



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Escuela Nacional de Estudios Profesionales
"ACATLAN"

UNA APLICACION DE LAS TECNICAS DE BOX-
JENKINS Y DE INTERVENCION PARA ANALISIS
DE SERIES DE TIEMPO AL ANALISIS DE LA EVO-
LUCION DE LA CANTIDAD TOTAL DE OZONO EN
LA CIUDAD DE MEXICO (1974-1985)

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
A C T U A R I O
P R E S E N T A :
JORGE SILVIO SALAZAR VILLAVERDE

México, D. F.

1988



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

INTRODUCCION	1
CAPITULO I.- GENERALIDADES.	7
CAPITULO II.- EL OZONO Y SU MEDICION.	
2.1.- Introducción.	11
2.2.- El Problema del Ozono, Medición de la cantidad de Ozono y su problemática.	13
CAPITULO III.- LAS SERIES DE TIEMPO	
3.1.- Introducción	31
3.2.- Contexto y definición de las Series de Tiempo	40
3.3.- Herramientas	48
3.4.- Modelos	55
3.4.1.- El Proceso de Promedios Moviles	59
3.4.2.- Procesos Autorregresivos	65
3.4.3.- Modelos ARMA	75
3.4.4.- Modelos ARIMA,	81
3.5.- Construcción de Modelos para Series de Tiempo Univariadas (desde la perspectiva de Box-Jenkins).	90
3.5.1.- Identificación	91
3.5.2.- Estimación	100
3.5.3.- Verificación.	106
3.6.- Uso del Modelo (Pronósticos).	116
3.7.- Modelos Estacionales Simples y Multipli- cativos.	130
3.8.- Ejemplo: Exportaciones de Estados Unidos a la Comunidad Económica Europea (CEE).	144
CAPITULO IV.- EL ANALISIS DE INTERVENCION.	
4.1.- Introducción	163

4.2.- Las Técnicas de Análisis de Intervención	164
4.3.- Ejemplo: Análisis Estadístico de los datos de Smog Fotoquímico en Los Angeles (Oxidantes)	185

CAPITULO V.-

EL MODELO

5.1.- Introducción	195
5.2.- El Modelo y sus Resultados	196

CONCLUSIONES.-	237
BIBLIOGRAFIA.-	241

"Una descripción espacio-Temporal Rigurosa
y una conexión causal rigurosa de los pro-
cesos individuales no pueden ser realizados
simultáneamente: una y otra debe ser sacri-
ficada"

Heisenberg

"El hombre no gobernará la naturaleza,
salvo obedeciéndola"

Jacques Lacan

INTRODUCCION.-

El problema del deterioro del medio ambiente, en general, atrae cada vez más la atención de todos los sectores de la sociedad. Prueba de ello son las numerosas campañas a favor de la "conservación" de éste que se están realizando (aunque, al parecer, no con mucho éxito).

Esta actitud, a todas luces justificada, requiere de información cada vez más precisa acerca de cada uno de los aspectos -o factores- que intervienen en este fenómeno, con el propósito de coadyuvar para la consecución de tal fin. Gran parte de dicha información es producida por las instituciones de Educación Superior, y en mayor cantidad y calidad por los Institutos de Investigación.

Es notorio que dichos esfuerzos por estudiar tales cuestiones se concentran preponderantemente en el entorno más o menos "cercano" al hombre, por decirlo de alguna manera. Esto es, se pone mayor atención, por ejemplo, en los problemas de contaminación que ocasionan los más de dos millones de automóviles que transitan diariamente por las calles de la Ciudad de México, o, en los desechos producidos por industrias asentadas irracionalmente al norte de la Ciudad, que contaminan también el aire y el agua de ésta. Estos aspectos, que son ya un lugar común, deberán, claro, seguir siendo estudiados más a fondo.

En otras palabras, la atención se centra enfáticamente en la parte de la atmósfera conocida como la tropósfera (que es la que incluye a la superficie de la tierra), despreocupándose, en parte, por lo que pasa en "regiones" más allá de los límites de ésta, en las que ocurren fenómenos semejantes a los descritos que inciden de manera directa en el hombre y su entorno. Nos referimos, específicamente, a la Estratósfera (región situada aproximadamente a una altura de entre 10 y 50 Km sobre la superficie de la tierra).

Más específicamente, en esta región de la atmósfera, se encuentra lo que se ha llamado la "capa de Ozono", que es, de modo sumario, la masa gaseosa que nos protege de la radiación ultravioleta proveniente del sol (y en donde en fecha recientes, se afirma haber detectado un "hoyo" a la altura de la antártida). Dicha radiación incide de manera directa en la salud humana y en el medio ambiente, ya que se ha comprobado que, en dosis excesivas, pueden producir cáncer en la piel en los humanos, ó cambios climáticos que afectarían los ecosistemas actuales, por mencionar sólo algunos de sus efectos nocivos posibles.

A partir de lo anterior pues, surge la necesidad de determinar si hay o no una reducción en la capa de Ozono en la Estratósfera (en contraste con la información acerca de la cantidad de Ozono obtenida por las llamadas redes de monitoreo, que se refieren a la cantidad de Ozono troposférico -que no es lo mismo- y que aparecen en la prensa actualmente con vocablos que, dicho sea de paso, pocos entienden).

Esta necesidad surge, también, debido a que se ha demostrado que hay factores de origen antropogénico, como por ejemplo; el uso cada vez mayor de aerosoles, las turbinas de los llamados aviones supersónicos, entre otros hechos, que pueden alterar el equilibrio fotoquímico de dicha capa de manera inconveniente por los contaminantes que producen.

Por tal motivo, se han realizado estudios en algunas partes del mundo, y principalmente en los Estados Unidos, sobre este fenómeno. En México carecemos de éstos -o cuando menos desde la perspectiva metodológica propuesta en este trabajo.

Cabe mencionar también que existen estudios teóricos referentes a pronósticos acerca de la posible reducción a largo plazo en el espesor de la capa de Ozono desde una perspectiva físico-química, resultando modelos teóricos que, ante la imposibilidad de ser exactos, debido a que no se pueden especificar y por lo tanto incluir todas las reacciones químicas (y la velocidad con las que éstas se llevan a cabo) que ocurren en tal capa, requieren de estudios empíricos con base en los registros (mediciones) obtenidos por métodos e instrumentos especializados, para los cuales la manera más apropiada de analizar es por medio de métodos estadísticos con el fin de contrastarlos -entre otras cosas- con la teoría referida, y, determinar, en último término, si hay o no tal patrón a largo plazo. Este trabajo aborda esta última perspectiva.

Pero esto no es trivial, ya que los datos referentes a la cantidad total de Ozono estratosférico presentan características que complican el análisis de su comportamiento en el tiempo, como son: patrones estacionales, correlación en el tiempo entre las observaciones (i.e., no independencia entre las variables aleatorias que representan al fenómeno), etc., que nos obligarán a utilizar la metodología de análisis para series de tiempo, ya que ésta considera estos aspectos.

Adicionalmente, cabe mencionar también que, además de determinarse si hay o no una tendencia en la evolución de la cantidad total de Ozono estratosférico mediante tal metodología, es posible averiguar si hay factores externos al fenómeno que la provoquen (y medir su influencia). Es decir, determinar si a partir de la intervención o influencia de un factor ajeno al fenómeno, es cuando empieza a mostrarse tal patrón. Esto se puede llevar a cabo mediante lo que se ha llamado el análisis de intervención.

Así, recapitulando, el objetivo de esta tesis será mostrar que mediante la aplicación de las técnicas de Box y Jenkins (1970) y una extensión de ésta, llamada Análisis de Intervención creada por Box y Tiao (1975), para el análisis de Series de Tiempo, se puede llevar a cabo el análisis de la evolución de la cantidad total de Ozono estratosférico de la Ciudad de México (con datos obtenidos por el departamento de Radiación Solar del Instituto de Geofísica de la UNAM en el período que comprende entre los años de

1974 y 1985) con el fin de detectar si uno o más factores externos al fenómeno (como pueden ser ciertos contaminantes, mala calibración de los instrumentos de medición debido a la incertidumbre inherente de tal proceso, etc. ó, como en este trabajo, la erupción del volcán Chichonal en Chiapas en el año de 1982) provocó (o provocaron) cambios o tendencias "anormales", en el sentido de no poder ser explicados a partir de patrones y variaciones del comportamiento histórico de los datos, y que pudieran provocar una alteración en el equilibrio fotoquímico de la capa de Ozono, produciendo a su vez, efectos indeseables en la Ecología y en la salud humana. En cuyo caso pues, el detectarlos oportunamente, abre la posibilidad de que los especialistas estudien el problema y traten de implementar, consecuentemente, medidas correctivas (hecho que ya de por sí justificaría este trabajo).

Ahora, cabe aquí aclarar que, por factores que se explicarán en el transcurso de este trabajo, es irreal pensar que sólo mediante el análisis de los datos de la Ciudad de México, podríamos determinar si hay o no, en general, una reducción en la capa de Ozono, ya que la estratósfera no sabe de fronteras geopolíticas, siendo pues la metodología aquí presentada, una guía de lo que cada estación de observación de Ozono estratosférico debe seguir con el fin de llegar a una conclusión global a este respecto. Este aspecto, pues, limita el alcance de este trabajo pero a la vez le da sentido y, además, no invalida las conclusiones obtenidas con respecto a la Ciudad de México.

Finalmente, quiero agradecer muy especialmente al M. en C. José Luis Bravo Cabrera, por haber aceptado dirigir esta tesis, por facilitar los datos y la orientación necesaria para llevar a cabo este trabajo, así como por su ya larga y honesta amistad con la que me honra.

I.- GENERALIDADES

Para llevar a cabo lo anterior, esta tesis se ha organizado de la siguiente manera:

En el capítulo siguiente, mostramos los aspectos que consideramos necesarios con respecto a lo que se ha llamado "el problema del Ozono", con el fin de determinar, lo más breve y claro posible, el contexto en el cual trabajaremos. Determinándose, también, la problemática implícita en la medición, así como en el análisis de la evolución de la cantidad total de Ozono estratosférico. Es decir, aspectos que inciden consecuentemente en la determinación de la posible tendencia de ésta, justificándose posteriormente, el uso de las Técnicas de Box-Jenkins y el Análisis de Intervención para Series de Tiempo, para abordar adecuadamente el problema. Asimismo, se mencionan algunos de los aspectos por los cuales tal estudio es importante como son: su relación con la salud humana y el medio ambiente.

Posteriormente, como este trabajo es, entre otras cosas, una aplicación de la metodología para análisis de Series de Tiempo a partir de la perspectiva de G.E.P. Box y G.M. Jenkins (como dijimos en el párrafo anterior) en el tercer capítulo, mostraremos los elementos necesarios y suficientes de ésta para llevar a cabo el fin que nos proponemos. Así, ese capítulo se inicia explicando que son las Series de Tiempo, sus características peculiares y el contexto en el cual dicho análisis está inmerso, desde el punto de vista de la Estadística. Hecho lo anterior, se proporcionan

posteriormente las herramientas teóricas y prácticas para llevar a cabo tal análisis, con el fin último de obtener un modelo que represente lo más adecuadamente posible a una serie de tiempo dada. Seguidamente, dado que teóricamente hay una cantidad enorme de posibles modelos a ser utilizados (o utilizables), se muestran o se sugieren más bien, los que según los autores arriba mencionados, son los más aptos para el análisis y que son la familia llamada de Modelos Autorregresivos y de Promedios Móviles (ARMA) y sus extensiones: los modelos Autorregresivos Integrados y de promedios móviles (ARIMA). Después, se describe ampliamente la metodología para la construcción de modelos para series de tiempo univariadas, en la cual se utiliza lo anteriormente expuesto, y se describen asimismo las etapas prácticas (que son de carácter iterativo) para tal propósito que son: la identificación, estimación, verificación y el uso del modelo. En este capítulo se muestra también otra extensión de los modelos ARMA, más general, que son los modelos ARMA estacionales simples y multiplicativos, en los cuales se toman en cuenta además, ciertas características de naturaleza periódica que pueden presentar algunos fenómenos en la realidad, entre ellos el problema que nos ocupa. Finalmente, se da un ejemplo de gran valor ilustrativo extraído de un excelente texto, en el que se propone un modelo para las exportaciones de los Estados Unidos a la Comunidad Económica Europea.

Cabe mencionar, a manera de aclaración y delimitación de los alcances de este trabajo que, por ser éste una aplicación de técnicas arriba mencionadas, tanto en este capítulo como en el siguiente se muestran sólo los desarrollos conceptuales necesarios

para exponer lo más claramente posible dichos elementos, haciendo referencia algunas veces a teoremas y resultados que no necesariamente demostraremos rigurosamente en este trabajo, debido a sus propósitos particulares.

Después, en el cuarto capítulo se muestra una técnica de análisis para series de tiempo, relativamente novedosa (y que utilizaremos en el siguiente capítulo) llamada Análisis de intervención, propuesto, como dijimos anteriormente, por Box y Tiao en 1975 en un ya famoso artículo. Se establece, en este capítulo, que los modelos obtenidos a partir de esta teoría vienen siendo, en últimos términos, una extensión de los modelos ARIMA explicados en el capítulo anterior, y por medio de la cual sería posible determinar, en un momento dado, si ciertos factores externos al fenómeno en estudio afectan o afectaron el comportamiento histórico del mismo (es decir, de la serie de tiempo) de manera significativa.

Se muestra también un ejemplo de la utilización de tal técnica aparecido en el artículo de Box y Tiao arriba mencionado, que además está muy relacionado al que propondremos en esta tesis y que se refiere a las repercusiones de algunas medidas viales contra la contaminación de la Ciudad de Los Angeles en los Estados Unidos.

En el quinto capítulo, se aplican los conceptos desarrollados en los capítulos anteriores, para proponer un modelo para los

datos de la serie de Tiempo de la cantidad total de Ozono estratosférico en la Ciudad de México de 1974 a 1985, con el fin de determinar si hay o no una tendencia en estos, tomando como intervención (es decir a partir de) la erupción del volcán Chichonal en el Estado de Chiapas ocurrida en el mes de Marzo de 1982, hecho que según los especialistas del Instituto de Geofísica de esta Institución, pudo ocasionar tal comportamiento (y que es lo que queremos averiguar) en la capa de Ozono, pudiendo consecuentemente ocasionar, a largo plazo, las consecuencias descritas en el primer capítulo.

Por último, presentamos las conclusiones pertinentes obtenidas del trabajo desarrollado a lo largo de esta tesis.

Con el fin de facilitar la organización y lectura de este trabajo, las secciones de cada capítulo estarán identificadas por dos números: el primero corresponderá al número de capítulo, mientras que el segundo se referirá al número progresivo de sección. Las proposiciones y fórmulas estarán especificadas a su vez, por número de capítulo, número de sección y número progresivo. Con respecto a las citas bibliográficas, solo se especificarán por el primer apellido del autor o autores, seguido del año de publicación.

11.- EL OZONO Y SU MEDICION

2.1.- INTRODUCCION

En la actualidad, uno de los problemas más serios de la Ciudad de México, es, sin lugar a dudas, el deterioro del medio ambiente. Debido a los contaminantes que arrojan los más de dos millones de automóviles que transitan en ella, y a los desechos industriales que ahogan tanto al aire como al agua de esta ciudad, proveniente de las Industrias establecidas en las inmediaciones de ésta, entre otras cosas.

Pero este problema, desgraciadamente no queda ahí. Ya que además de lo anterior, en fechas recientes se han adicionado nuevas preocupaciones en el sentido de que algo semejante podría estar sucediendo en "regiones" más altas de la atmósfera. Específicamente, los especialistas sospechan que la llamada capa de Ozono (localizada en la región de la atmósfera conocida como la Estratósfera, y que actúa como "escudo protector" de la tierra contra la radiación ultravioleta proveniente del Sol, que de no ser por ella -y el equilibrio fotoquímico en el que se ha mantenido- habrían grandes modificaciones en el medio ambiente y en la salud humana, nada favorables) podría haber sufrido modificaciones significativas, en el sentido de que una reducción en la cantidad total de Ozono, que la constituye, debido tanto a factores de origen antropogénico (como el uso creciente de ciertas sustancias contaminantes) como "naturales" (como por ejemplo, la erupción del volcán Chichonal en el Estado de Chiapas en Marzo de 1982).

El averiguar esto último es el objetivo de este trabajo. Y para motivarlo, en este capítulo mostramos el contexto que rodea a nuestro objeto de estudio: el análisis de la evolución de la cantidad total de Ozono Estratosférico en la Ciudad de México. Introduciendo los conceptos y nociones, que a nuestro juicio, nos permitan saber y ubicarnos de lo que estamos tratando, para posteriormente, listar algunos de los problemas inherentes al proceso de medición de éste, los cuales como veremos, nos obligan a utilizar las técnicas propuestas por Box y Jenkins (1970) para análisis de Series de Tiempo. También se enuncian algunos de los efectos que sobre la Ecología y la Salud humana podría provocar una tal reducción en la Capa de Ozono. Efectos que, por sí mismos, justifican este estudio, o, ¿habrá algún problema más interesante que la conservación de la vida?

2.2 EL PROBLEMA DEL OZONO. MEDICION DE LA CANTIDAD DE OZONO Y SU PROBLEMÁTICA.

La biósfera, como sabemos, es la región que incluye todas las partes de nuestro planeta y su atmósfera. A su vez ésta -la atmósfera- constituye la capa predominantemente gaseosa que rodea a la tierra, y la sustancia que la forma es el aire. El aire, ese importante "elemento" para la vida, es un gas. Pero, la composición del aire no es constante en todo el mundo, y en especial cuando se contamina. Así, acerca del aire surgen algunas cuestiones como: ¿Cuándo es "puro" el aire? ¿cuándo se dice que está contaminado? o en ese caso ¿sólo debemos llamar "contaminante" del aire a las impurezas -ocasionadas por la "vida moderna"- que están presentes en concentración suficiente para producir algunos efectos nocivos y mensurables en los organismos vivos? Esto no es trivial.

La respuesta a esta última, de entrada, es negativa. Ya que, por un lado, se introducen sustancias perjudiciales en la atmósfera también mediante procesos naturales. Por ejemplo: los volcanes al hacer erupción, descargan grandes masas de polvo y de gases sulfurosos; durante los incendios forestales, en unas cuantas horas se desprenden y liberan grandes cantidades de materiales que a otros procesos más lentos de desintegración tardarían años en producir. Aunque por otro lado, en efecto, es bien sabido los efectos contaminantes provocados por el hombre y su tecnología en el aire (como el uso indiscriminado de ciertos fertilizantes, los gases emitidos por fábricas, automóviles, los aerosoles, los aviones supersónicos, etc.).

En este sentido, como aclaramos al inicio de este trabajo, nos interesará lo que se ha denominado someramente como la capa de Ozono, un gas que se "encuentra" en la región conocida como la estratósfera, que como veremos, puede ser tan importante para el hombre y su entorno como los problemas de deterioro del ambiente por contaminación en la parte baja de la atmósfera (llamada tropósfera).

El Ozono es uno de los muchos gases encontrados, como dijimos, en la estratósfera, una región de la atmósfera localizada entre los 10 y 50 Km. sobre la superficie de la tierra. Aunque la concentración de Ozono en ésta es relativamente pequeña, juega un papel importante en el ciclo vital sobre la tierra, debido principalmente a su habilidad para absorber la radiación ultravioleta proveniente del Sol, lo cual lo convierte así en un elemento importante en la determinación del clima de la misma, así como de la salud de los seres vivos (como veremos después también).

Enfatizando. En adelante cuando nos refiramos al Ozono, estaremos hablando específicamente del análisis del Ozono estratosférico, en la región delimitada según el párrafo anterior (y no del llamado troposférico localizado en la tropósfera, en la parte baja de la atmósfera).

Ahora, aquí es conveniente mencionar, que el Ozono se está formando y destruyendo constantemente, pero, antes de exponer

algunos aspectos sobre cómo ocurre este fenómeno y su relación con los seres vivos y la determinación del clima, es preciso señalar, primero, lo que ocurre con la radiación, factor con respecto del cual, la disminución de la capa de Ozono tiene relación directa.

Es un lugar común ya, que la radiación, sea esta proveniente de reactores nucleares, del sol o de cualquier otra fuente, puede ser nociva para los seres vivos en grandes "dosis" a corto plazo, y que tiene efectos perjudiciales "en ciertas dosis" constantes o crecientes a largo plazo (nótese que a partir de la lógica seguida hasta ahora en este trabajo, nos interesará especialmente lo referente a esta última posibilidad).

Estudios sobre el tema establecen, de manera general que, aproximadamente sólo el 21% de la radiación solar incidente cae directamente contra la tierra. El otro 79% es interceptado por la atmósfera, esto es, por las nubes, los gases y partículas aerosoles. Parte de esta radiación interceptada vuelve a ser reflejada (o rebotada) hacia el espacio, otra, se absorbe en forma de calor y, otra más se difunde en la tierra. En general, hay consenso de que, aproximadamente, la mitad de la energía calórica que se recibe del Sol, alcanza la superficie de la tierra. Así, gran parte del calor emitido por la tierra es reabsorbido por la atmósfera y se conserva, de modo que la superficie de la tierra es más caliente de lo que sería si no lo reabsorbiera. A este calentamiento se le ha llamado "efecto de Invernadero", por analogía con la propiedad del invernadero de mantener su interior más caliente que el exterior durante el día. Pero, la mayor parte

de la energía recibida por la tierra es en forma de radiación infrarroja y ultravioleta.

Ahora, cabe mencionar que algunas moléculas de la atmósfera absorben la radiación infrarroja y ultravioleta, pero otras no. Así, por ejemplo, el Oxígeno y el nitrógeno, que juntos representan casi el 99% de la composición del aire seco al nivel del suelo, no absorben la luz infrarroja y la ultravioleta. Pero, por otro lado, las moléculas de agua, el Dióxido de Carbono y el Ozono sí lo hacen (esta es, de hecho, una de las características importantes que nos interesan del Ozono).

El Sol también, como se dijo, emite la radiación ultravioleta que es la que, debido al alto nivel de energía que representa puede broncear la piel, pero también provocar quemaduras, y cáncer en ésta. Asimismo, se ha observado, por ejemplo, que el crecimiento de algunos cultivos como el tomate, se retarda si se les aplica grandes dosis de ella.

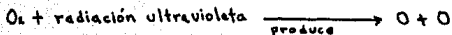
Es decir, no es difícil entender de lo anterior que, si a la superficie de la tierra penetran más cantidades de luz ultravioleta que la que llega a la atmósfera superior actualmente, aumentarían las posibilidades de que se produzcan los perjuicios antes mencionados.

Afortunadamente, la radiación de alta energía de esa luz se elimina suficientemente hasta ahora en la atmósfera superior (estratosfera) mediante una serie de reacciones fotoquímicas en

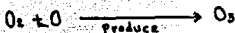
las que intervienen el oxígeno y el Ozono moleculares. Hecho que nos incita a pensar (y que así lo es además) que la concentración de Ozono está determinada por un balance -en el sentido de equilibrio- entre procesos químicos.

Así, a manera de ilustración de lo anterior, y sin el objeto de exponer en detalle las implicaciones teóricas y operativas (que están más allá del propósito y alcance de este trabajo) de cómo se lleva a cabo el proceso de creación y destrucción constante de Ozono, se mostrarán algunos ejemplos de esto, que como se verá, para nuestros propósitos esto no menoscaba nuestro entendimiento.

Por ejemplo, la luz solar al incidir sobre una molécula de Oxígeno atmosférico, la desintegra en dos átomos de Oxígeno, esto es:

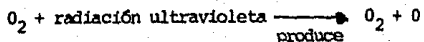


De este modo, la radiación queda absorbida y se transforma en energía química. Pero, sucede que el oxígeno atómico (al lado derecho de la expresión anterior) es sumamente reactivo y se combina con el O_2 para formar Ozono (O_3), esto es:



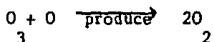
En esta reacción, dicen los especialistas, se libera energía, pero más bien en forma de luz infrarroja que de radiación ultravioleta. Ocasionando que la luz ultravioleta de alta energía,

biológicamente perjudicial, se convierta en radiación infrarroja benigna. Después, el Ozono absorbe la radiación ultravioleta adicional, para desintegrarse de acuerdo con la siguiente reacción:



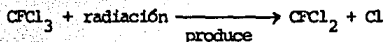
Observándose de lo anterior que la radiación queda eliminada tanto por la formación, como por la destrucción del Ozono.

Pero, el problema es que el Ozono puede suprimirse también por medio de otros procesos no fotoquímicos. Esto es, por ejemplo, en la atmósfera superior ocurre una reacción del tipo siguiente, en forma natural:



Hasta aquí, el Ozono se crea y destruye en forma "natural", pero, recientemente, ha surgido la inquietud de que algunos contaminantes del aire están agotando la barrera protectora del Ozono. Entre estos se encuentran, por ejemplo, los clorofluorometanos ($CFCl_3, CFC_2Cl_2$). En la atmósfera inferior, el $CFCl_3$ es inerte y no altera a los sistemas vivos. A esto se debe que se utilice como un impelente en latas de aerosol. Su función es la de proporcionar la presión que arroja al líquido en forma de vapor fino. Sin embargo, parte de este gas se desplaza hacia la

capa de Ozono en la atmósfera superior. Ahí su comportamiento es distinto, ya que se desintegra en dos partículas como sigue:



donde, a su vez, este cloro atómico puede reaccionar para eliminar el Ozono de la siguiente forma:



resultando, finalmente que el CFCl_3 elimina el Ozono, permitiendo así, en concentraciones elevadas en la atmósfera superior, que lleguen grandes cantidades de radiación ultravioleta tan perjudicial. Se ha calculado (Brower, 1985) que si se llegan a realizar los incrementos proyectados respecto al uso de estos compuestos, y si no se destruyen en la atmósfera inferior, la abundancia total de Ozono puede disminuir más del 20% en los próximos 50 años, hecho que es catastrófico.

Otro factor de suma importancia en la disminución de la capa de Ozono son los aviones de Turborreacción. En especial lo que se ha llamado transporte supersónico, que vuela entre 18000 y 20000 metros de altura. Estos contaminan el aire estratosférico, debido a que su escape contiene agua, dióxido de carbono, óxidos de nitrógeno y materia pulverizada (factores que inciden en la destrucción del Ozono). Pero, aunque hasta la fecha no se ha determinado si los efectos de estos contaminantes son seguramente

perjudiciales, se ha estimado que una flota de 500 aparatos supersónicos, podrían aumentar en pocos años el contenido de agua de la estratósfera en un 50%, lo que a su vez ocasionaría un aumento medio de la temperatura de la tierra de tal vez 0.2°C, - destruyendo también parte del Ozono que la protege de la radiación ultravioleta (y provocando modificaciones importantes en el clima).

Así, podríamos seguir señalando ejemplos y factores que pudieran tener relevancia para la justificación de estudios sobre el tema que nos ocupa en este trabajo (v. gr. el uso indiscriminado de ciertos fertilizantes y su repercusión en la formación y destrucción de la capa de Ozono, el CO₂ de origen antropogénico debido a la creciente cantidad de automóviles y su relación con aquella, etc.). Ya que existe literatura abundante sobre esto.

Pero, a nuestro juicio, es suficiente con tener en mente que, por un lado, es alarmante la posibilidad de que el clima de la tierra, y especialmente su temperatura, pueda apartarse de su margen actual de oscilaciones, en los sentidos de que, un calentamiento en ésta, lleva implícita la posibilidad de derretir los glaciares -y la inundación de las costas, consecuentemente- y enfriamiento, en cambio, nos podría o pudiera llevar a una nueva era glacial; asimismo, cambios en materia de precipitación pluvial, que aunque no fueran catastróficos, su aumento, disminución o redistribución puede ejercer efectos profundos sobre la agricultura y por consiguiente sobre el ser humano. Por otro

lado, hay consenso en que la radiación expuesta en dosis excesivas a organismos, como dijimos, pueden producir además del cáncer en la piel, mutaciones genéticas, efectos indeseables en los embriones durante el embarazo y quemaduras.

Cabe aclarar sobre esto último, que en la literatura consultada al respecto, los especialistas admiten, en principio, que el conocimiento actual no permite una respuesta inequívoca a la cuestión de qué tanto se reduciría la capa de Ozono bajo algún conjunto de circunstancias, ni tampoco de cómo afectaría, de manera exacta, a los organismos, los efectos de esta radiación, ya que estos estudios solo se han efectuado bajo condiciones de laboratorio, siendo difícil la extrapolación cuantitativa a condiciones naturales (asimismo, cabe señalar que la información acerca de los efectos biológicos que producirían, se ha obtenido de aproximadamente 15 años a la fecha, lo cual lo hace un tema relativamente novedoso e interesante y, por supuesto, inconcluso).

Medición de la Cantidad total de Ozono y su Problemática.

En la parte anterior vimos que, fundamentalmente, la concentración de Ozono está determinada por un balance entre procesos químicos que se producen constantemente y se destruyen también de esa manera, incluyendo reacciones fotoquímicas y catalíticas entre Ozono e hidrógeno, y compuestos de nitrógeno y cloro, entre otros.

Esto, junto a otros factores que veremos adelante, hace que lo que se ha llamado "el problema del Ozono" sea extremadamente complejo. El motivo de presentar el Ozono estratosférico como problemática es debido al hecho de que, entre otras cosas, establecer un modelo, al menos en principio (ya sea matemático o de cualquier otra índole) que describa la cantidad y distribución de Ozono en la Estratósfera debería incluir: TODOS los procesos fotoquímicos, TODOS los mecanismos químicos, TODOS los procesos de difusión que directa o indirectamente se involucran en la formación y destrucción del Ozono, lo cual de entrada es una empresa imposible.

Adicionalmente, en la medición de la cantidad total de Ozono están involucrados otros factores como son: la época del año en la que se efectúa ésta, la latitud (del lugar donde se realiza) y la longitud (también en el sentido locacional). Factores que, dicho sea anticipadamente, obligarán a la utilización de técnicas Estadísticas de Series de Tiempo para su estudio, debido a los

factores determinísticos, semideterministas y aleatorios que introducen en los registros de su evolución como: tendencias, patrones cíclicos y estacionales y fluctuaciones aleatorias.

Abundemos en esto. En Bravo (1984) aparecen las figuras 2.1 y 2.2 (de London et. al., 1976) donde se ilustra la variación de la cantidad total de Ozono, como función de la época del año y de la latitud, durante el período de 1957 a 1967. Las cantidades aparecidas en estas gráficas -y en los registros que trabajaremos- están dadas en las llamadas unidades Dobson (UD), las cuales representan el espesor de la capa de Ozono (expresado en milésimas de centímetro) que se obtendría si todo el Ozono estuviera contenido en una columna vertical de área unitaria, y puesto en condiciones estándar de presión y temperatura. Estas unidades pues son las empleadas por la mayoría de los autores cuando se refieren a la cantidad de este gas en la columna vertical mencionada.

Como puede verse en estas figuras, según Bravo, la cantidad de Ozono varía latitudinalmente, con un mínimo en el Ecuador, incrementándose hacia los Polos y alcanzando su máximo en una región cercana al Círculo Polar. Con respecto a la variación temporal, se puede observar que esto también ocurre en las latitudes medias y altas; se ve asimismo que la cantidad máxima de Ozono se presenta en la primavera y la mínima en Otoño, mientras que en las regiones ecuatoriales, la máxima se presenta a finales de primavera o verano y la mínima en invierno. En el Hemisferio Sur se presenta un patrón similar con algunas diferencias, como la de los máximos, para una misma latitud, se desfasan dos meses

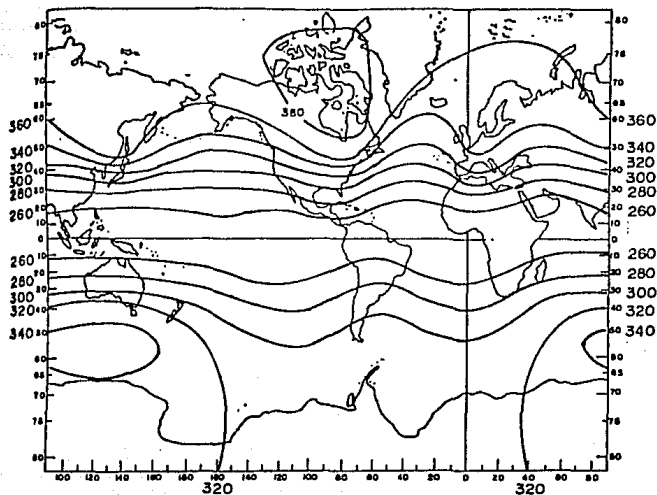


FIGURA 2 - 1

Distribución global promedio del ozono total
(Julio 1957 a Junio 1975). (London y Oltmans,1978/1979)

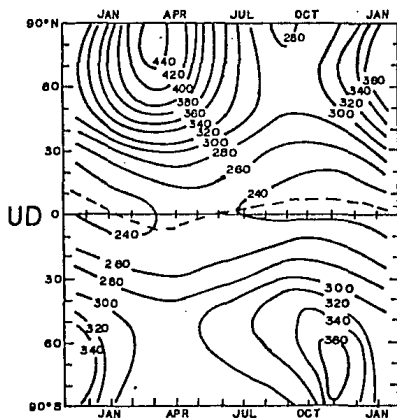


FIGURA 2 - 2

Variación mensual y latitudinal del ozono
total, media de 1957 a 1967. (London, 1976).

aproximadamente con respecto al Hemisferio Norte. El contenido de Ozono total en el Hemisferio Sur, parece ser ligeramente menos que en el norte; sin embargo la variación estacional en este hemisferio es solamente 2/3 de la del Hemisferio Norte, como lo afirma London (1965).

Puede verse además, en la figura 2.2, que el cinturón de máxima concentración de Ozono se presenta más cerca de las latitudes medias en el Hemisferio Sur.

Analizando más detenidamente la figura 2.1, podemos ver también, que existe una variación longitudinal en la distribución de Ozono total; se presentan máximos en la concentración en la parte Este de América, Este de Asia y en Europa Central, según Gebhart et. al., (1970) y Kulkarni et al., (1970), dice Bravo, en el Hemisferio Sur se registra también variación logitudinal, pero debido a la falta de estaciones no es posible documentar adecuadamente algunos de los hechos mencionados. Quizás con la información de Satélites -aclara- sería posible en corto plazo llegar a conclusiones más confiables.

Su variabilidad estacional -agrega Bravo- está relacionada con las fluctuaciones en el clima, dominadas por lo que los especialistas llaman las ondas largas semipermanentes, que se observan en la estratósfera baja; las cantidades altas de Ozono están asociadas con zonas de baja presión, mientras que las cantidades bajas con las zonas de alta presión. Así, afirma que

los valores medios de un mes en particular pueden diferir de un año a otro, debido a las variaciones de la circulación general, según lo demuestran Bugajew, W.A. y Uronova L.A. (1967/1970). Adicionalmente dice que, sobrepuestas a estas variaciones hay otros de período corto, que alteran la cantidad de Ozono de un día a otro, principalmente en las latitudes medias y altas, y que estas variaciones pueden exceder fácilmente el rango estacional en la época de máxima variabilidad, o sea en invierno y primavera. Así también -argumenta- afirma Dlltsch (1969) que estas variaciones son causadas por movimientos de aire, pues es imposible que se deban a procesos fotoquímicos, ya que las escalas de tiempo que estos proceso involucran, como se verá posteriormente, son varias órdenes de magnitud mayores. Dlltsch (1971), menciona también, que se han observado cambios hasta de 100 UD en en lapso de unas cuantas horas.

No obstante -acota- que los valores climatológicos medios están bien establecidos en el Hemisferio Norte, la red actual de estaciones en tierra, está lejos de ser adecuada para determinar la distribución del Ozono total de una manera operativa.

Por otro lado, cabe señalar que las primeras observaciones de la cantidad total de Ozono se hicieron en los inicios de este siglo. Así, las observaciones rutinarias se iniciaron en Arosa y Tramoso, Suiza en los años 30, pero no fue sino hasta el Año Geofísico Internacional en 1957, que hubo suficientes observaciones como para hacer un análisis global de la cantidad total de Ozono.

Adicionalmente, con respecto a lo mencionado en los párrafos anteriores, debe señalarse que tales mediciones -y conclusiones de estas- son obtenidas mediante un instrumento patrón llamado Espectrofotómetro de Dobson, el cual, en condiciones óptimas hace mediciones con una precisión del 2%. Mientras que Kennet (1978/1979) afirma que las mediciones de ozono hechas sobre la superficie de la tierra -como las que utilizamos- están fuertemente influenciadas por el efecto del polvo atmosférico, no siendo del todo efectivo el método de Dobson para eliminar las perturbaciones causadas por éste.

Ahora, por lo anteriormente expuesto, podemos ya darnos cuenta tanto de la importancia del estudio de la evolución de la cantidad total de Ozono como de la incertidumbre involucrada en su medición y análisis.

Así, en este punto surge, de nuevo, lo que sería la motivación fundamental de este trabajo y que es: la detección (y medición) de cambios anormales de nivel en la evolución de la cantidad total de Ozono, entendiendo en este contexto por anormales, cualquier tendencia que sea provocada por efectos naturales o antropogénicos (o en su defecto, tal cambio puede ser debido a errores de calibración de los instrumentos, provocando un sesgo en la medición, como ha ocurrido ya en México, según los investigadores de la UNAM antes mencionados, y ocurre frecuentemente en el mundo. Posibilitándonos a detectar este

fenómeno) que no pueden ser explicados por el comportamiento histórico de los registros de la cantidad total de Ozono y sus variaciones implícitas mencionadas en las páginas anteriores.

Vale mencionar que ya ha habido autores que se han ocupado de analizar datos de Ozono total (en otros países) como Angell y Korshover (1973,1976), London y Kelly (1974) y Komhyr et.al. (1971) y que han puesto un particular interés en la cuantificación de posibles tendencias a largo plazo. Pero, el procedimiento estadístico que más utilizaron en estos estudios fue el análisis de regresión lineal (i.e, el ajuste de una línea recta) aplicado a valores ajustados de Ozono total (ajustados en el sentido de utilizar desviaciones de medias mensuales, desviaciones mensuales de la media total, o promedios móviles de estas desviaciones para estaciones individuales y para promedios de estaciones agrupadas, ya sea de acuerdo a regiones geográficas, hemisferios y el globo).

Sin embargo, según Birrer (1974) si hay periodicidad en las diferencias (como de hecho la hay y se explica en las páginas anteriores), se puede esperar una triple influencia, cuando menos, en la pendiente de la línea de tendencia ajustada por el método de regresión lineal y que son:

- a) Para una longitud de período dada, la pendiente dependería fuertemente de la posición inicial y del punto final. De tal modo que cuando el punto inicial es un mínimo y el punto final es un máximo, se puede esperar una tendencia

positiva, y viceversa.

- b) Longitudes de período diferentes (para el mismo punto inicial) podrían producir valores de tendencia muy distintos; y
- c) Una amplitud variante -en sentido de las desviaciones de los datos- podría acentuar o atenuar los dos efectos anteriores.

Así también Myers (1977) ha demostrado que, cuando se realiza el análisis de tendencia sobre desviaciones mensuales de los promedios totales mensuales sobre N años, uno debería de ajustar la ecuación de regresión.

$$D_{m,k} = \beta (12k - 12\bar{k}) + e_{m,k}$$

donde $D_{m,k}$ es la desviación mensual en el mes m y el año k , β es la pendiente o tasa de cambio de la cantidad total de Ozono por mes, $e_{m,k}$ se asume que es un error aleatorio independiente (o llamado ruido blanco) y $\sum_{k=0}^{N-1} k$ donde $m=1, 2, \dots, 12$ y $k=0, 1, \dots, N-1$

Afirmando más adelante que, en tal caso, resulta atractivo pero incorrecto usar el modelo anterior que, de manera general, se puede escribir

$$D_{m,k} = \beta^* X_t + e_{m,k}$$

donde $t = 12k+m$ es el tiempo en meses, transcurrido desde el inicio de los datos. Mostrando pues que la β^* obtenida a partir de un análisis de regresión lineal, no es una medida adecuada de la tasa de cambio.

Así pues, uno de problemas principales que surgen de la aplicación del Análisis de Regresión lineal, es que después de ajustar una recta a la tendencia -y por tanto después de que se haya removido ésta-, es que la variación restante no es ruido blanco, en el sentido independencia estadística, violando así uno de los supuestos implícitos fundamentales para la aplicación de esta técnica. Provocando por ende, la obtención de malos estimadores de la tendencia, problemas de multicolinealidad, etc. Cabe destacar también de esto que, los residuales están autorrelacionados, en el sentido de que hay una correlación estadística de la variable dependiente con su pasado, debido a entre otras cosas, a los patrones de comportamientos de las mediciones mencionadas anteriormente (como estacionalidad por ejemplo), obligándonos así a tomarlas en cuenta con el fin de representar (o modelar) adecuadamente al fenómeno en estudio.

Así pues también, de lo anterior surge la necesidad de utilizar técnicas estadísticas que salven estos obstáculos. Una de estas es precisamente el Análisis para Series de Tiempo, que como mostraremos en el capítulo nos proporciona, al menos, ventajas como (Hill, Sheldon, 1975):

- a) Identificación y estimación de las dependencias y ciclos como los mencionados anteriormente:
- b) Posibilidad de la determinación de un diagnóstico para checar la aleatoriedad en la variación del error residual, que nos permitiría establecer la bondad del modelo;
- c) La posibilidad también de la actualización adecuada de las predicciones, a medida que haya nuevas observaciones disponibles; y
- d) La obtención de límites de error (intervalos de confianza) para los estimadores de los parámetros y las predicciones, para determinar la incertidumbre inherente en tales estimadores.

Así también, es muy importante mencionar que el análisis para series de tiempo (Tiede, et, al, 1979) se puede usar para filtrar (o cancelar) ciclos y otras dependencias sistemáticas, dejando una serie residual compuesta por ruido blanco más tendencia (si la hay) capacitándonos pues para determinar o detectar si hay o no tales tendencias "anormales" (que es lo que nos interesa).

Es decir, a grandes rasgos, y, a manera de adelanto, se puede decir que esta filtración de tales dependencias, incrementa la razón señal -a- ruido (concepto muy utilizado en la física) de tal manera que sea posible detectar más fácilmente pequeñas tendencias

anormales en la serie residual.

Es necesario también aquí anotar a manera de acotación, que en caso de detectar alguna tendencia "anormal" en los datos estas, de hecho, considerada como una suma de componentes individuales, los cuales no pueden ser especificados por esta técnica estadística (El análisis de las series de tiempo) ni por ninguna de las utilizadas comunmente.

Lo que se puede hacer a este respecto y se hará en este trabajo, es utilizar el análisis de Intervenciones, novedosa técnica creada por Box y Tiao (1975) que es una extensión de los modelos ARIMA producidos por la técnica para Análisis para series de tiempo mencionadas anteriormente (y que es la creada, a su vez, por Box y Jenkins (1970)), y que, se describirá posteriormente en el capítulo cuarto para determinar (y modelar posiblemente) la influencia de un factor externo hipotético que se cree ha influido en el comportamiento histórico del fenómeno. En este caso, tal factor externo será, como dijimos, la erupción del volcán Chichonal en Chiapas en Marzo de 1982, hecho que según los especialistas del Departamento de Radiación Solar del Instituto de Geofísica del la UNAM, pudo ocasionar cambios en el nivel de la cantidad total de Ozono estratosférico que haya afectado la evolución de esta en el D.F., después de esta fecha, lo cual es específicamente el motivo de este trabajo.

En este punto, vale la pena comentar algunos de los trabajos previos a éste que aparecen en la literatura sobre el tema.

