

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO  
FACULTAD DE CIENCIAS

MODELO DE CRECIMIENTO APLICADO A LA FRACTURA SISMICA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

F I S I C O

PRESENTA

PEDRO LEMUS DÍAZ

México D.F., 1987.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

### Capítulo I.

Introducción	1
I.1 Modelos Sísmicos	1
I.2 El modelo de Asperezas	2
I.3 El modelo de Barreras	6
I.4 Modelos de crecimiento	11

### Capítulo II.

II.1 La zona de fractura como un dominio geométrico	15
II.2 Percolación	16
II.3 El modelo de Eden	20
II.4. Modelo de asperezas de Lomnitz-Adler	25

### Capítulo III

III.1. El modelo	28
III.2. Modelo para propagación de fractura.	35
III.3. Dependencia temporal de la configuración.	38

### Capítulo IV

IV.1. Cálculo de la función de percolación.	42
---	----

### Capítulo V

V.1. Cálculo de la probabilidad $p^*$ para la latiz.	57
--	----

Conclusiones	70
--------------	----

Referencias	
-------------	--

## I. INTRODUCCION

Cualquier teoría que intente explicar el mecanismo físico de los terremotos debe ser congruente con la gran cantidad de datos estadísticos con que se cuenta: eventos premonitorios, quietud sísmica, incremento de la actividad sísmica en el intervalo de baja magnitud anterior al evento principal, incremento de la actividad sísmica en la región circundante a la región focal, así como las réplicas. Un modelo que trate sobre la ocurrencia sísmica debe tener en cuenta estos mismos hechos. Por otro lado, la mejores datos han sido recogidos en el presente siglo y no es posible, por tanto, un tratamiento puramente estadístico aun en regiones con un gran registro sísmico, como Japón, debido a la poca acumulación de datos precisos, puesto que tales datos por ser registros históricos presentan poca exactitud tanto en la localización como en la magnitud.

### I.1 MODELOS SISMICOS

Debido a que los detalles del proceso físico que desencadena un terremoto no son del todo conocidos es de gran importancia plantear modelos que nos permitan simular los rasgos mas importantes del mecanismo de ruptura y predecir las características

observadas que hemos mencionado.

Aunque la naturaleza de los patrones sísmicos varía de evento a evento un mecanismo común puede ser responsable para estos patrones; los detalles de estos son probablemente controlados por el entorno tectónico tal como la geometría de la falla, la tasa de esfuerzo, así como por la heterogeneidad del plano de falla.

Los eventos sísmicos generalmente surgen en el límite entre dos placas tectónicas y muy posiblemente se deban a la fricción que se produce al resbalar una placa sobre la otra. Es común suponer que el lugar geométrico de contacto entre dos placas sea un plano, lo cual, aun cuando no es totalmente cierto, es una buena y sencilla aproximación que además produce resultados aceptables.

#### EL MODELO DE ASPEREZAS

Los patrones sísmicos observados en diferentes partes del mundo sugieren una variación regional sistemática a lo largo de las distintas zonas de subducción (Kanamori 1981). Estas variaciones parecen deberse a propiedades geométricas de la falla o bien a sus condiciones físicas o mecánicas.

El modelo propuesto por Kanamori supone que la fuerza de contacto de la zona entre las dos placas de la falla es mayor en algunos sitios que en otros. Existen así, dos tipos de sitios en la falla: algunos puntos débiles que constituyen la mayor parte de la falla y otras áreas relativamente pequeñas capaces de soportar esfuerzos mayores. Tales lugares que presentan una resistencia mayor al esfuerzo ya sea debido a causas de origen

geométrico o físico son generalmente denominadas *asperezas*.

El modelo de asperezas fue anteriormente planteado como consecuencia de experimentos de laboratorio sobre fricción en las rocas. El concepto de asperezas ha sido frecuentemente usado en sismología, implícita o explícitamente, para explicar sismicidad no-uniforme a lo largo de zonas sísmicas [Bakun *et al* 1980]; eventos complejos [Kanamori & Stewart, 1978; Das & Aki, 1977; Aki, 1979]; algunos aspectos de los patrones sísmicos tales como los enjambres sísmicos Lay & Kanamori, 1980].

Muchos otros autores han explicado los patrones sísmicos observados en términos de una distribución heterogénea de esfuerzos sobre la zona focal. En todos los casos el papel de las asperezas ha sido fundamental en la discusión.

La figura 1.1 ilustra el modelo. La caja rectangular representa todo o parte de la superficie de ruptura de un gran sismo, y por tanto será llamada unidad de falla. Esta es a su vez dividida en pequeñas subfallas. Sea  $s$  la fuerza de la subfalla. Dichas subfallas son de dos tipos: fallas típicas y asperezas. Las primeras se rompen a bajos valores del esfuerzo y de acuerdo con Kanamori [Kanamori 1981], siguen una distribución gaussiana con media  $\bar{s}$  y desviación estándar  $\Sigma$ . Las asperezas se rompen a altos valores del esfuerzo e igualmente siguen una distribución gaussiana con media  $\bar{s}_a$  y desviación  $\Sigma_a$ . Se cumple que  $\bar{s}_a > \bar{s}$ . Así, la distribución de esfuerzos sigue una distribución bimodal.

Kanamori [Kanamori 1981], considera una carga de esfuerzo  $\sigma_0$  la cual varía linealmente en el tiempo:

$$\sigma_0 = \sigma_{in} + at \quad (1.1)$$

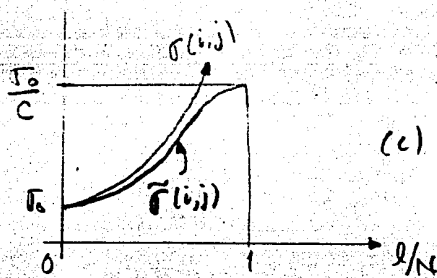
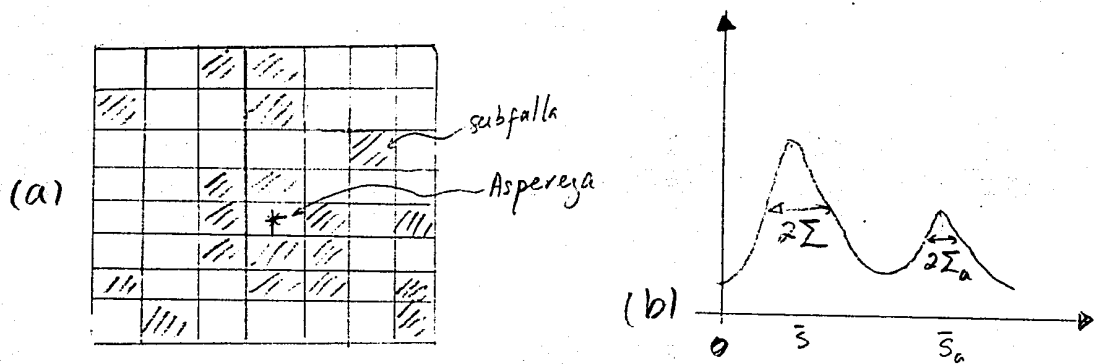


Figura 1.1 (a) Muestra una falla unitaria que contiene una asperidad, (b) la distribución de esfuerzo de las subfallas dentro de la asperidad y el área circundante, (c) el esfuerzo  $\bar{\sigma}$  sobre la subfalla.

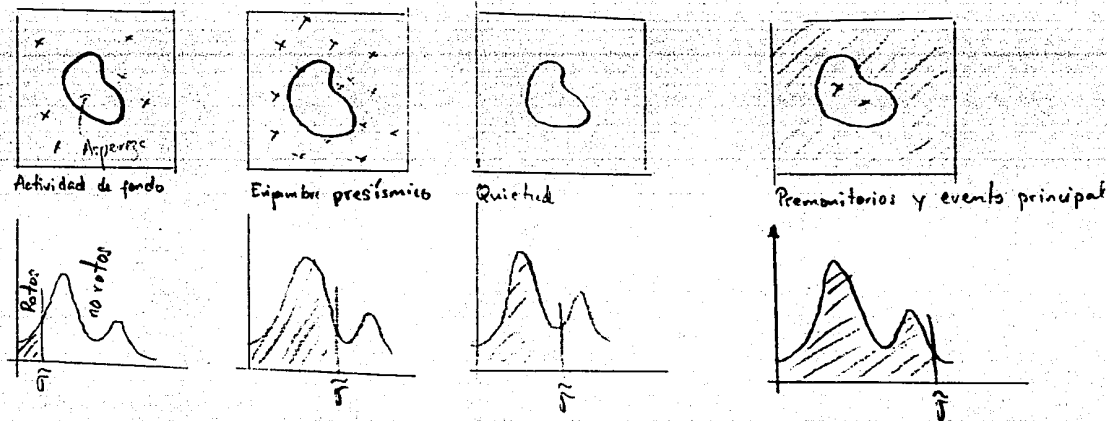


Fig 1.2. Secuencia de los patrones sísmicos predichos por el modelo de asperidades.

donde  $t$  es el tiempo y  $\sigma_{in}$  y  $\alpha$  son constantes. Cuando el esfuerzo en una falla típica excede la fuerza que es capaz de soportar, la falla típica se rompe y el esfuerzo cae a 0 en ese punto. Supone que la falla típica está desacoplada de manera que el rompimiento no se propaga a las demás subfallas, y la carga de esfuerzo es distribuida uniformemente entre las restantes subfallas. Bajo esta suposición el esfuerzo en la subfalla en  $(i, j)$  está dado por:

$$\sigma(i, j) = \sigma_0 / [1 - (\ell/N)] \quad (1.2)$$

donde  $N$  es el número total de subfallas en la unidad de falla y  $\ell$  el número de subfallas rotas. De esta manera el rompimiento de las subfallas acelera la carga de esfuerzo en las subfallas que aun no se han roto. Puesto que la unidad de falla no es un sistema aislado la carga de esfuerzo puede ser parcialmente soportado por las unidades de falla adyacentes cuando  $\ell$  tiende a  $N$ . De esta manera el esfuerzo en la subfalla se aproxima a un valor finito en vez de un valor infinito y esta situación puede representarse por:

$$\tilde{\sigma}(i, j) = \frac{\sigma(i, j)}{1 + C \left[ -\frac{\ell/N}{1 - \ell/N} \right]} \quad (1.3)$$

el cual se muestra en la figura 1.1 junto con  $\sigma(i, j)$ .

De acuerdo a este modelo la figura 1.2 representa esquemáticamente la secuencia de los patrones sísmicos predichos por éste.

Cuando la aspereza se rompe ocurre un movimiento en toda la falla adyacente puesto que la repentina caída de esfuerzo en la



aspereza provoca el disparo de las subfallas vecinas. Después que la secuencia se completa, un nuevo ciclo de carga se inicia y con este el ciclo sísmico.

Este modelo no considera criterios físicos de rotura tales como la respuesta dinámica del medio, mecanismos de recuperación de la falla. Por otra parte el conocimiento de la naturaleza, distribución y variación regional de las asperezas sobre la falla limita la prueba completa del modelo. No obstante reproduce bastante bien los patrones sísmicos anteriores al desencadenamiento del evento principal.

