Universidad Autónoma de Guadalajara

Incorporada a la Universidad Nacional Autónoma de México

ESCUELA DE MATEMATICAS

"La Teoría de Juegos y el Problema de la Información"

TESIS PROFESIONAL

que para obtener el título de:

MATEMATICO

p r e s e n t a :

Adriana Beatriz Gaytán Ortiz

Guadalajara, Jalisco 1983

I N D I C E

INTRODUCCION

"LA TEORIA DE JUEGOS Y EL PROBLEMA DE LA INFORMACION"

La teoría de juegos es una sección de la matemática que estudia los métodos de toma de decisiones racionales en situaciones de conflicto; sin pretender definir rigurosamente lo que es una situación de conflicto, nos limitamos a señalar que surge ordinariamente cuando un grupo de personas cuyos intereses son contrapuestos actúan dentro de un mismo proceso (ejem. problemas de optimización bajo criterios en competencia); o bien siempre que es necesario tomar una decisión respecto de ciertas acciones sobre un objeto y los resultados finales de estas acciones solamente pueden estimarse en una forma probabilística. Entonces la teoría de juegos será el describir como deben de ser las decisiones en un juego que represente una situación de conflicto, es dar representación a las situaciones que se mencionan desde el punto de vista matemático.

Debemos tomar en cuenta que en un juego, el objetivo de todos los jugadores que intervienen y que son los tomadores de decisiones, es buscar la combinación de un conjunto de acciones; todos los jugadores deben buscar su óptimo resultado y para poder lograr esto, siempre seleccionan o toman la decision mas razonable y aquí es donde surge una importante pregunta: ¿ Qué es lo más razonable para un jugador? o dicho de otra forma, ¿ En que se basa para decidir que esa acción es la mas razonable?.

Pensando que la respuesta que buscamos podría estar vinculada a el término información, sabemos que en forma general es un factor del cuál depende la civilización moderna y que la podemos definir como el elemento necesario para el funcionamiento efectivo del cerebro y del sistema nervioso del hombre, siendolo así por extensión del cerebro y del sistema nervioso de la sociedad. La información en particular puede proveernos de los medios de ayuda para resolver problemas de decision. Pero tambien a pesar de ser un componente muy importante de la sociedad humana, no existen suficientes teorías para considerar el estudio estricto de esta.

Uniendo los conocimientos expuestos de lo que es la teoría de juegos y de lo que se entiende por información, podemos pensar que en un juego, momento a momento se hacen tomas de decision y que estas decisiones a su vez están basadas en alguna información; en la teoría de juegos no se nota explícitamente la existencia de dicha información, pero en realidad si hay efectos de esta. Así que, en contestacion a la pregunta que se hizo, responderemos que en lo que se basa el jugador para decidir lo que es mas razonable para él, es en la información que posee.

Cuando estamos hablando de teoría de juegos casi siempre los jugadores tienen la misma información y realmente la única que influye en la probabilidad. La teoría de juegos se convierte en algo muy ideal porque intervienen probabilidades, pero en el momento en que se aplica a situaciones reales no se comporta en forma tan perfecta porque sucede que cada elemento del juego puede tener diferente información y afectar su decisión.

En esta tesis queremos discutir el papel que tiene la información en el caso de un juego que ya está formado y contestar algunas preguntas como: ¿ qué sucede o como se comporta un juego cuando un jugador tiene más información que otro?, ¿ La misma información puede ser más importante para un jugador que para otro?, en caso de ser afirmativa la respuesta a la última pregunta, ¿ Podemos cuantificar esa importancia?, ¿ Se le podrá dar un valor determinado a la información?.

Buscando estas respuestas, en el capítulo I vamos a estudiar el comportamiento de diversos juegos que tienen diferentes tipos de información y veremos la importancia de considerar los problemas de información en los que existen varios sujetos; en el capítulo II se considera que la información tiene un valor cuantificable y se examinarán los diferentes comportamientos que se producen; para todo esto se utiliza el método de representación de "JUEGO EXTENSIVO" en el que existen varios conceptos que están definidos explícitamente como son: "ARBOL de JUEGO", "ESTRUCTURA de INFORMACION" etc. y que se introducen en el capítulo I.

Además se quiere mostrar que la teoría de juegos es indispensable para construir teorías de información y que son muy útiles las formas de representación y los conceptos de teoría de juego para la toma de decisiones en situaciones de conflicto.

CAPITULO I.- ESTRUCTURA DE LA INFORMACION PARA LA TOMA DE DECISIONES

En este capítulo, se intentará dar a conocer los elementos básicos sobre los cuales estarán basados los siguientes capítulos y que serán fundamentales en nuestro desarrollo; estos elementos se presentan por medio de definiciones y se respaldan con ejemplos para ayudarnos a lograr un mejor entendimiento y darle mayor claridad a los mismos.

Como ya se ha dicho, todo lo que se presenta en este capítulo de una u otra forma se utilizará posteriormente, pero como punto que será de mucha importancia y bastante interés se muestran diferentes formas de estructurar la información y se presenta el método de representación de "JUEGO EXTENSIVO" que utilizaremos para expresar la estructura del juego y lograr la representación de la información en forma amplia y detallada.

ESTRUCTURA DE LA INFORMACION PARA LA TOMA DE DECISIONES

I-1 "ARBOL DE JUEGO" y "PARTICION DEL JUGADOR".

Von Neumann y Morgenstern consideraron el árbol de juego como un método para expresar y dar representación a la estructura de un juego ó proceso de toma de decisiones entre dos ó más personas.
También se utiliza frecuentemente en la Teoría de Decisiones, consecuentemente a un árbol de juego se le conoce también como arbol de Decisión.

Iniciémos con el siguiente ejemplo para ayudarnos a describir los elementos que intervienen en un juego y para familiarizarnos con la terminología que utilizarémos posteriormente.

Supongamos que se tratan dos jugadores P_1 y P_2 tales que toman la decisión y la ejecutan que podrán elegir entre dos alternativas tales como ir a la derecha (R) ó a la izquierda (L) y además supongamos que los jugadores podrán hallarse en dos situaciones fortuitas ó que están fuera de su control, es decir no pueden elegir en cual colocarse por ejemplo: buen tiempo y mal tiempo. Diremos que es la "NATURALEZA" es quien decide en cuál situación coloca a cada jugador. Tomando en cuenta lo anterior cada uno de los jugadores elige cierta acción y la "NATURALEZA" toma un estado, suponemos entonces que en este momento los jugadores van a tener una cierta ganancia que puede entenderse como una consecuencia final de las acciones tomadas.

Más tarde consideraremos el orden de las acciones de los jugadores y la relación entre ellos.
Para expresar la relación existente entre las acciones de la "NATURALEZA" y los resultados de las acciones de los jugadores utilizaremos la forma de árbol. (Fig.1).

Basandonos en la Fig. 1 damos paso a describir los siguientes elementos: La "RAIZ DEL ARBOL" que está representada por O ó O_1, es el punto de partida del juego, en este punto, la "NATURALEZA" escoge entre las opciones de buen o mal tiempo, estos dos estados están representados por el 1,2 que salen de O_1.

Los puntos O_2 y O_3 estan representando el turno del jugador 1 y los llamamos "NODOS"; Aquí el jugador tiene dos alternativas R y L, o sea que surgen dos ramas. Similarmente se forman los siguientes "NODOS": O_4, O_5, O_6, O_7; que indican el turno del jugador 2 y se tienen dos ramas de R y L en cada uno.

La "NATURALEZA", el jugador 1 (P_1) y el jugador 2 (P_2) alternandose para elegir acciones y estados van a llegar a alguna

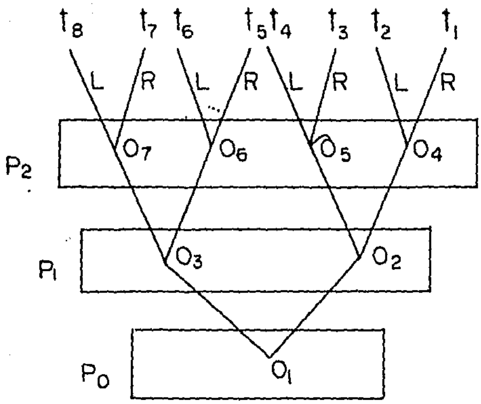


FIG. 1

de las "TERMINALES DEL ARBOL" que estan representadas por t_1, t_2, t_3, ..., t_8 y aquí los jugadores P_1, y P_2 obtendrán las ganancias π_1 y π_2 respectivamente.

De este ejemplo concluimos las siguientes definiciones:

"JUGADOR"

DEF.- Persona que participa en un juego y toma sus decisiones en forma independiente.

"JUGADA"

DEF.- Movimiento ó acción básica del juego. Cada movimiento es producido por la selección de una alternativa.

"ARBOL DE JUEGO: K"

DEF.- Figura plana formada por un número finito de segmentos rectilíneos ascendentes llamados "RAMAS", arrancando de un vértice inicial llamado "PUNTO DE BIFURCACION" ó "RAIZ DEL ARBOL" se va multiplicando sucesivamente, formando diversos vértices llamados "NODOS" y que representan los diversos movimientos, los símbolos a ellos asignados indican el jugador a quien corresponde cada uno. La multiplicación sucesiva termina en los llamados "PICOS" ó "NUDOS TERMINALES".

"RUTA"

DEF.- Es la trayectoria que se describe de la raíz a cualquier nodo.

"CAMINO"

DEF.- Es la trayectoria que se describe de la raíz a cualquier nodo terminal.

"ARBOL FINITO"

DEF.- Hablamos de un árbol finito cuando el número de ramas que se forman en la raíz y en todos los nodos es finito y el número de nodos en el "ARBOL DE JUEGO" es igualmente finito. Diremos además que un árbol es "INFINITO" si no cumple con la definición de "ARBOL FINITO".

Volviendo al ejemplo mencionado, observemos que el conjunto de nodos del árbol puede partirse en tres subconjuntos:

1. El turno de la naturaleza: $\{O_1\}$

2. El turno del jugador 1 : $\{O_2 , O_3\}$

3. El turno del jugador 2 : $\{O_4 , O_5 , O_6 , O_7\}$

Generalmente este tipo de partición se define de la siguiente forma:

"PARTICION DEL JUEGO" : P

DEF.- El conjunto de todos los nodos que pertenecen a un árbol se pueden dividir en n ó n+1 subconjuntos donde n es el número de jugadores y cada subconjunto de la n contiene todos los nodos donde un jugador podría hacer jugada.

Representamos ésta partición como:

$$P = \{P_0 , P_1 , \ldots , P_n\} \text{ ó } P = \{P_1 , P_2 , \ldots , P_n\}$$

y la llamaremos "PARTICION DEL JUEGO"

El conjunto de nodos que pertenecen a P_i para $(i = 1, \ldots, n)$ se llama "JUGADA PERSONAL". Este conjunto se forma por las elecciones que ejecuta el jugador i.

EL nodo que pertenece a P_0 se llama "JUGADA de la NATURALEZA" y en ésta se hace una elección fuera de la voluntad del jugador i $(i \geq 1)$.

Cuando no existe una "JUGADA de la NATURALEZA", P_0 es el conjunto vacío y P se va a formar con n conjuntos.

En nuestro ejemplo representado por la Fig. 1 la "PARTICION DEL JUEGO". Las "JUGADAS PERSONALES" de los jugadores P_1 y P_2 y la "JUGADA de la NATURALEZA" estarían dadas por:

$$P = \{P_0 , P_1 , P_2\}$$

$$P_0 = \{O_1\}$$

$$P_1 = \{O_2 , O_3\}$$

$$P_2 = \{O_4 , O_5 , O_6 , O_7\}$$

A continuación examinemos el siguiente planteamiento :

Supongamos que participamos en un juego y que somos mano en el caso de repartir las barajas o fichas de dominó según el caso de que se trate.

