a una solución que cumpla INV, SYM, IIA y PAR ésta es única y es la llamada solución de Nash. Si a una solución sólo le pidimos que se cumplan tres de los cuatro axiomas mostraremos que existe otra solución, diferente a la de Nash, que los cumple. Esto es, la solución de Nash pierde la unicidad si sólo se cumplen tres de los axiomas.

INV: En este caso sólo pedimos SYM, IIA y PAR. Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $h(x_1,x_2) = (x_1 + x_2 - \sqrt{(x_1-x_2)^2+4})/2$, nótese que esta función cumple con las siguientes propiedades:

- Si $x_1 \geq x_1'$ y $x_2 \geq x_2'$ entonces $h(x_1,x_2) \geq h(x_1',x_2')$. Esto se deduce de la siguiente identidad:

$$h(x_1,x_2) - h(x_1',x_2') \;=\; h(x_1,x_2) - h(x_1',x_2) + h(x_1',x_2) - h(x_1',x_2')$$

$$= \frac{\partial h}{\partial x_1}(\zeta, x_2)(x_1 - x_1') + \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, \eta)(x_2 - x_2')$$

con $\zeta \in (x_1', x_1)$ y $\eta \in (x_2', x_2)$ (por el teorema del valor medio). Y de el hecho de que las derivadas parciales de h son positivas en cualquier punto.

- Las curvas de nivel de $h(x_1, x_2)$ tienen pendiente -1 cuando $x_1 = x_2$ y son estrictamente convexas, para ver ésto obsérvese que se puede despejar x_2 como función de x_1 de la ecuación de cualquier curva de nivel y se calculan sus derivadas. Ver la figura 2.5.

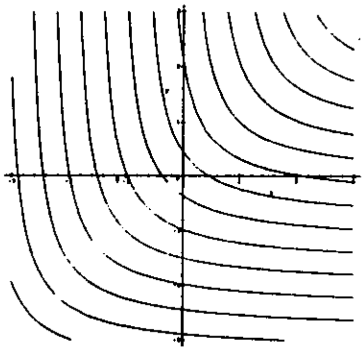

Figura 2.5: Curvas de nivel de la función $h(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2 - \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 4}}{2}$

Consideremos el problema de negociación $\langle S, d\rangle$ y sea la solución de negociación $f'\langle S, d\rangle = s_m \in S$ tal que maximiza $h(s_1 - d_1, s_2 - d_2)$ sobre
$A = \{s = (s_1, s_2) \in S \mid s_i \geq d_i \text{ con } i = 1, 2\}$ el cuál existe porque h es continua y A es compacto.

Esta solución satisface:

- IIA: Al estar maximizando una función si su máximo en T es $s \in S \subset T$ entonces el máximo en S también será s y por lo tanto IIA se cumple.

- PAR: Si $s_i \geq s_{m_i}$ para $i = 1$, 2, entonces $s_i - d_i \geq s_{m_i} - d_i$ y por la primera propiedad de h tenemos que $h(s - d) \geq h(s_m - d)$ pero s_m maximiza y al ser las curvas de nivel de h estrictamente convexas el máximo se alcanza en único punto y entonces $s - d = s_m - d$.

- SYM: Sea $\langle S, d\rangle$ simétrico y sea s_m el máximo de $\{s \in \mathbb{R} \mid (s, s) \in S\}$. El conjunto $T = \{t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid t_2 \leq 2s_m - t_1\}$ es simétrico y $S \subset T$ como la pendiente de la curva de nivel que pasa por (s_m, s_m) es -1, entonces $(s_m, s_m) \in S$ maximiza a $h(s_1 - d_1, s_2 - d_2)$ sobre T y también sobre S por lo tanto se cumple SYM.

Obsérvese que para el problema $\langle S, d\rangle$ donde S es la cápsula convexa de $(0,0), (1,0)$ y $(0,2)$ y $d = (0,0)$ la solución $f'(S,d)$ es $(\frac{1+2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{3}})$ y la de Nash es $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

De esta forma tenemos una solución distinta a la de Nash que cumple IIA,PAR y SYM.

SYM: En este caso le pediremos a la solución que cumpla IIA, INV y PAR. Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $h(x_1, x_2) = (x_1 - d_1)^\alpha (x_2 - d_2)^{1-\alpha}$ para $\alpha \in (0,1)$. Consideremos el problema de negociación $\langle S, d\rangle$ y sea $f^\alpha(S,d)$ la solución de negociación
$f^\alpha(S,d) = s_m \in S$ tal que maximiza $h(s_1, s_2)$ sobre
$A = \{s = (s_1, s_2) \in S \mid s_i \geq d_i \text{ para } i = 1,2\}$.

- Verificar que es PAR y IIA se hace igual que en el caso anterior.

- INV se satisface ya que al hacer la transformación $s_i \mapsto as_i + b$ con $a > 0$ se tiene que, si $h(s_{m_1}, s_{m_2}) \geq h(s_1, s_2)$ entonces

$$\begin{aligned}
ah(s_{m_1}, s_{m_2}) &\geq ah(s_1, s_2) \text{ ya que } a > 0 \\
a(s_{m_1} - d_1)^\alpha (s_{m_2} - d_2)^{1-\alpha} &\geq a(s_1 - d_1)^\alpha (s_2 - d_2)^{1-\alpha} \\
(as_{m_1} - ad_1)^\alpha (as_{m_2} - ad_2)^{1-\alpha} &\geq (as_1 - ad_1)^\alpha (as_2 - ad_2)^{1-\alpha} \\
(as_{m_1} + b_1 - ad_1 - b_1)^\alpha (as_{m_2} + b_2 - ad_2 - b_2)^{1-\alpha} &\geq (as_1 + b_1 - ad_1 - b_1)^\alpha (as_2 + b_2 - ad_2 - b_2)^{1-\alpha} \\
h(as_{m_1} + b_1, as_{m_2} + b_2) &\geq h(as_1 + b_1, as_2 + b_2)
\end{aligned}$$

y se cumple INV.

Obsérvese que para el problema $\langle S, d\rangle$ donde S es la cápsula convexa de $(0,0),(1,0)$ y $(0,1)$ y $d=(0,0)$, la solución $f^{\alpha}(S,d)$ es $(\alpha, 1-\alpha)$ y la de Nash es $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Por lo tanto tengo una solución distinta a la de Nash que cumple IIA, INV y PAR.

IIA: Ahora le pediremos a la solución que cumpla sólo INV, PAR y SYM. Para cualquier problema de negociación $\langle S, d\rangle$ se s_i^m el máximo de las s_i con $s \in A = \{s=(s_1,s_2) \in S \mid s_i \geq d_i \text{ con } i=1,2\}$, esto es la utilidad máxima que el jugador i puede alcanzar en el juego. Consideremos la solución $f^{KS}(S,d)$ que asigna a $\langle S, d\rangle$ el elemento máximo de S en el segmento de recta que une d y (s_1^m, s_2^m). Esta es la llamada solución de Kalai Smodorodinski.

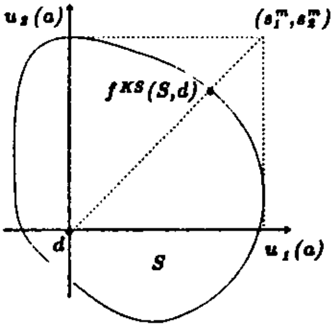

Figura 2.6 Solución de Kalai Smorodinsky

- PAR: La solución cumple con PAR ya que está en la frontera de S y por lo tanto no hay $s=(s_1,s_2) \in S$ tal que $s_i \geq f_i^{KS}(S,d)$ para $i=1,2$ con al menos una desigualdad estricta y $s \neq f^{KS}(S,d)$.

- SYM: Si el problema es simétrico $s_1^m = s_2^m$ y la línea que una d y (s_1^m, s_2^m) es la de 45° entonces $f_1^{KS}(S,d) = f_2^{KS}(S,d)$.

- INV: Sea L la línea que una d y (s_1^m, s_2^m) entonces $L = (d_1,d_2) + \lambda(d_1 - s_1^m, d_2 - s_2^m)$ sea $l^{KN} = (d_1,d_2) + \lambda^{KN}(d_1 - s_1^m, d_2 - s_2^m)$ el máximo de S que está sobre esta línea, entonces $f^{KS}(S,d) = l^{KN}$. Si hacemos la transformación $s_i \mapsto s_i' = as_i + b$ con $a > 0$ tendremos el problema $\langle S', d'\rangle$ y la línea que una d' y $(s_1'^m, s_2'^m)$ es
$L' = (ad_1 + b_1, ad_2 + b_2) + \lambda(ad_1 + b_1 - as_1^m - b_1, ad_2 + b_2 - as_2^m - b_2) =$

$(ad_1 + b_1, ad_2 + b_2) + \lambda a(d_1 - s_1^m, d_2 - s_2^m)$ y

$l'^{KN} = (ad_1 + b_1, ad_2 + b_2) + \lambda'^{KN} a(d_1 - s_1^m, d_2 - s_2^m)$ es el máximo de S' esto es $l^{KN} \mapsto l'^{KN}$ de modo que se cumple INV.

Para el problema $\langle S, d \rangle$ donde S es la cápsula convexa de $(0,0), (1,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $(0, \frac{1}{2})$ con $d = (0,0)$ se tiene que $f^{KS}(S,d) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ y la de Nash es $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Por lo tanto tenemos una solución distinta a la de Nash que cumple INV, SYM, y PAR.