Así, en el artículo de Reinsel, G, et.al. (1981), se obtiene un modelo de series de tiempo para analizar datos mensuales de Ozono estratosférico global, con el fin de detectar posibles tendencias en estos, debido a efectos provocados por la emisión de Clorofluorometanos (CFMs). Basado en datos de Ozono de una red global de 36 estaciones Dobson en el período 1958-1978. Tales investigaciones demostraron que había poca evidencia sobre la existencia de tal tendencia en los datos. Más específicamente, en ese trabajo utilizaron un modelo de efectos aleatorios para obtener el estimador de la tendencia para estaciones individuales; se estimó que el cambio global en el Ozono durante 1970-1978 fue de $(0.28 \pm 1.35)\%$. Dicho resultado difiere considerablemente de las predicciones hechas a partir de un modelo químico sobre esto, que estimaba un cambio de (-0.15 ± 1.1) para este mismo período.

Por otro lado, en un artículo de Tiede, Seldon y Hill (1979), se estudian los datos provenientes de una muestra de 9 estaciones Dobson. Los resultados sostienen la hipótesis de que no se ha detectado una tendencia anormal hasta 1976. En él, se hace, asimismo, una somera revisión de otros artículos, enfatizándose en la cuestión de la significancia de las estimaciones sobre tendencias anormales para este tipo de datos. Es decir, ¿Cuándo podemos considerar que hay una tendencia anormal? Para tratar de responder a tal cuestión, resumen el resultado de sus investigaciones en la siguiente tabla:

Período de Monitoreo (años)	Red de 9 Estaciones (% años)	Red de 18 Estaciones. (% años)
6	0.25	0.18
8	0.20	0.15
12	0.15	0.11
20	0.10	0.07

O sea que, según esta tabla, un cambio anormal estimado de 0.25% años persistente durante 6 años equivaldría a un cambio total de $0.25 \times 6 = 1.5\%$ sería significativa.

También, en Reinsel, G (1981), se utiliza un modelo de series de tiempo para tratar de detectar cambios en los datos de Ozono total, ocasionado posiblemente por las pruebas nucleares realizadas en los 60' y tal vez, más recientemente, por la sospecha de que la emisión creciente de CFM pudiera ocasionar tales efectos. Basado en mediciones hechas por una red de estaciones Dobson en el período 1958-1979, concluyó que los resultados del análisis fueron consistentes con el decrecimiento máximo esperado para el hemisferio Norte, de aproximadamente 2 a 4.5% debido a los efectos de dichas pruebas. Tal estudio pues, mostró además que había poca evidencia empírica sobre la existencia de alguna tendencia significativa en el Ozono total global en los 70', ya que el cambio global estimado para el período 1970-1979 fue de $(0.488 \pm 1.354)\%$.

Otro interesante artículo es el de Hill, Sheldon y Tiede (1977), en el cual los datos de Ozono total son analizados estadísticamente para determinar la capacidad de detección de tal tendencia, que posibilitaría el establecimiento de un indicador sobre un posible agotamiento de la capa de Ozono. Basados en una muestra global de 9 estaciones Dobson, afirman que un cambio global anormal de la cantidad total de Ozono de 0.26% anual persistente durante 6 años, podría ser juzgado como estadísticamente significativo. Cabe mencionar, por último, que en este artículo (donde no se obtuvieron evidencias de tal cambio anormal mencionado en los 70), se aplicaron ya las técnicas de Análisis de Intervención para determinar si hubo tal patrón de cambio a partir de 1970.

Es importante mencionar también que, las conclusiones definitivas (rigurosamente hablando), del análisis de la evolución de la cantidad total de Ozono en un sentido global, no se pueden derivar a partir de una sola estación de medición, debido a que para esto, como se deja entrever al principio de este capítulo, necesitaríamos de información de otras estaciones (ya que la estratósfera no tiene fronteras y a ciertos factores locacionales antes mencionados). Siendo este trabajo pues, a final de cuentas, la descripción de la metodología que se debe aplicar en cada estación que los especialistas consideren que deba estar incluida en una muestra de estaciones para llevar a cabo lo anterior. Este hecho, además, en lugar de reducir la importancia de este trabajo la incrementa, ya que no invalida las conclusiones

que de él se derivan sobre lo que queremos determinar en la Cd. de México, y aporta además una metodología científica que se utiliza ya para este fin en otras partes del mundo y que es completamente aplicable a nuestro país, obviamente.

Con respecto a la determinación global de la cantidad total de Ozono en el mundo (la capa de Ozono pues) hay trabajos escritos como el de Hill, W, et. al., (1977), en el que se toma una muestra de 9 estaciones, las cuales deben ser independientes una de las otras, aunque no en el sentido de las mediciones originales -como son las que trabajaremos aquí- sino en el de las series residuales (que de las desviaciones obtenidas después de ajustar un modelo a los datos en cada una de estas) deberán cumplir con este supuesto, Una vez que hayan sido combinadas y elegidas a juicio de los especialistas y, así, obtener una mejor información -y los beneficios que de esto se deriven- de este fenómeno.

Cabe mencionar también que, para que tal análisis global pueda llevarse a cabo, consideraciones como las anteriores, deberán tomarse en cuenta, además, mediante un análisis multivariado, como es de esperarse, siendo esto, también, objeto de un interesante trabajo posterior a éste.

3.1 INTRODUCCION

En el capítulo anterior, mostramos el contexto en el que está inmerso el llamado "problema del Ozono", objeto de estudio de nuestro trabajo. Introducimos algunas referencias importantes - desde nuestro punto de vista- con respecto a éste, que por sí mismas apologizan tal problemática, como lo son: el papel de la capa de Ozono Estratosférico como "escudo protector" contra la radiación ultravioleta provenientes de los rayos solares, y sus consecuentes efectos en la Ecología y la Salud humana.

Asimismo, mencionamos la imposibilidad de obtener un modelo matemático (o de cualquier otra índole) que describa, de manera exacta, la evolución de la cantidad total de Ozono, debido a las características tanto del fenómeno como de su proceso de medición. Determinándose, por sugerencia de los últimos estudios al respecto, que para tal efecto, lo más propio es la aplicación de las técnicas estadísticas para análisis de series de tiempo.

De las técnicas disponibles para dichos propósitos, elegimos las desarrolladas por el ya clásico texto sobre el tema, elaborado por Box y Jenkins (1970), por ser, como veremos, las más adecuadas para nuestro fines.

Así, en este capítulo introducimos los aspectos teóricos y prácticos que necesitaremos de las técnicas antes mencionadas.

Desarrollando éstas lo mejor posible, aunque sin toda la profundidad teórica que merecería, debido al alcance y propósito de este trabajo.

El capítulo pues, se inicia con un intento de ubicar la metodología de análisis para series de tiempo desde la perspectiva de Box y Jenkins, en el "mundo" de los modelos matemáticos, en general, y de los Estadísticos en particular. Exponiéndose, posteriormente, el herramental necesario para la aplicación de tales técnicas, con el fin de obtener un modelo que represente adecuadamente los fenómenos de estudio de su competencia.

Dichos modelos (univariados en este caso) deberán ser elegidos del tipo de los llamados modelos ARMA y sus extensiones: los ARIMA, ARIMA estacionales (simple y multiplicativos). Estos nos permitirán llevar a cabo el fin propuesto, ya que como veremos, serán necesarios para la aplicación de las técnicas del llamado Análisis de Intervención (cuyos modelos se pueden considerar también como una extensión de los modelos ARMA obtenidos aquí) que expondremos en el siguiente capítulo y que nos capacitarán para determinar si hay o no una reducción en la capa de Ozono, ocasionada por factores externos al fenómeno (y que en este trabajo es la erupción del Volcán Chichonal en el Estado de Chiapas en Marzo de 1982).

También se presentan detalladamente los pasos (o etapas) a seguir para elaborar, en la práctica, los modelos anteriormente mencionados. Finalizando este capítulo con un excelente ejemplo

(pedagógicamente hablando) en donde se ilustran los conceptos expuestos a lo largo del mismo, y que se refiere a un problema de otro campo del conocimiento como es el de la Economía (en donde se usan ampliamente estos modelos) referente a las exportaciones de los Estados Unidos a la comunidad Económica Europea.

3.2.- CONTEXTO Y DEFINICION DE LAS SERIES DE TIEMPO

Los modelos que introduciremos en este capítulo, que son los resultantes de aplicar las técnicas de Box y Jenkins al análisis de Series de Tiempo, están inmersos dentro de los modelos matemáticos en general, y de los modelos Estadísticos en particular. Así, como modelos matemáticos, hacen uso de símbolos para representar las variables o factores más importantes, a juicio del investigador, involucradas en un fenómeno, describiendo además, la relación entre éstas. Pero, en ocasiones, como es el caso que nos ocupa en este trabajo, tal relación funcional no puede ser exacta. Esto es, las variables explicativas del modelo no logran describir totalmente el comportamiento de la variable explicada o dependiente (aquella variable que representa "lo que queremos saber de tal fenómeno").

Expliquemonos. Al realizar una investigación, se pueden encontrar circunstancias que la restrinjan como son, entre otras: falta de tiempo, errores de medición en las observaciones de las variables, ignorancia de alguna variable explicativa del fenómeno, etc. Nótese aquí que en nuestro estudio ocurren cuando menos las dos últimas (ver capítulo anterior).

Esto nos lleva a reconocer la "influencia" de una parte "desconocida" e imprevisible para nosotros en el fenómeno (v.gr., no conocemos todas las variables que inciden en la determinación de la cantidad total de Ozono en un momento dado). A este elemento "desconocido" se le ha llamado: el error aleatorio del modelo.

Esto, a su vez, nos lleva a considerar otro tipo de modelos matemáticos más apropiados para esta circunstancia y que son: los modelos estadísticos.

Ahora, podemos considerar dos tipos básicos de modelos estadísticos: los causales y los mecánicos.

En los modelos estadísticos causales, se supone que las variables involucradas en éste, guardan una relación de causa - efecto entre ellas. Es decir, las variables independientes representan las causas del comportamiento del efecto descrito por la variable dependiente. Mientras que en los mecánicos, no es posible discriminar variables independientes de naturaleza causal, como explicativas del comportamiento de la variable dependiente. En otras palabras, la construcción del modelo, en este caso, consiste en ajustar una función matemática de cualquier variable, al comportamiento de la variable dependiente, como el tiempo por ejemplo.

Cabe mencionar también, que se pueden construir modelos mixtos, es decir: una combinación de los anteriores (causales-mecánicos, por llamarlos de alguna manera).

Así, por el conocimiento que tenemos del fenómeno, los que utilizaremos en este trabajo caen dentro del segundo tipo (los mecánicos). Además, como se verá en el modelo que utilizaremos en el capítulo 5, para representar la evolución de la cantidad total de Ozono estratosférico de la ciudad de México, los modelos

estocásticos de Series de Tiempo, son mecánicos, pero se distinguirán de otros pertenecientes a este rubro, debido a que el ajuste por medio de esos, no parten del conocimiento a priori del comportamiento de la variable que querramos explicar. Ya que, como veremos también, el propio método que desarrollaremos es el que descubre mecánicamente cuál es este comportamiento (motivo por el cual este tipos de modelos se acomodan a nuestro requerimientos).

Se puede decir que, de entrada, debemos contar con un registro metódico de la medición u observación numérica efectuada, por convención, a intervalos de tiempo fijos entre cada una de ellas, de las características o variables de interés, al cual llamaremos: serie de tiempo. Adelantándonos, en nuestro contexto por ejemplo, queremos explicar la cantidad total de Ozono existente en un determinado tiempo t (que es la variable dependiente; y el tiempo t , para propósitos de análisis, se considerará como el "actual") en base a mediciones obtenidas de esta misma variable en el pasado (efectuadas, claro, a intervalos de tiempo iguales), las cuales a su vez serán consideradas como observaciones de variables "independientes", y ajustar una función matemática que describa la relación entre los dos tipos de variables.

Ahora, existen varias maneras de llevar a cabo un análisis de series de tiempo, una de las más utilizadas, anteriormente, y considerada por algunos como "clásica", es la conocida con el nombre de "descomposición de series". Este método presupone que la serie de tiempo está formada por una componente llamada de

tendencia-ciclo, que representa el movimiento a largo plazo de la serie, otra componente denominada de estacionalidad, que representaría, a su vez, los efectos producidos por fenómenos que se repiten con cierta constancia (cada año, por ejemplo) y una componente más que llaman de irregularidad, que sirve para caracterizar a aquellos movimientos imprevisibles, considerados como aleatorios.

Desde este enfoque, podría pensarse que las componentes de tendencia-ciclo y estacionalidad constituirán la parte determinista o "semideterminista" de la serie (o del fenómeno en estudio), mientras que la componente irregular vendría siendo su parte no-determinista o estocástica. Se puede intuir pues que, lo que se requerirá mediante el uso de ésta metodología es, identificar y estimar cada una de las componentes antes mencionadas por separado; tratándose, pues, de obtener resultados -inferencias, conclusiones- sobre una población constituida por el conjunto de series de tiempo formadas por la parte determinista o semideterminista, combinada con todas las posibles realizaciones imaginables de la parte estocástica.

A primera vista, la metodología anterior parecería útil a nuestras intenciones (ya que si damos un vistazo a las gráficas de las observaciones que utilizaremos en este trabajo podemos observar tales componentes mencionadas). Pero, en realidad, la práctica nos impone una serie de limitaciones en el sentido de flexibilidad, al momento de tratar de representar fenómenos reales que se nos presentan; problemas a la hora de pronosticar y,

además, es difícil la posibilidad de una generalización de series individuales a modelos en donde se consideran varias series simultáneamente, cuando ligado estrechamente a otro fenómeno. No es extraño, por eso, encontrar en la literatura referente a estas técnicas, el propósito -a veces único- de obtener series desestacionalizadas (a partir, obviamente, de la estimación de la componente estacional). Esto es muy restrictivo a nuestros propósitos, como veremos.

Como ejemplos más conocidos de estas técnicas están: la de promedios la de suavización exponencial, etc. Aquí no las describiremos para no caer en la simplificación injusta (tan nociva para la ciencia). Mejor es remitirse a textos como el de Kendall (1973) o Makridakis (1983).

Una alternativa que ha probado poder salvar los obstáculos antes mencionados, es el moderno tratamiento de las series de tiempo como un proceso estocástico. Esto es:

Sea $\{Z(\gamma), \gamma \in T\}$ una familia de variables aleatorias, con T un conjunto de índices y $Z(\gamma)$ una variable aleatoria correspondiente al elemento de T . A esta familia de variables aleatorias, que está asociada al conjunto de índices antes mencionados de números reales, de forma tal que, a cada elemento del conjunto le corresponde una y sólo una variable aleatoria se le llama proceso estocástico. Como puede esperarse, el proceso estocástico será continuo o discreto si T es un intervalo (abierto

o cerrado) o un conjunto finito o infinito numerable, respectivamente (es importante señalar aquí, que el hecho de que el proceso estocástico sea continuo o discreto, no impone que las variables sean continuas o discretas consecuentemente y necesariamente).

Concebimos pues ahora a una serie de tiempo, como una sucesión de observaciones generadas por un proceso estocástico cuyo conjunto índice se toma en relación al tiempo. De aquí que, lo que nos importará será determinar el mecanismo (o proceso estocástico) que generó estas observaciones, siendo éste -el proceso estocástico- la población sobre la cual podemos hacer inferencia, por ejemplo.

Así, una serie de tiempo se podría denotar mediante $\{Z(\gamma_i), Z(\gamma_2), \dots, Z(\gamma_n)\}$, o más bien, como Z_1, Z_2, \dots, Z_n . Es decir -y se hará de aquí en adelante- se puede representar como discreta. Ya que podremos tomar algún tiempo t_0 como origen, y las observaciones consideradas, como tomadas a intervalos de tiempo iguales entre cada una de ellas, i.e, $t_0+h, t_0+2h, \dots, t_0+nh$ (por conveniencia) permitiéndonos ignorar la fecha en que se hizo cada una de estas (ventaja que se observará más claramente al introducir el concepto de estacionaridad de una serie de tiempo).

Es necesario mencionar aquí que esta última convención es útil, ya que en la práctica, una serie de tiempo se puede generar a partir de dos formas principalmente:

- 1) Por muestreo de una serie continua, es decir, como una muestra de un proceso que evoluciona en forma continua a lo largo del tiempo (V.gr., la serie de tiempo representada por la temperatura de un cierto lugar, del cual queremos explicar la evolución futura de ésta).

- 2) Por acumulación de una serie de tiempo (continua o discreto) sobre un período de tiempo determinado (v.gr., la serie de tiempo representada por las cantidades de trigo cosechadas a través del tiempo, que será la suma de ellas en un año, en caso de que nuestro intervalo considerado entre mediciones sucesivas sea anual).

Es importante mencionar aquí, que en la práctica, algunas veces se nos impone el intervalo de tiempo entre mediciones sucesivas (e.d., ya están dadas las observaciones así), mientras que en otras ocasiones, podemos determinarlo a nuestro arbitrio.

Hasta aquí, hemos situado a las series de tiempo en un contexto general (en el de los modelos matemáticos y estadísticos). Pero esto no es suficiente para poder modelarlas, debido a otros aspectos -en particular- que resultan fundamentales y naturales a éstas.

Dos características ocasionan el anterior párrafo: la primera, es que una serie de tiempo observada es sólo una realización de un proceso estocástico. Esto quiere decir que bien

podimos haber observado otra realización -distinta- de este mismo proceso (no es difícil imaginar que potencialmente hay infinitas posibles de estas), debido al componente aleatorio inmerso. La segunda, importantísima también, es que -y como mencionamos el capítulo anterior- nuestras observaciones no provienen de variables aleatorias independientes (como estamos acostumbrados a considerar), es decir, están correlacionadas entre sí. Lo cual nos impide la descripción de su comportamiento en conjunto a partir de funciones de densidad individuales (o sea, existe una estructura de correlación entre las observaciones; generalmente correlacionadas en el tiempo). Dejando a un lado el tan socorrido supuesto de independencia, implícito en gran parte de los métodos estadísticos utilizados más frecuentemente.

Finalmente, lo anterior nos obliga a considerar, y por ende a utilizar ciertas herramientas y supuestos especiales que nos permitan caracterizar a las variables aleatorias que intervienen en el fenómeno en estudio, y por tanto, determinar el mecanismo aleatorio que la genera -i.e., establecer su función de densidad conjunta- y que veremos en la próxima sección.

3.3 HERRAMIENTAS

Sabemos que, para describir un proceso estocástico, bastaría conocer su función de densidad conjunta. Pero, cuando las variables aleatorias involucradas están correlacionadas entre sí, esto no es fácil ni inmediato. Habría que examinar, en principio, tal estructura de correlación. Es decir, en ese caso es necesario conocer y analizar, al menos de entrada, las $(N-1)/2$ correlaciones (por pares, para Z_1, Z_2, \dots, Z_n de las Z_t 's.

Pero las dificultades inherentes a esta situación no quedan ahí. Esto es: suponiendo que las conocemos, ¿Qué nos permitiría suponer que tal estructura de correlación permanecerá, cuando queramos hacer inferencia en base al pasado sobre lo desconocido, es decir -generalmente- sobre el futuro comportamiento del fenómeno, que es lo que la mayor parte de las veces nos interesa? Eso no lo podemos asegurar solo a partir del enfoque mencionado en el párrafo anterior.

Necesitamos pues establecer algo que nos asegure que la serie de tiempo se va a comportar en el futuro aproximadamente igual que en el pasado. Esto es, que cuando menos en términos de valores promedios o valores esperados, sean aproximadamente iguales. En otras palabras, requerimos que la estructura probabilística de la serie de tiempo en cuestión, sea invariante con respecto a desplazamientos en el tiempo, esto es que:

$$p(Z_{t_1}, Z_{t_2}, \dots, Z_{t_k}) = p(Z_{t_1+h}, \dots, Z_{t_k+h})$$

donde t_1, t_2, \dots, t_k , m y k son enteros cualesquiera en estas funciones de densidad conjunta.

Nótese que lo que establece la ecuación anterior es muy fuerte. Ya que exige que la densidad conjunta de k variables aleatorias sea la misma para cualesquier elección de éstas y de k . Cosa que es muy difícil de sostener en la práctica. Es por eso que tal supuesto se le conoce en la literatura concerniente con el nombre de estacionaridad fuerte.

En contraste, se puede "relajar" este supuesto, pidiendo que la serie de tiempo sea estacionaria hasta momentos de orden f . Estos es, por ejemplo, si $f = 2$, se pedirá explícitamente que

$$E(z_t) = \mu \quad \text{y} \quad E[(z_t - \mu)(z_{t-j} - \mu)] = \gamma_j \quad (3.3.1)$$

o sea, que la media sea independiente de t y, que la covarianza (γ_j) entre z_t y z_{t-j} para toda $j=1, \dots, (N-1)/2$, sólo depende de j (es decir, de la diferencia o separación en el tiempo; técnicamente se acostumbra llamar a esto último como retraso j o $\text{lag } j$). A esto, a su vez se le llama: estacionaridad de orden 2 (o de orden f , para otros valores de f). Supuesto que, para nuestros propósitos, es suficiente para asegurar la propiedad de invarianza mencionada arriba. Adicionalmente, se puede demostrar que, la estacionaridad fuerte implica la de orden 2 (o también llamada "estacionaridad débil") pero no lo inverso (esto último ocurre, según Box y Jenkins (1970, pág. 30), sólo en el caso de que supongamos la función de densidad conjunta $p(z_1, \dots, z_k)$ del

proceso en cuestión, sea la distribución normal multivariada).

A partir de lo anterior, es de esperarse que vamos a trabajar, en adelante, con procesos estacionarios de orden 2 (a los que nos referimos solamente como estacionarios), los cuales, como dijimos, supondremos que mostrarán el mismo comportamiento en términos generales (en el sentido hasta de momentos de orden 2, i.e., varianzas, covarianzas, media), sin importar la fecha en que se observe.

Ahora, como en la práctica sólo contamos con una realización de $\{z_k\}$, necesitaremos utilizar versiones muestrales para estimar (3.3.1), las cuales serán (según Box y Jenkins (1970, pág.31):

$$\bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z_k \quad \text{y} \quad c_j = \frac{1}{N-j} \sum_{k=1}^{N-j} (z_k - \bar{z})(z_{k+j} - \bar{z}) \quad (3.3.2)$$

Los que son, a su vez, estimadores insesgados (Bartlett, 1946) para procesos estacionarios.

Nótese que si en (3.3.1) dividimos la expresión correspondiente de la covarianza γ_j , por la varianza del proceso (denotada por γ_0) queda

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} \quad (3.3.3)$$

que tiene la forma de un coeficiente de correlación (los cuales como sabemos no son influidos por las unidades de medición que se

utilicen, ya que $-1 < \rho_j < 1$). A esta expresión la llamaremos momentáneamente autocorrelación, debido a que se refiere a la correlación del valor de la variable aleatoria en el tiempo t con su propio pasado (y a Y_j de (3.3.1) similarmente se le llamará autocovarianza, por los mismos motivos). Este tiene la propiedad de que $\rho_j = \rho_{-j}$ la cual nos permitirá que, sólo tengamos que fijarnos en los valores positivos de j .

La estimación correspondiente de ρ_j será:

$$r_j = \frac{c_j}{c_0} \quad (3.3.4)$$

la cual, según Bartlett (1946) se cumple que

$$\text{var}(r_j) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\rho^2 + \rho_{k+j} \rho_{k-j} - 4\rho_j \rho_k + 2\rho_k^2 \rho_j^2]$$

De lo anterior, cabe mencionar también que, en la práctica, nos será de crucial utilidad la representación gráfica de (3.3.4), que llamaremos función de autocorrelación muestral (FAC), del proceso en estudio. Tal herramienta nos dará acceso a la identificación del mecanismo que generó a nuestras observaciones. Así, por ejemplo, si tenemos una gráfica de la forma:

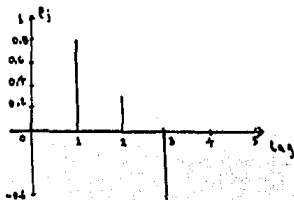


Fig. 3-1

Es decir con $\rho_1 = 0.8$, $\rho_2 = 0.3$, $\rho_3 = -0.6$ y $\rho_j = 0$ para $j > 4$. Podríamos deducir, de entrada, que debido a $\rho_1 = 0.8$, los valores que están obtenidos consecutivamente se encuentran muy correlacionados positivamente, esperándose por ejemplo que, a un valor positivo (de una observación) le siga otro mayor también positivo. Mientras que, por otro lado, por $\rho_3 = -0.6$, se esperaría también que, valores separados por tres unidades de tiempo, estén correlacionados negativamente, en el sentido de que tales valores tenderán a oponerse: Por ejemplo, si $\bar{z}_1 - \mu$ es negativo, $\bar{z}_4 - \mu$ será positivo (en caso de tomarse los valores como desviaciones con respecto a la media).

Ahora, desde un punto de vista práctico, también necesitamos, para obtener estimaciones adecuadas de ρ_j , suponer -ya que sólo tenemos una realización- lo que se ha llamado ciertas propiedades ERGODICAS (Hannan, 1960, pág.32), que permitan suponer la equivalencia entre los valores esperados y los promedios muestrales obtenidos a partir de esa única realización del proceso (las observaciones originales).

Esto es, supondremos que el proceso estacionario es, además, ergódico. Con lo cual se asegura pues, que se puede estimar la media del proceso a partir de \bar{z} , siempre y cuando $M < \infty$ y se cumpla adicionalmente que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \rho_k = 0$ (Birkhoff, 1931). Asimismo, este principio asegura que ρ_j de (3.3.2), se pueda utilizar como estimador de ρ_j siempre que $\forall k < \infty$.

Cabe mencionar aquí, que, en la práctica no es posible verificar lo dicho en el párrafo anterior, por lo cual nos bastará saber que la estacionaridad (esa sí verificable) es un requisito para que el proceso pueda ser Ergódico.

Por otro lado, como tendremos pues que "modelar" series de tiempo estacionarias tomando como criterio de elección -hasta ahora- el comportamiento de su función de autocorrelación muestral (FAC), necesitamos determinar que tipo de modelos podríamos utilizar, de una amplia gama de posibles, para estos fines.

Afortunadamente para estos efectos, hay un resultado que nos orienta. A éste se le llama: la descomposición de Wold (Kendall (1973, pág. 156)).

Este último nos dice que: un proceso estacionario $\{z_t\}$ se puede descomponer en dos componentes:

$$z_t = v_t + w_t \quad (3.3.6)$$

Donde v_t es la parte determinista pura del proceso (y que en la práctica se ha encontrado que se puede considerar formada por senos y cosenos) y w_t la parte estocástica del mismo. Y en donde además se cumple que

$$w_t = b_0 a_t + b_1 a_{t-1} + b_2 a_{t-2} + \dots \quad (3.3.7)$$

en el cual, por la estacionaridad de z_t las b_i 's son

independientes de t . y las α_t , son independientes e idénticamente distribuidas (propiedad que denotaremos como: i.i.d)

Nótese aquí también que en (3.3.6), si las \tilde{z}_t fueran variables aleatorias normales (i.e, un proceso gaussiano) entonces la función de densidad conjunta correspondiente a ésta expresión sería normal y, consecuentemente, las α_t 's de (3.3.7) independientes.

De lo anterior -y de aquí en adelante- será, como veremos, conveniente suponer que las α_t 's sean variables aleatorias normales.

En suma, lo que nos indica la descomposición de WOLD, es trabajar con modelos lineales (en la siguiente sección se ampliará esta cuestión).

Finalmente, como nota al margen para cerrar esta sección, debemos mencionar que hay otras "herramientas" de suma importancia, además de las aquí presentadas, como por ejemplo, la función de autocorrelación parcial (FACP). Que se irán introduciendo a lo largo del trabajo, por considerarlo conveniente para la exposición.

3.4 MODELOS PARA SERIES DE TIEMPO UNIVARIADAS.

En la sección anterior, mostramos que la descomposición de WOLD recomienda el uso de modelos lineales para procesos estacionarios.

En este último contexto -el de los modelos lineales- podemos considerar a las series de tiempo como generadas a partir de una serie de choques aleatorios independientes $\{a_t\}$, los cuales son realizaciones -independientes- de una variable aleatoria con media cero y varianza σ_a^2 (al proceso $\{a_t\}$ se le conoce en la mayor parte de los textos sobre esto como: ruido blanco) y que se convierten en "dependientes" (o correlacionadas entre sí, como son las series de tiempo) al "pasar" por un filtro lineal.

Esto es, Yule (1927) propuso expresar a las observaciones originales obtenidas del fenómeno en el tiempo- , en función de $\{a_t\}$ mediante

$$\begin{aligned} z_t &= \mu + a_t - \psi_1 a_{t-1} - \psi_2 a_{t-2} - \dots \\ &= \mu + \psi(B) \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

con $B^j a_t = a_{t-j}$ (un operador lineal, que usaremos mucho), μ un parámetro que determina el nivel medio del proceso, y $\psi(B)$ es un polinomio de retraso de la forma

$$\psi(B) = 1 - \psi_1 B - \psi_2 B^2 - \dots$$

que convierte al proceso $\{a_t\}$ en el correspondiente $\{z_t\}$, y que, como veremos a lo largo de este trabajo, dichos operadores son una herramienta muy útil para poder representar y explicar más adecuadamente los modelos que presentaremos.

Así, esquemáticamente, de lo anterior se puede considerar una serie de tiempo $\{z_t\}$ como

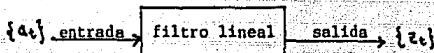


fig. 3.2

Se puede notar aquí como una primera aproximación, que si la sucesión de coeficientes de (3.4.1), ψ_1, ψ_2, \dots , es infinita pero converge (o finita), el filtro es estable (en el sentido intuitivo de alcanzar un "punto de equilibrio"), y se podría decir que el proceso $\{z_t\}$ es estacionario (equivalente estocástico del concepto de equilibrio para modelos deterministas, y "deseable" intuitivamente hablando, por lo pronto); en caso de no ser así, tal filtro sería inestable y, consecuentemente, no-estacionario (Box y Jenkins (1970, pág 48)).

Se puede ver también que el concepto de estacionaridad es, de nuevo aquí, muy importante para el análisis de series de tiempo. Ya que al suponer aquí estacionaridad (débil), estamos suponiendo implícitamente que los momentos de 1o. y 2o. orden, o sea, las medias, varianzas y covarianzas de las variables aleatorias

involucradas en el proceso, resumen en buena medida a su distribución. Entonces, si $E(z_t) = \mu_t$ tenemos que

$$\mu_t = \mu + E(a_t - \psi_1 a_{t-1} - \psi_2 a_{t-2} - \dots) \quad (3.4.2)$$

siendo necesario que, para que la suma entre paréntesis anterior se pueda realizar en término de la suma de las esperanzas de cada término, se tenga que

$$\psi_0 - \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i = k \quad (3.4.3)$$

donde ψ_0 y k finito. Es decir, como mencionamos, es necesario que la suma de las ponderaciones ψ_i 's converja para poder obtener que $E(z_t) = \mu$ y, por lo tanto, tendremos que necesariamente se deba cumplir $E(a_t) = 0$ para toda t , como habíamos convenido.

En otras palabras, lo que la estacionaridad implica, al menos, es que la media del proceso no dependa del tiempo, significando esto que, aunque el proceso se "aleje" de la media durante un cierto período, éste regresará a una vecindad de la misma.

En estas circunstancias, tenemos que la varianza de un proceso estocástico lineal como (3.4.1), está dada por

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= E[(z_t - \mu)^2] \\ &= E[(a_t - \psi_1 a_{t-1} - \psi_2 a_{t-2} - \dots)^2] \\ &= E[a_t^2 + \psi_1^2 a_{t-1}^2 + \psi_2^2 a_{t-2}^2 + \dots] - E[\text{productos cruzados de} \\ &\quad \psi_i a_{t-i} \text{ y } \psi_j a_{t-j}] \\ &= \sigma_a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

que tiene sentido, nuevamente, si $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2$ converge.

Asimismo, la covarianza de éste está dada por

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \text{cov}(z_t, z_{t+k}) \\ &= E[(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)] \\ &= \sigma_a^2 \left(\sum_{i=1}^k \psi_i \psi_{i+k} - \psi_k \right) \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

pudiéndose demostrar, también, que $\gamma_k = \gamma_{-k}$ Y de nuevo (3.4.5) tiene sentido si $\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \psi_{k+i}$ converge.

Nótese pues, que la ausencia de t en las expresiones anteriores, nos lleva a pensar que la serie mostrará el mismo comportamiento en términos generales, sin importar el momento en el que se observe el proceso (debido a la estacionaridad de la misma). Cabe mencionar también que, en la realidad, no todos los procesos son estacionarios, pero podemos hacerlos mediante el uso de ciertas herramientas teórico-prácticas que veremos después.

3.4.1. EL PROCESO DE PROMEDIOS MOVILES.

En el apartado anterior, vimos que un proceso estocástico lineal, se puede representar mediante la suma ponderada de choques aleatorios independientes y la media, representado por la ecuación (3.4.1). Así, podemos pensar a un tal proceso, cuyos valores pueden ser dependientes unos de otros, como una suma finita ponderada de tales choques, sin pérdida de generalidad (como se entenderá después), o sea

$$\tilde{z}_t = (1 - \theta_1 \beta^1 - \theta_2 \beta^2 - \dots - \theta_q \beta^q) a_t = \theta(B) a_t \quad (3.4.1.1)$$

en donde \tilde{z}_t representa las desviaciones de z_t respecto a su nivel medio μ , y $\theta_1, \dots, \theta_q$ serán los parámetros de promedios móviles asociados con los choques aleatorios en los períodos t_1, t_2, \dots, t_q respectivamente. Es decir, estos últimos hacen las veces de ponderaciones (nótese que con respecto a la ecuación (3.4.1.), tenemos que $\Psi_i = -\theta_i$).

Es preciso aclarar aquí, que el concepto de promedios móviles no proviene de la idea de que el modelo se obtiene como un promedio de los choques aleatorios que intervienen, ya que como veremos, los parámetros no son ni necesariamente positivos, ni su suma es la unidad, como lo requeriría un tal promedio (ya que así es pensado comúnmente). Lo que se requiere solamente es que la suma $\sum_{i=1}^q \theta_i$ sea una constante finita (implicando esto que \tilde{z}_t sea finito), para que el proceso sea estacionario.

En la práctica, los procesos de promedios móviles (que se denotarán por MA (q), del inglés moving averages y el número de parámetros de ese tipo involucrados) que más se utilizan son el MA (1) y el MA (2) (llamadas de primer y segundo orden, respectivamente) que a continuación analizaremos (para después generalizar a MA (q)).

MA (1)

Este proceso se puede expresar como

$$\begin{aligned}\tilde{z}_t &= a_t - \theta a_{t-1} \\ &= (1 - \theta B) a_t\end{aligned}\quad (3.4.1.2)$$

del que podemos obtener que

$$E(\tilde{z}_t) = 0 \quad \text{y} \quad \gamma_0 = \text{var}(\tilde{z}_t) = \sigma_a^2 (1 + \theta^2) \quad (3.4.1.3)$$

y donde las autocovarianzas vienen dadas por

$$\begin{aligned}\gamma_k &= E[(a_t - \theta a_{t-1})(a_{t-k} - \theta a_{t-k-1})] \\ &= \begin{cases} -\theta \sigma_a^2 & , \text{ si } k=1 \\ 0 & , \text{ si } k \geq 2 \end{cases}\end{aligned}\quad (3.4.1.4)$$

Así, como la FAC está dada por $f_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$, tenemos que para este proceso

$$f_k = \begin{cases} -\frac{\theta}{1+\theta^2} & , \text{ si } k=1 \\ 0 & , \text{ si } k \geq 2 \end{cases}\quad (3.4.1.5)$$

La expresión anterior nos muestra algunas de las propiedades de este proceso. Esto es, podemos observar que, como las autocorrelaciones para retrasos mayores que un período son cero,

el proceso "no recuerda" más allá de lo ocurrido en el período anterior. Es decir, su "memoria" está limitada a un sólo período.

MA (2)

Haciendo $q=2$ en (3.4.1.1) obtenemos este proceso, el cual se puede escribir como

$$\begin{aligned}\bar{x}_t &= a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} \\ &= (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) a_t\end{aligned}$$

y, sustituyendo en (3.4.5) con $\Psi_i=0$ para $i \geq 2$, obtenemos

$$\gamma_j = \sigma_a^2 \sum_{i=0}^j \Psi_i \Psi_{i+j} = \sigma_a^2 (\Psi_j - \theta_1 \Psi_{j+1} - \theta_2 \Psi_{j+2})$$

queda como resultado que las autocovarianzas de este proceso sean

$$\gamma_0 = \sigma_a^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

$$\gamma_1 = -\sigma_a^2 \theta_1 (1 - \theta_2)$$

$$\gamma_2 = -\sigma_a^2 \theta_2$$

$$\gamma_j = 0$$

para $j \geq 2$

y la FAC correspondiente es

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1 (1 - \theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_j = 0$$

para $j \geq 2$

En este caso, notamos que la memoria del proceso se extiende a dos unidades de tiempo.

Gráficas típicas de la PAC de este proceso son las siguientes:

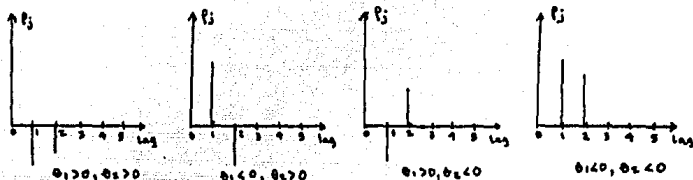


Fig. 3.3

MA (q)

Para este caso general, podemos obtener la FAC correspondiente sustituyendo $\Psi_j = 0$ para $j \neq q$ en (3.4.5), obteniendo que

$$\gamma_j = \sigma_a^2 \sum_{i=0}^q \Psi_i \Psi_{i+j} = \sigma_a^2 (\Psi_j - \theta_1 \Psi_{j+1} - \dots - \theta_q \Psi_{j+q}) \quad (2.4.1.7)$$

cual se reduce a

$$\gamma_0 = \sigma_a^2 (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2)$$

\vdots

$$\gamma_k = \sigma_a^2 (-\theta_k + \theta_1 \theta_k + \dots + \theta_{q-k} \theta_k)$$

\vdots

$$\gamma_q = \sigma_a^2 \theta_q$$

$$\gamma_j = 0$$

para $j > q$

por lo que la FAC queda

$$f_0 = 1$$

\vdots

$$f_k = \frac{-\theta_k + \theta_1 \theta_k + \dots + \theta_{q-k} \theta_k}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2}$$

\vdots

$$\vdots \\ \rho_j = 0$$

Para $j > q$.

Ahora, ya que las θ_i 's deben ser finitas para que el proceso sea finito, esto tendría siempre como consecuencia que TODO PROCESO MA ES ESTACIONARIO.

Por lo anterior, los modelos MA se pueden considerar de la siguiente manera: dado un proceso que se encuentre en equilibrio, las fluctuaciones alrededor del punto de equilibrio μ_t son causadas por choques asociados con eventos inesperados; tales choques no se asimilan de manera instantánea necesariamente, sino que pueden seguir causando efectos aún después, durante q períodos, donde además, la intensidad de choque se refleja en el valor del parámetro (visto como ponderación en este caso)

Por otro lado, nos podemos dar una idea inicial (a manera de ilustración en un caso sencillo) de los valores que los ρ_i 's pueden tener, ya que, por ejemplo, para el modelo MA(1), que se caracteriza por tener la primera autocorrelación (en lag 1) distinta de cero, ésta no puede ser muy grande, debido a que, intuitivamente, implicaría una fuerte dependencia de la observación actual con respecto a lo anterior lo cual no es congruente con lo mencionado en el párrafo precedente. En efecto, se puede demostrar que $|\rho_1| \leq 0.5$.

Es decir, si tenemos un proceso con una FAC en donde se muestra un "pico" en el retraso 1 y cuya magnitud satisface lo

dicho en el anterior párrafo, podemos sospechar de que se trata de un MA(1).

Condiciones similares a estas deberán satisfacerse para modelos MA(q), y que serán más claras cuando veamos el concepto de Invariabilidad más adelante.

3.4.2. PROCESOS AUTORREGRESIVOS

En Estadística es muy utilizado el modelo de Regresión Lineal

$$y_t = \beta_1 x_{t1} + \dots + \beta_k x_{tk} + e_t$$

en donde las e_t 's son de ruido blanco. Así, un caso especial de esta es

$$\tilde{z}_t = \theta_0 + \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t \quad (3.4.2.1)$$

o

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \tilde{z}_t = \theta_0 + a_t$$

con $\theta_0 = (1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p) \mu$.

Más concisamente, podemos escribir (3.4.2.1) como

$$\phi(B) \tilde{z}_t = a_t \quad \text{con} \quad \tilde{z}_t = z_t - \mu$$

Al proceso que se puede representar por medio de la ecuación (3.4.2.1) se le conoce como proceso autorregresivo de orden p (AR(p)). Esta ecuación tiene la característica de que, aunque es un caso especial de un modelo de regresión lineal, depende en este caso, no de los valores de un cierto conjunto de variables independientes, sino de sus propios valores observados en el pasado, los cuales son ponderados por los coeficientes ϕ_1, \dots, ϕ_p .

A continuación mostramos, similarmente a la sección anterior, los procesos autorregresivos más utilizados para ilustrar las características de estos: el AR(1) y el AR(2), generalizado

después para AR(p).
AR(1)

El modelo autorregresivo de orden uno se puede escribir como

$$\begin{aligned}\bar{z}_t &= \phi \bar{z}_{t-1} + a_t \\ \circ \quad \bar{z}_t &= \phi \bar{z}_{t-1} = a_t \\ \circ \quad (1-\phi B) \bar{z}_t &= a_t\end{aligned}$$

(el cual, dicho sea de paso, se conoce en la literatura sobre procesos estocásticos como serie de Markov).

Ahora, nótese que estos modelos tienen la forma de una ecuación en diferencias, Así según Chiang (1977), para procesos deterministas de esta forma, es posible alcanzar su punto de equilibrio, siempre y cuando la raíz de la ecuación

$$1 - \phi B = 0$$

se encuentre fuera del círculo unitario (en el plano complejo), esto es, que $|\phi| < 1$. Pero como en este caso, no estamos trabajando con procesos deterministas sino con estocásticos, en lugar de hablar de punto de equilibrio, tendremos que hablar de su equivalente estocástico, que es el concepto de estacionaridad (pero la condición anterior se mantiene).

Ahora, este proceso se puede representar, manipulando (3.4.2.1), también como

$$\begin{aligned}\bar{z}_t &= (1-\phi B)^{-1} a_t \\ &= a_t + \phi a_{t-1} + \phi^2 a_{t-2} + \dots\end{aligned}\tag{3.4.2.2}$$

de donde se observa que si $|\phi| < 1$ entonces

$$\begin{aligned}E(\bar{z}_t) &= E(a_t) + \phi E(a_{t-1}) + \phi^2 E(a_{t-2}) + \dots \\ &= 0 \quad (\text{por definición de } a_t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \text{var}(\bar{z}_t) = \sigma_a^2 (1 + \phi^2 + \phi^4 + \dots) \\ &= \sigma_a^2 / (1 - \phi^2)\end{aligned}\tag{3.4.2.3}$$

Así también, de (3.4.5) y (3.4.2.3) tenemos que (con $\psi_i = \phi^i$, $i=1,2,\dots$)

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \sigma_a^2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \phi^i \phi^{k+i} + \phi^k \right) \\ &= \sigma_a^2 \phi^k \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{2i} \quad k=1,2,\dots \end{aligned}$$

y ya que se supone que $|\phi| < 1$ entonces

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \sigma_a^2 \phi^k / (1 - \phi^2) \\ &= \phi_{k-1}, \quad k=1,2,\dots \end{aligned}$$

y como $\gamma_k = \gamma_{k-1}$ obtenemos, de manera general que

$$\gamma_k = \sigma_a^2 \phi^{k+1} / (1 - \phi^2) \quad (3.4.2.4)$$

y, por tanto, la FAC queda

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi^{k+1} \quad \text{para } k=1,2,\dots \quad (3.4.2.5)$$

Es decir, la correlación entre las observaciones a través del tiempo, declina en razón al exponente de ϕ , o sea, declina exponencialmente.

Por otro lado, observamos que el proceso AR(1) según (3.4.2.2), se puede escribir como un MA de orden infinito, correspondiéndole por tanto -como vimos- una FAC de extensión infinita.

