UNIVERSIDAD AUTONOMA DE GUADALAJARA

Incorporada a la Universidad Nacional Autónoma de México

Escuela de Matemáticas

"SOLUCION DE ECUACIONES, DIFERENCIALES PARCIALES POR METODOS NUMERICOS"

TESIS PROFESIONAL

que para obtener el título de:

Matemático

presenta:

MARTHA TERESA FLORES VILLALOBOS

Guadalajara, Jalisco 1986

I N D I C E

INTRODUCCION

Las "ecuaciones diferenciales parciales" se presentan frecuentemente al analizar problemas científicos y de ingeniería, como son:

1. Torsión de barras,
2. Análisis de membranas y placas,
3. Vibracion de cables y barras,
4. Problemas hidráulicos,
5. Transferencia de calor,
6. Elasticidad,
7. Plasticidad, etc.

Se presenta una introducción a las técnicas para aproximar la solución de las ecuaciones diferenciales parciales que involucran dos variables, veremos también que estas técnicas se pueden aplicar a ciertos problemas físicos típicos.

Las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden se clasifican de la siguiente manera.

Sea:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F = 0$$

la forma de la ecuación que nos interesa, donde los coeficientes A, B y C son en general funciones de las variables "x", "y" y F es una función de x, y, u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

De acuerdo a la relación que existe entre los coeficientes A, B y C, encontramos que existen tres tipos de ecuaciones:

ELIPTICA	si	$B-4AC < 0$
PARABOLICA	si	$B-4AC = 0$
HIPERBOLICA	si	$B-4AC > 0$

A continuacion se presentan aplicaciones, métodos de solución y la explicación de cada uno de los tipos de ecuaciones indicados.

PARTE 1.

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES ELIPTICAS

Consideremos una ecuación diferencial parcial eliptica, conocida como la "**ECUACION DE POISSON**", que viene dada por:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y) \qquad (1.1)$$

En esta ecuación, suponemos que f describe la entrada del problema en una región plana R, cuya frontera se denotara por S.

Durante el estudio de problemas fisicos que no dependan del tiempo, como la distribución estacionaria del calor en una región plana, la energia potencial de un punto en el plano bajo la acción de fuerzas gravitacionales, etc., es cuando surgen las ecuaciones de este tipo.

Para obtener una solución única a la ecuación de Poisson, se deben añadir condiciones adicionales en la solución.

El estudio de la distribución estacionaria de calor en una región plana, requiere que $f(x,y) = 0$, de donde obtenemos que la ecuación (1.1) se simplifica y queda dada por:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \qquad (1.2)$$

que es conocida como la "**ECUACION DE LAPLACE**".

Si la temperatura dentro de la región esta determinada por la distribución de temperaturas en su frontera, la condición se llama "**CONDICION DE FRONTERA DE DIRICHLET**", y esta dada por:

$$u(x,y) = g(x,y) \quad \text{para todo } (x,y) \text{ en } S,$$

donde S es la frontera de la región R.

La solución $u(x,y)$ de la ecuación de Laplace, puede ser interpretada como la distribución estacionaria de temperatura (independiente del tiempo) en una placa fina y plana.

Los dos casos anteriores, como son las ecuaciones de Poisson y de Laplace, son considerados casos típicos de las ecuaciones de tipo eliptico.

Estas ecuaciones se pueden presentar también mediante el denominado **OPERADOR ARMONICO o LAPLACIANO**, para el que se usa el símbolo ∇ ; es decir:

$$\nabla^2 u(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} \qquad (1.3)$$

SOLUCION POR METODOS APROXIMADOS DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES ELIPTICAS

Sea la ecuación de Poisson definida por:

$$\nabla^2 u(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y) \qquad (1.4)$$

para (x,y) en R, y

$$u(x,y) = g(x,y) \qquad \text{para } (x,y) \text{ en } S$$

donde

$$R = \{ (x,y): a < x < b,\ c < y < d \}$$

y S denota la frontera de R. Supondremos además que tanto f como g son funciones continuas dentro de sus dominios, esto es para garantizar la existencia de una solución única.

El método que se usara para encontrar la solución de esta ecuación, es el **METODO DE LA DIFERENCIA FINITA** para problemas de valor en la frontera.

El primer paso consiste en escoger dos enteros n y m, y definir los tamaños de paso h y k, mediante :

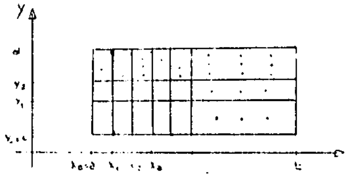
$$h = (b-a)/n \qquad \text{y}$$

$$k = (d-c)/m$$

esto significa que el intervalo $[a,b]$ lo dividiremos en n partes iguales, donde la longitud de cada parte es h, así mismo, el intervalo $[c,d]$ se divide en m partes iguales, y cada parte tiene longitud k; de esta forma, al rectángulo R le podemos asociar una red, pasando rectas verticales y horizontales por los puntos con coordenadas (x_i, y_j), donde:

$$x_i = a + ih \qquad \text{para cada } i = 1,2,\ldots,n$$

$$y_j = c + jk \qquad \text{para cada } j = 1,2,\ldots,m$$



Las rectas $x=x_i$ e $y=y_j$ se llaman **líneas de la red,** y sus intersecciones se llaman **puntos de la red.** Para cada punto interior (x_i,y_j), donde $i=1,2,\ldots,n-1$ y $j=1,2,\ldots m-1$ usamos la serie de Taylor de grado tres en la variable x, alrededor de x_i, entonces tenemos:

$$u(x_{i+1},y_j) = u(x_i,y_j) + h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,y_j) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_j) +$$

$$\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,y_j) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\beta_i^+,y_j) \qquad (1.5)$$

para algún valor β_i^+ tal que $x_i < \beta_i^+ < x_{i+1}$ y:

$$u(x_{i-1},y_j) = u(x_i,y_j) - h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,y_j) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_j) -$$

$$\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,y_j) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\beta_i^-,y_j) \qquad (1.6)$$

para algún valor β_i^- tal que $x_{i-1} < \beta_i^- < x_i$, suponiendo que la cuarta derivada parcial de u es continua en $[x_{i-1},x_{i+1}]$. Si sumamos (1.5) y (1.6) y despejamos la segunda derivada parcial, vemos que los términos que contienen $\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,y_j)$ y $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,y_j)$ desaparecen, y sólo nos queda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_j) = \frac{u(x_{i+1},y_j) - 2u(x_i,y_j) + u(x_{i-1},y_j)}{h^2} -$$

$$\frac{h^2}{24}\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\beta_i^-,y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\beta_i^+,y_j)\right] \qquad (1.7)$$

Por medio del teorema del Valor Intermedio, podemos simplificar aún más la ecuación, y obtener la fórmula de la diferencia centrada:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} -$$

$$\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\beta_i, y_j) \qquad (1.8)$$

para algún punto β_i tal que $x_{i-1} < \beta_i < x_{i+1}$.

De la misma forma, obtenemos la serie de Taylor en la variable y, alrededor de y_j, y despejando la segunda derivada parcial de u con respecto a y, generamos la fórmula de la diferencia centrada:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{k^2} -$$

$$\frac{k^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \varepsilon_j) \qquad (1.9)$$

para algún ε_j, tal que $y_{j-1} < \varepsilon_j < y_{j+1}$.

Si sustituimos (1.8) y (1.9) en la ecuación (1.4), la ecuación de Poisson evaluada en los puntos (x_i, y_j) queda como:

$$\frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\beta_i, y_j) +$$

$$\frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{k^2} - \frac{k^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \varepsilon_j) =$$

$$f(x_i, y_j)$$

de donde obtenemos:

$$\frac{1}{h^2}\left[u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)\right] + \frac{1}{k^2}\left[u(x_i, y_{j+1}) -\right.$$

$$\left. 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})\right] = f(x_i, y_j) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\beta_i, y_j) +$$

$$\frac{k^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \varepsilon_j) \qquad (1.10)$$

para cada $i=1,2,\ldots,n-1$ y $j=1,2,\ldots,m-1$.

Tenemos además que $u(x,y) = g(x,y)$ para todo (x,y) que está en S, entonces, de aquí, podemos obtener las condiciones de frontera que son cuando $i=0$, $i=n$, $j=0$ y $j=m$, por lo tanto:

$$\begin{array}{lll} u(x_0,y_j) = g(x_0,y_j) & \text{para } j=0,1,2,\ldots,m & \\ u(x_n,y_j) = g(x_n,y_j) & \text{para } j=0,1,2,\ldots,m & (1.11) \\ u(x_i,y_0) = g(x_i,y_0) & \text{para } i=1,2,\ldots,n-1 & \\ u(x_i,y_m) = g(x_i,y_m) & \text{oara } i=1,2,\ldots,n-1 & \end{array}$$

Nota: ya no tomamos los valores de $i=0$ y $i=n$, porque ya se tomaron con las dos primeras condiciones.