#### EL MODELO DE BARRERAS

El estudio de la propagación de una falla en un medio compuesto sugiere que el complejo mecanismo de ruptura puede ser detenido por una barrera. Varios autores coinciden en que la propagación de la ruptura sísmica puede descomponerse en segmentos debido a la existencia de barreras. Lindh & Boore (1974) reconocen que el sismo de Parkfield de 1966 consiste de dos segmentos uno de los cuales fue detenido y no se propagó en toda la zona donde ocurrió el evento. Eaton et al (1970) muestran que la distribución de réplicas sigue el rompimiento de la falla demostrando la separación de 2 segmentos de la falla tanto en la superficie como en regiones más profundas.

Dependiendo de la magnitud del esfuerzo aplicado, una sección fuerte de la falla denominada "barrera" puede romperse al momento en que el extremo de la fisura pasa o permanecer igual después del paso del extremo de la fisura pero eventualmente puede romperse

como consecuencia del incremento en el esfuerzo dinámico. Las barreras pueden además provocar que la propagación de la ruptura se lleve a cabo de manera irregular descendiendo la velocidad de esta o causar fenómenos repetidos de deslizamiento. La existencia de barreras se debe a la inhomogeneidad en la distribución de esfuerzos en la zona de fractura.

Puesto que una propagación irregular de la fractura con desplazamiento inhomógeno tiende a incrementar las ondas de alta frecuencia, la caracterización de las barreras sobre la falla es importante para la interpretación de los registros de grandes movimientos.

La figura 1.3 muestra una región esforzada antes de que ocurra un evento sísmico. Después de que el sismo tiene lugar las barreras se visualizan como las regiones ralladas en la figura, que no se han roto y que circundan a la superficie libre que se ha fracturado.



Fig. 1.3. El modelo de barreras.

Las barreras pueden burdamente clasificarse en dos grupos: barreras debidas a la geometría de la zona y barreras debidas a la inhomogeneidad en la distribución de esfuerzo en la falla. (Aki, 1979).

Las barreras geométricas se refieren a las esquinas donde las

placas se unen entre si cambiando con ello su contorno.

Las barreras inhomogéneas se refieren al punto donde la ruptura sísmica se detiene y no existe una discontinuidad geométrica. Estas pueden asociarse con una anomalía en la velocidad sísmica en la corteza interior. Otros son debidos a la existencia de montañas o volcanes a lo largo de la falla. En general se deben a la composición misma de la zona de falla.

Algunas barreras pueden actuar como concentradores de esfuerzo produciéndose los así llamados temblores gemelos. Además puede ocurrir una migración o progresión de los mayores sismos a lo largo de la placa.

Las dimensiones de la ruptura de la falla sísmica pueden estar afectadas por dos factores:

i) La naturaleza y el grado de acoplamiento presente en la zona de contacto de la falla, el cual es influenciado por las propiedades mecánicas de las placas, la anchura y la geometría de la zona de contacto, la edad de la placa que subduce e incluso se ha planteado que dicho acoplamiento puede estar influenciado por la historia misma de la zona de subducción. Esto es, la velocidad de deriva, la edad de la placa. [Aki, 1979]

ii) La segmentación de la zona de subducción causada por estructuras transversales sobre la placa que subduce o la que cabalga y las irregularidades geométricas de la zona de subducción. Tales límites generalmente señalan grandes zonas que han sufrido rupturas funcionando como barreras para la propagación lateral de la ruptura.

Tanto el modelo de asperezas de Kanamori como el de barreras de Aki representan una descripción cualitativa de la secuencia sísmica basados en una consideración geométrica de la falla. El modelo de barreras de Aki enfatiza el proceso mediante el cual un gran evento sísmico puede detenerse y las consecuencias de tal fenómeno por lo que es más conveniente para describir réplicas y los patrones sísmicos que surgen después de que el evento principal ha ocurrido. El modelo de asperezas de Kanamori se centra más en el mecanismo de disparo de un gran evento y se espera que sea más fiel en la reproducción de los patrones sísmicos que se presentan antes de que ocurra el evento principal. Así que ambos modelos se complementan en la descripción del fenómeno sísmico completo. Por otra parte, los dos modelos se basan en una distribución inhomogénea de esfuerzo en el plano de la falla.

En ambos modelos el proceso que da lugar al evento principal tiene que ver con un incremento ya sea de la superficie libre y del esfuerzo soportado por las fallas que no se han roto, o bien con un incremento del esfuerzo soportado por la barrera. En el caso del modelo de asperezas la futura zona de fractura va creciendo por el rompimiento de las fallas típicas quedando ambos lados de las placas solamente amarrados por las asperezas. Cuando las asperezas se rompen el esfuerzo liberado arrastra consigo toda la superficie de la falla. En el modelo de barrera la fractura va creciendo por el rompimiento de pequeñas barreras y la zona de fractura está amarrada únicamente por una gran barrera concentradora de esfuerzo. Nuevamente, cuando el esfuerzo sobrepasa esta barrera toda la zona de falla se fractura y si

acaso solamente existe un cambio de dirección a lo largo de la falla.

El arreglo geométrico de estos modelos sísmicos es importante en el proceso de ruptura de una aspereza ya que esta involucra el deslizamiento de un cúmulo de fallas elementales libres de un determinado tamaño llevándonos como consecuencia, a una geometría compleja de zona de fractura, no siendo este el caso de los eventos que se originan al romperse una falla típica ya que en estos no se presenta un acoplamiento con las fallas elementales vecinas. Lo mismo puede decirse de la distribución de las barreras concentradoras de esfuerzo para eventos grandes, estas arrastran consigo la superficie de la falla mientras que para eventos pequeños, las barreras limitan la zona de propagación.

La geometría de estos modelos puede representarse con un modelo de crecimiento en el que si el sitio crece puede considerarse que se ha roto y si no crece puede considerarse como una barrera que detiene la propagación de la fractura. El tamaño de la falla típica puede representarse como el de un sitio dentro del modelo de crecimiento. Aunque la suposición de un tamaño típico de falla es claramente no exacto, constituye sin embargo, una primera aproximación aceptable. Que un cúmulo de crecimiento se propague en toda la latiz tiene que ver directamente con la geometría de esta y con el tamaño de las barreras.

En la próxima sección plantearemos que se entienda por un modelo de crecimiento y como han surgido estos.

#### I.4 MODELOS DE CRECIMIENTO

La naturaleza nos proporciona una cantidad casi infinita de formas y figuras. Hasta el momento poco conocemos acerca de como son creadas tales formas.

La forma de cualquier objeto tiende a depender fuertemente de la naturaleza del proceso del cual se origina. Los objetos naturales con frecuencia tienden a poseer una aparente simetría aunque, mirados más de cerca, se observa que son crecidos al azar. En algun sentido parece casi paradójico que procesos de crecimiento aleatorio den lugar a objetos con propiedades inherentes de simetría. El hecho es que constituye un misterio y una fuente de intensa frustración para quienes trabajan en el campo de la inteligencia artificial y los patrones de reconocimiento, como el ojo humano descubre los patrones globales y las autosimilaridades de tales objetos naturales, intrinsecamente aleatorios.

Los objetos crecidos de manera natural poseen varias características. Una de ellas puede ser una característica de longitud, mientras otros objetos no poseen una escala de longitud característica como un todo, sino son "auto-similares" sobre muchas escalas de longitud. Tales objetos son denominados fractales.

En los sistemas naturales, el crecimiento es un proceso muy complejo, que involucra la optimización de muchas variables. Así, el crecimiento de una planta tiende a maximizar su área

superficial y minimizar el largo de sus ramas, de tal manera que se maximice la producción de alimento y se minimice el transporte de los mismos. Desgraciadamente no hemos alcanzado el estado en que podamos predecir los patrones y formas finales basados en esta optimización. Así que nos concentraremos en lo que sigue en modelos simples de crecimiento idealizado irreversible donde la energía de amarre, suponemos, es mucho mayor que la energía térmica. [Herrmann, 1986a].

La razón de la complejidad de los modelos de crecimiento estriba en el hecho de que crecimiento significa historia. De una manera u otra el producto final depende de ciertas configuraciones pasadas. Esto significa que la configuración a un tiempo dado no es completamente independiente de sus estados anteriores sino que están correlacionados, a través de la historia, de una manera más bien complicada. A tales procesos que dependen de su historia se les denomina no-Markovianos. De tal manera que no es posible, en general, escribir simplemente una función de partición o una función generatriz. Nuevas ideas se hacen necesarias y como ya hemos dicho, esto ha fascinado a mucha gente en los últimos años.

Por otro lado, la relevancia experimental de los modelos de crecimiento es un factor importante. Los primeros modelos de crecimiento definidos a principios de la década de los 60's fueron desarrollados para describir varias situaciones en medicina tales como crecimiento de tumores [Eden, 1961], propagación de epidemias, problemas en físico-química, conducción eléctrica [Kirkpatrick, 1973].

Otra característica importante de los modelos de crecimiento es que son fáciles de formular, presentan comportamiento no

trivial y producen bellos patrones si son simulados en una computadora.

Cualquier modelo de crecimiento debe estar definido por reglas bien precisas. Si dos reglas son diferentes los modelos de crecimiento se consideran distintos aun cuando el producto final sea geoméricamente idéntico (Herrmann, 1986b).

Debido a que todos los modelos de crecimiento tienen lugar en el tiempo, una clara definición de éste es muy importante. Si iniciamos al tiempo  $t=0$  con una configuración inicial dada, después del intervalo de tiempo  $\Delta t$  la regla de crecimiento es aplicada por primera vez. Después de otro intervalo de tiempo  $\Delta t$  la regla es aplicada otra vez y así sucesivamente. De alguna manera hemos discretizado el tiempo en intervalos de igual longitud: esto será de gran utilidad si decidimos simular el crecimiento en una computadora. No obstante, si estamos interesados en describir patrones de crecimiento naturales, puede ser necesario definir intervalos de tiempo de longitud variable. Por último, quizá, deseamos considerar el caso real de tiempo continuo haciendo tender  $\Delta t$  a cero y modificando las reglas de crecimiento de manera conveniente.

Para estudiar las características esenciales de los modelos de crecimiento uno trata de definirlos de manera tan elemental como sea posible. Hasta el momento existe una cantidad enorme de modelos que han sido investigados (Herrmann, 1986b).

El número de modelos que pueden definirse está limitado solamente por la fantasía. Esencialmente, todas las formas en la naturaleza son producto de alguna forma de crecimiento. Así, es posible imaginar modelos de crecimiento para describir la formación de objetos en intervalos tan amplios que van desde los



polímeros hasta las galaxias, desde animales y plantas hasta rocas y cristales.

En nuestro caso plantearemos un modelo de crecimiento para describir la propagación de una falla sísmica.

En el caso de pasos de tiempo discreto, una definición precisa de las reglas de crecimiento y quizá la más conveniente, es a través de instrucciones de computadora, por ejemplo en lenguaje FORTRAN. Esto se debe, en gran medida, a que la computadora, generalmente, no tolera ambigüedades. Por otro lado, esto corresponde a la definición histórica de la mayoría de los modelos estudiados.

## II PERCOLACION Y EL MODELO DE EDEN

### II.1 LA ZONA DE FRACTURA COMO UN DOMINIO GEOMETRICO

La zona de fractura puede visualizarse como un dominio de fallas típicas que ya se han roto. En el momento en que una de las barreras que detienen la propagación de la fractura es superada por el esfuerzo, comienza el crecimiento de un cúmulo o dominio. Si uno de los dominios termina por ocupar toda la falla, en este momento se produce el evento principal con una gran caída de esfuerzo.