Lo anterior, nos lleva a considerar que, si tenemos una serie de tiempo generada por un proceso AR(1) y sólo contamos con modelos del tipo MA para representarlos, tendríamos que trabajar con una gran cantidad de parámetros. Esto se puede evitar, obviamente, con la introducción de los modelos autorregresivos, y a través de la postulación del llamado principio de PARSIMONIA, en

la elección de los modelos. Esto es, escoger aquel modelo que tenga el menor número de parámetros involucrados.

Otra consecuencia de (3.4.2.5) es que, mientras mayor sea el lag, la FAC correspondiente tenderá a cero, con decaimiento de tipo exponencial cuando $0 < \phi < 1$ y con signos alternados si $-1 < \phi < 0$ (siendo estas dos condiciones, conjuntamente, las que aseguran, por otro lado, la estabilidad o estacionaridad del proceso).

AR(2)

El modelo autorregresivo de 2o. orden se puede definir como

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + a_t \quad (3.4.2.6)$$

o

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) \tilde{z}_t = a_t$$

introducido por Yule (1927). En este caso, para que el proceso sea estacionario basta que las raíces de la ecuación

$$1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0 \quad (3.4.2.7)$$

se encuentren fuera del círculo unitario. Además, se puede demostrar que esto es equivalente a pedir que

$$|\phi_2| < 1, \quad \phi_1 + \phi_2 < 1 \quad \text{y} \quad \phi_2 - \phi_1 < 1 \quad (3.4.2.8)$$

y, su FAC se puede obtener de

$$E(\tilde{z}_t \tilde{z}_{t+k}) = \phi_1 E(\tilde{z}_t \tilde{z}_{t+k}) + \phi_2 E(\tilde{z}_t \tilde{z}_{t+k-2}) + E(\tilde{z}_t a_{t+k})$$

con $E(\tilde{z}_t) = 0$ de tal manera que

$$\gamma_k = \begin{cases} \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma_a^2 & \text{si } k=0 \quad (\text{la varianza}) \\ \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

y si $\gamma_0 < \infty$, entonces

$$r_1 = \phi_1 + \phi_2 r_1$$

$$r_2 = \phi_1 r_1 + \phi_2$$

que son las llamadas ecuaciones de Yule-Walker (Box y Jenkins (1970, pág 60), las cuales nos permiten obtener los valores de r_1 y r_2 en función de los parámetros autorregresivos ϕ_1 y ϕ_2 obteniendo así, de manera general que

$$r_k = \phi_1 r_{k-1} + \phi_2 r_{k-2}, \quad k \geq 3 \quad (3.4.2.9)$$

por lo que seguirá un comportamiento autorregresivo similar a (3.4.2.1), pero sin término aleatorio. Por tanto, las raíces de la ecuación característica (3.4.2.7), nos servirá para indicar el comportamiento dinámico de la FAC. Esto es, por ejemplo, si $\phi_1^2 + 4\phi_2 > 0$ tales raíces son reales y las autocorrelaciones correspondientes decaerán exponencialmente a cero (con todas las autocorrelaciones positivas si la primera lo es, o de signos alternados si no es así), mientras que si $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$ las raíces serán complejas, y la FAC correspondiente seguirá un comportamiento sinusoidal convergente a cero.

A continuación, presentamos algunas gráficas típicas de las FAC de los procesos AR(1) y AR(2):

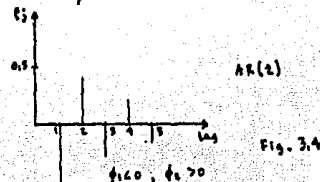
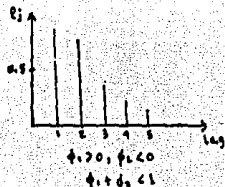
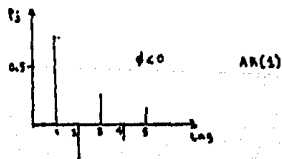
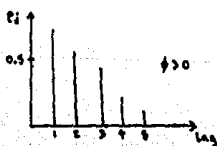


Fig. 3.4

AR(p)

Este proceso se puede escribir

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t \quad (3.4.2.10)$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \tilde{z}_t = a_t$$

que será estacionario, siguiendo el razonamiento hasta ahora presentado, sí y sólo sí, las raíces de la ecuación característica

$$1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p = 0 \quad (3.4.2.11)$$

se encuentran fuera del círculo unitario.

Asimismo, se puede verificar el supuesto de estacionaridad a través de las autocorrelaciones, usando las ecuaciones de Yule-Walker correspondientes al proceso AR(p), esto es

$$r_1 = \phi_1 + \phi_2 r_1 + \dots + \phi_p r_{p-1}$$

$$r_2 = \phi_1 r_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p r_{p-2}$$

$$r_p = \phi_1 r_1 + \phi_2 r_2 + \dots + \phi_p$$

obteniendo los valores de las primeras p autocorrelaciones en función de los parámetros autorregresivos $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ que nos conduce a la ecuación de recurrencia

$$r_k = \phi_1 r_{k-1} + \phi_2 r_{k-2} + \dots + \phi_p r_{k-p}, \quad k \geq p+1$$

Finalmente, es importante señalar que, es posible demostrar que existe solamente una FAC asociada al proceso AR en estudio.

INVERTIBILIDAD

Un concepto que también es muy importante para nuestros propósitos, es el de invertibilidad. Para ilustrar esto, recordemos que cuando tratamos el proceso MA(q) obtuvimos que

$$\gamma_k = \begin{cases} (-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q) \sigma_a^2 & \text{si } k=1, \dots, q \\ 0 & \text{si } k \geq q+1 \end{cases} \quad (3.4.17)$$

Esto implica que, si se deseara obtener un conjunto de ecuaciones que permitieran expresar a los parámetros de promedios móviles en términos de las autocovarianzas (similares a aquellas de Yule-Walker para los procesos AR). tales ecuaciones serían no lineales y, además, no tendrían solución única, a menos que se impusieran unas restricciones pertinentes a los valores de los parámetros que nos permitieran asociar una y sólo una FAC con el proceso MA en estudio. Tales condiciones son planteables y se les conoce con el nombre de: condiciones de invertibilidad.

Para eso, recordemos que al inicio de esta sección vimos que un proceso AR puede ser expresado como un MA infinito. Asimismo, en contraste, un MA(q) se puede escribir como un AR infinito, es decir, como

$$\tilde{z}_t = \Pi_1 \tilde{z}_{t-1} + \Pi_2 \tilde{z}_{t-2} + \dots + a_t \quad (3.4.2.12)$$

Por ejemplo (y sin pérdida de generalidad) en el caso de un MA(1), este se puede escribir como

$$\tilde{z}_t = -\theta \tilde{z}_{t-1} - \theta^2 \tilde{z}_{t-2} - \dots - a_t$$

por lo que si hacemos $\Pi_i = -\theta^i$ en (3.4.2.12), tenemos consecuentemente que $\sum_{k=1}^{\infty} \Pi_k$ debe ser convergente. A dicha convergencia

de esta última suma es a la que se le denominará: condición de invertibilidad. No es difícil (ver de esto que, pedir la satisfacción de tal condición, es equivalente a requerir que las raíces de (3.4.2.1)

$$1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q = 0$$

caigan fuera del círculo unitario.

Nótese también que, todo proceso AR(p) es invertible, puesto que siempre $\sum_{i=1}^p \pi_i = \sum_{i=1}^p \phi_i$.

Así pues, hasta aquí hemos analizado las características más importantes, para los efectos de este trabajo, de los procesos autorregresivos puros y de promedios móviles puros. Pero, como explicaremos en la siguiente sección en la realidad no se cumple necesariamente que los fenómenos sean siempre generados por uno u otro de tales procesos, sino de una mezcla de ambos.

3.4.3.- MODELOS ARMA

En la práctica, como dijimos, es raro encontrarse con procesos MA o AR puros. Esto es porque gran parte de las series de tiempo con que nos topamos, presentan características tanto de uno como de otro a un tiempo. Además, recordemos que el principio de parsimonia, recomienda construir modelos que incluyen al menor número de parámetros posibles, siendo esto logrado si hacemos intervenir parámetros tanto autorregresivos como de promedios móviles. Así un tal proceso que incluya ambos procesos puros, se puede escribir como

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

que en términos de operadores se expresa como

$$\phi(B)\tilde{z}_t = \theta(B)a_t \quad (3.4.3.1)$$

en donde $\phi(B)$ y $\theta(B)$ son polinomios de retraso de orden p y q respectivamente, $\{a_t\}$ es un proceso de ruido blanco y \tilde{z}_t es, como antes, la serie de desviaciones de la variable z_t con respecto a su nivel medio. A este tipo de modelos se les denominará por ARMA (p,q) .

Para ilustrar las características de estos modelos, consideramos en detalle el modelo ARMA(1.1), el cual se ha utilizado para representar fenómenos de diversa índole, y que nos permitirá, además, introducirnos un poco en este tipo de modelos, para después ver el modelo general ARMA(p,q).

ARMA(1.1)

El proceso autorregresivo y de promedios móviles de orden

(1.1) está definido por

$$(1-\phi B)\tilde{z}_t = (1-\theta B)a_t \quad (3.4.3.2)$$

y, ya que en él encontramos a una vez, características tanto autorregresivas como de promedios móviles, no tiene porqué ser necesariamente invertible ni estacionario per se. Pero, para que lo sea es necesario que se satisfagan ciertas condiciones, las cuales podemos derivar con relativa facilidad a partir de lo que hemos visto para los procesos AR(1) y MA(1). Esto es:

Para que el proceso (3.4.3.2) sea invertible, es necesario que la raíz de la ecuación $1-\theta B=0$, esté fuera del círculo unitario (en el plano complejo) y, similarmente, para que sea estacionario, necesitamos que la raíz de $1-\phi B=0$ a su vez, este también fuera del círculo unitario.

Ahora, si el proceso es estacionario e invertible (es decir, si satisface lo dicho en el párrafo anterior), se cumple que

$$\tilde{z}_t = \Psi(B)a_t = a_t - \psi_1 a_{t-1} - \psi_2 a_{t-2} - \dots$$

$$\pi(B)\tilde{z}_t = \tilde{z}_t - \pi_1 \tilde{z}_{t-1} - \pi_2 \tilde{z}_{t-2} - \dots = a_t \quad (3.4.3.3)$$

y donde las sumas $\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i$ y $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j$ son convergentes. Esto se puede comprobar al escribir (3.4.3.2) como

$$\begin{aligned} \tilde{z}_t &= \left(\frac{1-\theta B}{1-\phi B} \right) a_t \\ &= (1-\theta B)(1+\phi B+(\phi B)^2+\dots)a_t \\ &= [1-(\theta-\phi)B-\phi(\theta-\phi)B^2-\phi^2(\theta-\phi)B^3-\dots]a_t \quad (3.4.3.4) \end{aligned}$$

lo cual se cumple sí sólo si $|\phi| < 1$ (la condición de estacionalidad) y en este caso, se puede demostrar que

$$\psi_i = \phi^{i-1} (1 - \phi) \quad , \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.4.3.5)$$

Observándose pues que, al incrementarse i , ψ_i tiende a cero y por tanto $\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i$ converge.

Análogamente, (3.4.3.2) se puede escribir también como

$$\begin{aligned} a_t &= \left(\frac{1 - \phi\theta}{1 - \theta(\theta)} \right) \tilde{z}_t \\ &= (1 - \phi\theta) (1 + \theta\theta + (\theta\theta)^2 + \dots) \tilde{z}_t \\ &= [1 - (\phi - \theta)\theta - \theta(\phi - \theta) - \theta^2(\phi - \theta)\theta^2 - \dots] \end{aligned} \quad (3.4.3.6)$$

donde se tiene que cumplir que $|\theta| < 1$ (la condición de invertibilidad), obteniendo así que

$$\pi_j = \theta^{j-1} (\phi - \theta) \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.4.3.7)$$

y así también la $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_j$ convergirá.

Ahora, las autocovarianzas correspondientes a este modelo se pueden derivar escribiendo (3.4.3.2) como

$$\tilde{z}_t = \phi \tilde{z}_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1}$$

de donde, ya que la media es igual a cero, la varianza será

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \phi E(\tilde{z}_t \tilde{z}_{t-1}) + E(\tilde{z}_t a_t) - \theta E(\tilde{z}_t a_{t-1}) \\ &= \phi \gamma_1 + [1 - \theta(\phi - \theta)] \sigma_a^2 \end{aligned} \quad (3.4.3.8)$$

debido a que

$$E(\tilde{z}_t a_t) = \phi E(\tilde{z}_{t-1} a_t) + E(a_t^2) - \theta E(a_{t-1} a_t) = \sigma_a^2$$

puesto que \tilde{z}_{t-1} depende de los errores aleatorios hasta el tiempo

pero no depende de a_t asimismo tenemos que

$$\begin{aligned} E(\tilde{z}_t a_{t-1}) &= \phi E(\tilde{z}_{t-1} a_{t-1}) + E(a_t a_{t-1}) - \theta E(a_{t-1}^2) \\ &= \phi \sigma_a^2 - \theta \sigma_a^2 \end{aligned}$$

similarmente, podemos obtener que

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \phi E(\tilde{z}_t \tilde{z}_{t-k}) + E(a_t \tilde{z}_{t-k}) - \theta E(a_{t-1} \tilde{z}_{t-k}) \\ &= \begin{cases} \phi \gamma_0 - \theta \sigma_a^2 & \text{para } k=1 \\ \phi \gamma_{k-1} & \text{para } k \geq 2 \end{cases} \quad (3.4.3.9) \end{aligned}$$

notándose que, para más de un retraso, este proceso sigue la misma relación que para un proceso AR(1) (ver 3.4.2.5), debido a que la parte MA es de orden uno, y por tanto sólo la primera autocovarianza refleja esta inclusión.

Se observa también que, según la relación (3.4.3.9), es necesario conocer γ_0 y γ_1 para obtener las demás; según Box y Jenkins (1970) estas (γ_0 , γ_1) se pueden obtener mediante el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \phi \gamma_1 + [1 - \theta(\phi - \theta)] \sigma_a^2 \\ \gamma_1 &= \phi \gamma_0 - \theta \sigma_a^2 \end{aligned}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{(1 - 2\phi\theta - \theta^2) \sigma_a^2}{1 - \phi^2} \\ \gamma_1 &= \frac{(1 - \phi\theta)(\phi - \theta) \sigma_a^2}{1 - \phi^2} \end{aligned}$$

concluyendo de esto que

$$\gamma_k = \frac{\phi^{k-1} (1 - \phi\theta)(\phi - \theta) \sigma_a^2}{1 - \phi^2}, \quad k=1, 2, \dots \quad (3.4.3.10)$$

y por lo tanto la FAC es

$$\rho_k = \frac{\phi^{k-1} (1 - \phi\theta)(\phi - \theta)}{1 - 2\phi\theta - \theta^2}, \quad k=1, 2, \dots \quad (3.4.3.11)$$

donde observamos también que, debido al factor ϕ^{k-1} en esta última expresión, y a que $|\phi| < 1$ si -la FAC- muestra un decaimiento exponencial a cero a partir de ρ_1 . Así también, vemos que es el parámetro ϕ_1 el que nos indica si la convergencia a cero de ρ_k será con o sin cambios alternados de signo mientras que el parámetro intervendrá sólo para fijar el valor de ρ_1 .

ARMA (p,q)

Este tipo de procesos se puede escribir mediante

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (2.4.3.12)$$

$$\text{ó} \quad \phi(B) \tilde{z}_t = \theta(B) a_t$$

y, como es de esperarse, para que este proceso sea estacionario es necesario que las raíces de la ecuación característica $\phi(B)=0$ estén fuera del círculo unitario, mientras que para que sea invertible se necesita, a su vez, que las raíces de la ecuación $\theta(B)=0$ se encuentren, también, fuera del círculo unitario.

Ahora, si las dos condiciones anteriores son cumplidas, entonces el proceso se puede representar como procesos AR y MA, respectivamente, de la siguiente manera:

$$\tilde{z}_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t = \psi(B) a_t$$

$$\text{ó} \quad \frac{\phi(B)}{\theta(B)} \tilde{z}_t = \pi(B) \tilde{z}_t = a_t$$

donde los coeficientes ψ_i y π_i para $i, j=1, 2, \dots$ se pueden obtener igualando los coeficientes de potencias del operador B en las ecuaciones

$$(1 - \psi_1 B - \psi_2 B^2 - \dots)(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

$$(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots)(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

Ahora, si la media del proceso (3.4.3.1) es cero entonces, para $k > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E(\bar{z}_t \bar{z}_{t-k}) \\ &= \phi_1 E(\bar{z}_{t-1} \bar{z}_{t-k}) + \phi_2 E(\bar{z}_{t-2} \bar{z}_{t-k}) + \dots + \phi_p E(\bar{z}_{t-p} \bar{z}_{t-k}) + \\ &\quad + \theta_1 E(a_{t-k} \bar{z}_{t-k}) - \theta_1 E(a_{t-1} \bar{z}_{t-k}) - \dots - \theta_q E(a_{t-q} \bar{z}_{t-q}) \end{aligned}$$

y donde como $E(a_{t-i} \bar{z}_{t-k})$ para $k > 0$ ($i.e.$, \bar{z}_{t-k} está influenciada por $a_{t-k}, a_{t-k-1}, \dots$, pero es independiente de $a_{t-k+1}, a_{t-k+2}, \dots$) entonces ob-tenemos que

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} \quad \text{para } k > p$$

mientras que, para $k \leq p$, γ_k involucrará a los parámetros $\theta_k, \theta_{k+1}, \dots, \theta_q$.

De lo anterior, tenemos que la varianza del proceso ARMA(p,q) está dada por

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma_a^2 - \theta_1 E(a_{t-1} \bar{z}_t) - \dots - \theta_q E(a_{t-q} \bar{z}_t)$$

y, como esta última ecuación involucra a los coeficientes autoregresivos $\gamma_1, \dots, \gamma_p$, tendrá que ser resuelta simultáneamente con las ecuaciones para estas p autocovarianzas.

Por otro lado, es útil anotar en este punto que

$$E(a_t z_t) = \sigma_a^2$$

mientras que

$$E(a_{t-1} \bar{z}_t) = E(a_{t-1}, \bar{z}_{t-1}) = E(a_{t-1-1} \bar{z}_{t-2}) = \dots \quad \text{para } i=0,1,2,\dots$$

$$E(a_{t-i} \bar{z}_t) = \phi_1 E(\bar{z}_{t-1} a_{t-i}) + \phi_2 E(\bar{z}_{t-2} a_{t-i}) + \dots + \phi_i E(\bar{z}_{t-i} a_{t-i}) = \theta_i \sigma_a^2$$

con $i = 1, 2, \dots, \max(p, q)$

donde $\theta_{q+1}, \theta_{q+2}, \dots, \theta_p = 0$ si $k < p$ y $\phi_{p+1} = \phi_{p+2} = \dots = \phi_q = 0$ si $p < q$.

Ahora, las autocorrelaciones para proceso ARMA(p,q) podrán obtenerse para retrasos mayores a q a partir de la ecuación

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad , \quad k > q$$

y, para retrasos menores a q y ρ_k deberá necesariamente que incluir a los parámetros de promedios móviles $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$. Esto implica que, si $q < p$, la FAC se podrá determinar mediante la ecuación en diferencia

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \rho_k = 0 \quad , \quad k > q$$

que está sujeta a las p condiciones iniciales determinadas por $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$.

Ahora, si $p \leq q$ habrá q autocorrelaciones iniciales ρ_1, \dots, ρ_q que no sigan el comportamiento general de la FAC, mientras que las autocorrelaciones $\rho_{q+1}, \rho_{q+2}, \dots$ se comportarán acorde con la ecuación en diferencia

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \rho_k = 0 \quad , \quad k \geq q$$

y las p condiciones iniciales $\rho_{q-p+1}, \rho_{q-p+2}, \dots, \rho_q$.

Finalmente, es importante mencionar que hasta ahora hemos supuesto que las series de tiempo con las que se ha trabajado son estacionarias. Pero, desgraciadamente, no siempre esto sucede, ya que gran parte de los fenómenos a los que nos enfrentamos no lo son. Por ejemplo, en Economía, tenemos que la serie de tiempo que representa a Inflación, en base a los índices de precios al consumidor, es generalmente creciente (cuando menos en este país), por lo que, para poder aplicar los conceptos expuestos hasta

ahora, es necesaria la introducción de nuevos elementos teórico-prácticos que tomen en cuenta estas situaciones. Así, el tratamiento de este problema será expuesto en la siguiente sección, donde se dará lugar a los llamados modelo autorregresivos Integrados y de promedios móviles o, más brevemente, los modelos ARIMA(p,d,q).

3.4.4.- LOS MODELOS ARIMA

En la práctica, no siempre nos encontramos con series de tiempo estacionarias. Ya sea porque exhiben algún tipo de tendencia, porque su varianza no sea homogénea o, porque están influenciadas por factores de carácter estacional (i.e, factores que anteriormente llamamos de tipo semideterminista).

Así, primeramente, para el caso en que la varianza no sea homogénea (o constante), es decir, cuando la varianza σ_t^2 para cada observación en el tiempo t es diferente, siendo pues función de μ_t (el nivel medio del proceso), es posible volverla estacionaria mediante una transformación a los datos del tipo

$$T(z_t) = \begin{cases} z^\lambda & , \text{ si } \lambda \neq 0 \\ \log z_t & , \text{ si } \lambda = 0 \end{cases} \quad (3.4.4.1)$$

y que ha tratado Bartlett (1947) en su ya clásico artículo sobre esto, con el mayor detalle. Siendo conveniente por este motivo, y por el hecho de que en este trabajo no necesitamos hacer esto, que preferimos no profundizar al respecto.

Asimismo, para el caso de no-estacionaridad provocada por factores estacionales (también conocida como no-estacionaridad homogénea) que es muy importante para este trabajo, no se tratará aquí, sino que merecerá un apartado posterior en éste.

Aquí, pues, nos concentraremos en los problemas de no-estacionaridad causados por una tendencia en el comportamiento de la serie de tiempo, posiblemente de carácter polinomial adaptivo

(concepto que más adelante quedará claro), en cuyo caso podría ser eliminado, como veremos, mediante la aplicación del operador diferencia (denotado ∇) a la serie de tiempo de los datos originales, que dará lugar, consecuentemente, a los modelos ARIMA (p,d,q).

Para ilustrar cómo podríamos eliminar tal tendencia mediante dicho artificio -el operador diferencia- empezaremos mostrando el efecto que produce su aplicación para algunos casos generales.

Por ejemplo, en la figura 3.5, vemos que la serie de tiempo correspondiente se comporta, en términos generales, como una gráfica del tipo $Z_t + C$ en un intervalo de tiempo determinado, pero en otro, como $Z_t + C'$. Así, sea en general la primera diferencia definida como

$$W_t = \nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1} = (1-B)Z_t \quad (3.4.4.2)$$

entonces, para este caso, al aplicar esta a los datos originales tendremos que

$$W_t = Z_t + C - Z_{t-1} - C = Z_t - Z_{t-1}$$

$$W_t = Z_t + C' - Z_{t-1} - C' = Z_t - Z_{t-1}$$

que resultará ser algo parecido a la figura 3.4, en donde se muestra, en rasgos generales, el comportamiento que deberá seguir aproximadamente una serie de tiempo estacionaria.

Ahora, en el caso en que la gráfica de los datos tiene la forma de la figura 3.7, en donde observamos varias tendencias, en el sentido de que para un intervalo de tiempo del proceso $Z_t = \beta_t + \alpha_t + b$

mientras que para otro es $Z_t = \sum_{i=0}^t \epsilon_i$ podemos hacer algo similar al

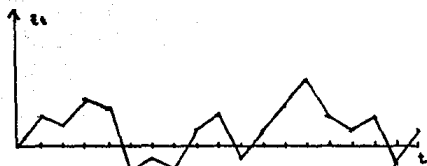


Fig. 3-4 Aspecto de una serie estacionaria.

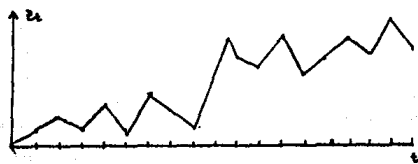


Fig. 3-5. Serie no-estacionaria con distintos niveles para intervalos distintos.

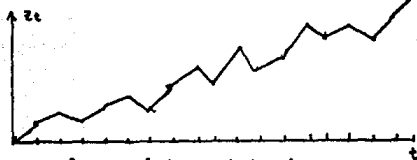


Fig. 3-6 Serie no-estacionaria con una tendencia lineal.

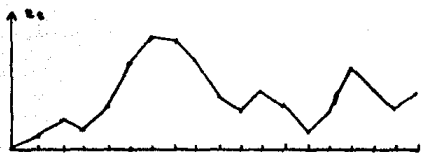


Fig. 3-7. Serie no-estacionaria con varias tendencias.

anterior caso descrito. Pero, para este caso al aplicar en ambos intervalos primeras diferencias a los datos originales obtenemos que

$$\begin{aligned} W_t &= y_t + at + b - y - a(t-1) - b \\ &= y_t - y_{t-1} + a \\ &= \nabla y_t + a \end{aligned} \quad (3.4.4.4)$$

y simultáneamente para el otro intervalo

$$W_t = y_t - y_{t-1} + a'$$

es decir, observamos que lo obtenido es algo semejante a lo que teníamos al principio del caso anterior. Por lo que esto sugiere aplicar de nuevo dicho operador (como hicimos en ese) para hacerla estacionaria (es decir, aplicar una segunda diferencia). Esto es

$$\begin{aligned} \nabla^2 z_t &= \nabla y_t + a - \nabla y_{t-1} - a = \nabla^2 y_t \\ \nabla^2 z_t &= \nabla y_t + a' - \nabla y_{t-1} - a' = \nabla^2 y_t \end{aligned} \quad (3.4.4.5)$$

que es ya estacionaria.

En otras palabras, lo que hicimos en esta última circunstancia se puede escribir como

$$z_t = (1-B)^2 = (1-2B+B^2)z_t \quad (3.4.4.6)$$

Así, en suma, lo que los anteriores casos nos sugieren en que: si tenemos que el proceso muestra una no-estacionaridad debido a una tendencia polinomial no-determinista, entonces es posible construir a partir de esta, una serie estacionaria W_t de la forma

$$W_t = \nabla^d \tilde{z}_t \quad \text{para toda } t \quad (3.4.4.7)$$

donde d es el grado de diferenciación (o número de veces que se aplica dicho operador) necesario para hacerla estacionaria.

Hecho lo anterior, es de esperarse que a (3.4.4.7) se le pueda representar como un modelo ARMA(p,q) utilizando los criterios mencionados en las secciones anteriores. Es decir, un modelo tal que

$$\phi(B)W_t = \theta(B)a_t \quad (3.4.4.8)$$

que es equivalente a

$$\phi(B)\nabla^d \tilde{x}_t = \theta(B)a_t, \quad d \geq 1 \quad (3.4.4.9)$$

que es el modelo Autorregresivo Integrado y de Promedios móviles, o ARIMA (p,d,q).

Dicho modelo se puede escribir, de manera general, como

$$W_t = \phi_1 W_{t-1} - \dots - \phi_p W_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (3.4.4.10)$$

con $W_t = \nabla^d \tilde{x}_t$

donde, como es de esperarse, se requiere que las raíces de las ecuaciones $\phi(B)=0$ y $\theta(B)=0$, se encuentren fuera del círculo unitario, para que sea estacionario e invertible. O, visto de otra manera, el lado izquierdo de la ecuación (3.4.4.10) permite la introducción de lo que Box y Jenkins (1970) han llamado: el operador autorregresivo generalizado, y que se puede expresar como

$$\psi(B) = \phi(B)\nabla^d \quad (3.4.4.11)$$

de donde, considerándolo así, lo que se requiere para lograr que sea estacionario e invertible ahora, es que de las raíces de $\psi(B)=0$ sean unitarias (mientras que las restantes, como antes, caigan fuera del círculo unitario).

Así, ahora (3.4.4.10) se puede escribir también como

$$\tilde{z}_t = \psi_1 \tilde{z}_{t-1} + \psi_2 \tilde{z}_{t-2} + \dots + \psi_{p+d} \tilde{z}_{t-p-d} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

y, si es estacionario, también como

$$\tilde{z}_t = \psi^{-1}(B) \theta(B) a_t = \psi(B) a_t \quad (3.4.4.12)$$

y, ya que se puede demostrar que

$$(1 - \psi_1 B - \psi_2 B^2 - \dots - \psi_{p+d} B^{p+d}) (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

entonces, las ponderaciones ψ_j deberán satisfacer

$$\psi(B) \psi_j = \phi(B) \nabla^d \psi_j = 0 \quad \text{para } j > \max\{p+d-1, q\} \quad (3.4.4.13)$$

y como, además, es invertible, podemos representar, finalmente, a

la (3.4.4.10) como

$$\pi(B) \tilde{z}_t = \psi^{-1}(B) \phi(B) \tilde{z}_t = a_t \quad (3.4.4.14)$$

donde las π_j satisfarán

$$\pi(B) \pi_j = 0 \quad \text{para } j > \max\{p+d, q\}. \quad (3.4.4.15)$$

Otra observación importante referente al uso del operador diferencia, para estacionarizar una serie de tiempo que presenta una tendencia del tipo adaptivo, es que en tal proceso se pierden tantas observaciones como veces se apliquen primeras diferencias a la serie. Es decir, se pierden d observaciones.

Modelos con tendencia determinista.

En el apartado anterior, vimos que mediante el uso del operador diferencia en los datos de la serie de tiempo, era posible la cancelación de los efectos no-estacionarios provocados por la existencia de patrones a largo plazo, los cuales, en últimos términos, podrían ser tomados en cuenta por medio del ajuste de lo que se llaman polinomios adaptivos. En tal caso, se tomaban en cuenta explícitamente, modificaciones que a lo largo

del tiempo ocurrían en el fenómeno en estudio, debido a, posiblemente, la omisión de variables "independientes" que impiden la determinación exacta de tal patrón de comportamiento. De tal suerte que, al realizar lo anterior, el nivel del proceso estacionario con el que estamos trabajando será cero.

Pero, si aún después de lo anterior, el nivel de la serie de tiempo en cuestión, es distinto de cero, tendremos necesariamente que considerar la introducción de un parámetro $\theta_0 = \mu_w (1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$, obteniéndose una expresión más general del proceso ARIMA, de la forma

$$\phi(B) W_t = \theta_0 + \theta(B) a_t \quad (3.4.4.16)$$

Así, pues, θ_0 en contraposición con lo propuesto en el apartado pasado, representará una tendencia polinomial no-adoptiva (es decir, determinista) para la serie original $\{x_t\}$ el cual -como es de esperarse- no dependerá de los choques aleatorios $\{a_t\}$. Es pues, totalmente previsible (lo cual lo hace, de hecho, un supuesto muy fuerte, no fácilmente sostenible).

Ahora, para ilustrar como "funciona" este parámetro θ_0 , consideremos la representación

$$\tilde{x}_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_r t^r + \frac{\theta(B)}{\gamma^d \phi(B)} a_t \quad (3.4.4.17)$$

en donde las raíces de las ecuaciones características $\phi(B)$ y $\theta(B)$ se encuentran fuera del círculo unitario.

En esta expresión se encuentra una tendencia polinomial (además de una componente de no-estacionaridad asociada al

operador ∇^d que hace como vimos, que d de las raíces del operador autorregresivo generalizado $\Psi(B) = \nabla^d \phi(B)$ se encuentre sobre el círculo unitario) que lo hace un proceso no-estacionario.

Así, si se quiere eliminar las fuentes de no-estacionaridad, podemos llevar a cabo algunas de las tres opciones siguientes:

$$a) \nabla^d \tilde{\epsilon}_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t, \text{ si } d > r \quad (3.4.4.18)$$

ya que por medio de ésta, se eliminan ambas fuentes de no-estacionaridad, obteniéndose, consecuentemente, un modelo de la forma

$$\phi(B) W_t = \theta(B) a_t \text{ con } W_t = \nabla^d \tilde{\epsilon}_t \text{ y } d \geq 1 \quad (3.4.4.18')$$

el cual es estacionario e invertible.

$$b) \nabla^r \tilde{\epsilon}_t = r! b_r + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \text{ si } d = r \quad (3.4.4.19)$$

es decir, en este caso se cancela la componente no determinista asociada con ∇^d obteniéndose

$$\phi(B) W_t = \theta_0 + \theta(B) a_t \quad (3.4.4.19')$$

con $W_t = \nabla^r \tilde{\epsilon}_t$ y $\theta_0 = r! b_r (1 - \phi_1 - \dots - \phi_r)$

$$c) \nabla^r \tilde{\epsilon}_t = r! b_r + \frac{\nabla^{r-d} \theta(B)}{\phi(B)}, \text{ si } d < r \quad (3.4.4.20)$$

que produce el modelo

$$\phi(B) W_t = \theta_0 + \nabla^{r-d} \theta(B) a_t \text{ con } W_t = \nabla^r \tilde{\epsilon}_t \quad (3.4.4.20')$$

el cual, como puede ser demostrado, no es invertible. Esto, debido a que $r-d$ raíces del polinomio generalizado de promedios móviles $\nabla^{r-d} \theta(B)$ están sobre el círculo unitario.

Por lo tanto, debido a los problemas que nos causaría tener que trabajar con modelos no invertibles, es recomendable aplicar al operador diferencia, las veces que sean necesarias para cancelar la componente no-determinista de la no-estacionaridad (el ejemplo presentado al final de este capítulo, ilustrará perfectamente lo aquí expuesto.

Cabe mencionar también que, debido a todo lo anterior, es además conveniente considerar la introducción del parámetro cuando la naturaleza del fenómeno en estudio así lo exija (como es el caso que nos ocupa en este trabajo).

Finalmente, es preciso señalar también que hasta ahora, hemos desarrollado elementos teóricos suficientes para caracterizar a una serie de tiempo, pero no hemos dicho cómo hacer esto. En otras palabras, necesitamos de una metodología práctica para hacerlo, que es lo que haremos en la próxima sección.

3.5.- CONSTRUCCION DE MODELOS PARA SERIES DE TIEMPO UNIVARIADAS.

En esta sección, presentamos la estrategia utilizada por Box Jenkins (1970) para la construcción de modelos para series de tiempo. Esta según ellos, consta de cuatro etapas fundamentales:

- 1) Identificación de un posible modelo ARIMA (p,d,q) , es decir, la determinación de los valores p , d y q , de tal modelo;
- 2) Estimación de los parámetros del modelo seleccionado;
- 3) Verificación de que el ajuste proporcionado por el modelo es adecuado, así como de que los supuestos básicos bajo los cuales se construye sean satisfechos; en caso contrario, se modifica el modelo, repitiéndose éstas etapas, hasta que lo hagan; y finalmente
- 4) Uso del modelo (en este caso:pronóstico).

Es decir, puede verse que la estrategia propuesta es un proceso iterativo (ver fig. 3-8).

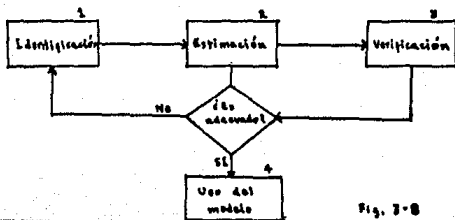


Fig. 3-8

A continuación, presentaremos los aspectos más importantes de cada una de las etapas mencionadas.

3.5.1 Identificación:

Entenderemos por identificación, al proceso en el cual se determinan tanto los ordenes de los polinomios autorregresivos (p) y de promedios móviles (q), como del grado de diferenciación (d) necesario para la eliminación de la no estacionaridad homogénea provocada por tendencias de carácter polinomial adaptivo.

Para la especificación de tales valores (y la especificación de un modelo ARIMA (p,d,q) que represente adecuadamente a las observaciones) necesitamos primero (si es necesario), como dijimos en la sección anterior, determinar en función de la serie original, una serie estacionaria correspondiente. Es decir volver la estacionaria, si no lo es.

Para conseguir lo anterior, necesitamos antes que nada, que la varianza de la serie sea homogénea. Si no lo es, trataríase de buscar y aplicar una transformación potencia a los datos originales, con el propósito de que la estabilice (ver sección 3.4.4). Siendo, además, de suma importancia, que si se llegase a aplicar una tal transformación, ésta pueda ser interpretable en el sentido contextual de este término. Esto es, por ejemplo: no es lo mismo hablar de las observaciones de la cantidad total de Ozono, que del logaritmo natural de estas, al momento de tratar de inferir a partir de las mismas, o de obtener conclusiones prácticas.

Ahora, por otro lado, sabemos también que otra posible causa

de no-estacionaridad es la presencia de un patrón de tendencia a largo plazo en el nivel de la serie. Tal problema, como vimos en la sección pasada, se puede eliminar mediante la aplicación del operador diferencia (cuantas veces sea necesario para hacerla estacionaria) a las observaciones de la serie -en caso de ser del tipo polinomial adaptivo- o mediante la introducción de un parámetro específico -en caso de ser del tipo determinista- o de ambas cosas a la vez.

Para la determinación del grado de diferenciación necesaria para hacerla estacionaria (d), es de mucha utilidad la FAC muestral. Esto es, para que el proceso sea estacionario, es necesario que la FAC muestral decaiga rápidamente hacia cero. Si no es así, por ejemplo, si decae (su gráfica) de una forma aproximadamente lineal, esto indicaría que z_t (alguna observación) está alejada de el nivel del proceso, a medida que transcurre el tiempo (es decir, z_t tiene periodos grandes alejada de \bar{z}), haciendo esto que el numerador de la fórmula correspondiente a la FAC muestral, formado por los productos $(z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z})$ con t variando, tenga casi siempre el mismo signo, dando como resultado, por tanto, valores grandes para γ_k (la FAC muestral).

En la práctica, autores como Kendall y Stuart (1968), sugieren un método llamado: "de diferencia de la variable", el cual proporciona o más bien, sugiere una directriz para la determinación adecuada del valor de d (el grado de diferenciación). Dicho método argumenta, de manera empírica, que al tomar diferencias sucesivas a series no-estacionarias, para volverlas estacionarias, la varianza de éstas tenderán a decrecer

hasta que la serie se convierta en estacionaria, comenzando después a crecer -la varianza- cuando se sobrediferencia.

Dichos resultados dan pie a considerar como criterio, el seleccionar el valor de d que haga a

$$s(d) = \min \{ S(j), j = 0, 1, 2, \dots \} \quad (3.5.1)$$

donde

$$S(j) = \frac{1}{N-j-1} \sum_{t=j+1}^N \left[\nabla^j T(z_t) - \frac{\sum_{t=j+1}^N \nabla^j T(z_t)}{(N-j)} \right]^2$$

para $j = 0, 1, 2, \dots$

es la desviación estándar muestral de las series tanto original, como de las diferenciadas (de grado j). Pudiendo ser éste, generalmente considerado como un criterio útil y complementario de la FAC muestral para estos fines, salvo en casos donde la serie de tiempo esté influida por los llamados factores sistemáticos como lo son: ciclos o estacionalidades; (en cuyo caso el criterio no se invalida del todo, sino que se tienen que introducir otros factores a la expresión 3.5.1.1 como veremos después).

Cabe señalar que algunas veces se da el caso en que $s(j) \approx s(j-1)$ teniéndose que considerar (o trabajar) así con ambas series, a fin de encontrar el más apropiado, a partir de los subsecuentes criterios que introduciremos.

Ahora, teniéndose ya la serie estacionaria, podemos entonces proceder con la determinación de los órdenes de los polinomios antes mencionados, empleando tanto la FAC muestral, como la

función de autocorrelación parcial muestral (FACP), de la manera que a continuación describimos, para obtener el modelo ARIMA (p,d,q) que mejor represente a la serie de tiempo en cuestión.

Para hacer esto, tenemos que asociar, primeramente, la FAC muestral con algún proceso ARMA de los que vimos en las secciones anteriores. Esto no es inmediato ni fácil, debido a que se debe tomar en cuenta aquí que, tal función está expuesta a influencias por variaciones muestrales, siendo pues necesario establecer criterios que nos permitan distinguir "lo verdadero" de lo que no lo es, es decir, tomar en cuenta la variación debida al muestreo.

El criterio que permite hacer lo anterior, lo proporciono Bartlett (1948), al determinar expresiones aproximadas de las varianzas y autocovarianzas de las autocorrelaciones muestrales para un proceso de ruido blanco, y que son

$$\text{var}(r_k) \doteq \frac{1}{N} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\rho_j^2 + \rho_{j+k} \rho_{j-k} - 4\rho_k \rho_j \rho + 2\rho_j^2 \rho_k^2) \quad (3.5.2)$$

$$\text{y } \text{corr}(r_k, r_{k+1}) = \frac{1}{N} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \rho_j \rho_{j+1} \quad (3.5.3)$$

Haciéndose éstas posible probar la hipótesis de que para $k \gg q$, ya que si el proceso fuera MA(q), la varianza estaría dada

$$\text{por } \text{var}(r_k) \doteq \frac{1}{N-d} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^q \rho_j^2 \right) \quad \text{para } k \gg q \quad (3.5.4)$$

En la práctica, se sustituyen las ρ_j en las fórmulas anteriores por sus correspondientes estimadores dados por la expresión (3.3.4) para r_j .

Para que lo anterior sea hecho adecuadamente, Box y Jenkins

(1970), recomiendan que el número de observaciones sea mayor o igual a 50.

En suma, lo que las expresiones anteriores nos sugieren en el contexto de esta etapa de identificación es que, podemos comparar los valores de r_j (obtenidos por la expresión (3.3.4)) con la desviación estándar muestral dada por la expresión (3.5.1.4), para determinar a partir de qué retraso o lag éstos son cero, y, así identificar el valor de q para la parte de promedios móviles del modelo por implementar (es decir, el orden del polinomio de retraso para la parte MA; las variables involucradas). Estableciendo esto que más formalmente podemos decir que: una autoconrelación r_k es significativamente distinta de cero, si

$$|r_k| > 2 \sqrt{\frac{1}{N-k} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^k r_j^2\right)} \quad \text{para } k > q \quad (3.5.5)$$

(Nota: esto proviene del hecho de que podemos aproximar a r_k por medio de una distribución normal para $N \geq 50$, capacitándonos esto para establecer dichos límites).

En otras palabras, la FAC muestral es la que nos proporciona el orden q de la parte MA(q), debido a que, como lo desarrollamos en la sección 3.4 habíamos sólo q autocorrelaciones significativas para dicha parte del modelo.

Por otro lado, para la determinación de la parte autorregresiva del modelo, la FAC muestral no nos sirve (recuérdese que estamos trabajando a estas alturas con un proceso

que es estacionario) de nada. Debido a que ésta tendrá una extensión infinita (ver sección 3.4.2), invalidando esto el criterio propuesto en el párrafo anterior para este caso.

Para identificar el orden p de la parte autorregresiva del modelo ARIMA que queremos especificar, tenemos que echar mano de otra herramienta importante que la función de Autocorrelación parcial (FACP). Esta se define como

$$P_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & 1 \end{vmatrix}} \quad (3.5.6)$$

Esto es, sabemos que por la naturaleza de las series de tiempo, Z_t y Z_{t+k} están correlacionadas pero, ¿hasta qué grado se debe este hecho a que a su vez están correlacionadas con $Z_{t+1}, Z_{t+2}, \dots, Z_{t+k-1}$? Esto se puede responder eliminando, primero, la información (lineal) que sobre el comportamiento de Z_t y Z_{t+k} contienen las variables intermedias. Para este efecto, se calculan las regresiones de Z_t y Z_{t+k} en $Z_{t+1}, Z_{t+2}, \dots, Z_{t+k-1}$ (lo cual equivale a "pronosticar" linealmente sus valores con información sobre $Z_{t+1}, Z_{t+2}, \dots, Z_{t+k-1}$). Así, al grado de asociación lineal entre las variables de interés, una vez que se ha tomado en cuenta lo que de su comportamiento explican las intermedias, se mide a través de

$$\text{cov}(z_t, z_{t+k} | z_{t+1}, z_{t+2}, \dots, z_{t+k-1}) = \text{cov}(z_t - \bar{z}, z_{t+k} - \bar{z}) = \gamma_{kk}$$

la autocovarianza parcial de orden k que, bajo el supuesto de estacionaridad de segundo orden, no depende del valor de t , y, donde \hat{z}_t y \hat{z}_{t+k} denotan los valores ajustados. Por tanto, siguiendo este orden de ideas, llegamos a que la función de autocorrelación parcial de orden k se puede definir como

$$\rho_{kk} = \text{corr}(z_t, z_{t+k} | z_{t+1}, \dots, z_{t+k-1})$$

la cual se calcula a mediante la expresión (3.5.1.6).