Como u se expande en series de Taylor de grado tres, entonces el error de truncamiento local corresponde al término que contiene las cuartas derivadas parciales, esto es:

$$\frac{h^2}{12}\,\frac{\partial^4 u(\beta_i,y_j)}{\partial x^4} + \frac{k^2}{12}\,\frac{\partial^4 u(x_i,\varepsilon_j)}{\partial y^4}$$

despreciando este error, (1.10) queda de la siguiente forma:

$$\frac{1}{h^2}\left[u(x_{i+1},y_j) - 2u(x_i,y_j) + u(x_{i-1},y_j)\right] + \frac{1}{k^2}\left[u(x_i,y_{j+1}) - 2u(x_i,y_j) + u(x_i,y_{j-1})\right] = f(x_i,y_j) \qquad (1.12)$$

si miltiplicamos ambos lados por h^2, obtenemos:

$$u(x_{i+1},y_j) - 2u(x_i,y_j) + u(x_{i-1},y_j) + \frac{h^2}{k^2}\left[u(x_i,y_{j+1}) - 2u(x_i,y_j) + u(x_i,y_{j-1})\right] = h^2 f(x_i,y_j) \qquad (1.13)$$

si aproximamos $u(x_i,y_j)$ por medio de w_{ij}, (1.13) queda dada por:

$$w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j} + \frac{h^2}{k^2}\,(w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}) = h^2 f(x_i,y_j)$$

$$-2w_{i,j} - \frac{2h^2 w_{i,j}}{k^2} + w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + (h/k)^2\,(w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) =$$

$$h^2 f(x_i,y_j)$$

$$\Rightarrow -2w_{i,j}\left[1 + (h/k)^2\right] + (w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) + (h/k)^2 (w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) = h^2 f(x_i, y_j)\ .$$

Si multiplicamos ambos lados por (−), obtenemos la ecuación de diferencia centrada, con error de truncamiento local de onda $O(h^2 + k^2)$

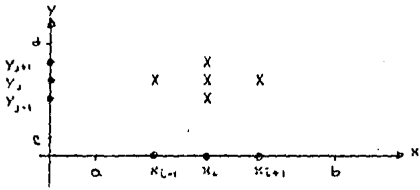
$$2w_{i,j}\left[1 + (h/k)^2\right] - (w_{i-1,j} + w_{i+1,j}) - (h/k)^2 (w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) = -h^2 f(x_i, y_j) \qquad (1.14)$$

para $i=1,2,\ldots,n-1$, $j=1,2,\ldots,m-1$ y con las condiciones de frontera

$$\begin{array}{lll} w_{0,j} = g(x_0, y_j) & j=0,1,\ldots,m & \\ w_{n,j} = g(x_n, y_j) & j=0,1,\ldots,m & (1.15) \\ w_{i,0} = g(x_i, y_0)\ . & i=1,2,\ldots,n-1 & \\ w_{i,m} = g(x_i, y_m) & i=1,2,\ldots,n-1 & \end{array}$$

donde $w_{i,j}$ aproxima a $u(x_i, y_j)$.

La ecuación (1.14) involucra aproximaciones a $u(x,y)$ en los puntos
(x_{i-1}, y_j) , (x_i, y_j) , (x_{i+1}, y_j) , (x_i, y_{j-1}) , (x_i, y_{j+1})
que estan acomodados en la red como se muestra en la siguiente figura:



De aquí, y con la información de las condiciones de frontera (1.15), tenemos un sistema de (n-1)(m-1) ecuaciones lineales con igual número de incógnitas, donde las incógnitas son las aproximaciones $w_{i,j}$ de $u(x_i, y_j)$ para los puntos interiores de la red.

El algoritmo que se presenta utiliza el método de Gauss-Seidel para resolver el sistema lineal producido, y nos permite diferentes tamaños de red.

************ <<>> **********

```
1000 LPRINT CHR$(27),"H"+CHR$(27);"J"
1010 DEF FNTAB$(COL,REN)=CHR$(27)+"&a"+STR$(COL)+"c"+STR$(REN)+"Y"
1020 REM ****ALGORITMO DE DIFERENCIA FINITA PARA LA ECUACION DE POISSON****
1030 REM *********(ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES ELIPTICAS)*********
1040 LPRINT "  ESTE PROGRAMA SIRVE PARA APROXIMAR LA SOLUCION DE LA    "
1050 LPRINT "     ECUACION DE POISSON, SUJETA A CONDICIONES EN LA FRONTERA  "
1060 LPRINT " "
1070 LPRINT " "
1090 INPUT "PUNTOS EXTREMOS A,B,C,D";A,B,C,D
1100 INPUT "ENTEROS M,N";M,N
1110 INPUT "TOLERANCIA TOL";TOL
1120 INPUT "NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES LBO";LBO
1130 LPRINT " "
1140 LPRINT " "
1150 LPRINT FNTAB$(3,10); "LOS VALORES TOMADOS PARA ESTE PROBLEMA SON:"
1160 LPRINT " "
1170 LPRINT" "
1180 LPRINT FNTAB$(7,13); "PUNTOS EXTREMOS A=";A;",B=";B;",C=";C;",D=";D
1190 LPRINT FNTAB$(7,14); "ENTEROS M=";M;",N=";N
1200 LPRINT FNTAB$(7,15); "TOLERANCIA TOL=";TOL
1210 LPRINT FNTAB$(7,16); "NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES LBO=";LBO
1220 H=(B-A)/N
1230 K=(D-C)/M
1240 FOR I=1 TO N-1
1250 X(I)=A+I*H
1260 NEXT I
1270 FOR J=1 TO M-1
1280 Y(J)=C+J*K
1290 NEXT J
1300 FOR I=1 TO N-1
1310 FOR J=1 TO M-1
1320  F(X(I),Y(J))=X(I)*EXP(Y(J))
1330 G(2,Y(J))=2*EXP(Y(J))
1340 G(X(I),1)=(X(I))*EXP(1)
1350 G(0,Y(J))=0
1360 G(X(I),0)=X(I)
1370 W(I,J)=0
1380 NEXT J
1390 NEXT I
1400 E=(H^2)/(K^2)
1410 U=2*(1+E)
1420 L=1
1430 IF L>LBO THEN GOTO 2020
1440 Z=(-(H^2)*F(X(1),Y(M-1))+G(A,Y(M-1))+E*G(X(1),D)+W(2,M-1)+E*W(1,M-2))/U
1450 NORM=ABS(Z-W(1,M-1))
1460 W(1,M-1)=Z
1470 FOR I=2 TO N-2
1480 Z=(-(H^2)*F(X(I),Y(M-1))+E*G(X(I),D)+W(I-1,M-1)+W(I+1,M-1)+E*W(I,M-2))/U
1490 IF ABS(W(I,M-1)-Z)<=NORM THEN GOTO 1510
1500 NORM=ABS(W(I,M-1)-Z)
1510 W(I,M-1)=Z
[illegible] (H^2)*F(X(N-1),Y(M-1))+[illegible],M-1)+E*W(N-1,M-2
))/U
1540 IF ABS(W(N-1,M-1)-Z)<=NORM THEN GOTO 1560
1550 NORM=ABS(W(N-1,M-1)-Z)
1560 W(N-1,M-1)=Z
1570 FOR J=M-2 TO 2 STEP -1
[illegible] [illegible]+E*W(1,J+1)+E*W(1,J-1)+G(A,Y(J)))/U
1590 IF ABS(W(1,J)-Z)<=NORM THEN GOTO 1610
```

```
1600 NORM=ABS(W(1,J)-Z)
1610 W(1,J)=Z
1620 FOR I=2 TO N-2
1630 Z=(-(H^2)*F(X(I),Y(J))+W(I-1,J)+E*W(I,J+1)+W(I+1,J)+E*W(I,J-1))/U
1640 IF ABS(W(I,J)-Z)<=NORM THEN GOTO 1660
1650 NORM=ABS(W(I,J)-Z)
1660 W(I,J)=Z
1670 NEXT I
1680 Z=(-(H^2)*F(X(N-1),Y(J))+G(B,Y(J))+W(N-2,J)+E*W(N-1,J+1)+E*W(N-1,J-1))/U
1690 IF ABS(W(N-1,J)-Z)<=NORM THEN GOTO 1710
1700 NORM=ABS(W(N-1,J)-Z)
1710 W(N-1,J)=Z
1720 NEXT J
1730 Z=(-(H^2)*F(X(1),Y(1))+G(A,Y(1))+E*G(X(1),C)+E*W(1,2)+W(2,1))/U
1740 IF ABS(W(1,1)-Z)<=NORM THEN GOTO 1760
1750 NORM=ABS(W(1,1)-Z)
1760 W(1,1)=Z
1770 FOR I=2 TO N-2
1780 Z=(-(H^2)*F(X(I),Y(1))+E*G(X(I),C)+W(I-1,1)+E*W(I,2)+W(I+1,1))/U
1790 IF ABS(W(I,1)-Z)<=NORM THEN GOTO 1810
1800 NORM=ABS(W(I,1)-Z)
1810 W(I,1)=Z
1820 NEXT I
1830 Z=(-(H^2)*F(X(N-1),Y(1))+G(B,Y(1))+E*G(X(N-1),C)+W(N-2,1)+E*W(N-1,2))/U
1840 IF ABS(W(N-1,1)-Z)<=NORM THEN GOTO 1860
1850 NORM=ABS(W(N-1,1)-Z)
1860 W(N-1,1)=Z
1870 IF NORM>TOL THEN GOTO 2000
1880 LPRINT
1890 LPRINT"**LOS RESULTADOS OBTENIDOS SON :"
1900 LPRINT" "
1910 LPRINT " "
1920 FOR I=1 TO N-1
1930 FOR J=1 TO M-1
1940 LPRINT "X(";I;")=";X(I);TAB(20);"Y(";J;")=";Y(J);TAB(35);"W(";I;",";J;")=";
W(I,J)
1950 NEXT J
1960 NEXT I
1970 LPRINT " "
1980 LPRINT "EL PROCEDIMIENTO ESTA TERMINADO"
1990 END
2000 L=L+1
2010 GOTO 1450
2020 GOTO 1920
2030 END
```

<<<ESTE PROGRAMA SIRVE PARA APROXIMAR LA SOLUCION DE LA ECUACION DE POISSON, SUJETA A CONDICIONES EN LA FRONTERA>>>

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xe^{\wedge}y \qquad 0 < x < 2 \quad 0 < y < 1$$

$$u(0,y) = 0 \qquad u(2,y) = 2e^{\wedge}y$$

$$u(x,0) = x \qquad U(x,1) = ex$$

LOS VALORES TOMADOS PARA ESTE PROBLEMA SON:

PUNTOS EXTREMOS A= 0 ,B= 2 ,C= 0 ,D= 1
ENTEROS M= 5 ,N= 6
TOLERANCIA TOL= 1E-09
NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES LBO= 61