Así pues es posible definir la zona de fractura como un dominio geométrico de fallas típicas rotas que ha crecido debido a la fractura de las mismas.

Se ha propuesto que es factible utilizar teoría de percolación para simular la zona de fractura de un evento sísmico puesto que esta teoría define dominios geométricos (Lomnitz-Adler, 1985a). Teoría de percolación es un problema modelo para el estudio de las transiciones de fase y es además muy conveniente para simulaciones numéricas por computadora. El problema de la fractura sísmica, puede considerarse como una transición de fase: de un estado de gran acumulación de esfuerzo con un caída de esfuerzo considerable a un estado de esfuerzo aproximadamente nulo.

En la siguiente sección trataremos brevemente la geometría del modelo de percolación y la matemática que esta involucra, que por demás es sencilla.

## PERCOLACION

Antes que nada, hablaremos de un modelo bastante conocido: Percolación. Aunque percolación no es un modelo de crecimiento dinámico, y los cúmulos que allí surgen provienen de un proceso estático es conveniente hablar de él, puesto que es un modelo bastante estudiado y que tiene mucho que ver con nuestro modelo como se verá más adelante.

Para definir percolación imaginemos una latiz cuadrada muy grande a manera de un tablero de ajedrez. Cada uno de los sitios tiene dos posibilidades, puede ser negro con probabilidad  $p$  ó blanco con probabilidad  $q = 1-p$ . La probabilidad  $p$ , es la misma para cada sitio. Se recorre todo el tablero y de acuerdo con la probabilidad se marca negro o blanco cada sitio del mismo.

Así, una vez recorrida toda la red quedarán sitios negros separados por blancos y dependiendo de la probabilidad quedan grupos de sitios negros vecinos, es decir cúmulos.

Si se tiene una red muy grande, esta tendrá más cúmulos que una red pequeña; así, definimos  $n_s$  como el número de cúmulos de tamaño  $s$  en la latiz, entre el número de sitios de la latiz completa.

Se entiende por un  $s$ -cúmulo un cúmulo que consta de  $s$  sitios

conectados entre sí a distancias de próximos vecinos.

Ahora bien, percolación se define cuando un cúmulo atraviesa de un extremo al opuesto la red lo cual obviamente dependerá tanto de  $p$  como de la geometría de la red. Imaginando que cada sitio negro es conductor, la red percola cuando podemos hacer fluir corriente a través de ella [Kirkpatrick, 1973].

En una red suficientemente grande hay uno o ninguno de tales cúmulos. Estrictamente hablando la percolación se define para una red infinita puesto que para una red finita siempre es posible encontrar un cúmulo que percola aún cuando no lo exista para una red más grande, ver figura 2.1. Una manera de simular algunos aspectos del sistema consiste en definir condiciones de frontera periódicas en la latiz, es decir, el extremo derecho se continúa en el izquierdo y viceversa y de igual manera para el extremo superior e inferior. Esto último nos permite hablar de una latiz semi-infinita en el sentido de que no tiene fronteras o bordes, sin embargo, el número de sitios en la misma necesariamente será un número finito que dependerá del tamaño físico de la red.

Aun así, llamaremos "cúmulo infinito" a aquel que atraviese una red dada y a la probabilidad a la que tal sucede  $p_c$ . Así,  $p_c$  delimita dos regiones o dicho de otra manera una transición de fase:

Para  $p < p_c$  no existe cúmulo percolante.

Para  $p > p_c$  existe un cúmulo infinito.

Llamaremos probabilidad de percolación  $P_\infty$ , a la fracción de sitios ocupados pertenecientes a la red infinita de percolación. Así,  $P_\infty$  se anula abajo de  $p_c$  y es distinta de cero si  $p > p_c$ . Cerca de  $p_c$  podemos definir un "exponente crítico" postulando:

```

      oo
    oooooXoooo
  oXXXXoXoXXXXo
    ooXoXXXXXXXXoXo
  ooooXoXo oooXXXXXo
oXXXXXXXXoXoXXXXXXXXoo
  oooXXXXXXXXXooooXooo
    oXXoXoXoXoXoXXXXXo
      oXXoo oXXoXXXXXo
        oXXo  oXXooooo
          oXoXo  ooXo
            ooXXXXoooXoXo
              ooXXXXXXXXSooXo
                oXXXooXoooooXXXXo
                  oXXo  oXXXXXXXXoXo
                    oXXo  oooooooo
                      oo  oXXXXooo
                        oXXXXXXXXo
                          ooXooo  o
                            oXooo oXoo
                              oXXXXoXXXXo
                                oXoXXoooXoo
                                  oXXXXXXXXoXoo
                                    oooXoXoXXXXo
                                      ooooXoXoXXXXo
                                        oXXXXXXXXXXXXoo
                                          oooXooXXXXXo
                                            oXooXoXo
                                              oXXooXo  o
                                                oXXXo
                                                  oXXo
                                                    oo

```

Fig. 2.1. En la latiz definida por el cuadro existe percolación, aun cuando no existe en la latiz definida por toda la hoja. La figura es un cúmulo crecido por nuestro programa,

$$P_{\infty} \propto (p - p_c)^{\beta} \quad (p > p_c) \quad (2.1)$$

El comportamiento de la red infinita y de grandes cúmulos cerca de  $p_c$ , es llamado el comportamiento crítico de la teoría de percolación; la región de los parámetros donde esto se aplica es llamada la región de escalamiento [Stauffer, 1979].

Puesto que cada cúmulo contiene exactamente  $s$  sitios, la probabilidad de que cualquier sitio de la latiz pertenezca a un  $s$ -cúmulo es  $s \cdot n_s = P_s$ .

Ahora bien, cualquier sitio de la latiz tiene solo 3 posibilidades:

- (i) Ser blanco con probabilidad  $1-p$ . (2.2)
- (ii) Pertenecer a un  $s$ -cúmulo con probabilidad  $P_s = s \cdot n_s$ .
- (iii) Pertenecer al cúmulo percolante con probabilidad  $pP_{\infty}$ .

La suma de estas 3 posibilidades para todos los valores de  $s$  debe ser uno:

$$(1-p) + \sum s \cdot n_s + pP_{\infty} = 1 \quad (2.3)$$

donde la  $\Sigma$  denota la suma sobre todos los cúmulos finitos  $s=1,2,3,\dots$ . De tal manera que una vez conocida  $n_s$  se puede calcular  $P_{\infty}$ . Se observa aquí, que la cantidad básica de nuestra discusión es  $n_s$ .

La distribución de tamaño de cúmulos  $n_s$ , no nos dice directamente nada acerca del cúmulo más grande. Existe un cúmulo infinito por encima del umbral y por tanto  $n_s$  para este tamaño  $s$  es el recíproco del tamaño de la latiz. Entonces requerimos información adicional para calcular  $P_{\infty}$ . Tenemos la relación de (2.3):

$$p = pP_{\infty} + \sum s \cdot n_s \quad (2.4)$$

Por debajo del umbral de percolación en sistemas muy grandes,  $P_{\infty}$  es cero y entonces  $p$  es igual a la suma en la ecuación (2.4).

### 11.3 EL MODELO DE EDEN

Ahora consideraremos los modelos de crecimiento basados en aquel propuesto por Eden [Eden, 1961], el cual generalmente hablando, puede jugar un papel similar en los modelos de crecimiento como aquel del campo libre en las teorías de campo y es de bastante interés debido a la riqueza de sus propiedades de superficie [Herrmann, 1986a]. Definiremos el modelo sobre una latiz cuadrada con condiciones de frontera libres. Para la primera configuración ocupamos uno de los sitios centrales de la latiz (el cual denominaremos semilla) y dejemos todos los demás sitios vacíos. Denominaremos superficie de crecimiento a los vecinos más próximos de la semilla (4 en este caso). Las reglas de crecimiento son las siguientes:

i) Elegimos aleatoriamente un sitio de la superficie de crecimiento. (2.5)

ii) Ocupamos el sitio elegido, de acuerdo a una regla de probabilidad.

En el modelo original de Eden la probabilidad de ocupación (ii) es uno.

La nueva superficie de crecimiento se forja con los vecinos más próximos de los dos sitios ya existentes que conforman este cúmulo. Las reglas se aplican tantas veces como lo deseemos y el crecimiento se puede detener en cualquier momento aunque

incidentalmente esto puede suceder cuando se llega a la frontera de la latiz. Así, después de  $N-1$  pasos se tiene un cúmulo de  $N$  sitios, donde entenderemos por un  $s$ -cúmulo como un cúmulo que consta de  $s$  sitios unidos todos a distancias de próximos vecinos. Debido a la aleatoriedad muchos  $N$ -cúmulos son posibles como productos finales. El número de posibles historias que un cúmulo puede tener es  $N! \sim N^N$ . Por el contrario, cúmulos ramificados tienen un número sustancialmente menor de posibles historias, por ejemplo un cúmulo lineal tiene  $2^N$  historias posibles. Los efectos estadísticos tienden a hacer bastante compactos los cúmulos de Eden.

Un cúmulo de Eden guarda memoria de la manera en que ha sido crecido. Para visualizar esto podríamos asignar un entero positivo a cada sitio en el orden en que fue elegido para pertenecer al cúmulo. Así, es claro que a cada posible historia le corresponde un peso diferente y que el cálculo de este peso estadístico es realmente complicado conforme  $N$  crece, además de que depende tanto de la forma como de la historia. Los pesos estadísticos se han calculado por medios computacionales y hasta  $N=17$  en una latiz cuadrada [Sykes, Glen & Gaunt, 1976 y Gaunt, Sykes & Ruskin, 1976].

Consideraremos la siguiente variante del modelo de Eden conocido como modelo de epidemias o modelo de Eden diluido. Existen 2 formas de sitios en la superficie de crecimiento: algunos son libres y otros son prohibidos. Al principio todos los sitios en la superficie de crecimiento son libres. Las reglas vienen dadas por [Herrmann, 1986b]:

- 1) Elegimos al azar un sitio en la superficie de crecimiento.



(i) Elegimos que este sitio pertenezca al cúmulo de crecimiento con probabilidad  $p$  ó lo prohibimos con probabilidad  $q = 1-p$ , con  $0 < p \leq 1$ . (2.6)

La relación con epidemias esta dada considerando los sitios ocupados como infectados, sitios prohibidos como inmunes y sitios libres como aquellos que aun no han sido atacados por la epidemia. La transmisión de la epidemia tiene lugar sobre los vecinos más próximos. La epidemia se detiene si se termina la superficie de crecimiento lo cual dicho de otro modo es equivalente a encerrar el cúmulo por sitios prohibidos: la epidemia se detiene cuando ha sido rodeada de sitios inmunes. Si  $p=1$  se regresa al modelo de Eden original. Si  $p$  es cercano a 1 se obtienen cúmulos con pequeños hoyos pero que aun son densos. Para  $p$  muy pequeño la probabilidad de crecer un cúmulo muy grande ("infinito") es cero. Puede existir, sin embargo, un valor de  $p$ , denominado  $p_c$  y menor que 1, para el cual se obtengan cúmulos arbitrariamente grandes si estamos considerando una  $p > p_c$ .