En particular, si el mecanismo estocástico que generó el proceso es un AR(p), entonces es posible demostrar que

$$\rho_{j, j+k} = 0 \quad \text{si } j \geq 1 \quad (3.5.7)$$

$$\text{y } \rho_{j,j} = \phi_j \quad (3.5.8)$$

es decir, las autocorrelaciones parciales son cero a partir del índice $p+1$. Y además, algo muy importante, según (3.5.1.8) la autocorrelación parcial de rezago p coincide con el coeficiente de \bar{z}_{t-p} en el modelo $\bar{z}_t - \phi_1 \bar{z}_{t-1} - \dots - \phi_p \bar{z}_{t-p} = a_t$.

Así pues, en la práctica, para identificar el orden del proceso a ser ajustado a las observaciones, se reemplazarían las autocorrelaciones involucradas en (3.5.1.6) por sus estimadores, determinándose esto mediante la observación de a partir de qué rezago las autocorrelaciones parciales subsecuentes a p son casi nulas.

Ahora, cómo en el caso de la identificación del modelo MA,

surge la cuestión de como determinar cuál es autocorrelaciones parciales se pueden considerar significativamente diferentes de cero.

Para este caso, Quenouille (1949) obtiene que, si el proceso es AR(p), las autocorrelaciones parciales muestrales se distribuirán de manera independiente, con media $E(\hat{r}_{kk}) = r_{kk}$ y con $\text{var}(\hat{r}_{kk}) \approx 1/(N-d)$ para $i > p$. De aquí que \hat{r}_{kk} es distinto de cero (al nivel de significancia del 5% si el valor obtenido de \hat{r}_{kk} se encuentra fuera del intervalo definido por

$$\pm 2\sqrt{\text{var}(\hat{r}_{kk})} = 2\sqrt{1/(N-d)} \quad \text{para } i > p. \quad (3.5.9)$$

Por otro lado, cuando el proceso proviene de un ARMA(p,q), es decir cuando es una mezcla de los dos anteriores (expresión (3.4.3.1)), las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial tienen un comportamiento más complicado. Ya que, como vimos, este tipo de procesos puede verse como un AR(∞) o como un MA(∞), ambas funciones de correlación tienen duración infinita. La función de autocorrelación estará dominada por exponenciales atenuadas o por fluctuaciones sinusoidales después de p rezagos. Mientras que la función de autocorrelación parcial seguirá un patrón similar después de q rezagos, dadas estacionaridad e invertibilidad.

Más específicamente, la función de autocovarianza para un proceso mezclado, de hecho, satisface una ecuación en diferencias homogénea a partir de γ_{k+1} , donde q es el orden de la parte MA del modelo. A partir de este valor del índice de la función de

autocovarianzas estará dominada por exponenciales y sinusoidales atenuadas. Este hecho ha sido sugerido por Box y Jenkins (1970) como una herramienta y también, para determinar el orden de la parte MA del modelo: las primeras q autocovarianzas estimadas tendrán un comportamiento irregular, pero a partir de ese valor su evolución estará determinada por las ecuaciones homogéneas en diferencias que sus contrapartes poblacionales deben satisfacer. Por supuesto que, dado su carácter de estimadores, no se apejarán estrictamente a dicho comportamiento. Otra razón que dificulta la determinación de dicho orden está dada por la correlación existente entre las autocovarianzas, en particular, para valores grandes del orden de la parte MA. (Este último problema se puede dar, por ejemplo, cuando el proceso es estacional, como es nuestro caso, según se verá en el próximo capítulo).

Puede probarse también, que algo similar ocurre con las autocovarianzas parciales. En consecuencia, el problema de la determinación de los órdenes de los operadores AR y MA en un modelo ARMA se vuelve muy complicado y requiere gran experiencia. Así pues, esto y el hecho de que el método de Box y Jenkins es de carácter iterativo, implica que estaremos siempre dispuestos a considerar a los modelos identificados, en primera instancia, como tentativos. Es decir, sujetos a ser modificados, en caso de no verificarse su apego a los supuestos y requerimientos de verificación implícitamente contenidos en la dicha metodología.

3.5.2. ESTIMACION

Para llevar a cabo esta etapa, tenemos que suponer que se ha identificado ya un modelo y que, de ser adecuado, sólo faltaría encontrar los mejores valores de los parámetros involucrados en éste, para que sea una buena representación de la serie en cuestión. Tal asignación de valores, desde luego, no puede ser arbitraria. Requiere de la utilización de una metodología estadística apropiada. Dicho método será, el de máxima verosimilitud.

Sabemos que mediante este método, seleccionamos un valor del parámetro por estimar tal que, para una variable discreta, maximice la probabilidad de obtener la muestra particular que de hecho fue obtenida, mientras que para el caso de una variable continua, en su defecto, deberá maximizar la función densidad en el punto muestral. En otras palabras, dada una función de densidad $f\{X|\theta\}$ y un conjunto de valores obtenidos de la muestra $x_1=x_1, \dots, x_n=x_n$, formamos la función de densidad de la muestra. La cual se denota por $L(\theta)$, y que se puede escribir como:

$$L(\theta) = f\{x_1, \dots, x_n | \theta_1, \dots, \theta_m\} = \prod_{i=1}^n f\{x_i | \theta\} \quad (3.5.2.1)$$

y que llamaremos LA FUNCION DE VEROSIMILITUD. Así, como L es una función del vector paramétrico, entonces, en este sentido, un estimador de máxima verosimilitud será aquel valor de θ (denotado por $\hat{\theta}$) que hace máxima a $L(\theta)$. En otras palabras, podemos pensar en la función de verosimilitud, en cierto modo, como en la probabilidad de observar lo que realmente se observó (nótese que $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ es una función de las observaciones, una estadística

pues).

Sabemos también, que los estimadores de máxima verosimilitud poseen propiedades de importancia, como los de ser insesgados eficientes, y, además son asintóticamente eficientes.

Ahora, este método no es tan afortunado siempre, como parecería. Ya que hay situaciones en que es necesario utilizar sofisticadas técnicas de cálculo numérico para resolver el problema en cuestión, y además, no siempre -tampoco- producen resultados satisfactorios.

La función de Verosimilitud en los procesos ARIMA.

Supongamos que tenemos un conjunto de observaciones z_1, \dots, z_T y un modelo identificado que ha generado estas observaciones. Estas, antes de haberse generado, eran variables aleatorias a ser tomadas de una distribución conjunta $f(W | \phi, \theta, \sigma_a^2, \theta_0)$ donde W es tal vector de observaciones de las diferencias estacionarias de las z_t , ϕ es el vector constituido por los parámetros ϕ_i 's, etc. Luego, la función de verosimilitud será de la forma $f(\phi, \theta, \theta_0, \sigma_a^2 | W)$.

Ahora, para aplicar el método de máxima verosimilitud, es necesario suponer algo acerca de la forma de la función de distribución f . Lo más práctico y utilizado, es suponer que tales observaciones provienen de una distribución normal conjunta.

Así, si partimos que $\{a_t\}$ es un proceso de ruido blanco con distribución normal, con media cero y varianza σ_a^2 entonces

necesitamos una expresión para a_t , en función de $W, \hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\theta}_0, \hat{\sigma}_a^2$, es decir

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) W_t = (1 - \theta_1 - \dots - \theta_q B^q) a_t + \theta_0$$

de la cual podemos obtener que

$$a_t = W_t - \phi_1 W_{t-1} - \dots - \phi_p W_{t-p} - \theta_0 + \theta_1 a_{t-1} + \dots + \theta_q a_{t-q} \quad (3.5.2.2)$$

que puede ser pensada, a su vez, como una relación recursiva entre a_t 's sucesivas, dados los parámetros y las observaciones correspondientes (i.e., el valor de cualquier a_t es calculable como una función de los parámetros y las observaciones).

Así, como las perturbaciones son independientes, su distribución conjunta es el producto de sus distribuciones marginales, es decir

$$f(a_1, \dots, a_t | \sigma_a^2) = \prod_{i=1}^T f(a_i, \sigma_a^2) = (2\pi)^{-T/2} (\sigma_a^2)^{-T} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_a^2} \sum_{i=1}^T a_i^2\right) \quad (3.5.2.3)$$

y sustituyendo (3.5.2.2) en (3.5.2.3) obtenemos

$$f(W | \hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\theta}_0, \hat{\sigma}_a^2) = (2\pi)^{-T/2} \exp\left[-\frac{1}{2\hat{\sigma}_a^2} \sum_{t=1}^T (W_t - \dots - \phi_p W_{t-p} + \theta_0 + \dots + \theta_q a_{t-q})^2\right] \quad (3.5.2.4)$$

que es la función de densidad conjunta de W . Por lo que la función de verosimilitud para los parámetros, dados los datos es

$$L(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\theta}_0, \hat{\sigma}_a^2 | W) = (2\pi)^{-T/2} (\hat{\sigma}_a^2)^{-T} \exp\left[-\frac{1}{2\hat{\sigma}_a^2} \hat{a}(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\theta}_0)^2\right] \quad (3.5.2.5)$$

donde $\hat{a}(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\theta}_0)$ es el valor implicado de a_t de (3.5.2.3) como una función de los parámetros desconocidos y de las observaciones W .

Ahora, tomando el logaritmo de la expresión anterior, obtenemos

$$\ln L(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\theta}_0, \hat{\sigma}_a^2, W) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - T \ln \hat{\sigma}_a^2 = \frac{S(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\theta}_0)}{2\hat{\sigma}_a^2} \quad (3.5.2.6)$$

la cual parece más fácil de maximizar (y obtener, por ende, posteriormente el máximo de la función (3.5.2.3) calculando el antilogaritmo).

Nótese además que en (3.5.2.6)

$$s(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\theta}_0) = \sum_{t=1}^T \hat{a}(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\theta}_0) \quad (3.5.2.7)$$

lo cual implicaría que, maximizar la verosimilitud es equivalente a minimizar s (y a la cual llamaremos función de Suma de Cuadrados). Las estimaciones obtenidas de esta manera se llaman comunmente estimaciones de mínimos cuadrados.

Tales estimaciones de máxima verosimilitud (MLE), pueden ser obtenidas derivando (3.5.2.6) con respecto a c/u de los parámetros e igualando a cero. Lo cual produce que

$$\hat{v}_a^2 = \frac{s(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\theta}_0)}{T} = \frac{s(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\theta}_0)}{N-d-p} \quad (3.5.2.8)$$

Cabe mencionar que, en la práctica, se utiliza frecuentemente la expresión

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{s(\hat{\phi}, \hat{\theta}_0, \hat{\theta})}{N-d-p-q-1} \quad (3.5.2.9)$$

por ser un estimador insesgado.

Ahora, si como dijimos, maximizar $L(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\theta}_0, \hat{v}_a^2)$ se reduce a minimizar $s(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\theta}_0)$ es necesario también mencionar que esto no siempre es sencillo. Esto es, por ejemplo:

Supongamos que se tiene un proceso generado por MA(1):

$W_t = a_t - \theta a_{t-1}$. A a_t la podemos expresar aquí como

$$\begin{aligned} a_t &= W_t + \theta a_{t-1} \\ &= W_t + \theta W_{t-1} + \theta^2 \\ &\dots \\ &= W_t + \theta W_{t-1} + \theta^2 W_{t-2} + \dots + \theta^{t-1} W_1 + \theta^t a_0 \end{aligned}$$

donde a_0 es desconocida. Pero como hemos supuesto que a_t se distribuye como $N(0, \sigma_a^2)$, podemos suponer que $a_0 = 0$, para así obtener que

$$s(\theta) = \sum_{i=1}^T (W_t + \theta W_{t-1} + \theta^2 W_{t-2} + \dots + \theta^{t-1} W_1)^2 \quad (3.5.2.10)$$

empero, nótese también que si derivamos $s(\theta)$ e igualamos a cero, la ecuación resultante es no lineal en $\hat{\theta}$ por lo que podemos decir en este caso que no tiene solución analítica. Teniéndose que utilizar algún procedimiento numérico que nos permita encontrar el mínimo de $s(\theta)$; tal procedimiento se antoja que podría ser el de evaluar $s(\theta)$ en diversos puntos de θ dentro de $-1 < \theta < 1$ (y que es como explicamos después, la llamada región admisible).

A raíz de problemas como este y otros más complejos semejantes-. Box y Jenkins sugirieron un método de estimación no-lineal para ϕ, θ y θ_0 basado en el algoritmo de Marquardt (1963). El cual permite, además obtener tanto las estimaciones puntuales de los parámetros, como también intervalos de confianza de estos.

No vamos a desarrollar aquí tal método, por considerar esto bastante extenso como para desarrollarlo en detalle (y también porque los paquetes de computación especializados en Estadística que contienen rutinas para análisis de Series de Tiempo, como son el Box-Jenkins y el SPSS (por ejemplo), lo traen implementado). Diremos, a grandes rasgos, solamente, que éste (el método basado

en el algoritmo de Marquardt) tiene como fundamento un desarrollo en Serie de Taylor, que localiza a $\hat{\alpha}_t$ (que obtuvimos por (3.5.2.2.)) condicionada a que se conocen los valores muestrales W y los valores iniciales de $\hat{\beta}, \hat{\theta}_0$. Así, dichos valores iniciales serán corregidos iterativamente, con el propósito de minimizar terminando tal proceso al lograr la "convergencia", que en este caso sería cuando el cambio relativo en cada parámetro no es mayor que un cierto valor (muy pequeño, obviamente).

De lo anterior, notamos fácilmente que, dicho proceso de estimación descrito, puede ser sensible a valores iniciales de los parámetros, de tal manera que puede suceder que no se logre la convergencia si estos no son cercanos a los valores definitivos (o también, por este motivo, podemos obtener valores estimados de los parámetros, que caigan fuera de la región admisible).

En la práctica, o cuando menos nosotros, no hemos tenido la necesidad de asignar o determinar tales valores iniciales, ya que en la mayoría de los paquetes estadísticos que traen una rutina del método de Box y Jenkins, se asignan automáticamente. Por este motivo no profundizaremos en esta cuestión tampoco. Refiriéndose mejor al texto de Box y Jenkins (1970).

Ahora, como dijimos también al principio de esta sección, el método de máxima-verosimilitud propuesto, proporciona una estimación de la matriz de varianza-covarianza para los parámetros estimados, permitiéndonos así tener alguna idea de la precisión de tales estimaciones, a partir de la construcción de regiones de confianza de los mismos (recordemos que una región con $(1-\alpha)$ de confianza (v.g., 0.95, 0.1, etc) tiene la propiedad de que si muestras repetidas de tamaño n se toma la misma población, y se constuye una región de confianza de cada muestra, entonces una proporción de $(1-\alpha)$ de esas regiones incluirán los verdaderos parámetros).

Finalmente, habiendo obtenido los estimadores de los parámetros involucrados en el o los modelos tentativos, procedemos a verificar si estos se ajustan o no a los requerimientos necesarios para considerarlos como adecuados. Esto es lo que se verá en la siguiente parte.

3.5.3. VERIFICACION:

Puesto que todo modelo es, a final de cuentas, una simplificación de la realidad (un modo de mimetizarla), éstos obviamente presentarán fallas. En este sentido pues, habría que elegir aquel que presente menos fallas.

Estas -las fallas- pueden medirse como violaciones a los supuestos que fundamentan al modelo en cuestión (e.d., los modelos ARMA)

Una de las formas más sencillas y eficientes de detectar tales violaciones, es a través del análisis de residuales. Es decir, si tenemos un modelo ARIMA: $\hat{\phi}(\theta)W_t = \hat{\theta}(\theta)A_t$, los residuales estarán definidos como

$$\hat{a}_t = [\hat{\theta}(\theta)]^{-1} \hat{\phi}(\theta)W_t = \pi(\theta)W_t \quad (3.5.3.1)$$

representando éstos pues, a aquella parte de las observaciones que no pueden ser explicadas a partir del modelo en cuestión.

Ahora más específicamente, de (3.5.3.1) tenemos que

$$W_t = \hat{a}_t + \hat{\pi}_1 W_{t-1} + \hat{\pi}_2 W_{t-2} + \dots$$

y de aquí

$$\begin{aligned} a_t &= W_t - \hat{\pi}_1 W_{t-1} - \hat{\pi}_2 W_{t-2} - \dots \\ &= W_t - \hat{W}_t \end{aligned}$$

ya que se puede estimar con base en el polinomio estimado $\hat{\pi}(\theta)$ y las observaciones hasta el tiempo $t-1$. Es decir, (3.5.3.2) significa que los residuales miden la discrepancia entre los valores observados y los valores estimados por el modelo.

Cabe mencionar también que, como estamos trabajando con modelos aleatorios, tales residuales no podrán ser cero, sino variables aleatorias que se distribuyen como un proceso de ruido blanco que varía dentro de ciertos límites. Es por esto, además, que al analizar los residuales $\{a_t\}$ nuestra intención es checar si estos son o no como si hubieran sido generados por un proceso de ruido blanco, es decir como idealmente se desea que satisfagan, según esta metodología (esto es muy importante).

Los supuestos que se han hecho, implícitamente, hasta ahora sobre el proceso $\{a_t\}$ y que deben cumplir los modelos ARIMA propuestos son:

- a) $\{a_t\}$ tiene media cero
- b) $\{a_t\}$ tiene varianza constante
- c) las variables aleatorias correspondientes a $\{a_t\}$ son mutuamente independientes
- d) a_t tiene una distribución normal, para toda t
- e) no existen observaciones aberrantes.

Cabe mencionar que el proceso de verificación de cada uno de estos supuestos, como aquí veremos, nos posibilitaría -en caso de violación de éstos- a la identificación de la falla y, consecuentemente, a la determinación de las correcciones necesarias para eliminarlas.

Por lo anterior, resulta útil mostrar cómo se pueden verificar y corregir las fallas a tales supuestos. Esto es:

Para verificar el supuesto a), que dice que $\{a_t\}$ debería tener media cero, podemos calcular

$$m(\hat{a}) = \sum_{t=1}^N \hat{a}_t / (N-d-p) \quad \text{y} \quad \sigma_a = \sqrt{\sum_{t=1}^N [a_t - m(\hat{a})]^2 / (N-d-p)} \quad (3.3.3)$$

con $d+p-1$, donde $m(\hat{a})$ y σ_a son la media aritmética y la desviación estandar de los residuales, con el fin de construir el cociente

$$\frac{\sqrt{N-d-p}}{\sigma_a} m(\hat{a}) \quad (3.3.4)$$

el cual se considera que (empíricamente) si es mayor que 2 en valor absoluto, dicho supuesto se rechaza. Implicando esto la

existencia de una parte determinista o semideterminista en $\{a_t\}$ que no ha sido tomada en cuenta por el modelo, requiriéndose la introducción de un parámetro $\{\theta_0\}$ en éste, que represente a esta componente omitida, para ser estimada conjuntamente con los demás parámetros involucrados (aunque cabe mencionar también que, antes de introducir explícitamente a θ_0 , podría considerarse la introducción de un término autorregresivo adicional, o bien la necesidad de una diferenciación adicional a la serie, para ver si tal tendencia es o no adaptiva, ya que, como sabemos, θ_0 representaría una tendencia de tipo determinista).

La verificación de que las $\{a_t\}$ tienen varianzas constantes (supuesto b)) puede realizarse mediante la observación visual de una gráfica de los residuales contra el tiempo, ya que por medio de ésta es posible detectar si hay o no patrones (en el tiempo) de variación en este proceso, y de ahí, poder sugerir una transformación potencia, a los datos, de tal manera que la varianzas se estabilice.

La verificación del supuesto c), a saber, de que las variables aleatorias correspondientes a $\{a_t\}$ son mutuamente independientes, se puede llevar a cabo calculando:

$$(i) \sqrt{\text{var} [r_n(\hat{\alpha})]} \doteq \frac{1}{N-d-p} \quad (3.5.3.4')$$

la cual representa la desviación estándar de la función de autocorrelación muestral de los residuales, y que se escribe, más específicamente, como

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} \hat{a}_t \hat{a}_{t+k}}{\sum_{t=1}^N \hat{a}_t^2}, \quad k=1,2,\dots; \quad t'=d+p+1 \quad (3.5.5)$$

y que nos permite, además, al determinar para cada $r_k(\hat{a})$, si

$$|r_k(\hat{a})| \geq 2/\sqrt{N-d-p} \quad (3.5.3.6)$$

determinar cuál de las autocorrelaciones de los residuales puede ser considerada como significativamente diferente de cero, indicándose así que hay cierta correlación entre tales variables aleatorias (y por tanto no independencia).

Pero esta prueba según Box y Jenkins, no es del todo válida para retrasos pequeños ($k \leq 3$), por lo cual se sugiere, una que determine la significación (o no) conjunta o simultánea de las primeras autocorrelaciones, mediante

(ii) El estadístico Q de Box y Pierce (1970) (también llamado prueba "Portmanteau") que se calcula como

$$Q = (N-d-p) \sum_{k=1}^K r_k^2(a) \quad (3.5.3.7)$$

(Ljung y Box (1978)) proponen una expresión alternativa:

$$Q = (N-d-p)(N-d-p+2) \sum_{k=1}^K r_k^2(\hat{a}) / (N-d-p-k) \quad (3.5.3.8)$$

la cual tiene asociada una distribución (para valores de $K \geq 10$) ji-cuadrada con $k-p-q$ grados de libertad. Lo cual quiere decir que, si se compara este valor con los valores de tablas ji-cuadrada, y resulta mayor que estos, el proceso no es de ruido blanco, pudiendo suponerse pues que corresponde a un cierto proceso ARMA.

Así, como es de esperarse, la corrección conveniente para eliminar este problema, es tratar de identificar algún modelo ARMA para estos residuales autocorrelacionados, mediante la gráfica de algunas de las $r_k(\hat{a})$.

De esto resulta que, si el proceso identificado erróneamente fue

$$\phi'(B) W_t = \theta'(B) a'_t$$

con $\{a'_t\}$ no de ruido blanco, y el modelo verdadero es

$$\phi(B) W_t = \theta(B) a_t \text{ con } E(W_t) = 0 \text{ y } \{a_t\} \text{ ruido blanco}$$

entonces $\{a'_t\}$ seguirá el comportamiento

$$\theta'(B) \phi(B) a'_t = \phi'(B) \theta(B) a_t$$

Si el proceso verdadero es $W_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 \dots)$ pero el modelo propuesto fue $W_t = (1 - \theta B) a'_t$, entonces $\{a'_t\}$ seguirá el proceso $(1 - \theta B) a'_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 \dots) a_t$, sea, un ARMA (1,2). Debiéndose estimar ahora un modelo del tipo $(1 - \hat{\theta} B) W_t = (1 - \hat{\theta}_1 B - \hat{\theta}_2 B^2) (1 - \hat{\theta} B) a'_t$, en donde se esperaría que $\hat{\phi} \hat{=} \hat{\theta}$, $\hat{\theta}_1 \hat{=} \theta_1$, y $\hat{c} \hat{=} a_t$.

Ahora, por otro lado, ya que para una distribución normal, el 95% de las observaciones se encontrarán, aproximadamente, dentro de un intervalo de dos desviaciones estándar. Entonces, para verificar el supuesto d) acerca de que las a_t tienen una distribución normal, para toda t , se puede llevar a cabo verificando si hay más de $(N-d-p)/20$ observaciones fuera del intervalo $(-2\hat{\sigma}_a, 2\hat{\sigma}_a)$ mediante el uso de una gráfica de los residuales contra el tiempo. Así, si, esto sucede, se pueden utilizar lo que se han llamado transformaciones normalizantes (ver, Box, G y Fox, D. 1964). Claro, se recomienda esto solo en caso de que se aprecie una violación muy notoria a este supuesto.

Así también, mediante el uso de las gráficas mencionadas en el párrafo anterior nos es posible detectar observaciones posiblemente "ajenas" a la serie de estudio (llamadas aberrantes), consideradas como las que están fuera del intervalo $(-3\hat{\sigma}_a, 3\hat{\sigma}_a)$. Las cuales tienen una probabilidad del 2% de aparecer, indicando su existencia que hay algo extraño (supuesto e)). Sugiriendo esto, que ocurrió algo altamente improbable, o bien (como lo trata de hacer este trabajo) que sucede una intervención de carácter exógeno a nuestro fenómeno que la provocó, en cuyo caso trataríase de tomar en cuenta mediante su inclusión por medio del análisis de intervención (que veremos en el próximo capítulo).

Existen otros métodos de verificación que no están basados en el análisis de los residuales, y que también son muy útiles.

Así, frecuentemente los paquetes estadísticos para análisis de series de tiempo (como es el caso de la subrutina Box-Jenkins del SPSS, y que usaremos en este trabajo), proporcionan los intervalos de confianza de aproximadamente 95% del tipo

$$(\hat{\theta} - 2\sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})}, \hat{\theta} + 2\sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})}) \quad (3.3.3, 4)$$

para cada uno de los parámetros involucrados en el modelo. Observándose en estos que, si el cero es un valor razonable para algún parámetro, éste debería ser eliminado (invocando el supuesto de parsimonia) ya que indicaría la violación del supuesto que nos indica que en un modelo adecuado -en este sentido- no puede reducirse el número de parámetros involucrados. Es decir, debe

haber el número "apropiado" de estos. Así, después de cancelar éste (o los que estén en este caso), se vuelve a estimar el modelo (cabe mencionar que en algunos casos, el conocimiento del fenómeno en cuestión, indica que tales parámetros deban ser incluidos aunque sean cero).

Otra cosa que debe verificarse, es la admisibilidad del modelo. Este concepto y su verificación, está relacionado a las condiciones de estacionaridad y/o invertibilidad correspondientes a los polinomios de retraso que intervengan en el modelo propuesto. Pero estas, como sabemos, dependen de la forma del modelo en cuestión, por lo que la lista de tales condiciones sería muy grande (una para cada tipo de modelo que se nos ocurra). Así, a manera de ilustración se presenta la siguiente tabla extraída del texto de Pankratz (1983, pág.299) en donde se dan algunas de tales condiciones para unos pocos modelos (refiriendo, en caso necesario, para otros modelos más complejos a textos como el multicitado Box y Jenkins (1970)):

Tipo de Modelo	Condiciones de Estacionaridad	Condiciones de Invertibilidad
AR puro	Depende de p (ver abajo)	Siempre Invertible
MA puro	Siempre Estacionario	Depende de q
AR(1)	$ \phi_1 < 1$	Siempre Invertible
AR(2)	$ \phi_1 < 1$ $\phi_2 + \phi_1 < 1$ $\phi_2 - \phi_1 < 1$	Siempre Invertible
MA(1)	Siempre Estacionario	$ 0_1 < 1$
MA(2)	Siempre Estacionario	$ 0_2 < 1$ $0_2 + 0_1 < 1$ $0_2 - 0_1 < 1$
ARMA(p,q)	Depende de p (ver arriba)	Depende de q

Tabla 3-1

Otra cuestión importante que debe verificarse, es la referente a la estabilidad del modelo en los parámetros. Dicha inestabilidad, en caso de detectarse, tendría como origen la redundancia de los parámetros, en el sentido de que un cambio en un parámetro pueda ser compensado mediante un cambio en otro, sin que la suma de cuadrados (S) se altere. Esto es posible de detectar si hay correlaciones altas (positivas) entre los parámetros estimados. Por lo que, en ese caso, lo más adecuado sería proceder a cancelar alguno de los parámetros cuya correlación con otro es alta; otra solución a este problema, podría ser la eliminación de factores aproximadamente comunes en los polinomios de retraso de ambos tipos (AR y MA). Aquí también, cabe aclarar que, como en el caso anterior, si es necesaria la inclusión de los dos tales parámetros con dicha característica en el fenómeno, y no hay factores aproximadamente comunes, no queda más que incluirlos.

Otro método de verificación también útil, y del cual se hecha mano frecuentemente aún antes de llevar a cabo el análisis de residuales mencionado anteriormente, es el de sobreajustamiento. Este consiste en introducir parámetros adicionales al modelo propuesto (identificado) y ajustarlo de nuevo a los datos. Para determinar así, si hay aspectos que hemos omitido, o rechazar tal modelo sobreajustado por el supuesto de parsimonia.

Cabe destacar que, en caso de no rechazarse tal sobreparametrización (después de verificar si tal modelo cumple las condiciones descritas en esta sección), no nos puede indicar si son necesarios más parámetros o no. Es decir, no podrá sugerirnos

en qué "dirección" se debe modificar el modelo considerado, sino sólo que hacen falta. De ahí pues, la necesidad del análisis de residuales para esto y, la consideración de este método como complementario a ese solamente.

A continuación, debido a la importancia que representa para este trabajo la cuestión de pronosticar (el uso del modelo, en este caso) a partir de modelos ARIMA, consideramos conveniente tratarlo más ampliamente en una sección aparte (teniendo en cuenta que está se debe a razones expositivas; y sin perder la noción de que se trata de la etapa restante a las tres aquí mostradas y que son, como dijimos, de carácter iterativo).

3.6 USO DEL MODELO (PRONOSTICOS)

Para desarrollar esta sección (y esta etapa), es necesario considerar que la etapa de verificación ha sido satisfecha, procediéndose a considerar la cuestión del uso del modelo, es decir, para los fines para los cuales fue construido (que es generalmente el de pronosticar).

Hasta ahora lo que hemos hecho, es ajustar los datos a un modelo ARIMA. Es decir, hemos tratado de entender lo mejor posible la información proporcionada por la realización del proceso (la muestra), permitiéndonos suponer, en éste punto, que tal modelo proporciona el mejor ajuste posible, en el sentido de que posteriormente los errores de estimación en los parámetros, no afectaran de manera significativa los pronósticos (que es, como dijimos, el uso más frecuente de los modelos para series de tiempo; otros pueden ser el control de sistemas en el tiempo, la simulación de fenómenos, etc.) que se realizarán.

Cabe mencionar aquí también que el proceso mismo de construcción del modelo descrito hasta ahora, está ligado íntimamente con el concepto de pronóstico que veremos, ya que para calcular los residuales, se necesitan primero los valores estimados por el modelo, los cuales son ni más ni menos los valores pronosticados de la variable dependiente en el tiempo t , basándose en las observaciones hasta el tiempo $t-1$, o sea, son los que llamaremos: los pronósticos de un paso hacia adelante.

Más específicamente, el objetivo en esta sección (los pronósticos), es, inferir de un modelo, la distribución condicional de observaciones futuras, dado que tenemos las observaciones anterior. A este proceso, lo llamaremos: Pronosticación.

Denotemos por $\hat{W}_t(h)$ a la esperanza W_{t+h} (i.e es el valor futuro que queremos pronosticar con el menor error posible) dadas las observaciones en el pasado $(\dots, W_{t-2}, W_{t-1}, W_t)$. Esto es

$$E[W_{t+h} | (\dots, z_{t-1}, z_t)] = E(W_{t+h}) = \hat{W}_t(h) \quad (3.6.1)$$

la cual, además, tendrá la propiedad de ser la predicción con error cuadrático medio mínimo. En otras palabras, si el modelo es correcto, no hay otra predicción que produzca errores cuyos cuadrados tengan valor esperado menor, ya que, como sabemos, seleccionar la alternativa que tenga el menor error de entre varias, es equivalente a escoger como decisión el valor de aquello que se trata de estimar, en este caso W_{t+h} (es decir, pronosticar el valor de la variable dependiente h periodos en el futuro).

Ahora ya que intentamos estimar W_{t+h} a partir de modelos ARIMA (p, d, q) es necesario mostrar aquí, las distintas formas en que se pueden representar a una observación generada a partir de tales procesos, con el propósito, también, de señalar como se puede representar, a su vez, una expresión para ser utilizada con fines de predicción.

Así, una observación W_{t+h} generada por el proceso $\varphi(\theta)W_{t+h} = \theta(\theta)W_{t+h}$ (el modelo general ARIMA) se puede expresar, explícitamente, de las siguientes maneras:

En términos de la ecuación en diferencias:

$$W_{t+h} = \varphi_1 W_{t+h-1} + \dots + \varphi_{p+d} W_{t+h-p-d} - \theta_1 a_{t+h-1} - \dots - \theta_q a_{t+h-q} + a_{t+h} \quad (3.6.2)$$

Como un proceso de promedios móviles infinito (o en forma de choques aleatorios) de la forma

$$W_{t+h} = \sum_{j=-\infty}^t \psi_{t+h-j} a_j = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t+h-j} \quad (3.6.3)$$

o, como un proceso autorregresivo infinito

Para nuestros propósitos usaremos las expresiones (3.6.2) y (3.6.3) más frecuentemente.

A continuación describiremos la teoría de pronósticos para series de tiempo estacionarias que utilizaremos, para después mostrar la correspondiente para las no estacionarias, que vienen siendo, como veremos, una sencilla extensión de los primeros (también veremos algo sobre pronósticos para series de tiempo estacionales en la siguiente sección).

Sea $\{W_t\}$ una serie de tiempo estacionaria con $W_t = \nabla^d \tilde{z}_t$ y $E(W_t) = 0$. La cual supondremos que admite una representación de la forma $W_t = \psi(\theta)a_t$ (como (3.6.3)) y que le corresponde, además, un modelo ARIMA equivalente. Entonces si queremos un pronóstico cualquiera del valor de la observación W_{t+h} a partir del origen t (e.d., con información hasta t), y que éste se pueda expresar como

combinación lineal de los valores de la serie $\{W_t\}$ - y en consecuencia de los choques $\{a_t\}$ - éste se denotará como mientras que el pronóstico óptimo se escribirá $\tilde{W}_t(h)$. Así deberá satisfacer

$$E_t [W_{t+h} - \hat{W}_t(h)]^2 = \min_{\tilde{W}_t(h)} E_t [W_{t+h} - \tilde{W}_t(h)]^2 \quad (3.6.5)$$

que es la condición de ser mínimo en error cuadrático medio, donde E_t denota la esperanza condicional, dada la información hasta el momento t .

Es decir, $\hat{W}_t(h)$ (y también $\tilde{W}_t(h)$) sera de la forma

$$\hat{W}_t(h) = c_h a_t + c_{h-1} a_{t-1} + \dots = \sum_{j=h}^{\infty} c_j a_{t+h-j} \quad (3.6.6)$$

de donde se observa pues, que el problema de obtener este pronóstico es equivalente a especificar los valores c_h, c_{h-1}, \dots , de tal forma que se cumpla la condición (3.6.5).

Para tal propósito, es conveniente escribir la observación W_{t+h} (según Box y Jenkins) como

$$\begin{aligned} W_{t+h} &= - \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t+h-j} \\ &= - \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j a_{t+h-j} - \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j a_{t+h-j}, \text{ con } \psi_0 = -1 \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

donde vemos que la primera suma corresponde a la información desconocida al tiempo t (representa a las observaciones de $t+1$ hasta $t+h$), mientras que el segundo sumando, es la información conocida hasta t (i.e., de $-\infty$ a t).

Así, de (3.6.6) y (3.6.7) obtenemos que

$$W_{t+h} - \tilde{W}_t(h) = - \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j a_{t+h-j} - \sum_{j=h}^{\infty} (\psi_j + c_j) a_{t+h-j}$$

y, tomando la esperanza condicional de esta última, nos queda que

$$E_t [W_{t+h} - \hat{W}_t(h)]^2 = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2 \sigma_a^2 + \sum_{j=h}^{\infty} (\psi_j + c_j)^2 \sigma_a^2 \quad (3.6.8)$$

ya que $E(a_{t+i}, a_{t+j}) = 0$ para $i \neq j$.

Así observamos que esta última expresión tendrá su mínimo cuando $c_j = -\psi_j$ para $j=h, h+1, \dots$, quedando pues que

$$E_t [W_{t+h} - \hat{W}_t(h)]^2 = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2 \sigma_a^2$$

y $\hat{W}_t(h)$ según (3.6.6) expresado como

$$\hat{W}_t(h) = -\psi_h a_t - \psi_{h+1} a_{t-1} - \dots = -\sum_{j=h}^{\infty} \psi_j a_{t+h-j}$$

Tales pronósticos son, además insesgados ya que sus errores (con origen t) están dados por

$$\begin{aligned} e_t(h) &= W_{t+h} - \hat{W}_t(h) & (3.6.9) \\ &= -\sum_{j=0}^{h-1} \psi_j a_{t+h-j} \end{aligned}$$

(que es información desconocida) satisfacen que

$$E_t [e_t(h)] = 0.$$

Otra consideración que se desprende de esto es que, puesto que

$$\text{Var}_t [e_t(h)] = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2 \sigma_a^2 \quad (3.6.10)$$

y de aquí que

$$\text{Var}_t [e_t(h)] - \text{Var}_t [e_t(h-1)] = \psi_{h-1}^2 \sigma_a^2 \quad \text{para } h \geq 1$$

entonces, podemos observar que mientras más alejado se desee el pronóstico (o sea, que h sea mayor) mayor será también la varianza y, consecuentemente, menor será la precisión del mismo.

También de lo anterior, podemos deducir que, en general, los

errores de pronóstico son correlacionados para $h \geq 1$ ya que al sustituir estos valores en (3.6.9) observaremos que ésta expresión corresponde a la de un proceso MA(h-1) (cosa que sucede también si mantenemos a h fija). Pero si en esta misma expresión tenemos que $h=1$, entonces

$$e_e(h) = W_{t+1} - W_t(1) = a_{t+1} \quad (3.6.11)$$

por lo que concluimos que, sólo los pronósticos un período hacia adelante son no-correlacionados.

Ahora, con lo expuesto hasta ahora, estamos en condiciones de formular una metodología práctica para la obtención de pronósticos. Esto es, ya que queremos obtener pronósticos sobre el futuro de la serie $\{W_t\}$ a partir del modelo general $\phi(B)W_t = \theta(B)a_t$, entonces

$$\begin{aligned} W_t(h) &= E_e(W_{t+h}) \\ &= E_e(\phi_0 W_{t+h} + \dots + \phi_p W_{t+h-p} + a_{t+h} - \theta_1 a_{t+h-1} - \dots - \theta_q a_{t+h-q}) \\ &= \phi_0 E_e(W_{t+h}) + \dots + \phi_p E_e(W_{t+h-p}) + E_e(a_{t+h}) - \theta_1 E_e(a_{t+h-1}) - \dots - \theta_q E_e(a_{t+h-q}) \end{aligned}$$

de donde al desarrollar obtenemos finalmente que

$$E_e(W_{t+h-j}) = \begin{cases} W_{t+h-j} & \text{si } j \geq h \text{ (observaciones)} \\ \hat{W}_t(h-j) & \text{si } j < h \end{cases} \quad (3.6.12)$$

y, además

$$E_e(a_{t+h-j}) = \begin{cases} W_{t+h-j} - \hat{W}_t(h-j-1) & \text{si } j \geq h \\ \hat{W}_t(h-j) & \text{si } j < h \end{cases} \quad (3.6.13)$$

Así, por ejemplo, si tenemos que W_t proviene del proceso

$$(1 - 0.5B)W_t = (1 + 0.3B)a_t$$

entonces

$$W_t = 0.5W_{t-1} + a_t + 0.3a_{t-1}$$

por lo que de (3.6.12) y 3.6.13) obtenemos que

$$\begin{aligned}\hat{W}_t(1) &= E_t(N_{t+1}) \\ &= 0.5 E_t(W_t) + E_t(a_{t+1}) + 0.3 E_t(a_t) \\ &= 0.5 W_t + 0.3 [W_t - \hat{W}_{t-1}(1)]\end{aligned}$$

mientras que para $h=2$

$$\begin{aligned}\hat{W}_t(2) &= 0.5 E_t(W_{t+1}) + E_t(a_{t+1}) + 0.3 E_t(a_{t+1}) \\ &= 0.3 \hat{W}_t(1)\end{aligned}$$

por lo que, en general tendremos que

$$\hat{W}_t(h) = 0.5 \hat{W}_t(h-1) \quad \text{para } h \geq 2$$

volviéndose pues esto, como puede verse, un proceso recursivo (ya que $\hat{W}_t(1)$ involucra a $W_{t+1}(1)$ y éste a su vez a $\hat{W}_{t-1}(1)$ y así hasta llegar a $\hat{W}_0(1)$).

Nótese también aquí, que no tenemos información sobre $\hat{W}_0(1)$, obstáculo que para salvarlo tendremos que considerar que $a_1 = 0$ (elección no muy inverosímil).

Ahora, en la práctica, será siempre importante (y lo sabemos como estadísticos) obtener los límites de confianza de nuestros pronósticos.

Así, puesto que $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$ para toda t , entonces

$$E_t(h) | \{z_t, z_{t-1}, \dots\} \sim N(0, \text{var}\{E_t(h)\})$$

y de aquí que

$$z_{t+h} | \{z_t, z_{t-1}, \dots\} \sim N(\hat{z}_t(h), \text{var}\{E_t(h)\})$$

Por lo tanto, de (3.6.10) obtenemos que los límites del 100(1- α)%

de confianza para Z_{t+h} dado que Z_t, Z_{t+1}, \dots ya se observaron están dados por

$$\hat{Z}_t(h) \pm Z_{\alpha/2} \left(\sum_{j=0}^{h-1} \Psi_j^2 \right)^{1/2} \sigma_a \quad (3.6.14)$$

donde $Z_{\alpha/2}$ es el punto porcentual en el que $P(Z > Z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ si $Z \sim N(0, \sigma^2)$ (no confundir con la notación que hemos usado para las observaciones que es Z_t). Así, podemos estimar tales límites de confianza, sustituyendo $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{h-1}$ y σ_a por sus respectivas estimaciones.

Es muy importante señalar también aquí que, este procedimiento para obtener los límites de confianza, es válido únicamente para una h particular, pero no necesariamente para todas las h ' que se consideren simultáneamente.

En otras palabras, la serie pronosticada no tiene porqué encontrarse dentro de la banda delimitada por (3.6.14) al variar h con el mismo coeficiente de $100(1-\alpha)\%$ de confianza, donde además, de hecho, se puede esperar de lo anterior que: la confianza decrecerá al considerar el pronóstico, simultáneamente, de varios valores de la serie.

Ahora, para obtener los parámetros estimados de las Ψ_j , tendremos que, debido a que como $\hat{Z}_t = \hat{\Psi}(B) a_t$ y además a que como se puede demostrar que se cumple $\hat{\Psi}(B) \hat{\Psi}(B) = \hat{\sigma}^2(B)$. O sea, que

$$(1 - \hat{\psi}_1 B - \dots - \hat{\psi}_{p+d} B^{p+d}) (1 - \hat{\psi}_1 B - \hat{\psi}_2 B^2 - \dots) = 1 - \hat{\sigma}_1 B - \dots - \hat{\sigma}_q B^q$$

obtenemos que, al igualar los coeficientes correspondientes a las potencias de B en ambos lados y resolver, entonces

$$\psi_j = \begin{cases} \theta_j + \psi_1 \psi_{j-1} + \psi_2 \psi_{j-2} + \dots + \psi_{p+d} \hat{\psi}_{j-p-d} & \text{para } j=1, \dots, q \\ \psi_1 \psi_{j-1} + \psi_2 \psi_{j-2} + \dots + \psi_{p+d} \psi_{j-p-d} & \text{para } j > q \end{cases} \quad (3.6.15)$$

Otro aspecto interesante surge al querer realizar pronósticos a largo plazo. Es conveniente para esto, tener una noción acerca de la precisión con la cual se hará esto, con el fin de tener una idea de nuestras limitaciones. Así, ya que $\text{var}_e [e_e(h)] = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2 \sigma_a^2$ entonces, si lo que tenemos, por ejemplo, es un modelo MA(q), obtenemos que

$$\text{var}_e [e_e(h)] = \sum_{j=0}^q \psi_j^2 \sigma_a^2 \quad \text{para } h \geq q+1$$

por lo cual observamos que, los pronósticos más allá del q-ésimo período tendrán la misma precisión

Por otro lado, para modelo AR(p), se puede demostrar que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \text{var}_e [e_e(h)] = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \sigma_a^2 < \left[\sum_{j=0}^{p-1} \psi_j^2 + \left(\sum_{i=1}^p s_i^2 \right) \right] \sigma_a^2$$

donde $\psi_j = s_1 \psi_{j-1}^i + \dots + s_p \psi_{j-p}^i$ para $j \geq p$, y con $\sum_{j=1}^{\infty} (s_1 \psi_{j-1}^i + \dots + s_p \psi_{j-p}^i) < \left(\sum_{i=1}^p s_i \right)^2$

y de aquí que, la varianza para pronósticos más allá del período p-1 con este modelo, tenderá a ser aproximadamente constante, ya que estará acotado siempre por la expresión de la derecha (la cual, como se ve, no depende de h).