**LOS RESULTADOS OBTENIDOS SON :

X(1)= .3333334	Y(1)= .2	W(1 , 1)= .3332198
X(1)= .3333334	Y(2)= .4	W(1 , 2)= .5022494
X(1)= .3333334	Y(3)= .6	W(1 , 3)= .5817441
X(1)= .3333334	Y(4)= .8	W(1 , 4)= .5122704
X(2)= .6666667	Y(1)= .2	W(2 , 1)= 1.177776
X(2)= .6666667	Y(2)= .4	W(2 , 2)= 1.30846
X(2)= .6666667	Y(3)= .6	W(2 , 3)= 1.659717
X(2)= .6666667	Y(4)= .8	W(2 , 4)= 2.336959
X(3)= 1	Y(1)= .2	W(3 , 1)= 1.448228
X(3)= 1	Y(2)= .4	W(3 , 2)= 1.722979
X(3)= 1	Y(3)= .6	W(3 , 3)= 2.161887
X(3)= 1	Y(4)= .8	W(3 , 4)= 2.796426
X(4)= 1.333333	Y(1)= .2	W(4 , 1)= 1.495647
X(4)= 1.333333	Y(2)= .4	W(4 , 2)= 1.902519
X(4)= 1.333333	Y(3)= .6	W(4 , 3)= 2.450349
X(4)= 1.333333	Y(4)= .8	W(4 , 4)= 3.048351
X(5)= 1.666667	Y(1)= .2	W(5 , 1)= 1.084743
X(5)= 1.666667	Y(2)= .4	W(5 , 2)= 1.911524
X(5)= 1.666667	Y(3)= .6	W(5 , 3)= 2.92915
X(5)= 1.666667	Y(4)= .8	W(5 , 4)= 3.691039

EL PROCEDIMIENTO ESTA TERMINADO

<<ESTE PROGRAMA SIRVE PARA APROXIMAR LA SOLUCION DE LA ECUACION DE POISSON, SUJETA A CONDICIONES EN LA FRONTERA>>

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1$$

$$u(0,y) = 0 \qquad u(1,y) = y$$

$$u(x,0) = 0 \qquad u(x,1) = x$$

LOS VALORES TOMADOS PARA ESTE PROBLEMA SON:

```
     PUNTOS EXTREMOS A= 0 ,B= 1 ,C= 0 ,D= 1
     ENTEROS M= 10 ,N= 10
     TOLERANCIA TOL= 1E-09
     NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES LBO= 60
X( 1 )= .1          Y( 1 )= .1      W( 1 , 1 )= 9.472968E-03
X( 1 )= .1          Y( 2 )= .2      W( 1 , 2 )= 1.894594E-02
X( 1 )= .1          Y( 3 )= .3      W( 1 , 3 )= 2.829493E-02
X( 1 )= .1          Y( 4 )= .4      W( 1 , 4 )= 3.712696E-02
X( 1 )= .1          Y( 5 )= .5      W( 1 , 5 )= 4.464255E-02
X( 1 )= .1          Y( 6 )= .6      W( 1 , 6 )= 4.949044E-02
X( 1 )= .1          Y( 7 )= .7      W( 1 , 7 )= 4.963316E-02
X( 1 )= .1          Y( 8 )= .8      W( 1 , 8 )= 4.241316E-02
X( 1 )= .1          Y( 9 )= .9000001
                                    W( 1 , 9 )= 2.551194E-02
X( 2 )= .2          Y( 1 )= .1      W( 2 , 1 )= 1.896495E-02
X( 2 )= .2          Y( 2 )= .2      W( 2 , 2 )= 3.806441E-02
X( 2 )= .2          Y( 3 )= .3      W( 2 , 3 )= 5.718288E-02
X( 2 )= .2          Y( 4 )= .4      W( 2 , 4 )= 7.566885E-02
X( 2 )= .2          Y( 5 )= .5      W( 2 , 5 )= 9.206563E-02
X( 2 )= .2          Y( 6 )= .6      W( 2 , 6 )= .1038029
X( 2 )= .2          Y( 7 )= .7      W( 2 , 7 )= .1067379
X( 2 )= .2          Y( 8 )= .8      W( 2 , 8 )= 9.459618E-02
X( 2 )= .2          Y( 9 )= .9000001
                                    W( 2 , 9 )= 5.969142E-02
X( 3 )= .3          Y( 1 )= .1      W( 3 , 1 )= 2.834734E-02
X( 3 )= .3          Y( 2 )= .2      W( 3 , 2 )= 5.723267E-02
X( 3 )= .3          Y( 3 )= .3      W( 3 , 3 )= 8.681344E-02
X( 3 )= .3          Y( 4 )= .4      W( 3 , 4 )= .116444
X( 3 )= .3          Y( 5 )= .5      W( 3 , 5 )= .1443148
X( 3 )= .3          Y( 6 )= .6      W( 3 , 6 )= .1670913
X( 3 )= .3          Y( 7 )= .7      W( 3 , 7 )= .1790828
X( 3 )= .3          Y( 8 )= .8      W( 3 , 8 )= .1696768
X( 3 )= .3          Y( 9 )= .9000001
                                    W( 3 , 9 )= .1187462
X( 4 )= .4          Y( 1 )= .1      W( 4 , 1 )= 3.721959E-02
X( 4 )= .4          Y( 2 )= .2      W( 4 , 2 )= 7.578606E-02
X( 4 )= .4          Y( 3 )= .3      W( 4 , 3 )= .1165246
X( 4 )= .4          Y( 4 )= .4      W( 4 , 4 )= .1591507
X( 4 )= .4          Y( 5 )= .5      W( 4 , 5 )= .2018573
X( 4 )= .4          Y( 6 )= .6      W( 4 , 6 )= .2413734
X( 4 )= .4          Y( 7 )= .7      W( 4 , 7 )= .2730221
X( 4 )= .4          Y( 8 )= .8      W( 4 , 8 )= .2864456
X( 4 )= .4          Y( 9 )= .9000001
                                    W( 4 , 9 )= .2457255
X( 5 )= .5          Y( 1 )= .1      W( 5 , 1 )= .0447728
```

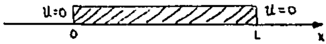
```
X( 5 )= .5          Y( 2 )= .2        W( 5 , 2 )= .0922509
X( 5 )= .5          Y( 3 )= .3        W( 5 , 3 )= .1444844
X( 5 )= .5          Y( 4 )= .4        W( 5 , 4 )= .2019569
X( 5 )= .5          Y( 5 )= .5        W( 5 , 5 )= .2628003
X( 5 )= .5          Y( 6 )= .6        W( 5 , 6 )= .3237432
X( 5 )= .5          Y( 7 )= .7        W( 5 , 7 )= .3853954
X( 5 )= .5          Y( 8 )= .8        W( 5 , 8 )= .4575316
X( 5 )= .5          Y( 9 )= .9000001
                                      W( 5 , 9 )= .5778271
X( 6 )= .6          Y( 1 )= .1        W( 6 , 1 )= 4.964589E-02
X( 6 )= .6          Y( 2 )= .2        W( 6 , 2 )= .1040385
X( 6 )= .6          Y( 3 )= .3        W( 6 , 3 )= .1673339
X( 6 )= .6          Y( 4 )= .4        W( 6 , 4 )= .2415632
X( 6 )= .6          Y( 5 )= .5        W( 6 , 5 )= .3238429
X( 6 )= .6          Y( 6 )= .6        W( 6 , 6 )= .4056136
X( 6 )= .6          Y( 7 )= .7        W( 6 , 7 )= .487484
X( 6 )= .6          Y( 8 )= .8        W( 6 , 8 )= .5806248
X( 6 )= .6          Y( 9 )= .9000001
                                      W( 6 , 9 )= .7081642
X( 7 )= .7          Y( 1 )= .1        W( 7 , 1 )= 4.979258E-02
X( 7 )= .7          Y( 2 )= .2        W( 7 , 2 )= .1069895
X( 7 )= .7          Y( 3 )= .3        W( 7 , 3 )= .1793588
X( 7 )= .7          Y( 4 )= .4        W( 7 , 4 )= .2732647
X( 7 )= .7          Y( 5 )= .5        W( 7 , 5 )= .3855651
X( 7 )= .7          Y( 6 )= .6        W( 7 , 6 )= .4875646
X( 7 )= .7          Y( 7 )= .7        W( 7 , 7 )= .578474
X( 7 )= .7          Y( 8 )= .8        W( 7 , 8 )= .6694638
X( 7 )= .7          Y( 9 )= .9000001
                                      W( 7 , 9 )= .7743036
X( 8 )= .8          Y( 1 )= .1        W( 8 , 1 )= 4.254904E-02
X( 8 )= .8          Y( 2 )= .2        W( 8 , 2 )= 9.481651E-02
X( 8 )= .8          Y( 3 )= .3        W( 8 , 3 )= .1699284
X( 8 )= .8          Y( 4 )= .4        W( 8 , 4 )= .2866813
X( 8 )= .8          Y( 5 )= .5        W( 8 , 5 )= .457717
X( 8 )= .8          Y( 6 )= .6        W( 8 , 6 )= .5807421
X( 8 )= .8          Y( 7 )= .7        W( 8 , 7 )= .6695136
X( 8 )= .8          Y( 8 )= .8        W( 8 , 8 )= .7445631
X( 8 )= .8          Y( 9 )= .9000001
                                      W( 8 , 9 )= .8196623
X( 9 )= .9000001    Y( 1 )= .1        W( 9 , 1 )= 2.559409E-02
X( 9 )= .9000001    Y( 2 )= .2        W( 9 , 2 )= 5.982731E-02
X( 9 )= .9000001    Y( 3 )= .3        W( 9 , 3 )= .1189057
X( 9 )= .9000001    Y( 4 )= .4        W( 9 , 4 )= .245881
X( 9 )= .9000001    Y( 5 )= .5        W( 9 , 5 )= .5779575
X( 9 )= .9000001    Y( 6 )= .6        W( 9 , 6 )= .708257
X( 9 )= .9000001    Y( 7 )= .7        W( 9 , 7 )= .774356
X( 9 )= .9000001    Y( 8 )= .8        W( 9 , 8 )= .8196814
X( 9 )= .9000001    Y( 9 )= .9000001
                                      W( 9 , 9 )= .8598311

EL PROCEDIMIENTO ESTA TERMINADO
```

PARTE 2.