Casos como este planteamiento son ejemplos típicos de lo que se llama "JUGADA de la NATURALEZA" y para cada rama de este nodo existe una probabilidad determinada de antemano, aunque no siempre la conocemos exactamente; por ejemplo: existe una probabilidad de que obtengamos por o tercia en un conjunto de barajas. Además las barajas o fichas que nos quedan cerca tienen más probabilidad de ser seleccionadas que las más lejanas.

El conocimiento de estos elementos que son estimaciones acerca del comportamiento de la "NATURALEZA", influirá en nuestro propio comportamiento dentro del juego. A este conocimiento le llamaremos "INFORMACIÓN".

Aquí podemos hacer notar que el conocimiento de este elemento de información influirá directamente en la estructura de la información y por lo tanto en nuestro comportamiento.
Esto lo veremos más claramente un poco más adelante.

En el caso de nuestro ejemplo de la Fig. 1 la elección del buen o mal tiempo es independiente de la voluntad de los jugadores 1 y 2. Por lo tanto podemos decir que sucede una "JUGADA de la NATURALEZA"; sin embargo no están determinadas previamente las probabilidades de las ramas de la "JUGADA de la NATURALEZA".

Aunque estemos en este caso de que no estén previamente determinadas las probabilidades de las ramas de la "JUGADA de la NATURALEZA" muchas veces podemos considerar que las probabilidades de generar las siguientes ramas son más o menos previsibles, esto será cuando los fenómenos naturales y fenómenos sociales tienen relación con el juego.

Independientemente de la voluntad de los jugadores, se pueden estimar las probabilidades de todos los eventos posibles por medio de métodos de estadística.

Se puede expresar un árbol de juego como un turno de la "JUGADA de la NATURALEZA", bajo esta circunstancia podemos definir una Distribución de Probabilidades de la "JUGADA de la NATURALEZA" : $\vec{p}$ que en algunas ocasiones ya está establecida y que en otras tendremos que estimarla.

I-2 "ESTRUCTURA DE INFORMACION"

En esta seccion trataremos de analizar el problema de la información y su estructura.

Consideremos el problema de información que nos plantea el siguiente ejemplo:

Supongamos que los jugadores 1 y 2 deciden sus actividades, en otras palabras hacen una eleccion, y que esto sucede después de tener conocimiento de la elección ejecutada en la "JUGADA de la NATURALEZA"; en el momento que ellos tienen que efectuar una nueva eleccion, ellos no conocen la elección hecha por su competidor, esto es mutuo.

Tal estructura de información se puede representar como se indica en la fig. 2.

Checando en la figura podemos ver que ; el jugador 1 en su primera elección sabe si se encuentra en O_2 o O_3 puesto que conoce la elección de la naturaleza.

Y como se ha mencionado, el jugador 2 en el momento de ejecutar su elección tambien conoce lo ejecutado por la naturaleza, pero nó la elección hecha por el jugador 1, por lo tanto él solamente sabe que está en el conjunto que se forma con O_4 y O_5 o con el conjunto que se forma con O_6 y O_7 (pero no exactamente en qué nodo). A tales conjuntos los denotamos $U_{21} = \{ O_4 , O_5 \}$, $U_{22} = \{ O_6 , O_7 \}$ para el jugador 2 y los llamaremos "CONJUNTOS de INFORMACION" que tiene el jugador 2, y los agrupamos en $U_2 = \{ U_{21} , U_{22} \}$.

Y similarmente para el jugador 1 sus "CONJUNTOS de INFORMACION" son U_{11} y U_{12} donde $U_{11} = \{ O_2 \}$ y $U_{12} = \{ O_3 \}$, los agrupamos en $U_1 = \{ U_{11} , U_{12} \}$ por lo tanto los "CONJUNTOS de INFORMACION" de este ejemplo son U_{11}, U_{12}, U_{21}, U_{22}. Y a U_1, U_2 los llamaremos "PARTICION de la INFORMACION" del jugador 1, y del jugador 2 respectivamente.

De este modo podemos deducir que: Todo jugador i (Pi) tiene sus puntos de bifurcacion o nodos correspondientes (O_j), estos los puede dividir en "CONJUNTOS de INFORMACION", $U_i = \{ U_{i1} , U_{i2} \}$ donde U_{in} indica que el jugador i tiene alguna informacion en cada U_{in}, pero no sabe en qué O_j se encuentra situado.

Haciendo una sintesis de lo mencionado formamos la siguiente tabla y presentamos la siguiente definición:

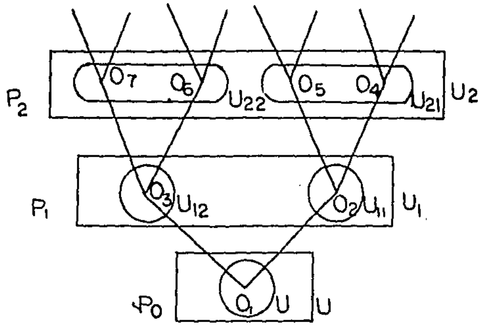


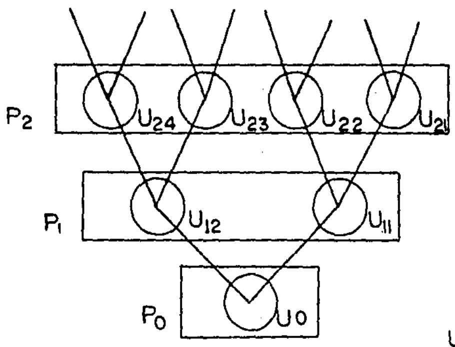
FIG. 2

$P = \{P_0, P_1, P_2\}$

$P_0 = \{O_1\}$

$P_1 = \{O_2, O_3\}$

$P_2 = \{O_4, \ldots\ldots O_7\}$



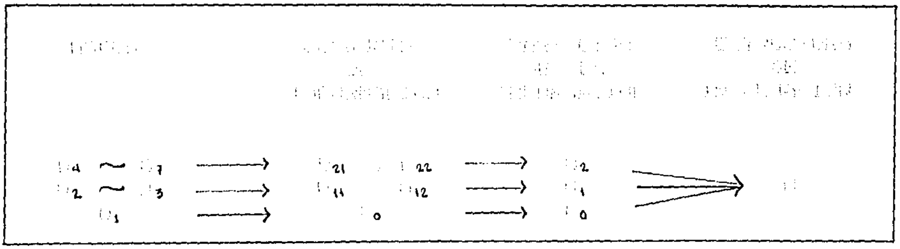
$U_0 = \{U_0\}$

$U_1 = \{U_{11}, U_{12}\}$

$U_2 = \{U_{21}, U_{22}, U_{23}, U_{24}\}$

$U = \{U_0, U_1, U_2\}$

FIG. 3



"PARTICION DE LA INFORMACION" : U

DEF.-

Sea $U = \{U_1, \ldots, U_n\}$ ó $U = \{U_0, U_1, \ldots, U_n\}$ partición del conjunto $X = \{O_1, \ldots, O_p\}$ de los puntos de bifurcación; para cada J_i $(i=0,1,\ldots,n)$ existe un $U_i \in U$ al que llamaremos "PARTICION de la INFORMACION" ó "ESTRUCTURA de INFORMACION" del jugador i; cada conjunto U_{ij} que pertenece a U_i se llama el "CONJUNTO INFORMACION" del jugador i.

U es la "PARTICION de la INFORMACION" del juego en total y esto es equivalente a la "ESTRUCUTRA de INFORMACION" del jugador i

Si todos los nodos que pertenecen al conjunto U_{ij} tienen el mismo número de ramas y además U_{ij} no tiene dos ó más nodos que pertenezcan a un mismo juego decimos que este conjunto U_{ij} es adecuado como "CONJUNTO de INFORMACION". Es claro que estas dos características son necesarias en un "CONJUNTO de INFORMACION".

Supondremos que todos los conjuntos U_{ij} que pertenecen al conjunto U_i son adecuados y que el conjunto U_0 que pertenece a la "JUGADA de la NATURALEZA" consta de un solo punto.

Ahora, planteando un nuevo ejemplo basado en el anterior supongamos que en el juego, el jugador 2 elige su rama después de que conoce los resultados de la naturaleza y la del jugador 1, entonces se puede representar su "ESTRUCTURA de INFORMACION" como se indica en la Fig. 3.

Haciendo una comparación entre la Fig. 2 y la Fig. 3., podemos observar que según la información que se tenga las particiones van a cambiar.

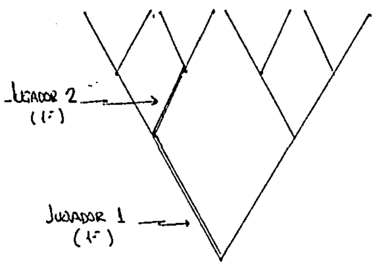
En el último caso los jugadores 1 y 2 saben perfectamente en cuales nodos se encuentran y cada uno de los "CONJUNTOS de INFORMACION" constan de un solo punto, esto se relaciona porque los jugadores 1 y 2 recuerdan perfectamente todas las elecciones hechas anteriormente a su nuevo turno, (elecciones hechas en la "JUGADA de la NATURALEZA" por su competidor y por él mismo). En general lo definimos como sigue:

(a) "INFORMACION PERFECTA"

DEF.- Si las "PARTICIONES de la INFORMACION" Ui de todos los jugadores únicamente constan de "CONJUNTOS de INFORMACION" de un solo nodo diremos que su "PARTICION de la INFORMACION" U es "INFORMACION PERFECTA".

Por ejemplo:

Supongamos que los jugadores 1 y 2 participan en un juego de Ajedrez donde a cada uno se le permite anotar las elecciones hechas por él y por su competidor; en este caso cada vez que les toca elegir poseen toda la información acerca del juego que han seguido.



* nótese que el hecho de saber las elecciones tomadas apunta a uno y sólo uno de los nodos.

Es decir: se conoce exactamente el nodo en que el juego se halla.

En caso de que tengamos un juego en que los participantes sean un sólo jugador y cumpla con la condición de que él, no recuerde sus propias elecciones en los turnos anteriores estaremos

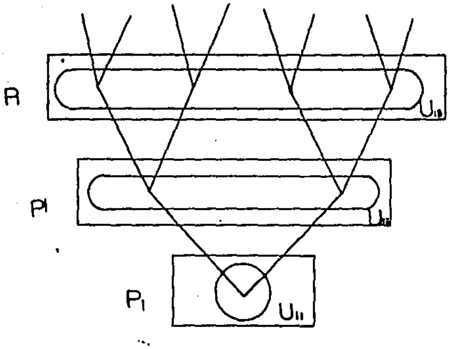


FIG. 4

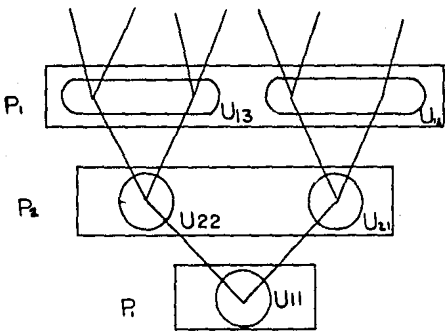


FIG. 5

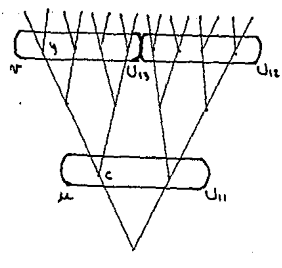
hablando de un problema típico de "DECISION de EQUIPO" Fig. 4.