Para modelos ARMA(p,q) ocurre algo similar, al caso anterior, por lo cual se puede demostrar también (haciendo las modificaciones necesarias) para pronósticos más allá del período máximo {p-1, q} (es decir el máximo de los valores de p-1 y q) tendrán la misma precisión aproximadamente.

Así también, en el caso de tener un modelo (ARIMA) p,d,q, a

medida que h crece, se tendrá que $\text{Var}_e [e_t(h)]$ tiende a ∞ . Significando esto que, los pronósticos tenderán a cero si el horizonte de pronóstico se amplía, por lo que deducimos que no tendría utilidad práctica alguna, tratar de pronosticar más allá de plazos "razonablemente cortos".

Actualización de Pronósticos.

En la práctica, conforme pasa el tiempo, obtenemos nuevas observaciones del fenómeno en estudio. Este hecho, repercute de manera especial en los pronósticos que habíamos obtenido con anterioridad, ya que $\hat{z}_t(1)$ pierde validez al conocerse la observación z_{t+1} . Así también, los pronósticos $\hat{z}_t(2), \hat{z}_t(3), \dots$ se irán haciendo obsoletos. Así pues, es importante actualizar los pronósticos.

Para este fin, podemos utilizar el hecho de que

$$E_e(z_{t+h}) = - \sum_{j=h}^{\infty} \psi_j a_{t+h-j}$$

obteniéndose de aquí que

$$\hat{z}_{t+1}(h) = \hat{z}_t(h+1) - \psi_h a_{t+1}, \quad h \geq 1 \quad (3.6.16)$$

expresión que nos permitirá actualizar dichos pronósticos, toda vez que se nos proporcione un dato adicional de la serie de tiempo.

Más específicamente, supongamos que hemos pronosticado H valores a partir de una serie $\{z_t\}$ y tomando como base el tiempo τ (es decir, tenemos $\hat{z}_\tau(1), \hat{z}_\tau(2), \dots, \hat{z}_\tau(H)$). Entonces, si obtenemos un nuevo dato $z_{\tau+1}$ y como $e_t(1) = W_{t+1} - \hat{W}_t(1) = a_t$ tenemos que

$$a_{\tau+1} = z_{\tau+1} - \hat{z}_\tau(1)$$

por lo que de (3.6.16) obtendremos que

$$Z_{T+1}(1) = Z_T(1) - \Psi_1 a_{T+1}$$

$$Z_{T+1}(2) = Z_T(2) - \Psi_2 a_{T+1}$$

.....

$$Z_{T+1}(N-1) = Z_T(N-1) - \Psi_{N-1} a_{T+1}$$

De donde podemos observar que, para actualizar dichos pronósticos, necesitamos conocer, además de los pronósticos originales (que ya habíamos obtenido) y el valor de a_{T+1} , las ponderaciones $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{N-1}$ (lo cual se puede hacer utilizando la expresión (3.6.15)).

Cabe señalar también que, como en otros casos, es posible estimar los límites de confianza de tales pronósticos actualizados, a medida que se van obteniendo nuevas observaciones (esto y las ponderaciones mencionadas en el párrafo anterior son dadas, generalmente, por los paquetes estadísticos como el que usaremos y otros).

Así, con lo hecho hasta ahora, Box y Jenkins (1970) idearon una manera de resumir toda esta información, de una manera clara y concisa. Creando un formato general al cual le llama: tabla de predicciones (la cual mostraremos y explicaremos ya en el modelo).

Dicha tabla es útil, aún cuando no tengamos acceso a una computadora ya que se puede construir fácilmente, pudiéndose utilizar para, entre otras cosas, comprobar la adecuacidad de las predicciones obtenidas o, para exponerlas más claramente.

La optimalidad de los Pronósticos con Modelos ARIMA.

Los pronósticos realizados mediante la utilización de Modelos ARIMA son óptimos, como dijimos, en términos del criterio de error cuadrático medio mínimo. Es decir, no puede haber otro que basado en este criterio lo supere (utilizando cualesquier otro tipo de modelos). Esto fue demostrado al principio de esta sección. Pero valdría la pena hacer una serie de precisiones sobre las implicaciones de este aserto.

La optimalidad antes mencionada, se refiere a la esperanza matemática de $\{e_t(k)\}^2$ y no a una $e_t(k)$ particular. Esto es, puede suceder que mediante otro tipo de modelos, podamos obtener un mejor pronóstico (incluso basado en el criterio mencionado en el párrafo anterior) para un valor en particular, pero no en promedio.

Otro aspecto muy importante en torno a la pronosticación en base a modelos ARIMA es que, para asegurar la optimalidad referida, fue necesario suponer que las etapas de identificación, estimación y verificación, se hayan llevado a cabo correctamente.

Así también cabe señalar que los pronósticos que aquí nos ocupan, son óptimos sólo en el contexto de los modelos univariados, lineales y de coeficiente fijos. Siendo posible pues, que se puedan obtener mejores pronósticos mediante la utilización de modelos multivariados (nótese que esto implica la disponibilidad de un mayor número de datos. Para otras variables relacionadas al

fenómeno en estudio, cosa que es difícil de tener), o de modelos con una combinación no-lineal de las z_t 's (las observaciones), o con modelos con coeficientes que varíen en el tiempo (que son mucho más difíciles).

Pronóstico de Series No-Estacionarias.

Anteriormente, señalamos que un gran número de series de tiempo con las que nos topamos en la práctica son no-estacionarias. Así, si suponemos aquí, que dicha no-estacionaridad (de la serie original $\{z_t\}$) es posible cancelarla (aproximadamente) mediante la aplicación de alguna transformación apropiada (es decir, $\tau\{z_t\}$) y de un número apropiado de diferencias (o sea, $W_t^d = \nabla^d \tau(z_t)$), la generalización de la teoría de pronósticos antes vista, no es difícil.

Así, sin pérdida de generalidad si $d=1$, entonces los pronósticos óptimos de la serie $\{T(z_t)\}$ se obtienen de la relación

$$E_t(W_{t+1}) = E_t[T(z_{t+1})] - E_t[T(z_{t+1}-1)]$$

de tal manera que $\hat{T}(z_t)(l) = E_t[T(z_{t+l})]$ estará dado por

$$\hat{T}(z_t)(l) = \begin{cases} T(z_t) + \hat{W}_t(1) & \text{si } l=1 \\ T(z_t)(l-1) + \hat{W}_t(l) & \text{si } l \geq 2 \end{cases}$$

(para $d \neq 1$), no es difícil la generalización.

Planteado esto en términos de esperanzas condicionales, se puede demostrar que

$$E_t[T(z_{t+l-j})] = \begin{cases} T(z_{t+l-j}) & , \text{ si } j \geq l \\ \hat{T}(z_t)(l-j) & , \text{ si } j < l \end{cases}$$

y además también se cumple que

$$E_0(a_{k+1-j}) = \begin{cases} \hat{\tau}(z_{k+1-j}) - \hat{\tau}(z_{k+1-j-1}), & \text{si } j \geq 1 \\ 0, & \text{si } j < 1 \end{cases}$$

lo cual nos permite efectuar los pronósticos como vimos anteriormente.

Asimismo, similarmente al caso de Series Estacionarias, el intervalo de confianza de los pronósticos para series no-estacionarias, esta dado por

$$\hat{\tau}(z_k)(z) \pm z_{\alpha/2} \left(\sum_{j=1}^{k-1} \psi_j^2 \right)^{1/2} \sigma_a$$

donde $z_{\alpha/2}$ como antes, es el punto porcentual tal que $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$, si $Z \sim N(0,1)$.

Finalmente, a manera de comentario, cabe señalar que es frecuente encontrarse con series de tiempo en las cuales la desviación estándar del proceso cambia en proporción a su media. En estos casos, lo más utilizado es construir un modelo para los logaritmos naturales de la serie.

El problema de esto es que, en la mayor parte de los casos, queremos pronosticar sobre los datos originales y no a partir de sus logaritmos. Problema cuya solución no es inmediata, sino que tiene una serie de considerandos, ya que no es posible realizar tales pronósticos aplicando el antilogaritmo a los pronósticos obtenidos de la serie logarítmica. Más precisamente, la cuestión de fondo de todo esto es que, si los choques aleatorios de la serie logarítmica están distribuidos Normalmente, entonces los choques aleatorios correspondientes a la serie original (y los pronósticos de esta serie) seguirán una distribución Log-Normal.

3.7.- MODELOS ESTACIONALES SIMPLES Y MULTIPLICATIVOS.

En esta sección, estudiaremos un tipo especial de procesos que surgen con frecuencia en la Economía, y en otras áreas del conocimiento como la referente a nuestro contexto (V.gr., la evolución de la cantidad total de Ozono).

Dichas series de tiempo, llamadas estacionales, tienen como característica principal (además de las que hemos encontrado hasta ahora) el presentar fluctuaciones que se repiten periódicamente (es decir, anualmente, semestralmente,..., por ejemplo) con algunos cambios graduales, tal vez, a través de los años.

Lo que caracteriza pues a estos procesos, es por ejemplo en el caso de tratarse de una serie con observaciones hechas mensualmente y con periodicidad anual, que habrá una similitud entre las mediciones referentes a un mes determinado para años consecutivos (o entre los mismos trimestres para años consecutivos, si es trimestral por ejemplo).

Adicionalmente, cabe también mencionar que, puede haber diversos patrones con duraciones diferentes. Por ejemplo, en series de tiempo con una supuesta periodicidad anual, es posible encontrar también un período estacional de período semestral (o de otra índole), en donde las observaciones hechas los meses de Diciembre fueran similares a aquellas correspondientes a las de junio, por decir algo.

Así pues, de manera general, hablaremos en este tipo de

modelos, de periodos estacionales s. Es decir, donde cada periodo consta de s observaciones contiguas.

Así, similarmente al caso en donde aparece una tendencia como factor de no-estacionaridad homogénea como el que vimos en la sección 3.3, y la cual podíamos cancelar mediante la aplicación del operador diferencia ∇^k (ver modelos ARIMA), la existencia de un patrón estacional en la serie, es causa de no-estacionaridad siendo posible también cancelarlo (y por tanto, tomarlo en cuenta) introduciendo el operador de diferencia estacional ∇_s^k . Este se define como

$$\nabla_s^k z_t = (1 - B^s)^k z_t = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j \binom{k}{j}}{j!(k-j)!} z_{t-sj}, \text{ para } k=0,1,2,\dots; s=1,2,\dots \quad (3.9.1)$$

por lo que se puede notar que, trabajaremos ahora con polinomios de retraso estacional de orden k, de la forma

$$G(B^s) = 1 - g_1 B^s - g_2 B^{2s} - \dots - g_k B^{ks} = 1 - \sum_{j=1}^k g_j B^{js} \quad (3.9.2)$$

de tal manera que si por ejemplo, $s=4$ y $k=2$, tendríamos que

$$\nabla_4^2 z_t = (1 - B^4)^2 z_t = z_t - 2z_{t-4} + z_{t-8}$$

y por tanto el polinomio de retraso correspondiente es

Ahora, si en el caso de los procesos ARIMA(p,d,q) que estudiamos antes, en donde se tomaban d primeras diferencias de la serie con el fin de volverlas estacionarias, y después de las cuales se perdían d de las observaciones originales, en los procesos estacionales al aplicar el operador de diferencia

estacional ∇^p se perderán SKD observaciones.

A continuación, como lo hicimos antes en otras secciones, nos introduciremos más a fondo en las características de este tipo de modelos, considerando algunos de los que más frecuentemente se utilizan en la práctica.

PROCESOS DE PROMEDIOS MÓVILES ESTACIONARIOS PUROS

Estos procesos, con período estacional S, se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\tilde{z}_t &= a_t - \theta_1 a_{t-s} - \dots - \theta_q a_{t-qs} \\ &= (1 - \theta_1 B^s - \dots - \theta_q B^{qs}) a_t\end{aligned}\quad (3.7.3)$$

y los cuales se denotan por MA(Q)_s. En este caso similarmente a los modelos no estacionales, la función de autocorrelación correspondiente será diferente de cero sólo en los rezagos S, 2S, ..., QS. Es decir

$$\begin{aligned}\rho_s &= \frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_1^s + \dots + \theta_q - \theta_q^s}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2} \\ &\vdots \\ \rho_{qs} &= \frac{-\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2}\end{aligned}\quad (3.7.4)$$

implicando esto, que no hay correlación entre observaciones contiguas (esto es, si $s=12$, por ejemplo, la serie formada por los meses de Marzo o Abril, para años consecutivos, son independientes de aquellas conformadas por las correspondientes a los meses de Enero).

PROCESOS AUTORREGRESIVOS ESTACIONALES PUROS.

Estos procesos se pueden escribir como

$$\tilde{z}_t = \pi_1 \tilde{z}_{t-s} + \dots + \pi_p \tilde{z}_{t-ps} + a_t \quad (3.7.5)$$

y, también, similarmente a los AR descritos en el pasado, la función de autocorrelación será de extensión infinita, pero en este caso, será distinta de cero sólo en los lags que sean múltiplos de s.

Así por ejemplo, si $s=12$ y $P=1$, tendremos que

$$\rho_j = \begin{cases} r_j^k & \text{si } j = ks, k=0,1,2, \dots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.7.6)$$

que es algo similar a lo que obtuvimos en el estudio sobre el proceso AR(1).

MODELOS ARIMA ESTACIONALES

Con lo expuesto anteriormente, no nos será difícil representar a los modelos mezclados ARIMA estacionales. En general, estos se pueden escribir como

$$(1 - \phi_1 B^s - \dots - \phi_p B^{ps}) W_t = (1 - \theta_1 B^s - \dots - \theta_q B^{qs}) a_t \quad (3.7.7)$$

con $W_t = \nabla_s^d z_t = (1 - B^s)^d z_t$. Quedando, en términos de operadores como

$$\Phi(B^s) \nabla_s^d (z_t - \mu) = \Theta(B^s) a_t \quad (3.7.8)$$

y que se denota como modelo ARIMA $(P,D,Q)_s$, (y donde a_t proviene de un proceso de ruido blanco). Nótese que para procesos de este tipo, la serie original constará de S series independientes (es decir, si $s = 4$, habrá una para cada trimestre por ejemplo).

Cabe mencionar aquí, sin perturbar nuestra intuición que, dada la similitud de estos modelos a sus correspondientes no-estacionales, es de esperarse que la metodología necesaria para la

construcción de esos, sea aplicable a estos, sin tener necesidad de hacer grandes modificaciones. Pero, además también que hasta ahora hemos considerado que tales modelos ARIMA estacionales puros, no siempre se pueden encontrar en la práctica. Es decir, lo más común es que nos enfrentemos a procesos que muestren tanto efectos estacionales como no-estacionales, a la vez (i.e, donde las α_t 's no necesariamente provienen de un proceso de ruido blanco).

Por tal motivo, es necesario introducir un tipo de modelos más general que tome en cuenta tales características, y que llamaremos: modelos multiplicativos estacionales.

MODELOS ARIMA ESTACIONALES MULTIPLICATIVOS

Estos modelos se pueden representar como

$$\Phi(B^s) \nabla_s^d (Z_t - \mu) = \Theta(B^s) a_t \quad (3.7.9)$$

donde las variables $\{a_t\}$ no se suponen de ruido blanco. Pudiendo ser pensadas entonces, como generadas por un proceso ARIMA (p,d,q), es decir, como

$$\phi(B) \nabla^d a_t = \theta(B) a_t \quad (3.7.10)$$

ahora sí, con $\{a_t\}$ un proceso de ruido blanco.

Así tomando en cuenta lo anterior -sin más preámbulo- tenemos que (3.7.9) será

$$\phi(B) \Phi(B^s) \nabla_s^d (Z_t - \mu) = \theta(B) \Theta(B^s) a_t \quad (3.7.11)$$

que denotaremos como modelo ARIMA (p,d,q) X (P,D,Q)s.

Es decir, mediante este tipo de modelos, por ejemplo, para series de observaciones mensuales, es posible tomar en cuenta tanto las posibles relaciones entre meses contiguas dentro de los años (por medio de (3.7.10)), como aquellas que habrían entre años para los mismos meses (mediante (3.7.9)).

Ahora, es de suponerse que mientras más complejos es un modelo, mayor será también la complejidad de su estructura de correlación (y viceversa). Este aspecto, aunado con el hecho ahora de que tenemos un mayor número de alternativas en la elección de modelos apropiados para representar adecuadamente un fenómeno que presente las características mencionadas hasta ahora, ocasiona que la etapa de identificación del mismo no sea sencilla (esto se ilustrará con el ejemplo que presentaremos en la siguiente sección, en donde se mostrará que no hay un único camino para esto).

Así, como una ayuda para la visualización del comportamiento de las funciones de autocovarianza de algunos modelos estacionales multiplicativos, presentaremos las fórmulas de las funciones de autocorrelación correspondiente así como una gráfica sencilla de ésta -de los que mas frecuentemente surgen en la práctica.

Así primeramente, consideremos el modelo ARIMA (p,d,q) X (P,D,Q)s descrito en (3.7.10) por el cual se puede escribir como:

$$\begin{aligned} (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)(1 - \pi_1 B^s - \dots - \pi_r B^{rs}) \nabla^d \nabla_s^q z_t = \\ = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)(1 - \omega_1 B^s - \dots - \omega_r B^{rs}) a_t \end{aligned} \quad (3.7.12)$$

Así pues, como nuevamente la identificación de los modelos se hará en base a la función de autocorrelación, damos en seguida el proceso de derivación de la FAC PARA EL MODELO $(\alpha, \theta, 1) \times (0, \beta, 1)$ s.

Si

$$W_t = \nabla^s \nabla^s z_t$$

el modelo queda, poniendo $\Theta = \theta_1$ y $\Theta = \Theta$, como

$$\begin{aligned} W_t &= (1 - \Theta B)(1 - \Theta B^s) a_t \\ &= (1 - \Theta B - \Theta B^s + \Theta B^{s+1}) a_t \\ &= a_t - \Theta a_{t-1} - \Theta a_{t-s} + \Theta a_{t-s-1} \end{aligned} \quad (3.7.13)$$

de la expresión anterior, podemos evaluar

$$E(W_t) = E(a_t) - \Theta E(a_{t-1}) - \Theta E(a_{t-s}) + \Theta E(a_{t-s-1})$$

por tanto $\gamma_0 = E(W_t^2)$ y como

$$W_t^2 = a_t^2 + \theta^2 a_{t-1}^2 + \theta^s a_{t-s}^2 + \theta^2 \theta a_{t-s-1} + \Sigma$$

productos cruzados)

$$\begin{aligned} \gamma_0 = E(W_t^2) &= \sigma_a^2 + \theta^2 \sigma_a^2 + \theta^s \sigma_a^2 + \theta^2 \theta^s \sigma_a^2 \\ &= (1 - \theta^s)(1 + \theta^s) \sigma_a^2 \end{aligned} \quad (3.7.14)$$

para calcular $\gamma_1 = E(W_t W_{t-1})$ ponemos $t-1$ en (3.7.13) y hacemos el producto $W_t W_{t-1}$. Como los únicos índices que coinciden en el producto son los de los términos $-\theta a_{t-1}$ y $-\theta \theta^s a_{t-s-1}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \gamma_1 = E(W_t W_{t-1}) &= -\theta \sigma_a^2 - \theta \theta^s \sigma_a^2 \\ &= -\theta(1 + \theta^s) \sigma_a^2 \end{aligned} \quad (3.7.15)$$

Para $j = 2, \dots, s-2$ no hay coincidencia de índices en el producto $W_t W_{t-j}$ sino hasta $j=s-1$; coincidiendo en el producto $\theta \theta^s a_{t-s-1}$ por tanto

$$\gamma_{s-1} = E(W_t W_{t-s+1}) = \theta \theta^s \sigma_a^2 \quad (3.7.16)$$

para $j = S$

$$W_{t-S} = a_{t-S} - \theta a_{t-S-1} - \theta a_{t-2S} - \theta \theta$$

de donde se ve que solamente coinciden en $t-S$ y en el $t-S-1$, por tanto

$$\begin{aligned} \gamma_j &= E(W_t W_{t-S}) = -\theta \sigma_a^2 - \theta^2 \theta \sigma_a^2 \\ &= -\theta(1+\theta^2)\sigma_a^2 \end{aligned} \quad (3.7.17)$$

para $j=S+1$

$$W_{t-S-1} = a_{t-S-1} - \theta a_{t-S-2} - \theta a_{t-2S-1} + \theta \theta a_{t-2S-2}$$

que solo coinciden en $t-S-1$ con (3.7.13), quedando

$$\gamma_{S+1} = E(W_t W_{t-S-1}) = \theta \theta \sigma_a^2 \quad (3.7.18)$$

finalmente para $j \neq S+1$, $\gamma_j = 0$, ya que el índice menor de (3.7.13)

es $t-S-1$. Por tanto la FAC queda: dividiendo

(3.7.15), (3.7.16), (3.7.17) y (3.7.18) por γ_0 .

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = -\frac{\theta}{(1+\theta^2)}$$

$$\rho_{S-1} = \frac{\theta \theta}{(1+\theta^2)(1+\theta^2)} = \rho_{S+1} = \rho_1 \rho_S$$

$$\rho_S = -\frac{\theta}{(1+\theta^2)} \quad (3.7.19)$$

$$\rho_j = 0$$

para cualquier otra $j \in \mathbb{N}$

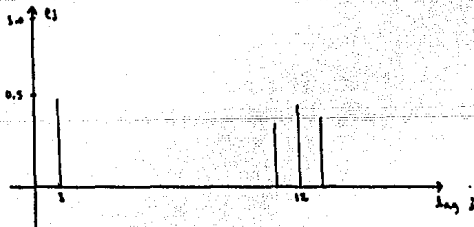


Fig. 3-9 FAC para $(0, d, 1) \times (0, 0, 1) S$
 $S=12$, $\theta = -0.95$, $\theta = -0.95$
 $\rho_1 = 0.49$, $\rho_{12} = 0.49$

Es importante notar lo siguiente, de (3.4.19) vemos que $\hat{\epsilon}_t$ queda únicamente en términos de Θ el parámetro de promedio Móvil no estacional, de la misma manera $\hat{\epsilon}_t$ solo en términos de Θ el parámetro de Promedio Móvil estacional, y no solo eso sino que además es la misma forma que en (3.4.1.5) lo cual implica que las estimaciones iniciales se obtienen por el mismo proceso.

Lo anterior es cierto para los modelos estacionales multiplicativos que damos a continuación, teniendo como importe consecuencia lo siguiente:

Con modelos multiplicativos se puede estimar $\hat{\phi}_1, \hat{\theta}_1, \dots$, a partir de $\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2, \dots$, como si fuera un modelo no multiplicativo, de igual manera, se puede estimar $\hat{\epsilon}_1, \hat{\theta}_1, \dots$, en términos de $\hat{\epsilon}_s, \hat{\epsilon}_{s+1}, \dots$ como para modelos no multiplicativos.

A continuación damos la fórmula de la función de autocorrelación de varios modelos multiplicativos estacionales.

Estas nos serán de gran utilidad en la identificación.

Modelo $(0, d, 1) \times (1, D, 1)_s$

$$(1 - \Gamma \Theta^s) W_t = (1 - \Theta \beta)(1 - \Theta \beta^s) a_t$$

con

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = -\frac{\Theta}{1 + \Theta^s}$$

$$\rho_s = \frac{(1 - \Gamma \Theta)(\Gamma - \Theta)}{1 - \Theta^2 - 2\Gamma \Theta} \quad (3.7.20)$$

$$\rho_{s-1} = \rho_{s+1} = \rho_s \rho_1$$

$$\rho_j = \Gamma \rho_{j-s} \quad , \quad j \geq s+2$$

$$\rho_k = \rho_j = \dots = \rho_{s-2} = 0 \quad , \quad s \leq j \leq 2$$

Es decir la FAC será infinita en extensión con picos simétricos con período S y en medio de esos picos cero. La representación gráfica aproximada ésta dada en la fig. 3.10

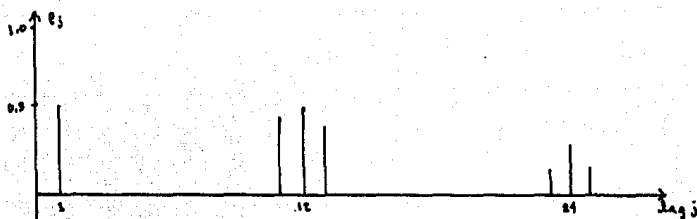


Fig. 3-10 FAC para $(0, d, 1) \times (1, \theta, 1)_S$
 $S=12$, $\theta = -0.95$, $\rho = 0.27$, $\phi = -0.2$
 $\rho_{12} = 0.49$, $\rho_{24} = 0.5$

MODELO $(0, d, 2) \times (0, \theta, 2)_S$

con

$$W_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)(1 - \theta_1 B^S - \theta_2 B^{2S}) a_t$$

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = -\frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_2 = \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_3 = -\frac{\theta_1(1 - \theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

(3.7-21)

$$\rho_{S-1} = \rho_{S+1} = \rho_S \rho_1$$

$$\rho_{S-2} = \rho_{S+2} = \rho_S \rho_2$$

$$P_{25-1} = P_{25+1} = P_{25} P_1$$

$$P_{25-2} = P_{25} P_2$$

todas las demás cero.

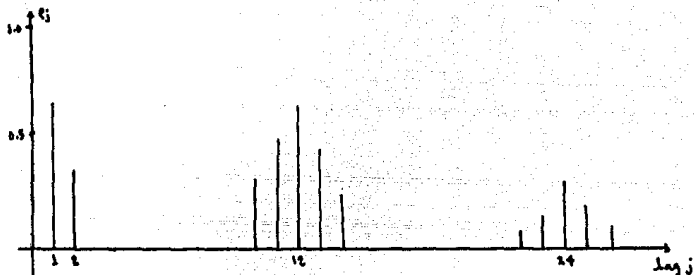


Fig. 3-11 FAC para $(0, d, 2) \times (0, d, 2)_5$

$$S=12, \theta_1 = \ominus, \theta_2 = -0.75$$

$$P_1 = 0.66, P_2 = 0.3, P_{12} = 0.66, P_{24} = 0.3$$

MODELO $(0, d, 2)$ \times $(0, D, 1)$ S

$$W_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)(1 - \theta B) a_t$$

con

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = - \frac{\theta_1 (1 - \theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_2 = - \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_s = - \frac{\theta}{1 + \theta^2}$$

(3.7.22)

$$\rho_{s-1} = \rho_{s+1} = \rho_s \rho_1$$

$$\rho_{s-2} = \rho_{s+2} = \rho_s \rho_2$$

Todas las demás cero.

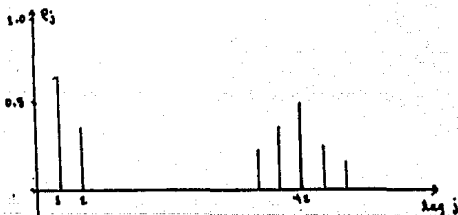


Fig. 3-12 FAC para $(0, d, 2) \times (0, D, 1) S$

$$S=12, \theta_1 = -0.9, \theta_2 = -0.95, \theta = -0.95$$

$$\rho_1 = 0.66, \rho_2 = 0.5, \rho_{12} = 0.49$$

MODELO (0,d,1) x (1,D,2)_S

$$W_t = (1 - \theta\theta)(1 - \theta_1 B^2 - \theta_2 B^{2S}) a_t$$

con

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = - \frac{\theta}{1 + \theta^2}$$

$$\rho_2 = - \frac{\theta_1(1 - \theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \quad (3.7.23)$$

$$\rho_{2j-1} = \rho_{2j+1} = \rho_2 \rho_1$$

$$\rho_{2S} = - \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_{2S-1} = \rho_{2S+1} = \rho_{2S} \rho_1$$

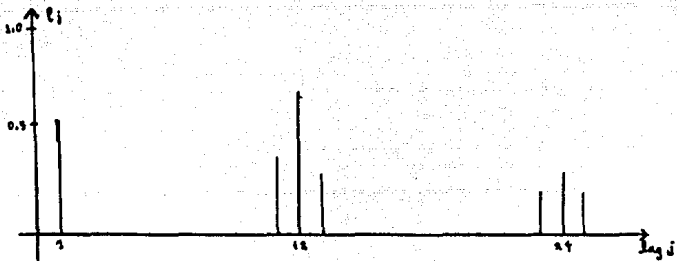


Fig. 3-13 FAC para (0,d,1) x (0,0,2)_S

$$S=12, \theta = -0.95, \theta_1 = -0.9, \theta_2 = -0.75$$

$$\rho_1 = 0.49, \rho_{12} = 0.66, \rho_{24} = 0.3$$

CONSTRUCCION DE MODELOS ESTACIONALES

Los modelos ARIMA para series de tiempo estacionales, se construyen utilizando el procedimiento iterativo antes mencionado (el empleado para los procesos no-estacionales). Sólo que ahora tienen que efectuarse las modificaciones que la naturaleza de los datos obligan a dicha metodología.

Entre las modificaciones que se deben hacer, podemos mencionar: la consideración -en caso necesario- de tomar diferencias estacionales a los datos (i.e., $\hat{z}_t - \hat{z}_{t-s}$), énfasis en la atención a los coeficientes de autocorrelación y autocorrelación parcial estimados para múltiples de lag s (i.e., s, 2s, 3s,...).

Por otro lado, como en la etapa de estimación obtendremos estimadores para los parámetros AR₁MA elegidos, también deberá ponerse una especial atención en las correspondientes a los múltiplos de s, y, por ende, es propio llevar a cabo las técnicas de verificación mencionadas anteriormente (aunque algunas con ligeras modificaciones) a dichos coeficientes.

Finalmente, cabe recordar que la mencionada en los párrafos anteriores no anula las consideraciones que deben hacerse para la posible presencia de una componente no-estacional inclusive en el fenómeno en cuestión. Es decir, es frecuente detectar ambas componentes (estacional y no estacional) en muchos procesos.

3.8.- EJEMPLO.- EXPORTACIONES DE ESTADOS UNIDOS A LA COMUNIDAD ECONOMICA EUROPEA (C.E.E.)

Ilustraremos los conceptos expuestos a través de estas secciones con un ejemplo que aparece en Pankratz (1983), el cual se refiere, como el título lo indica, a la serie que representa las cantidades en dólares de las exportaciones de los Estados Unidos a la Comunidad Económica Europea (CEE), desde el primer trimestre de 1958 hasta el segundo trimestre de 1968.

Esta serie de tiempo consta de 42 observaciones, lo cual "viola" la recomendación de Box y Jenkins de que sean al menos 50 (ejemplo que no es único en la literatura de las series de tiempo, ya que Jenkins (1979) analiza una serie de 14 observaciones). Este hecho, según Pankratz, muestra, que en últimos términos, lo más importante no es necesariamente el número de observaciones absoluto, sino la cantidad de "ruido estadístico". Es decir, si el factor ruido es pequeño esto en términos de varianza de los choques aleatorios, podría ser posible extraer "suficiente" información a partir de pocas observaciones, y poder construir un modelo ARIMA útil.

Así precisamente, en la etapa de identificación, podemos observar en la gráfica de la serie mostrada en la figura 3.14 una tendencia creciente, así como, posiblemente, una perioricidad de período 4. Características, entre otras, que se confirmarán con las herramientas propuestas en las secciones anteriores para esto.

AÑO	TRIMESTRAL			
	I	II	III	IV
1958	732.2	756.8	644.3	731
1959	626.7	706.7	638	884.4
1960	957	1009.3	777.4	1007.7
1961	1080	1042.8	788.3	1124.5
1962	1127.5	1214.3	1083.6	1161.8
1963	1174	1284.4	1144.1	1307
1964	1304.7	1306.7	1193.3	1433
1965	1094.4	1351.4	1243.3	1362.6
1966	1447	1371.7	1277.2	1388
1967	1413.5	1444.6	1299.3	1485.1
1968	1377.3	1553.3		

MEJOR VALOR = 626.7 MEDIA = 1141.87 MALO VALOR = 1563.6

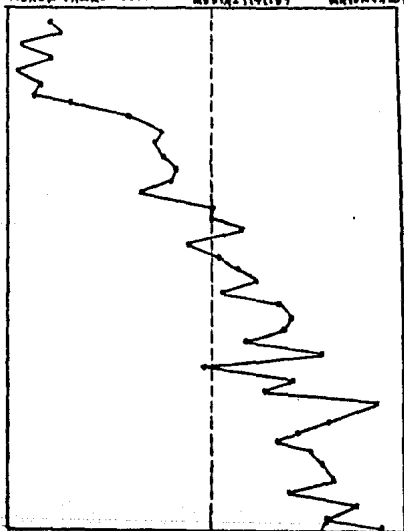


Fig. 3-14 Gráfica de la serie

Asimismo, en la figura 3.15 que corresponde a la FAC muestral, se sugiere claramente la existencia del patrón estacional mencionado de período 4, ya que se observan picos en los lags 4, 8 y 12. También, se puede ver que dicha función decae hacia cero lentamente. Lo cual indica, como vimos, la necesidad de diferenciar (no-estacionalmente, en principio) la serie original, para inducir, como sabemos, a que tengamos una media estacionaria (como se desea).

Cabe mencionar también que, el patrón estacional, a veces, puede obscurecer al patrón no-estacional que los datos puedan tener, ya que, por ejemplo, una autocorrelación positiva correspondiente al retraso (o lag) 4 muy alta, podría estar positivamente correlacionada con las autocorrelaciones alrededor de ésta, evitando así que la FAC muestral decaiga rápidamente como es deseado, y provocando -consecuentemente- una pequeña duda acerca de lo que dijimos arriba respecto a la posible existencia de una tendencia. Esto es, tendremos que seguir con esta etapa de identificación, utilizando algunas otras herramientas a nuestro alcance con el fin de determinar esto con claridad.

Para este propósito, nos sería útil examinar las FAC y FACP muestrales de la serie resultante de aplicar el operador diferencia $\nabla = (1-B)$ a la serie original. Estas se muestran en las figuras 3.16 . La primera de estas nos confirma la evidencia de un patrón estacional (no estacionario), ya que los valores estimados de las autocorrelaciones correspondientes a los retrasos

4, 8 y 12, tienen valores absolutos de t mayores que 1.25 (cifra a

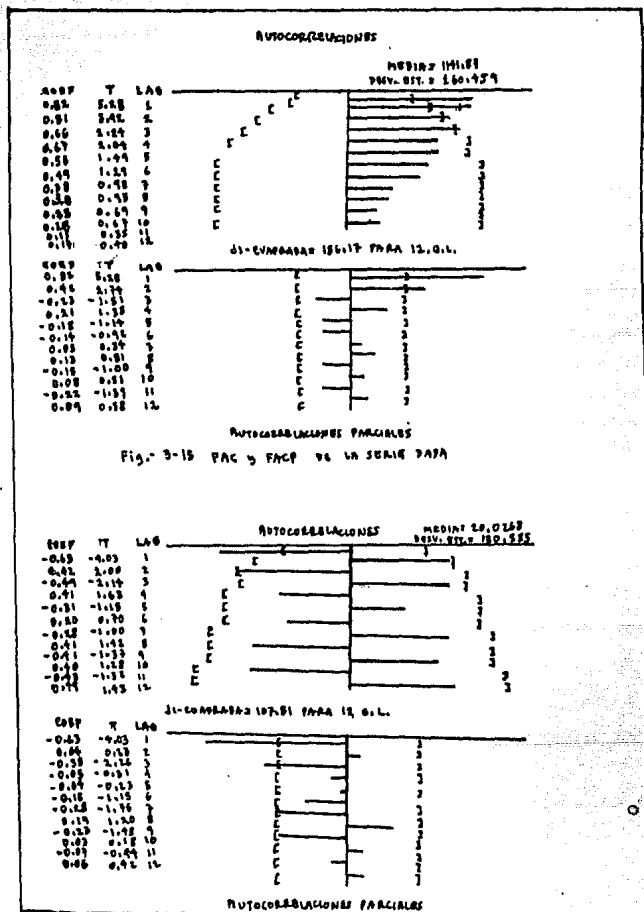


FIG. 3-16 FAC y FACP ESTIMADOS PARA LAS PRIMERAS DIFERENCIAS EN LA FAC, 1919

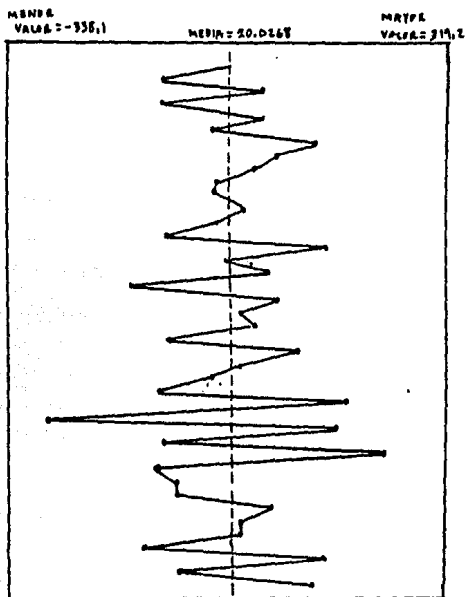


Fig. 3-17.- Gráfica de las primeras diferencias de los datos ($\Delta=1$)

AÑO	TRIMESTRES			
	I	II	III	IV
1958	24,6	-11,3	91,7	-109,3
1959	80	-28,7	176,9	102,1
1960	52,3	-8,4	-9,4	7,8
1961	42,3	-7,2	-107,7	189,4
1962	5	99,8	-175,7	108,2
1963	22,2	60,9	-105,8	157,9
1964	27,7	-28	-133,4	239,7
1965	-333,1	256,5	-108,1	374,2
1966	-115,5	-75,3	-94,5	40,8
1967	25,8	31,1	-145,3	126,2
1968	-87,3	155,5		

retrasos contiguos, lo cual distorsionaría, de alguna manera, al

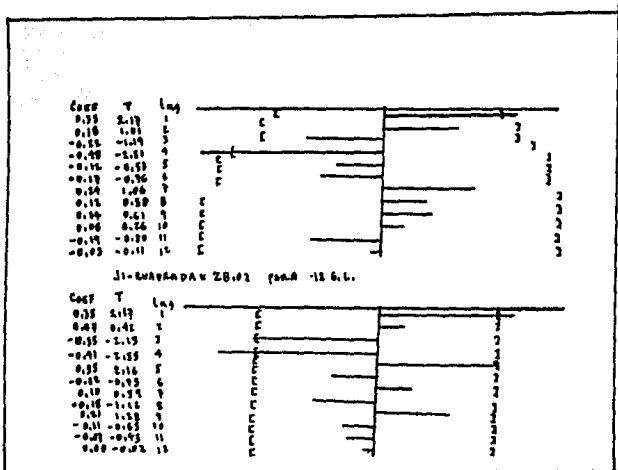


Fig. 3-18 PAC y FAC estimados de las primeras diferencias estacionales (D₁) con S=4, de los datos de las exportaciones.

partir de la cual según este autor podría considerarse como significativas), los cuales, además, no decaen rápidamente en magnitud.

Posteriormente, al obtener las FAC y FACP muestrales después de tomar diferencias estacionales de orden 4 (a los datos originales), notamos en las gráficas correspondientes (3.18) que permanece todavía un elemento estacional, indicado por un pico negativo en lag 4 y con un valor de t muy grande (-2.51). Aquí, la FAC muestral "corta" hacia cero en los lags 8 y 12, sugiriéndonos con esto que tal patrón estacional restante corresponde al de un MA(1) (lo cual es confirmado por la tendencia que tiene la FACP muestral a decaer en el lado negativo en los lags 4, 8 y 12, en la fig. 3.16)

Además, esta FAC -dice Pankratz- tiene una característica que considera sorprendente, a saber: decae rápidamente a cero, sugiriendo esto que la primera diferencia a la serial hecha anteriormente, sea innecesaria. Lo cual contradice a lo expuesto antes, en cuanto a la existencia de una tendencia en los datos.

Parece ser pues, en este momento que, no podemos aún identificar un modelo apropiado para representar a nuestro problema de estudio. Analicemos pues más detenidamente: en la figura 3.16 se sugiere un MA(1), debido al pico en lag 1 y el corte a cero en lag 2. Además, la alta correlación en lag 4 dijimos, podría estar correlacionada con las correspondientes a otros

posible patrón no estacional. De lo anterior se sugiere primeramente seleccionar un modelo ARIMA (0,1,1) para representar la parte componente estacional mostrada por los datos, es decir:

$$(1 - \theta_1 B) Z_t = (1 - \theta_1 B) a_t \quad (3.8.1)$$

Estimación y Verificación

Al estimar el modelo anterior (el dado por la expresión (3.8.1)), se obtuvieron resultados poco convincentes. Ya que se obtuvo que $\hat{\theta}_1 = 0.38$ (y con un valor de t de 0.23) que difícilmente podríamos considerarlo como significativo. Además, la FAC residual utilizable con el objeto de verificar si la serie de los residuales después de ajustar el modelo es de ruido blanco, mostró un pico grande en lag 4, sugiriendo esto, paradójicamente, la permanencia del parámetro θ_4 en el modelo.

Un indicio de lo que pasa, podría ser dado a partir de la inspección cuidadosa a la serie estacionalmente diferenciada (figura 3.14), ya que en ésta se obtiene una media muestral de aproximadamente 75, dentro de un rango de variación de -239.8 a 352.1, abriendo esto, a su vez, la posibilidad de que tal parámetro sea diferente de cero.

Ahora, sabemos que cuando la media muestral de una serie ya diferenciada es diferente de cero, implica que los datos contienen una tendencia determinista (lo cual hace resurgir el hecho que habíamos observado en la serie al principio, y que habíamos abandonado provisionalmente, en el sentido de la existencia de esta componente). Por otro lado, podemos decir también que, una

manera de incluir en el modelo a una tendencia determinista, es

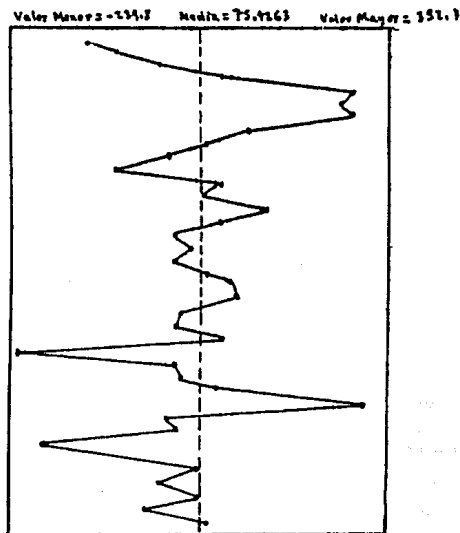


Fig. 3-19. Gráfica de las diferencias estacionales a los datos (D=1)

AÑOS	TRIMESTRES			
	I	II	III	IV
1948	-105.5	-50.1	33.7	118.4
1949	230.3	202.6	311.9	156.8
1950	93	39.5	-64.8	116.8
1951	74.5	186.5	118.5	37.2
1952	64.5	25.6	75.5	145.2
1953	140.7	51.2	44.2	12.6
1954	-234.7	44.7	50	124.5
1955	252.1	50.3	53.9	-174.8
1956	-33.5	72.9	2.1	97.3
1957	-15.7	108.7		

expresando a esta en términos de la $(W_t - \mu_w)$. Es decir, en términos de sus desviaciones con respecto a su media. Esto nos lleva al modelo

$$\tilde{W}_t = (1 - \theta + \beta^d) a_t \quad (3.8.2)$$

donde \tilde{W}_t es la diferencia estacional de z_t expresada en desviaciones con respecto a su media.

