39 2y

"TECNICAS DE COMPACTIFICACION EN ESPACIOS TOPOLOGICOS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

MATEMATICO

PRESENTA:

RENE VALVERDE VENTURA.

1988

COMPACTIFICACION

Definición. Sea X un espacio topológico. Una COMPACTIFICACION de X es una pareja (Y,h), donde Y es un espacio topológico compacto y h es un homeomorfismo de X sobre un subespacio denso de Y.

Ejemplo 1. Sea (X,τ) un espacio cualquiera. Sea $Y=X\cup\{\infty\}$ donde ∞ es un objeto que no es elemento de X y sea $\sigma=\tau\cup\{Y\}$. Entonces (Y,i) es una compactificación de X, donde i es la inclusión.

Demostración. Sea $\Gamma\subset\sigma$ una familia:

si $Y\in\Gamma$, entonces $\cup\Gamma= Y\in\sigma$.

si $\Gamma\subset\tau$, entonces $\cup\Gamma\in\tau\subset\sigma$.

Sean V, W elementos de σ:

si V, $W\in\tau$, entonces $V\cap W\in\tau\subset\sigma$,

si $V=W=Y$, entonces $V\cap W = Y\in\sigma$,

si V o W es Y, entonces

$V\cap W$ es W o V y, en cualquier caso, $V\cap W$ es elemento de σ.
En consecuencia, σ es una topología en Y.

Como cualquier cubierta abierta de Y lo contiene, Y es compacto.

La única vecindad de ∞ es Y. Por lo tanto, ∞ es un punto de acumulación de X y éste resulta denso en Y.

Así, (Y,i) es una compactificación de X.[]

Observemos que Y es T_0 si X es T_0, pero si $X\neq\emptyset$, Y no es T_1.

1988

Ejemplo 2. Sea Y como en el Ejemplo 1, siendo ahora X un espacio infinito y T_1. Hagamos $\sigma = \tau \cup \{Y-F : F \subset X$ es finito$\}$

Entonces (Y,i) es una compactificación de X.

Sea $\Gamma \subset \sigma$ una familia; $\Gamma = \{V_i : i \in I\}$

si $\Gamma \subset \tau$, entonces $\cup\Gamma \in \tau \subset \sigma$.

si $\Gamma \subset \sigma - \tau$, entonces $\infty \in \cup\Gamma$ y $(\cup\Gamma)^c = (\cup V_i)^c = \cap V_i^c$,

y como V_i^c es finito para todo $i \in I$, $(\cup\Gamma)^c$ es finito y se tiene $\cup\Gamma \in \sigma$.

Sean V y W dos elementos de σ.

Si V y W son elementos de $\sigma - \tau$, entonces $(V \cap W)^c = V^c \cup W^c$ es finito por lo que $V \cap W$ es elemento de σ.

Si $V \in \tau$ y $W \in \sigma - \tau$, entonces $\infty \in V \cup W$ y $(V \cup W)^c = V^c \cap W^c$ es finito. Por lo tanto $V \cup W \in \sigma$. También $V \cap W \in \sigma$ pues $V \cap W = V - (Y - W) \in \tau$ dado que X es T_1.

De donde, si $\cup\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, con $\Gamma_1 \subset \tau$ y $\Gamma_2 \subset \sigma - \tau$, entonces $\cup\Gamma \in \sigma$.

Sea $\mathcal{D} = \{V_i : i \in I\}$, una cubierta abierta de Y. Entonces existe $j \in I$ tal que $\infty \in V_j = Y - F_j$; pero entonces sólo faltaría cubrir a F_j que es finito. Por lo tanto Y es compacto.

Como X es infinito cualquier vecindad de ∞ intersecta a X, por lo que ∞ es punto de acumulación de X y X es denso en Y. De aquí que (Y,i) sea una compactificación de X.

Ejemplo 3. Sea Y como en el Ejemplo 1. Fijemos un abierto no vacío Go de X, tal que X-Go sea compacto. Hagamos Ho=GoU{∞} y sea σ la topología generada por Σ= τU{Ho} . Entonces (Y,i) es una compactificación de X.

Sea $\mathcal{D}=\{V_i : i\in I\}$ una cubierta abierta de Y. Entonces existe $j\in I$ tal que $Ho= V_j$ y como Y= HoU(X-Go) y X-Go es compacto, Y tiene una cubierta finita en $\mathcal{D}$. Por esto, Y es compacto.

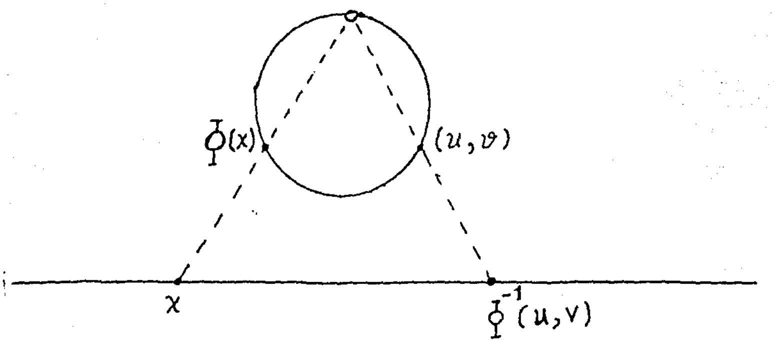
Como ∞ es punto de acumulación de X porque todas sus vecindades contienen a Ho, X es denso en Y. En consecuencia (Y,i) es una compactificación de X.[]

Ejemplo 4. Sea $Y=\{(x,y)\in R^2 : (x-h)^2+(y-k)^2=r \; ; k^2 \neq -r\}$

Sea Φ de R en Y-{(h,k+r)}, dada por:

$$\Phi(x) = \left(h + \frac{2r(k+r)(x-h)}{(x-h)^2 + (k+r)^2} \; , \; \frac{(x-h)^2 + k^2 - r^2}{(x-h)^2 + (k+r)^2}(k+r)\right)$$

$$\Phi^{-1}(u,v) = \frac{h-u}{v-(k+r)}v + u$$



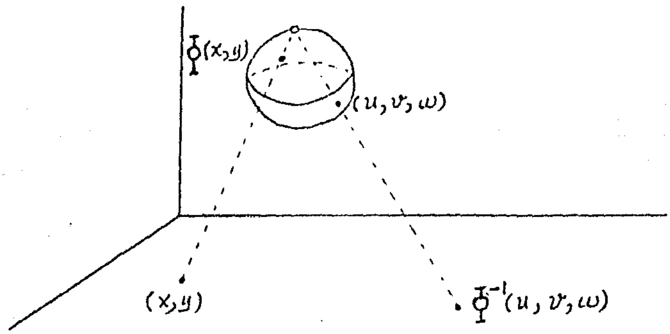
Entonces (Y,Φ) es una compactificación de R.