Veamos ahora, que sucede en  $p_c$ . En el límite  $N \rightarrow \infty$  existen dos formas de sitios, (a) aquellos que han sido procesados en la instrucción (ii) y bien pertenecen al cúmulo o son prohibidos y (b) aquellos que no han sido alcanzados por el mecanismo de crecimiento debido a que están aislados del cúmulo por los sitios perimetrales inmunes o prohibidos. Los sitios del tipo (a) han sido ocupados o prohibidos -independientemente unos de otros a un determinado tiempo-, con probabilidad  $p$  y  $q = 1-p$ , respectivamente. Sobre los sitios del tipo (a) se ha producido exactamente una configuración de percolación. Los

sitios del tipo (b) permanecen indefinidos en este problema de percolación, pero no importa que configuración de percolación pudiésemos haber elegido en tales sitios puesto que de todas maneras no tendrían conexión de próximos vecinos con los sitios del tipo (a).

En conclusión, hemos mostrado que el modelo de Eden diluido produce exactamente la configuración de percolación con probabilidad  $p$ . Como ya vimos en percolación, cada sitio es ocupado con probabilidad  $p$  o vacío con probabilidad  $1-p$ . Así, para  $p < p_c$  solo aparecen cúmulos finitos, para  $p > p_c$  se tiene un cúmulo infinito. Esto nos dice que  $p_c$  es precisamente el umbral de percolación en el cual aparece el incipiente cúmulo infinito.

La figura 2.2 muestra un cúmulo crecido con este modelo sobre una latiz cuadrada para  $p$  cercano a  $p_c$ .

Una característica importante de este modelo de crecimiento es que nos permite relacionar los productos finales del crecimiento con un modelo estadístico, bastante conocido, percolación.

Como hemos visto, el único parámetro en este modelo es la probabilidad  $p$ . Modificando  $p$  podemos dar estructuras de diversas formas. Para  $p = p_c = 0.59273$  en una latiz cuadrada, se ha observado que estos cúmulos son autosimilares, poseyendo hoyos de todos tamaños.

Ahora bien, un sitio en la superficie de crecimiento es seleccionado y con probabilidad  $p$  forma parte del cúmulo y con probabilidad  $1-p$  es inmune. La manera de decidir por cualquiera de las dos posibilidades es eligiendo un número aleatorio (denominado RAND) uniformemente distribuido entre 0 y 1, y



comparándolo con  $p$  de la siguiente manera:

i) Si  $p < \text{RAND}$  entonces es inmune o prohibido. (2.7)

ii) Si  $p \geq \text{RAND}$  entonces crece y pasa a formar parte del cúmulo de crecimiento.

La forma de la ecuación (2.7) es muy conveniente a la hora de implementar el modelo de crecimiento en una computadora, como se verá más adelante.

Hasta ahora hemos descrito como habremos de considerar el crecimiento de un cúmulo, sin embargo todavía no planteamos en que momento un cúmulo dado puede llegar a saturar la latiz, o al menos para que valor de  $p$  el número de cúmulos, en promedio, percola. Esto se llevará a cabo en la sección IV realizando estadística sobre los cúmulos crecidos. En percolación pura un análisis a posteriori para determinar si un cúmulo ha percolado no es trivial, sin embargo el algoritmo de Hoshen-Kopelman [J. Hoshen & R. Kopelman, 1976] es ampliamente usado para este propósito.

En la próxima sección hablaremos del modelo de Lomnitz-Adler de asperezas [Lomnitz-Adler, 1985 b,c]. Este modelo contiene algunos elementos del modelo de barrera aunque la predicción de réplicas no es muy realista.

#### Modelo de asperezas de Lomnitz-Adler

En el planteamiento del aspecto geométrico del modelo se supone que una región sísmica se encuentra dividida en un número grande de fallas unitarias, cada una de las cuales está constituida por un determinado número de fallas elementales o subfallas. Estas fallas elementales poseen un área típica  $\Delta$  y

además pueden encontrarse en cualquiera de dos estados: "libre" o "amarrada". Dichas fallas elementales pueden ser fallas típicas (zonas débiles) o asperezas (zonas de mayor resistencia al esfuerzo), siendo la principal diferencia entre ellas el grado de acoplamiento que presentan con sus fallas vecinas.

La superficie total de la falla modelada se supondrá que esta normalizada, es decir:  $N=1/\Delta$ , con N el número total de fallas elementales.

Las variables empleadas en esta descripción son: el esfuerzo de carga  $\sigma$ , por medio del cual será posible establecer el estado de esfuerzo de cada una de las subfallas que forman la falla unitaria; la superficie libre  $\alpha$ , la cual permite tomar en cuenta el acoplamiento entre las subfallas. En este modelo la variable principal es la superficie libre de tal manera que la dinámica de la ruptura de la falla es entendida en términos geométricos.

A diferencia de la distribución de esfuerzos empleada por Kanamori (distribución bimodal), Lomnitz-Adler emplea una distribución lognormal debido a que en general la caída de esfuerzos asociada con el evento principal es del mismo orden que la asociada con sus réplicas.

Cuando una falla típica se rompe esta pasa de estar "amarrada" a estar "libre" quedando de esta manera desacoplada. La porción de la falla que es libre define la superficie libre  $\alpha$  la cual toma valores entre 0 y 1. En términos de esta la superficie efectiva de la falla (entendida como la superficie asociada con las fallas elementales que no se han roto) queda definida como  $(1-\alpha)$  veces la superficie total de la falla. Por otro lado, cuando una aspereza se rompe la superficie libre ligada

a esta se desliza quedando las dimensiones de dicho desplazamiento en función del tamaño del cúmulo de superficie libre que está ligada a la aspereza, y esta superficie libre pasa a estar amarrada.

El número de asperezas ( $n$ ) que se emplea en la descripción se supone fijo y con un valor bajo.

Lomnitz-Adler utiliza teoría de percolación para determinar los dominios que definen la zona de fractura y así realizar cálculos detallados. El Distingue 3 tipos de eventos sísmicos que dependen de que tanto la superficie libre se aproxime al umbral de percolación. Si la superficie libre es muy pequeña, los eventos tienden a ser simples y de baja magnitud. Antes de alcanzar el umbral de percolación se producen eventos de magnitud intermedia y la variación de la superficie libre es baja, siendo recuperada ésta durante la secuencia de réplica asociadas.

Cuando se rebasa el umbral de percolación se produce el evento de mayor magnitud y la ocurrencia de eventos intermedios se anula: los únicos dos mecanismos que sobreviven es la rotura de fallas elementales y la de una aspereza que nuevamente implican un cúmulo percolado.

### III. MODELOS

Los modelos planteados en I son modelos puramente geométricos en los cuales no existe una dinámica para la propagación de la fractura. Tales modelos se basan en la descripción de las características de la falla que provocan el disparo sísmico y que producen distintos patrones sísmicos.

En la siguiente sección describiremos el modelo empleado en este trabajo como un modelo de barreras el cual también entra en la familia de los modelos generados a partir del propuesto por Eden.

#### III.1 . El MODELO

Como vimos antes (secciones I.1,I.2,II.3), se ha observado que la caída de esfuerzo asociado a terremotos grandes es comparable a la caída de esfuerzo de temblores pequeños. Esto nos lleva a pensar que temblores de distintas magnitudes se pueden caracterizar por las dimensiones de la zona de fractura. Igualmente, se observa que la fuente asociada a un evento

principal es de mayor complejidad que aquella de un evento pequeño. Existen en la literatura geofísica dos modelos que incorporan estos efectos: El primero, llamado modelo de asperezas [1] enfatiza el proceso de iniciación de fractura, y es más apropiado para describir el acercamiento temporal a la inestabilidad. El segundo denominado modelo de barreras es más apropiado para explicar el mecanismo de detención de la fractura y los patrones de réplicas asociados con ello. En nuestro caso nos interesa describir la propagación misma de la ruptura sobre el plano de falla, y por lo tanto utilizaremos un modelo de barreras.

Recordando, el modelo de barreras introducido por Aki [Aki, 1979], consiste en lo siguiente: El plano de falla se supone que es una región heterogénea, con zonas "débiles" y "fuertes". Las zonas débiles son tales que la fractura se propaga por ellas a bajos niveles del esfuerzo mientras que las fuertes (llamadas barreras) requieren de esfuerzos superiores. Un terremoto pequeño se le considera como un evento que se inicia en una zona débil el cual no es capaz de sobrepasar las barreras que separan a esta zona de las zonas vecinas. De la misma forma, un evento compuesto es tal que la fractura inicial se propaga de una zona débil a sus vecinos sobrepasando las barreras.

En esta sección vamos a proponer una variante de este modelo para representar la propagación de la fractura sobre el plano de falla. Supondremos que la falla es una superficie planar compuesta de un gran número de regiones que llamaremos "fallas elementales". Cuando una de estas fallas se comienza a romper, la fractura procede hasta que toda la falla elemental este rota, y



Para que la fractura se propague de una falla elemental a una vecina se necesita sobrepasar una barrera de esfuerzo. Nuestras fallas elementales tienen un cierto parecido con las zonas débiles del modelo de Aki puesto que no existe barrera para la propagación de la fractura sobre estas regiones, aunque en nuestro caso la escala de longitudes es menor.

Para simplificar la discusión supongamos que las fallas elementales se encuentran sobre una malla cuadrada. Al romperse una falla elemental la fractura llega hasta las barreras que definen su frontera y en este momento existen las siguientes posibilidades: (1) La fractura se para aquí, y (2) La fractura se propaga a uno de los vecinos. Dado que el conocimiento de las condiciones detalladas de nuestra falla está fuera de nuestro alcance, vamos a estudiar la propagación de la fractura por medio de un modelo estocástico.

Estas barreras de esfuerzo pueden interpretarse como fuerzas de fricción entre las placas, pudiendo existir diferentes coeficientes para distintos lugares (Burridge, Knopoff, 1). Nosotros solamente consideraremos un tamaño de barrera.