Este modelo, según Pankratz, proporciona mejores resultados que el anterior. Ya que aquí $\hat{\theta}_4 = 0.895$ y $\hat{\lambda}_w = 82.1543$ (ambos significativos), y la FAC de la serie de los residuales, no muestra evidencia alguna sobre la existencia de algún componente estacional adicional restante (fig. 3.20).

Hasta ahora, pues, hemos podido identificar la parte estacional del proceso que estamos estudiando, debiendo ahora concentrarnos en la correspondiente a la componente no-estacional.

Así, en la fig. 3.21 que es la correspondiente, como dijimos al correlograma de los residuales (es decir, la FAC de la serie de los residuales, que resulta después de filtrar los datos con el modelo (3.8.2)) nos da una información, distinta a la que nos proporcionaba para la identificación de esta componente la fig. 3.18 (donde el pico correspondiente al lag1 sugería un MA(1)), ya que muestra valores grandes (con valores significativos de t , es decir mayores que 1.25) para las autocorrelaciones en lags 1 y 2, y un corte a cero después estos. Aspecto que nos sugiere la utilización de un MA(2) para representar dicha parte. Así, adicionado esto a

lo que teníamos (el modelo (3.8.2)) nos resulta un modelo ARIMA

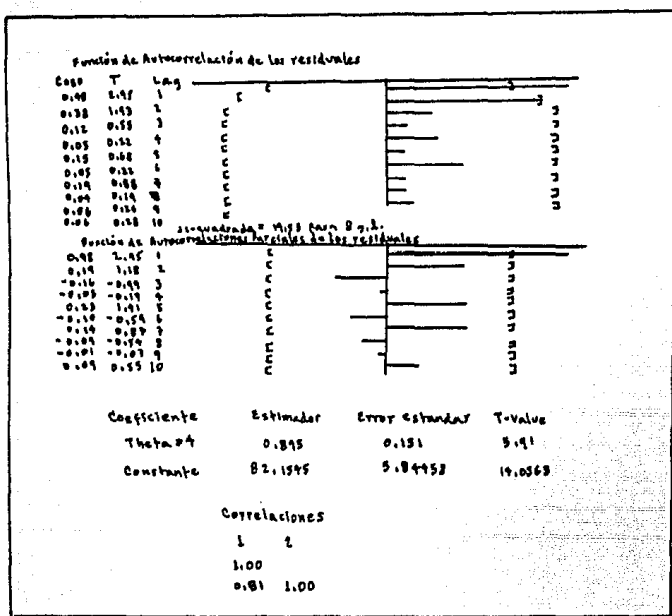
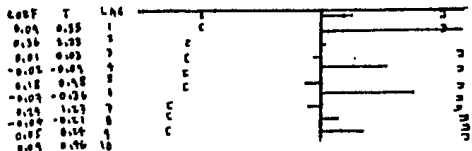


Fig 3-20.- Resultados de la estimación y Verificación del modelo (3.8.2)

FORMA DE AUTOCORRELACION DE LOS RESIDUOS



χ^2 -CUADRADO = 11.11 PARA 7 G.L.

COEFICIENTE	ESTIMADOR	ERROR ESTANDAR	T-VALUE
THETA 3	- 0.731	0.154	-2.108
THETA 4	0.271	0.150	3.81
CONSTANTE	81.6018	5.81993	14.5214

CORRELACIONES

	1	2	3
1	1.00		
2	0.02	1.00	
3	0.05	0.64	1.00

Fig. 3-21 Resultados de la estimación y verificación del modelo (3.8.4)

$$(0,0,2) \times (0,1,1):$$

$$\hat{W}_t = (1 - \theta_1 B^2)(1 - \theta_2 B - \theta_3 B^2)A_t \quad (3.8.3)$$

pero la misma figura nos muestra también que θ_1, θ_2 podrían estar correlacionadas, por lo que, por el principio de parsimonia, se decide dejar sólo uno de ellos (θ_1). Quedándonos pues ahora con el modelo ARIMA (0,0,1) x (0,1,1):

$$W_t = (1 - \theta_1 B^2)(1 - \theta_2 B)A_t \quad (3.8.4)$$

De nuevo, estimamos los parámetros correspondientes a este último, resultando que $\hat{\theta}_1 = -0.331$, $\hat{\theta}_2 = 0.871$ y $\hat{c} = 0.6018$ los cuales son significativos, pero con una autocorrelación grande correspondiente al retraso 2, al verificar la FAC de los residuales correspondientes. Este hecho nos obliga, pues, a reformar el modelo (3.8.3) (ver figura 3.22).

Así, al ajustar tal modelo, se obtiene que $\hat{\theta}_1 = -0.428$, $\hat{\theta}_2 = -0.460$, todos con valores de t significativos ($P > 2$). Podemos observar también que, cumple con las condiciones de invertibilidad (ya que, además la matriz de correlación de los estimadores

$$\begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 & & & \\ \hat{\theta}_2 & .48 & & \\ \hat{\theta}_3 & -.31 & -.05 & 1 \\ \hat{c} & -.18 & -.01 & .01 & 1 \end{pmatrix}$$

lo cual muestra que tal modelo no es redundante (i.e., los estimadores nos están altamente correlacionados). Así mismo, la fig. 3.23 muestra que correspondiente a los residuales, puede considerarse como de ruido blanco.

Pronóstico

El modelo (3.8.3) que obtuvimos como adecuado fue

$$\hat{w}_t = (1 - \theta_1 \beta^4)(1 - \theta_1 \beta - \theta_2 \beta^2) a_t$$

por lo que al desarrollar para obtener la función de pronóstico obtenemos:

$$\begin{aligned} [(z_t - z_{t-4}) - \hat{c}] &= (1 - \theta_1 \beta - \theta_2 \beta^2) a_t - (\theta_1 \beta^4 + \theta_1 \theta_2 \beta^5 - \theta_2 \theta_1 \beta^4) a_t \\ \hat{c} &= z_{t-4} + \hat{c} - \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 a_{t-4} - \hat{\theta}_1 a_{t-1} - \hat{\theta}_2 a_{t-2} + \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 a_{t-5} + \\ &\quad + \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 a_{t-6} \quad (3.8.5) \end{aligned}$$

También, en esta ecuación de pronóstico, se observa cómo este modelo captura tanto la parte estacional como la tendencia del fenómeno en cuestión, ya que el primer término (z_{t-4}) inicia cada pronóstico en el mismo trimestre del año anterior. Después, el término constante estimado eleva el pronóstico 80.72 unidades cada período de tiempo para tomar en cuenta la tendencia creciente. Los términos adicionales consideran lo restante de los patrones estacionales y no-estacionales, incluyendo la interacción entre las dos, representado esto por los términos multiplicativos en dicha función.

Este ejemplo, como dijimos, lo seleccionamos intencionalmente por sus características ilustrativas, ya que Pankratz propone un modelo alternativo al obtenido anteriormente, utilizando un razonamiento distinto.

Así, ahora en la etapa de identificación, de entrada, se ignora el patrón estacional, empezando ésta a partir de la FAC y FACP de la fig. 3.15 donde se muestra que, la primera de ésta decae y los dos primeros picos de la FACP son significativos.

Sugiriéndonos esto que consideremos, de entrada, un AR(2). El cual al estimar nos da

$$(1 - 0.386\beta - 0.616\beta^2)\tilde{\epsilon}_t = \hat{a}_t$$

(2.93) (2.66)

(donde los valores entre paréntesis corresponden a los t asociados). Nótese aquí, que, como $\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 = 1.00$ este modelo no es estacionario (ver tabla 1). Requiriéndose así, tomar primeras diferencias a la serie original. Recordemos también que, al diferenciar tanto estacional como no-estacionalmente, obtuvimos las figuras 3.17 y 3.18 las cuales, a su vez, producen la fig. 3.24.

En esta última figura, se muestra que hay un pico en lag 4, seguido por un "corte" en los lags 8 y 12, sugiriéndonos pues un MA(1) (los valores decrecientes de la FACP en los lags estacionales lo confirman). Así también, los picos alternantes en los lags 1, 2 y 3 en la FAC muestral, y el pico en lag 1 en la FACP, sugieren un AR(1) con $\hat{\phi}_1 < 0$.

Así pues, de lo anterior obtenemos como modelo alternativo a

$$(1 - \phi_1\beta)(1 - \beta)(1 - \beta^4)\tilde{\epsilon}_t = (1 - \theta_1\beta^4)a_t \quad (6.3.6)$$

resultando al estimar que: $\hat{\phi}_1 = -0.344$ y $\hat{\theta}_1 = 0.960$, y la figura correspondiente, la cual según el autor podría considerarse aceptable (fig. 3.25).

Como conclusión de lo anterior Pankratz-dice que:

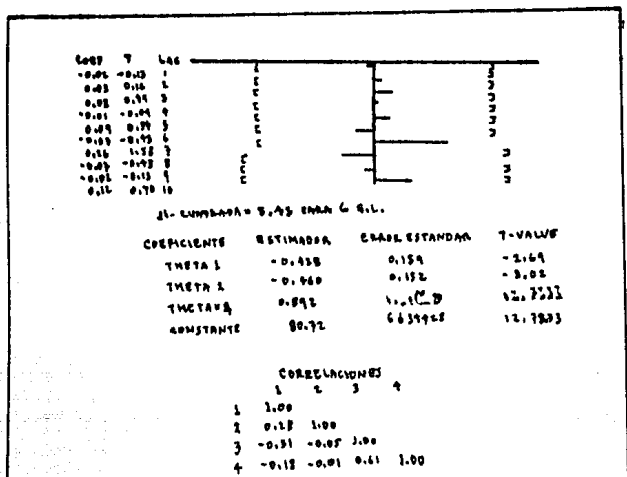


Fig 3-22. Resultados de la estimación y verificación para el modelo (3.13).

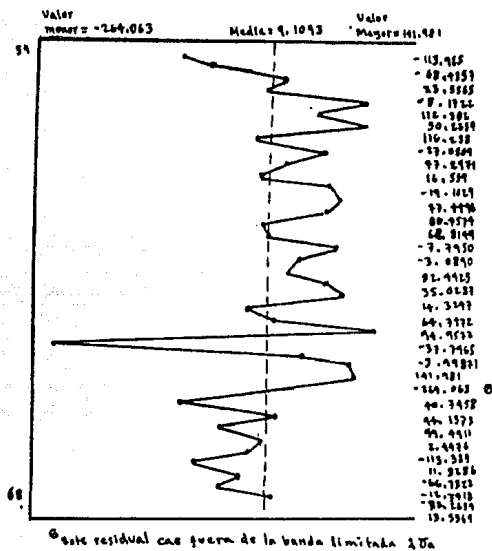


Fig. 3.24. Residuales del modelo (8.3.3)

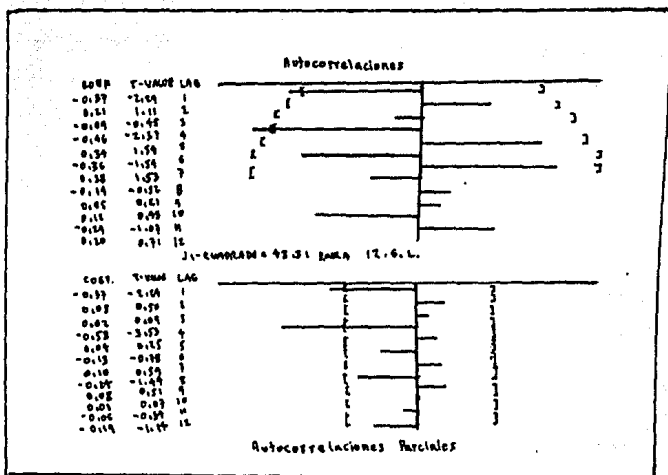


Fig. 9-25.- FAC y FACP estimadas para los datos de exportación después de diferenciar estacional y no-estacionalmente (Des y des).

En el modelo (3.8.3), se toma en cuenta la tendencia mostrada en los datos mediante la introducción de una tendencia determinista representada por el término constante $\hat{C} = 8.72$. Mientras que en el Modelo (8.3.6), se incluye tanto un operador de diferencia estacional, como no estacional, pero ningún término constante. Es decir, cualquier tendencia en el pronóstico derivada de esta última, será puramente estocástico.

Agrega que es improbable que datos en Economía (y en otras Ciencias Sociales) contengan una tendencia meramente determinista, cosa que no lo perturba tanto, ya que un modelo -dice- es sólo una imitación de la realidad (que nos describirá solamente el comportamiento de los datos disponibles), no siendo, pues, rigurosamente necesario tener que creer que el proceso fundamental que los generó, contenga una componente de tendencia determinista. Interpretando los resultados en el sentido de que, dicho componente en el modelo (3.8.3), representa un factor de crecimiento resultante de la inflación, o del crecimiento a largo plazo del comercio mundial, a medida que las economías se expanden.

CAPITULO 4.- EL ANALISIS DE INTERVENCION

4.1.- INTRODUCCION

En el capítulo anterior, mostramos la manera de construir un modelo para el estudio de un fenómeno, representado por una sucesión de observaciones, generadas por un proceso estocástico por una sucesión de observaciones, generadas por un proceso estocástico cuyo conjunto índice es tomado en relación al tiempo (y a la que llamamos serie de tiempo). Sus características fundamentales son: la de ser sólo una realización de tal proceso, y el hecho de que tales observaciones no provienen de variables aleatorias independientes (sino de variables aleatorias correlacionadas entre sí), determinándose así, finalmente, el mecanismo que la generó, mediante la representación de éste por un modelo ARIMA (desde la perspectiva de Box y Jenkins).

Estos modelos nos permitían hacer inferencia acerca del comportamiento futuro de la variable dependiente, dado su pasado histórico, en términos probabilísticos. Permittiéndonos, además identificar y estimar los componentes llamadas de no - estacionaridad homogénea como tendencia y estacionalidad, representados ya sea como polinomios adaptivos o como componentes meramentos deterministas (o semideterministas).

Es decir, podemos determinar con las técnicas de Box-Jenkins para análisis de series de tiempo, si hay o no, por ejemplo, un tendencia creciente o decreciente en la evolución de la cantidad total de Ozono, que lo que nos interesa en este trabajo. Pero lo

que no podemos hacer a partir de éstas, es identificar, en un momento dado, qué es lo que causa (en caso de serlo así) tal patrón de compartamiento en los datos.

Aquí es donde la técnica del Análisis de Intervención muestra su utilidad.

4.2.- LAS TECNICAS DE ANALISIS DE INTERVENCION

Al analizar una serie de tiempo, podemos detectar algún evento anormal o extraño, en el sentido de no poder ser explicado a partir del comportamiento histórico de ésta (podrían ser, por ejemplo, observaciones aberrantes). O, se puede observar también que, uno o más de los residuales (después de ajustar un modelo ARIMA) son mayores que lo esperado.

Así, si se sospecha que dicho(s) evento(s) puede (n) tener influencia en la estimación de los parámetros del modelo -y consecuentemente en sus resultados- y si los residuales mencionados en el párrafo anterior, surgen y pueden, a su vez, explicarse a partir de la ocurrencia de fenómenos ajenos (o exógenos) al comportamiento histórico de dicha serie, resultará necesario y conveniente, medir explícitamente tal influencia (consecuentemente, reducir tales residuales exagerados). Para tales casos podremos utilizar el análisis de Intervención.

Así también, por ejemplo: podemos querer determinar el efecto que pudiera tener una cierta campaña publicitaria en las ventas de

un producto, como lo hacen Wichern y Jones (1977): podríamos querer determinar asimismo, aproximadamente, la manera en que podría influir la asignación de un nuevo salario mínimo y/o la implantación de algún nuevo impuesto (el IVA, por ejemplo) sobre el Índice de precios al consumidor (ver Guerrero (1982)); o en nuestro contexto, desearíamos detectar la influencia que pudiera tener el uso de cada vez mayor del Cluorofluorometano de los aerosoles, en la evolución de la cantidad total de Ozono Estratosférico (dado que tarda en llegar este gas a tal región), o bien, saber si influyó (y si así fue .Qué tanto y cómo?). La erupción del volcán Chichonal en Chiapas en Marzo de 1982 en dicha evolución (en la Ciudad de México).

En los ejemplos anteriores, podemos notar -intuitivamente- que es un cambio en el nivel del fenómeno en estudio lo que atrae nuestra atención. Debido a que, en principio, si como sospechamos, tales cambios son producidos por factores externos (identificables), entonces la estimación de la influencia de éstos en dichos fenómenos coadyuvaría al conocimiento futuro del comportamiento futuro de los mismos. Es decir, podríamos responder o solucionar las cuestiones planteadas en el párrafo anterior.

Para lo anterior, dicho sea de paso, existen en la Literatura Estadística algunas técnicas disponibles, siendo una de las más utilizadas las pruebas de t de Student para estimar y probar cambios en el nivel.

Desafortunadamente, tal técnica y otras, requieren para su

empleo apropiado, la satisfacción de condiciones y suposiciones que en este contexto (las series de tiempo) no se cumplen.

Así por ejemplo, la prueba t mencionada, para la comparación de dos medios requiere que:

(i) Las observaciones antes y después del evento de interés varíen alrededor de medias μ_1 y μ_2 (respectivamente), con errores normal e independientemente distribuidos y varianza constante; o

(ii) Para que esta prueba sea aproximadamente válida, los datos deben ser extraídos mediante un proceso no correlacionado (i.e., aleatoriamente).

Por tal motivo, una alternativa válida para la solución de tal problemática, es la ofrecida por las llamadas técnicas de Análisis de Intervención.

Las técnicas de Análisis de Intervención que presentaremos aquí, está basada en el artículo publicado por Box y Tiao (1975), el cual es pionero de esta metodología. En ese, se define a una intervención como: La ocurrencia de un evento exógeno al comportamiento histórico de la variable en estudio (que pueden influir a éste en un momento dado). Así, en los ejemplos mencionados al principio de esta sección, las intervenciones serían: la campaña publicitaria, el establecimiento de una nueva política fiscal; el clorofluorometano y la erupción del volcán

Chichonal.

Detectar y medir explícitamente la influencia de tales efectos externos en una serie de tiempo no es fácil, ya que estos pueden influir de muchas maneras diferentes. Surge pues aquí, la cuestión de determinar cuáles tipos de efectos podemos estudiar y modelos mediante el análisis de Intervención.

En términos generales, si consideramos que una serie de tiempo estacionaria $\{w_t\}$, está constituida por dos partes: una determinista, que refleja, esencialmente, el nivel de la serie $\{M_t\}$ y otra estocástica, que da origen a las fluctuaciones alrededor de dicho nivel, entonces podríamos considerar tres tipos de efectos (Guerrero (1981)):

1) Aquellos que se manifiestan como una elevación (o caída) momentánea de nivel, y que desaparecen posteriormente sin afectar el comportamiento de la serie, después de que estos ocurrieron: (Ver fig. 3.14).

2) Efectos que ejercen una influencia sostenida (no "momentánea" como en el caso anterior) sobre el nivel de la serie, pero que dejan intacta la estructura básica de su parte estocástica (i.e., su estructura de correlación) (Ver fig. 3.15).

3) Aquellos que, ya sea que influyan o no en la parte determinista de la serie, alteran su estructura de correlación.

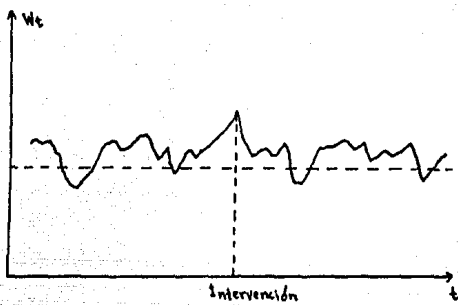


Fig. 3.14

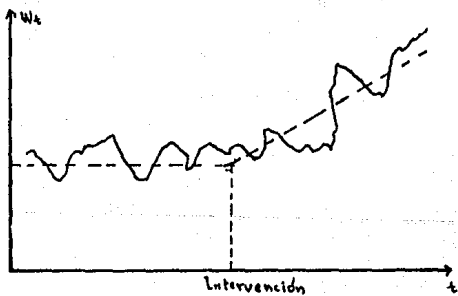


Fig. 3.15

Así los efectos que pueden ser estudiados mediante el análisis de Intervención son los correspondientes a los casos (1) y (2).

A partir de lo anterior, podemos intuir pues, que el análisis de Intervención bien podría ser una extensión del análisis de series de tiempo a partir de la implementación de modelos ARIMA vistos en el capítulo anterior.

En efecto, una serie de tiempo $\{z_t\}$, que contenga los efectos de una intervención, se puede expresar como

$$z_t = \varepsilon_{1,t} + N_t \quad (4.2.1)$$

donde N_t es un proceso ARIMA, estacionario e invertible, que representa la parte estocástica del fenómeno, que está dada por

$$\phi(\theta) \nabla^d N_t = \theta_0 + \theta(\theta) a_t \quad (4.2.2)$$

y con N_t medida como desviaciones respecto a su media si $\varepsilon_{1,t}$ es una función que representará los efectos de la Intervención.

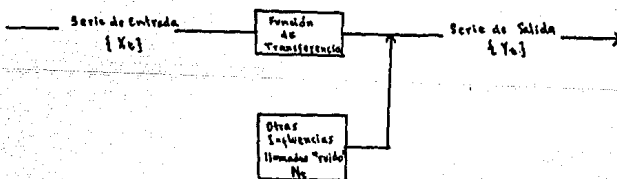
Así pues, $\varepsilon_{1,t}$ en (4.2.1) deberá permitirnos representar los cambios ocurridos en la serie, tanto en el momento en que ocurrió la intervención, como aquellos que, posteriormente, puedan ser atribuidos a ella. Es decir, $\varepsilon_{1,t}$ será un modelo dinámico de la Intervención (cuya función dinámica de intervención tendremos que identificar).

En este punto, para ilustrar cómo elegir tal función dinámica de intervención puede ser útil introducir un concepto considerado como análogo, y que pertenece a la teoría del análisis de Series de Tiempo multivariado, y que es el de función de transferencia.

Esto es, si consideramos, por ejemplo, una serie de tiempo $\{Y_t\}$ (que llamaremos de salida, la que observamos), la cual presumimos está influida (o precedida) por otra serie de tiempo $\{X_t\}$ (llamada: de entrada), más otros elementos colectivamente agrupados (de entrada también) y que podemos llamar ruido (y representado por N_t), entonces tendremos un sistema dinámico.

Más específicamente, diremos que la serie $\{X_t\}$ ejerce una influencia en la serie de salida $\{Y_t\}$, vía una función llamada de transferencia, la cual distribuirá el impacto de X_t sobre varios periodos de tiempo futuros (de la $\{Y_t\}$). Nótese que esta es otra manera de visualizar a una serie de tiempo univariada.

Gráficamente, lo anterior se puede ilustrar de la siguiente manera:



El objetivo pues de la modelación de la función de transferencia, según esta perspectiva, es determinar un modelo parsimonioso que relacione $\{Y_t\}$ a $\{X_t\}$ y N_t .

Consideremos ahora un ejemplo sencillo e ilustrativo también, para el entendimiento del concepto de función de transferencia, tomado del texto de Makridakis (1983):

Supongamos que en una oficina postal, se recibe un cierto lote de cartas que hay que entregar. Estas se recibirán en cada uno de los 20 días siguientes, pero debido a problemas tanto de personal como de tipo "técnico", éstas no podrán ser entregadas el mismo día en que se reciban, sino en los subsiguientes. Así, sea X_t el número de cartas que se reciben en el día t y Y_t el correspondiente a las entregadas en algún día t . La tabla 4-1 ilustra la manera en que esto sucedió.

Día	Pesos de la función de transferencia $V_{120}, V_{119}, V_{118}, \dots, V_{12}, V_{11}, V_{10}, \dots, V_1$																				Cartas entregadas Y_t	
	Cartas recibidas X_t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19		20
1	80																					0
2	30	5																				5
3	40	15	3																			18
4	60	10	15	9																		34
5	50	5	6	45	0																	62
6	70	5	3	18	30	5																61
7	30		3	9	12	15	7															56
8	40			7	6	10	35	8														63
9	80				6	5	14	15	4													44
10	90					5	7	3	6	10	9											46
11	80						7	3	8	40	7											65
12	10							3	4	16	35	8										66
13	50								4	8	14	40	1									67
14	30									8	7	16	5	3								31
15	11										7	8	2	15	3							35
16	30											8	1	6	15	7						37
17	80												1	3	6	35	3					48
18	40													3	3	14	15	6				50
19	30														7	3	12	20	4			42
20	30																		1			45

Tabla 4.1

La cuestión esencial aquí, es determinar la relación entre X_t y Y_t . Es decir, entre número de cartas recibidas y entregadas. Podemos comprobar que, si utilizáramos una gráfica Y_t contra X_t , nos llevaría a considerar que tal cuestión no podrá ser explicada mediante un análisis de regresión simple (ver fig. 4.2) por la sencilla razón de que los valores de X_t están dinámicamente distribuidos sobre futuros periodos de tiempo. Dicha distribución puede ser descrita solamente por una función de transferencia.

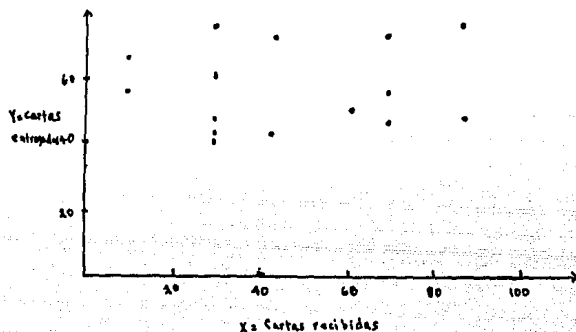


Fig. 4.2

Así por ejemplo, las 50 cartas que llegaron en el día 1 fueron entregadas como sigue:

- 0 (%) en el mismo día (día 1)
- 5 (10%) en el día 2
- 25 (50%) en el día 3
- 10 (20%) en el día 4
- 5 (10%) en el día 5
- 5 (10%) en el día 6

es decir, según los datos, el número de cartas entregadas se distribuyó en el tiempo de acuerdo a los mismos porcentajes (llamados V_0, V_1, V_2, V_3, V_4 y V_5 , respectivamente) para todos el proceso. A los valores V_0, V_1, \dots, V_5 Makridakis los denomina: pesos de la función de transferencia. Así, considera que dicha función se puede escribir como:

$$\begin{aligned} Y_t &= V_0 X_t + V_1 X_{t-1} + \dots + V_5 X_{t-5} \\ &= (V_0 + V_1 B + \dots + V_5 B^5) X_t \\ &= V(B) X_t \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Nótese aquí, que, la suma de las V 'es igual a uno. Pero esto no tiene porqué ser satisfecho siempre. Es decir, estos -los pesos- pueden ser positivos o negativos y sumar más, o menos que uno. Cuando cualquiera de éstos dos últimos casos ocurre, suele llamarse a tal suma (en Ingeniería principalmente) ganancia.

Es decir, tenemos un modelo de función de transferencia bivariado, el cual se puede escribir de las dos maneras siguientes:

Como $Y_t = V(B)X_t + N_t$

donde Y_t = la serie resultante

X_t = la serie de entrada

N_t = los efectos combinados de todos los otros factores que

influyen a X_t (llamado ruido); y

$V(B) = V_0 + V_1 B + \dots + V_k B^k$, donde k , es el orden de la función de transferencia.

Aquí k puede ser muy grande en algunos casos, por lo que puede escribirse más adecuadamente como

$$Y_t = \frac{W(B)}{\delta(B)} X_{t-b} + \eta_t$$

$$\text{o } Y_t = \frac{W(B)}{\delta(B)} X_{t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \quad (4.2.4)$$

donde

$$W(B) = W_0 - W_1 B - W_2 B^2 - \dots - W_r B^r$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

$$\delta(B) = 1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r$$

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

a_t = un valor proveniente de un proceso de ruido blanco.

r, s, p, q y b constantes; X_t y Y_t definidas como antes.

Nótese que $\theta(B)$ y $\phi(B)$ se refieren a los operadores de MA y AR respectivamente, para el componente estocástico η_t . Las otras dos expresiones $W(B)$ y $\delta(B)$ reemplazan $V(B)$ en (4.2.3.). Pero, ¿Por qué se puede considerar esta propuesta como más parsimoniosa?— cuestionan Makridakis y Wheelwright.

La razón es que los valores de r, s, p y q serán usualmente menores que k -argumentan. Es decir, escritos como $V(B) = \frac{W(B)}{\delta(B)}$.

Por ejemplo, si suponemos que $W(B) = (1.2 - 0.5B)$ y $\delta(B) = (1 - 0.8B)$, entonces, el lado derecho de la ecuación de $V(B) = \frac{W(B)}{\delta(B)}$ se podrá expandir de la siguiente manera:

$$\frac{W(B)}{\delta(B)} = \frac{1.2 - 0.5B}{1 - 0.8B}$$

$$= (1.2 - 0.5B)(1 - 0.8B)^{-1}$$

$$= (1.2 - 0.5B)(1 + 0.8B + 0.8^2 B^2 + 0.8^3 B^3 + \dots)$$

$$= 1.2 + 0.46B + 0.368B^2 + 0.2944B^3 + 0.23552B^4 + \dots$$

es decir, la función $V(B)$ correspondiente a este cociente, tendrá un número infinito de términos (y por tanto, de pesos v). Teniendo sólo pues, con la notación sugerida que $r=1$ (i.e., el orden de la función S), $s=1$ (el orden de W), mientras que K es muy grande para el otro caso.

De lo anterior observamos que, tenemos que determinar los ordenes (r,s,b) y (p,q) . Donde además, b en la ecuación (4.2.4), es el subíndice de X que aparece como $t-b$, y que indica que hay un retraso de b períodos antes de que X empiece a influir en Y (así, por ejemplo, según esta notación, X_t influye a Y_{t+b} primero, o, X_{t-b} influye a Y_t primero).

En otras palabras, el valor de s indica durante qué tanto tiempo la serie $\{Y_t\}$ continúa siendo influida por nuevos valores de la serie de entrada X_t (i.e., Y_t influida por $(X_{t-b}, X_{t-b-1}, \dots, X_{t-b-s})$, mientras que r indica que Y_t está relacionada a valores de su propio pasado como sigue: Y_t influenciada por $(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-r})$.

Así pues, ya encontrados (o identificados) y estimados tales valores, se puede determinar lo que estos autores llaman: la versión de pronóstico. Esta surge de multiplicar (4.2.4) por el producto de $S(B)$ y $\phi(B)$ para obtener

$$S(B)\phi(B)Y_t = \phi(B)N(B)X_{t-b} + S(B)\theta(B)a_t.$$

Así por ejemplo, si tenemos que

$$Y_t = \frac{(W_0 - W_1 B)}{(1 - \beta_1 B)} X_{t-b} + \frac{(1 - \theta_1 B)}{(1 - \phi_1 B)} a_t$$

entonces

$$\begin{aligned} (1 - \delta_1 \theta)(1 - \phi_1 \theta) \gamma_t &= (1 - \phi_1 \theta)(W_0 - W_1 \theta) \lambda_{t-b} + (1 - \delta_1 \theta)(1 - \theta_1 \theta) a_t \\ &= (\delta_1 + \phi_1) \gamma_{t-1} - (\delta_1 \phi_1) \gamma_{t-2} + W_0 \lambda_{t-b} - (W_0 \phi_1 + W_1) \cdot \\ &\quad \cdot \lambda_{t-b-1} + (\phi_1 W_1) \lambda_{t-b-2} + a_t - (\delta_1 + \theta_1) a_{t-1} - (\delta_1 \theta_1) a_{t-2}. \end{aligned}$$

a partir de la cual podemos observar que, conociendo los valores pasados de y , x y a , se pueden utilizar esta ecuación para determinar valores futuros de γ_t .

Análogamente, mostraremos ahora, que el análisis de intervención tendrá como objetivo: identificar un modelo similar al de un modelo de función de transferencia.

Regresemos pues a la ecuación (4.2.1). Es decir a que $u_t = \epsilon_{1,t} + N_t$. En dicha expresión, y en base a la digresión anterior, intuimos que la función $\epsilon_{1,t}$ deberá expresarse como una ecuación en diferencia como en aquel caso (y que además es una buena manera de especificar modelo dinámicos). Para tal propósito, consideremos primero a la función

$$p_{1,t} = \begin{cases} 1 & \text{si } t=I \\ 0 & \text{si } t \neq I \end{cases} \quad (4.2.5)$$

que es la llamada función de pulso, y que nos servirá para indicar el momento en que ocurrió la intervención (I es tal momento), y que, visto de otra manera, será como una especie de serie de tiempo de variables dicotómicas, con valor 1 y $t=I$ y 0 en otro momento.

Del párrafo anterior, se puede seguir que $E_{1,t}$ será de la forma

$$(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r) \varepsilon_{1,t} = (W_0 - W_1 B - W_2 B^2 - \dots - W_s B^s) \rho_{1,t} \quad (4.2.6)$$

donde además, $\varepsilon_{1,t} = 0$ para $t < 1$ (es decir, no se pueden atribuir efectos a la intervención antes de que ella ocurra).

Ahora, es razonable suponer que el efecto de la intervención tenderá a ser menor, a medida que el tiempo pasa. Significando esto -implícitamente- el establecimiento de un cierto supuesto de estabilidad (de dicho modelo dinámico) que refleje este hecho (como se hizo en los modelos ARIMA del capítulo pasado), sugiriéndose así, la existencia de un cierto nivel de equilibrio.

En general, para que un modelo de la forma (4.2.6) sea estable, se requiere que las raíces características de la ecuación

$$1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r = 0 \quad (4.2.7)$$

se encuentren fuera del círculo unitario.

Así, más generalmente, si se consideran raíces unitarias para el polinomio de retraso anterior, que opera sobre $\varepsilon_{1,t}$, obtendremos que

$$\delta(\theta) \nabla^b \varepsilon_{1,t} = W(\theta) \rho_{1,t} \quad (4.2.8)$$

el cual llamaremos: Modelo dinámico General de Intervención.

Quedando finalmente que

$$z_t = \frac{W(\theta)}{\delta(\theta) \nabla^b} \rho_{1,t} + \frac{\theta_0 + \theta(\theta) a_t}{\phi(\theta) \nabla^d} \quad (4.2.9)$$

como nuestro modelo final.

La manera en que se estiman los parámetros involucrados en esta última expresión será mencionada más adelante, sólo mencionaremos aquí que se basa en la teoría de verosimilitud, similarmente a la desarrollada en la sección (3.5.2) del capítulo anterior. Por lo cual no entraremos en mayor detalle.

A manera de ilustración de los conceptos vertidos anteriormente, consideremos, por ejemplo, que $r=s=0$ en (4.2.6). Entonces obtendremos que $E_{1,t} = W_0 f_{1,t}$. Así, si tomamos el límite de esta última función cuando t tiende a infinito, tendremos que el nivel de equilibrio en (4.2.8) será cero; mientras que si $r=s=1$, tendremos que (4.2.6) será:

$$E_{1,t} = \delta_1 E_{1,t-1} + W_0 f_{1,t} - W_1 f_{1,t-1}$$

y el nivel de equilibrio será, a su vez:

$$E_{1,t}^* = \frac{W_0 - W_1 - W_2 - \dots - W_r}{1 - \delta_1 - \delta_2 - \dots - \delta_r}$$

A esta última cantidad, como dijimos, Box y Tiao la denominan "ganancia" o, cambio eventual atribuible a la intervención (nótese la analogía nominativa y conceptual de ésta, con el concepto introducido en la parte dedicada a la función de transferencia en unas páginas anteriores).

Ahora, en este punto, notamos también que el problema se concentra fundamentalmente en identificar la función dinámica de Intervención, para lo cual, se han proporcionado en diversas publicaciones como Guerrero (1983), gráficas que pueden ser útiles

para ayudar a esto (es decir, donde se muestran algunas formas típicas de cómo pueden ser los efectos de una intervención sobre una serie de tiempo).

Por otro lado, Box y Tiao (1975) establecen que, de manera general, la metodología del análisis de Intervención es la siguiente:

(i) Determinar el momento en el que algún mecanismo pudo haber influido, de manera exógena, sobre el comportamiento de la variable de interés.

(ii) Construir un modelo ARIMA, que represente a la serie en estudio, considerando sólo desde el inicio de ésta, hasta la observación inmediata anterior a la ocurrencia de la intervención;

(iii) Postular el modelo dinámico que represente adecuadamente el efecto de la intervención; y

(iv) Estimar el modelo completo para todo el período muestral de observación (i.e, estimar simultáneamente, tanto los parámetros que aparezcan en la función de intervención, como aquellos correspondientes a la parte estocástica, determinados en el paso (ii)).

De lo anterior, se desprende que, si los residuales (como en el caso de los modelos ARIMA), no muestran algún patrón de correlación a la hora de verificar el modelo de Intervención

obtenido, indicará esto que el modelo es adecuado (es decir, si la FAC de los residuales proviene de un proceso de ruido blanco).

Cabe mencionar aquí, que en algunos casos la intervención puede ser lo que los autores antes mencionados llaman recursiva (o más bien, tener efectos recursivos). En otras palabras, puede haber más de una intervención en el tiempo sobre la serie de tiempo en cuestión. Indicando esto que, la intervención tiene varios componentes estructurales (uno por cada intervención). Un ejemplo de esto lo da Guerrero (1983). Al considerar el análisis de la serie de tiempo referente al índice de precios al consumidor, donde, debido a nuestra legislación laboral, se llevan a cabo varios aumentos salariales en nuestro país a lo largo de un año, cada uno de los cuales afecta separada y diferentemente a tal serie, teniéndose que considerar -consecuentemente- a cada uno de ellos (los aumentos salariales) como una intervención, y obligando asimismo a considerar varias funciones dinámicas de intervención simultáneamente.

Otros aspectos importantes pueden surgir en la práctica al aplicar el análisis de Intervención. Teniéndose que modificar, de alguna manera, la metodología descrita anteriormente, no siendo esto sino sólo variantes en la interpretación de ésta. Aunque claro, tampoco significa que no haya una mejor manera de atacar los problemas que otras.

Esto es, de la metodología descrita antes, Box y Tiao

sugieren que el modelo propuesto, se base en el conocimiento teórico que se tenga tanto de la serie de estudio (es decir, del fenómeno) como del factor externo que tuvo lugar y la afecto (i.e., la intervención), cosa que no siempre es posible.

Para problemas como estos, Guerrero (1983) también, sugiere algunas alternativas en dicha estrategia. Una de ellas es que, si se considera que, después de determinar el momento en que comienza a actuar la intervención el efecto de ésta no afecta a la estructura de autocorrelación de la serie en cuestión (cosa que sucedería si el efecto fuera posible representarlo mediante la función $\epsilon_{t,\tau} = W(\epsilon_{t,\tau} + \sqrt{\epsilon_{t,\tau} \cdot W(\epsilon_{t,\tau})}$) entonces se podría construir un modelo para la parte estocástica durante el período de observación, e incluir, posteriormente, la función dinámica para construir el modelo completo.

Otra manera de aplicar el análisis de Intervención es: construir un modelo para la serie de tiempo en estudio e investigar si los residuales obtenidos a partir de ese modelo, tienen un valor absoluto muy grande (respecto a la desviación estándar residual), averiguándose después, el porqué de tal desgracia, justificándose de esa manera la postulación de un modelo dinámico de intervención que tenga en cuenta los efectos causados por dicho fenómeno, si se encuentra que la explicación de uno o más de los residuales "significativamente grandes" coinciden con la ocurrencia de tal evento anormal, respecto al comportamiento histórico de la serie. Reduciéndose así, a partir de la inclusión de esta función, la magnitud de tales residuales

"sospechosos", para después de esto, estimar el modelo completo.

Cabe mencionar, que estas dos variantes de la metodología descrita, pueden ser vistas -en cierto modo- como excluyentes. En el sentido de que, la primera se puede considerar como "a priori" (por llamarla de algún modo), mientras que la segunda, como "a posteriori". Lo propio, como señala el mismo Guerrero, es considerarlas más bien como complementarias (aunque dicho autor, prefiere la manera "a priori", por considerar que con la otra forma, el modelo sin función de intervención podría ocultar la presencia de efectos causados por intervenciones.

Otro aspecto de suma utilidad, surge de la cuestión de que no siempre podemos estar seguros si en la serie de tiempo considerada, hubo o no una influencia (externa) considerable, debido a una cierta intervención.

Para tal propósito Box y Tiao (1976) sugieren un estadístico de prueba que nos permitiría detectar cambios en el modelo, atribuibles a una tal intervención. El razonamiento que siguen -a grandes rasgos- se basa en el concepto de mínimo error de pronóstico medio cuadrático (similar a lo que vimos en el capítulo anterior), el cual está dado por

$$\begin{aligned} e_n &= z_n - \hat{z}(n) \\ &= \sum_{j=1}^n \psi_{n-j} a_j \end{aligned}$$

donde $\psi_0 = 1$. Señalan de ésta que, la transformación de choques

aleatorios de errores de pronóstico está dada, a su vez, por

$\underline{e} = \Psi \underline{a}$ donde Ψ es una matriz diagonal inferior de dimensión $H \times H$ y \underline{a} un vector $m \times 1$. Así, inversamente, se tiene que $\underline{a} = \Pi \underline{e}$, donde $\Pi = \Psi^{-1}$.

De lo anterior, deducen que la matriz de covarianza del vector de errores de pronóstico mínimos en error cuadrático, \underline{e} , es $V = E(\underline{e}'\underline{e}) = \Psi \Psi' \sigma_a^2$. Siguiendo de este que, si el modelo original es apropiado durante los períodos $h=1, \dots, H$ entonces, $Q = \underline{e}'\underline{e}$ se distribuirá como una ji-cuadrada con H grados de libertad, y donde $V^{-1} = \Pi \Pi' / \sigma_a^2$.

Si, de otra manera, el modelo cambia de alguna forma (de nivel, por ejemplo) es de esperarse que Q aumente.

Por otro lado, para calcular Q a partir de e_h sugieren, asimismo, el uso de la identidad

$$Q = \underline{e}' V^{-1} \underline{e} = \underline{e}' \Pi' \Pi \underline{e} / \sigma_a^2 = \underline{a}' \underline{a} / \sigma_a^2 = \sigma^{-2} \sum_{h=1}^H a_h^2 \quad (4.2.10)$$

Esto es, Q será la suma de cuadrados de los errores de pronóstico estandarizada a_1, a_2, \dots, a_H .

Más claramente, la expresión anterior se podría escribir como

$$Q = \sum_{h=1}^H e_{t-t+h}^2(1) / \hat{\sigma}_a^2 \quad (4.2.11)$$

donde $\hat{\sigma}_a^2$ es la varianza residual del modelo construido para el período previo a la intervención ocurrido en el momento $t=I$, y $e_{t-t+h}(1)$, $e_{t-t+h}(1), \dots, e_{t-t+h}(1)$ son los errores de pronóstico un período hacia adelante. Recapitulando: si el modelo construido no es adecuado, entonces Q tendrá un valor muy superior (o significativo) al compararse con valores de tablas de una distribución ji-cuadrada con H grados de libertad; significando esto también, que dicho modelo no se puede considerar como buena representación de la serie hasta la observación $t=I-H-1$ y deduciéndose así que: la

intervención ocurrida sí afecto, en cierto modo (que nos interesa identificar y estimar su influencia) a la serie. Necesitándose, pues, la postulación de un modelo dinámico de Intervención, como los explicados al principio de esta sección, que tome en cuenta estos efectos.