Observación 1. En particular S^1 es una compactificación de R.

Ejemplo 5. Sea $Y=\{(x,y,z)\in R^3 : (x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2;\ l\neq -r\}$. Definamos Φ de R^2 en $Y-\{(h,k,l+r)\}$:

$$\Phi(x,y)=\left(h+\frac{2r(l+r)(x-h)}{(x-h)^2+(y-k)^2+(l+r)^2},\ \frac{2r(l+r)(y-k)}{(x-h)^2+(y-k)^2+(l+r)^2},\ \frac{[(x-h)^2+(y-k)^2+l^2-r^2](l+r)}{(x-h)^2+(y-k)^2+(l+r)^2}\right)$$

$$\Phi^{-1}(u,v,w)=\left(u-\frac{w}{w-l-r}(u-h),\ v-\frac{w}{w-l-r}(v-k)\right)$$

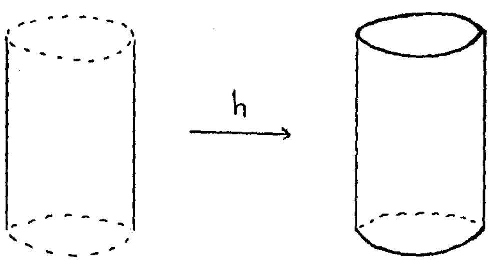


Entonces (Y,Φ) es una compactificación de R^2.

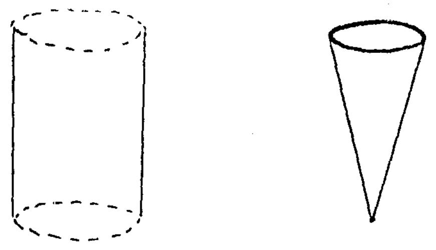
Observación 2. En particular S^2 es una compactificación de R^2.

Generalizando las observaciones 1 y 2 tenemos que S^n es una compactificación de R^n.

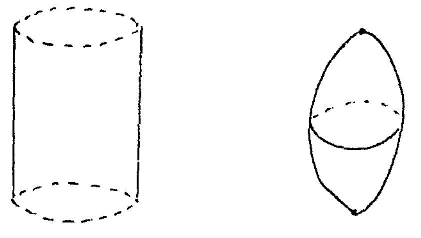
Ejemplo 6. Sea Y el cilindro $S^1\times I$ y sea $X=S^1\times(0,1)$. Definamos $h=i$, la inclusión. Entonces (Y,h) es una compactificación de X.



Ejemplo 7.



Ejemplo 8.



Ejemplo 9. Sea $X=R^2$ y sea $Y=X\cup(\infty)$. Sea τ la topología usual de R^2 y sea $\sigma=\tau\cup\{\,Y-K : K$ compacto en $X\,\}$.

Esta compactificación es con mucho la más famosa de todas las compactificaciones unipuntuales y se generaliza en el siguiente:

Teorema 1. Sea (X,τ) un espacio topológico, con X no compacto. Sea $X^*=X\cup(\infty)$, donde ∞ es un objeto que no es elemento de X. Hagamos $\tau^*=\tau\cup(X^*-K$: K compacto cerrado de X). Entonces (X^*,i) es una compactificación de X.

Demostración. La unión de elementos de τ es elemento de τ^*. La unión de elementos de $\tau^*-\tau$ es elemento de τ^*, porque si $\Gamma\subset\tau^*-\tau$, entonces $\Gamma=(V_i)$, $i\in I$, donde $V_i=X^*-K_i$, y K_i es compacto cerrado de X para cada $i \in I$. Luego

$$\begin{aligned} U\Gamma &= \bigcup_{i\in I} V_i \\ &= \bigcup_{i\in I} (X^* - K_i) \\ &= X^* - \bigcap_{i\in I} K_i \end{aligned}$$

y como $\bigcap_{i\in I} K_i$ es compacto cerrado de X, $U\Gamma \in \tau^* - \tau$.

Sean $V \in \tau$ y $W \in \tau^* - \tau$. Entonces

$$X^* - (V \cup W) = (X^* - V) \cap (X^* - W)$$

es compacto cerrado en X. Por lo tanto, $V \cup W$ es abierto en X^*.

Por otro lado, $V \cap W$ es abierto en X^* porque $W \cap X$ es abierto en X por ser complemento de un cerrado, y V es abierto en X.

Como cualquier cubierta abierta de X^* contiene un abierto Go tal que $\infty \in$ Go, y el complemento de Go es compacto en X, X^* es compacto.

Como cualquier abierto de X^* que contiene a ∞ intersecta a X, X es denso en X^*. []

Nota: Nos referiremos a esta como la COMPACTIFICACION DE ALEXANDROFF.

Teorema 2. X^* es To si y sólo si X es To.

Demostración. Si X^* es To, entonces X es To por ser subespacio de X^*.

Supongamos que X es T_0. Sea $x \in X$ y $y = \infty$. Entonces, como X es abierto en X^*, X^* es T_0.[]

Teorema 3. X^* es T_1 si y sólo si X es T_1.

Demostración. Necesidad. Si X^* es T_1 entonces X es T_1 por ser subespacio de X^*.

Recíprocamente, supongamos que X es T_1 y sea $x \in X^*$. Si $x \in X$, entonces $\{x\}$ es compacto y cerrado en X, de ahí que $\{x\}$ sea cerrado en X^*.

Si $x = \infty$, entonces $\{x\}$ es cerrado en X^* porque $X = X^* - \{\infty\}$ es elemento de τ^*. Por lo tanto, X^* es T_1.[]

Definición. (X,τ) es R_0 si $x \in A \in \tau \Longrightarrow \overline{x} \subseteq A$.

Teorema 4. Sea (X,τ) un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. X es R_0
2. $x \in \overline{y} \Longrightarrow y \in \overline{x}$
3. $x \in \overline{y} \Longrightarrow \overline{x} = \overline{y}$

Demostración. (1)==>(2). Sea $x \in \overline{y}$. Sea A una vecindad abierta de y. Entonces $\overline{y} \subseteq A$ y $x \in A$. De aquí que $y \in \overline{x}$.
(2)==>(3). Si $x \in \overline{y}$, entonces $y \in \overline{x}$. Por lo que $\overline{x} \subseteq \overline{y}$ y $\overline{y} \subseteq \overline{x}$.
(3)==>(1). Supongamos que $x \in A \in \tau$. Si $\overline{x} \not\subseteq A$, entonces existe $y \in \overline{x}$ tal que $y \notin A$. En consecuencia $y \in A^c$ y $\overline{y} \subseteq A^c$. Por lo tanto $\overline{x} = \overline{y} \subset A^c$, lo cual es una contradicción.[]

Teorema 5. X^* es Ro si y sólo si X es Ro.