Supongamos que el sistema está siendo esforzado de una forma homogénea a distancias muy grandes de la falla. Debido a la complejidad de la estructura local de la falla el esfuerzo aplicado varía de falla en falla, así como la altura de la barrera que debemos sobrepasar. Definimos al exceso de esfuerzo como

$$h_i = \sigma_i - \tau_i \quad (3.1)$$

donde  $\sigma_i$  es el valor local del esfuerzo accesible y  $\tau_i$  es la altura de la barrera. Las variaciones locales tanto en  $\sigma_i$  como en  $\tau_i$  pueden ser grandes. Definimos  $H$  como el valor promedio

del exceso de esfuerzo

$$H = \langle h \rangle = \sum (\sigma_i - \tau_i) / N \quad (3.2)$$

En donde N es el número total de fallas elementales. Ahora definimos  $\rho(h)$  como la distribución de fallas elementales con exceso de esfuerzo h. Nosotros propondremos aquí una forma específica para esta función, la cual se asemeja cualitativamente a una Gaussiana pero que nos será más cómoda a nivel computacional. Nuestra función de densidad de probabilidad está definida por el valor medio de h y por su dispersión. La función es:

$$\rho(h, H) = \frac{\beta}{2 \cosh^2[\beta(h-H)]} \quad (3.3)$$

La figura (3.1) muestra la gráfica de  $\rho(h)$ . La función de densidad de probabilidad de h tiene un máximo en  $h=H$ , y su ancho es proporcional a  $1/\beta$ . Para demostrar que su ancho es proporcional a  $1/\beta$  procedemos a calcular el valor de la varianza y los momentos asociados con ella, esto es,  $\langle h \rangle$  y  $\langle h^2 \rangle$ .

$$\begin{aligned} \langle h \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta h \, dh}{2 \cosh^2[\beta(h-H)]} = \frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \, dx}{\cosh^2[\beta x]} + \frac{\beta H}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^2[\beta x]} \\ &= \beta H \int_0^{\infty} \frac{dx}{\cosh^2 \beta x} = H. \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\langle h^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta h^2 \, dh}{2 \cosh^2[\beta(h-H)]} =$$

$$\frac{\beta}{2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \, dx}{\cosh^2[\beta x]} + 2H \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \, dx}{\cosh^2 \beta x} + H^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^2 \beta x} \right] =$$

$$\frac{\beta}{2} \left[ \frac{(4-2)\pi^2}{(2\beta)^2\beta} \frac{1}{\beta} + \frac{H^2}{\beta} \right] = \frac{\pi^2}{12\beta^2} + H^2 \quad (3.5)$$

por tanto la varianza es:

$$V = \langle h^2 \rangle - \langle h \rangle^2 = \frac{\pi^2}{12\beta^2} \approx \frac{1}{\beta^2}$$

La integral la encontramos en el libro de Gradshteyn & Ryzhik

Si el exceso de esfuerzo  $h > 0$  entonces la fractura se transmite, por lo tanto, para valores de  $H, \beta$  dados, la probabilidad de que un elemento se fracture esta dado por:

$$\begin{aligned} P(H) &= \int_0^{\infty} p(h, H) dh = \int_{-H}^{\infty} p(x, 0) dx = - \int_H^{-\infty} p(y, 0) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(h, 0) dh \end{aligned} \quad (3.6)$$

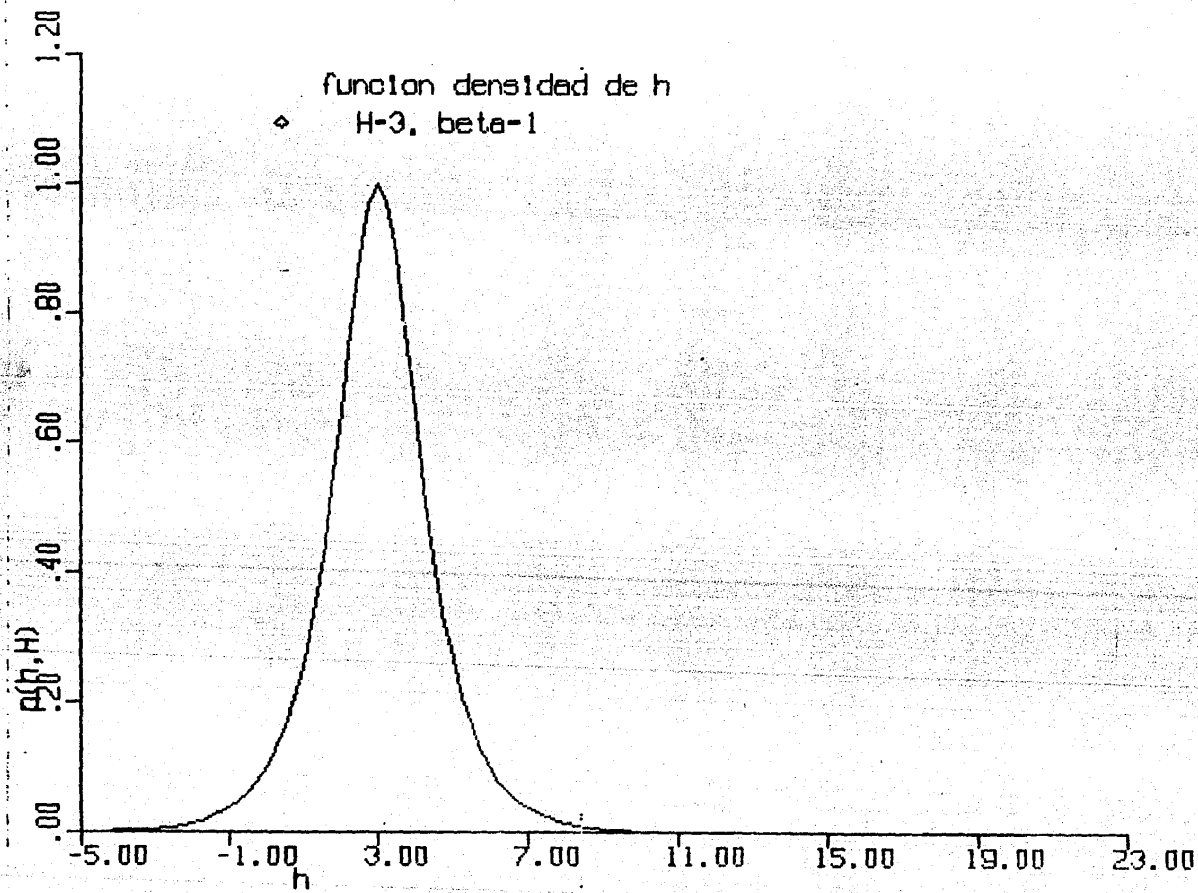
Entonces, la probabilidad de que una vez que una falla elemental ha decidido romperse, la fractura se propague a un vecino dado es:

$$P_0 = P(h) = \frac{\exp[\beta(h-H)]}{\exp[\beta(h-H)] + \exp[-\beta(h-H)]} \quad (3.7)$$

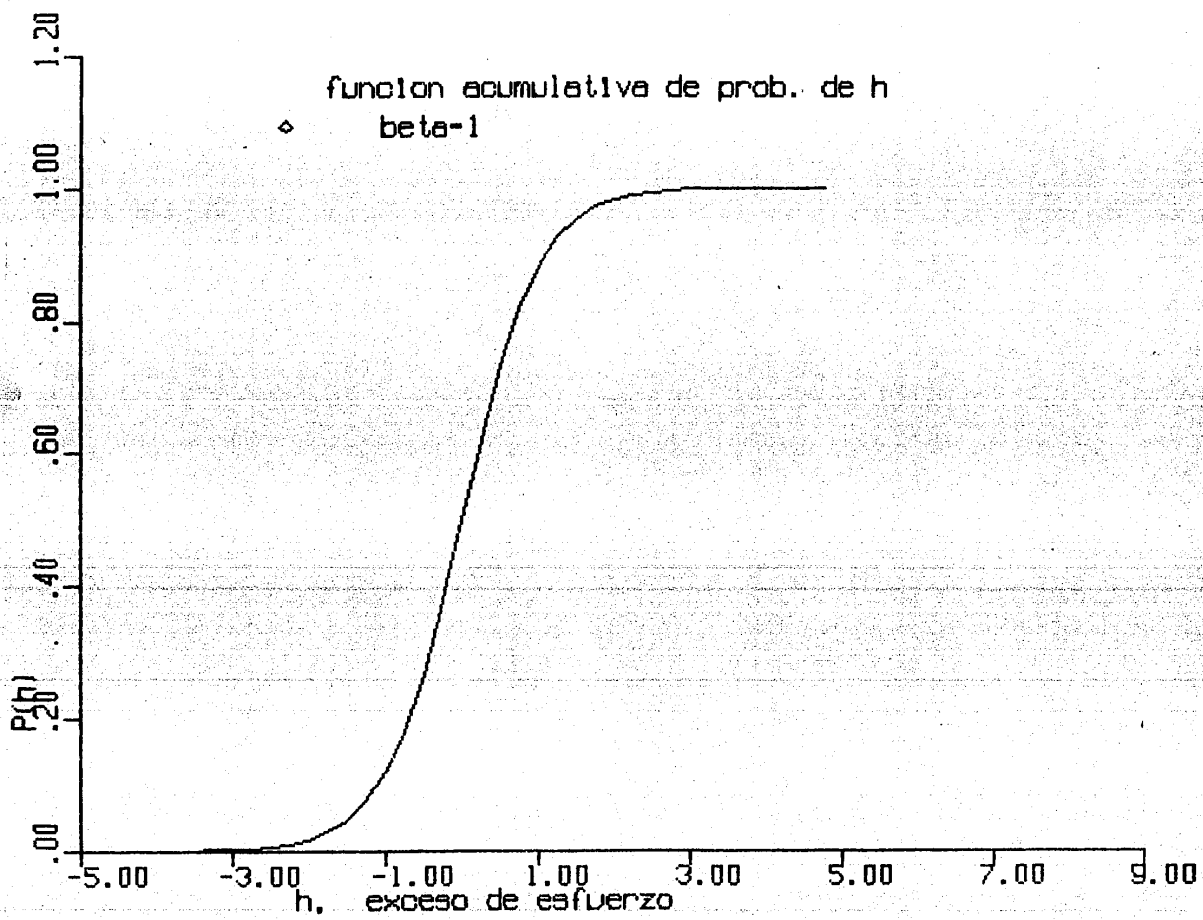
este resultado se puede comprobar si recordamos que

$$\frac{dP(h)}{dh} = p(h)$$

y derivando (3.7) se obtiene (3.3).



33  
a



La figura (3.2) muestra una gráfica de la función acumulativa de probabilidad de  $h$ .

Esta claro que la presencia de fallas elementales vecinas que ya se hayan fracturado afecta la probabilidad de que una falla dada se rompa. El esfuerzo soportado por tal falla elemental se distribuye homogéneamente sobre todos los demás sitios. Supondremos que el efecto de que un vecino se rompa es que el esfuerzo  $\sigma_i$  aumenta en promedio por una cantidad  $J$ , y que el efecto es aditivo. Entonces podemos escribir:

$$P_i = \frac{\exp(\beta i H + J \sum s_j)}{\exp(\beta i H + J \sum s_j) + \exp[-\beta(H + J \sum s_j)]} \quad (3.8)$$

en donde  $s_j$  es igual a uno si el  $j$ -ésimo vecino se rompió,  $-1$  si trató de romperse y no pudo, y cero si todavía no ha tenido oportunidad de escoger entre fracturarse y permanecer igual. Estamos considerando que el efecto de los vecinos es el de aumentar (o disminuir) el esfuerzo accesible para sobrepasar la barrera. Si el vecino ya se rompió, este le transmite, en promedio, una cantidad  $J$  de esfuerzo a la falla que estamos considerando, mientras que si una falla vecina ya se decidió por permanecer estacionaria esta va a frenar la fractura de sus vecinos restándoles, en promedio, una cantidad de esfuerzo  $J$ .

En la siguiente sección plantearemos un modelo para la propagación de fractura, en el cual incorporamos las ideas vertidas en las secciones I.1, II.3 y en ésta.

### III.2. MODELO PARA PROPAGACION DE FRACTURA

En esta sección plantearemos un modelo de crecimiento semejante al de Eden diluido que además incorpore las ideas vertidas en la sección III.1.

Iniciaremos al igual que en el modelo de Eden diluido con una latiz cuadrada cuyos sitios son todos vacíos, excepto el sitio central que será nuestra semilla. Denotaremos los sitios vacíos con "-". Forjamos la superficie de crecimiento con los vecinos más cercanos de la semilla y aplicamos cada intervalo de tiempo  $\Delta t$  las reglas de crecimiento dadas por:

i) Elegimos aleatoriamente un sitio de la superficie de crecimiento. (3.9)

ii) El sitio elegido pertenece al cúmulo con probabilidad  $p$  o es prohibido con probabilidad  $q = 1-p$ . En este caso  $p$  está dada por la ecuación (3.8). Es claro que  $0 \leq p \leq 1$ .