PAR: Por último sólo le pediremos a la solución que cumpla INV, SYM, IIA. Considere la solución $f^d(S,d) = d$. Claramente se satisfacen SYM, IIA y INV pero es distinta a la de Nash.

La solución de Nash nos permite tener una solución única para todos los problemas de negociación. Pero por la forma en que está definida no podemos dar una interpretación intuitiva de ella, y mucho menos del proceso de negociación por el cuál se llegó a ella. Por otro lado habíamos visto que las funciones de utilidad esperada sólo funcionan para cierto tipo de relaciones de preferencia. En el siguiente capítulo se extenderá el concepto de solución de Nash a una mayor cantidad de problemas ya que no se utilizará el concepto de utilidad esperada.

Capítulo 3

Extensión de la Solución de Nash

En 1992 Ariel Rubinstein, Zvi Safra, y William Thompson publicaron un artículo en donde dan una extensión de la teoría de negociación de Nash a problemas de negociación con preferencias que no cumplen los supuestos de Von Neumann y Morgenstern (también llamadas preferencias de utilidad no esperada). En este capítulo se presentará esa extensión.

3.1 Comenzando por Preferencias

En busca de una manera más natural de definir la solución de Nash cambiaremos el lenguaje de utilidad por el de preferencias. Un problema de negociación de Nash $\langle S, d\rangle$ es una versión condensada de un problema más natural $\langle A, D, \succeq_1, \succeq_2\rangle$ donde A es el conjunto de acuerdos o alternativas, D es el desacuerdo, y $\succeq_1$, $\succeq_2$ son preferencias definidas sobre las loterías de A ($lot(A)$) que son medidas de probabilidad de soporte finito en las que los premios son elementos de A. Notemos que antes se había definido a $lot(A)$ como el conjunto de todas las medidas de probabilidad sobre A, esto se hace para facilitar los cálculos. Habíamos visto que los elementos de A se pueden ver como elementos de $lot(A)$. Ahora nos referiremos a $\langle A, D, \succeq_1, \succeq_2\rangle$ como el *problema de negociación*. Y restringiremos el conjunto de problemas de la siguiente manera.

Propiedades del problema de negociación:

1. A es un conjunto compacto y conexo en algún espacio topológico en el que para toda $a_0 \in A$ los conjuntos $\{a \in A \mid a \prec_i a_0\}$ y $\{a \in A \mid a \succ_i a_0\}$ sean abiertos que son sub-base en la topología de A para cada $i = 1, 2$[1].

2. D es un elemento de A tal que $A - \{D\}$ es conexo

3. Las preferencias $\succeq_1$ y $\succeq_2$ definidas en $lot(A)$ son **continuas** en el siguiente sentido: para todas L, L' y $L'' \in lot(A)$ los conjuntos $\{\alpha \in [0,1] \mid \begin{array}{|c|c|}\hline L & L' \\ \hline \alpha & 1-\alpha \\ \hline\end{array} \succeq_i L''\}$ y $\{\alpha \in [0,1] \mid \begin{array}{|c|c|}\hline L & L' \\ \hline \alpha & 1-\alpha \\ \hline\end{array} \preceq_i L''\}$ son cerrados en $\mathbb{R}$.

4. Para toda $a \in A$, $a \succeq_i D$ para $i = 1,2$ y existe $a \in A$ tal que $a \succ_i D$ para $i = 1,2$.

5. El problema es "convexo" en el sentido de que para todas $a, a' \in A$, y para toda $\alpha \in [0,1]$, existe $a'' \in A$ tal que $\begin{array}{|c|c|}\hline a & a' \\ \hline \alpha & 1-\alpha \\ \hline\end{array} \backsim_i a''$ para $i = 1,2$.

6. No existen a y $a' \in A$ tales que $a \backsim_i a'$ para $i = 1,2$ y $a \neq a'$ (No redundancia).

7. Para cada i, existe un único mejor acuerdo $B_i \in A$ tal que $B_i \succ_i a$ para toda $a \in A$, $a \neq B_i$ y $B_i \backsim_j D$.

8. Para toda $a \in A$, existe un único $a' \in \{a \in A \mid \text{no existe } a'' \in A \text{ tal que } a'' \succeq_i a$ para $i = 1,2$ con alguna preferencia estricta$\}$ (Pareto óptimos) y un único $\alpha \in [0,1]$ tales que $\begin{array}{|c|c|}\hline a' & D \\ \hline \alpha & 1-\alpha \\ \hline\end{array} \backsim_i a$ para $i = 1,2$[2].

[1]Esta propiedad no la requieren en el artículo original, pero es importante para darle una topología al espacio A que sea consistente con las preferencias.

[2]En la demostración del teorema que se dá en este trabajo se necesita la conexidad de la frontera Pareto y para probarlo es importante tener esta condición, que nos permite retraer el conjunto a su frontera Pareto.

Recordemos que la solución de Nash era una función definida sobre todos los pares $\langle S, d\rangle$. Habíamos notado que un par $\langle S, d\rangle$ podía ser obtenido de distintas cuartetas $\langle A, D, \succeq_1, \succeq_2\rangle$, entonces podríamos generar el espacio de Nash de pares $\langle S, d\rangle$ cambiando las preferencias y dejando fijo el conjunto de acuerdos o cambiando el conjunto de acuerdos y dejando fijas las preferencias. En este nuevo enfoque la solución no estará definida en un dominio tan grande, éste se elegirá dejando fijo el conjunto de acuerdos y variando la preferencias, por las siguientes razones.

El dejar fijo el conjunto de acuerdos nos podrá dar una idea más intuitiva del significado de la solución.

Además en este nuevo enfoque el axioma IAT sería innecesario al estar trabajando directamente con las relaciones de preferencia y no con funciones de utilidad.

Con esta nueva forma de definir los problemas de negociación tendremos que definir axiomas equivalentes a los de Nash, y esta manera de generar el dominio permite una interpretación más intuitiva del axioma IIA que será el que usaremos en lugar de IIA de Nash, pero antes necesitamos definir qué es la solución de negociación.

Definición 3.1 *Sea $C = \{\langle A, D, \succeq_1, \succeq_2\rangle$ con A fijo y variando $\succeq_1$ y $\succeq_2\}$. La* ***solución de negociación*** *es una función $F : C \to A$ que asigna a cada elemento de C un único elemento de A.*

Para facilitar la notación como C está generado por los pares $(\succeq_1, \succeq_2)$,dado un conjunto de acuerdos A, podemos pensar que $F : \{(\succeq_1, \succeq_2)\} \to A$.

- Decimos que una solución F satisface IIA si se cumple la siguiente condición: Sea $F(\succeq_1, \succeq_2) = a^*$ con $a^* \in A$ y sea $\succeq_i'$ una relación de preferencia en $lot(A)$ que coincide con $\succeq_i$ en el conjunto de acuerdos A (identificados con las loterías correspondientes), tal que:

$$(i)\ \text{Si } a \succeq_i a^* \text{ y } \begin{array}{|c|c|}\hline a & D \\ \hline p & 1-p \\ \hline\end{array} \sim_i a^* \text{ para algunas } a \in A \text{ y } p \in [0,1]$$

entonces, $\begin{array}{|c|c|}\hline a & D \\ \hline p & 1-p \\ \hline\end{array} \preceq'_i a^*$

(ii) Si $a \preceq_i a^*$ y $a \backsim_i \begin{array}{|c|c|}\hline a^* & D \\ \hline q & 1-q \\ \hline\end{array}$ para algunas $a \in A$ y $p \in [0,1]$

entonces, $a \backsim'_i \begin{array}{|c|c|}\hline a^* & D \\ \hline q & 1-q \\ \hline\end{array}$

entonces $F(\succeq_i, \succeq_j) = F(\succeq'_i, \succeq_j)$.

Para dar la interpretación intuitiva de este axioma primero definiremos qué se entiende por objeción a a^* y por contra objeción. Decimos que el jugador i **objetará** a^* con $a \in A$ (o demandará el acuerdo a sobre el acuerdo a^*) si existe $p \in [0,1]$ tal que $\begin{array}{|c|c|}\hline a & D \\ \hline p & 1-p \\ \hline\end{array} \succ_i a^*$. Y decimos que el jugador **contra objetará** a si $\begin{array}{|c|c|}\hline a^* & D \\ \hline p & 1-p \\ \hline\end{array} \succeq_j a$.

Notemos que el cambio de las preferencias del jugador i reflejan una mayor aprensión al riesgo de demandar acuerdos que son mejores (más preferidos) que el resultado a^*. Entonces dadas las nuevas preferencias a pesar de que el jugador i todavía prefiere a sobre a^*, i es menos arriesgado a objetar a^* con a, pero sigue contra objetando con la misma intensidad. El axioma captura la idea intuitiva de que la solución a^* del problema de negociación seguirá siendo defendida ante posibles objeciones de a^* y el cambio en las preferencias no debería cambiar la solución del problema de negociación.

Ya hemos dado el axioma equivalente a IIA de Nash utilizando sólo preferencias y hemos visto que el axioma IAT de Nash no es necesario, falta dar los axiomas equivalentes de PAR y SYM.

- Decimos que una solución F satisface PAR si se cumple la siguiente condición: Si $F(\succeq_i, \succeq_j) = a^*$, entonces no existe $a \in A$ tal que $a \succeq_i a^*$ para $i = 1, 2$ con alguna preferencia estricta.