Demostración. Si X^* es Ro, entonces X lo es por ser subespacio de X^*.

Supongamos que X es Ro. Sea $x\in X^*$ y $A\subset X^*$ abierto en X^* tal que $x\in A$. Si $x\in X$, $x\in A\cap X$ y $A\cap X$ es abierto en X, por lo tanto $\bar{x}\subseteq A\cap X\subseteq A$.

Si $x=\infty$, $\bar{x}=x$ ya que $x=X^*-X$ y por tanto $x\in\bar{x}\subset A$. De aquí que X^* sea Ro.[]

Definición. (X,τ) es R_1 si $y\notin\bar{x}$ implica que x y y tienen vecindades ajenas.

Teorema 6. Sea (X,τ) un espacio topológico. Entonces X es R_1 si y sólo si $\bar{x}\neq\bar{y}$ implica que x y y tienen vecindades ajenas.

Demostración. Necesidad. Supongamos que toda vecindad de x intersecta a cada vecindad de y. Entonces $\bar{x}=\bar{y}$. De aquí que $y\in\bar{x}$. Lo cual implica que X no es R_1.

Suficiencia. Si $y\notin\bar{x}$, entonces $\bar{x}\neq\bar{y}$ y por hipótesis x y y tienen vecindades ajenas.[]

Afirmación 6.1. $R_1 \implies$ Ro.

Demostración. Sea $y\in\bar{x}$. Entonces toda vecindad de y contiene a x; luego toda vecindad de y intersecta a cada vecindad de x. Por el Teorema 6 tenemos $\bar{x}=\bar{y}$.[]

Definición. Diremos que un espacio topológico X es LOCALMENTE COMPACTO si cada punto en X tiene una vecindad compacta.

Teorema 7. Un espacio R_1 es localmente compacto si y sólo si todo x tiene una vecindad compacto-cerrada.

Demostración. Necesidad. Sea x un elemento del espacio. Por hipótesis existen A abierto y K compacto tales que $x \in A \subset K \subset \overline{K}$. Veremos que $\overline{K}$ es compacto.

Sea $z \in \overline{K}$. Si $\overline{z} \cap K = \emptyset$, entonces existe una vecindad abierta de z que no intersecta a K, lo cual contradice el que z sea un punto de la cerradura de K. Así, $\overline{z} \cap K \neq \emptyset$. Sea ahora $y \in \overline{z} \cap K$. Como el espacio es Ro y $y \in \overline{z}$, tenemos $z \in \overline{y}$, lo cual prueba que $\overline{K} \subseteq \bigcup_{y \in K} \overline{y}$.

Supongamos ahora que $K \subset V$, con V abierto. Entonces, para cada y en K, $\overline{y} \subset V$. Por tanto $\overline{K} \subseteq \bigcup_{y \in K} \overline{y} \subset V$.

Sea ahora $\mathcal{D}$ una cubierta abierta de $\overline{K}$. Entonces también cubre a K. Como K es compacto existe una subcubierta de $\mathcal{D}$ que cubre a K y por el resultado previo también a $\overline{K}$. De aquí que $\overline{K}$ sea compacto.[]

Lema 8. En un espacio R_1 la propiedad de ser localmente compacto es hereditaria para los abiertos.

Demostración. Sea A abierto y sea $x \in A$. Por el Teorema 7 existe K compacto cerrado en X vecindad de x. Como K es regular, X es regular. Por tanto, x tiene una base β de vecindades cerradas compactas en X. Luego, { B∩A: B∈β} es una base de vecindades compactas cerradas de x. De aquí que exista V⊂ A vecindad compacta de x. Es claro que V es también una vecindad compacta de x en el subespacio A.[]

Teorema 9. X^* es R_1 si y sólo si X es R_1 y localmente compacto.

Demostración. Si X^* es R_1, entonces X es R_1. Como X^* es localmemte compacto y X es abierto en X^*, X es localmente compacto.

Supongamos ahora que X es R_1 y localmente compacto. Sean $x,y\in X^*$ con $\bar{x}\neq\bar{y}$.

Si $x,y\in X$ nada hay que probar.

Si $y=\infty$, entonces, por hipótesis, x tiene en X una vecindad compacta y cerrada K. Entonces K y X^*-K son vecindades ajenas de x y y respectivamente. Por lo tanto, X^* es R_1.[]

Lema 10. X es T_2 si y sólo si X es R_1 y To.

Demostración. Si X es T_2, entonces $\bar{x}\neq\bar{y}$ implica $x\neq y$, lo cual a su vez implica que x y y tienen vecindades ajenas.

Recíprocamente, si X es R_1 y To, entonces también es T_1. Por lo tanto, $x\neq y$ implica $\bar{x}\neq\bar{y}$. En consecuencia, x y y tienen vecindades ajenas.[]

Teorema 11. X^* es T_2 si y sólo si X es T_2 y localmente compacto.

Demostración. Si X^* es T_2, entonces X es T_2 y localmente compacto porque X^* es R_1 por el Lema 10.

Supongamos que X es T_2 y localmente compacto. Entonces X es R_1 y localmente compacto. Entonces X^* es R_1 por el Teorema 9 y es To, así que X^* es T_2 por el Lema 10.[]

Corolario 12. Si X es localmente compacto y R_1, entonces X es completamente regular.

Demostración. Si X es localmente compacto y R_1, entonces X^* es R_1. Probaremos que X^* es normal. Sean A y B cerrados ajenos no vacíos en X^*. Como X^* es compacto A y B son compactos.

Sea $x\in A$. Entonces para cada $y\in B$, $y\notin \bar{x}$, por tanto x y y tienen vecindades ajenas U_y y V_y, respectivamente. Como B es compacto la cubierta abierta $(V_y : y\in B)$ debe tener una subcubierta finita, digamos

$$V_{y_1}, V_{y_2}, \ldots, V_{y_n}.$$

Luego $U_x = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ y $V_x = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ son vecindades ajenas de x y B respectivamente. Por otro lado, como A es compacto la cubierta abierta de A, $(U_x : x\in A)$ tiene una subcubierta finita, digamos

$U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_m}$.

De aquí que $U = \bigcup_{i=1}^{m} U_x$ y $V = \bigcap_{i=1}^{m} V_x$ sean vecindades ajenas de A y B. Así pues, X^* es normal.