4.3 EJEMPLO: ANALISIS ESTADISTICO DE LOS DATOS DE SMOG FOTOQUIMICO EN LOS ANGELES (OXIDANTES).

Cabe mencionar, para empezar, que este artículo es el resultado de un proyecto de Investigación realizado por G.E.P. Box, G.C. Tiao y W. J Hammong (1975), con datos proporcionados por la institución llamada: Los Angeles County Air Pollution Control District. Los cuales están cosntituídos por mediciones sobre contaminantes llamados primarios, tales como el oxido nítrico los, hidrocarbonos, el monóxido de carbono y el dióxido de sulfuro. Así como de los denominados Secundarios que comprenden al Ozono y el dióxido de Sulfuro (los cuales se registraron cada hora en diferentes estaciones del conducto de Los Angeles durante 17 años).

El objeto eventual de este trabajo -dicen los autores- es utilizar la información dada por los datos, para construir modelos matemáticos que representarán adecuadamente los movimientos espaciales y cronológicos de los contaminantes en cuestión. Es decir, modelos a partir de los cuales, sea posible pronosticar tendencias actuales y futuras de dichos contaminantes, y señalar (o valorar) la efectividad de las medidas de control que sobre este particular se implanten.

Este artículo trata, de hecho, sólo con un aspecto particular del problema, a saber: el movimiento del smog fotoquímico en Los Angeles. Para este efecto, los autores dividieron el trabajo en dos partes: en la primera, se trata de introducir la problemática

implícita en la cuestión que nos ocupa, usando las mediciones de Ozono (troposférico en este caso, no estratosférico como el que se ocupa esta tesis) como indicador básico de la misma. Mientras que en la segunda, se discuten una serie de problemas estadísticos que surgen en el estudio de tales datos (Utilizándose el Análisis de Intervención).

Así, en la mencionada primera parte, se describe -a grandes rasgos- el problema del smog fotoquímico en Los Angeles. Mostrándose, por ejemplo, el movimiento diario que sufre la cantidad de Ozono, los efectos estacionales que influyen en la misma, las implicaciones en dichas mediciones por efectos causados por la posición geográfica en la que fueron medidos (u observados). No abundaremos en esto.

Lo importante para nosotros en esta sección es, en realidad, la segunda parte de dicho artículo. Esta parte se motiva por dos cuestiones planteadas por la Institución mencionada al principio, a saber:

1) Un cambio de un cierto tipo sobre un cierto dato, ¿producirá alguna diferencia?

o más específicamente:

2)¿Producirá el tipo de diferencia que se esperaría?

En otras palabras, lo que querían determinar es, si los eventos específicos (ocurridos en diferentes fechas) tuvieron una repercusión significativa en el nivel general de la cantidad de Ozono troposférico en los Angeles. Estos eventos son: la apertura

de una vía de comunicación que llega al centro de la Ciudad, llamada Golden State Freeway, en 1960; y la introducción de un reglamento, por parte de las autoridades, llamada Regla 63. En la cual se normaba la reducción de la proporción de hidrocarburos reactivos en la gasolina a la venta en Los Angeles.

Para esto, invalidan el uso de la prueba t, por no satisfacerse las condiciones que se requieren para la utilización adecuada de ésta, y que mencionamos en el capítulo anterior. Ya que los datos de Ozono presentan observaciones autocorrelacionadas tanto sucesiva como estacionalmente.

Así, basándose en las herramientas mencionadas para analizar series de Tiempo, sugieren el modelo para la parte correspondiente al ruido N_t de la expresión (4.2.1) de la forma:

$$(1 - \theta^{12}) N_t = (1 - \theta_1 \theta) (1 - \theta_2 \theta^{12}) a_t \quad (4.3.1)$$

Es decir, además de la posibilidad de la existencia de una tendencia de tipo determinista, que deberá ser tomada en cuenta por de la misma expresión, es preciso mencionar que (4.3.1), es la que describe las relaciones estocásticas dependientes en el tiempo, para las 7 estaciones de medición de las observaciones de Ozono. En particular, los factores $1 - \theta^{12}$ y $1 - \theta_2 \theta^{12}$ conjuntamente, toman en cuenta el patrón estacional presentado en los datos. La naturaleza de estos factores se pueden entender como sigue: supongamos que fuera cero en la expresión (4.3.1), entonces el pronóstico de, por ejemplo, el próximo Enero, sería un promedio ponderado de los datos de todos los Eneiros pasados, con pesos $(1 - \theta_1)$, $\theta_1 (1 - \theta_2)$, $\theta_1^2 (1 - \theta_2)$, $\theta_1^3 (1 - \theta_2)$, . . .

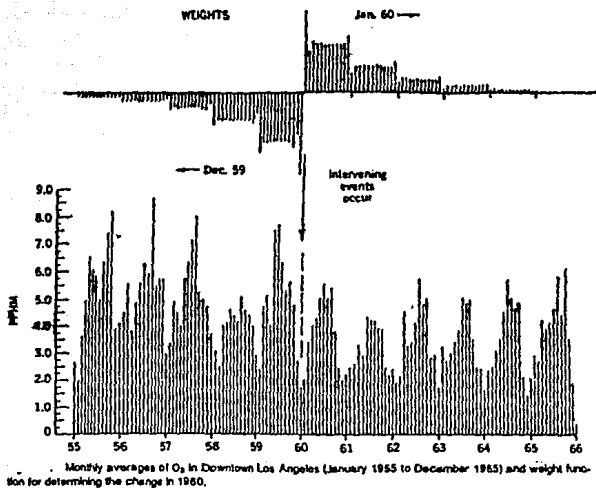


Figure: 4.3.3.

los cuales decrecen exponencialmente para el pasado remoto. El factor $\rho_{1,t}$ a su vez, representa la relación no-estacional entre las observaciones correspondientes a los meses sucesivos.

Por otro lado, para la parte $\epsilon_{1,t}$ del modelo, se consideraron como intervenciones:

I1: La apertura de la rúa Golden State Freeway y la implantación de la Regla 63 en 1960 (que habíamos mencionado).

I2: Las regulaciones progresivas desde 1966, con respecto a cambios en los diseños de los motores de los carros nuevos, de las cuales se esperaba reducir la producción de

Así pues, con respecto a $\epsilon_{1,t}$, se puede esperar que se produzca un cambio de nivel de O_3 a principios de los 60. Mientras que el efecto de $\epsilon_{1,t}$, se podría representar más adecuadamente conociendo, por ejemplo, la proporción supuestamente creciente de vehículos con tales características de la población total de los mismos. Así también, señalan que, como tales cambios provocan una reducción lenta de reacciones que producen O_3 , y, debido a la inversión de la temperatura atmosférica diferencial (dicen) verano-invierno y la diferencia en la intensidad de la luz Solar, el efecto neto sería diferente en Invierno, cuando la contaminación oxidante es baja, con respecto a la correspondiente de verano (la cual obviamente es más alta).

Así, sugieren como modelo tentativo de Intervención, para representar al fenómeno en estudio (para los datos de Enero de 1955 a Diciembre de 1972):

$$Y_t = W_{01} \varepsilon_{t1} + W_{02} \frac{\varepsilon_{t2}}{1-\beta^{12}} + W_{03} \frac{\varepsilon_{t3}}{1-\beta^{12}} + \frac{(1-\theta_1)(1-\theta_2\beta^{12})}{1-\beta^{12}} a_t \quad (4,3,2)$$

donde

$$\varepsilon_{t1} \left\{ \begin{array}{l} 0, t \neq \text{Enero 1960} \\ 1, t = \text{Enero de 1960} \end{array} \right.$$

$$\varepsilon_{t2} \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ "verano", meses de junio a octubre, empezando desde 1966} \\ 0, \text{ de otra forma} \end{array} \right.$$

$$\varepsilon_{t3} \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ "invierno", meses de Noviembre a Mayo, empezando de 1966} \\ 0, \text{ de otra forma.} \end{array} \right.$$

Este modelo pues, permite la asignación de un cambio en el nivel del O_3 . Al inicio de 1960 de tamaño W_{01} asociado con I_1 , y para los incrementos anuales en el mismo nivel al inicio de 1966, de W_{02} y W_{03} unidades, respectivamente. Los resultados obtenidos (i.e., los estimadores máximo-verosímiles de los parámetros involucrados en el modelo) fueron:

Parámetro	MLE (Estimador max-veros.)	Desv. Estandar (del estimador)
W_{01}	- 1.09	0.13
W_{02}	- 0.25	0.07
W_{03}	- 0.07	0.06
θ_1	- 0.24	0.03
θ_2	0.55	0.04

Así pues, a partir de estos resultados, podemos decir que hay evidencia de que:

1) Asociada con I_1 , hay un cambio (reducción) de aproximadamente $\hat{W}_{01} = -1.09$ unidades en el nivel de O_3 (es decir, de -1.09 partes por millón).

Asimismo los parámetros W_{02} y W_{03} representan, en la presión (4.3.2), respectivamente, para los meses de verano e invierno, los cambios progresivos en los niveles de observaciones de un año al siguiente empezando desde 1966 y hacen las veces de las pendientes de las líneas que representarían las dos tendencias deterministas correspondientes a estas dos estaciones del año.

De lo anterior, podemos decir también que:

2) El estimador de W_{02} proporciona evidencias de que ha habido un progreso constante para las estaciones de verano, tal reducción en la cantidad de Ozono es del orden de los 0.25 partes por millón. Mientras que, por otro lado, el progreso (si lo hay) para el invierno, es muy leve. En particular, el valor estimado de W_{03} podría ser igual a cero (significando esto un progreso nulo), ya que está dentro del rango de $-.07 \pm .12$ que es el intervalo de confianza del estimador). Nótese que este último resultado no contradice a los datos.

En cuanto al tipo de respuestas a las funciones, podemos mencionar:

Cuadro 4.1

Casos Particulares del Modelo Dinámico General

ORDENES DE LOS OPERADORES (r, b, s)	MODELO DINAMICO (IMPLICITO)	MODELO EXPLICITO
(0,0,1)	$c_{I,t} = (\omega_0 - \omega_1 B) P_{I,t}$	$c_{I,t} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq I, I+1 \\ \omega_0 & \text{si } t = I \\ -\omega_1 & \text{si } t = I+1 \end{cases}$
(0,1,0)	$\nabla c_{I,t} = \omega P_{I,t}$	$c_{I,t} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < I \\ \omega & \text{si } t \geq I \end{cases}$
(1,0,0)	$(1-\delta B)c_{I,t} = \omega P_{I,t}$	$c_{I,t} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < I \\ \delta^t - I \omega & \text{si } t \geq I \end{cases}$
(0,1,1)	$\nabla c_{I,t} = (\omega_0 - \omega_1 B) P_{I,t}$	$c_{I,t} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < I \\ \omega_0 & \text{si } t = I \\ \omega_0 - \omega_1 & \text{si } t > I \end{cases}$
(1,0,1)	$(1-\delta B)c_{I,t} = (\omega_0 - \omega_1 B) P_{I,t}$	$c_{I,t} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < I \\ \delta^{t-I} \omega_0 - \delta^{t-I-1} \omega_1 & \text{si } t \geq I \end{cases}$
(1,1,0)	$(1-\delta B)\nabla c_{I,t} = \omega P_{I,t}$	$c_{I,t} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < I \\ \sum_{i=0}^{t-I} \delta^i \omega & \text{si } t \geq I \end{cases}$
(1,1,1)	$(1-\delta B)\nabla c_{I,t} = (\omega_0 - \omega_1 B) P_{I,t}$	$c_{I,t} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < I \\ \omega_0 & \text{si } t = I \\ \delta^{t-I} \omega_0 + \sum_{i=0}^{t-I-1} \delta^i (\omega_0 - \omega_1) & \text{si } t > I \end{cases}$
(0,2,0)	$\nabla^2 c_{I,t} = \omega P_{I,t}$	$c_{I,t} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < I \\ (t-I+1)\omega & \text{si } t \geq I \end{cases}$

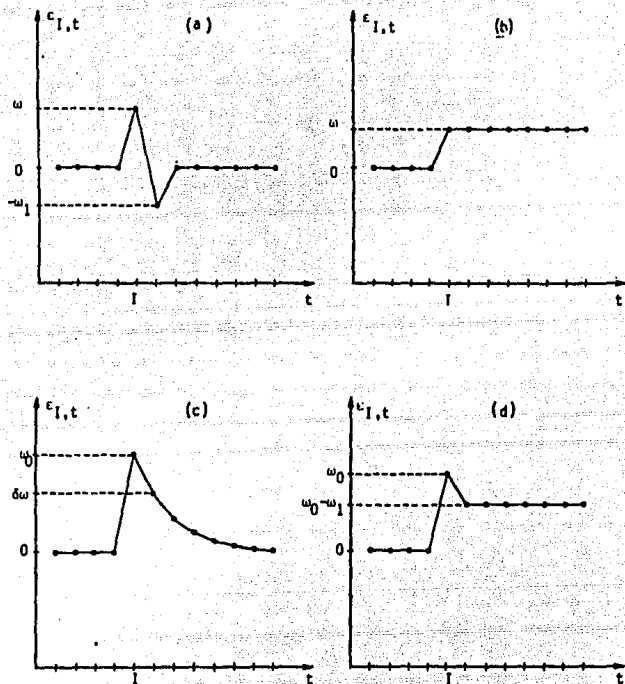


Figura 1.3.1.

Gráfica de los modelos : (a) $\epsilon_{I,t} = (\omega_0 - \omega_1 B) P_{I,t}$ (b) $\nabla \epsilon_{I,t} = \omega P_{I,t}$ (c) $(1 - \delta B) \epsilon_{I,t} = \omega P_{I,t}$ y (d) $\nabla \epsilon_{I,t} = (\omega_0 - \omega_1 B) P_{I,t}$

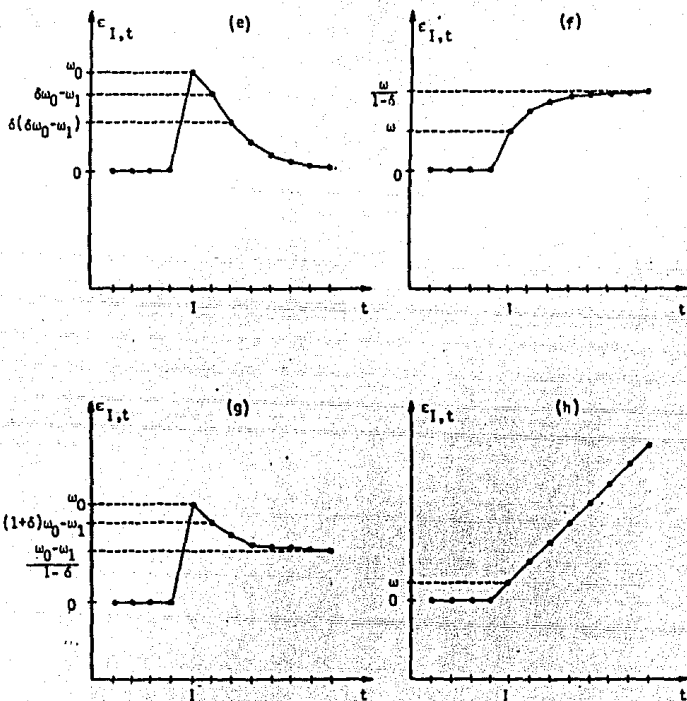


Figura 14 (Cont.)

Gráficas de los modelos: (e) $(1-\delta B)c_{I,t} = (\omega_0 - \omega_1 B)P_{I,t}$
 (f) $(1-\delta B)\nabla c_{I,t} = \omega P_{I,t}$ (g) $(1-\delta B)\nabla c_{I,t} = (\omega_0 - \omega_1 B)P_{I,t}$ y
 (h) $\nabla^2 c_{I,t} = \omega P_{I,t}$

CAPITULO V.- EL MODELO

5.1 INTRODUCCION

En el Otoño de 1986, investigadores Estadounidenses llevaron a cabo estudios en la región conocida como la Antártida, al sur del globo terráqueo, referentes a la cantidad total de Ozono en la llamada capa de Ozono (de la que nos hemos ocupado anteriormente), donde detectaron una "perforación" del tamaño casi de América del Sur. Tal "perforación" es presumiblemente producida tanto por componentes químicos utilizados en la Industria (es decir, lo que genéricamente se llaman factores de tipo antropogénico), como por factores de tipo "natural". Entre estos últimos se encuentran las erupciones volcánicas.

Así, la posibilidad de que la capa de Ozono que cubre a la Ciudad de México, presente algún patrón decreciente a "largo plazo" (o sea, una tendencia decreciente en la cantidad total de Ozono en esa capa), según los especialistas del Departamento de Radiación Solar del Instituto de Geofísica de la UNAM, provocada por la erupción del Volcán Chichonal en el estado de Chiapas en Marzo de 1982, motivó el presente trabajo, cuya aportación es el modelo aquí presentado.

5.2- EL MODELO

Los datos que analizaremos se encuentran en la tabla 5.1, los cuales son el resultado de observaciones realizadas en la Ciudad de México (19° 20.0' 99° 10.5' W, 2,268 metros sobre el nivel del mar) a partir de junio de 1974 mediante la utilización del Espectrofotómetro Dobson No. 98. El punto de observación se encuentra en los terrenos de la Ciudad Universitaria, en el observatorio Central de Radiación Solar del Instituto de Geofísica de la UNAM. Los datos están dados en unidades Dobsón.

El análisis que se mostrará a continuación, se llevo a cabo mediante la utilización del conocido paquete Estadístico SPSS (Nie,1981) en su versión 9, invocando la rutina correspondiente al Análisis de Series de Tiempo llamada Box-Jenkins.

Así se inició tal análisis con la etapa de Identificación, probándose -primeramente- el ajuste de modelos de la forma $(1-B)^d(1-B^{12})^k z_t = a_t$, ya que según la gráfica (5.1) correspondiente a los valores observados, existe la posibilidad de un factor estacional con período anual (es decir $S=12$) en los mismos.

Como vimos en la sección correspondiente a la identificación de un modelo ARIMA, de lo anterior nos interesa -por lo pronto- la desviación estándar residual asociada a tales modelos. Así pues, los resultados son los siguientes:

MODELO	DESVIACION ESTANDAR
1) $(1-B)^0(1-B^{12})^0 z_t = a_t$	18.559
2) $(1-B)^0(1-B^{12})^1 z_t = a_t$	11.885
3) $(1-B)^1(1-B^{12})^0 z_t = a_t$	12.967
4) $(1-B)^0(1-B^{12})^2 z_t = a_t$	12.281

5) $(1-\theta)(1-\theta^{12})z_t = \alpha_t$	10.526
6) $(1-\theta)^2(1-\theta^{12})z_t = \alpha_t$	16.225
7) $(1-\theta)^3(1-\theta^{12})z_t = \alpha_t$	20.668
8) $(1-\theta)(1-\theta^{12})^2z_t = \alpha_t$	16.827
9) $(1-\theta)^2(1-\theta^{12})^2z_t = \alpha_t$	24.868

De aquí que, los modelos ajustados que tuvieron una desviación estándar asociada mínima, podrían ser las correspondientes a los casos 2 y 5. Los cuales pues, según este criterio, muestra los grados de diferenciación (estacional y no-estacional) que se deberán considerar -inicial y provisionalmente- como los necesarios para volver estacionaria a la serie de tiempo en estudio.

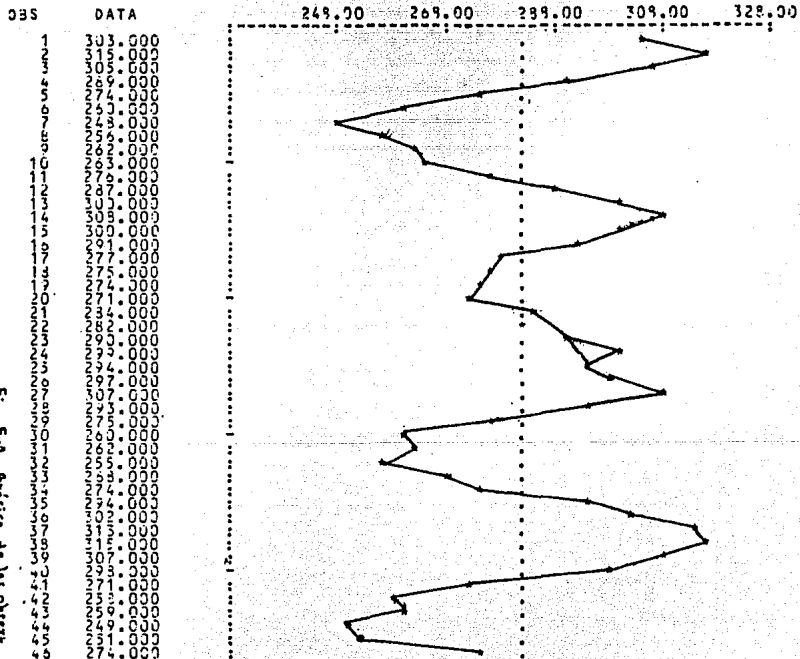
Así pues, para el caso 2: $(1-\theta)z_t = \alpha_t$ observamos que su FAC muestral (fig. 5-3) es la correspondiente a la de una forma periódica, con atenuaciones en cierto modo exponencial, a medida que el número de lags aumenta. Estos aspectos sugieren, en principio, la consideración de una parte autorregresiva en el modelo a proponer, y, por otro lado, la necesidad de tomar diferencias estacionales de periodo anual como lo sugieren tanto, la citada gráfica de las observaciones (fig.5-1) como la de la FAC muestral, también mencionada (ya que notamos picos en los lags 12,24,... y -posiblemente- otros de menor duración como los correspondientes a los lags 4 y 6).

TABLA 5-1
CANTIDAD TOTAL DE OZONO
(1974-1978 corregido)

AÑO	MESES												media
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	
1974						303	315	305	289	274	260	248	
1975	256	262	263	276	287	300	308	300	291	277	275	274	281
1976	271	284	282	290	299	294	297	307	293	275	260	262	285
1977	255	268	274	294	302	313	315	307	298	271	258	259	285
1978	249	251	(274)	(284)	(292)	(302)	(307)	299	290	276	269	258	
1979	262	267	289	296	300	304	300	300	293	279	264	253	284
1980	261	253	257	263	272	303	310	305	310	281	267	270	279
1981	279	278	277	284	292	294	305	306	302	276	274	275	287
media	262	266	274	284	292	301	307	304	296	276	266	262	
σ	9	11	11	11	10	6	6	3	7	3	6	9	

GRAPHIC DISPLAY OF SERIES FOR VARIABLE Y

DATA
YEAR



199

Fig. 5-1 Grafica de las observaciones.

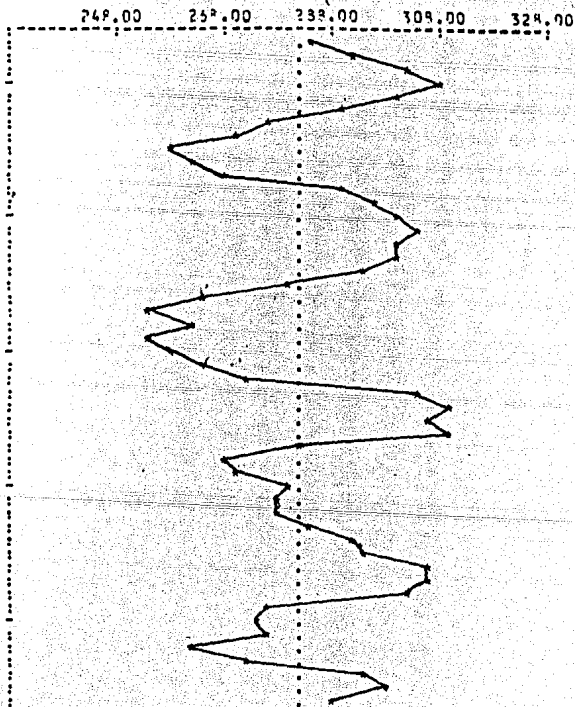
DATOS DE OZONO PARA MEXICO

09/07/97

033

DATA

47 33.0000
 48 33.0000
 49 33.0000
 50 33.0000
 51 33.0000
 52 33.0000
 53 33.0000
 54 33.0000
 55 33.0000
 56 33.0000
 57 33.0000
 58 33.0000
 59 33.0000
 60 33.0000
 61 33.0000
 62 33.0000
 63 33.0000
 64 33.0000
 65 33.0000
 66 33.0000
 67 33.0000
 68 33.0000
 69 33.0000
 70 33.0000
 71 33.0000
 72 33.0000
 73 33.0000
 74 33.0000
 75 33.0000
 76 33.0000
 77 33.0000
 78 33.0000
 79 33.0000
 80 33.0000
 81 33.0000
 82 33.0000
 83 33.0000
 84 33.0000
 85 33.0000
 86 33.0000
 87 33.0000
 88 33.0000
 89 33.0000
 90 33.0000
 91 33.0000
 92 33.0000
 93 33.0000
 94 33.0000
 95 33.0000
 96 33.0000
 97 33.0000
 98 33.0000
 99 33.0000
 00 33.0000



DATOS DE OZONO PARA MEXICO

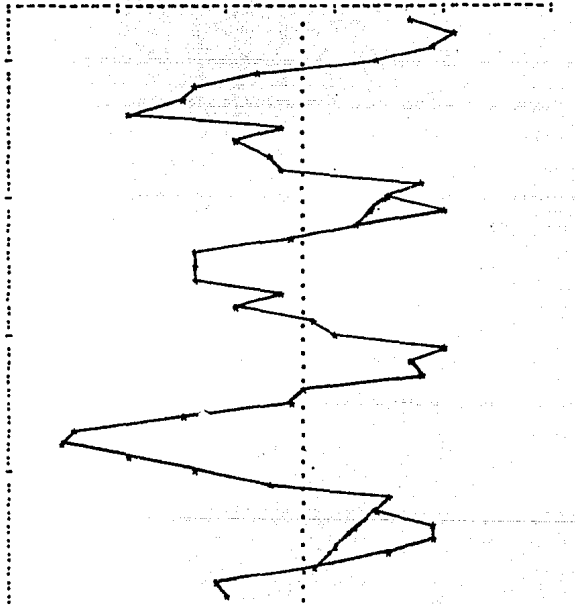
08/07/87

J35

DATA

249.00 269.00 289.00 308.00 328.00

97 302.000
 98 310.000
 99 306.000
 00 295.000
 01 274.000
 02 351.000
 03 560.000
 04 497.000
 05 675.000
 06 775.000
 07 303.000
 08 079.000
 09 331.000
 10 660.000
 11 661.000
 12 622.000
 13 622.000
 14 777.000
 15 660.000
 16 660.000
 17 333.000
 18 333.000
 19 077.000
 20 011.000
 21 004.000
 22 331.000
 23 330.000
 24 333.000
 25 333.000
 26 333.000
 27 333.000
 28 333.000
 29 333.000
 30 333.000
 31 333.000
 32 333.000
 33 333.000
 34 333.000
 35 333.000
 36 333.000
 37 333.000
 38 333.000
 39 333.000
 40 333.000
 41 333.000
 42 333.000
 43 333.000
 44 333.000
 45 333.000
 46 333.000
 47 333.000
 48 333.000
 49 333.000
 50 333.000
 51 333.000
 52 333.000
 53 333.000
 54 333.000
 55 333.000
 56 333.000
 57 333.000
 58 333.000
 59 333.000
 60 333.000
 61 333.000
 62 333.000
 63 333.000
 64 333.000
 65 333.000
 66 333.000
 67 333.000

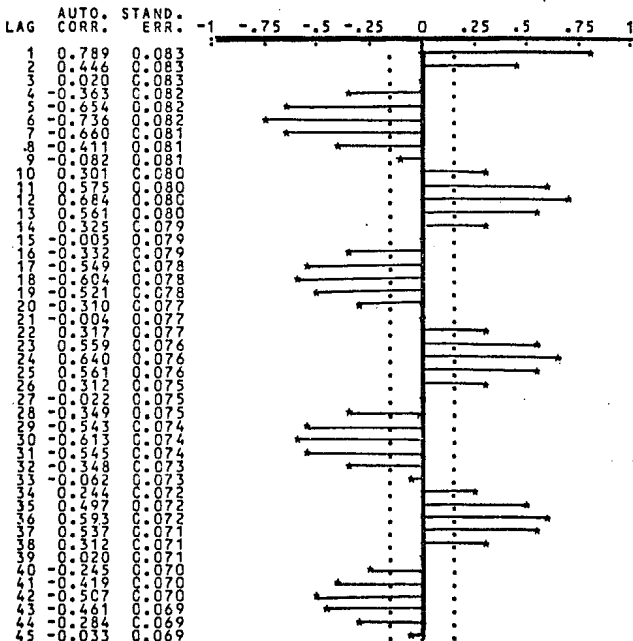


194

MEAN VALUE OF THE PROCESS
 .28209E+03

STANDARD DEVIATION OF THE PROCESS
 .18559E+02

AUTOCORRELATION FUNCTION FOR VARIABLE Y
 AUTOCORRELATIONS *
 TWO STANDARD ERROR LIMITS .



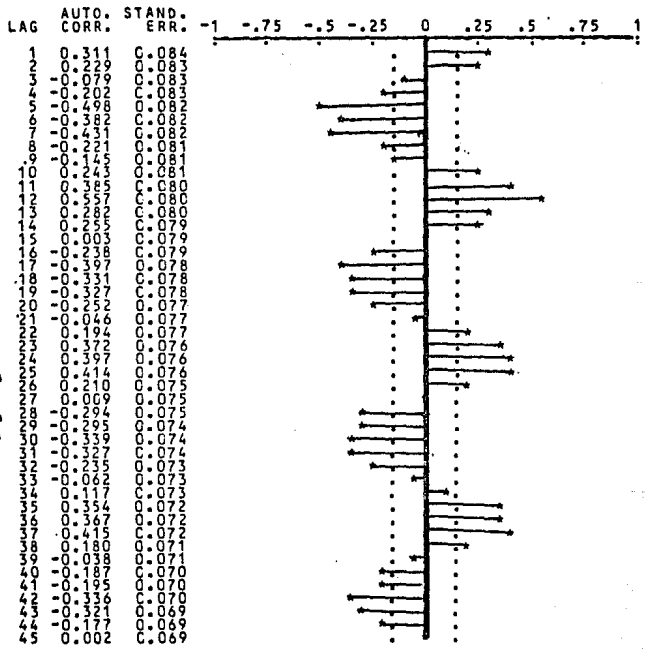
Las observaciones anteriores favorecen al modelo tentativo correspondiente al caso 5: $(1-B)(1-B^{12})Z_t = \alpha_t$. Ya que aplica tal diferenciación estacional a los datos de la serie. Así, en el correlograma correspondiente (la fig. 5-4, la cual representa la FAC muestral de este modelo) observamos que la mayoría de las autocorrelaciones caen dentro de los límites de confianza (estos son dados por el paquete estadístico mencionado de manera automática y basados en los criterios apuntados para este fin en el apartado correspondiente) excepto los correspondientes a los lags 1,5,9,12,13,24. Los cuales podrían indicar, a su vez, la introducción de una parte MA en el modelo que tome en cuenta tales aspectos.

Posteriormente, se recurrió a la gráfica de FACP muestral del modelo anterior (fig. 5-5), en la cual se observó que hay un valor significativo correspondiente al lag 1, hecho que sugiere por sí mismo la introducción de un componente autorregresivo de orden 1. Esto es, la consideración del operador $(1-\phi_1 B)$ en lugar del $(1-B)$, considerado hasta ahora para la parte autorregresiva del modelo.

ESTIMACION Y VERIFICACION

Al estimar el modelo $(1-\phi_1 B)(1-B^{12})Z_t = \alpha_t$ (donde α_t no es necesariamente de ruido blanco), comprobamos la necesidad de sostener la introducción del componente autorregresivo antes mencionado, debido a que se obtuvo que $\hat{\phi}_1 = 0.64$ y no es igual a uno (como sería en caso de haber seguido utilizando el operador $(1-B)$, fig. (5-7).

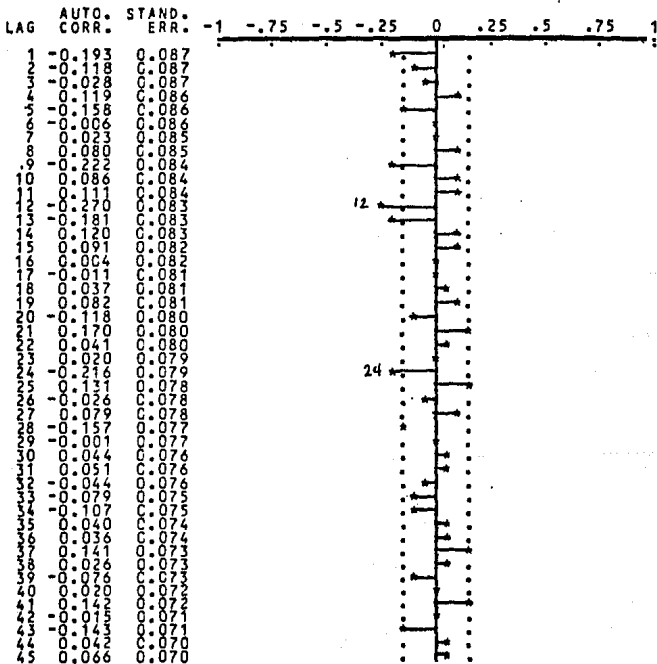
AUTOCORRELATION FUNCTION FOR VARIABLE Y
 AUTOCORRELATIONS *
 TWO STANDARD ERROR LIMITS .



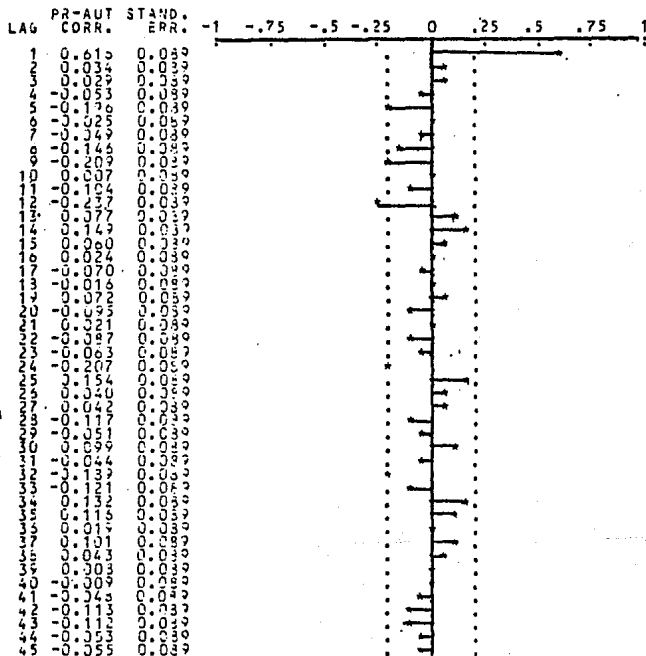
484

Fig. 5-3

AUTOCORRELATION FUNCTION FOR VARIABLE Y
 AUTOCORRELATIONS *
 TWO STANDARD ERROR LIMITS .

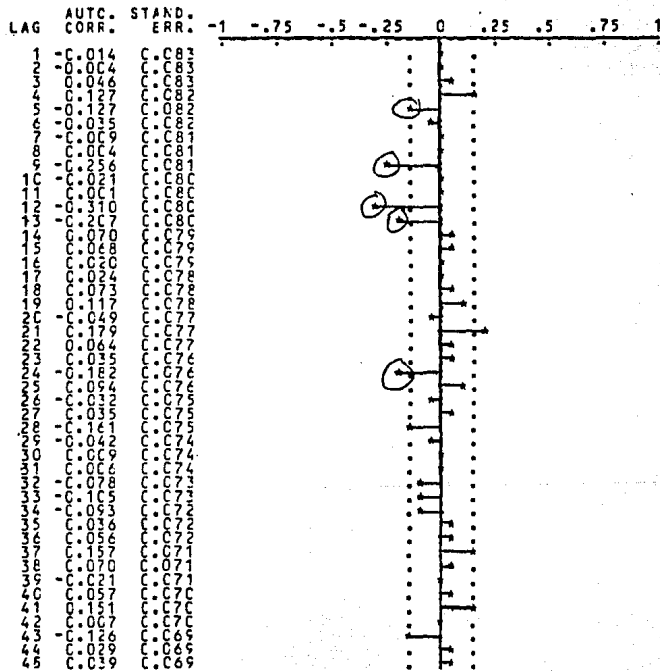


PARTIAL AUTOCORRELATION FUNCTION FOR VARIABLE Y
 PARTIAL AUTOCORRELATIONS *
 TWO STANDARD ERROR LIMITS .



296 Fig. 5-5

RESIDUAL AUTOCORRELATION FUNCTION FOR VARIABLE Y
 AUTOCORRELATIONS *
 TWO STANDARD ERROR LIMITS .



Ahora, al analizar el correlograma de los residuales del modelo propuesto hasta el párrafo anterior (fig. 5-6), podemos ver que hay valores altos para los lags 5,9,12,13 y 24. Este hecho es de suyo sugerente, ya que algebraicamente el operador

$$\frac{(1 - \phi_1 B)}{(1 - \theta_4 B^4)(1 - \theta_{12} B^{12})} = (1 - \phi_1 B)(1 + \theta_4 B^4 + \dots)(1 + \theta_{12} B^{12} + \dots) \quad (5.2.1)$$

el cual, además, puede ser visto como:

$$= 1 - a_1 B^4 - a_5 B^5 - a_9 B^9 - a_{12} B^{12} - a_{13} B^{13} - \dots - a_{24} B^{24} \quad (5.2.2)$$

escrito éste en una forma general, donde se ve en la expresión de la derecha, la cual surge al llevar a cabo las expansiones y multiplicaciones señaladas matemáticamente, que podemos utilizar tal operador, para tomar en cuenta las apreciaciones hechas sobre los valores significativos a los lags del correlograma obtenido en la estimación del modelo tentativo examinado. Es decir, ahora se sugiere el modelo

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B^{12}) Z_t = (1 - \theta_{12} B^{12})(1 - \theta_4 B^4) e_t \quad (5.2.3)$$

donde e_t sería presumiblemente (a reserva de checar posteriormente) de ruido blanco.

Así, al estimar los parámetros involucrados en el modelo (5.2.3) obtuvimos que (fig.5.7):

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1 &= 0.55211 \\ \hat{\theta}_4 &= -0.16154 \\ \hat{\theta}_{12} &= 0.87656 \end{aligned}$$

cuyas desviaciones estándar asociadas a dichos estimadores, los hacen admisibles.

También, de la fig. (5.8), de la cual observamos que proporciona un mejor ajuste, podemos concluir que:

INITIAL VALUES OF PARAMETERS

LAG AUTCREGRESSIVE PARAM

1 .61620E+00

PERTURBATION INCREMENTS
.10000E+00CONVERGENCE TOLERANCES
.10000E-02

INITIAL FUNCTION VALUE = .11603E+05

*** OPTIMIZATION SEARCH CONVERGED IN 10 ITERATIONS

NO. OF ITERATIONS = 10 FUNCTION VALUE = .1159216E+05

LAG AUTCREGRESSIVE PARAM

1 .64120E+00

RESIDUAL VARIANCE
.63397E+02

NONLINEAR ESTIMATION RESULTS

PAR	LAG	ESTIMATE	STD ERROR	T RATIO
AR	1	0.64120	6.7235E-01	9.5368

COVARIANCE MATRIX OF THE ESTIMATES

PAR	LAG	
AR	1	.45205E-02

CORRELATION MATRIX OF THE ESTIMATES

PAR	LAG	
AR	1	1.0000

MEAN VALUE OF RESIDUAL SERIES
.12631E+00STANDARD DEVIATION OF RESIDUAL SERIES
.91313E+01

104

Fig. 5-4

a) La matriz de correlación de los estimadores de los parámetros involucrados no presentan valores altos lo cual indica que no hay problema de sobreparametrización o de redundancia en el modelo propuesto.

b) La varianza de los residuales fue de lo más bajo que pudo obtenerse en este fenómeno: 50.4 Unidades Dobson, ya que le corresponde una desviación estándar aproximada de 7 unidades Dobson. Lo cual es casi igual a lo que se esperaría -al menos- para cualquier otro modelo utilizado y considerado apropiado. Debido esto al comparar con el hecho de que la determinación de la cantidad total de Ozono estratosférico mediante un Espectrofotómetro Dobson se hace con un 2% de precisión (ver capítulo 1), o sea, con 6 unidades de desviación estándar esperada como mínimo.

c) Los valores de ji-cuadrada para los residuales (prueba de Portmanteau) no están en la región de rechazo.

d) Podemos observar también que, únicamente 5 de los valores se apartan ligeramente de las bandas de confianza al 95% en la gráfica correspondiente a las autocorrelaciones de los residuales (fig. 5.9), lo cual no es grave.

Como puede verse -y así se anotó en el capítulo correspondiente- el proceso de construcción de un modelo para la serie de tiempo correspondiente a la parte estocástica del modelo de Intervención que trataremos de proponer posteriormente (si es

1 .55211E+CC
 LAG MOVING AVERAGE PARM
 4 -.16154E+CC
 LAG SEASONAL MA PARM
 12 .E7656E+CC
 DATOS DE OZONC PARA MEXICC

C4/03/87

1

RESIDUAL VARIANCE
 .5C431E+02

 NONLINEAR ESTIMATION RESULTS

PAR	LAG	ESTIMATE	STC ERROR	T RATIO
AR	1	C.55211	.7109CE-Q1	7.7463
MA	4	-C.16154	.83474E-C1	-1.9152
SMA	12	C.87656	.11406E-C1	27.911

COVARIANCE MATRIX OF THE ESTIMATES

PAR	LAG	ESTIMATE	STC ERROR	T RATIO
AR	1	.50538E-C2	.12397E-C2	-.12873E-Q3
MA	4	-.12397E-C2	-.07629E-C2	-.78160E-C03
SMA	12	.12872E-C1	-.31605E-C3	-.78160E-C03

CORRELATION MATRIX OF THE ESTIMATES

PAR	LAG	ESTIMATE	STC ERROR	T RATIO
AR	1	1.00000	C.26891	Q.C5765
MA	4	C.26891	C.CC000	-C.12062
SMA	12	C.C5765	-C.12056	1.00000

MEAN VALUE OF RESIDUAL SERIES

.21143E+CC

STANDARD DEVIATION OF RESIDUAL SERIES

.70983E+C1

VARIANCE OF RESIDUAL SERIES

.50386E+C2

DIAGNOSTIC CHI-SQUARE STATISTICS FOR RESIDUAL SERIES OF VARIABLE Y

LAG	CHI-SQ	D.F	PRCE
1	1.40	1	0.2199
2	1.80	2	0.3926
3	2.20	3	0.5272
4	2.60	4	0.6355
5	3.00	5	0.7224
6	3.40	6	0.7920

211

Fig. 5-8

necesario éste), es un proceso iterativo en el cual es difícil separar o distinguir en la práctica, las etapas que lo constituyen.

En este orden de ideas y debido a la imposibilidad de identificar, en primera instancia, el proceso (o mecanismo estocástico) que generó tales observaciones, las cuales -como sabemos- están influenciadas por variaciones debido a muestreo (entre otras cosas), es que tuvimos que utilizar la técnica de sobre para metrización para probar la bondad del modelo. A partir de lo anterior, al introducir otros parámetros en el modelo propuesto, notamos que no había un cambio importante en los resultados (en el ajuste).

Por otro lado, buscando un mejor modelo, y basándonos en el hecho en el que nos guíamos para la construcción del anterior, en el sentido de que el correlograma en ese caso, presentaba picos en los rezagos 5, 9 y 13, se estimó alternativamente el modelo

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \phi_3 B^3)(1 - \theta_1 B^5) \epsilon_t = (1 - \theta_2 B^9) \epsilon_t \quad (5.2.1)$$

el cual se "comportó" casi tan bien como aquel (veáanse las figs. 5,10 a 5,13), ya que además de las bondades de ese, notamos que en este, por su parte, no hay puntos fuera de los límites de confianza del 95% en el correlograma correspondiente así como que los estimadores de los parámetros son significativos (distintos de cero).