En contraste con este tipo de juegos, (donde el jugador no recuerda sus elecciones hechas anteriormente); cuando el jugador recuerda las elecciones en sus turnos anteriores (no interesa si recuerde ó nó lo del competidor y la de la "JUGADA de la NATURALEZA" cuando ésta exista) tendríamos una representación como en la Fig. 5. Y lo llamamos "RECUERDO PERFECTO".

(b) "RECUERDO PERFECTO"

DEF.- Sean los "CONJUNTOS de INFORMACION" u,v Ui (donde i es arbitrario) y $x \in u$. Cuando es posible llegar a toda y donde $y \in v$, con una eleccion, c en u y todos los nodos de v son alcanzables con esta elección la "PARTICION de la INFORMACION" U es "RECUERDO PERFECTO".

El punto y es alcanzable por una elección c, significa que se puede llegar a x por alguna cierta jugada que tiene c.



I-3 "FUNCION GANANCIA" Y "JUEGO EXTENSIVO"

Cuando termina un juego y se llega a un nodo terminal, cada jugador tiene algunas ganancias, pérdidas, y ó efectos. A estos se les llama genéricamente "GANANCIA".

Dando una definición formal tenemos:

"FUNCION GANANCIA" : h

DEF.- "FUNCION GANANCIA" es una función cuyas componentes reales están definidas en todos los nodos terminales del "ARBOL de JUEGO" y el "VECTOR GANANCIA" es :

$$h(t) = (h_1(t), \ldots, hn(t))$$

donde $hi(t)$ es la "GANANCIA" del jugador i.

Cuando está definido el "ARBOL de JUEGO": K, la "PARTICION del JUGADOR" : $\vec{P}$, la distribución de probabilidades de la "JUGADA de la NATURALEZA": ρ (cuando existe la "JUGADA de la NATURALEZA"), la "PARTICION de la INFORMACION": U y la "FUNCION GANANCIA": h, entonces se fijan las reglas del juego y se define un juego.

A este tipo de juego lo llamaremos "JUEGO EN FORMA EXTENSIVA" ó sólo "JUEGO EXTENSIVO" y lo definimos:

$$G = [\ \Gamma\ , \Gamma\ , \vec{P}\ , U\ , h\ ]$$

Cuando se define un "JUEGO EXTENSIVO" normalmente consideramos que todos los jugadores tienen los conocimientos completos sobre todos los elementos del juego, entonces si esto sucede consideramos que todos se comportan bajo las mismas reglas del juego, y por lo tanto decimos que la información es completa. Pero en ocasiones, no todos los jugadores tienen suficiente conocimiento sobre todos los elementos del juego, en este caso es imposible decir que se comportan de acuerdo con las reglas comunes.

Un ejemplo de esto es cuando cada jugador hace su propia estimación sobre la distribución de la probabilidad de la "JUGADA de la NATURALEZA" : $\vec{p}$, y se comportan bajo su propia estimación (que no necesariamente coinciden). Así, cuando no están bajo las mismas reglas se llaman "JUEGOS con INFORMACION INCOMPLETA". Y cuando todos los jugadores tienen la información completa, se llaman "JUEGOS con INFORMACION COMPLETA".

Normalmente se consideran los casos de "INFORMACION COMPLETA".

A un juego con "INFORMACION COMPLETA" y si además su "PARTICION de la INFORMACION" es "INFORMACION COMPLETA" lo llamaremos "JUEGO con INFORMACION COMPLETA". Y un juego con "RECUERDO PERFECTO" se llamará "JUEGO con RECUERDO PERFECTO".

Además tambien podemos tener otros tipos de juegos como son los que se definen a continuación:

DEF.- "JUEGO COOPERATIVO": durante el juego existe comunicación entre los jugadores.

DEF.- "JUEGO NO-COOPERATIVO": no hay comunicación.

En nuestro desarrollo nos limitaremos a tratar con "JUEGO NO-COOPERATIVO".

I-4 "ESTRATEGIA"

"ESTRATEGIA" en un juego es : Un plan ó un conjunto de instrucciones que ya está designado de antemano cuando el jugador va a elegir una de las ramas en el nodo.

Suponiendo que las condiciones del juego serán:

i) El "ARBOL de JUEGO" es finito.

ii) Todas las ramas están numeradas en orden de izquierda a derecha como:
$e = 1, 2, \ldots, K$ (en el caso de $e = 1, 2$, algunas veces usaremos R, L).

iii) Es "JUEGO NO-COOPERATIVO".

Mencionaremos cuales tipos de "ESTRATEGIAS" existen:

1. "ESTRATEGIA LOCAL".

En el "CONJUNTO de INFORMACION" U_{ij} del jugador i, cuando de antemano está designada la rama que se debe seleccionar dentro de $e = 1, 2, \ldots, K$ la llamaremos "ESTRATEGIA LOCAL PURA" del jugador i en momento de U_{ij}.

Cuando para todas las ramas de U_{ij}, estén definidas las probabilidades de elegir cada rama como:

$$b_{ij} = (P_i(1), \ldots, P_i(K))$$

donde $P_i(e) \geq 0$, $e = 1, 2, \ldots, K$ indica que el jugador i tome la rama e y

$$\sum P_i(e) = 1$$

Se llamará "ESTRATEGIA LOCAL" del jugador i en U_{ij}.

Cuando una "ESTRATEGIA LOCAL" b_{ij} del jugador i es:

$$b_{ij} = (0, 1, 0, \ldots, 0)$$

Esto implica que el jugador i debe elegir la rama $e = 2$ en U_{ij} y por lo tanto este b_{ij} es tambien "ESTRATEGIA LOCAL PURA" (porque de antemano está designada).

De esto podemos concluir que: "ESTRATEGIA LOCAL PURA" es un caso especial de "ESTRATEGIA LOCAL".

2. "ESTRATEGIA DE COMPORTAMIENTO"

Sea el jugador i y supongamos que su "PARTICION de la INFORMACION" está formada por r "CONJUNTOS de INFORMACION" representada por:

$$Ui = (Ui_1, Ui_2, \ldots, Uir)$$

Sea el conjunto $bi = (bi_1, bi_2, \ldots, bir)$ donde cada bij es una "ESTRATEGIA LOCAL" en Uij ($j=1, \ldots, r$); a este conjunto le llamaremos "ESTRATEGIA de COMPORTAMIENTO" del jugador i.

Cuando todos los bij ($j=1, \ldots, r$) del conjunto bi son "ESTRATEGIA LOCAL PURA" en Uij ($j=1, \ldots, r$), al conjunto bi le llamaremos "ESTRATEGIA PURA" del jugador i y la representamos por:

$$\pi_i = (\alpha_{i1}(e_1), \alpha_{i2}(e_2), \ldots, \alpha_{ir}(e_r))$$

donde $\alpha ij(ej)$ significa que el jugador i selecciona la rama $e = \alpha ij(ej)$ en el "CONJUNTO de INFORMACION" Uij.

Llamaremos Bi al conjunto de todos los bi y Πi al conjunto de todos los πi entonces podemos decir $Bi \supset \Pi i$.

3. "ESTRATEGIA MIXTA"

Supongamos que el jugador i tiene m "ESTRATEGIAS PURAS" diferentes representadas por $\Pi i = (\pi_{i1}, \pi_{i2}, \ldots, \pi_{im})$ donde πij son las "ESTRATEGIAS PURAS" $j=1, \ldots, m$ y que para cada πij existe una probabilidad qij de escoger ese πij.

A la distribución de probabilidad i tal que:

$$qi = (qi_1, qi_2, \ldots, qim) \quad \text{donde } qij \geq 0, \; j=1,2,\ldots,m$$

$$\text{y} \quad \sum_{j=1}^{m} qij = 1$$

La llamamos "ESTRATEGIA MIXTA".

Es evidente que "ESTRATEGIA PURA" es un caso especial de "ESTRATEGIA MIXTA".

I-5 METODOS PARA CONSTRUIR ESTRATEGIAS

En esta sección trataremos de desarrollar una metodología para normalizar los juegos entendiendo por normalizar el encontrar las estrategias posibles y utilizarlas para facilitar los calculos de los valores esperados de "GANANCIA" para los jugadores y con estos resultados construir lo que llamarémos "MATRIZ DEL VALOR ESPERADO DE GANANCIA".

Como podemos ver, para esta normalización serán básicas las estrategias.

Para nuestro desarrollo hemos elegido dos ejemplos clásicos por su estructura, los cuales a continuación se describen:

1.- UN JUEGO SIN "JUGADA DE LA NATURALEZA"

Sea el desarrollo de este juego el siguiente:
Dos personas participan en un juego:

En la primera jugada : El jugador 1 escoge R ó L de entre dos ramas.
En la segunda jugada : El jugador 2 hace también su elección entre R y L.
En la tercera jugada : El jugador 1 conociendo todos los resultados anteriores elige R ó L.

en este momento el juego se termina.

Como podemos observar este juego no tiene "JUGADA de la NATURALEZA" además es un "JUEGO con INFORMACION PERFECTA" por lo tanto es un "JUEGO con RECUERDO PERFECTO".

Sea el vector de "GANANCIA" $h(t) = (h_1(t), h_2(t))$ y se cumpla que $h_1(t) + h_2(t) = 0$ llamado "JUEGO de SUMA-CERO para DOS PERSONAS" [1].

Graficamente se puede representar este juego como se indica en la FIG. 6.

Donde la partición del jugador es:

$$P = [P_{11} \cup P_{12}, P_2]$$

y la partición de la información es:

$$U = [U_1 = \{U_{11}, U_{12}, U_{13}, U_{14}, U_{15}\}, U_2 = \{U_{21}, U_{22}\}]$$

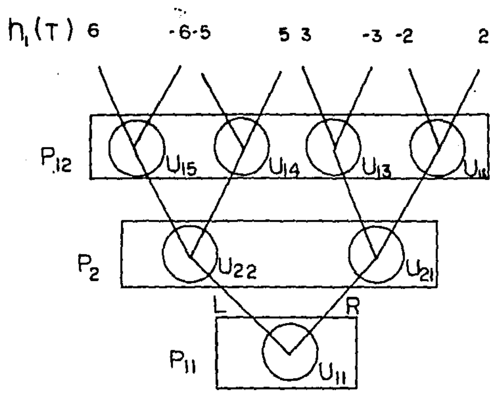


FIG. 6

Examinemos pués las estrategias posibles:

La "ESTRATEGIA PURA" del jugador 1 consiste en indicar cual rama elige de entre R y L, en cada "CONJUNTO de INFORMACION", por lo tanto se puede representar dicha estrategia como sigue:

$$
\begin{array}{c}
\\
1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ 32
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc}
R & R & R & R & R \\
R & R & R & R & L \\
R & R & R & L & R \\
 & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & \\
L & L & L & L & L
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Es decir, se pueden presentar $2^5=32$ "ESTRATEGIAS PURAS" como del tipo $\Pi_{13} = (R,R,R,L,R)$; pero por ejemplo cuando se escoge R en U_{11}, entonces en estos nodos (U_{14}, U_{15}) cualquier elección R ó L conducen al mismo vértice como por ejemplo $\Pi_{11} = (R,R,R,R,R)$ y $\Pi_{12} = (R,R,R,R,L)$ conducen al mismo punto terminal no importando cualquiera que haya sido la estrategia que tome el competidor ó jugador 2. A tales estrategias les llamaremos equivalentes.