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES PARABOLICAS

La ecuación de calor:

Consideremos una varilla fina de largo L, con una distribución longitudinal de temperatura f(x) y cuyos extremos se mantienen a una temperatura constante de cero grados en todo instante:



Si:

a) el flujo de calor se produce solamente en la dirección del eje x,
b) no se pierde calor a través de la superficie lateral de la varilla,
c) no se genera calor en la varilla,
d) la varilla es homogénea, esto es, su densidad por unidad de longitud es constante,
e) su calor especifico y su conductividad térmica son constantes,

entonces la temperatura u(x,t) de la varilla esta dada por la solución del problema de condición de frontera:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = E^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad 0 < x < 1,\ t > 0 \qquad (2.1)$$

sujeta a las condiciones:

$$u(0,t) = 0 \qquad u(1,t), = 0 \qquad t > 0$$
$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 <= x <= 1 \qquad (2.2)$$

la constante E es proporcional a la conductividad térmica y se llama **coeficiente de difusión.**

SOLUCION POR METODOS APROXIMADOS DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES PARABOLICAS

Sea la ecuación de calor o de difusión definida por:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = E^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad 0 < x < 1 \quad t > 0,$$

sujeta a las condiciones:

$$u(0,t)=0 \qquad u(1,t)=0, \qquad t > 0$$
$$u(x,0)=f(x) \qquad 0 <= x <= 1.$$

El método que utilizaremos para aproximar la solución de este tipo de ecuaciones, consiste en el uso de diferencias finitas, y se llama **METODO DE DIFERENCIAS REGRESIVAS**.

Primero escogemos dos constantes de malla h y k, con la restricción de que $m=1/h$ es un entero. Los puntos de la red entonces formados son (x_i, t_j) donde $x_i = ih$ para $i=0,1,...,m$ y $t_j = jk$ para $j=0,1,...$

Expandiendo x en un polinomio de Taylor de tercer grado alrededor de x_i, y evaluando en x_{i-1} y x_{i+1} formamos el cociente diferencial para el método de diferencia y obtnemos:

$$u(x_{i+1},t_j) = u(x_i+h,t_j) = u(x_i,t_j) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_j) +$$

$$\frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,t_j) + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^+,t_j)$$

(2.3)

para alguna ξ_i^+ tal que $x_i < \xi_i^+ < x_{i+1}$.

$$u(x_{i-1},t_j) = u(x_i-h,t_j) = u(x_i,t_j) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_j) +$$

$$\frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,t_j) + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^-,t_j)$$

(2.4)

para alguna ξ_i^- tal que $x_{i-1} < \xi_i^- < x_i$.

Suponiendo que u es elemento de $C^4[x_{i-1}, x_{i+1}]$. Si se suman las ecuaciones (2.3) y (2.4), vemos que algunos términos se eliminan , y nos queda:

$$u(x_i+h,t_j) + u(x_i-h,t_j) = 2u(x_i,t_j) + h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) + \frac{h^4}{24}\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^+,t_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^-,t_j)\right] \quad (2.5)$$

de esta ecuación, podemos despejar $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j)$ y obtenemos:

$$h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) = u(x_i+h,t_j) + u(x_i-h,t_j) - 2u(x_i,t_j) - \frac{h^4}{24}\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^+,t_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^-,t_j)\right] \quad (2.6)$$

usando el *Teorema del Valor Intermedio*, y dividiendo ambos lados por h^2, podemos simplificar aún *más* la ecuación anterior:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) = \frac{1}{h^2}\left[u(x_i+h,t_j) + u(x_i-h,t_j) - 2u(x_i,t_j)\right] - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i,t_j) \quad (2.7)$$

donde ξ_i se encuentra en el intervalo (x_{i-1},x_{i+1}).

De manera similar, utilizando la serie de *Taylor* en t, y derivando con respecto a t, para formar el cociente diferencial, obtenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_j) = \frac{1}{k}\left[u(x_i,t_j+k) - u(x_i,t_j)\right] - \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,\beta_j) \quad (2.8)$$

para alguna $\beta_j \in (t_{j-1},t_{j+1})$.

De la ecuación diferencial parcial (2.1) podemos concluir que en los puntos interiores de la red formados por (x_i,t_j) para cada $i=1,2,\ldots,m-1$ y $j=1,2,\ldots$, tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_j) - E^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) = 0$$

y así, el método de diferencia, utilizando los cocientes diferenciales (2.7) y (2.8) es:

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - E^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0 \qquad (2.9)$$

donde $w_{i,j}$ aproxima a $u(x_i, t_j)$.

El error de truncamiento local para esta ecuación de diferencia es:

$$\mathcal{E}_{i,j} = \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, \beta_j)}{\partial t^2} - E^2 \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u(P_i, t_j)}{\partial x^4} \qquad (2.10)$$

De la ecuación (2.9) vamos a despejar el valor de $w_{i,j+1}$,primeramente multipliquemos ambos lados de la ecuación por k, y se obtiene :

$$w_{i,j+1} - w_{i,j} - \frac{kE^2}{h^2} [w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}] = 0$$

ahora despejando $w_{i,j+1}$, se tiene:

$$w_{i,j+1} = w_{i,j} + \frac{kE^2}{h^2} [w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}]$$

$$\Rightarrow \quad w_{i,j+1} = w_{i,j} + \frac{kE^2}{h^2} (-2w_{i,j}) + \frac{kE^2}{h^2} [w_{i+1,j} + w_{i-1,j}]$$

$$\Rightarrow \quad w_{i,j+1} = \left[1 - \frac{2kE^2}{h^2} \right] w_{i,j} + \frac{E^2 k}{h^2} [w_{i+1,j} + w_{i-1,j}] \qquad (2.11)$$

para cada valor de i=1,2,...,(m-1), y cada valor de j=1,2,...

Como tenemos la condición inicial de que $u(x,0)=f(x)$ para cada $0 \le x \le 1$, esto implica que:

$$w_{i,0} = f(x_i) \quad \text{para cada } i=0,1,2,\ldots,m$$

y podemos usar estos valores en la ecuación (2.11) para encontrar el valor de $w_{i,j}$, para cada valor de i=1,2,...,(m-1) esto es; si j=0, tenemos que:

$$w_{i,1} = \left[1 - \frac{2kE^2}{h^2} \right] w_{i,0} + \frac{E^2 k}{h^2} [w_{i+1,0} + w_{i-1,0}]$$

Además las condiciones adicionales de que:

$$u(0,t)=0 \text{ y } u(l,t)=0,$$

implican que: $w_{0,j} = w_{m,j} = 0$
de aquí vemos que todas las formas de $w_{i,1}$, pueden ser obtenidas; y si una vez que conocemos todas las aproximaciones de $w_{i,1}$, aplicamos nuevamente el procedimiento, podemos encontrar de manera similar los valores de $w_{i,2}, w_{i,3}, \ldots, w_{i,m-1}$.

El método de diferencia que obtuvimos en la ecuación (2.11), implica que la matriz de $(m-1)x(m-1)$ asociada con este sistema, se puede escribir de la siguiente forma:

$$D = \begin{bmatrix} (1-2A) & A & 0 & \cdots & 0 \\ A & (1-2A) & A & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & A \\ 0 & \cdots & 0 & A & (1-2A) \end{bmatrix}$$

donde $A = E^2(k/h^2)$

Si $w^{(0)} = (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{m-1}))^T$

y

$w^{(j)} = (w_{1j}, w_{2j}, \ldots, w_{m-1,j})^T$ para cada $j=1,2,\ldots$

entonces la solución aproximada esta dada por

$$w^{(j)} = D w^{(j-1)} \quad \text{para cada } j=1,2,\ldots$$

Este método de diferencia es el conocido con el nombre de diferencia progresiva. Si la solución de la ecuación diferencial parcial tiene cuatro derivadas parciales continuas en x y dos en t, entonces la ecuación (2.10) implica que el método es de orden $O(k + h^2)$.

Para obtener un método que sea **incondicionalmente** estable, consideremos un método de diferencia implícito que resulta de usar el cociente de diferencia regresiva para $\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial t}$ en la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_j) = \frac{u(x_i,t_j) - u(x_i,t_{j-1})}{k} + \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,\beta_j) \tag{2.12}$$

donde β_j es tal que $t_{j-1} < \beta_j < t_j$.

Si sustituimos (2.12) y la ecuación para $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j)$ en la ecuacion diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} - E^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

tenemos que

$$\frac{u(x_i,t_j) - u(x_i,t_{j-1})}{k} - E^2 \frac{u(x_{i+1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i-1},t_j)}{h^2} =$$

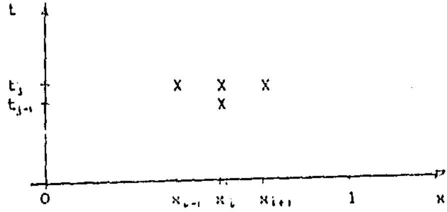
$$\frac{-k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,\beta_j) - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i,t_j) \tag{2.13}$$

para alguna ξ_i tal que $x_{i-1} < \xi_i < x_{i+1}$. De aqui obtenemos el método de diferencia regresiva expresado como:

$$\frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{k} - E^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0 \tag{2.14}$$

para $i=1,2,\ldots,(m-1)$ y $j=1,2,\ldots$

Dentro de la representación de red, con este método aproximamos los puntos
(x_i,t_j) , (x_i,t_{j-1}) , (x_{i-1},t_j) , (x_{i+1},t_j)
que dentro de una gráfica quedarian representados por ·



Multiplicando (2.14) por k, tenemos que

$$w_{i,j} - w_{i,j-1} - \frac{E^2 k}{h^2} [w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}] = 0$$

si ahora hacemos que $A=(E^2k/h^2)$, el método de diferencia regresiva quedaria como:

$$w_{i,j} - w_{i,j-1} - A [w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}] = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (1 + 2A)w_{i,j} - Aw_{i+1,j} - Aw_{i-1,j} = w_{i,j-1} \qquad (2.15)$$

para cada $i=1,2,\ldots,(m-1)$ y $j=1,2,\ldots$

Además por las condiciones de que

$$w_{i,0} = f(x_i) \qquad i=1,2,\ldots,(m-1)$$
$$w_{m,j} = w_{0,j} = 0 \qquad j=1,2,\ldots$$

podemos hacer la representación matricial para este método

$$\begin{bmatrix} (1-2A) & -A & 0 & & 0 \\ -A & (1-2A) & -A & & \\ 0 & & & & \\ & & & & 0 \\ & & & & -A \\ 0 & & 0 & -A & (1-2A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix}$$

para $j=1,2,\ldots$

Se pueden usar diferentes métodos para la solución de este sistema.