Sea A un cerrado no vacío de X^* y sea x cualquier punto en el complemento de A. Entonces, $\bar{x} \cap A = \emptyset$, ya que X^* es Ro. Por el Lema de Urysohn, existe una función de Urysohn para $\bar{x}$ y A, la cual es también una función de Urysohn para x y A. De aquí que X^* sea completamente regular y, en consecuencia, lo sea X.[]

Corolario 13. Si X es localmente compacto y T_2, entonces X es de Tychonoff.

Demostración. Si X es localmente compacto y T_2, entonces X^* es T_2 y compacto. Por tanto X^* es de Tychonoff y X es completamente regular.[]

Dado que existen múltiples compactificaciones de un mismo espacio, es conveniente relacionarlas. Para esto daremos la siguiente:

Definición. Sean (Y,f) y (Z,g) dos compactificaciones de un espacio X. Decimos que Y DOMINA a Z y escribimos $(Y,f) \geq (Z,g)$ si existe una función continua h de Y sobre Z tal que h f = g.

Afirmación 14. "$\geq$ " es reflexiva y transitiva.

Demostración. Como $id_Y \circ f=f$, $(Y,f)\geq (Y,f)$.

Si $(Y,f)\geq (Z,g)$ y $(Z,g)\geq (W,h)$ existen h_1 y h_2 tales que $h_1 \circ f=g$ y $h_2 \circ g=h$.

Pero entonces $h_2 \circ h_1 \circ f=h_2 \circ g=h$ por lo que se tiene la transitividad de la relación.[]

Definición. Si (Y,f) y (Z,g) son dos compactificaciones de un espacio X, diremos que son EQUIVALENTES y escribiremos $Y\approx Z$, si $(Y,f)\geq (Z,g)$ y $(Z,g)\geq (Y,f)$.

Teorema 15. Si (Y,f) y (Z,g) son dos compactificaciones de X y, f y g son topológicamente equivalentes, entonces son compactificaciones equivalentes.

Demostración. Por hipótesis existe un homeomorfismo h de Y en Z tal que y $h\circ f=g$. De aquí tenemos que $(Y,f)\geq (Z,g)$ Además $h^{-1}\circ g=f$ y entonces también $(Z,g)\geq (Y,f)$. Por lo tanto, $Y\approx Z$.[]

Teorema 16. Sean (Y, τ) y (Y, σ) dos compactificaciones unipuntuales de X. Entonces $(Y, \tau)\geq (Y, \sigma)$ si y sólo si $\sigma\subseteq\tau$. Consecuentemente, $(Y, \tau)\approx (Y, \sigma)$ si y sólo si $\tau=\sigma$.

Teorema 17. La compactificación de Alexandroff es el elemento más grande en el conjunto de todas las compactificaciones unipuntuales.

Demostración. Sea τ una topología cualquiera sobre $X\cup\{\infty\}$ que compactifica a X. Sea $G\in\tau$. Si $G\subseteq X$, entonces $G=G\cap X$ es abierto en X. Por lo tanto, $G\in\tau^*$. Por otro lado, si $\infty\in G$, entonces G^c es compacto. También $G^c=G^c\cap X$ es cerrado en X. Se sigue que $G\in\tau^*$. Esto prueba que $\tau\subseteq\tau^*$. []

Lema 18. Una topología T_2 y compacta en un espacio X es la mínima entre las topologías Hausdorff de X.

Teorema 19. Si un espacio X tiene una compactificación unipuntual T_2, entonces debe coincidir con X^*.

Demostración. Supongamos que τ es una topología T_2 sobre $X\cup\{\infty\}$ que compactifica a X. Entonces $\tau\subseteq\tau^*$. Pero τ^* es también una topología T_2. Entonces, por el Lema 18, $\tau=\tau^*$. []

De aquí que podamos hablar de "la" compactificación T_2 unipuntual de un espacio X.

COMPACTIFICACION DE STONE-ČECH

Para estudiar esta importante compactificación necesitaremos de las definiciones y resultados siguientes.

Definición. Sea $(X_i : i\in I)$, una familia de conjuntos. Una función f de I en $\bigcup_{i\in I} X_i$ tal que

$f(i)\in X_i$ para todo i en I.

se llama una FUNCION DE ELECCION sobre la familia (X_i).

Una familia (x_i), $i\in I$, $x_i \in X_i$ es llamada un SISTEMA DE REPRESENTANTES de (X_i).

Definición. Al conjunto de todas las funciones de elección sobre (X_i) le llamaremos el PRODUCTO CARTESIANO de la familia (X_i) y lo denotaremos por $\prod_I X_i$.

Definición. La i-ésima PROYECCION es la función p_i de $\prod_I X_i$ en X_i dada por:

$$p_i(f)=f(i)\in X_i \qquad (*)$$

Lema 20. Si $p_i(f)=p_i(g)$ para todo $i\in I$, entonces $f=g$.

PROPIEDAD UNIVERSAL DE LAS PROYECCIONES

Dada una familia de funciones $(f_i : X \longrightarrow Y_i)$, $i\in I$, con un dominio común, existe exactamente una función

$$e: X \longrightarrow \prod_I Y_i$$

que satisface $$p_i \circ e=f_i \ , \ i\in I \qquad (\#)$$

A e se le llama la FUNCION EVALUACION de la familia.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "e"] \arrow[dr, "f_i"'] & \prod_I Y_i \arrow[d, "p_i"] \\ & Y_i \end{tikzcd}$$

EJEMPLOS

Si $(X_i : i\in I)$ es una familia tal que $X_i = X$ para cada $i\in I$, el producto cartesiano de esta familia se escribe como X^I.

Consideremos ahora una familia $(f_i : X\to Y)_{i\in I}$. Si pensamos que $Y_i = Y$, la evaluación de esta familia es una función $e: X\to Y^I$.

Enseguida, sea Γ un conjunto de funciones de X en Y esto es, $\Gamma \subset Y^X$. Podemos autoindicar Γ. En otras palabras, consideramos $(f: X\to Y : f\in \Gamma)$ como una familia de funciones de X a Y indicada por Γ. Así, Γ juega un doble papel, como una familia de funciones de X a Y y como un conjunto de índices. La evaluación de esta familia es, así, una función

$$e_\Gamma : X\to Y^\Gamma$$

caracterizada por

$$p_f \circ e_\Gamma = f \quad \text{para cada } f\in\Gamma. \qquad (**)$$

Definición. Sea $(f_i : X\to Y_i)$ una familia de funciones con dominio común. Se dice que la familia DISTINGUE puntos si dados $x\neq y$ en X, existe j tal que $f_j(x)\neq f_j(y)$.