La equivalencia de este axioma y el PAR que habíamos dado cuando teníamos funciones de utilidad es trivial dado que $a \succeq_i a^*$ sí y sólo si $u(a) \succeq_i u(a^*)$.

Antes de dar el axioma equivalente a SIM de Nash tendremos que definir lo que entenderemos ahora por un problema simétrico.

Definición 3.2 *Decimos que $\langle A, D, \succeq_1, \succeq_2 \rangle$ es un* ***problema simétrico*** *si existe una función $\Phi : A \cup \{D\} \rightarrow A \cup \{D\}$ que satisfaga las siguientes dos condiciones:*

- $\Phi(a) = a'$ *si y sólo si* $\Phi(a') = a$ *y* $\Phi(D) = D$
- *Para todas las loterías L y L', se cumple que: $L \succeq_i L'$ si y sólo si $\Phi(L) \succeq_j \Phi(L')$ donde $\Phi(L)$ es la lotería en la que cada acuerdo a en el soporte de L es reemplazado por el acuerdo $\Phi(a)$. En este caso llamamos a Φ una función de simetría.*

Ya con esta definición podemos establecer qué significa que una solución satisfaga la condición de simetría.

- Decimos que una solución F satisface SYM si se cumple la siguiente condición: Si $\langle A, D, \succeq_1, \succeq_2 \rangle$ es un problema simétrico con una función de simetría Φ entonces, $F(\succeq_i, \succeq_j)$ es un punto fijo de la función de simetría Φ.

Para ver que SYM es equivalente al axioma SYM de Nash consideremos un problema simétrico $\langle A, D, \succeq_1, \succeq_2 \rangle$ donde las preferencias satisfacen los supuestos de Von Neumann y Morgenstern (VNM). Entonces para cada $a \in A$ existen p_1 y $p_2 \in [0, 1]$ tales que $a \backsim_i \boxed{\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline p_i & 1-p_i \end{array}}$ (primer supuesto de VNM). En términos de funciones de utilidad, si elegimos que $u_i(D) = 0$ y $u_i(B_i) = 1$, $\Phi(\cdot)$ tendrá que transformar un acuerdo a con el par de utilidades $(u_1(a), u_2(a)) = (c, d)$ en un acuerdo $\Phi(a)$ con el par de utilidades $(u_1(\Phi(a)), u_2(\Phi(a))) = (d, c)$. Por SYM hay un punto a^* que es un punto fijo de $\Phi(\cdot)$, esto es $\Phi(a^*) = a^*$, entonces $\Phi(a^*) \backsim_i a^*$ y tendremos que $u_i(\Phi(a^*)) = u_i(a^*)$, pero por la condición anterior $u_i(\Phi(a^*)) = u_j(a^*)$ y juntando las dos $u_j(a^*) = u_i(a^*)$, que es el axioma SYM de Nash.

3.2 Redefiniendo la Solución de Nash

Ahora se buscará una definición alternativa a la solución de Nash, que utilice sólo los términos desacuerdo, acuerdo, preferencia y evite el término utilidad. Después de trasladar los axiomas de Nash a un lenguaje de preferencias, se podría pensar que la conjunción de los axiomas serían una definición de la solución equivalente a la de Nash, pero esto no es así, ahora buscamos una solución que especifique el resultado del problema, sin referirse a su "consistencia" con los resultados que da la solución a otros problemas y que tenga una mejor interpretación. Para esto empezaremos por definir qué se entiende por una solución de Nash de un problema específico.

Definición 3.3 *Una* ***solución ordinal de Nash*** *para el problema* $\langle A, D, \succeq_1, \succeq_2 \rangle$ *es un acuerdo* a^**, que satisface lo siguiente: para toda* $p \in [0, 1]$ *y para toda* $a \in A$*, si* $\begin{array}{|c|c|}\hline a & D \\ \hline p & 1-p \\ \hline \end{array} \succ_i a^*$*, entonces* $\begin{array}{|c|c|}\hline a^* & D \\ \hline p & 1-p \\ \hline \end{array} \succeq_j a$.

Con esta definición podemos dar una mejor interpretación a lo que llamamos solución ordinal de Nash. Suponga que los jugadores creen que cuando ellos objetan un acuerdo se enfrentan con cierto riesgo de llegar al desacuerdo. La condición anterior se interpretaría de la siguiente manera. El acuerdo a^* es solución ordinal de Nash si cada vez que el jugador i objeta a a^* sugiriendo el acuerdo a con probabilidad $(1-p)$ de llegar al desacuerdo, entonces es óptimo para el jugador j insistir en el acuerdo original a^* aunque su insistencia llevara al desacuerdo con probabilidad $(1-p)$.

Primero quisiéramos verificar si la solución ordinal coincide con la solución de Nash, para cada problema, en el caso de preferencias que cumplan con los supuestos de VNM.

Proposición 3.1 *Sea* $\langle A, D, \succeq_1, \succeq_2 \rangle$ *un problema en el que las preferencias cumplen los supuestos de VNM. Entonces la solución ordinal de Nash está bien definida, y es igual a* a^* *si y sólo si la solución de Nash en* $\langle S, d \rangle$ *está bien definida y es igual a* a^* *donde* $S = \{(u_1(a), u_2(a)) \in \mathbb{R}^2 \mid a \in A\}$ *con* u_1 *y* u_2 *funciones de utilidad que representan a las relaciones de preferencia* $\succeq_1$ *y* $\succeq_2$.

Demostración : Podemos suponer que $u_i(D) = 0$ para $i = 1, 2$. Si a^* es solución de Nash

$$u_1(a^*)u_2(a^*) \geq u_1(a)u_2(a) \tag{3.1}$$

para toda $a \in A$. Si $\begin{array}{|c|c|}\hline a & D \\ \hline p & 1-p \\ \hline\end{array} \succ_i a^*$ como u_1 es función de utilidad de VNM, $u_i(a)p > u_i(a^*)$ de modo que $p > \frac{u_i(a^*)}{u_i(a)}$. Por 3.1 $\frac{u_i(a^*)}{u_i(a)} \geq \frac{u_j(a)}{u_j(a^*)}$ entonces $p \geq \frac{u_j(a)}{u_j(a^*)}$ y $\begin{array}{|c|c|}\hline a^* & D \\ \hline p & 1-p \\ \hline\end{array} \succeq_j a$. Esto prueba que a^* es solución ordinal de Nash.

Ahora supongamos que a^* es la solución ordinal de Nash y que a^* no es solución de Nash, entonces existe $a \in A$ tal que

$$u_1(a)u_2(a) > u_2(a^*)u_1(a^*) \tag{3.2}$$

entonces tendremos que $u_i(a) > u_i(a^*)$ para $i = 1$ o 2, si también $u_j(a) > u_j(a^*)$ con $j \neq i$, a^* no sería solución ordinal de Nash y ya se tendría la contradicción. Entonces debe suceder que $u_j(a) \leq u_j(a^*)$, de modo que de ésto y por 3.2 se tiene que

$$\frac{u_i(a^*)}{u_i(a)} < \frac{u_j(a)}{u_j(a^*)} \leq 1$$

Podemos encontrar $p \in (0, 1)$ tal que $\frac{u_j(a)}{u_j(a^*)} > p > \frac{u_i(a^*)}{u_i(a)}$ de donde $u_j(a) > pu_j(a^*)$ y $pu_i(a) > u_i(a^*)$ contradiciendo nuevamente que a^* es solución ordinal de Nash. Por lo tanto a^* sí es solución de Nash. ■

3.3 Familias de Preferencias

Quisiéramos mostrar que las nuevos axiomas IIA, PAR, y SYM caracterizaran la solución ordinal de Nash. Por la proposición anterior tenemos que la solución ordinal de Nash para la familia de preferencias que satisfacen los supuestos de VNM la solución ordinal corresponde a la solución de Nash. Con una familia de preferencias mayor que la que satisface los supuestos de VNM, quisiéramos hacer lo mismo. Definiremos qué condiciones tendrá que cumplir la nueva familia de preferencias y probaremos que las preferencias que satisfacen los supuestos de VNM pertenecen a esta nueva familia.

Para facilitar la notación de ahora en adelante la lotería $\begin{array}{|c|c|}\hline a & D \\ \hline p & 1-p \\ \hline\end{array}$ la denotaremos con pa. Y la lotería $\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & a' & D \\ \hline p & r & 1-p-r \\ \hline\end{array}$ la denotaremos con $pa + ra'$.

Consideraremos la familia de preferencias que cumpla los siguientes supuestos:

- Una relación de preferencia $\succeq$ satisface la propiedad DOM (Dominancia Estocástica): Si $a \succ D$ y $p > q$, entonces $pa + ra' \succ qa + ra'$ para toda $a' \in A$ y para toda $r \in [0, 1)$.

- Una relación de preferencia $\succeq$ satisface la propiedad C (Cuasiconcavidad): Si $L' \succ L$ entonces $\alpha L' + (1 - \alpha)L \succ L$.

- Una relación de preferencia $\succeq$ satisface la propiedad ESC (Equivalencia Segura Condicional): Si $a \sim L$, entonces $\alpha a + (1 - \alpha)a' \succeq \alpha L + (1 - \alpha)a'$ para cualquier $a' \in A$ tal que $a' \succeq b$ para toda $b \in A$ en el soporte de L.