El siguiente algoritmo, resuelve el problema de la ecuación de calor usando la reducción de Crout para resolver el sistema.

********** << >> **********

```
1000 REM Martha Teresa Flores Villalobos
1010 REM ****ALGORITMO DE DIFERENCIA REGRESIVA PARA LA ECUACION DE CALOR ****
1020 REM ******** ***ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES PARABOLICAS*********
1030 DEF FNTAB$(COL,REN)=CHR$(27)+"&a"+STR$(COL)+"c"+STR$(REN)+"Y"
1040 REM ** ESTE PROGRAMA SIRVE PARA APROXIMAR LA SOLUCION DE LA ECUACION
1050 REM       DE CALOR, SUJETA A CONDICIONES EN LA FRONTERA Y CONDICIONES
1060 REM       INICIALES
1070 REM    **DEPENDIENDO DEL PROBLEMA DEBEMOS CORREGIR LA LINEA 1320, QUE ES
1080 REM       DONDE SE ENCUENTRA DEFINIDA LA FUNCION.**
1090 INPUT "PUNTO EXTREMO L";L
1100 INPUT "TIEMPO MAXIMO T";T
1110 INPUT "CONSTANTE E";E
1120 INPUT "VALOR DE M";M
1130 INPUT "VALOR DE N";N
1140 LPRINT CHR$(27);"E"+CHR$(27);"J"
1150 LPRINT FNTAB$(15,7);"VALORES TOMADOS PARA ESTE PROBLEMA"
1160 LPRINT FNTAB$(20,10);"PUNTO EXTREMO L=";L
1170 LPRINT FNTAB$(20,11);"TIEMPO MAXIMO T=";T
1180 LPRINT FNTAB$(20,12);"VALOR DE LA CONSTANTE E=";E
1190 LPRINT FNTAB$(20,13);"M=";M
1200 LPRINT FNTAB$(20,14);"N=";N
1210 DIM T(N)
1220 DIM L(M)
1230 DIM U(M)
1240 DIM Z(M)
1250 DIM W(M+1)
1260 H=L/M
1270 K=T/N
1280 A=(E^2)*K/(H^2)
1290 FOR I=1 TO M-1
1300 P=3.14159265#
1310 X=I*H
1320 F(X)=SIN(X*P/2)
1330 W(I)=F(X)
1340 NEXT I
1350 L(1)=1+2*A
1360 U(1)=-A/L(1)
1370 FOR I=2 TO M-2
1380 L(I)=1+2*A+A*U(I-1)
1390 U(I)=-A/L(I)
1400 NEXT I
1410 L(M-1)=1+2*A+A*U(M-2)
1420 LPRINT FNTAB$(3,18); "LOS RESULTADOS OBTENIDOS SON:"
1430 LPRINT
1440 LPRINT FNTAB$(23,20);"X";FNTAB$(35,20);"T(J)";FNTAB$(50,20);"W(X,T(J))"
1450 LPRINT
1460 FOR J=1 TO N
1470 T(J)=J*K
1480 Z(1)=W(1)/L(1)
1490 FOR I=2 TO M-1
1500 Z(I)=(W(I)+A*Z(I-1))/L(I)
1510 W(M-1)=Z(M-1)
1520 NEXT I
1530 FOR I=M-2 TO 1 STEP -1
1540 W(I)=Z(I)-U(I)*W(I+1)
1550 NEXT I
1560 FOR I=1 TO M-1
1570 X=I*H
1580 LPRINT TAB(20);X;TAB(35);T(J);TAB(50);"W=";W(I)
1590 NEXT I
1600 NEXT J
1610 END
```

VALORES TOMADOS PARA ESTE PROBLEMA
PUNTO EXTREMO L= 1
TIEMPO MAXIMO T= .1
VALOR DE LA CONSTANTE E= .25
M= 3
N= 2

LOS RESULTADOS OBTENIDOS SON:

X	T(J)	W(X,T(J))
.3333334	.05	W= 1.59728
.6666667	.05	W=-1.597281
.3333334	.1	W= 1.472996
.6666667	.1	W=-1.472997

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (1/16)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad 0 < t$$

$$u(x,0) = 2SEN(2PX)$$

VALORES TOMADOS PARA ESTE PROBLEMA

PUNTO EXTREMO L= 2

TIEMPO MAXIMO T= .1

VALOR DE LA CONSTANTE E= 1

M= 4

N= 2

LOS RESULTADOS OBTENIDOS SON:

X	T(J)	W(X,T(J))
.5	.05	W= .6222056
1	.05	W= .8199051
1.5	.05	W= .1171293
.5	.1	W= .5428926
1	.1	W= .6092203
1.5	.1	W= .1821238

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < 2 \qquad 0 < t$$

$$u(0,t) = u(2,t) = 0 \qquad 0 < t$$

$$u(x,0) = \mathrm{SEN}(PX/2)$$

METODO DE RICHARDSON

El método de diferencia regresiva no tiene los problemas de estabilidad del método de diferencia progresiva. Llamaremos al método de diferencia regresiva un método incondicionalmente estable. El error de truncamiento local para este método es de orden $O(k + h^2)$, siempre y cuando la ecuación cumpla con las condiciones usuales de diferenciabilidad. En este caso, el método converge a la solución de la ecuación diferencial parcial.

La falla del método de diferencia regresiva resulta del hecho de que el error de truncamiento local tiene una porción con orden $O(k)$, por lo cual necesitamos que los intervalos en el tiempo, sean mucho más pequeños que los intervalos en el espacio. Necesitamos un método que tenga un error de truncamiento local de orden $O(k^2 + h^2)$.

Lo primero que haremos sera escoger una ecuación de diferencia que tenga un error de $O(k^2)$ para $u(x,t)$, en lugar de la que usamos anteriormente y donde teniamos un error de $O(k)$.

Si usamos la serie de Taylor en t, para la función $u(x,t)$ en el punto (x_i, t_j) y evaluando primero en (x_i, t_{j+1}), se tiene que:

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_i, t_j) + k\,\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{k^2}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) + \frac{k^3}{6}\,\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \mu_j^+) \qquad (3.1)$$

para algún μ_j^+ tal que $t_j < \mu_j^+ < t_{j+1}$.

Evaluando ahora en (x_i, t_{j-1}) se tiene que:

$$u(x_i, t_{j-1}) = u(x_i, t_j) - k\,\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{k^2}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) - \frac{k^3}{6}\,\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \mu_j^-) \qquad (3.2)$$

para algún μ_j^- tal que $t_{j-1} < \mu_j^- < t_j$.

Si restamos la ecuación (3.1) a (3.2), obtenemos:

$$u(x_i,t_{j-1}) - u(x_i,t_{j+1}) = -2k\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_j) - \frac{k^3}{3}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,\sigma_j^+) + \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,\sigma_j^-)\right] \quad (3.3)$$

por medio del uso del Teorema del Valor medio, la ecuación (3.3), puede ser simplificada aún más, y se tiene:

$$u(x_i,t_{j-1}) - u(x_i,t_{j+1}) = -2k\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_j) - \frac{k^3}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,\sigma_j) \quad (3.4)$$

para algún valor σ_i tal que $t_{j-1} < \sigma_j < t_{j+1}$.

Si despejamos $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_j)$ de la ecuación (3.4), obtenemos la fórmula de diferencia centrada:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_j) = \frac{u(x_i,t_{j+1}) - u(x_i,t_{j-1})}{2k} - \frac{k^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,\sigma_j) \quad (3.5)$$

donde σ se encuentra en el intervalo (t_{j-1},t_{j+1}). Utilizamos la fórmula para $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j)$ obtenida por medio de la serie de Taylor:

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) = \frac{u(x_{i+1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i-1},t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\beta_i,t_j) \quad (3.6)$$

donde β es tal que $x_{i-1} < \beta_i < x_{i+1}$.

Sustituyendo (3.5) y (3.6) en la ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - E^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

obtenemos la siguiente fórmula:

$$\frac{u(x_i,t_{j+1}) - u(x_i,t_{j-1})}{2k} - \frac{k^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,\sigma_j) - E^2\left[\frac{u(x_{i+1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i-1},t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\beta_i,t_j)\right] = 0 \quad (3.7)$$

El método de diferencia que resulta de la ecuación (3.7), y de la aproximación de $u(x_i,t_j)$ por $w_{i,j}$, se conoce como el MÉTODO DE RICHARDSON, y esta dado por:

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2k} - E^2\left[\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2}\right] = 0 \qquad (3.8)$$

Este método tiene un error de truncamiento local de orden $O(k^2+h^2)$, pero también presenta problemas de estabilidad.