Para decidir si un sitio pertenece o no al cúmulo dada una probabilidad, es decir dados los valores de  $H$  y  $J$  en (3.8), nos auxiliamos de (2.7).

Los sitios del cúmulo de crecimiento los denotamos con "\*" y los sitios inmunes o prohibidos con "o".

Es inmediato que las reglas de crecimiento dadas por (3.9) son muy semejantes a las reglas definidas en (2.6) excepto que la posibilidad de que un sitio se rompa depende de si los vecinos más cercanos ya se han roto o han decidido no romperse. La

correspondencia entre este modelo y las ideas planteadas en la sección III es directo y basta solo identificar un sitio enfermo con un sitio que ya se ha roto y un sitio inmune con un sitio que ha decidido no romperse.

En este modelo de crecimiento definiremos condiciones de frontera periódicas de tal manera que el extremo inferior se continúe en el superior y viceversa y de igual manera para los extremos izquierdo y derecho.

La figura 3.3 representa un cúmulo después de 14 pasos de tiempo. Hemos denotado los sitios que constituyen la superficie de crecimiento con "1" aunque estrictamente hablando no se distinguen de los sitios "-" en el sentido de que aún no han decidido si romperse o no. El hecho de haberlos denotado con un símbolo especial es solo por cuestiones de facilidad a la hora de identificarlos en la figura. Por otro lado, son los únicos sitios que pueden ser elegidos por la regla (3.9). En la figura 3.3 se observan las condiciones periódicas de frontera.

Ahora bien, el modelo así planteado es más general que el modelo de Eden diluido y podemos regresar a este si en la ecuación (3.8) para  $p$  hacemos tender  $J$  a cero. Notamos pues, que  $J$  es una medida del acoplamiento que existe entre los vecinos. Por otro lado si  $H=0$ , y  $J$  es pequeña, la probabilidad de crecer un cúmulo muy grande es pequeña, puesto que el esfuerzo medio en el sitio es muy pequeño. Aun así, es posible llegar a tener grandes cúmulos puesto que el fenómeno es en sí estocástico. No obstante, si  $J$  es grande el crecimiento de un cúmulo "infinito" es posible puesto que inicialmente se tiene una semilla y éste único sitio posee un acoplamiento muy fuerte con sus vecinos cercanos los cuales tratarán de alinearse en la dirección de



a)

-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-

b)

-	1	-	-	-	-	-
1	S	1	-	-	-	-
-	1	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-

c)

1	1	-	-	-	-	-
X	S	1	-	-	-	1
1	1	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-

d)

X	1	-	-	-	-	1
X	S	1	-	-	1	X
X	X	X	0	-	0	X
0	0	1	-	-	-	1
-	-	-	-	-	-	-
0	-	-	-	-	-	-
X	1	-	-	-	-	0

Fig. 3.1. Crecimiento de un cúmulo. a) Latiz inicial antes de comenzar el crecimiento. b) Inicia el crecimiento c) Se selecciona un sitio al azar de la superficie de crecimiento -los 1 en la figura- y pasa a formar parte del cúmulo. d) La latiz después de 14 pasos. Algunos sitios forman parte de la superficie neutralizante "0" que eventualmente detendrá el crecimiento.

aquel, provocando con ello, la difusión de la epidemia o en este caso la propagación de la ruptura sísmica.

### III.3 DEPENDENCIA TEMPORAL DE LA CONFIGURACIÓN

Dentro del modelo de percolación, la probabilidad de llegar a tener una cierta configuración no depende en nada del camino por el cual lleguemos a ella. Entendemos por camino el orden o secuencia temporal, en el cual los sitios en la red son elegidos. Estos sitios formarán dominios de sitios negros o blancos tal como se especificó en la sección II.2.

En nuestro modelo de crecimiento la probabilidad de una cierta configuración si depende del camino por el cual se llega a ésta. Para mostrar esto, consideremos la latiz de 4 sitios que se ilustra en la figura 3.4 $\lambda$  y calculemos la probabilidad de llegar a la configuración 3.4 $\beta$  por dos caminos diferentes.

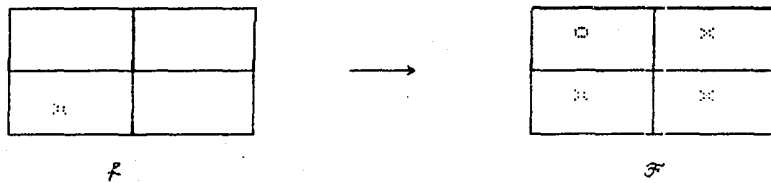


Fig. 3.4 Una posible configuración en una latiz de 4 sitios.

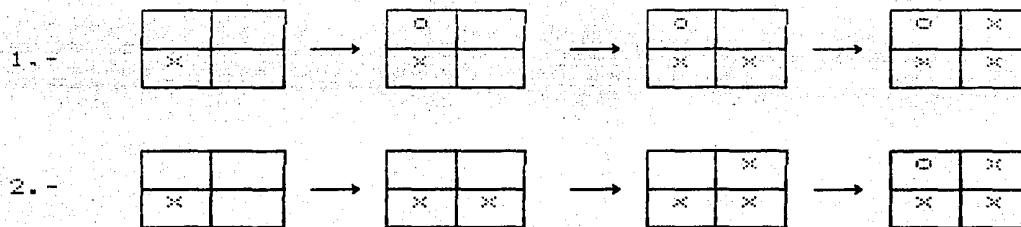


Figura 3.5 . Se ilustran 2 posibles caminos por los cuales se pudo llegar a la configuración de 3.4 $\bar{f}$ .

De acuerdo con teoría de percolación la probabilidad de llegar de  $f$  a la configuración  $\bar{f}$  siguiendo el camino 1 es:

$$P_1 = p q p p = p^3(1-p) \quad (3.10)$$

y siguiendo el camino 2 es:

$$P_2 = p p p q = p^3(1-p) \quad (3.11)$$

por tanto, la configuración final que se tiene no depende del camino por el cual se llega a ella, en el caso de teoría de percolación.

La probabilidad de llegar a  $\bar{f}$  por el camino 1 de acuerdo con

nuestro modelo, escribiendo J y H en unidades de  $1/\beta$ , es:

$$P_1 = f(0,H) [1-f(J,H)] f(J,H) f(0,H) \quad (3.12)$$

$$\text{donde } f(iJ,H) = \frac{e^{iJ+H}}{e^{iJ+H} + e^{-iJ-H}}$$

por el camino 2 la probabilidad de la configuración  $\mathcal{F}$  es:

$$P_2 = f(0,H) f(J,H) f(J,H) [1-f(2J,H)] \quad (3.13)$$

donde claramente se observa que  $P_2 \neq P_1$ .

Así pues en esta sencilla latiz se observa que en nuestro modelo de crecimiento, la configuración final depende del camino seguido para llegar a ella. Este no es el caso de percolación, en el que no importa el camino que se siga y la probabilidad de llegar a tener una cierta configuración no depende de la secuencia en que esta se forme. La razón fundamental de ello estriba en el acoplamiento entre los vecinos. Para ver esto basta con hacer  $J=0$  en las ecuaciones 3.12 y 3.13 con lo que se obtiene la igualdad entre ellas.

Por lo dicho en el párrafo anterior podemos concluir que la probabilidad de llegar a tener una cierta configuración con las reglas dadas por nuestro modelo, depende fuertemente de la historia del crecimiento, esto es, de la secuencia en que se fue constituyendo nuestro cúmulo.

En la sección V calcularemos una probabilidad efectiva  $p^*$ , para toda la latiz. La importancia de esta  $p^*$  es que ya no depende de los vecinos, es independiente de la historia. Con esto podremos mapear algunos aspectos de nuestro modelo de crecimiento en el muy conocido modelo estático de percolación.

#### IV CALCULO DE LA FUNCION DE PERCOLACION.

En este capítulo discutiremos como llevar a cabo cálculos para determinar a que valores de  $J$  y  $H$  el sistema percola. Mostraremos primeramente algunas figuras de los cúmulos crecidos para valores de  $J, H$  por debajo, encima y aproximadamente en percolación.

En las figuras 4.1 a 4.6 que se muestran se observa que abajo de percolación el cúmulo se detiene una vez que ha sido encerrado por los "o". Para valores de  $p$  cercanos a  $p_c$  se observa que el cúmulo puede saturar la latiz aunque sigue compitiendo con los "o". Para valores de  $p > p_c$ , el cúmulo se detiene solamente cuando ha saturado la latiz.

Ahora bien, aunque las figuras son cúmulos típicos para los distintos valores de  $p$ , debido a que el fenómeno es un proceso estocástico puede suceder que se tengan cúmulos que saturan la red aún a valores de  $J, H$  por debajo de percolación. Esto en gran medida se debe al tamaño finito de la red y a que, estrictamente hablando, percolación solo se define para redes infinitas. De igual manera se observa que en percolación o arriba de ella se tienen cúmulos que constan de solo unos cuantos sitios. Para poder hablar de un valor crítico de los parámetros es necesario realizar estadística sobre los cúmulos crecidos. En lo que sigue presentaremos una función que en base a la estadística del















tamaño del cúmulo crecido nos permita encontrar el valor crítico para el cual el promedio de los cúmulos crecidos percola. Esto se llevará a cabo utilizando teoría de percolación (o equivalentemente  $J=0$ ).

Recordemos la ecuación presentada en la sección II, para las probabilidades de que un sitio pertenezca a un cúmulo de tamaño  $s$ , pertenezca al cúmulo "infinito", o no pertenezca a cúmulo alguno. Tal ecuación es:

$$\sum n_s s + pP = p \quad (4.1)$$

en esta ecuación, implícitamente se está trabajando con redes infinitas. En nuestro caso utilizamos redes finitas; así que no es posible utilizar tal y cual la ecuación 4.1. En vez de ello definiremos formalmente la siguiente función:

$$W_s = n_s + \gamma(s, s_0)/N \quad (4.2)$$

donde  $s_0$  es el tamaño del cúmulo que satura la red finita, esto es, el cúmulo más pequeño que percola:

$$s_0 = P_N p N \quad (4.3)$$

$N$  es el tamaño de la red y  $P_N$  es la probabilidad de que un sitio negro pertenezca al cúmulo percolado en una red de tamaño  $N$ .