En realidad pues, no es difícil darnos cuenta (de las expresiones 5.2.1 y 5.2.2) de que se trata de dos maneras diferentes de expresar un mismo modelo. De tal forma que, si hemos

LAG SEASONAL MA PARM

12 .21819E+00

RESIDUAL VARIANCE

.57772E+02

NONLINEAR ESTIMATION RESULTS

PAR	LAG	ESTIMATE	STD ERROR	T RATIO
AR	1	C.495531	.72572E-C1	6.8251
AR	9	-C.23069	.74880E-C1	-3.0408
AR	13	-C.20713	.63266E-C1	-3.4393
SMA	12	C.81819	.54833E-C1	14.922

COVARIANCE MATRIX OF THE ESTIMATES

PAR	LAG				
AR	1	.52667E-C2	-.10877E-C2	-.14541E-C2	-.13643E-C1
AR	9	.10877E-C2	-.56070E-C2	-.13082E-C2	-.12498E-C1
AR	13	-.14541E-C2	-.13082E-C2	-.66332E-C2	-.12907E-C1
SMA	12	-.13643E-C1	-.12498E-C1	-.12907E-C1	.10063E-C1

CORRELATION MATRIX OF THE ESTIMATES

PAR	LAG				
AR	1	1.00000	C.20016	-0.24064	-0.03429
AR	9	C.20016	1.00000	-0.20981	-0.03044
AR	13	-0.24064	-0.20981	1.00000	-0.02870
SMA	12	-0.03429	-0.03044	-0.02870	1.00000

MEAN VALUE OF RESIDUAL SERIES

.13783E+00

STANDARD DEVIATION OF RESIDUAL SERIES

.75998E+01

VARIANCE OF RESIDUAL SERIES

.57757E+02

219

Fig. 5-10

DATOS DE OZONO PARA MEXICO

DIAGNOSTIC CHI-SQUARE STATISTICS FOR RESIDUAL SERIES OF VARIABLE Y

LAG	CHI-SQ	D. F	P-CE
4	7.28	2	0.0263
12	11.64	8	0.1440
18	17.15	14	0.2409
24	24.21	20	0.1711
30	29.54	26	0.2771
36	40.54	32	0.1555
42	43.55	38	0.2571
48	48.55	44	0.1990
54	54.55	50	0.3664
60	70.62	56	0.1903
66	72.64	62	0.1693
72	77.61	68	0.2244
78	82.67	74	0.2433
84	85.61	80	0.2889
90	91.62	86	0.2557
96	101.61	92	0.1909
100	107.92	96	

Fig. 5-11

RESIDUAL AUTOCORRELATION FUNCTION FOR VARIABLE Y
 AUTO CORRELATION FUNCTION
 TWO STANDARD ERROR LIMITS .

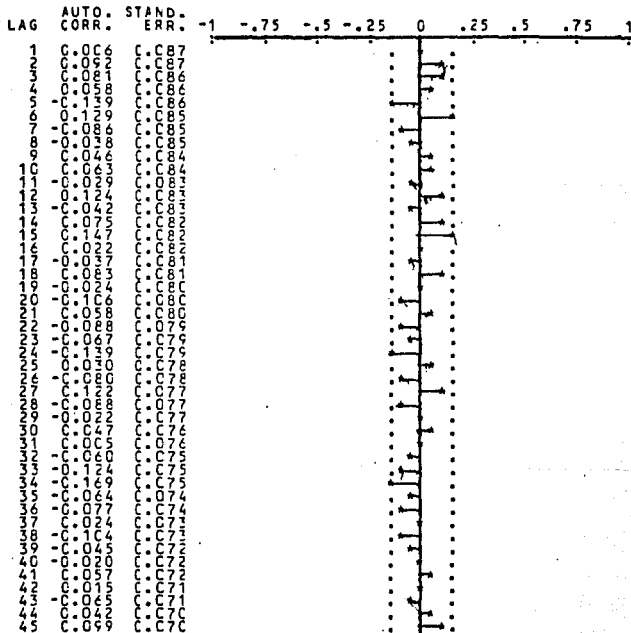


Fig. 5-12
215

DATOS DE OZONO PARA MEXICO

C4/02/87

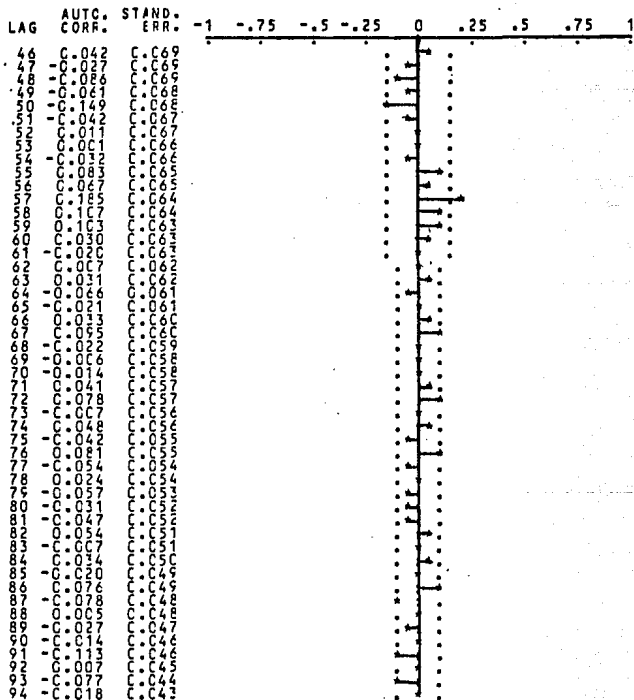


Fig. 5-B

de elegir de entre los dos, optaremos por el primero. Aunque es conveniente mencionar aquí que existen criterios más formales para seleccionar de entre dos modelos elegibles como el de AKAIKE (1972), por ejemplo. Pero como no los necesitaremos aquí, nos limitamos a dar la referencia).

Es decir, nos quedamos con el modelo

$$(1 - \phi_1 B)(1 - \phi_2 B^2) z_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \theta_2 B^2) \varepsilon_t$$

invocando (esencialmente en estas circunstancias) al principio de parsimonia, ya que este modelo sólo involucra tres parámetros.

Adicionalmente, debemos verificar otros aspectos importantes con respecto a este modelo. Así pues, tenemos que:

- a) La media aritmética de los residuales es 0.38046
- b) La desviación estándar de los residuales es 7.0824

Por lo que, para determinar si el nivel de la serie de los residuales debe ser considerada como significativamente distinta de cero (e introducir -consecuentemente- un parámetro para representar esto, como una tendencia determinista) calculamos al cociente (3.5.3.3):

$$\sqrt{N-d-p} \frac{m(\hat{\alpha})}{\hat{\sigma}_a} = \sqrt{132} \frac{0.3804}{7.0828} = \frac{4.4686}{7.0828} = 0.63$$

el cual es menor que 2. Indicando esto (según ese criterio) que -por lo pronto- no tenemos evidencia empírica de que la serie contenga tal componente determinista.

También, al observar la gráfica de los residuales (fig.5-14) notamos que sólo 5 de ellos se salen del intervalo de confianza

dado, que es -como se señaló- de la forma $(-\hat{\alpha}_a, \hat{\alpha}_a)$, donde $\hat{\alpha}_a$ es como antes: la desviación estándar de los residuales. Lo cual es consistente con el requerimiento de que el 5% de ellos salgan de dicho intervalo, aproximadamente. Nótese además que el residual correspondiente a la observación 94 (el que corresponde a Abril de 1982, es decir: un mes después de la multicentrada erupción) tiene un valor de 14.48, que es ligeramente mayor a $\hat{\alpha}_a = 14.16$ saliéndose así de dicho límite. Haciendo este hecho sospechar que pudo haber una influencia en la evolución de la cantidad total de Ozono, ocasionado por la intervención mencionada. Por lo que, aunque obtuvimos anteriormente que no había una tendencia determinista en los datos, ahora debido a este hecho, tendremos que echar mano de las técnicas del Análisis de Intervención para dilucidar si hay en realidad tal patrón de comportamiento. Y si así es, determinar si fue causado por tal intervención y cuál es su influencia sobre el fenómeno en estudio.

Tampoco podemos pasar por alto la verificación de que el modelo propuesto cumpla con las condiciones de Invertibilidad y Estacionaridad. En este sentido, una de las ventajas de los modelos multiplicativos como el aquí obtenido, es que esta forma simplifica la verificación de tales condiciones. Esto es debido a que estas condiciones se aplican separadamente a los coeficientes estacionales y no-estacionales.

Además la estacionaridad se aplica sólo a los coeficientes AR, pero tratamos separadamente a los coeficientes estacionales

y no-estacionales, debido a que la condición formal de estacionaridad para un modelo multiplicativo es la que las raíces de $\phi_p(B)\psi_q(B^s)=0$ caigan fuera del círculo unitario. Lo cual es equivalente a la condición conjunta de que las raíces de ambas: $\phi_p(B)=0$ y $\psi_q(B^s)=0$ caigan fuera del círculo unitario.

De lo anterior, tenemos que el modelo ARIMA (1,0,1) x (0,1,1)₁₂ representado por (5,2,4), cumple con el requisito de no-estacionaridad, ya que $|\hat{\phi}_1| < 1$ (como obtuvimos), como lo requiere un AR(1).

Ahora, para checar las condiciones de Invertibilidad, debemos hacer algo análogo a lo que se llevó a cabo para la parte AR en el aplicado a cada componente correspondiente a la parte MA del modelo. Así, puesto que $|\hat{\theta}_{12}| < 1$ y $|\hat{\theta}_4| < 1$ queda satisfecho tal requerimiento.

GRAPHIC DISPLAY OF RESIDUAL SERIES FOR VARIABLE Y

DATA
MEAN

OBS	DATA
1	1.5
2	1.1
3	1.0
4	1.0
5	1.0
6	1.0
7	1.0
8	1.0
9	1.0
10	1.0
11	1.0
12	1.0
13	1.0
14	1.0
15	1.0
16	1.0
17	1.0
18	1.0
19	1.0
20	1.0
21	1.0
22	1.0
23	1.0
24	1.0
25	1.0
26	1.0
27	1.0
28	1.0
29	1.0
30	1.0
31	1.0
32	1.0
33	1.0
34	1.0
35	1.0
36	1.0
37	1.0
38	1.0
39	1.0
40	1.0
41	1.0
42	1.0
43	1.0
44	1.0
45	1.0
46	1.0
47	1.0
48	1.0
49	1.0
50	1.0
51	1.0
52	1.0
53	1.0
54	1.0
55	1.0
56	1.0
57	1.0
58	1.0
59	1.0
60	1.0
61	1.0
62	1.0
63	1.0
64	1.0
65	1.0
66	1.0
67	1.0
68	1.0
69	1.0
70	1.0
71	1.0
72	1.0
73	1.0
74	1.0
75	1.0
76	1.0
77	1.0
78	1.0
79	1.0
80	1.0
81	1.0
82	1.0
83	1.0
84	1.0
85	1.0
86	1.0
87	1.0
88	1.0
89	1.0
90	1.0
91	1.0
92	1.0
93	1.0
94	1.0
95	1.0
96	1.0
97	1.0
98	1.0
99	1.0
100	1.0

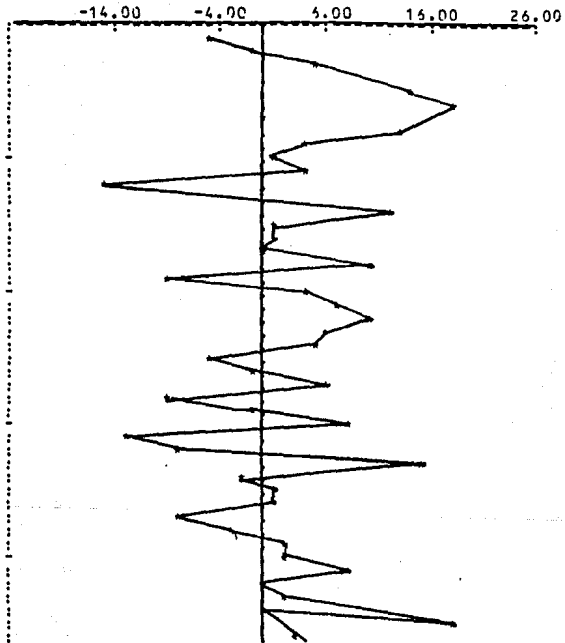


Fig. 5-14
330

RESIDUAL AUTOCORRELATION FUNCTION FOR VARIABLE Y
 AUTOCORRELATIONS *
 TWO STANDARD ERROR LIMITS .

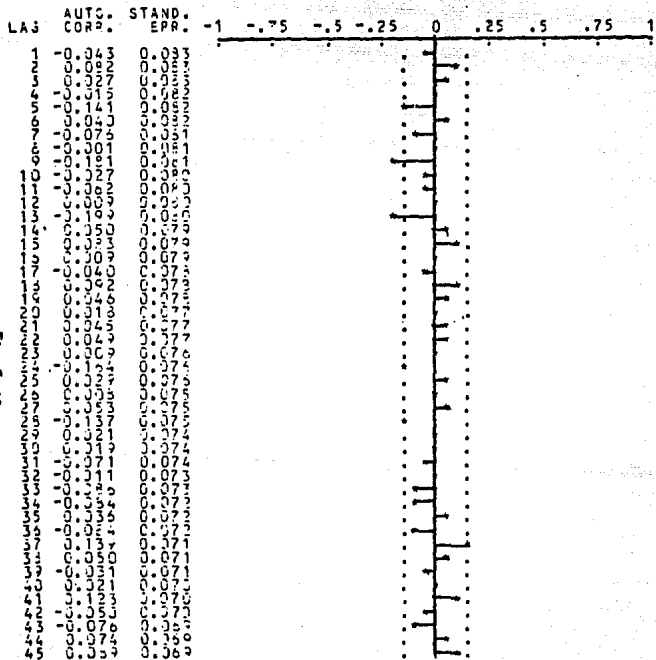


Fig. 5-15
 223

GRAPHIC DISPLAY OF RESIDUAL SERIES FOR VARIABLE Y

DATA
YEAR

095	DATA
1	1.0
2	1.0
3	1.0
4	1.0
5	1.0
6	1.0
7	1.0
8	1.0
9	1.0
10	1.0
11	1.0
12	1.0
13	1.0
14	1.0
15	1.0
16	1.0
17	1.0
18	1.0
19	1.0
20	1.0
21	1.0
22	1.0
23	1.0
24	1.0
25	1.0
26	1.0
27	1.0
28	1.0
29	1.0
30	1.0
31	1.0
32	1.0
33	1.0
34	1.0
35	1.0
36	1.0
37	1.0
38	1.0
39	1.0
40	1.0
41	1.0
42	1.0
43	1.0
44	1.0
45	1.0
46	1.0
47	1.0
48	1.0
49	1.0
50	1.0
51	1.0
52	1.0
53	1.0
54	1.0
55	1.0
56	1.0
57	1.0
58	1.0
59	1.0
60	1.0
61	1.0
62	1.0
63	1.0
64	1.0
65	1.0
66	1.0
67	1.0
68	1.0
69	1.0
70	1.0
71	1.0
72	1.0
73	1.0
74	1.0
75	1.0
76	1.0
77	1.0
78	1.0
79	1.0
80	1.0
81	1.0
82	1.0
83	1.0
84	1.0
85	1.0
86	1.0
87	1.0
88	1.0
89	1.0
90	1.0
91	1.0
92	1.0
93	1.0
94	1.0
95	1.0
96	1.0
97	1.0
98	1.0
99	1.0
100	1.0

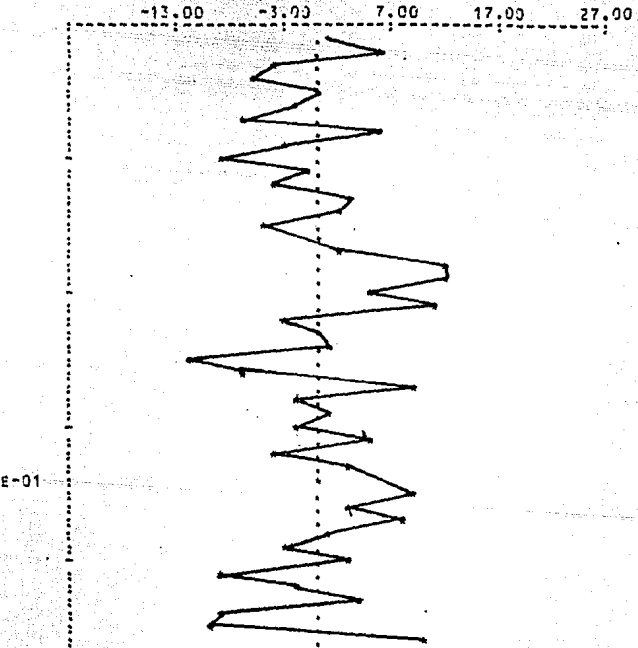
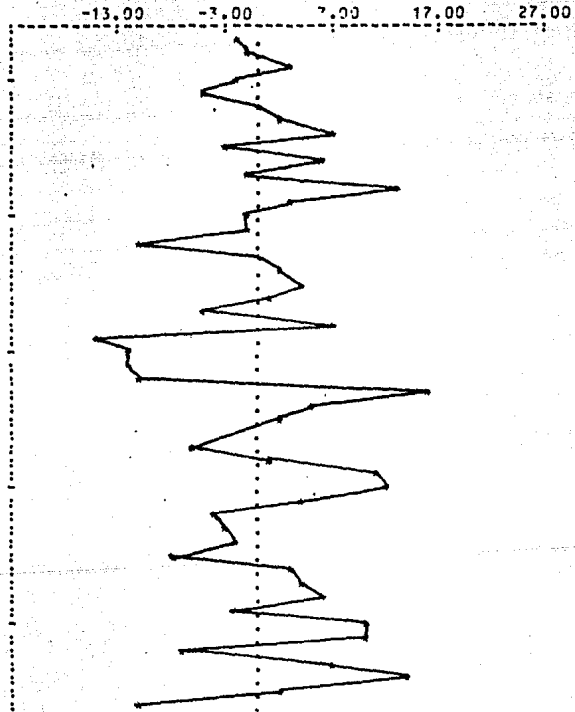
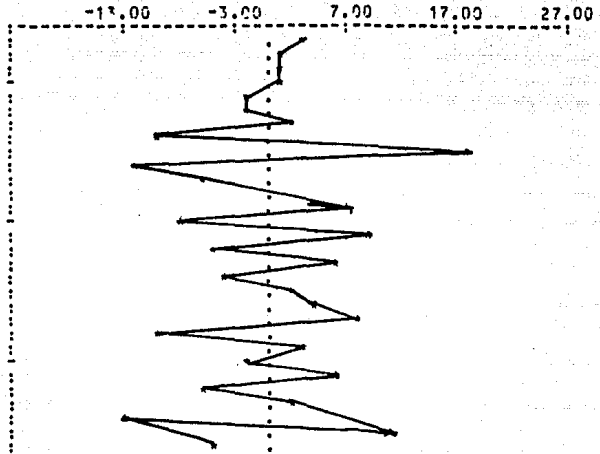


Fig. 5-16
114

DES	DATA
47	1
46	1
45	1
44	1
43	1
42	1
41	1
40	1
39	1
38	1
37	1
36	1
35	1
34	1
33	1
32	1
31	1
30	1
29	1
28	1
27	1
26	1
25	1
24	1
23	1
22	1
21	1
20	1
19	1
18	1
17	1
16	1
15	1
14	1
13	1
12	1
11	1
10	1
9	1
8	1
7	1
6	1
5	1
4	1
3	1
2	1
1	1



OBS	DATA
97	3
98	9
99	0
100	5
101	1
102	2
103	1
104	0
105	3
106	1
107	5
108	0
109	7
110	1
111	1
112	1
113	1
114	1
115	1
116	1
117	1
118	1
119	1
120	1
121	1
122	1
123	1
124	1
125	1
126	1
127	1
128	1
129	1
130	1
131	1
132	1
133	1
134	1
135	1
136	1
137	1
138	1
139	1
140	1
141	1
142	1
143	1
144	1
145	1
146	1
147	1
148	1
149	1
150	1



PRONOSTICO:

El modelo por medio del cual pronosticaremos será el dado por la expresión (5.2.3), a saber:

$$(1 - \hat{\phi}_1 B)(1 - B^2) z_t = (1 - \hat{\theta}_1 B^2)(1 - \hat{\theta}_2 B^2) e_t$$

cuya función de pronóstico estará dada por

$$z_t - B^2 z_t - \hat{\phi}_1 B z_t + \hat{\phi}_1 B^3 z_t = e_t - \hat{\theta}_2 B^2 e_t - \hat{\theta}_1 B^4 e_t + \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 B^6 e_t$$

$$\text{o } z_t = z_{t-1} + \hat{\phi}_1 z_{t-1} - \hat{\phi}_1 z_{t-3} + e_t - \hat{\theta}_2 e_{t-2} - \hat{\theta}_1 e_{t-4} + \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 e_{t-6}$$

la cual sustituyendo los valores obtenidos tenemos que:

$$z_t = z_{t-1} + 0.5521 z_{t-1} - 0.5521 z_{t-3} + e_t + 0.1615 e_{t-2} - 0.8765 e_{t-4} - 0.115 e_{t-6} \quad (5.2.5)$$

Así pues, si tenemos por ejemplo, n datos y queremos pronosticar a partir de la observación z_n entonces

$$z_{n+l} = \begin{cases} z_{n+l-1} + \hat{\phi}_1 z_{n+l-1} - \hat{\phi}_1 z_{n+l-3} + \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_2 e_{n-2} + \hat{\theta}_1 e_{n-4} + \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 e_{n-6} & \text{para } l = 1, \dots, 4 \\ z_{n+l-1} + \hat{\phi}_1 z_{n+l-1} - \hat{\phi}_1 z_{n+l-3} + \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_2 e_{n+l-2} + \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 e_{n+l-6} & \text{para } l = 5, \dots, 12 \\ z_{n+l-1} + \hat{\phi}_1 z_{n+l-1} - \hat{\phi}_1 z_{n+l-3} + \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_2 \hat{\theta}_1 e_{n+l-6} & \text{para } l = 13, \dots, 16 \\ z_{n+l-1} + \hat{\phi}_1 z_{n+l-1} - \hat{\phi}_1 z_{n+l-3} + \hat{\theta}_0 & \text{para } l > 16 \end{cases} \quad (5.2.6)$$

los cuales se obtienen sustituyendo los valores estimados de los parámetros respectivos. Nótese en las funciones de pronóstico (5.2.6) que, para cualquier valor de l (o lead, anglicismo utilizado en estos casos), si el subíndice de un e_t excede de n , entonces este término será igual a cero. Siendo este hecho lo que produce precisamente que el pronóstico bajo este enfoque, sea de mínimo error cuadrático medio.

Por otro lado, cabe hacer notar que las expresiones $(1 - \beta^{12})$ y $(1 - \theta_{12}\beta^{12})$ en el modelo en cuestión, tratan de remover las dependencias de observaciones alejadas entre sí por un año, mientras que $(1 - \phi_1\beta)$ y $(1 - \theta_4\beta^4)$ _____

representan, a su vez, el filtro requerido para remover la dependencia que existe entre meses sucesivos y de los separados 3 meses entre sí (es decir, justo para cada estación) respectivamente, con el fin de producir una serie de tiempo de ruido blanco para los residuales $\{\epsilon_t\}$ como lo requiere este enfoque metodológico.

Así pues, nuestro modelo toma en cuenta el patrón de carácter no-estacional que provoca la no-estacionaridad en la serie, ya que cada pronóstico \hat{z}_{n+12} parte del valor correspondiente a 12 períodos atrás, es decir, de z_{n-12} . Siendo de interés también los valores correspondientes a un período anterior, tanto antes del valor a pronosticar como el de 13 períodos antes (dados por \hat{z}_{n-1} y \hat{z}_{n-13} , respectivamente) que toman en cuenta, a su vez, la dependencia entre observaciones sucesivas (es decir, el factor no-estacional).

Asimismo, se hace un ajuste adicional para lo restante del patrón estacional mencionado mediante el factor $\hat{\theta}_{12}\epsilon_{t-12}$ así como para el cambio de una estación a otra y para la interacción entre estos dos componentes, representados por $\theta_4\epsilon_{t-4}$ y $\hat{\theta}_{12}\hat{\theta}_4\epsilon_{t-16}$, respectivamente. Lo cual es muy congruente con el fenómeno de la evolución de la cantidad total de Ozono, ya que sabemos que se

presentan tales cambios en realidad (ver capítulo 1). Cabe señalar aquí también, que aunque no estemos seguros de la interpretación práctica del término ϵ_{t-1} bien pudiera representar el ajuste por la componente ciclica cuasi-bianual en las fluctuaciones que según Angell y Korshover (1973) se presentan. Pero que no fue posible detectar mediante la perspectiva del análisis utilizado aquí, que es la de Box y Jenkins. Y que sí fue detectada, por ejemplo, mediante otra manera de analizar a las series de tiempo que es la teoría espectral, la cual comprobamos que podría ser utilizada como una herramienta complementaria a las aquí utilizadas (aunque cabe aclarar que no por esto es menor a la aquí utilizada). Señalándonos esto también, algunas de las limitaciones de nuestro enfoque.

Por otro lado, en la fig. 5-17 se muestra una gráfica en la cual aparecen los datos, los pronósticos a un paso hacia adelante, el intervalo de confianza de 95% para los pronósticos calculados a partir de la función de pronóstico.

De estos, nos interesa ahora, especialmente, los pronósticos a un paso hacia adelante (representados por el signo +), los cuales deben caer dentro de los límites de confianza señalados (y que además utilizaremos después). Así pues, observamos que esto último se cumple.

Hasta aquí hemos considerado únicamente la parte estocástica (N_t) del modelo general de Intervención:

$$\begin{aligned}
 z_t &= \epsilon_{1,t} + N_t \\
 &= \frac{w(\theta)}{f(\theta)} + \frac{g_0 + g_1(\theta)}{f(\theta)\sigma^2} \epsilon_t
 \end{aligned}$$

la cual está dada por el modelo (5,2,3), y de cuyo análisis obtuvimos que no había evidencia empírica para considerar que había una reducción en la cantidad total de Ozono (representado en tal caso por $\theta = 0$), pero observamos asimismo que el residual correspondiente a la observación 94 (una después de la fecha de ocurrencia de la erupción) era muy grande.

Así pues, es conveniente utilizar el estadístico de prueba Q dado por la expresión (4.2.11), para determinar si hubo o no influencia por tal intervención.

Para esto, como

$$Q = \sum_{h=1}^H e_{i-1+h}^2 / \hat{\sigma}_e^2$$

necesitábamos, primeramente, checar si el modelo es válido para el período de tiempo correspondiente hasta la observación anterior a la ocurrencia de la intervención hipotética.

Así, al estimar el modelo propuesto en estas condiciones, se observó que era válido (figs. 5.15 y 5.16).

Ahora, como no estamos seguros aún de que se hayan llevado a cabo las influencias mencionadas en la evolución de la cantidad del total de Ozono, ni tampoco, por ende, tenemos una idea de como podría ser la forma en que ésta influyera en caso de ocurrir, asumimos la perspectiva "a posteriori" descrita en el capítulo anterior.

Es decir, para obtener los errores de pronóstico a un paso : $e_0(1), e_1(1), \dots, e_{t+M-1}(1)$, y calcular el estadístico Q, tenemos que auxiliarnos de la tabla (5-2) que proporciona el paquete estadístico SPSS, basada en el formato creado por Box y Jenkins (1970). Esta es una especie de resumen de los resultados obtenidos a partir de la función de pronóstico, que puede ser leída y analizada de la siguiente manera:

a) Horizontalmente, para comparar los pronósticos de las observaciones del pasado con una observación dada de la serie de tiempo.

b) Diagonalmente, para obtener pronóstico hacia adelante a partir de un origen dado.

c) Verticalmente, para obtener pronósticos de observaciones con un lead (L) fijo, de observaciones consecutivas.

En otras palabras, para nuestros efectos podemos, obtener la $\sum_{h=1}^M e_{t+h}(1)$ fijándonos en la columna número uno de la tabla, y comparar los pronósticos a un paso hacia adelante, con los datos de la serie, escritos en la parte izquierda de la misma.

O sea, la columna No. 1 está formada por los elementos $\hat{e}_t(1)$ con $t = t-1+h, \dots, t+M-1$, que son pues los pronósticos del tipo requerido.

FORECAST ERROR SUMMARY TABLE

LEAD	FORECAST VARIANCE	FORECAST S	IMPULSE RESP
1	36.3	3.0	5.5
2	33.0	2.8	1.1
3	27.7	2.5	0.7
4	23.5	2.2	0.5
5	20.0	1.9	0.4
6	17.0	1.7	0.3
7	14.5	1.5	0.2
8	12.5	1.3	0.2
9	10.8	1.1	0.1
10	9.5	1.0	0.1
11	8.3	0.9	0.1
12	7.3	0.8	0.1
13	6.5	0.7	0.1
14	5.8	0.6	0.1
15	5.2	0.6	0.1
16	4.7	0.5	0.1
17	4.3	0.5	0.1
18	4.0	0.4	0.1
19	3.7	0.4	0.1
20	3.5	0.4	0.1
21	3.3	0.3	0.1
22	3.1	0.3	0.1
23	3.0	0.3	0.1
24	2.9	0.3	0.1
25	2.8	0.3	0.1
26	2.7	0.3	0.1
27	2.6	0.3	0.1
28	2.5	0.3	0.1
29	2.4	0.3	0.1
30	2.3	0.3	0.1
31	2.2	0.3	0.1
32	2.1	0.3	0.1
33	2.0	0.3	0.1
34	1.9	0.3	0.1
35	1.8	0.3	0.1
36	1.7	0.3	0.1
37	1.6	0.3	0.1
38	1.5	0.3	0.1
39	1.4	0.3	0.1
40	1.3	0.3	0.1
41	1.2	0.3	0.1
42	1.1	0.3	0.1
43	1.0	0.3	0.1
44	0.9	0.3	0.1
45	0.8	0.3	0.1
46	0.7	0.3	0.1
47	0.6	0.3	0.1
48	0.5	0.3	0.1
49	0.4	0.3	0.1
50	0.3	0.3	0.1
51	0.2	0.3	0.1
52	0.1	0.3	0.1
53	0.1	0.3	0.1
54	0.1	0.3	0.1
55	0.1	0.3	0.1
56	0.1	0.3	0.1
57	0.1	0.3	0.1
58	0.1	0.3	0.1
59	0.1	0.3	0.1
60	0.1	0.3	0.1
61	0.1	0.3	0.1
62	0.1	0.3	0.1
63	0.1	0.3	0.1
64	0.1	0.3	0.1
65	0.1	0.3	0.1
66	0.1	0.3	0.1
67	0.1	0.3	0.1
68	0.1	0.3	0.1
69	0.1	0.3	0.1
70	0.1	0.3	0.1
71	0.1	0.3	0.1
72	0.1	0.3	0.1
73	0.1	0.3	0.1
74	0.1	0.3	0.1
75	0.1	0.3	0.1
76	0.1	0.3	0.1
77	0.1	0.3	0.1
78	0.1	0.3	0.1
79	0.1	0.3	0.1
80	0.1	0.3	0.1
81	0.1	0.3	0.1
82	0.1	0.3	0.1
83	0.1	0.3	0.1
84	0.1	0.3	0.1
85	0.1	0.3	0.1
86	0.1	0.3	0.1
87	0.1	0.3	0.1
88	0.1	0.3	0.1
89	0.1	0.3	0.1
90	0.1	0.3	0.1
91	0.1	0.3	0.1
92	0.1	0.3	0.1
93	0.1	0.3	0.1
94	0.1	0.3	0.1
95	0.1	0.3	0.1
96	0.1	0.3	0.1
97	0.1	0.3	0.1
98	0.1	0.3	0.1
99	0.1	0.3	0.1
100	0.1	0.3	0.1

435

Así, por ejemplo, ya que

$$e_t(z) = z_t - \hat{z}_{t-1}(z)$$

entonces, por ejemplo:

$$e_{94}(z) = z_{94} - \hat{z}_{93}(z) \\ = 273 - 275.908 = 17.012$$

Por lo tanto

$$\sum_{h=1}^{24} e_{t-h}^2(z) = 289.40 + 1.29 + 113.124 + \dots + 75.082 + 3.636 \\ = 1424.8591$$

y como $\sigma_z^2 = 42.384$ (ver fig.) tenemos que $Q = 33.85$

A su vez, este valor nos indica que al compararlo con valores en tablas para la distribución Ji-cuadrada con 24 grados de Libertad, no podemos considerarlo como significativo al 5%, ya que $\chi_{0.05, 24}^2 = 36.4$.

Cabe mencionar aquí, que se escogió el valor de $H=24$; ya que como habíamos mencionado anteriormente, Angell y Koshrover (1973), afirman que existe un ciclo cuasibianual en las fluctuaciones de la cantidad total de Ozono estratosférico.

CONCLUSIONES.-

El trabajo realizado en esta tesis, parte de la idea de que el medio ambiente de la Ciudad de México nos ocupa (y nos preocupa) por ser habitantes de ésta. Por tal motivo, creemos que es importante el análisis de la evolución de la cantidad total de Ozono Estratosférico, con el fin de determinar si hay una tendencia decreciente en la llamada capa de Ozono, que es la que cumple funciones de "escudo protector" de la tierra (en este caso más específicamente, de la Ciudad de México, la más poblada del mundo) contra la radiación ultravioleta proveniente de los rayos solares. Lo anterior se debe a que dicha radiación en "dosis" excesivas, provocaría efectos indeseables en la Ecología y en la Salud de la población.

Así también, podemos decir que dadas la características del llamado "problema del Ozono", consistente entre otras cosas, en la imposibilidad de la determinación exacta de la cantidad total de Ozono en un momento dado (debido tanto a limitaciones técnicas en los instrumentos de medición utilizados como es el espectrofotometro Dobson en este caso, como también a la multiplicidad de factores fisicoquímicos que coadyuvan en la creación y destrucción constante del mismo, entre otros) y los patrones y variaciones inherentes a la evolución del mismo en el tiempo, dependientes de la locación geográfica y fecha en que se realizan las mediciones, obliga la utilización de las técnicas para análisis de Series de Tiempo (desde la perspectiva de Box y Jenkins en este trabajo) para representar adecuadamente dicho

fenómeno que, por la estructura de correlación entre dichas observaciones, éstas técnicas muestran una superioridad teórica y práctica sobre las de Regresión y de promedios móviles que se utilizan comunmente para tales efectos en este país.

Podemos afirmar también que, si bien las técnicas de Box-Jenkins para análisis de Series de Tiempo nos pueden indicar si hay o no una tendencia en la evolución de la cantidad total de Ozono, éstas no nos permiten saber a partir de cuándo empezó a surgir tal patrón de comportamiento, y mucho menos qué fue lo que la ocasionó.

Es mediante la utilización de las técnicas de Análisis de Intervención, que podrían ser consideradas como una extensión de las de Box-Jenkins para análisis de Series de Tiempo, que podemos averiguar si a partir de la ocurrencia de un evento exógeno al fenómeno en una fecha específica, empezó a mostrarse un cambio o tendencia "anormal", en el sentido de no poder ser explicadas a partir de los patrones y variaciones en el registro histórico de los datos.

Así, al aplicar las técnicas de Análisis de Intervención, motivado por las sospechas por parte de los especialistas del Instituto de Geofísica de la UNAM, de que la erupción del volcán Chichonal en Chiapas en Marzo de 1982, provocaría una reducción paulatina en la capa de Ozono (considerándose a este hecho como una intervención, en el sentido de la definición dada en este

trabajo) se determinó que no había evidencia empírica suficiente que confirmara esta.

En cuanto a lo anterior, cabe señalar que el hecho de no haber detectado una tendencia en los registros de la cantidad total de Ozono estratosférico, no excluye la posibilidad de que haya otros factores, como: sesgos en las mediciones por mala calibración de los instrumentos de medición sustancias contaminantes de origen antropogénico u otros procesos "naturales" que "actúen" de manera "opuesta" al fenómeno estudiado, por decir algo.

Estas técnicas, como puede intuirse, podrían ser utilizadas también para determinar si los instrumentos de medición están o no bien calibrados (la cual sucedió de hecho en el instituto de Geofísica a principios de los 70). Siendo pues de gran utilidad para futuras investigaciones.

Por otro lado, podemos decir que un problema latente en las técnicas de Análisis de Intervención descritas en este trabajo, radica en que, al basarse en las de Box-Jenkins para análisis de Series de Tiempo, acarrear las limitaciones de las mismas. Específicamente, pudimos observar que mediante esta perspectiva de análisis no fue posible detectar una componente cuasibianual presente en los datos, la cual fue identificada mediante la utilización de otra técnica para análisis de Series de Tiempo llamada: espectral (que no vimos aquí), y que concuerda con trabajos que al respecto de tal presencia han hecho Angell y

Korshover (1973).

Cabe decir también que está abierta la posibilidad de aplicar las técnicas aquí utilizadas a datos sobre la cantidad total de Ozono estratosférico que fueran obtenidos mediante satélites, para complementar los estudios que al respecto se hacen en estaciones terrenas como las aquí presentadas.

Por último, quisieramos enfatizar que el trabajo desarrollado en esta tesis, nos convenció una vez más de la importancia de las matemáticas aplicadas como una manera de pensar en la investigación, en contraposición inclusive al supuesto intento de un "enfrentamiento" valorativo con las llamadas matemáticas puras, ya que las primeras frecuentemente son menospreciadas en los Institutos de Investigación.

BIBLIOGRAFIA.-

Angell, J.K, and Korshover, J. (1973)
"Quasi-biennial and Long Term Eluctuations in Total Ozone".
Montly Weather Review, Vol. 101, No. 5, pp. 426-443

Bartlett, M.S. (1946)
"On the theoretical specification of Sampling properties of
autocorrelated time series"
Journal of the Royal Statistical Society B-8, 27.

Bartlett, M.S. (1947)
"The Use of Transformations"
Biometrika, 3, 39.

Birrer, W.M. (1974)
"Some critical remarks of Trend Analysis of Total Ozone Data"

Box, G.E.P., and Jenkins, G.M. (1970)
"Time Series Analysis, Fovecasting and Control"
San Francisco: Holden Day.

Box, G.E.P., and Tiao, G.C. (1975)
"Intervention Analysis with applications to Economics and
Environmental Problems".
Journal of the American Statistical Association, 70, pp. 70-84

Bower, F.A. (1985)
"Stratospherte Ozone and the Man"
USA

Box, G.E.P., and Tiao, G.C. (1976)
"Comparison of forecast and actuality"
Applied Statistics, 25, pp. 195-200

Box, G.E.P., and Fox, D.R. (1964)
"An analysis of transformations"
Journal of the Royal Statistical Society,
B-26, pág.211.

Bravo, C., José L. (1984)
"Determinación del espesor de la capa de Ozono con un
Espectrofotómetro de Dobson en una atmósfera urbana".
Tesis para obtener el grado de Maestría en Ciencias (Geofísica).
UNAM.

Bugajew, W.A. and Uronowa, L.A. (1967 and 1970)
"Maps of total Ozono Content. I. Jan. 1964-July 1966. II. Aug-1966-
Dec 1967. Annex. Synop. Bull. Hemisphere, Moscow"

Chatfield, C., and Prothero, D.L. (1973)
"Box-Jenkins Seasonal Forecasting: Problems in a Case Study".
Journal of the Royal Statistical Society, 136, part 3, pp. 295.

Chiang, A. (1977)
Métodos fundamentales de Economía Matemática"
Mc Graw-Hill.

Dütsch, H.U (1969)
"Atmospheric Ozono and Ultraviolet radiation"
Climate of the free Atmosphere of World Survey of Climatology,
Vol. 4. Edited by M.E. Landsberg pp. 383.432. Elsevier. Amsterdam
Netherlands.

Dütsch, H. U. (1970)
"Photochemistry of atmospheric Ozono"
Aduan. Geophys. 15, 219.

Gebhart, R., Bojkov, R.D. and London, J. (1970)
"Stratospheric Ozono: A comparison between observes and computed
models".
Beitr. phys. Atmos. 43, pp. 209-227.

Guerrero, V.M. (1983)
"El proceso Inflacionario en México. Teoría y Aplicaciones del
Análisis de Intervención"
Subdirección de Investigación Económica del Banco de México, S.A.
México.

Hamilton, David C. and Walts Donald. G. (1978)
"Interpreting partial autocorrelation functions of seasonal time
series models".
Biometrika, GS, 1, pp. 135-140.

Hill, W.J., and Sheldon. P. (1975)
"Statistical Modeling of total Ozone Measurements with an example
using Data from AROSA, Switzerland".
Geophysical Research Letters, Vol. 2, No. 12, pp. 541-544.

Hill, W. J., Sheldon, P. and Tiede J. ()
"Analyzing world wide total Ozone for frends".
Geophysical Research Letters, Vol. 4, No. 1, pp. 21-24

Hill, W.J., Sheldon P., and Tiede, J. (1979)
"Ozone Trend Detectability: update and Discussion"
Atmospheric Environment, Vol. 13, pp. 999-1005

Kendall, M. (1973)
"Time Series"
Charless Griffing of Company Limited. London. 197 pp.

Kenneth, M. (1978/1979)
"Aerosol extinction and Ozone measurements"
PAGEOPH, Vol. 117, Birkhäuser Verlag, Basel.

Komhyr, W.D., and Crass, R.D. (1972)
"Dobson Ozone spectrophotometer modification."
J. Applied. Met. 11, No. 5, pp. 858-863.

Kulkarni, R.N., and Garnham, G.L. (1970)
"Longitudinal variation of Ozone in the lower middle latitudes of

the Suthern hemisphere".
J. Geophys. Res. 75, pp. 4174-4176.

London, J. (1965)
"The Geographic distribution of the annual variation of the total Ozone".
Proc. Ozone Simp. Albuquerque, pp. 51-53. WMO, Geneve.
London, J. and Kelley, J. (1974)

London, J. Bojkov, R.D., Oltmans, S., Kelley, J. (1976)
"Atlas of the global distribution of the total Ozone July 1957-June 1967, NCAR/TN/113+STR".

Makridakis, S. and Wheelwright, C (1983)
"Forecasting: Methods and Applications"
John Wiley and Sons, 926 pp.

Marquardt, D.W. (1963)
"An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters" Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, II, 431.

Myers, G. (1977).
"A statistical study of ozone in the atmosphere, final report, covering July 1, 1975-November 31, 1976".
Report to NASA, Grant No. N561182.

Reinsel, Gregory C (1981)
"Analysis of total Ozone Data for the detection of Recent Trend and effects of Nuclear testing during the 1960".
Geophysical Research Letters, Vol. 8, No. 12, pp.1227-1230.

Reinsel, G., Tiao, G.C., Wang M.N. Lewis, R, and Nychki, D (1981)
"Statistical Analysis of Stratospheric Ozone data for the detection of trends"
Atmospheric Environment, Vol. 15, No. 99 pp. 1569-1577.

Pankratz, A (1983)
"Forecasting with univariate Box-Jenkins Models: Concepts and Cases" John Wiley and Sons. USA, pp. 562.

Tiao, G.C., BOX, G.E.P., and Hamming, W.J. (1975)
"Analysis of Los Angeles Photochemical Smog Data: an Statistical
Overview" Journal of the Air Pollution Control Association, Vol.
25, No. 3.

Tiede, J, Shaldon, P.N., and Hill, W.J. (1979)
"Ozone" trend detectability:update and discussion"
Atmospheric Environmental, 13, pp. 999.

Quenouille, M.H. (1949)
"Approximate Tests of the Correlations in Time Series"
Journal of the Royal Statistical Society, B-11,68.

Yule, (1927).
"On a method of investigating periodicities in disturbed series,
with special reference to Wolfer's sunspot numbers".
Phil. Trans. A. 226, pag.267.

Wichern, P.W. and Jones, R.M. (1977)
"Assessing the impact of Market Disturbances Using Intervention
Analysis" Management Science, 24, No. 3, pp. 329-337.