METODO DE CRANK-NICOLSON

Tenemos un método más efectivo, que se puede obtener promediando el método de diferencia progresiva en el j-ésimo paso en t,

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2k} - E^2\,\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0 \qquad (3.9)$$

que tiene un error de truncamiento local de:

$$\tau_F = \frac{k}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,\beta_j) + O(h^2)$$

con la fórmula de diferencia regresiva en el paso (j+1) en t,

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - E^2\,\frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2} = 0 \qquad (3.10)$$

que tiene un error de truncamiento local de

$$\tau_B = -\frac{k}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,\hat{\beta}_j') + O(h^2)$$

si suponemos que $\beta_j \approx \hat{\beta}_j'$, entonces el método de diferencia promediada, lo obtenemos sacando un promedio de las ecuaciones (3.9) y (3.10), esto es:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - E^2\,\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} + \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - E^2\,\frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2}\right] = 0 \qquad (3.11)$$

factorizando esta ecuación lo más posible, se logra simplificar un poco más:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2}{k}\,(w_{i,j+1} - w_{i,j}) - E^2\,\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} + \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2}\right] = 0 \qquad (3.12)$$

De aquí, obtenemos el método de diferencia promediada, que esta dado por la siguiente ecuación:

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \frac{E^2}{2h^2}\,(w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j} + w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} - w_{i-1,j+1}) = 0 \qquad (3.13)$$

y tiene un error de truncamiento local de orden $O(k^2+h^2)$. Deben cumplirse además las condiciones de diferenciabilidad.

Si multiplicamos ambos lados de la ecuación (3.13) por k, obtenemos:

$$w_{i,j+1} - w_{i,j} - \frac{E^2 k}{2h^2}\,(w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j} + w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} - w_{i-1,j+1}) = 0 \qquad (3.14)$$

Ahora en la ecuación (3.14), hagamos $A = (E^2k/h^2)$, y obtendremos:

$$w_{i,j+1} - w_{i,j} - \frac{A}{2}\,(w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j} + w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} - w_{i-1,j+1}) = 0$$

Este método se conoce como el METODO DE CRANK-NICOLSON, y si lo representamos en la forma matricial $Bw^{(j+1)} = Cw^{(j)}$ para cada $j=0,1,2,\ldots,$ donde

$$w^{(j)} = (w_{1,j}, w_{2,j}, \ldots, w_{m-1,j})^T$$

y las matrices B y C se definen como

$$B = \begin{bmatrix} (1+A) & -A/2 & 0 & \cdots & 0 \\ -A/2 & (1+A) & -A/2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -A/2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -A/2 \\ 0 & \cdots & 0 & -A/2 & (1+A) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} (1-A) & A/2 & 0 & \cdots & 0 \\ A/2 & (1-A) & A/2 & \ddots & \vdots \\ 0 & A/2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & A/2 \\ 0 & \cdots & 0 & A/2 & (1-A) \end{bmatrix}$$

El algoritmo siguiente utiliza la reducción de Crout en la técnica de Crank-Nicolson. La forma en como vamos a determinar el paro del algoritmo sera por medio de la especificación de una longitud finita para el intervalo de tiempo.

```
1000 REM  Martha Teresa Flores Villalobos
1010 REM  Abril de 1986
1020 REM     ********* ALGORITMO DE CRANK-NICOLSON *********
1030 REM     ***ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES PARABOLICAS***
1040 LPRINT "   "
1050 REM ** DEBEMOS CORREGIR LA LINEA QUE CONTIENEN LA DEFINICION DE LA
1060 REM     FUNCION,  CADA VEZ QUE CAMBIEMOS DE PROBLEMA **
1080 INPUT "PUNTO EXTREMO L";L
1090 INPUT "TIEMPO T";T
1100 INPUT "CONSTANTE E":E
1110 INPUT "ENTEROS M,N";M,N
1120 LPRINT CHR$(27);"H"+CHR$(27);"J"
1130 DEF FNTAB$(COL,REN)=CHR$(27)+"&a"+STR$(COL)+"c"+STR$(REN)+"Y"
1140 LPRINT "<<< ESTE PROGRAMA SIRVE PARA APROXIMAR LA SOLUCION DE LA ECUACION"
1150 LPRINT "    DIFERENCIAL PARCIAL PARABOLICA, SUJETA A CONDICIONES EN LA "
1160 LPRINT "    FRONTERA Y CONDICIONES INICIALES >>>
1170 LPRINT "   "
1180 LPRINT "LA FUNCION  ES:  F(X)=2*SIN(2*P*X)"
1190 LPRINT FNTAB$(10,8);"LOS VALORES USADOS PARA ESTE PROBLEMA SON:"
1200 LPRINT FNTAB$(20,10);"PUNTO EXTREMO L=";L
1210 LPRINT TAB(20);"TIEMPO MAXIMO T=";T
1220 LPRINT TAB(20); "CONSTANTE E=";E
1230 LPRINT TAB(20); "ENTEROS M=";M;"N=";N
1240 DIM W(M)
1250 DIM U(M)
1260 DIM L(M)
1270 DIM T(N)
1280 H=L/M
1290 K=T/N
1300 A=(E^2)*K/(H^2)
1310 W(N)=0
1320 FOR I=1 TO M-1
1330 X=I*H
1340 P=3.1415927#
1350 F(X)=2*SIN(P*X*2)
1360 W(I)=F(X)
1370 NEXT I
1380 L(1)=1+A
1390 U(1)=(-A)/(2*L(1))
1400 FOR I=2 TO M-2
1410 L(I)=1+A+A*U(I-1)/2
1420 U(I)=-A/(2*L(I))
1430 NEXT I
1440 L(M-1)=1+A+A*U(M-2)/2
1450 LPRINT "    "
1460 LPRINT FNTAB$(10,18);"LOS RESULTADOS OBTENIDOS SON:"
1470 LPRINT     "
1480 FOR J=1 TO N
1490 T(J)=J*K
1500 Z(1)=((1-A)*W(1)+(A/2)*W(2))/L(1)
1510 FOR I=2 TO M-1
1520 Z(I)=((1-A)*W(I)+(A/2)*(W(I+1)+W(I-1)+Z(I-1)))/L(I)
1530 NEXT I
1540 W(M-1)=Z(M-1)
1550 FOR I=M-2 TO 1 STEP -1
1560 W(I)=Z(I)-U(I)*W(I+1)
1570 NEXT I
1580 FOR I=1 TO M-1
1590 X=I*H
1600 LPRINT "I=";I;TAB(10)"J=";J;TAB(20);"X=";X;TAB(40);"T=";T(J);TAB(50);"W=";W
```

```
(I)
1610 NEXT I
1620 NEXT J
```

<< ESTE PROGRAMA SIRVE PARA APROXIMAR LA SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL PARCIAL PARABOLICA, SUJETA A CONDICIONES EN LA FRONTERA Y CONDICIONES INICIALES >>>

LA FUNCION ES: F(X)=2*SIN(2*P*X)

LOS VALORES USADOS PARA ESTE PROBLEMA SON:

PUNTO EXTREMO L= 1
TIEMPO MAXIMO T= .1
CONSTANTE E= .25
ENTEROS M= 3 N= 2

LOS RESULTADOS OBTENIDOS SON:

I= 1	J= 1	X= .3333334	T= .05	W= 1.591825
I= 2	J= 1	X= .6666667	T= .05	W=-1.591825
I= 1	J= 2	X= .3333334	T= .1	W= 1.462951
I= 2	J= 2	X= .6666667	T= .1	W=-1.462952

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (1/16)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad 0 < t$$

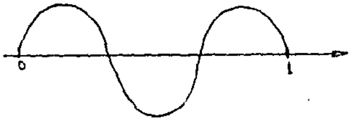
$$u(x,0) = 2SEN(2PX)$$

PARTE 4.

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES HIPERBOLICAS

La ecuación de onda en una dimensión, es un ejemplo de una ecuación diferencial parcial hiperbólica.

Consideraremos las vibraciones transversales de una cuerda extendida entre dos puntos, por ejemplo: sea $x = 0$ y $x = 1$.



el movimiento se produce en el plano xy de tal manera que cada punto de la cuerda se mueve en dirección perpendicular al eje x; si $u(x,t)$ denota los desplazamientos de la cuerda para $t > 0$ medidos desde el eje x, entonces u satisface la ecuación :

$$E^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \qquad \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 < t \end{matrix}$$

condicionada a las siguientes hipótesis:

a) La cuerda es perfectamente flexible.
b) La cuerda es homogénea, esto es, su masa por unidad de longitud es constante.
c) Los desplazamientos de u son pequeños comparados con el largo de la cuerda
d) La tensión de la cuerda es constante.
e) La tensión es grande comparada con la fuerza de gravedad.
f) No actua fuerzas sobre la cuerda..

Además supondremos que conocemos la posición y la velocidad iniciales de la cuerda:

$$u(x,0) = f(x) \qquad y \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

Como los extremos estan fijos, esto implica que:

$$u(0,t) = 0 \qquad y \qquad u(1,t) = 0$$

además, $f(x)$ es continua.

La ecuación de onda también aparece en la teoria de lineas de transmision de alta frecuencia, mecánica de fluidos, acústica y elasticidad.

SOLUCION POR METODOS APROXIMADOS DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES HIPERBOLICAS.

Consideraremos la solución numérica de la ecuación de onda, que es un ejemplo de las ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas.

Un problema tipico de condición de frontera es:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - E^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

sujeta a las condiciones:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad t > 0$$
$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 <= x <= 1$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \qquad 0 <= x <= 1$$

donde E es una constante.

Utilizaremos el **METODO DE LA DIFERENCIA FINITA** para encontrar la solución de la ecuación.

Empezamos por seleccionar un entero $m > 0$ y un tamaño de paso de tiempo $k > 0$. Con $h = 1/m$, definiremos los puntos de la red (x_i, t_j) por medio de:

$$x_i = ih \qquad \text{para cada } i = 0,1,2,\ldots,m$$

y

$$t_j = jk \qquad \text{para cada } j = 0,1,2,\ldots$$

En cualquier punto interior de la red, (x_i,t_j), la ecuación de onda a aproximar es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t_j) - E^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) = 0 \qquad (4.0)$$

Para lograr esta aproximacón, utilizaremos la fórmula de DIFERENCIA CENTRADA para las segundas derivadas parciales.