Afirmación 21. La evaluación de la familia (f_i) es uno a uno si y sólo si la familia distingue puntos;

Definición. La TOPOLOGIA INICIAL de una familia $\{f_i : X \to (Y_i, \sigma_i)\}$, $i \in I$, es la generada por la subbase

$$\Sigma_1 = \{f_i^{-1}(U_i) : U_i \in \sigma_i\}, \ i \in I.$$

Teorema 21.1. Sea $\{f_i : X \to (Y_i, \sigma_i)\}$, $i \in I$ una familia de funciones. Si, para cada $i \in I$, Σ_i es una subbase de σ_i, entonces

$$\Sigma_2 = \{f_i^{-1}(S_i) : S_i \in \Sigma_i\}, \ i \in I,$$

genera la topología inicial de (f_i).

Teorema 21.2. (Transitividad de las topologías iniciales). Sea $\{f_i : X \to (Y_i, \sigma_i)\}$, $i \in I$, una familia de funciones. Supongamos que para cada i en I, hay una familia de funciones

$$\{g_{ij} : Y_i \to (Z_{ij}, \sigma_{ij})\}, \ j \in J_i.$$

Si cada Y_i tiene la topología inicial de $\{g_{ij}\}$, j en J_i y X tiene la topología inicial de $\{f_i\}$, $i \in I$, entonces esta topología coincide con la topología inicial de las composiciones

$$\{g_{ij} \circ f_i\}, \ i \in I, \ j \in J_i.$$

Demostración. Para cada i, el conjunto

$$\{g_{ij}^{-1}(V_{ij}) : V_{ij} \in \sigma_{ij}, j \in J_i\}$$

es una subbase para la topología inicial de Y_i. Luego, para la topología inicial de (f_i) una subbase está dada por

$$\{f_i^{-1}(g_{ij}^{-1}(V_{ij})) : V_{ij} \in \sigma_{ij}, j \in J_i, i \in I\} = \{(g_{ij} \circ f_i)^{-1}(V_{ij}) : V_{ij} \in \sigma_{ij}, j \in J_i, i \in I\}.$$

La última es precísamente una subbase para la topología inicial de $\{g_{ij} \circ f_i : j \in J_i, i \in I\}$.

Esto prueba que las dos topologías son iguales.[]

La TOPOLOGIA PREIMAGEN de $f:X \rightarrow (Y,\sigma)$ es la más pequeña topología de X que hace continua a f.

Teorema 22. Supongamos que $f:(X,\tau) \rightarrow Y$ es una función, y $\{g_i : Y \rightarrow (Z_i,\sigma_i)\}$ es una familia de funciones. Demos a Y la toplogía inicial de $\{g_i\}$.

(1) f es τ-continua si y sólo si τ contiene la topología inicial de $\{g_i \circ f\}$.

(2) f es τ-continua si y sólo si cada $g_i \circ f$ es τ-continua.

(3) f es τ-abierta si τ está contenida en la topología inicial de $\{g_i \circ f\}$.

Demostración. (1) Por la transitividad de la topología inicial, la topología preimagen de f es también la topología inicial de $\{g_i \circ f\}$.

(2) f es τ-continua si y sólo si τ incluye a la topología preimagen de f, y esto ocurre si y sólo si τ contiene a la topología inicial de $\{g_i \circ f\}$, lo cual a su vez pasa si y sólo si cada $g_i \circ f$ es τ-continua.

(3) Sea σ la topología inicial de $\langle g_i \circ f \rangle$ y supongamos que $\tau \subset \sigma$. Sea $W \in \tau$ y sea $x \in W$. Entonces

$$x \in f^{-1}(g_{i_1}^{-1}(V_1) \cap g_{i_2}^{-1}(V_2) \cap \ldots \cap g_{i_n}^{-1}(V_n)) \subset W$$

para subbásicos $V_1, \ldots, V_n$ de $Z_1, \ldots, Z_n$.

Pero entonces $f(x) \in g_{i_1}^{-1}(V_1) \cap \ldots \cap g_{i_n}^{-1}(V_n) \subset f(W)$.

De aquí que f sea τ-abierta.[]

Teorema 23. Sea $f:(X,\tau) \to \prod_I Y_i$.

(1) f es continua si y sólo si τ contiene la topología inicial de $\langle p_i \circ f \rangle$.

(2) f es continua si y sólo si $p_i \circ f$ es continua para cada $i \in I$.

(3) f es abierta si τ está contenida en la topología inicial de $\langle p_i \circ f \rangle$.

Teorema 24. Sea e la evaluación de la familia

$$\langle f_i : (X,\tau) \longrightarrow (Y_i, \sigma_i) \rangle.$$

(1) e es continua si y sólo si cada f_i lo es.

(2) e es continua si y sólo si τ contiene la topología inicial de $\langle f_i \rangle$.

(3) e es una inmersión si y sólo si τ es la topología inicial de (f_i) y (f_i) distingue puntos.

Demostración. (1) y (2) se siguen del Teorema 23 y de que $p_i \circ e = f_i$.

(3) combinando (2) con la Afirmación 21 y el Teorema 23(3) se obtiene el resultado.[]

Corolario 25. Si X tiene la topología inicial de (f_i) y (f_i) distingue puntos, entonces $e: X \longrightarrow e(X)$ es abierta y cerrada.

Afirmación 26. Sea D un subconjunto denso de X, y $F: X \longrightarrow Y$ una extensión continua de $f: D \longrightarrow Y$. Entonces el rango de F está incluido en la cerradura de $f(D)$.

Demostración. $F(X)=F(\bar{D})$ $\overline{F(D)}=\overline{f(D)}$.[]

Teorema 27. Sea X un espacio compacto, Y un espacio Hausdorff y $f: X \longrightarrow Y$ continua. Entonces

(1) f es cerrada.

(2) Para cada compacto K en Y, $f^{-1}(K)$ es compacto.

(3) Si el rango de f es denso en Y, entonces f es sobre.

(4) Si f es uno a uno, entonces f es una inmersión.

Demostración. (1) Sea $F \subset X$ cerrado. Entonces F es compacto y $f(F)$ es compacto y, por lo tanto, cerrado.

(2) Si K es compacto en Y, entonces K es cerrado en Y. Por tanto, $f^{-1}(K)$ es cerrado en X. En consecuencia $f^{-1}(K)$ es compacto.

(3) $f(X)=\overline{f(X)}=Y$

(4) $f:X\to f(X)$ es invertible, continua y cerrada.[]

A menos que se diga lo contrario las compactificaciones serán T_2.

Teorema 28. Sean f y g dos funciones continuas de X en un espacio Hausdorff Y. Si f y g coinciden sobre un subconjunto denso de X, entonces $f=g$.