- Una relación de preferencia $\succeq$ satisface la propiedad H (Homogeneidad): Si $a \succeq L$, entonces $\alpha a \succeq \alpha L$, y si $a \sim L$, entonces $\alpha a \sim \alpha L$.

La siguiente proposición muestra que la familia de preferencias que cumple con los supuestos de VNM está contenida en la nueva familia definida por las propiedades anteriores.

Proposición 3.2 *Si una relación de preferencia $\succeq$ satisface los supuestos de Von Neumann y Morgentern entonces cumple las propiedades DOM, C, ESC y H.*

Demostración : Supongamos que $a \succ D$ y $p > q$ y sea u la función de utilidad que representa a la relación de preferencia $\succeq$ tal que $u(D) = 0$. Como cumple los supuestos de VNM podemos usar la función de utilidad esperada entonces

$$u(pa + ra' + (1 - r - p)D) = pu(a) + ru(a') \text{ y}$$

$$u(qa + ra' + (1 - q - r)D) = qu(a) + ru(a')$$

como $p > q$

$$u(pa + ra' + (1 - r - p)D) > u(qa + ra' + (1 - q - r)D)$$

entonces

$$pa + ra' + (1 - r - p)D \succ qa + ra' + (1 - q - r)D$$

con esto queda probada DOM.

Supongamos que $L' = \sum_{i=1}^{n} a_i p_i \succ L = \sum_{j=1}^{m} b_j p_j$ entonces

$$Eu(L') = \sum_{i=1}^{n} u(a_i)p_i > Eu(L) = \sum_{j=1}^{m} u(b_j)p_j \tag{3.3}$$

Construyamos la lotería $\alpha L' + (1 - \alpha)L$ tomando su valor esperado tenemos

$$\begin{aligned} Eu(\alpha L' + (1 - \alpha)L) &= \sum_{i=1}^{n} u(a_i)\alpha p_i + \sum_{j=1}^{m} u(b_j)(1 - \alpha)p_j \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} u(a_i)p_i + (1 - \alpha) \sum_{j=1}^{m} u(b_j)p_j \end{aligned}$$

por 3.3 $\alpha \sum_{i=1}^{n} u(a_i)p_i + (1 - \alpha) \sum_{j=1}^{m} u(b_j)p_j \geq \sum_{j=1}^{m} u(b_j)p_j$ con lo que

$$\alpha L' + (1 - \alpha)L \succeq L$$

por lo tanto cumple C.

Sean $a \backsim L$, y $a' \in A$ tal que $a' \succeq b$ para toda $b \in A$ en el soporte de L construyamos las loterías $\alpha a + (1-\alpha)a'$ y $\alpha L + (1-\alpha)a'$ y calculemos su utilidad esperada

$$Eu(\alpha a + (1-\alpha)a') = \alpha u(a) + (1-\alpha)u(a') \text{ y}$$

$$Eu(\alpha L + (1-\alpha)a') = \sum_{i=1}^{n} u(b_i)\alpha p_i + (1-\alpha)u(a')$$

como $a \backsim L$, $u(a) = \sum_{i=1}^{n} u(b_i)p_i$ entonces

$$Eu(\alpha a + (1-\alpha)a') = Eu(\alpha L + (1-\alpha)a')$$

por lo tanto

$$\alpha a + (1-\alpha)a' \sim \alpha L + (1-\alpha)a'.$$

Si a' es tal que $a' \succeq b$ para toda $b \in A$ en el soporte de L se cumple C y si $a' = D$ se cumple la segunda parte de H.
Si suponemos que $a \succ L$ por un procedimiento análogo al anterior encontramos que $\alpha a + (1-\alpha)a' \succ \alpha L + (1-\alpha)a'$ entonces se cumple la primera parte de H. ■

3.4 Teorema de Nash

Antes de continuar con el Teorema equivalente al de Nash en el nuevo marco de preferencias daremos algunos lemas que serán de utilidad.

Definición 3.4 *Dados $a, b \in A$ decimos que a es* más-más preferido *que b (que denotaremos por $a \succ\succ b$), si existen un negociador i y un número $p \in [0,1]$ tales que $pa \succ_i b$ y $a \succ_j pb$.*

Intuitivamente esto quiere decir que si el jugador i objeta b proponiendo a con probabilidad p, el jugador j no estará dispuesto a contraobjetar, esto es, aceptará a en lugar de b con probabilidad p.

Usando esta nueva terminología podemos dar la solución de Nash en términos de $\succ\succ$.

Proposición 3.3 *a^* es solución ordinal de Nash de $(\succeq_1, \succeq_2)$ si y sólo si no existe $a \in A$ tal que $a \succ\succ a^*$.*

Demostración : Supongamos que a^* no es solución ordinal de Nash entonces existen $a \in A$ y $p \in [0,1]$ tales que $pa \succ_i a^*$ y $a \succ_j pa^*$ y entonces $a \succ\succ a^*$.

Si suponemos que existe $a \in A$ tal que $a \succ\succ a^*$ entonces $pa \succ_i a^*$ y $a \succ_j pa^*$ por lo tanto a^* no es solución ordinal de Nash. ∎

Lema 3.1 *Si la relación de preferencia $\succeq$ es continua y satisface $c \succeq a \succeq b$ entonces, existe $p \in [0,1]$ tal que $pc + (1-p)b \sim a$.*

Demostración : Supongamos que esto no sucediera, entonces para toda $p \in [0,1]$ se cumple sólo una de las siguientes desigualdades $pc + (1-p)b \succeq a$ o $pc + (1-p)b \preceq a$. Esto implica que $C_1 = \{p \in [0,1] | pc + (1-p)b \succeq a\}$ y $C_2 = \{p \in [0,1] | pc + (1-)b \preceq a\}$ son conjuntos ajenos cuya unión es el $[0,1]$, por continuidad son cerrados. Además son no vacíos ya que $1 \in C_1$ y $0 \in C_2$ entonces tenemos una contradicción a la conexidad del $[0,1]$. Por lo tanto debe existir alguna $p \in [0,1]$ tal que $pc + (1-p)b \sim a$. ∎

Lema 3.2 *Considere un par de preferencias continuas $(\succeq_1, \succeq_2)$ que satisfagan DOM, C, y H. Sean $a, b, c \in A$ acuerdos Pareto óptimos que satisfacen $c \succ_1 a \succ_1 b$. Si no sucede $a \succ\succ c$ entonces $a \succ\succ b$.*

Demostración : Notemos que por ser pareto óptimos si $c \succ_1 a \succ_1 b$ tendremos que $b \succ_2 a \succ_2 c$. De aquí se obtiene que $c \succ_1 D$ y $b \succ_2 D$.

La demostración la haremos por contradicción. Supongamos que no sucede $a \succ\succ c$ ni $a \succ\succ b$. Tenemos que $c \succ_1 a \succ_1 D$ y $b \succ_2 a \succ_2 D$, entonces por el lema 3.1 existen p, $q \in (0,1)$ que satisfacen $pc \sim_1 a$ y $qb \sim_2 a$. Como $pc \sim_1 a$ por DOM para cualquier $p' \in (0,1)$ tal que $p > p'$ tendremos que $a \sim_1 pc \succ_1 p'c$ pero no es cierto que $a \succ\succ c$ entonces $c \succeq_2 p'a$ para cualquier $p' \in (0,1)$ tal que $p > p'$. Por continuidad de la relación de preferencia (propiedad 3) tendremos que

$$c \succeq_2 pa \tag{3.4}$$

Análogamente usando $qb \sim_2 a$ y que no sucede $a \succ\succ b$ tenemos que

$$b \succeq_1 qa. \tag{3.5}$$

Por el lema 3.1 existe alguna $\alpha \in [0,1]$ tal que

$$a \sim_1 \alpha c + (1-\alpha)b. \tag{3.6}$$

Usando H y $pc \sim_1 a$ tenemos $qpc \sim_1 qa$. Por C y 3.5

$$q(1-\alpha)b + (1 - q(1-\alpha))qpc \succeq_1 qa. \tag{3.7}$$

Usando H y 3.6 tenemos

$$qa \sim_1 q(1-\alpha)b + q\alpha c \tag{3.8}$$

entonces por DOM 3.7 y 3.8

$$(1 - q(1-\alpha))p \geq \alpha. \tag{3.9}$$

Análogamente de H $pqb \sim_2 pa$, por C y 3.4

$$p\alpha c + (1 - p\alpha)pqb \succeq_2 pa$$

al ser a pareto óptima y dado 3.6 tendremos que $a \succeq_2 \alpha c + (1-\alpha)b$ que por H implica que

$$pa \succeq_2 p\alpha c + p(1-\alpha)b$$

por transitividad

$$p\alpha c + (1-p\alpha)pqb \succeq_2 p\alpha c + p(1-\alpha)b$$

así por DOM tendremos que $(1-p\alpha)pq \geq p(1-\alpha)$ de donde

$$q - 1 \geq (pq-1)\alpha$$

y de 3.9

$$(pq-1)\alpha \geq pq-p$$

entonces

$$\begin{aligned} q-1 &\geq pq-p \\ q-1 &\geq p(q-1) \text{ como } q<1 \\ 1 &\leq p \text{ lo cual contradice que } p<1. \end{aligned}$$