Expandiendo u en un polinomio de Taylor de tercer grado alrededor de (x_i,t_j).

Para la derivada parcial con respecto a x, evaluamos el polinomio de Taylor en x_{i+1} y x_{i-1}, entonces tenemos que:

$$u(x_{i+1},t_j) = u(x_i,t_j) + h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_j) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) +$$

$$\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,t_j) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(e_i^+,t_j) \qquad (4.1)$$

para alguna e_i^+, tal que $x_i < e_i^+ < x_{i+1}$ y

$$u(x_{i-1},t_j) = u(x_i,t_j) - h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_j) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) -$$

$$\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,t_j) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(e_i^-,t_j) \qquad (4.2)$$

para alguna e_i^-, tal que $x_{i-1} < e_i^- < x_i$, suponiendo que la derivada parcial de orden 4 de u es continua en $[x_{i-1},x_{i+1}]$. Si se suman estas dos ecuaciones y despejamos la segunda derivada parcial, vemos que los términos que contienen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_j) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,t_j)$$

desaparecen y solo queda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) = \frac{u(x_{i+1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i-1},t_j)}{h^2} -$$

$$\frac{h^2}{24}\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(e_i^+,t_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(e_i^-,t_j)\right]$$

Por medio del uso del Teorema del Valor Intermedio, podemos simplificar aun más la ecuación, y obtenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) = \frac{u(x_{i+1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i-1},t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(e_i,t_j) \qquad (4.3)$$

para algun punto e_i , tal que $x_{i-1} < e_i < x_{i+1}$.

De manera similar, obtenemos la derivada parcial con respecto a t, y evaluamos el polinomio de Taylor en t_{j+1} y t_{j-1} entonces despejada ya la ecuación para la segunda derivada parcial con respecto a t, obtenemos que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t_j) = \frac{u(x_i,t_{j+1}) - 2u(x_i,t_j) + u(x_i,t_{j-1})}{k^2} - \frac{k^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i,\tau_j) \qquad (4.4)$$

para algun punto τ_j , tal que $t_{j-1} < \tau_j < t_{j+1}$.

Sustituyendo estas dos ecuaciones en (4.0), se tiene que:

$$\frac{u(x_i,t_{j+1}) - 2u(x_i,t_j) + u(x_i,t_{j-1})}{k^2} - E^2 \left[\frac{u(x_{i+1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i-1},t_j)}{h^2} \right] = \frac{1}{12} \left[k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i,\tau_j) - E^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x}(e_i,t_j) \right]$$

Como u se expande a polinomios de Taylor de grado tres, entonces el error de truncamiento. corresponde al término que contiene las cuartas derivadas parciales. Despreciando este error, que esta dado por:

$$\tau_{ij} = \frac{1}{12} \left[k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i,\tau_j) - E^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(e_i,t_j) \right]$$

obtenemos la siguiente ecuación de diferencia:

$$\frac{u(x_i,t_{j+1}) - 2u(x_i,t_j) + u(x_i,t_{j-1})}{k^2} - E^2 \left[\frac{u(x_{i+1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i-1},t_j)}{h^2} \right] = 0 \qquad (4.5)$$

Si multiplicamos ambos lados de la ecuación (4.5) por k^2, obtendremos la ecuación siguiente:

$$u(x_i,t_{j+1}) - 2u(x_i,t_j) + u(x_i,t_{j-1}) - (E^2k^2/h^2)\, u(x_{i+1},t_j) +$$

$$(E^2k^2/h^2)\, 2u(x_i,t_j) - (E^2k^2/h^2)\, u(x_{i-1},t_j) = 0 \tag{4.6}$$

llamemos ahora $A = E k/h$, entonces la ecuación de diferencia queda:

$$w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1} - A^2w_{i+1,j} + 2A^2w_{i,j} - A^2w_{i-1,j} = 0 \tag{4.7}$$

donde $w_{i,j}$ aproxima a $u(x_i,t_j)$.

Despejemos ahora $w_{i,j+1}$, que es una aproximación más avanzada en el tiempo, y obtenemos:

$$w_{i,j+1} = 2(1 - A^2)w_{i,j} + A^2\,(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - w_{i,j-1}\,. \tag{4.8}$$

Tenemos que esta ecuación se satisface para toda $j = 1,2,...$ y para toda $i = 1,2,...,(m-1)$. Las condiciones de la frontera nos dan que:

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0 \qquad \text{para} \quad j = 1,2,... \tag{4.9}$$

y de la condición inicial, obtenemos que:

$$w_{i0} = f(x_i) \qquad \text{para} \quad i = 1,2,...(m-1) \tag{4.10}$$

En las ecuaciones (4.8) y (4.9), vemos que para calcular $w_{i,j+1}$ necesitamos conocer los valores de los pasos j y $j-1$ en el tiempo. Tenemos que los valores para $j=0$ estan dados por la condición inicial, pero los valores para $j=1$ que son necesarios para calcular $w_{i,2}$, los tenemos que obtener de la condición de la velocidad inicial, esto es de:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \qquad 0 <= x <= 1$$

Lo primero que hariamos seria reemplazar $\frac{\partial u}{\partial t}$ por la aproximación de la diferencia progresiva:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,0) = \frac{u(x_i,t_1) - u(x_i,0)}{k} - \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,\pounds_j)$$

donde $0 < \pounds_j < t_1$.

Despejando $u(x_i,t_1)$ de la ecuación anterior, tenemos:

$$k\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,0) = u(x_i,t_1) - u(x_i,0) - \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,\pounds_j)$$

por lo tanto:

$$u(x_i,t_1) = u(x_i,0) + k\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,0) - \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,\pounds_j) \qquad (4.11)$$

pero como $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,0) = g(x_i)$, sustituyendo en (4.11):

$$u(x_i,t_1) = u(x_i,0) + k\,g(x_i) - \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,\pounds_j)$$

entonces $w_{i,1}$, estaria dada por:

$$w_{i,1} = w_{i,0} + k\,g(x_i) \quad , \; i = 1,2,\ldots(m-1) \qquad (4.12)$$

pero vemos que esta ecuación tiene un error de truncamiento de $O(k)$. Si queremos una mejor aproximación para $u(x_i,0)$, lo podemos hacer si conocemos la segunda derivada de f en x_i.

Sea:

$$\frac{u(x_i,t_1) - u(x_i,0)}{k} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i,0) + \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,0) + \frac{k^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,\pounds_i) \qquad (4.13)$$

para $0 < \pounds_i < t_1$, y supongamos que la ecuación de onda se satisface también en la linea inicial, esto es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,0) - E^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,0) = 0 \qquad \text{para } i = 1,2,\ldots,m.$$

Si f'' existe, entonces:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,0) = E^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,0) = E^2 \frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) = E^2 f''(x_i).$$

Si sustituimos en (4.13) y vemos que $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,0) = g(x_i)$ obtenemos:

$$\frac{u(x_i,t_1) - u(x_i,0)}{k} = g(x_i) + \frac{k}{2} E^2 f''(x_i) + \frac{k^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,\mathcal{E}_j) \tag{4.14}$$

multipliquemos ambos lados por k:

$$u(x_i,t_1) - u(x_i,0) = k\, g(x_i) + \frac{k^2 E^2}{2} f''(x_i) + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,\mathcal{E}_j)$$

despejando $u(x_i,t_1)$ obtenemos:

$$u(x_i,t_1) = u(x_i,0) + k\, g(x_i) + \frac{k^2 E^2}{2} f''(x_i) + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,\mathcal{E}_j)$$

aproximando $u(x_i,t_1)$ por medio de $w_{i,1}$, tenemos :

$$w_{i,1} = w_{i,0} + k\, g(x_i) + \frac{k^2 E^2}{2} f''(x_i)$$

esta aproximación tiene un error de truncamiento local de $O(k^2)$ para cada $i = 1,2,\ldots,(m-1)$.

Si no podemos calcular $f''(x_i)$ facilmente, pero $f \in C^4[0,1]$, podemos expander $f(x_i)$ en un polinomio de Taylor de tercer grado alrededor del punto x_i, y evaluando en x_{i+1}, x_{i-1}, obtenemos que:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{1}{2} f''(x_i)h^2 + \frac{1}{6} f'''(x_i)h^3 + \frac{1}{24} f^{(4)}(\rho_i)h^4 \tag{4.15}$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{1}{2} f''(x_i)h^2 + \frac{1}{6} f'''(x_i)h^3 + \frac{1}{24} f^{(4)}(\rho_{-1})h^4 \tag{4.16}$$

donde $x_{i-1} < \rho_{-1} < x_i < \rho_1 < x_{i+1}$.

Si sumamos (4.15) y (4.16), obtenemos que:

$$f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) = 2f(x_i) + f''(x_i)h^2 + \frac{1}{24}[\, f^{(4)}(\sigma_1) + f^{(4)}(\sigma_{-1})\,]h^4,$$

despejando $f''(x_i)$

$$f''(x_i)h^2 = f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) - 2f(x_i) - \frac{1}{24}[\, f^{(4)}(\sigma_1) + f^{(4)}(\sigma_{-1})\,]h^4,$$

dividiendo entre h^2,

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} - \frac{h^2}{12}[\, f^{(4)}(\sigma_1) + f^{(4)}(\sigma_{-1})\,].$$

(4.17)

Si $f^{(4)}$ es continua en $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, por el Teorema del Valor Intermedio, podemos escribir (4.17) de la siguiente manera:

$$f''(x_i) = \frac{1}{h^2}[\, f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})\,] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\sigma) \quad (4.18)$$

para alguna σ tal que $x_{i-1} < \sigma < x_{i+1}$.