Demostración. Sea $F=\{x\in X: f(x)=g(x)\}$. Sea $\Delta\subset Y\times Y$ la diagonal y sea $\theta: X\longrightarrow Y\times Y$.
$x\longmapsto\theta(x)=(f(x),g(x))$

Entonces, como Δ es cerrado y $\theta^{-1}(\Delta)=F$, tenemos que F es cerrado porque θ es continua. Además $\Delta\subset F$ y por tanto $X=\overline{\Delta}\subset F$. De aquí tenemos que $F=X$ y $f=g$.[]

Teorema 29. Sean (Y,f) y (Z,g) dos compactificaciones de X.

(1) $(Y,f)\geq(Z,g)$ si y sólo si existe una función h de Y en Z, continua, tal que $h\circ f=g$.

(2) $(Y,f)\approx(Z,g)$ si y sólo si existe una función h de Y en Z, continua e inyectiva tal que $h\circ f=g$.

Demostración. (1) La necesidad es clara.

Sea ahora una función $h:Y\rightarrow Z$ tal que $h\circ f=g$. Entonces, por el Teorema 27, h es sobre y tenemos $(Y,f)\geq(Z,g)$.

(2) Si existe una tal h, entonces por el Teorema 27 h es sobre y cerrada y, en consecuencia, un homeomorfismo. f y g son entonces topológicamente equivalentes y, por el Teorema 15, se tiene $Y\approx Z$.

Recíprocamente, supongamos que $Y\approx Z$. Entonces existen funciones continuas $h:Y\rightarrow Z$ y $k:Z\rightarrow Y$ tales que $h\circ f=g$ y $k\circ g=f$. Entonces $k\circ h\circ f=k\circ g=f$. De aquí que la restricción de $k\circ h$ a $f(X)$ sea la identidad sobre $f(X)$. Por el Teorema 28 tenemos que $k\circ h=id_Y$, y así h es uno a uno.[]

*

Denotaremos por C al conjunto de las funciones continuas de un espacio topológico X a I.

Teorema 30. (de Inmersión de Tychonoff.) Para un espacio topológico X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) X es de Tychonoff.

(2) Existe una inmersión de X en un producto de espacios métricos.

(3) Existe una inmersión de X en un producto de copias de R.

(4) Existe una inmersión de X en un producto de copias de I.

Demostración. (1)==>(4). Ya que X es completamente regular, su topología es la topología inicial de C^*. Y como X es también T_0 $e: X \longrightarrow I^{C^*}$ es una inmersión.

(4)==>(3)==>(2). Triviales.

(2)==>(1). Porque un espacio métrico es de Tychonoff y un producto de espacios de Tychonoff es de Tychonoff.[]

Teorema 31. Sea X un espacio de Tychonoff, y sea $e: X \longrightarrow I^{C^*}$ la evaluación del conjunto C^*. Entonces $e: X \to \overline{e(X)}$ es una compactificación Hausdorff de X.

Demostración. Como se vió en la demostración del Teorema 30 $e: X \longrightarrow I^{C^*}$ es una inmersión. $\overline{e(X)}$ es un compacto Hausdorff ya que es cerrado en I^{C^*} que es compacto y T_2.[]

A esta se le conoce como la COMPACTIFICACION STONE-CECH de X y, se le denota como $\beta(X)$.

Corolario 32. Un espacio X tiene una compactificación Hausdorff si y sólo si X es de Tychonoff.

Teorema 33. Sea X un espacio de Hausdorff compacto. Entonces toda compactificación Hausdorff de X es equivalente a X. En particular, $\beta(X)$ es equivalente a X.

Demostración. Supongamos que X es Hausdorff y compacto. Entonces X es su propia compactificación Hausdorff. Además, si Y es cualquier compactificación Hausdorff de X. Entonces X es cerrado en Y; por tanto X no puede ser denso en Y a menos que X=Y.[]

Lema 34. Sean X y Y espacios tológicos (no necesariamente de Tychonoff.); $e:X \longrightarrow I^{C^*(X)}$ y $E:Y \longrightarrow I^{C^*(Y)}$ las evaluaciones de $C^*(X)$ y $C^*(Y)$ respectivamente; y p_f, q_g la f-ésima proyección de $I^{C^*(X)}$ y la g-ésima proyección de $I^{C^*(Y)}$, respectivamente.

Si $\varphi:X \quad Y$ es continua, entonces existe una función continua $\varphi^*:I^{C^*(X)} \longrightarrow I^{C^*(Y)}$ tal que

(i) $\qquad \varphi^* \circ e = E \circ \varphi$.

Esto es, el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\varphi"'] & I^{C^*(X)} \arrow[d, "\varphi^*"] \\ Y \arrow[r, "E"'] & I^{C^*(Y)} \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración. Para cada $g \in C^*(Y)$, $g \circ \varphi \in C^*(X)$. Luego, $\{p_{g\circ\varphi} : g \in C^*(Y)\}$ es una familia de funciones continuas de

$I^{C^*(X)}$ a I indicada por el conjunto $C^*(Y)$.

Si $\Phi^* : I^{C^*(X)} \dashrightarrow I^{C^*(Y)}$ es la evaluación de la familia, entonces por el Teorema 24 Φ^* es continua. Más aún, si aplicamos (**) (pág. 16) a Φ^*, e y E obtenemos

(ii) $q_g \circ \Phi^* = p_{g\circ\Phi}$, para todo g en $C^*(Y)$;

(iii) $p_f \circ e = f$, para todo f en $C^*(X)$;

(iv) $q_g \circ E = g$, para todo g en $C^*(Y)$.

De aquí tenemos

$$q_g \circ \Phi^* e = p_{g\circ\Phi} \circ e = g \circ \Phi = q_g \circ E \circ \Phi.$$

Como esto es cierto para todo q_g; de (*) (pág. 15) se sigue (i).[]

Teorema 35. Sean X y Y espacios de Tychonoff. Entonces toda función continua $\Phi : X \longrightarrow Y$ tiene una única extensión continua $\Phi^* : \beta(X) \longrightarrow \beta(Y)$. (Notación: $\Phi^* = \beta(\Phi)$.)

Demostración. Sea

$$\Phi^* : I^{C^*(X)} \dashrightarrow I^{C^*(Y)}$$

la función construida en el Lema 34. Entonces su restricción $\Phi^* : \beta(X) \quad I^{C^*(Y)}$ también es continua. Usando (i), vemos que

$\Phi(e(X)) \subseteq E(Y)$. Así, por la Afirmación 26, el rango de $\beta(\Phi)$ restringido a $\beta(X)$ está incluido en $\beta(Y)$. Podemos escribir por tanto

$$\beta(\Phi): \beta(X) \longrightarrow \beta(Y).$$

(i) muestra que $\Phi: X \longrightarrow Y$ es topológicamente equivalente a la restricción $\Phi^*\big|_{e(X)} : e(X) \longrightarrow E(Y)$. En consecuencia, si identificamos las dos, $\beta(\Phi)$ se puede considerar como una extensión de Φ.