A continuación aplicando las "ESTRATEGIAS EQUIVALENTES" llegamos a que tenemos realmente sólo ocho tipos de "ESTRATEGIAS PURAS":

$$
\begin{array}{c}
\\
1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc}
R & R & R & * & * \\
R & R & L & * & * \\
R & L & R & * & * \\
R & L & L & * & * \\
L & * & * & R & R \\
L & * & * & R & L \\
L & * & * & L & R \\
L & * & * & L & L
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Y aún mas, siendo las "ESTRATEGIAS PURAS" del jugador 2 en [U_{21}, U_{22}] escoger R ó L entonces podemos establecer 4 "ESTRATEGIAS PURAS" del jugador 2, que serían:

	u_{21}	u_{22}
1	R	R
2	R	L
3	L	R
4	L	L

Ahora, utilizando estos resultados, nosotros formamos la "MATRIZ de GANANCIA" [2] generada con el cálculo de la "GANANCIA" xi (i,j) en el caso que los dos jugadores tomen las "ESTRATEGIAS PURAS" i y j respectivamente. De la siguiente forma tenemos:

EL JUGADOR 2 / EL JUGADOR 1 ($u_{11} u_{12} u_{13} u_{14} u_{15}$)	u_{21}: R u_{22}: R	u_{21}: R u_{22}: L	u_{21}: L u_{22}: R	u_{21}: L u_{22}: L	MINI-MAX
1 (R R R * *)	2	2	-3	-3	-3
2 (R R L * *)	2	2	3	3	2
3 (R L R * *)	-2	-2	-3	-3	-3
4 (R L L * *)	-2	-2	3	3	-2
5 (L * * R R)	5	-6	5	-6	-6
6 (L * * R L)	5	6	5	6	5 **
7 (L * * L R)	-5	-6	-5	-6	-6
8 (L * * L L)	-5	6	-5	6	-5
Maxi-Min	5 *	6	5 *	6	5

Con la "MATRIZ de GANANCIA" facilmente se puede comprobar que existe la "ESTRATEGIA PURA OPTIMA" (**) en este juego.
Y tambien podemos encontrar los siguientes resultados:

La estrategia "MAXI-MIN" [3] la cuál es la estrategia óptima para el jugador 1 es :

$$\pi_{16} = (L, *, *, R, L)$$

La estrategia "MINI-MAX" [4] que es la estrategia óptima para el jugador 2 es :

$$\pi_{21} = (R, R) \quad y \quad \pi_{23} = (L, R)$$

y el valor del juego es :

$$v = 5$$

El jugador 2 tiene dos estrategias y cualquiera de las dos es la "ESTRATEGIA OPTIMA". Cuando el jugador 1 toma la estrategia Π_{16}, el jugador 2 pagará 5. Y si el jugador 1 toma otra estrategia diferente de Π_{16} él pagará -5.

2.- UN JUEGO CON "JUGADA DE LA NATURALEZA"

Así como en el ejemplo anterior, el juego se desarrolló sin la intervención de la "JUGADA de la NATURALEZA, ahora vamos a considerar el caso de que exista "JUGADA de la NATURALEZA".

Supongamos que se tienen dos ramas e=1,2 en la "JUGADA de la NATURALEZA" y que está dada la distribución de probabilidad por p=(1/4,3/4); los jugadores 1 y 2 tienen a su vez dos ramas e=1,2 en cada jugada y además la información no es perfecta.

La "ESTRUCTURA de INFORMACION" de este ejemplo está dada como se indica en la Fig. 7.

En este ejemplo podemos ver que los jugadores 1 y 2 tienen un único "CONJUNTO de INFORMACION" U_1 y U_2 respectivamente, entonces los conjuntos de "ESTRATEGIA PURA" son: $\Pi_1=\{R, L\}$ y $\Pi_2=\{R, L\}$ para cada uno.

Si el jugador uno toma $\Pi_1=R$ y el jugador 2 toma $\Pi_2=R$ (es una estrategia), llega a uno de los vértices t_1 ó t_5. La llegada a cualquiera de los diferentes vértices depende de la decisión de la "JUGADA de la NATURALEZA".

Pero la distribución de probabilidad está dada como p=(1/4,3/4), por lo tanto las probabilidades de sus llegadas son 1/4 y 3/4 respectivamente.

Entonces se pueden sacar las probabilidades de llegada a cada vértice en el caso de que $\Pi_1=R$ y $\Pi_2=R$ y tenemos que son las siguientes:

$$p(t_1)=1/4,\ p(t_2)=0,\ \ldots\ ,\ p(t_5)=3/4,\ p(t_6)=0,\ \ldots\ ,\ p(t_8)=0$$

y en este caso el valor esperado de la "GANANCIA" es :

$$x_1(R,R) = (2)*1/4 + (-2)*0 + \ldots + (-6)*3/4 + \ldots + (-2)*0 = -4$$

En el caso de que $\Pi_1=R$ y $\Pi_2=L$ las probabilidades son :

$$p(t_1)=0,\ p(t_2)=1/4,\ p(t_3)=0,\ \ldots\ ,\ p(t_6)=3/4,\ \ldots\ ,\ p(t_8)=0$$

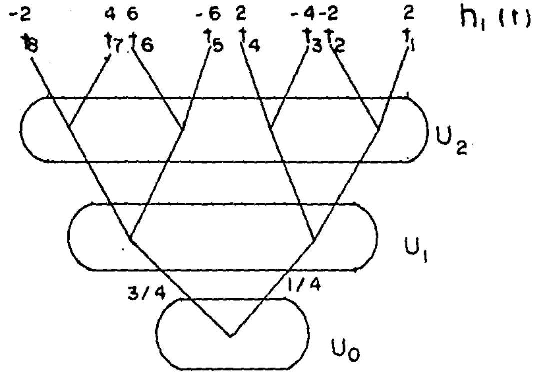


FIG. 7

y el valor esperado de la "GANANCIA" es :

x_1 (R,L) = (2)*0 + (-2)*1/4 + ... + (6)*3/4 + ... + (-2)*0 = 4

Cuando π_1=L y π_2=R tenemos las siguientes probabilidades:

p(t_1)=0 , ... , p(t_3)=1/4, ... , p(t_7)=3/4, p(t_8)=0 y

x_1 (L,R) = (2)*0 + ... + (-4)*1/4 + ... + (4)*3/4 + (-2)*0 = 2

Del mismo modo podemos calcular que

x_1 (L,L) = -1

La sintesis de los resultados que hemos mencionado es :

EL JUGADOR 1	EL JUGADOR 2 R	L
R	[illegible]	4
L	2	-1

y la llamamos MATRIZ DEL VALOR ESPERADO DE "GANANCIA"

(Nota: la "GANANCIA" del jugador 2 seria $-x_1$ (i,j) bajo las condiciones de "SUMA CERO).

Sería muy importante el discutir ampliamente acerca de que los valores esperados matemáticos simples de la "GANANCIA" del jugador sean verdaderamente su "GANANCIA" y si es o no es eficaz para el jugador, pero esto no será discutido en esta tesis, ver referencia 1.

Ahora bien, supongamos sucede que exactamente el valor esperado de la "GANANCIA" representa "eficacia" del jugador y que los jugadores toman acciones para lograr *máximos* ó mínimos de los valores esperados de estas "GANANCIAS". Fijemos este punto de evaluación y apliquemos el criterio de que esto siempre sucederá.

Asi como consideramos que la "GANANCIA ESPERADA" =

"EFICIENCIA", entonces también consideraremos que la "MATRIZ de los VALORES ESPERADOS de GANANCIA" = "MATRIZ de EFICIENCIA" del juego.

Basándonos en las ideas que se desarrollaron en los ejemplos para encontrar las estrategias posibles y utilizarlas para ayudarnos a generar la "MATRIZ de EFICIENCIA", vemos que nosotros podemos normalizar los "JUEGOS EXTENSIVOS".

Hasta aquí, hemos cumplido con la idea de normalización que se mencionó al principio del capítulo y con la cual convertimos el juego en un "JUEGO de SUMA-CERO NORMALIZADO para DOS PERSONAS".

Por último, habiendo normalizado en nuestro último ejemplo veamos que son más fáciles de sacar las "ESTRATEGIAS OPTIMAS" y el valor del juego, utilizando métodos ya establecidos por ejemplo tenemos que:

$$v = -4(P_1) + 2(1-P_1) \quad , \quad v = 4(P_1) + -1(1-P_1)$$

de donde

$$-4P_1 + 2 - 2P_1 = 4P_1 - 1 + P_1$$
$$-11P_1 = -3 \quad \Longrightarrow \quad P_1 = 3/11$$

$$v = -4(P_2) + 4(1-P_2) \quad , \quad v = 2(P_2) + -1(1-P_2)$$

de donde

$$-4P_2 + 4 - 4P_2 = 2P_2 - 1 + P_2$$
$$-11P_2 = -5 \quad \Longrightarrow \quad P_2 = 5/11$$

y llegamos a que serían las siguientes:

$$q_1^* = (3/11, 8/11), \quad q_2^* = (5/11, 6/11), \quad y \quad v = 4/11$$

Y también concluyamos después de intentar sacarlas que en este juego no existen "ESTRATEGIAS PURAS OPTIMAS" y la "ESTRATEGIA de COMPORTAMIENTO" coincide con la "ESTRATEGIA MIXTA".

Puede suceder así como en este ejemplo se vio que exista o nó la "JUGADA de la NATURALEZA" y con independencia de la partición, los "JUEGOS EXTENSIVOS" se pueden reducir a forma normalizada.

Referencia 1.-

Von Newman-Morgenstem: THEORY of GAMES and ECONOMICS, Behaviorims-Princeton University Press, 1944, 1947, 1953.

CAP II.- ESTRUCTURA DE INFORMACION Y PUNTOS DE EQUILIBRIO EN COMPETENCIA

En esto capítulo, buscamos introducirnos un poco mas a fondo en lo que llamamos la Estructura de la Información para tratar de mostrar la fuerte interacción que existe entre la "Estructura de Información" y "Equilibrio"; para lograr esto, se han tomado diferentes tipos de juegos de los que se presentan ejemplos en donde se normaliza y se busca el punto de equilibrio además de presentar las diferentes estructuras que producen.

Además de haber examinado el comportamiento del punto de equilibrio en las diferentes estructuras, al final del capítulo se hacen algunas consideraciones acerca de la influencia que puede tener la Información en el grado de determinación del comportamiento.

ESTRUCTURA DE INFORMACION Y PUNTOS DE EQUILIBRIO EN COMPETENCIA

II-1 "JUEGO de INFORMACION PERFECTA"

Para ayudarnos en nuestro desarrollo consideremos como ejemplo un juego que sigue los siguientes pasos :

Sean dos jugadores :

En la primera jugada : El jugador 1 escoge R ó L.

En la segunda jugada : El jugador 2 escoge R ó L.

En la tercera jugada : Nuevamente el jugador 1 elige R ó L.

En este momento termina el juego y los jugadores 1 y 2 obtienen una "GANANCIA" a y b respectivamente. Sea la suma de a y b no siempre cero y la "ESTRUCTURA de INFORMACION" es "INFORMACION PERFECTA".

Este juego se puede expresar como se ve en la Fig. 8.

Tratemos de imaginarnos ahora como se desarrollaria este juego; supongamos que en la tercera jugada se llega al "CONJUNTO de INFORMACION" U_{12} , en este momento naturalmente el jugador 1, para obtener la mayor ganancia elegirá L , obteniendo una "GANANCIA" de ([illegible],4). Similarmente cuando se llega a los "CONJUNTOS de INFORMACION" U_{13} ,U_{14} ,U_{15} con la decision del jugador 1 se logran "GANANCIAS" de (1,3), (2,0), y (5,3).