Ahora bien, si calculamos el valor esperado de  $W_s$  se tiene:

$$\sum s W_s = \sum s n_s + (1/N) \sum s \gamma = \sum s n_s + p P_N = \tilde{p} \quad (4.4)$$

en el límite  $N \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{p} \rightarrow p$ . En lo que sigue supondremos que este límite se cumple. En nuestros cálculos estamos muestreando cúmulos de tamaño  $s$  con probabilidad  $sw_s$ , así que los momentos  $\langle s \rangle$  y  $\langle s^2 \rangle$  están dados por:

$$\langle s \rangle = \sum_{l=1}^M \frac{s^l}{M} = \frac{\sum s^2 W_s}{\tilde{p}} = \frac{\sum s^2 n_s}{\tilde{p}} + \frac{p^2 P_N^2}{\tilde{p}} \quad (4.5)$$

$$\langle s^2 \rangle = \sum_{l=1}^M \frac{s^2}{M} = \frac{\sum s^3 n_s}{\tilde{p}} + \frac{p^3 P_N^3}{\tilde{p}} + (\text{términos } O(N)) \quad (4.6)$$

Definamos ahora la función  $V_1 \equiv \langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2$ . Debajo de  $p_c$  podemos despreciar los términos en  $P$  y  $V_1$  es igual a:

$$V_1 = \frac{\sum s^3 n_s}{\tilde{p}} - \frac{\sum s^2 n_s}{\tilde{p}} \quad (4.7)$$

Encima de  $p_c$  los términos en  $P$  dominan y la ecuación para  $V_1$  llega a ser, suponiendo  $p \approx \tilde{p}$ :

$$V_1 = \frac{p^3 P^3 N^2}{\tilde{p}} - \frac{p^4 P^4 N^2}{\tilde{p}^2} = p^2 N^2 p^3 [1-p] \quad (4.8)$$

En toda transición de fase la variación del parámetro de interés es muy elevada. En nuestro caso, esperamos que la varianza muestral del tamaño del cúmulo, es decir la función  $V_1$ , aumente al acercarse a  $p_c$ . Sin embargo, su valor se mantiene finito y no tendremos una divergencia, lo cual se debe al tamaño finito de la red, pues una vez que un cúmulo se "dispara" no se detiene su crecimiento hasta no haber saturado la latiz.

En la figura 4.7 hemos graficado  $V_1$  contra  $p$  y se aprecia que aún cuando la varianza aumenta y tiene su máximo aproximadamente en  $p_c$ , este está mal definido pues se observa una meseta amplia en la vecindad del valor crítico de la probabilidad. Si derivamos la ecuación (4.8) con respecto de  $P$  y optimizamos se encuentra un máximo en  $P=3/4$ , en el límite en el que se vale  $p=\tilde{p}$ . Esto hace que la varianza tenga su máximo desplazado hacia este valor de  $p$ .

Por otro lado si dividimos la varianza por  $\langle s \rangle$  la función que resulta es  $V_2 = (\langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2) / \langle s \rangle$ . Nuevamente, debajo de  $p_c$  podemos despreciar los términos en  $P$  y  $V$  es igual a:

$$V_2 = \frac{\sum s^2 (s n_i) - (1/\tilde{p}) [\sum s (s n_i)]^2}{\sum s (s n_i)} \quad (4.9)$$

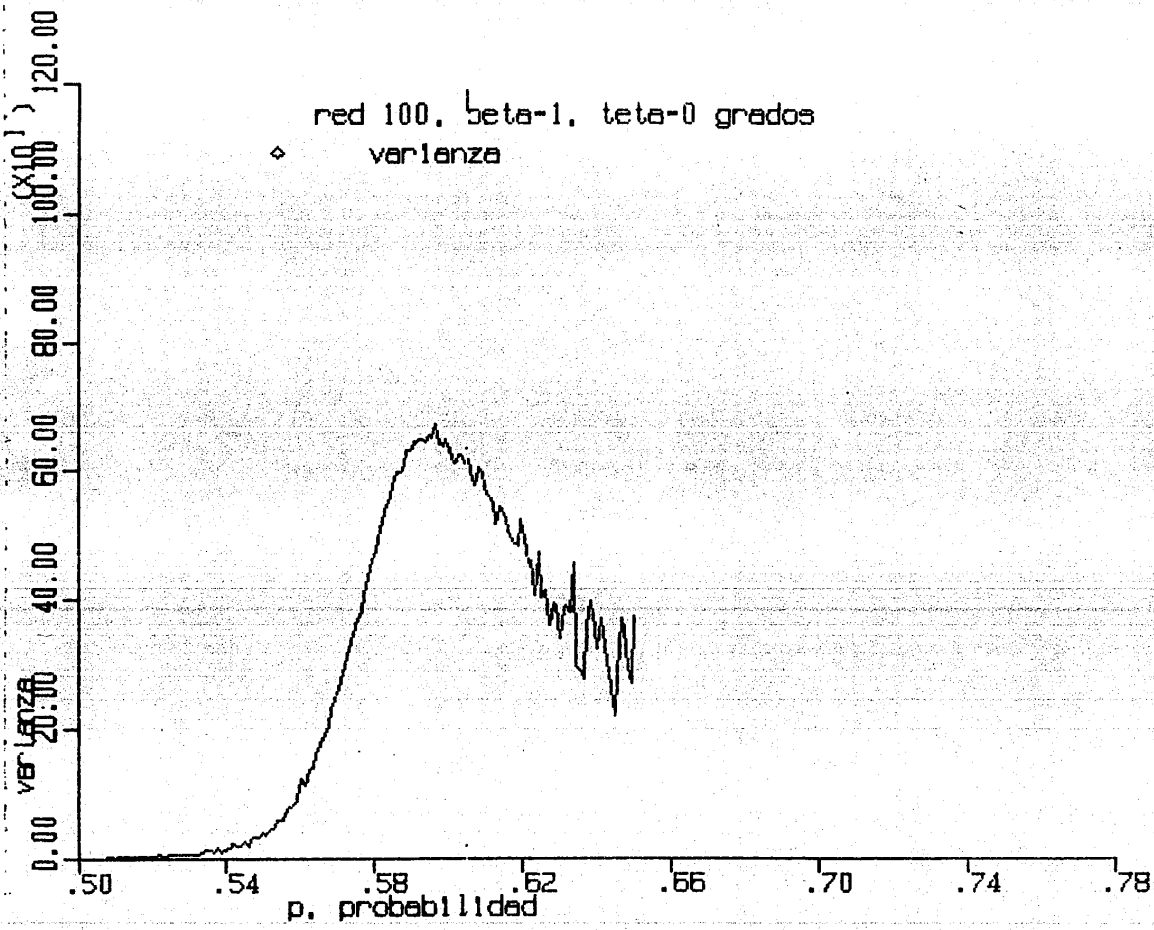
Arriba de  $p_c$  los términos en  $P$  dominan y la ecuación para  $V_2$  se convierte en:

$$V_2 = \frac{P^2 P^2 N^2 - P^4 P^4 N^2 (1/\tilde{p})}{P^2 P^2 N} = P N P (1-P) \quad (4.10)$$

La gráfica de la función  $V_2$  tiene un máximo bastante más definido.

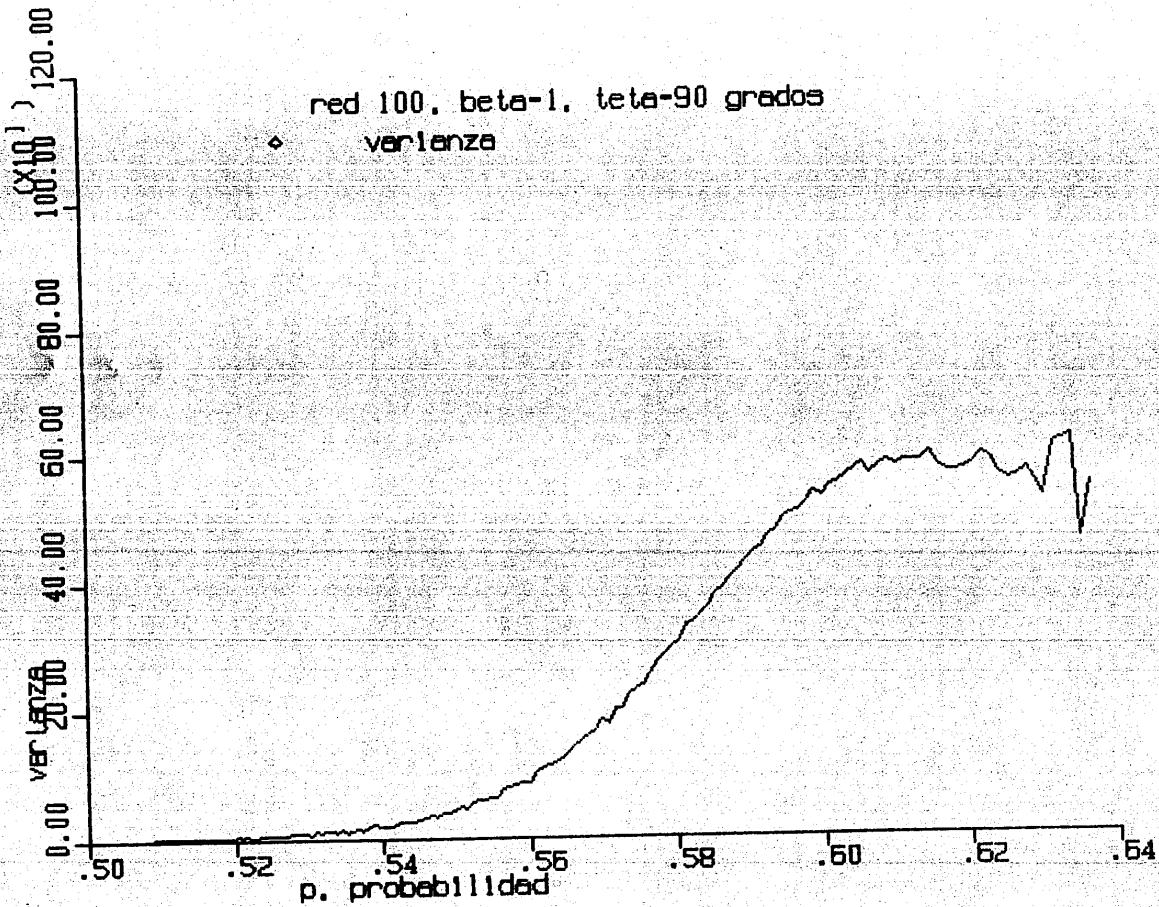
La ecuación (4.10) tiene un máximo para  $P=1/2$  en el límite  $p=\tilde{p}$ . A ello se debe que la función  $V_2$  tenga un máximo más definido cerca de  $p_c$ .