La unicidad se sigue del hecho de que el codominio es Hausdorff y del Teorema 28.[]

Teorema 36. (Stone-Čech.) Sea X de Tychonoff y Y de Hausdorff y compacto. Entonces toda función continua $\Phi: X \longrightarrow Y$ tiene una única extensión continua $\beta(\Phi): \beta(X) \longrightarrow Y$.

Definición. 1) Si X es un conjunto y $\mathcal{G} \subset 2^X$, definimos $C(\mathcal{G}) = \{A : X - A \in \mathcal{G}\}$.

2) $\mathcal{G}$ es ANULAR si dados $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ también $G_1 \cap G_2$ y $G_1 \cup G_2$ están en $\mathcal{G}$.

3) $\mathcal{G}$ es REGULAR si para cada $G \in \mathcal{G}$ y cada $x \in G$, existe H en $C(\mathcal{G})$ tal que $x \in H \subset G$.

4) $\mathcal{G}$ es NORMAL si para cada par $H_1, H_2 \in C(\mathcal{G})$ con $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ existen $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ tales que

$$H_1 \subset G_1, \quad H_2 \subset G_2 \quad \text{y} \quad G_1 \cap G_2 = \emptyset .$$

5) Una base $\mathcal{B}$ de un espacio X es una BASE DE WALLMAN de X si $\mathcal{B}$ es anular y regular.

Afirmación 37. La topología de un espacio X es una base de Wallman normal de X si y sólo si X es R_o y normal.

Demostración. Supongamos que (X,τ) es R_o y normal. Si $A,B \in \tau$, entonces $A\cup B$, $A\cap B \in \tau$. Por tanto τ es anular.

Sea $G\in\tau$ y sea $x\in G$. Por ser X R_o, $\bar{x}\subset G$. Entonces $x\in\bar{x}\subset G$ y $\bar{x}\in C(\tau)$; por lo que τ es regular y, de Wallman.

Sean $H_1, H_2 \in C(\tau)$, $H_1\cap H_2=\emptyset$. Como X es normal existen $A, B\in\tau$ tales que $H_1\subset A$, $H_2\subset B$ y $A\cap B=\emptyset$. De aquí que τ sea normal.

Supongamos ahora que τ es una base de Wallman normal de X. Sea $x\in X$, sea $G\in\tau$ y supongamos que $x\in G$. Como τ es regular, existe $H\in C(\tau)$ tal que $x\in H\subset G$. Pero $\bar{x}\subseteq H$. Por lo tanto $x\in\bar{x}\subseteq H\subset G$ y X es R_o.

Sean H_1 y H_2 cerrados ajenos de X. Como H_1 y H_2 están en $C(\tau)$ y τ es normal, existen $A,B\in\tau$ tales que $H_1\subset A$, $H_2\subset B$ y $A\cap B=\emptyset$. De aquí que X sea normal.[]

Definición. Un subconjunto Z de X se denomina CONJUNTO CERO si existe $f:X \to I$ continua tal que $Z = f^{-1}(\emptyset)$. Un conjunto cuyo complemento es un conjunto cero es llamado CONJUNTO COCERO.

Afirmación 38. La familia de conjuntos coceros de un espacio completamente regular X es una base de Wallman normal de X.

Afirmación 39. Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff y sea $\mathcal{B}=\{V\subset X : V\in\tau$ y $\overline{V}$ o V^c compacto $\}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base de Wallman normal de X.

Demostración. Como X es localmente compacto, $\mathcal{B}$ es una base de τ. Esto es, dado A abierto tal que $x\in A$, existe V abierto tal que $x\in V\subset\overline{V}\subset A$ con $\overline{V}$ compacto.

Sean V_1, V_2 en $\mathcal{B}$.

(i) Si $\overline{V_1}$ y $\overline{V_2}$ son compactos, entonces, como $\overline{(V_1\cap V_2)}\subset\overline{V_1}$, $\overline{(V_1\cap V_2)}$ es compacto. Por lo tanto $V_1\cap V_2\in\mathcal{B}$.

(ii) Si V_1^c, V_2^c son compactos, entonces $(V_1\cap V_2)^c = V_1^c\cup V_2^c$ es compacto y por tanto $V_1\cap V_2\in\mathcal{B}$.

(iii) Si $\overline{V_1}$ y V_2^c son compactos, entonces $\overline{(V_1\cap V_2)}\subset\overline{V_1}$ y $\overline{(V_1\cap V_2)}$ es compacto. De aquí que $V_1\cap V_2\in\mathcal{B}$.

(iv) Si $\overline{V_1}$ y $\overline{V_2}$ son compactos, $\overline{(V_1\cup V_2)}=\overline{V_1}\cup\overline{V_2}$ es compacto y tenemos $V_1\cup V_2\in\mathcal{B}$.

(v) Si V_1^c y V_2^c son compactos, entonces $(V_1\cup V_2)^c = V_1^c\cap V_2^c$ es compacto y $V_1\cup V_2\in\mathcal{B}$.

(vi) Si $\overline{V_1}$ y V_2^c son compactos, entonces $(V_1\cup V_2)^c\subset V_2^c$ de manera que $V_1\cup V_2\in\mathcal{B}$. []

Afirmación 40. Sea (X,τ) un espacio Hausdorff y periféricamente compacto [illegible] X [illegible] de una base formada por abiertos con frontera compacta). Entonces

$$\mathcal{B} = \{ V \in \tau : \operatorname{Fr} V \text{ es compacto} \}$$

es una base de Wallman normal de X.

Demostración. Sean $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$. Entonces $\operatorname{Fr}(V_1 \cup V_2)$ es subconjunto de $\operatorname{Fr}V_1 \cup \operatorname{Fr}V_2$ y $\operatorname{Fr}(V_1 \cap V_2) \subset \operatorname{Fr}V_1 \cup \operatorname{Fr}V_2$ por lo que tenemos que $\operatorname{Fr}(V_1 \cup V_2)$ y $\operatorname{Fr}(V_1 \cap V_2)$ son compactos y $\mathcal{B}$ es anular.[]

Afirmación 41. Si X no es vacío y $\mathcal{B}$ es una base de Wallman normal de X, entonces $\emptyset \in \mathcal{B}$.

Demostración. Como X no es vacío, existe $x \in X$. Por ser $\mathcal{B}$ una base, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subset X$.