Basándonos en estas consideraciones, podemos representar o expresar el "ARBOL de JUEGO" como en la Fig. 9. Claramente se puede ver que se ha eliminado la información que no es necesaria.

Utilizando esta nueva representacion del juego cuando se llega a los "CONJUNTOS de INFORMACION" U_{21} ,U_{22} , el jugador 2 escoge L y L pudiendo reducir el "ARBOL de JUEGO" y representándolo como en la Fig 10.. Cuando examinamos el "ARBOL de JUEGO" representado en la Fig 10 obviamente (es lo que mas le conviene) el jugador 1 escoge L.

Por lo tanto, si analizamos un poco mas, podemos ver que si el jugador 1 toma L en U_{11} , el jugador 2 toma L en U_{22} ,que es donde obtiene mayor ganancia y se llega al vértice U_{15} y aquí si el jugador 1 elige R, que también es donde obtiene mayor ganancia entonces llegamos al vertice de "GANANCIA" (5,3); y de esta forma puede terminarse el juego.

Representemos ahora este juego, utilizando las ideas de normalización mencionadas en el capitulo anterior y tengamos lo siguiente:

Su matriz de "GANANCIA" :

$$G = (a_{ij}, b_{ij})$$

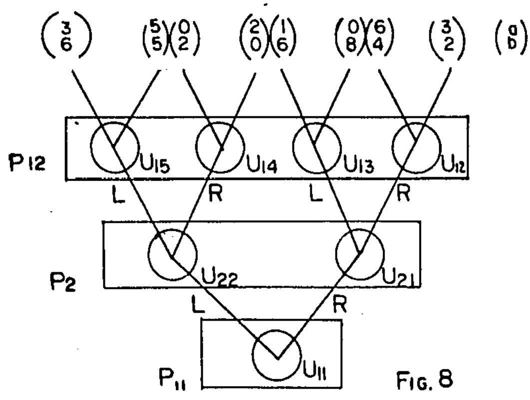


FIG. 8

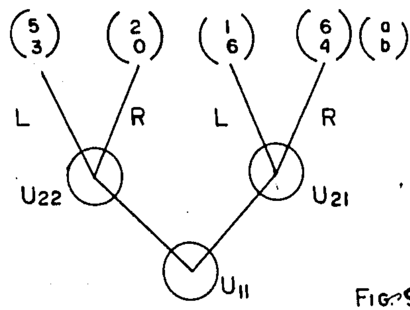


FIG. 9

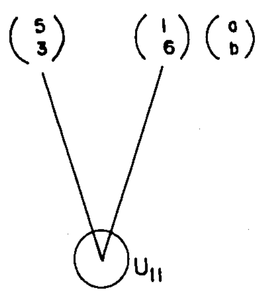


FIG. 10

Se puede expresar de la siguiente forma (donde aij,bij corresponden a la "GANANCIA" de los jugadores 1 y 2 cuando toman las estrategias i y j respectivamente).

"MATRIZ GANANCIA"

EL JUGADOR 1 $U_1 U_2 U_3 U_4 U_5$	EL JUGADOR 2 (U_1, U_2) (R,R)	(U_1, U_2) (R,L)	(U_1, U_2) (L,R)	(U_1, U_2) (L,L)
(R R R * *)	(1,2)	(1,2)	(0,8)	(0,8)
(R R L * *)	(1,2)	(1,2)	(1,6)	(1,6)
(R L R * *)	(6,4)	(6,4)	(0,8)	(0,8)
(R L L * *)	(6,4)	(6,4)	(1,6)	(1,6)
(L * * R R)	(2,0)	(5,3)	(2,0)	(5,3)*
(L * * R L)	(2,0)	(3,6)	(2,0)	(3,6)
(L * * L R)	(0,2)	(5,3)	(0,2)	(5,3)*
(L * * L L)	(0,2)	(3,6)	(0.2)	(3,6)

"PUNTO DE EQUILIBRIO" : ((L,*,*,*,R),(L,L)) donde * =R,L

"GANANCIA EN EQUILIBRIO" : (5,3)

Aquí podemos asegurar que para llegar a la "GANANCIA" (5,3) las estrategias del jugador 1 (L,*,*,*,R) donde * =R,L y del jugador 2 (L,L) no van a cambiar porque ellos siempre querrán obtener la mayor ganancia, y estas son las estrategias que se las aseguran.

Es decir ahí existe "equilibrio" de las intenciones de los jugadores. Tal juego de las estrategias ((L,*,*,*,R),(L,L)) se le llamará "PUNTO de EQUILIBRIO del JUEGO" donde * =R,L .

NOTA :

Observamos que en este mismo juego se puede obtener la misma "GANANCIA" (5,3) con las estrategias ((L,*,*,*,R),(R,L)) , pero a pesar de esto no podemos decir que es "PUNTO de EQUILIBRIO del JUEGO",porque en U_{21} cuando el jugador 2 tiene el plan de tomar R, el jugador 1 tomará la estrategia (R,L,R,*,*) ó (R,L,L,*,*) para obtener la mayor "GANANCIA" que sería (6,4), o sea que para el jugador 1 en este momento el juego le da mas ventajas a él y por lo tanto no existe equilibrio.

Después de estas conclusiones, pasemos a examinar otros tipos de juegos.

II-2 "JUEGO CON RECUERDO PERFECTO"

Es el turno de considerar un ejemplo que tenga las siguientes caracteristicas :

Sea un "JUEGO de SUMA-CERO para 2 PERSONAS" [1] y tengamos que en el

Turno 1 : el jugador 1 escoge uno de e = R,L.
Turno 2 : el jugador 2 sin saber la decisión del jugador 2 escoge uno de e = R,L.
Turno 3 : el jugador 1 sabiendo su decisión anterior (en el turno 1), pero sin conocer la decisión del jugador 2, escoge uno de e = R,L.

Decimos que este juego no es un "JUEGO con INFORMACION PERFECTA" pero si podemos decir que es un "JUEGO con RECUERDO PERFECTO" y se puede representar como en la Fig. 11. Esta es una modificación de la "ESTRUCTURA de INFORMACION" del "JUEGO con INFORMACION PERFECTA", que se representaba en la Fig. 6.

Ahora bien, tratando de normalizar, llegamos a la "MATRIZ GANANCIA" de este juego que por las "ESTRATEGIAS PURAS" se puede escribir como :

	EL JUGADOR 1					EL JUGADOR 2	
	(	U_{11}	U_{12}	U_{13}	)	U_2 (R)	(L)
1	(	R	R	*	)	2	-5
2	(	R	L	*	)	-2	2
3	(	L	*	R	)	5	-6
4	(	L	*	L	)	-5	6

Y como en este juego no existe la "ESTRATEGIA PURA OPTIMA" ("ESTRATEGIA MINI-MAX ó MAXI-MIN). Entonces buscamos la estrategia optima en la "ESTRATEGIA de COMPORTAMIENTO" y llegamos a que:

Las "ESTRATEGIAS de COMPORTAMIENTO" para este juego son:

$$b_1 = \{(P_1, 1-P_1), (P_2, 1-P_2), (P_3, 1-P_3)\}$$
$$b_2 = \{(r, 1-r)\}$$

donde Pi y r son las probabilidades de escoger R en U_{1i} y U_2 respectivamente.

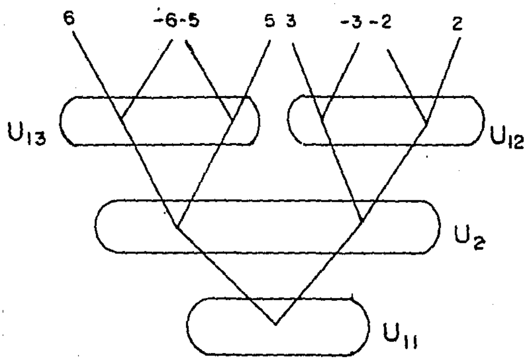


FIG. 11

Y tambien tenemos que la "FUNCION GANANCIA" es:

$$
\begin{aligned}
f(b_1\ ,b_2\ ) &= P_1\,[r(2P_2 - 2(1-P_2)) + (1-r)(-3P_2 + 3(1-P_2))] \\
&\quad + (1-P_1)\,[r(5P_3 - 5(1-P_3)) + (1-r)(-6P_3 + 6(1-P_3))] \\
&= P_1\,(5r - 3)(2P_2 - 1) + (1-P_1)(11r - 6)(2P_3 - 1)
\end{aligned}
$$

Consideremos ahora la reacción del jugador 1 para cualquier b arbitrario y esta es:

$$\max_{b_1} f(b_1\ ,b_2\ ) = \max\ [\ \max_{0\le P_2\le 1}\ (5r-3)(2P_2-1)\ ,\ \max_{0\le P_3\le 1}\ (11r-6)(2P_3-1)\ ]$$

Ahora busquemos b tal que suceda $\min_{b_2}\max_{b_1} f(b_1 ,b_2)$.

Los valores de $\max\ (5r-3)\ (2P_2-1)$ y P_2^* que dan sus máximos valores dependiendo de los valores de r son :

r	P_2^*	$\max_{P_2}\ (5r-3)(2P_2-1)$
$0 \le r < 3/5$	$P_2^* = 0$	$-5r + 3$
$r = 3/5$	$0 \le P_2^* \le 1$	0
$3/5 < r \le 1$	$P_2^* = 1$	$5r - 3$

Similarmente al examinar la relación entre r, los valores de $\max\ (11r-6)(2P_3-1)$ y P_3^* que dan sus valores máximos son :

r	P_3^*	$\max_{P_3}\ (11r-6)(2P_3-1)$
$0 \le r < 6/11$	$P_3^* = 0$	$-11r + 6$
$r = 6/11$	$0 \le P_3^* \le 1$	0
$6/11 < r \le 1$	$P_3^* = 1$	$11r - 6$

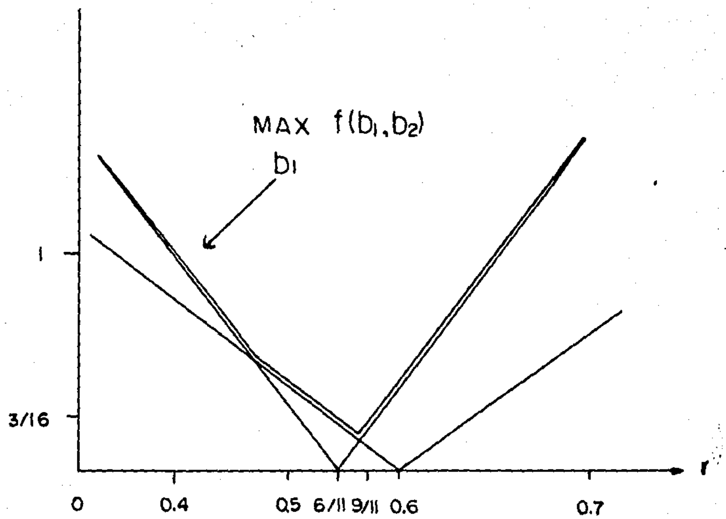


FIG. 12

Para ayudarnos a una visualización mejor de las relaciones expuestas tenemos la Fig. 12 .

Y bajo estas circunstancias, llegamos a que la "ESTRATEGIA de COMPORTAMIENTO MINI-MAX" del jugador 2 es $b_2^* = \{ (9/16)$ y $(7/16) \}$ y el valor del juego es $v_2 = 3/16$.

A continuación analizamos si este "COMPORTAMIENTO MINI-MAX" es "ESTRATEGIA OPTIMA" ó no.