Con lo que queda demostrado el lema. ■

Lema 3.3 *Considere un par de preferencias continuas* $(\succeq_1, \succeq_2)$ *que satisfacen las condiciones DOM, H, C y ESC. Sea* a^* *la solución ordinal de Nash de* $\langle A, D, \succeq_1, \succeq_2\rangle$*. Si* $p \in (0,1]$ *y* $a \in A$ *satisfacen* $a \sim_2 pa^*$*, entonces* $a^* \succeq_1 [\frac{1}{(2-p)}]a$*.*

Demostración : Supongamos lo contrario, esto es $a \sim_2 pa^*$ y $[\frac{1}{(2-p)}]a \succ_1 a^*$. Por continuidad podemos encontrar p' tal que $p > p' > 0$ y $[\frac{1}{(2-p')}]a \succ_1 a^*$. Aplicando ESC a $a \sim_2 pa^*$ y $a^* \succeq a^*$, que está en el soporte de pa^*,tendremos

$$ta + (1-t)a^* \succeq_2 tpa^* + (1-t)a^* = (tp + (1-t))a^* \text{ para toda } t \in [0,1]$$

Por ser a^* Pareto óptima y dado que por hipótesis existe $a' \in A$ tal que $a' \succ_i D$ para $i = 1,2$ tenemos que $a^* \succ_i D$ para $i = 1,2$. Usando DOM como $p > p'$ tendremos que

$$(tp + (1-t))a^* \succ_2 (tp' + (1-t))a^* \text{ para toda } t \in [0,1]$$

por tanto si $\alpha = tp' + (1-t)$ entonces

$$ta + (1-t)a^* \succ_2 \alpha a^* \text{ para toda } t \in [0,1] \tag{3.10}$$

Por otro lado pasando de loterías compuestas a simple tenemos que

$$\begin{aligned}\alpha(ta+(1-t)a^*) &= \alpha ta+\alpha(1-t)a^* \\ &= (1-\alpha(1-t))\frac{\alpha t}{(1-\alpha(1-t))}a+\alpha(1-t)a^*\end{aligned}$$

Si demostramos que $\frac{\alpha t}{(1-\alpha(1-t))}a \succ_1 a^*$ por C tendremos que $\alpha(ta+(1-t)a^*) \succ_1 a^*$. Sustituyendo $\alpha = tp'+(1-t)$ tenemos que

$$\frac{\alpha t}{(1-\alpha(1-t))} = \frac{(tp'+(1-t))t}{1-(tp'+(1-t))(1-t)}$$

sacando el límite cuando t tiende a cero usando la regla de L'Hopital

$$\lim_{t\to 0}\frac{(tp'+(1-t))t}{1-(tp'+(1-t))(1-t)} = \frac{1}{1-p'+1} = \frac{1}{2-p'}$$

como $[\frac{1}{(2-p')}]a \succ_1 a^*$ por continuidad existe t_0 cercana a cero tal que $\frac{\alpha_0 t_0}{(1-\alpha(1-t_0))}a \succ_1 a^*$ donde $\alpha_0 = t_0p'+(1-t_0)$, y entonces

$$\alpha_0(t_0a+(1-t_0)a^*) \succ_1 a^* \tag{3.11}$$

Por "convexidad" (propiedad 5) existe $b \in A$ tal que $b \sim_i t_0a+(1-t_0)a^*$ para $i=1,2$, entonces por H, 3.10 y 3.11 se tiene que $b \succ_2 \alpha_0 a^*$ y $\alpha_0 b \succ_1 a^*$ contradiciendo que a^* sea solución de Nash. ■

Lema 3.4 *Si las preferencias son continuas y cumplen H y DOM. Dados $b \in A$ y $p \in (0,1]$ fijos el conjunto $Q = \{a \in A \mid pa \prec_i b\}$ es abierto en A.*

Demostración : Sea $a_0 \in Q$ si $a_0 = B_i$ entonces $pB_i \prec_i b$, como $a \prec_i B_i$ para toda $a \in A$ $a \neq B_i$ por H tendremos que $pa \prec_i pB_i$, por lo tanto $Q = A/B_i$ que es abierto en A. Si $a_0 \prec_i B_i$ y $pa_0 \prec_i b$ por continuidad existe $\alpha \in [0,1]$ tal que $pa_0 \prec_i p(1-\alpha)a_0+p\alpha B_i \prec_i b$, por "convexidad" existe $a' \in A$ tal que $a' \sim_i (1-\alpha)a_0+\alpha B_i$ usando H $pa_0 \prec_i pa'$. Por

H $a_0 \prec_i a'$ entonces $a_0 \in \{a \in A \mid a \prec_i a'\}$ y este conjunto está contenido en Q, por lo tanto Q es abierto en A. ■

Proposición 3.4 *Sea $\succeq$ una relación de preferencia definida en $lot(A)$, continua y cumple los supuestos de Von Neumann y Morgenstern. Entonces la función de utilidad $u : A \to \mathbb{R}$ que representa a $\succeq$ es continua.*

Demostración : En la demostración del teorema 1.2 se muestra que $u : A \to \mathbb{R}$ existe y representan a $\succeq$ si la relación cumple con los supuestos de VNM, sólo falta probar que es continua, para esto veremos que la imagen inversa de abiertos es abierta.

Sea $C_y = \{x \in \mathbb{R} \mid x < y \text{ con } y \in \mathbb{R} \text{ fija}\}$ por hipótesis existen B y $D \in A$ únicos tales que $B \succeq a \succeq D$ para toda $a \in A$ entonces $u(B) \geq u(a) \geq u(D)$ para toda $a \in A$. Si $y \geq u(B)$ la imagen inversa de C_y es A que es abierto. Si $u(B) > y \geq u(D)$ existe $p \in [0, 1)$ tal que $pu(B) + (1-p)u(D) = y$ y por la "convexidad" de A (propiedad 5) existe $b \in A$ tal que $pB + (1-p)D \backsim b$ como la relación de preferencia cumple los supuestos de VNM $u(b) = pu(B) + (1-p)u(D)$ y entonces la imagen inversa de C_y es $u^{-1}(C_y) = \{a \in A \mid a \prec b\}$ ya que $a \prec b$ si y sólo si $u(a) < u(b)$, por hipótesis $u^{-1}(C_y)$ es abierto (propiedad 1). Si $y < u_i(D)$ la imagen inversa de C_y es el vacío, que es abierto. Y para los abiertos de la forma $D_y = \{x \in \mathbb{R} \mid x > y \text{ con } y \in \mathbb{R} \text{ fija}\}$ se hace análogamente. Por lo tanto $u_i : A \to \mathbb{R}$ es continua. ■

Lema 3.5 *Sean $(\succeq_1, \succeq_2)$ un par de preferencias definidas en $lot(A)$, para cada $a \in A$ y para cada $i = 1, 2$ existe $a_{po} \in A$ pareto óptima tal que $a \backsim_i a_{po}$.*

Demostración : Sean $b \in A$ y $C = \{a \in A \mid a \sim_i b\}$, este conjunto es cerrado (propiedad 1), y como A es compacto (propiedad 1) C también es compacto. Si tomamos la familia de conjuntos cerrados $\{a \in A \mid a \succeq_i c\}_{c \in C}$, ésta tiene la propiedad de la intersección finita de compactos. Esto es, para cada número finito de conjuntos $\{a \in A \mid a \succeq_i c_j\}_{c_j \in C}$, $j = 1, ..., n$ su intersección es no vacía, de hecho es el conjunto $\{a \in A \mid a \succeq_i c_{j_m}\}$ con $c_j \preceq c_{j_m}$ para toda $j = 1, ..., n$. Por el teorema de la intersección finita de conjuntos, la intersección de toda la familia $\{a \in A \mid a \succeq_i c\}_{c \in C}$ debe de ser no vacía. Además por no redudncancia (porpiedad 6) debe ser un sólo elemento de A. Sea a_{po} ese elemento, entonces $a_{po} \in B$ y $a \succeq_i c$ para toda $c \in C$, por lo tanto a_{po} es un Pareto óptimo tal que $a \backsim_i a_{po}$. ∎

Lema 3.6 *Sea $\rho : A - \{D\} \to \mathcal{F}$ definida como $\rho(a) = a_{po}$ donde a_{po} es el acuerdo Pareto óptimo tal que $pa_{po} \sim_i a$ para $i = 1, 2$ (propiedad 8) y $\mathcal{F}$ es el conjunto de todos los Pareto óptimos. Si las relaciones de preferencia $\succeq_i$ para $i = 1, 2$ cumplen H y DOM entonces la función $\rho(\cdot)$ es continua.*