De aqui vemos que la aproximación (4.14) se convierte en:

$$\frac{u(x_i,t_1) - u(x_i,0)}{k} = g(x_i) + \frac{k\,E^2}{2}\left[\frac{1}{h^2}[\, f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})\,] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\sigma)\right] + \frac{k^2}{6}\frac{\partial^3 u(x_i,t_j)}{\partial t^3}$$

$$\Rightarrow \frac{u(x_i,t_1) - u(x_i,0)}{k} = g(x_i) + \frac{kE^2}{2h^2}[f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})] + O(k^2 + h^2k)$$

despejando $u(x_i,t_1)$, se tiene:

$$u(x_i,t_1) = u(x_i,0) + kg(x_i) + \frac{k^2E^2}{2h^2}[f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})] + O(k^3 + k^2h^2). \quad (4.19)$$

Sea $A = kE/h$ y $u(x_i,0) = f(x_i)$, entonces (4.19) queda:

$$u(x_i,t_1) = f(x_i) + kg(x_i) + \frac{A^2}{2} f(x_{i-1}) - A^2 f(x_i) +$$

$$\frac{A^2}{2} f(x_{i+1}) + O(k^3 + k^2h^2)$$

factorizando, se convierte en:

$$u(x_i,t_1) = (1-A^2)f(x_i) + kg(x_i) + \frac{A^2}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_{i+1})] +$$

$$O(k^3 + k^2h^2).$$

aproximando $u(x_i,t_1)$ a $w_{i,1}$, tenemos que:

$$w_{i,1} = (1 - A^2)f(x_i) + kg(x_i) + \frac{A^2}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_{i+1})] \tag{4.20}$$

nos sirve para aproximar $w_{i,1}$, para $i = 1,2,...,m-1$.

En el algoritmo para resolver la ecuacion de onda por el método de la diferencia finita, se usa la ecuación (4.20), que da una mejor aproximación que la ecuación (4.12), aunque también podríamos usar esta.

```
1000 REM ****ALGORITMO DE DIFERENCIA FINITA PARA LA ECUACION DE ONDA****
1010 REM **********ECUACIONES DIFERNCIALES PARCIALES HIPERBOLICAS*********
1020 REM *PROGRAMA REALIZADO POR: MARTHA TERESA FLORES VILLALOBOS*
1030 REM "<<<ESTE PROGRAMA SIRVE PARA APROXIMAR LA SOLUCION DE LA ECUACION
1040 REM              DE ONDA, SUJETA A CONDICIONES EN LA FRONTERA>>>
1050 DEF FNTAB$(COL,REN)=CHR$(27)+"&a"+STR$(COL)+"c"+STR$(REN)+"Y"
1060 REM "DEPENDIENDO DEL PROBLEMA QUE SE TRATE, DEBEMOS CORREGIR LA LINEA"
1070 REM  1300 Y 1350 QUE ES DONDE SE DEFINEN LAS FUNCINES FND(X) Y GND(Q)"
1080 INPUT "PUNTO EXTREMO L";L
1090 INPUT "TIEMPO MAXIMO T";T
1100 INPUT "CONSTANTE E":E
1110 INPUT "ENTEROS M,N":M,N
1120 LPRINT CHR$(27);"H"+CHR$(27);"J"
1130 LPRINT TAB(25); "RESOLUCION DE LA ECUACION DE ONDA"
1140 LPRINT FNTAB$(2,6);"LAS FUNCIONES DE LAS CONDICIONES INICIALES SON:"
1150 LPRINT ;"F(X)=SIN(P*X*2)   Y   G(X)=SIN(P*X)"
1160 LPRINT FNTAB$(15,12);"LOS VALORES TOMADOS EN ESTE PROBLEMA SON:"
1170 LPRINT FNTAB$(20,15);"PUNTO EXTREMO L=";L
1180 LPRINT TAB(20):"TIEMPO MAXIMO T=";T
1190 LPRINT TAB(20);"CONSTANTE E=";E
1200 LPRINT TAB(20);"ENTEROS M=";M;"N=";N
1210 DIM W(M,N)
1220 H=L/M
1230 K=T/N
1240 A=K*E/H
1250 FOR J=1 TO N
1260 W(0,J)=0
1270 W(M,J)=0
1280 NEXT J
1290 P=3.141593
1300 DEF FND(X)=0
1310 W(0,0)=FND(0)
1320 W(M,0)=FND(L)
1330 FOR I=1 TO M-1
1340 Q=I*H
1350  GND(Q)=SIN(4*P*Q)
1360 R=(I+1)*H
1370 Z=(I-1)*H
1380 W(I,0)=FND(Q)
1390 W(I,1)=(1-A^2)*FND(Q)+((A^2)/2)*(FND(R)+FND(Z))+K*GND(Q)
1400 NEXT I
1410 FOR J=1 TO N-1
1420 FOR I=1 TO M-1
1430 W(I,J+1)=2*(1-A^2)*W(I,J)+(A^2)*(W(I+1,J)+W(I-1,J))-W(1,J-1)
1440 NEXT I
1450 NEXT J
1460 LPRINT FNTAB$(20,22);"LOS RESULTADOS OBTENIDOS SON:"
1470 LPRINT
1480 LPRINT
1490 FOR J=1 TO N
1500 FOR I=1 TO M-1
1510 X=I*H
1520 T(J)=J*K
1530 LPRINT "I=";I;TAB(10);"J=";J;TAB(20);"X=";X;TAB(35);"T=";T(J);TAB(50);"W=";
W(I,J)
1540 NEXT I
1550 NEXT J
1560 END
```

RESOLUCION DE LA ECUACION DE ONDA

LAS FUNCIONES DE LAS CONDICIONES INICIALES SON:

F(X)=0 Y G(X)=SIN(4*P*X)

LOS VALORES TOMADOS EN ESTE PROBLEMA SON:

PUNTO EXTREMO L= .5

TIEMPO MAXIMO T= .5

CONSTANTE E= .25

ENTEROS M= 2 N= 2

LOS RESULTADOS OBTENIDOS SON:

I= 1	J= 1	X= .25	T= .25	W=-8.146035E-08
I= 1	J= 2	X= .25	T= .5	W=-1.527381E-07

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (1/4)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < 0.5 \qquad 0 < t$$

$$u(0,t) = u(0.5,t) = 0 \qquad 0 < t$$

$$u(x,0) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = SEN(4PX)$$

```
RESOLUCION DE LA ECUACION DE ONDA
  LAS FUNCIONES DE LAS CONDICIONES INICIALES SON:
F(X)=SIN(P*X*2)   Y   G(X)=SIN(P*X)
               LOS VALORES TOMADOS EN ESTE PROBLEMA SON:
                  PUNTO EXTREMO L= 1
                 TIEMPO MAXIMO T= .5
                 CONSTANTE E= 1
                 ENTEROS M= 4 N= 2
                  LOS RESULTADOS OBTENIDOS SON:
```

I= 1	J= 1	X= .25	T= .25	W= .1767765
I= 2	J= 1	X= .5	T= .25	W= .25
I= 3	J= 1	X= .75	T= .25	W= .1767768
I= 1	J= 2	X= .25	T= .5	W=-.75
I= 2	J= 2	X= .5	T= .5	W= .3535537
I= 3	J= 2	X= .75	T= .5	W= 1.25

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad 0 < t$$

$$u(x,0) = \text{SEN}(2PX)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \text{SEN}(PX)$$

CONCLUSIONES

Las Ecuacione Diferenciales Parciales que se estudiaron, juegan un papel importante en muchas áreas de física e ingeniería.

El análisis de una amplia variedad de diversos fenómenos lleva a las ecuaciones estudiadas, o a sus generalizaciones, en un mayor número de variables.

De aqui que los métodos desarrollados para encontrar la solución de este tipo de ecuaciones sea muy útil, pues nos ayudará a resolver una gran variedad de problemas de diversos tipos. Las tres ecuaciones estudiadas fueron:

(1) $k \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ Ecuación de Calor

(2) $E^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ Ecuación de Onda

(3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ Ecuación de Laplace

la ecuación (1) aparece en la teoría del flujo de calor (esto es, calor transferido por conducción) en una varilla, o en un alambre delgado, y la función $u(x,t)$ es la temperatura de la varilla.

Los problemas de vibraciones mecánicas se resuelven por medio de la ecuación de onda (2) , y en este caso $u(x,t)$ representara los desplazamientos de una cuerda vibrante. La solución $u(x,t)$ en la ecuación (3) se interpreta como la distribución estacionaria de temperatura, independientemente del tiempo, en una placa fina y plana.

A veces a la ecuación (1) se le llama ecuación de difusión, puesto que la difusión de substancias disueltas en algune solución es similar al flujo de calor en un sólido, en este caso $u(x,t)$ representa la concentración del liquido. Esta ecuación tambien aparece en el estudio del flujo de electricidad en un cable largo o en una linea de transmision.

Tenemos tambien que bajo ciertas condiciones se puede encontrar que la corriente y el voltaje en la linea generan ecuaciones semejantes a (1).

En la teoría de las lineas de transmisión de alta frecuencia, mecánica de fluidos, acústica y elasticidad aparece la ecuación de onda (2).

La ecuación (3) es muy común encontrarla en problemas de ingeniería que tratan de potenciales, tales como potencial electrostático, potencial gravitacional y potencial de velocidad en mecánica de fluidos, y menos frecuentemente en problemas relacionados con desplazamientos estáticos de membranas.

Por lo tanto, vemos la gran aplicación que tienen las Ecuaciones Diferenciales Parciales en la resolución de diversos tipos de problemas. Por lo cual el desarrollo de métodos de solución para este tipo de ecuaciones es de gran utilidad.

B I B L I O G R A F I A:

*** ECUACIONES DIFERENCIALES CON APLICACIONES
DENNIS G. ZILL
GRUPO EDITORIAL IBEROAMERICA
MEXICO, D.F.

*** CALCULUS VOLUMEN II
SEGUNDA EDICION
TOM M. APOSTOL
EDITORIAL REVERTE S.A.
MEXICO, D.F.

*** METODOS NUMERICOS
LUTHE-OLIVERA-SCHUTZ
EDITORIAL LIMUSA
MEXICO, D.F.

*** ANALISIS NUMERICO
RICHARD L. BURDEN, J. DOUGLAS FAIRES
GRUPO EDITORIAL IBEROAMERICA
MEXICO, D.F.