Para esto, consideremos b_1^* tal que :

$$f(b_1^* , b_2^*) = \max_{b_1} f(b_1 , b_2^*)$$

Entonces tendremos 3 probabilidades ó resultados utilizando las dos tablas precedentes.

(1)	$P_1^* = 0$,	$0 < P_2^* < 1$,	$P_3^* = 1$
(2)	$0 < P_1^* < 1$,	$P_2^* = 0$,	$P_3^* = 1$
(3)	$P_1^* = 1$,	$P_2^* = 0$,	$0 < P_3^* < 1$

Para esta b_1^*, la condición en donde la "ESTRATEGIA de COMPORTAMIENTO MINI-MAX" es óptima es cuando satisface la condición :

$$f(b_1^* , R) = f(b_1^* , L)$$

En los casos (1) y (3) no se cumple esta condición, entonces b_1^* , b_2^* no están en equilibrio y no son ópcimas.

En el caso de (2) :

$$f(b_1^* , R) = -2P_1^* + 5(1-P_1^*) = 3P_1^* - 6(1-P_1^*) = f(b_1^* , L)$$

Entonces $P_1^* = 11/16$ y por lo tanto el juego de (b_1^* , b_2^*) tal que b_1^* y b_2^* son óptimas son :

$b_1^* = \{(11/16, 5/16), (0,1), (1,0)\}$
$b_2^* = \{(9/16, 7/16)\}$

Este (b_1^* , b_2^*) es el "PUNTO de EQUILIBRIO", cada una de estas b_i^* son las estrategias optimas y el valor del juego está dado por :

$$v = 3/16$$

Esta es una "ESTRATEGIA de COMPORTAMIENTO OPTIMO".

Ya que hemos encontrado la "ESTRATEGIA de COMPORTAMIENTO", nuestro siguiente paso será tratar de encontrar las "ESTRATEGIAS MIXTAS OPTIMAS", para hacer una comparación entre ellas.

Si sabemos que:

$$q_1^* = (q_{11}^*, q_{12}^*, q_{13}^*, q_{14}^*) \quad y \quad q_2^* = (q_{21}^*, q_{22}^*)$$

Y por las relaciones existentes entre b_1^*, b_2^* ("COMPORTAMIENTOS OPTIMOS") y q_1^*, q_2^* tenemos lo siguiente :

$$q_{11}^* (R\ R\ *) = P_1^* \times P_2^* = 11/16 \times 0 = 0$$
$$q_{12}^* (R\ L\ *) = P_1^* \times (1-P_2^*) = 11/16 \times 1 = 11/16$$
$$q_{13}^* (L\ *\ R) = (1-P_1^*) \times P_3^* = 5/16 \times 1 = 5/16$$
$$q_{14}^* (L\ *\ L) = (1-P_1^*) \times (1-P_3^*) = 5/16 \times 0 = 0$$

Por lo tanto $q_1^* = (0,11/16,5/16,0)$ y claramente q_1^* es igual a b_1^*, entonces $q_2^* = (7/16,7/16)$ y en este caso el valor del juego es $v = 3/16$, que es igual al caso de "ESTRATEGIA de COMPORTAMIENTO OPTIMO ".

En este momento examinemos otra vez y con calma la relación existente entre la "ESTRATEGIA de COMPORTAMIENTO" y el juego que se planteo, algo de lo que podemos decir es que existe el punto de equilibrio en la "ESTRATEGIA de COMPORTAMIENTO" y nó en la "ESTRATEGIA PURA".

Cuando los jugadores toman estas estrategias de equilibrio (por ejemplo: b_1^* y b_2^*) y cada jugador tiene conocimiento únicamente sobre las probabilidades en la toma de decisiones [por ejemplo en una jugada se puede saber que el jugador 1 solamente puede elegir R ó L y con las probabilidades de (11/16,5/16) respectivamente]; entonces, en este caso, la jugada no puede ser determinada, el jugador no puede conocer a donde va a llegar, el juego equilibrado no se puede determinar, únicamente se pueden determinar las probabilidades de llegar a cada vértice. (Nosotros no sabemos a que punto final vamos a llegar, lo que sabemos es qué probabilidad tiene cada uno de los nodos terminales -todos tienen probabilidad- y esa probabilidad es única con esa estrategia que escogimos).

En cambio con la "ESTRATEGIA PURA" nosotros conocemos a que nodo vamos a llegar y además sabemos que es único, esto sucede si se tiene el "PUNTO de EQUILIBRIO" cuando se escoge la "ESTRATEGIA PURA".

En el caso de que exista el "PUNTO de EQUILIBRIO" en la "ESTRATEGIA PURA" se puede determinar un único juego, por eso, si no es "ESTRATEGIA PURA" se va a reducir el grado de determinación del plan de comportamientos ambos jugadores no estan seguros de sus manos, su plan de movidas no estan claros,probabilisticamente se sabe a donde se puede llegar pero no es único. Ambos jugadores dudan, no pueden determinar su llegada, podríamos decir que los 2 son muy inteligentes, de forma que siempre estan pensando en una mejor forma de jugado.

Cuando no se tiene el "PUNTO de EQUILIBRIO" en la estrategia Podemos concluir que :

"Cuando no es pura, baja la seguridad".

En general decimos que en un "JUEGO con RECUERDO PERFECTO" no siempre existe "PUNTO de EQUILIBRIO" para la "ESTRATEGIA PURA" pero siempre existe en la "ESTRATEGIA de COMPORTAMIENTO.

[Teorema de Kuhn]

II-3 "JUEGO CON RECUERDO IMPERFECTO"

Para desarrollar esta seccion haremos uso de dos diferentes casos que están bajo las mismas condiciones de "JUEGO con RECUERDO IMPERFECTO", estos ejemplos han sido elegidos cuidadosamente para que a travez de ellos podamos visualizar el comportamiento del punto de equilibrio.

1.-

Consideremos pues el caso que representa la "ESTRUCTURA de INFORMACION" de la Fig. 12, donde el jugador 1 no recuerda la decisión en su primer turno.

La "MATRIZ GANANCIA" de este juego para la "ESTRATEGIA PURA" es:

EL JUGADOR 1		EL JUGADOR 2	
		U_2	U_2
U_{11}	U_{12}	(R)	(L)
(R	R)	2	-3
(R	L)	-2	-3
(L	R)	5	-6
(L	L)	-5	6

Como en este juego no existe la "ESTRATEGIA OPTIMA PURA", por lo tanto buscaremos las "ESTRATEGIAS OPTIMAS del COMPORTAMIENTO".

Así es que podemos escribir las "ESTRATEGIAS del COMPORTAMIENTO" de este juego de la siguiente forma :

$$b_1 = \{(P_1 \; , 1-P_1) \; , (P_2 \; , 1-P_2)\}$$
$$b_2 = \{(r, 1-r)\}$$

Hay que recordar que este juego es un caso especial de "JUEGO con RECUERDO PERFECTO" (Fig. 11 en el cuál están unidos los "CONJUNTOS de INFORMACION" U_{12} , U_{13}). Por lo tanto, la "ESTRATEGIA de COMPORTAMIENTO" del jugador 1 b_1 es básicamente igual a la estrategia b_1 en la Fig. 11.

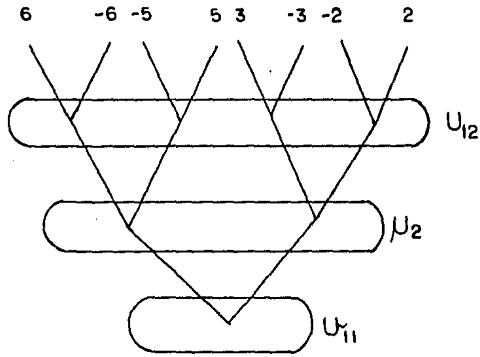


Fig. 13

$b = (P_1, 1-P_1), (P_2, 1-P_2), (P_3, 1-P_3)$ con la restricción de $P_2 = P_3$

Entonces en este juego la "ESTRATEGIA de COMPORTAMIENTO" MINI-MAX" del jugador 2 b_2^*, y su valor mini-max son:

$b_2^* = \{ (9/16), (7/16) \}$ y el valor del juego

es $v_2 = 3/16$ respectivamente.

Al igual que en otra ocación, a continuación quisiéramos analizar si esta estrategia es óptima ó no lo es ... empecemos :

Para esta b_2^*, el b_1^* que dá máximo el valor de $f(b_1, b_2^*)$ es, por la restricción de $P_2^* = P_3^*$.

$$P_1^* = 0 \quad ; \quad P_2^* = P_3^* = 1$$
$$P_1^* = 0 \quad ; \quad P_2^* = P_3^* = 0$$

NOTA: Con la condición (2) se ve que es imposible hacer $P_2^* = P_3^*$ porque $P_2^* = 0$ y $P_3^* = 1$.

Estas dos posibilidades no cumplen con la condición para ser óptimas ó sea que:

$$f(b_1^*, R) \neq f(b_1^*, L)$$

Por lo tanto estas (b_1^*, b_2^*) no son punto de equilibrio, y consecuentemente b_2^* no es óptima.

Es decir, en este juego no existe el "PUNTO de EQUILIBRIO", cuando trabajamos en los rangos de la "ESTRATEGIA de COMPORTAMIENTO".

Ahora bien, si seguimos analizando dentro de la "ESTRATEGIA de COMPORTAMIENTO" tenemos lo siguiente : b_2^*, era la "ESTRATEGIA de COMPORTAMIENTO MINI-MAX" del jugador 2 pero, si el jugador 1 usa la "ESTRATEGIA de COMPORTAMIENTO MAXI-MIN". ¿ Qué va a suceder?

Sucedería que la "FUNCION GANANCIA" se podría reescribir:

$$f(b_1, b_2) = r(2P_2 - 1)(5-3P_1) + (1-r)(2P_2-1)(3P_1-6)$$
$$= \{ r(5-3P_1) + (1-r)(3P_1-6) \} (2P_2-1)$$

Y entonces se puede encontrar la "ESTRATEGIA de COMPORTAMIENTO MAXI-MIN" que estaría dada por:

$$b_1^* = \{ (P_1^*, (1-P_1^*)), (1/2, 1/2) \} \qquad 0 \leqslant P_1^* \leqslant 1$$

donde el valor máximo es $v_1 = 0$. El valor mini-max del jugador 2 da el valor del juego $v_2 = 3/16$ y entonces como $v_1 \neq v_2$, se implica que ésta combinacion de la "ESTRATEGIA de COMPORTAMIENTO MINI-MAX" y la "ESTRATEGIA de COMPORTAMIENTO MAXI-MIN" no son "ESTRATEGIAS OPTIMAS".

Como no hemos encontrado el "PUNTO de EQUILIBRIO" en los rangos de la "ESTRATEGIA de COMPORTAMIENTO nuestro siguiente paso será buscarlo en la "ESTRATEGIA MIXTA".

Nosotros sabemos que siempre existe la "ESTRATEGIA OPTIMA" dentro del rango de la "ESTRATEGIA MIXTA" en el "JUEGO de SUMA-CERO ESTANDARIZADO para 2 PERSONAS". O sea, es el Teorema del "MINI-MAX"; y su generalizacion es el Teorema de NASH (Apéndice 1).