Demostración : Para ver que ρ es continua probaremos que la imagen inversa de los abiertos básicos es abierta. Sea C un abierto básico en $\mathcal{F}$ de la forma
$C = \{a \in \mathcal{F} \mid a \prec_i a_0 \text{ con } a_0 \in \mathcal{F} \text{ fijo}\}$ la imagen inversa de C es el conjunto
$\rho^{-1}(C) = \{a \in A \mid \text{existe } p \in [0,1] \text{ tal que } pa_{po} \sim_i a \text{ para } i = 1, 2 \text{ para algún } a_{po} \in C\}$.
Sea $a_1 \in \rho^{-1}(C)$ entonces existe $p \in [0,1]$ tal que $pa_{po} \sim_i a_1$ para $i = 1, 2$ para algún $a_{po} \in C$. De esto $a_{po} \prec_i a_0$, por H $pa_{po} \prec_i pa_0$ con lo que $a_1 \sim_i pa_{po} \prec_i pa_0$. Por "convexidad" de A existe $b \in A$ tal que $b \backsim_i pa_0$ para $i = 1, 2$. Sea
$E_i = \{a \in A \mid a \prec_i b\}$, es un conjunto abierto en A y $a_1 \in E_i$. Como a_{po} es Pareto óptimo tendremos que $a_{po} \succ_j a_0$ y por H $a_1 \backsim_j pa_{po} \succ_j pa_0 \sim_j b$. De aquí que $a_1 \in E_j$ con $E_j = \{a \in A \mid a \succ_j b\}$ abierto en A, entonces $a_1 \in \{E_i \cap E_j\}$ que es un abierto en A. Ahora veremos que $\{E_i \cap E_j\} \subset \rho^{-1}(C)$, sea $a \in \{E_i \cap E_j\}$ por hipótesis (prop. 8) existen $q \in [0,1]$ y $a'_{po} \in \mathcal{F}$ tales que $qa'_{po} \sim_i a$ para $i = 1, 2$, entonces $qa'_{po} \prec_i pa_0$ y $qa'_{po} \succ_j pa_0$. Quisiéramos demostrar que $a'_{po} \prec_i a_0$ o equivalentemente al ser a'_{po} Pareto óptimo,
$a_0 \prec_j a'_{po}$. Supongamos que $p \leq q$, por DOM $pa'_{po} \prec_i qa'_{po}$ entonces $pa'_{po} \prec_i qa'_{po} \prec_i pa_0$, por H $a'_{po} \prec_i a_0$ y ya acabamos. Ahora supongamos que $p > q$ por DOM $qa'_{po} \prec_j pa_{po}$ entonces $pa_{po} \succ_j qa'_{po} \succ_j pa_0$ por H $a_0 \prec_j a'_{po}$. Por lo tanto $\rho^{-1}(C)$ es un conjunto abierto y ρ es continua. ∎

Teorema 3.1 *La solución ordinal de Nash está bien definida para todos los problemas en los cuales las preferencias satisfacen DOM, C y H.*

Demostración : Veamos primero que la solución ordinal de Nash existe: Si no existiera entonces, habría un problema tal que para toda $a \in A$ existe $b \in A$ con $b \succ\succ a$. Por el lema 3.2 para cualquier a Pareto óptima es imposible que, para b y c Pareto óptimos (p.o.) se satisfagan $b \succ_1 a$, $b \succ\succ a$, $c \succ_2 a$ y $c \succ\succ a$ simultáneamente.. Entonces podemos separar la frontera Pareto (el conjunto de todos los p. o., al que denotaremos con $\mathcal{F}$) en dos conjuntos $V_i = \{a \text{ p.o.} \mid \text{existe } b \text{ p.o. } b \succ_i a \text{ y } b \succ\succ a\}$ para $i = 1, 2$. Estos conjuntos son ajenos ya que dado $b \in V_i$ tenemos que $b \succ_i a$ y al ser a p.o. $a \succ_j b$ con lo que $b \notin V_j$. Para mostrar que son no vacíos, recordemos que por hipótesis para cada i, existe un único mejor acuerdo $B_i \in A$ tal que $B_i \succ_i a$ para toda $a \in A$, $a \neq B_i$, y por lo tanto B_i es p.o., además tenemos que $a \succeq_j B_i \backsim_j D$ para toda $a \in A$. Por la propiedad 4 de los problemas de negociación existe una $a \in A$ tal que $a \succ_j B_i$, por la propiedad 8 y DOM existe a' p.o tal que $a' \succeq_j a \succ_j B_i$. Para mostrar que $B_i \in V_j$ sólo falta ver que $a' \succ\succ B_i$, por DOM para toda $p > 0$, $pa' \succ_j B_i$ como $B_i \succ_i a' \succ_i D$ por continuidad existe p tal que $a' \succ_i pB_i$ entonces $a \succ\succ B_i$ y $B_i \in V_j$. La unión de V_1 y V_2 es toda la frontera Pareto, ya que si a es p.o. como no hay solución de Nash existe $b \in A$ tal que $b \succ\succ a$. Además por no redundancia (propiedad 6) pasa sólo una de las siguientes $b \succ_1 a$ o $b \succ_2 a$ con lo que a está sólo en V_1 o sólo en V_2. Falta ver que los conjuntos V_1, V_2 son abiertos relativos a la frontera Pareto esto es, ver que

$V_i' = \{a \in A \mid \text{existe } b \text{ p.o. } b \succ_i a \text{ y } b \succ\succ a\}$ es un abierto en A. Notemos que $V_i' = \cup_{b \in \mathcal{F}}\{\{a \in A \mid b \succ_i a \text{ con } b \text{ p.o. (fijo)}\} \cap \{a \in A \mid b \succ\succ a \text{ con } b \text{ p.o. (fijo)}\}\}$ si probáramos que $\{a \in A \mid b \succ\succ a \text{ con } b \text{ p.o. (fijo)}\}$ es abierto, V_i' sería la unión de abiertos y por lo tanto sería abierto. Sea $a_0 \in \{a \in A \mid b \succ\succ a \text{ con } b \text{ p.o. (fijo)}\}$ entonces existe $p_0 \in [0, 1]$ tal que $p_0 b \succ_i a_0$ y $b \succ_j p_0 a_0$ de modo que

$a_0 \in C = \{a \in A \mid p_0 b \succ_i a\} \cap \{a \in A \mid b \succ_j p_0 a\}\}$, por el lema 3.4 el primer conjunto es abierto y el segundo lo es por definición entonces, su intersección C es un conjunto abierto que contiene a a_0. Si probamos que $C \subset \{a \in A \mid b \succ\succ a \text{ con } b \text{ p.o. (fijo)}\}$ éste último conjunto será abierto. Sea $a_1 \in C$ entonces $p_0 a_1 \succ_i b$ y $a_1 \succ_j p_0 b$ con lo que $a_1 \succ\succ b$ por lo tanto $\{a \in A \mid b \succ\succ a \text{ con } b \text{ p.o. (fijo)}\}$ es abierto lo que implica que V_i' es abierto y V_i es un abierto relativo a $\mathcal{F}$. Al ser estos conjuntos no vacíos y su unión el total tendríamos que la frontera Pareto $\mathcal{F}$ no es conexa. Pero por el lema 3.6 podemos construir una retracción ρ de $A - \{D\}$ en su frontera Pareto $\mathcal{F}$, es decir existe $\rho : A - \{D\} \to \mathcal{F}$ continua y sobre de modo que, como $A - \{D\}$ es conexo la frontera Pareto también lo es. Por lo tanto la solución ordinal de Nash existe[3].

A continuación veamos que la solución es Pareto óptima (PAR). Sea a^* la solución ordinal de Nash para las preferencias $(\succeq_1, \succeq_2)$. Si existiera un acuerdo a tal que $a \succeq_j a^*$ y $a \succ_i a^*$ entonces por continuidad para alguna p cercana a 1 tenemos que $pa \succ_i a^*$ y por PAR $a \succeq_j a^* \succ_j pa^*$ contradiciendo que a^* sea solución ordinal de Nash, entonces a^* es Pareto óptima.

Ahora mostraremos que la solución es única. Supongamos que existen dos soluciones a y b tales que $b \succ_1 a$. Entonces por ser soluciones ordinales de Nash no es cierto que $b \succ\succ a$ ni $a \succ\succ b$. Por convexidad y la propiedad 8 existe a^* pareto óptima tal que $a^* \succeq_i \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ para $i = 1, 2$. Entonces por C y PAR $b \succ_1 a^* \succ_1 a$, como b es solución ordinal de Nash, no sucede que $a^* \succ\succ b$. Así por el lema 3.2 tenemos $a^* \succ\succ a$ contradiciendo que a sea solución ordinal de Nash. ■

Teorema 3.2 *Sea B cualquier dominio de problemas en el cual la solución ordinal de Nash está bien definida. Entonces la solución ordinal de Nash satisface PAR, SYM, y IIA.*

Demostración : En la demostración del teorema anterior se ve que la solución ordinal de Nash cumple PAR ahora veremos que también satisface SYM y IIA.

La solución satisface SYM. Suponga que $(\succeq_1, \succeq_2)$ es un problema simétrico con la correspondencia Φ. Si $\Phi(b) \succ\succ \Phi(a)$ entonces existen p e i tales que $p\Phi(b) \succ_i \Phi(a)$ y $\Phi(b) \succ_j p\Phi(a)$ como Φ cumple con $L \succeq_i L'$ sí y sólo si $\Phi(L) \succeq_j \Phi(L')$ entonces $pb \succ_j a$ y $b \succ_i pa$ con lo que $b \succ\succ a$. Entonces si a^* es solución de Nash también lo es $\Phi(a^*)$. Y como la solución es única $\Phi(a^*) = a^*$.

[3]En el artículo original se dá una demostración análoga pero no se llega a una contradicción. Para resolver este problema se hicieron los supuestos adicionales de las propiedades 1 y 8 del problema de negociación.