Como $\mathcal{B}$ es regular, existe $H \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$ tal que $x \in H \subset V$. Entonces H y V^c son cerrados ajenos y por ser $\mathcal{B}$ normal existen V_1 y V_2 en $\mathcal{B}$ tales que $H \subset V_1$ y $V^c \subset V_2$ con V_1 y V_2 ajenos. Finalmente, como $\mathcal{B}$ es anular $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{B}$. Esto es $\emptyset \in \mathcal{B}$.[]

Teorema 42. Sea $\mathcal{B}$ una base de Wallman de un espacio X y sea $\mathcal{T} = \{ V^c : V \in \mathcal{B} \}$. Llamamos $X(\mathcal{T})$ a la familia de ultrafiltros en $\mathcal{T}$. Para cada $A \subset X$, sea

$$A^* = \{ \xi \in X(\mathcal{T}) : L \subset A, \text{ para algún } L \in \xi \}.$$

Entonces:

(a) Para cada $A, B \subset X$, $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$, $\emptyset^* = \emptyset$ y $X^* = X(\mathcal{T})$.

(b) Si A y B pertenecen a $\mathcal{B}\cup\mathcal{S}$, entonces

$(A\cup B)^* = A^* \cup B^*$.

(c) Si $A\in\mathcal{S}$, entonces $A = \{\xi \in X(\mathcal{S}) : A\in\xi\}$.

Demostración. (a). Tenemos que si $C\subset D$, entonces $C^*\subset D^*$. Porque si $\xi\in C^*$, entonces para algún $L\in\xi$, $L\subset C$ y por lo tanto $L\subset D$. De aquí $\xi\in D^*$ y $C^*\subset D^*$. En consecuencia tenemos que $(A\cap B)^*\subset A^*\cap B^*$.

Sea $\xi\in A^*\cap B^*$. Entonces $\xi\in A^*$ y $\xi\in B^*$. Entonces, existen L_1 y L_2 en ξ tales que $L_1\subset A$ y $L_2\subset B$. Por lo que se tiene $L_1\cap L_2\subset A\cap B$ y $L_1\cap L_2\in\xi$. Así, $\xi\in(A\cap B)^*$ y $A^*\cap B^*\subset(A\cap B)^*$. De donde $(A\cap B)^* = A^*\cap B^*$.

Si $\emptyset^*\neq\emptyset$, entonces existe $\xi\in\emptyset^*$, esto es, para algún $L\in\xi$, $L\subset\emptyset$ lo que implica que L es vacío; pero esto contradice el que ξ sea un ultrafiltro. Por esto $\emptyset^*=\emptyset$.

Por definición $X^*\subset X(\mathcal{S})$. Sea $\xi\in X(\mathcal{S})$, entonces $\xi\in X^*$, pues $X\in\xi$.

(b). Como $A\subset A\cup B$, $B\subset A\cup B$, entonces $A^*\subset(A\cup B)^*$ y $B^*\subset(A\cup B)^*$ y $A^*\cup B^*\subset(A\cup B)^*$.

Sea $\xi\notin A^*\cup B^*$. Entonces $\xi\notin A^*$ y $\xi\notin B^*$. Luego $L\cap A^c\neq\emptyset$ y $L\cap B^c\neq\emptyset$ para cada $L\in\xi$.

(i) Si $A,B\in\mathcal{B}$ entonces, como ξ es un ultrafiltro en $\mathcal{S}$, A^c y $B^c\in\xi$. Por tanto $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c\in\xi$. Lo cual implica que $\xi\notin(A\cup B)^*$ y tenemos $(A\cup B)^*\subset A^*\cup B^*$.

(ii) Si $A,B\in\mathcal{S}$, entonces $A\notin\xi$ y $B\notin\xi$. De donde $A\cap L_1$ es vacío y $B\cap L_2$ es vacío para ciertos L_1, L_2 en ξ.

Como también $L_1 \cap L_2 \in \xi$ y $(A\cup B)\cap L_1 \cap L_2 = \emptyset$, tenemos $A\cup B \notin \xi$. Por lo que se tiene $\xi \notin (A\cup B)^*$ y $(A\cup B)^* \subset A^* \cup B^*$.

(iii) Si $A\in \mathcal{B}$ y $B\in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \xi$ y existe $L\in \xi$ tal que $B\cap L=\emptyset$. Por consiguiente $L\cap A^c = L_1 \in \xi$ y $L_1 \cap (A\cup B)=\emptyset$, por lo tanto $\xi \notin (A\cup B)^*$ y $(A\cup B)^* \subset A^* \cup B^*$. Similarmente se demuestra el caso $A\in \mathcal{F}$ y $B\in \mathcal{B}$.

(c) Sea $\xi \in (\xi \in X(\mathcal{F}) : A\in \xi)$, entonces $A\in \xi$ y $A\subset A$, en consecuencia $\xi \in A^*$.

Si $\xi \in A^*$, entonces existe $L\in \xi$ tal que $L\subset A$; pero por ser ξ un ultrafiltro $A\in \xi$. De aquí

$$\xi \in (\xi \in X(\mathcal{F}) : A\in \xi).[]$$

Lema 43. Todo filtro está incluido en un ultrafiltro (no necesariamente único.)

Teorema 44. Sean $\mathcal{B}$, X, $\mathcal{F}$, $X(\mathcal{F})$ como en el Teorema 42. Sea τ^* la topología de $X(\mathcal{F})$ que tiene como base la familia $(B^* : B\in \mathcal{B})$. Para cada $x\in X$, sea

$$v(x)=(F\in \mathcal{F} : x\in F).$$

Entonces: (1). $(X(\mathcal{F}),\tau^*)$ es un espacio compacto y Hausdorff.

(2) Para cada $A\subset X$, $A^* \subset C_{X(\mathcal{F})}\, v(A)$.

Si $A\in \mathcal{B}\cup \mathcal{F}$, $v(A)=A^* \cap v(X)$

Si $A\in \mathcal{F}$, $A^* = C_{X(\mathcal{F})}\, v(A)$.

Bibliografía

1. Gacía-Máynez A. — Basis and Compactifications
   An. Inst. Mat. U.N.A.M.
   17 No.1 (1977) 17-39.

   __ On KC and H-spaces
   An. Inst. Mat. U.N.A.M.
   15 No.1 (1975) 33-50.

2. Murdeshwar M. G. — General Topology
   John Wiley and Sons, 1983.

3. Dugundji, James. — Topology
   Allyn and Bacon, Inc.
   Boston, 1966.

4. Sze-Tsen Hu — Elements of General Topology
   Holden-Day, Inc. 1964.