Así es que encontramos las "ESTRATEGIAS MIXTAS OPTIMAS" q_1^*, q_2^* y el valor del juego que son los siguientes :

$$q_1^* = (0, 11/16, 15/16, 0) \quad q_2^* = (9/16, 7/16) \quad y \quad v = 3/16$$

Pero, aunque el jugador 1 conozca esta "ESTRATEGIA MIXTA OPTIMA", él no puede utilizar este conocimiento para tomar la decisión de su comportamiento. En este caso las únicas cosas que él puede utilizar son: $P_2(R,L) = 11/16$, $P_3(L,R) = 5/16$ por eso, aunque en la primera jugada se escoge R ó L según estas probabilidades en la tercera jugada el jugador 1 no recuerda esta elección, y no puede tomar la decisión de elegir R ó L.

De esta forma, en este ejemplo, decimos que el jugador 1 no puede utilizar las elecciones anteriores para determinar su plan de comportamiento, y, por lo tanto no tiene significado para él, la "ESTRATEGIA MIXTA OPTIMA" que obtendría al normalizar. Este resultado, lo produce la "ESTRUCTURA de INFORMACION" especificada en la Fig. 13.

Cuando en la "ESTRATEGIA del COMPORTAMIENTO" no existe la "ESTRATEGIA OPTIMA", baja aún mas la seguridad en la toma de decisiones. Desde el punto de vista de la toma de decision del plan de comportamiento a seguir, en el caso de que exista el "COMPORTAMIENTO MIXTO OPTIMO", se puede decir que no se puede aprovechar esta informacion asi es que es casi imposible el tomar una decision.

2.-

En el siguiente caso consideraremos que no se recuerda perfectamente lo que se hizo, pero el jugador 1 conoce el resultado de la elección del jugador 2 lo cual se representa en la Fig. 14.

	EL JUGADOR 1					EL JUGADOR 2	
	(	U_{11}	U_{12}	U_{13}	)	(R)	(L)
1	(	R	R	R	)	2	-3
2	(	R	R	L	)	2	3
3	(	R	L	R	)	-2	-3
4	(	R	L	L	)	-2	3
5	(	L	R	R	)	5	-6
6	(	L	R	L	)	5	6
7	(	L	L	R	)	-5	-6
8	(	L	L	L	)	-5	6

De donde concluimos que el Punto de Equilibrio se encuentra en { (L,R,L) , (R) } y el valor del juego es $v = 5$.

La forma Normalizada de este juego es como el anterior y existe el punto de equilibrio en la "ESTRATEGIA PURA".

Estos resultados indican que aunque se trate de un "RECUERDO IMPERFECTO" va a existir el punto de equilibrio en la "ESTRATEGIA PURA" cuando se aumenta la información.

En este caso se tiene el mismo punto de equilibrio que en el caso de "INFORMACION PERFECTA" (Fig. 6), y las "ESTRATEGIAS OPTIMAS" de los jugadores 1 y 2 son (L, *, *, R, L) y (R), respectivamente las cuales son equivalentes en caso de "INFORMACION PERFECTA".

A causa del aumento de la información, el juego que se representa en la Fig. 13 se transforma al que se representa en la Fig. 14, y se puede notar el aumento en el grado de determinación del plan de comportamiento del jugador.

También comparando los juegos de la Fig. 14 y de la Fig. 11 que es un "JUEGO con RECUERDO PERFECTO", concluimos que el juego de la Fig. 11 es más determinístico, esto quiere decir que sería mas fácil determinar el comportamiento a seguir por el jugador, o dicho de otra forma, su grado de determinación del plan de comportamiento es mas alto.

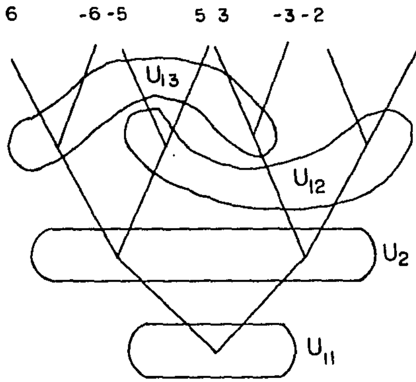


FIG. 14

En el caso del juego de la Fig. 11 se conoce que su elección anterior es R ó L, y en el caso de la Fig. 14 se conoce la selección anterior del otro jugador ya sea R ó L. Entonces se puede decir que ambos tienen el mismo crecimiento o aumento en la cantidad de la información.

Pero en la Fig. 11 no existió el punto de equilibrio en la "ESTRATEGIA PURA", y en la Fig. 14 sí existió.

Por lo anterior podemos entender que el incremento en la cantidad de la informacion, aumenta el grado de determinación del comportamiento y tiene una relación íntima con la "ESTRUCTURA de INFORMACION". Desde un punto de vista definimos la cantidad de informacion como calidad de la información cuando se refleja en la estructura de la propia información.

Comparando este juego con los anteriores podemos decir que tienen la misma cantidad de informacion, pero no tienen la misma calidad de información.

Cuando aumenta la información aumenta la seguridad para la próxima eleccion.

Para definir la cantidad de informacion debemos tomar en cuenta la estructura de los datos y esto podemos decir que es calidad de la información; la estructura de informacion afecta a la cantidad de información.

La calidad de la información es equivalente a la estructura de los datos.

II-4 Información y el Grado de Determinación del Comportamiento

Por lo mencionado en el capítulo, nosotros nos podemos dar cuenta de que siempre existen los puntos de equilibrio dentro de la "ESTRATEGIA PURA", la "ESTRATEGIA de COMPORTAMIENTO" y "ESTRATEGIA MIXTA" en caso de los juegos de "INFORMACION PERFECTA", "RECUERDO PERFECTO" y "RECUERDO IMPERFECTO" respectivamente.

Al mismo tiempo nosotros sabemos que siempre existe el punto de equilibrio dentro del rango de la "ESTRATEGIA de COMPORTAMIENTO" en el "JUEGO de RECUERDO IMPERFECTO" y no siempre exite el punto de equilibrio dentro del rango de la "ESTRATEGIA PURA" en el "JUEGO de INFORMACION IMPERFECTA", pero estamos seguros de que sí lo tiene en la "ESTRATEGIA MIXTA".

Todos estos juegos que se han mencionado, tienen diferentes "ESTRUCTURAS de INFORMACION" y así como se mencionó con anterioridad con esto podemos ver que cuando se cambia de estructura de información se influye en la existencia del punto de equilibrio y en su carácter. Por lo tanto si cambiamos de estructura el punto de equilibrio se mueve y en ocaciones desaparece.

Por este resultado podemos considerar que la información tiene una función muy importante en el momento de la toma de decisiones.

La "ESTRATEGIA" es el plan determinado de antemano de los comportamientos que deben seguirse; es el plan de los movimientos antes del movimiento.

Cuando se toma cierta estrategia de equilibrio, se puede imaginar o pretender saber qué tipo de juego de equilibrio va a ocurrir; en este momento cuando más información se tiene tanto más alto es el grado de determinación del juego de equilibrio; por lo tanto, podemos ver que como se había sugerido, la información influye en el juego y al mismo tiempo no se contradice nada de lo ya establecido, vemos que la idea no es contraria a lo que conocemos a traves de nuestra experiencia, lo que de alguna forma garantiza nuestra teoría como buena y el metodo que se desarrolla como correcto.

Una conclusion lógica es que la informacion hace el papel del aumento en la determinación del plan de comportamiento, en otras palabras sirve para aumentar la seguridad de cada movimiento; esta es la función más importante de la información y para aclarar este papel nosotros sabemos que tenemos que conocer bién la estructura de la información.

CAP III.- EL VALOR DE LA INFORMACION

Lo que buscamos en este capítulo, es tratar de hacer notar como el valor de la información influye decisividad al comportamiento; para lograr esto, al igual que en los capítulos anteriores nuestro desarrollo será a base de ejemplos que representan diferentes tipos de juegos y los cuales dan apoyo a las conclusiones y comentarios que se hacen.

Una pregunta que se tratará de contestar es: ¿ Que tanta ventaja o desventaja podrá tener el jugador al obtener una mayor cantidad de información ?. Respecto a esto se verá como puede suceder que el incremento de información no necesariamente produce aumento en la "GANANCIA" del jugador.

Resumiendo, lo que se mostrará en el capítulo es el valor de la información en diferentes estructuras.

III.- EL VALOR DE LA INFORMACION

III-1 Valor Esperado de la Información

Hay varios aspectos de intereses que pueden ser examinados en lo que llamamos información, y según estos, surgen diferentes definiciones acerca del valor que podría tener la información.

Podemos ver que la importancia de la información depende del usuario de dicha información. Por ejemplo cuando una persona considera, que compraría cierta información con un máximo de 100 pesos, el valor de esta información es de $ 100 para él, lo que para otra puede valer $ 200.

Cuantifiquemos la importancia de la Información y definamos

El valor de la Información como :

- la ganancia posible con el uso de esta información menos la ganancia posible sin el uso de esta información -

Utilizando esta definición examinemos el valor de la información en algunos problemas:

Pensemos en el caso de un "JUEGO NO-COOPERATIVO" y tengamos que:

Están varios jugadores ó varios sujetos de decisión y no existe comunicación entre ellos.
Este juego está dado por la forma extensiva: G $[K, P, \vec{p}, U, h]$

Donde excepto la "ESTRUCTURA de INFORMACION" (U), todos sus elementos son fijos.

El jugador i obtiene una nueva información ΔI: Esto indica que: su "ESTRUCTURA de INFORMACION" U_i nuevamente se particiona y se convierte en $U_i' = U_i\ (\Delta I)$.

La "GANANCIA" máxima posible del jugador i con el uso de esta nueva información depende de sobre qué "ESTRUCTURA de INFORMACION" se va a agregar la nueva.

Y para comparar los casos que surgen al agregar una nueva información a otra ya establecida, se deben mantener constantes las "ESTRUCTURAS de INFORMACION" de los otros jugadores, esto es necesario.

Aclarando esto, se debe hacer la definición del Valor de la Información como sigue:

DEF.- El "VALOR ESPERADO" de la Información agregada ΔI que gana el jugador i bajo la "ESTRUCTURA DE INFORMACION" $U = [U_0, U_1, \ldots, U_n]$ = [la ganancia posible del jugador i con la nueva "ESTRUCTURA de INFORMACION":

$U' = [U_0, U_1, \ldots, U_i' = U_i(\Delta I), \ldots, U_n]$ por [ ] - la ganancia posible del jugador i con la "ESTRUCTURA de INFORMACION" U

Esto lo representamos de la siguiente forma:

$$v_i(\Delta I / U) = v_i(U') - v_i(U)$$

III-2 EL Valor de la Información en un caso de un "JUEGO de SUMA-CERO para 2 PERSONAS"

Veamos como se comporta el valor de la información en un "JUEGO de SUMA-CERO para 2-PERSONAS" y partamos de lo siguiente:

Sea v el valor del "JUEGO de SUMA-CERO para 2 PERSONAS", v depende de la "ESTRUCTURA de INFORMACION" $U = [U_0, U_1, U_2]$; cuando U = constante, se puede escribir:

$$v = v(U_1, U_2)$$

Supongamos que el jugador 1 es el maximizado y el jugador 2 el minimizado, el jugador 1 adquiere información ΔI, y se reparte U_1 en U_1', y se modifica la "ESTRUCTURA de INFORMACION" de $U = [U_0, U_1, U_2]$ a $U' = [U_0, U_1', U_2]$. Con esto el valor de la Información ΔI se puede escribir como sigue:

$$v = (\Delta I/U) = v(U_1', U_2) - v(U_1, U_2)$$

Por ejemplo, pensemos sobre un "JUEGO de SUMA-CERO para 2 PERSONAS", como el representado en la Fig. 15, y caculémos los valores del conjunto de las "ESTRUCTURAS de INFORMACION".

Representamos los resultados con las estructuras en la Fig. 16.