La solución satisface IIA. Sea a^* la solución ordinal de Nash para las preferencias $(\succeq_1, \succeq_2)$ y sea $\succeq_i'$ una preferencia que coincide con $\succeq_i$ en A, tal que

$$\text{si } a \succeq_i a^* \text{ y } pa \sim_i a^*, \text{ entonces } pa \preceq_i' a^* \tag{3.12}$$

y

$$\text{si } a^* \succeq_i a \text{ y } qa^* \sim_i a, \text{ entonces } qa^* \sim_i' a. \tag{3.13}$$

Probaremos que si a^* es solución de $(\succeq_j, \succeq_i)$ también es solución ordinal de Nash de $(\succeq_j, \succeq_i')$. Suponga que existen $p \in [0,1]$ y $a \in A$ tales que $pa \succ_i' a^*$, por DOM $a \succ_i' a^*$ y por contrapuesta de 3.12 $pa \succ_i a^*$ o $a^* \succ_i pa$. Supongamos que $a^* \succ_i pa$, como $a \succ_i a^*$ por continuidad existe $q > p$ tal que $qa \sim_i a^*$ entonces $qa \preceq_i' a^*$. Por DOM $pa \preceq_i' qa \preceq_i' a^*$ y por hipótesis $pa \succ_i' a^*$, de modo que sólo sucede $pa \succ_i a^*$ y, al ser a^* solución ordinal de Nash, $pa^* \succeq_j a$. Ahora supongamos que existen p y a tal que $pa \succ_j a^*$ por DOM $a \succ_j a^*$, por ser a^* pareto óptima $a^* \succ_i a$, al ser a^* solución de $(\succeq_j, \succeq_i)$ tenemos que $pa^* \succeq_i a$. Por continuidad existe $q < p$ tal que $qa^* \sim_i a$ y por 3.13 $qa^* \sim_i' a$. Así por DOM $pa^* \succeq_i' a$, y a^* es solución de $(\succeq_j, \succeq_i')$. Por lo tanto se cumple IIA. ■

Teorema 3.3 *Sea B cualquier dominio de problemas que contienen todos los problemas $(A, D, \succeq_1, \succeq_2)$ donde las preferencias cumplen con los supuestos de Von Neumann y Morgenstern y satisfacen DOM, C, ESC, y H. Entonces, la solución ordinal de Nash es la única solución en B que satisface PAR, SYM, y IIA.*

Demostración : Sea a^* solución ordinal de Nash de $(\succeq_1, \succeq_2)$ y supongamos que hay otra solución $F(\succeq_1, \succeq_2)$ que cumple SYM, IIA y PAR. Definimos $(\succeq_1', \succeq_2')$ relaciones de preferencia que cumplen los supuestos de VNM, que coincidan con $(\succeq_1, \succeq_2)$ en A y que satisfagan que para cualquier acuerdo $a \in A$ Pareto óptimo

$$\text{si } a \succ_1 a^* \text{ y } a \sim_2 pa^* \text{ para alguna } p \text{ entonces } a \sim_2' pa^* \text{ y } a^* \sim_1' [\frac{1}{(2-p)}]a \tag{3.14}$$

$$\text{si } a \prec_1 a^* \text{ y } a \sim_1 pa^* \text{ para alguna } p \text{ entonces } a \sim_1' pa^* \text{ y } a^* \sim_2' [\frac{1}{(2-p)}]a \tag{3.15}$$

Notemos que si queremos definir una relación de preferencia $\succeq'$ sobre $lot(A)$ que cumpla con los supuestos de VNM basta dar una función de utilidad $u : A \to \mathbb{R}$ que represente a la relación de preferencia $\succeq'$ sobre los acuerdos (que en realidad son las loterías que dan 1 a un acuerdo y cero a todos los demás). Esto es porque para cualquier par de loterías $L = \sum_{i=1}^{n} a_i p_i$ y $L' = \sum_{i=1}^{m} b_i q_i$ tendremos que $L \succeq L'$ si y sólo si $Eu(L) \geq Eu(L')$, que por definición es $\sum_{i=1}^{n} u(a_i)p_i \geq \sum_{i=1}^{m} u(b_i)q_i$.

Entonces para verificar que la relación de preferencia $\succeq_1'$ está definida en $lot(A)$ bastará ver que las condiciones 3.14 y 3.15 determinan una función de utilidad $u_1 : A \to \mathbb{R}$ que representa a la relación de preferencias $\succeq_1'$ sobre los acuerdos (recordemos que u_1 existe por que $\succeq_1'$ cumple los supuestos de VNM). Sea $a \in A$ por el lema 3.5 existe un acuerdo Pareto óptimo a_{po} tal que $a \sim_1 a_{po}$, como la relación de preferencia es total sucede que $a_{po} \succeq_1 a^*$ o $a_{po} \preceq_1 a^*$. Si suceden las dos $a_{po} \sim_1 a^*$ y como las preferencias coinciden en los acuerdos $a_{po} \sim_1' a^*$ entonces $u_1(a) = u_1(a_{po}) = u_1(a^*)$, si sólo sucede $a_{po} \succeq_1 a^*$ entonces $a_{po} \succ_1 a^*$ y al ser a^* Pareto óptima tengo que $a^* \succ_2 a_{po}$ y por el lema 3.1 existe $p \in [0,1]$ tal que $a_{po} \sim_2 pa^*$. Usando la condición 3.14 tendremos que $u_1(a^*) = [\frac{1}{(2-p)}]u_1(a_{po}) + (1 - [\frac{1}{(2-p)}])u_1(D)$ entonces podemos despejar $u_1(a_{po})$ y obtendremnos $u_1(a_{po}) = u_1(a) = f(u_1(a^*), u_1(D))$, que estará determinada en función de $u_1(a^*)$ y $u_1(D)$. En el caso de que suceda sólo $a_{po} \preceq_1 a^*$ tengo que $a_{po} \prec_1 a^*$ y por el lema 3.1 existe $p \in [0,1]$ tal que $a_{po} \sim_1 pa^*$, usando la condición 3.15 $u_1(a) = u_1(a_{po}) = pu_1(a^*) + (1-p)u_1(D)$. Entonces tendremos la función de utilidad $u_1 : A \to \mathbb{R}$ totalmente determinada simplemente otorgándoles valores a $u_1(a^*)$ y $u_1(D)$. Por lo tanto sabemos cómo está definida la relación de preferencia $\succeq_1'$ en $lot(A)$. Y por un procedimiento análogo vemos cómo está definida la relación de preferencia $\succeq_2'$ en $lot(A)$.

Escojamos funciones de utilidad de VNM u_1 y u_2 que representen a $\succeq_1'$ y $\succeq_2'$, tales que $u_i(D) = 0$ y $u_i(a^*) = 1$ para $i = 1, 2$ y para todo a Pareto óptimo $u_1(a) + u_2(a) = 2$. Veamos cómo es la imagen de A bajo $(u_1(a), u_2(a))$. Sea S la imagen de A bajo $(u_1(a), u_2(a))$, primero como $u_i(D) = 0$ para $i = 1, 2$ tengo que $(0,0) \in S$. Por hipótesis para todo a Pareto óptimo $u_1(a) + u_2(a) = 2$ como B_i para $i = 1, 2$ son Pareto óptimos

entonces $(0,2)$ y $(2,0) \in S$. Usando la "convexidad" de A para toda $p \in [0,1]$ existe $a \in A$ tal que $a \sim_i pB_1 + (1-p)B_2$ para $i = 1,2$ entonces al cumplirse los supuesto de VNM $u_i(a) = pu_i(B_1) + (1-p)u_i(B_2)$ y $(p2, (1-p)2) \in S$ para toda $p \in [0,1]$, que es el segmento de la recta $x + y = 2$ donde $0 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq 2$, que es la imagen de los pareto óptimos. Además por ser estos pareto óptimos tengo que, para todo $(x,y) \in S$, $x + y \leq 2$. Por hipótesis para toda $a \in A$, $a \succeq_i D$ entonces, para todo $(x,y) \in S$, $0 \leq x$ y $0 \leq y$. Ahora usamos la "convexidad" con un acuerdo pareto óptimo a_{po} y D entonces, para toda $p \in [0,1]$ existe $a \in A$ tal que $pa_{po} \sim_i a$ para $i = 1,2$, con funciones de utilidad esto es $u_i(a) = pu_i(a_{po}) + (1-p)u_i(D)$. Por lo tanto $(pu_1(a_{po}), pu_2(a_{po})) \in S$ para toda $p \in [0,1]$. Esto es, el segmento de recta que une $(0,0)$ con un punto del segmento de la recta $x + y = 2$ donde $0 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq 2$. Por lo tanto el conjunto S es
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 2 \text{ con } 0 \leq x \leq 2 \text{ y } 0 \leq y \leq 2\}$ (ver figura 3.1).