En la Fig. 16 la "PARTICION de la INFORMACION" del jugador 2 en los juegos del (1) hasta el (6), es constante, y estarían variando U_1.

*(2) y (5) es la "PARTICION" de (1)
*(3) y (4) es la "PARTICION" de (2)
*(6) es la última "PARTICION"

Con esta se puede saber que el jugador 1 va a tener más ó la misma ganancia al obtener la información agregada. Es decir, el valor de la información $v_1(\Delta I/U)$ es siempre "NO-NEGATIVO" para el jugador 1. Cuando se reparte U_2 en U_2', el valor de la información para el jugador 2 es:

$$v_2(\Delta I/U) = v(U_1, U_2) - v(U_1, U_2')$$

Tambien tenemos que los juegos del (7) al (12) representan el caso de "PARTICIONES de INFORMACION" del jugador 2, los que corresponden a los casos del (1) al (6).

En todos los casos los Valores de la Información son nonnegativos para el jugador 2.

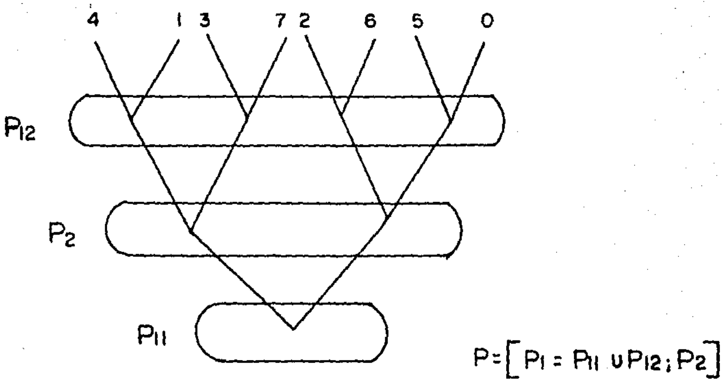


FIG. 15

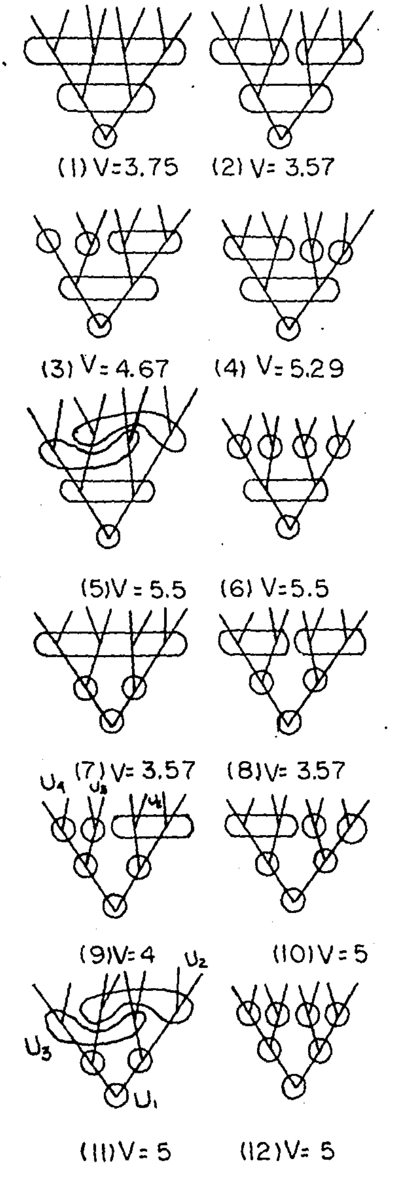

(1) V=3.75
(2) V= 3.57
(3) V= 4.67
(4) V= 5.29
(5)V = 5.5
(6) V=5.5
(7) V= 3.57
(8)V= 3.57
U_4
(9)V= 4
(10)V= 5
U_2
U_3
U_1
(11)V= 5
(12)V= 5

Fig. 16

La variación de los juegos del (2) al (12) significa que los dos jugadores 1 y 2 tuvieron las informaciones agregadas.

El valor del juego, es el valor resultante de la compensación agregada del jugador 1 y del decremento por información agregada del jugador 2.

Generalmente en el "JUEGO de SUMA-CERO para 2 PERSONAS", el aumento de la información no aumenta inconveniente alguno al jugador, y se establece en el Teorema "Del Valor de la Información" (Apendice I)

Por este teorema está garantizado que obtener información no se considera una desventaja y se puede decir que es una conclusión natural.

III-3 EL Valor de la Información en un caso de un "JUEGO NO-COOPERATIVO de 2-PERSONAS"

El valor de la información es siempre no-negativo en caso de un "JUEGO DE 2-PERSONAS DE SUMA CERO" así como también podemos decir que el valor de la información no siempre es no-negativo en el caso de un "JUEGO DE 2 PERSONAS DE NO-SUMA-CERO".

Generalizando tenemos:

En un "JUEGO NO-COOPERATIVO DE N-PERSONAS " $N > 2$ existe la posibilidad de que el valor de la información sea negativa.

Como ya es costumbre la proposición anterior tratará de ser comprobada a través de varios ejemplos de juegos que cumplen con estas características, y que a continuación se describen:

(1) Primeramente supongamos que es un juego en el que participan 2 jugadores, es importante establecer que el jugador 2 no puede obtener información de la elección hecha por su competidor. Establezcamos que los resultados del juego están representados en la Fig. 17 donde

$$U = [\, U_1 \,,\, U_2 \,] = [\, \{U_1\}, \{U_2\} \,]$$

y

$$A_1 = \{R, L\} \quad , \quad A_2 = \{R, L\}$$

Si normalizamos este juego tenemos:

1 \ 2	R	L
R	(1,1)	(2,0)
L	(6,5)	(0,6)

Y sintetizando todos los cálculos llegamos a que el punto de equilibrio sería

$$q_1^* = (1/2, 1/2) \quad , \quad q_2^* = (2/7, 5/7)$$

el equilibrio en la ganancia es $v = (12/7, 3)$
y la "GANANCIA" del jugador 2 es $v_2 = 3$.

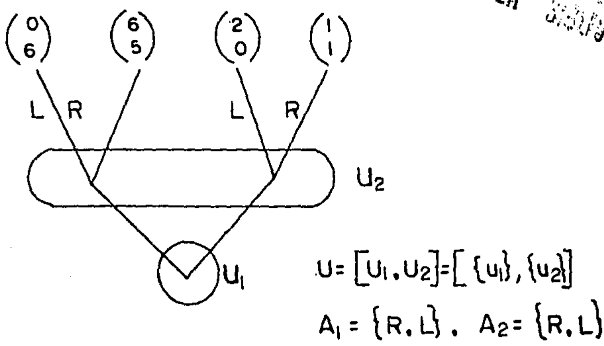


Fig. 17

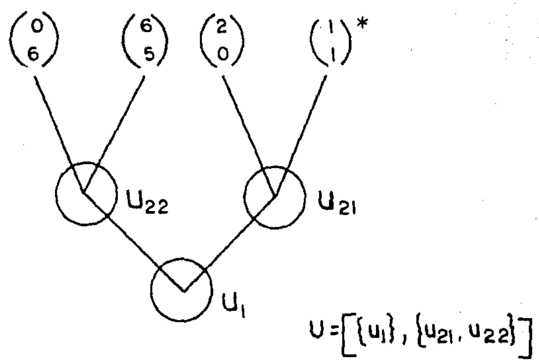


Fig. 18

(2) Ahora supongamos que en el mismo juego el jugador 2, sí puede obtener información de las elecciones ejecutadas por su competidor. En este caso su forma de representación estaría dada por la Fig. 18 , en donde

$$U = [\{U_1\}, \{U_{21}, U_{22}\}]$$

Siguiendo los mismos pasos que en el anterior tenemos que la normalización de este juego estaría dada por:

1 \ 2	(R R)	(R L)	(L R)	(L L)
R	(1,1)	(1,1)*	(2,0)	(2,0)
L	(6,5)	(0,6)	(6,5)	(0,6)

El "PUNTO DE EQUILIBRIO" es (R,RL)
La "GANANCIA" en equilibrio $v=(1,1)$
y la "GANANCIA" del jugador 2 $v_2 = 1$

Por lo tanto, utilizando los resultados anteriores podemos ver que cuando el jugador 2 tiene información, el valor de la información estaría dada por:

$$v_2 = (\Delta I/U) = 1-3 = -2$$

En donde podemos observar que el valor es negativo.

Resumiendo, cuando el jugador 2 puede obtener información, el jugador 1 bajo esta premisa toma alguna acción para aumentar su "GANANCIA", entonces podría ser que la información agregada del jugador 2 no siempre produjera un aumento en su "GANANCIA".

Cuando el jugador 2 no tiene posibilidades de obtener información , el jugador 1 espera que el jugador 2 elija R con probabilidad de 2/7 , y él hace la apuesta de elegir L con probabilidad de 1/2, porque con esta elección él va a tener la posibilidad de obtener una "GANANCIA" de $v = (6,5)$ con la probabilidad de 1/2 x 2/7 = 1/7.

O sea, cuando no hay información, queda la posibilidad de apostar a la "GANANCIA" más grande, pero cuanto más aumenta la información, tanto más difícil se hace poder hacer esto.

(3) Ahora examinemos el caso de que el jugador 2 obtenga la información en forma secreta.

En el juego (2) estabamos suponiendo que el jugador 1 toma su acción bajo la premisa de saber que el jugador 2 va a obtener la información, pero si el jugador 2 obtiene la información en secreto consecuentemente el jugador 1 no tiene conocimiento de esta acción, y además suponemos que el jugador 2 sabe que el jugador 1 no conoce esta situacion, tendriamos que:

En este caso, el jugador 1 va a tomar la estrategia $q_1^* = (1/2, 1/2)$ con la mentalidad del juego (1), y el jugador 2 tomará la estrategia (R 1) segun el juego (2).

Por consecuencia el valor esperado es

$$v = (1/2, 7/2)$$

y el valor de la información secreta para el jugador 2 es

$$v_2(\Delta I) = 3.5 - 3 = 0.5$$

(4) Ahora toca el turno de examinar un juego en el que exista alguna conferencia o transaccion entre los jugadores.

Se sobre entiende que en los casos anteriores no existía esta posibilidad de comunicación entre los jugadores.

Si, hay conferencia entre los dos jugadores y se llega a un acuerdo sobre las estrategias que van a seguir, evidentemente se llega al vertice de "GANANCIA" (6,5). Este valor de "GANANCIA" es mayor que los valores de "GANANCIA" (13/7 , 3) y (1,1) de los juegos (1) y (2), respectivamente, esto para ambos jugadores.

Estos aumentos en las "GANANCIAS" no son atribuibles al valor de información, más bien debemos decir que son efectos de la conferencia.

En este último caso, existe la posibilidad de que los jugadores lleguen a un acuerdo en dicha conferencia, por eso este tipo de problemas se deben analizar desde otro punto de vista como puede ser el de "JUEGOS COOPERATIVOS".

Por lo tanto, podemos considerar que el valor de la informacion es fundamental en los "JUEGOS NO-COOPERATIVOS" .

APENDICE

TEOREMAS

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

APENDICE

ELEMENTOS BASICOS

CONCLUSIONES

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

BIBLIOGRAFIA

Theory of Games and Economic Behavior
Von Neumann-Morgenstern
Princeton University Press
1944, 1947, 1953

Introduction to the Theory of Games
J. C. C. McKinsey
The Rand Corporation
1952

Game Theory
Guillermo Owen
W. B. Saunders Company
1968

An Introduction to Linear Programming and Game Theory
Paul R. Thie
Wiley