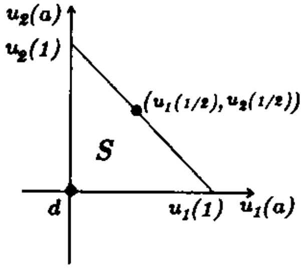

Figura 3.1: Representación de S

Para verificar que el problema es simétrico defina $\Phi : A \to A$ como $\Phi(D) = D$ y para $a \in A$ por el lema 3.4 existen $p, q \in [0,1]$ tales que $[pB_1 \sim'_1 a \text{ y } qB_2 \sim'_2 a]$, definimos $\Phi(a)$ como el acuerdo en A tal que

$$[pB_2 \sim'_2 \Phi(a) \text{ y } qB_1 \sim'_1 \Phi(a)]. \tag{3.16}$$

Ver que la función está bien definida es fácil si usamos funciones de utilidad. Sea $a \in A$ tal que $pB_1 \sim'_1 a$ y $qB_2 \sim'_2 a$ para algunas $p, q \in [0,1]$ entonces $u_1(a) = pu_1(B_1) = p2$ y

$u_2(a) = qu_2(B_2) = q2$. Como $(u_1(a), u_2(a)) \in S$ tengo que

$$pu_1(B_1) + qu_2(B_2) = p2 + q2 \leq 2$$

entonces

$$pu_2(B_2) + qu_1(B_1) = p2 + q2 \leq 2$$

lo que implica que $(qu_1(B_1), pu_2(B_2)) \in S$. Así debe existir $b \in A$ tal que $u_1(b) = qu_1(B_1)$ y $u_2(b) = pu_2(B_2)$ con lo que $\Phi(a) = b$ que es única por la condición de no redundancia (propiedad 6). Gráficamente lo podemos ver en la figura 3.2

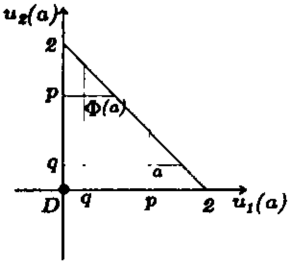

Figura 3.2: Representación gráfica de a y $\Phi(a)$

Veamos que se cumple la primera condición del problema simétrico. Si $\Phi(a) = b$ y $pB_1 \sim'_1 a$ y $qB_2 \sim'_2 a$ tendremos que por 3.14 $pB_2 \sim'_2 \Phi(a) = b$ y $qB_1 \sim'_1 \Phi(a) = b$ entonces $\Phi(b) = a$, y por tanto se cumple la primera condición. Falta probar la segunda, sean L y $L' \in lot(A)$ tales que $L \succeq'_i L'$ usando que las preferencias cumplen con los supuestos de VNM existen α, β tales que $\alpha B_i \sim'_i L$ y $\beta B_i \sim'_i L'$ y $\alpha \geq \beta$, como $\Phi(L) = \alpha\Phi(B_i)$ y $\Phi(B_i) = B_j$ tendremos que $\Phi(L) \succeq'_j \Phi(L')$. Por lo tanto el problema es simétrico. Entonces por SYM $F(\succeq'_1, \succeq'_2)$ es un punto fijo de Φ, si b^* es ese punto fijo $\Phi(b^*) = b^*$, por la definición de Φ tendremos que

$$pB_1 \sim'_1 b^* \text{ y } qB_1 \sim'_1 \Phi(b^*) = b^*$$

usando la función de utilidad u_1 que representa a $\succeq_1'$

$$\begin{aligned} pu_1(B_1) &= qu_1(B_1) \\ p &= q \end{aligned}$$

Por otro lado usando $pB_1 \sim_1' a$ y $qB_2 \sim_2' a$, $p = q$, y las funciones de utilidad u_i tenemos

$$\begin{aligned} u_1(b^*) &= pu_1(B_1) = p2 \\ u_2(b^*) &= pu_2(B_2) = p2 \end{aligned}$$

con lo que $u_1(b^*) = u_2(b^*)$. Al cumplir la solución PAR tengo que $u_1(b^*) = u_2(b^*) = 1$ entonces, como no hay acuerdos redundantes (propiedad 6) $b^* = a^*$ y $F(\succeq_1', \succeq_2') = a^*$. Ahora mostraremos que los problemas $(\succeq_1', \succeq_2')$ y $(\succeq_1, \succeq_2')$ satisfacen las condiciones necesarias para aplicar IIA. Para checar la primera condición de IIA supongamos que para alguna $a \in A$ y para alguna $p \in [0, 1]$ tenemos que $a \succ_1' a^*$ y $pa \sim_1' a^*$. Entonces por el lema 3.5 podemos encontrar un $b \in A$ Pareto óptimo tal que $a \sim_1' b$ y entonces por H

$$b \succ_1' a^* \text{ y } pb \sim_1' a^* \tag{3.17}$$

como las preferencias coinciden en los acuerdos $b \succ_1 a^*$ y además como a^* es Pareto óptimo $a^* \succ_2 b$. Como las preferencias son continuas por el lema 3.1, podemos encontrar $q \in [0, 1]$ tal que

$$qa^* \sim_2 b \tag{3.18}$$

Por el lema 3.3

$$[\frac{1}{(2-q)}]b \preceq_1 a^* \tag{3.19}$$

y las propiedades 3.14 y 3.18 $b \sim_2' qa^*$ y $a^* \sim_1' [\frac{1}{(2-q)}]b$. Ahora, por ser preferencias que cumplen con los supuestos de VNM y 3.17 se tiene que

$$[\frac{1}{(2-q)}] = p$$

y sustituyendo en 3.19 $pb \preceq_1 a^*$. Con esto queda demostrada la primera condición de IIA. (El caso de indiferencia $a \sim_1' a^*$ es trivial)

Para checar la segunda condición supongamos que $a^* \succ_1' a$ y $qa^* \sim_1' a$. Como antes, sabemos que existe b Pareto óptimo tal que $b \sim_1' a$ entonces

$$a^* \succ_1' b \text{ y } qa^* \sim_1' b \tag{3.20}$$

y como en los acuerdos las relaciones son iguales $a^* \succ_1 b$. Entonces podemos encontrar $p \in [0, 1]$ tal que $b \sim_1 pa^*$ y de 3.15 se tiene que $b \sim_1' pa^*$. Como las preferencias cumplen los supuestos de VNM y de 3.20 $p = q$ y entonces $b \sim_1 qa^*$ con lo que se demuestra la segunda condición de IIA.

Ver que $(\succeq_1, \succeq_2')$ y $(\succeq_1, \succeq_2)$ también cumplen las condiciones de IIA se hace por un procedimiento análogo. Por lo tanto, como la solución F cumple con IIA se tiene que $F(\succeq_1', \succeq_2') = F(\succeq_1, \succeq_2') = F(\succeq_1, \succeq_2) = a^*$ y la solución ordinal de Nash es la única que cumple los tres axiomas. ■

Proposición 3.5 *Si $\succeq_1'$ es más averso al riesgo que $\succeq_1$ entonces la solución ordinal de Nash de $(\succeq_1', \succeq_2)$, b^* es menos preferida por 1 que la solución de $(\succeq_1, \succeq_2)$, a^*. Esto es $N(\succeq_1, \succeq_2) = a^* \succeq_1 N(\succeq_1', \succeq_2) = b^*$*

Demostración : Suponga que $b^* \succ_1 a^*$. Por DOM y C $b^* \succ_1 \alpha b^* + (1-\alpha)a^* \succ_1 a^*$, por "conexidad" (propiedad 6) podemos encontrar un acuerdo $a \sim_1 \alpha b^* + (1-\alpha)a^*$. Por el lema 3.5 existe a_{po} Pareto óptimo tal que $a \sim_1 a_{po}$ entonces $b^* \succ_1 a_{po} \succ_1 a^*$. Como a^* es solución ordinal de Nash no sucede $a_{po} \succ\succ a^*$ por el lema 3.2 $a_{po} \succ\succ b^*$. Esto es, hay un número $p \in [0, 1]$ tal que $pa_{po} \succ_2 b^*$ y $a_{po} \succ_1 pb^*$. Como $\succeq_1'$ es más averso al riesgo que

$\succeq_1$ tendremos que $a_{po} \succ'_1 pb^*$ lo que es una contradicción a que b^* sea solución ordinal de Nash de $(\succeq'_1, \succeq_2)$. ■

Bibliografía

[1] Binmore K. and Dagsputa P., (1987) "The Economics of Bargaining", ed. Oxford Blakwell.

[2] Binmore K., (1994) "Teoría de Juegos", ed. Mc Graw Hill.

[3] Chew S. (1983), "A Generalization of the Quasilinear Mean with Applications to the Measurement of Income Inequality and Decision Theory Resolving the Allais Paradox", *Econometrica,* 51, 1061-1|092.

[4] Kahneman D. and Tversky A., (1979) "Prospect Theroy: An Analysis of Desicion Under Risk" *Econometrica,* 47, 263-291.

[5] Kalai E. and Smodorosky M., (1975) "Other Solutions to Nash´s Bargaining Problem", *Econometrica,* 43, 513-518.

[6] Karni E. and Schmeidler D. "Utility Theory With Uncertainty", Handbook of Mathematical Economics 1763-1861, Vol. IV.

[7] Machina, M., (1987) "Choice Under Uncertainty: Problems Solved and Unsolved " *Journal of Economic Perspectives*, 1, 121-154.

[8] Nash, J. (1950) "The Bargaining Problem" *Econometrica,* 28, 152-155.

[9] Osborne M. and Rubinstein A., (1990) "Bargaining and Markets" ed. Academic Press.

[10] Osborne M. and Rubinstein A., (1994) "A Course in Game Theory" ed. The MIT Press.

[11] Quiggin J., (1982) "A Theory of Anticipated Utility" *Journal of Economic Behavior and Organization,* 3, 323-343.

[12] Rubinstein A., Safra Z. an d Thompson W., (1992)"On the Interpretation of the Nash Bargaining Solution and its Extension to Non-Expected Utility Preferences" *Econometrica*, 60, 1171-1186.

[13] Safra Z. and Zilcha I., (1993) "Bargaining Solutions withuot the Expected Utility Hypothesis", *Games and Economic Behavior*,5, 288-306.

[14] Thomas L. (1984) "Games, Theory and Applications", ed. Ellis Horwood.