De igual manera podemos investigar el comportamiento de la

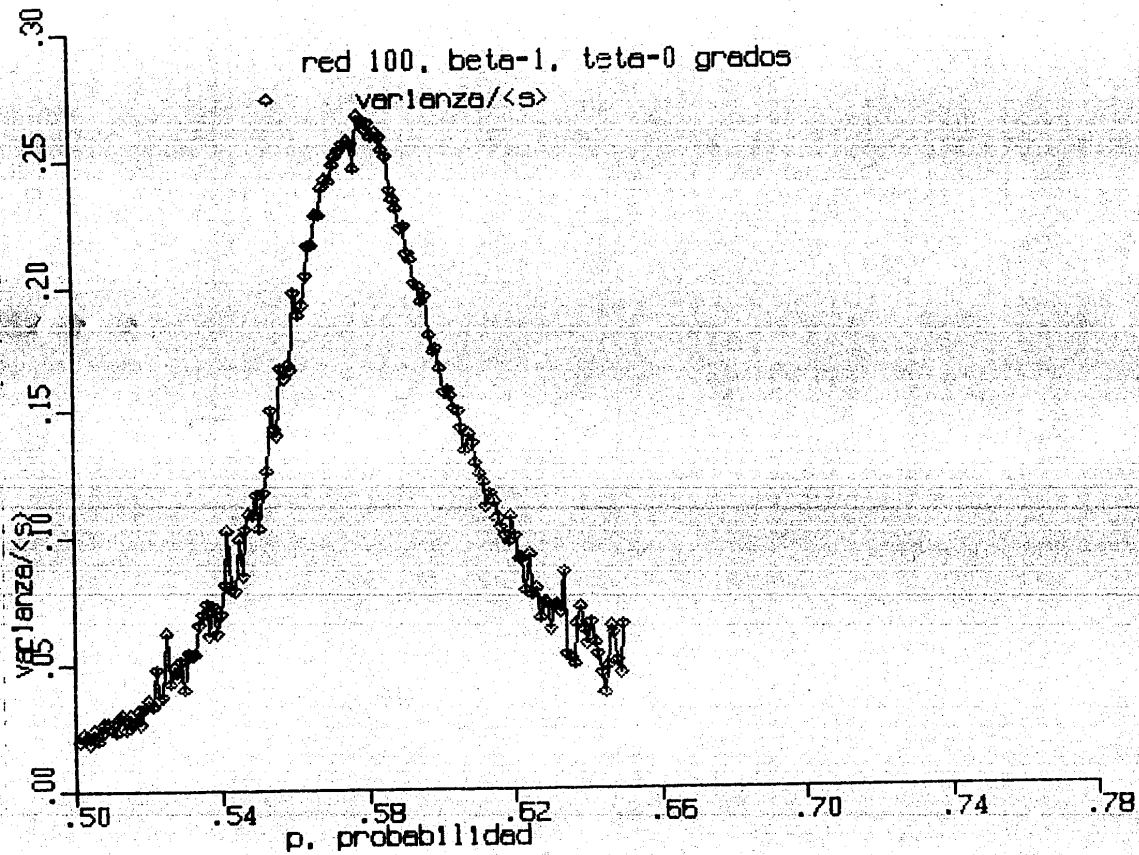


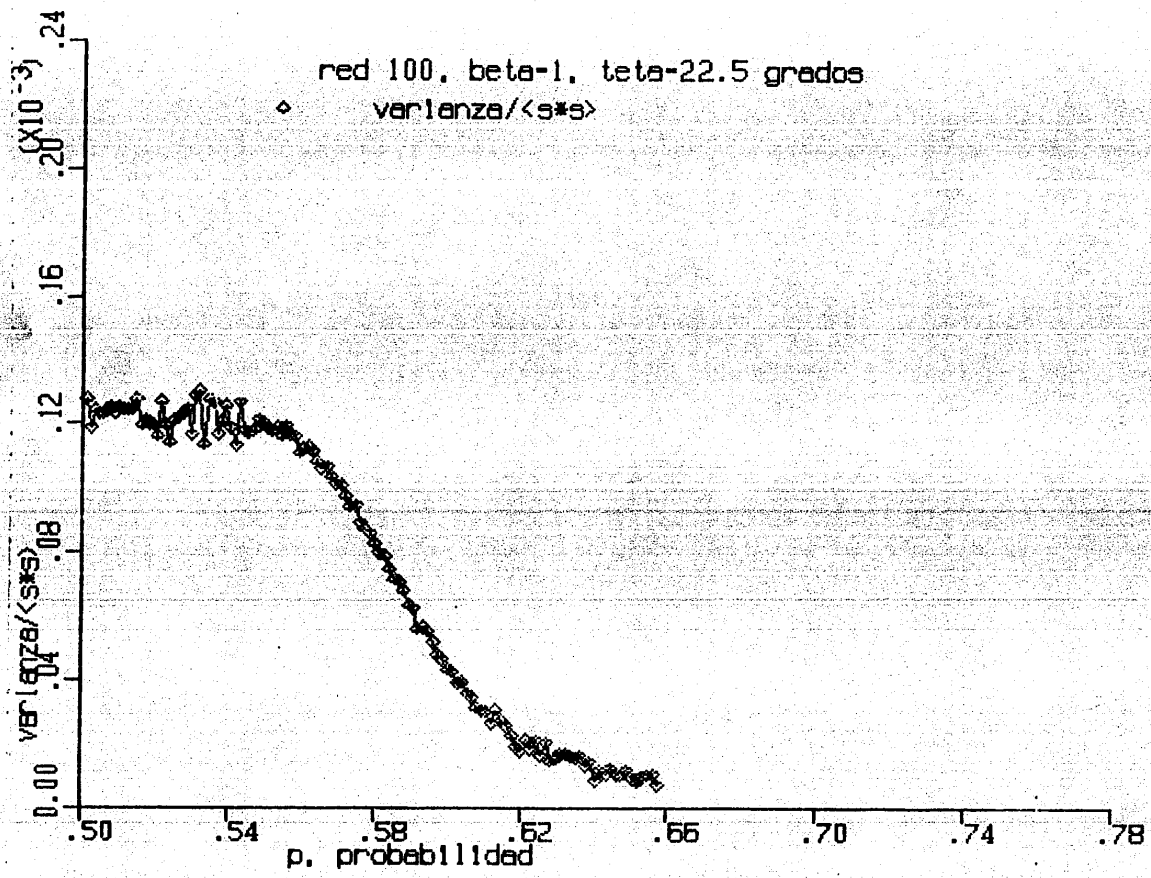
524





526





HS

función  $V_3 = (\langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2) / \langle s^2 \rangle$ . Debajo de  $p_c$  podemos despreciar los términos que contengan  $P$  y  $V_3$  se convierte en:

$$V_3 = \frac{\sum s^2 (s n_s) - (1/\tilde{P}) [\sum s (s n_s)]^2}{\sum s^2 (s n_s)} \quad (4.11)$$

Arriba de  $p_c$  dominan los términos en  $P$  por lo que podemos escribir  $V_3$  como:

$$V_3 = \frac{P^3 P^3 N^2 - P^4 P^4 N^2 (1/\tilde{P})}{P^3 P^3 N^2} = 1 - P \quad (4.12)$$

De la expresión 4.12 se observa que  $V_3$  nos debería de dar un buen máximo cerca de  $p_c$  al acercarnos por la derecha. Sin embargo, como se puede apreciar en la figura 4.9, esta expresión no nos permite distinguir  $p_c$  al acercarnos por la izquierda. Por esta razón hemos decidido trabajar con la función  $V_2$  la cual da un tratamiento más uniforme tanto arriba como abajo de  $p_c$ .

El máximo de  $V_2$  es la figura 4.8 está a la izquierda del valor crítico de  $p$  y ello se debe a que en una red finita los cúmulos "percolan" a valores más bajos de  $p$ . Esto último ha sido comprobado al aumentar el tamaño de la latiz, observándose un corrimiento del máximo hacia la derecha para una latiz más grande. En este caso se trabajo con una latiz de  $50 \times 50$  y posteriormente con una red de  $100 \times 100$ . El corrimiento fue de 0.57 para la red más pequeña a  $p=0.58$  para la latiz más grande.

En la siguiente sección haremos un mapeo de la distribución de cúmulos obtenidos a partir del modelo dinámico en el que la probabilidad depende de los vecinos y de la historia en que se forjó la configuración, con aquella obtenida del modelo estático

de percolación en el cual la probabilidad no depende de la historia. Esto lo haremos mediante una función que nos permita reproducir algunos aspectos de teoría de percolación a partir de nuestro modelo.

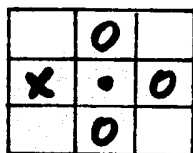
## V. CALCULO DE LA PROBABILIDAD $p^*$ PARA LA LATIZ

Los dominios geométricos definidos tanto por percolación como por los productos finales de nuestro modelo de crecimiento constituyen una propiedad estática. Como vimos en la sección III la probabilidad de crecimiento depende de los vecinos que ya se hayan roto. Esta característica necesariamente está ligada a la historia del propio crecimiento. Nosotros, estamos interesados en definir una probabilidad que ya no dependa de los vecinos y que nos reproduzca la distribución observada en nuestro modelo. Una vez hecho esto podremos utilizar los resultados de teoría de percolación.

La figura (5.1) muestra las configuraciones accesibles en que puede encontrarse un sitio en la superficie de crecimiento. Se indican además las configuraciones factibles para cada configuración.

Estamos interesados en poder determinar los valores críticos de  $H$  y  $J$  que nos producen una  $p^*$  para la cual el promedio de los cúmulos crecidos percola. Como ya hemos podido notar, la  $J$  nos produce un acoplamiento entre sitios vecinos adyacentes. Para  $J=0$ , la  $p$  obtenida de la ecuación (3.8), deberá coincidir con el valor crítico  $p_c$  de percolación de una latiz cuadrada. Esto efectivamente es lo que se observa en este caso.. No obstante, el acoplamiento entre los vecinos modificará el valor de la  $p$  de percolación: A primera vista, uno podría esperar que el valor

Configuración

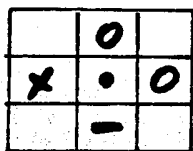


Suma de espín

$$\sum_{\{vec\}} \tau_i = -2$$

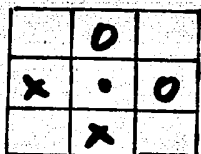
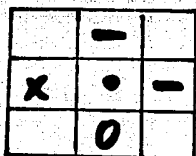
Combinaciones para la configuración.

4



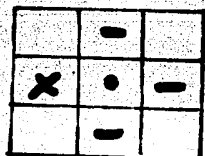
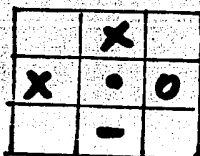
$$\sum_{\{vec\}} \tau_i = -1$$

12



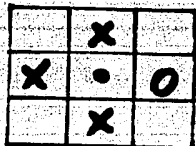
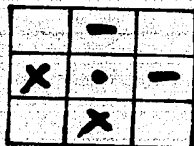
$$\sum_{\{vec\}} \tau_i = 0$$

12+6 = 18



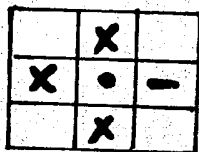
$$\sum_{\{vec\}} \tau_i = 1$$

12+4 = 16



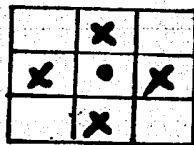
$$\sum_{\{vec\}} \tau_i = 2$$

6+4 = 10



$$\sum_{\{vec\}} \tau_i = 3$$

4



$$\sum_{\{vec\}} \tau_i = 4$$

1

52 Fig. 5.1. Se muestran las factibles configuraciones en que puede encontrarse un sitio de la superficie de crecimiento, así como las combinaciones para cada una de las mismas.

de  $p_c$  fuese menor, lo cual no sucede. Esto se debe a que aunque el valor del acoplamiento sea muy grande, si el valor de  $H$  es pequeño, el esfuerzo aplicado sobre el sitio no es suficiente para saltar la barrera de esfuerzo.

Trataremos de tomar en cuenta estos efectos al momento de calcular la  $p^*$  que habrá de considerarse para toda la latiz. Nuestro propósito es obtener la misma probabilidad  $p_c$  de percolación para los distintos valores de  $H$  y  $J$  en la ecuación (3.8).

Consideraremos ahora, la figura 5.2. Cada sitio en la superficie de crecimiento tiene al menos un sitio enfermo a su lado, esto es un sitio "\*". Por otra parte dependiendo de cuantos sitios "\*" tenga de vecinos adyacentes es más probable que salte la barrera de esfuerzo. Las distintas formas en que un sitio en la superficie de crecimiento puede tener  $i$  vecinos enfermos y  $4-i$  vecinos inmunes o a los que aun no los ha atacado la enfermedad tiene que ver con la manera de colocar estos vecinos a su alrededor. Así, las combinaciones en que pueden aparecer 4 vecinos "\*", junto a un sitio particular en la superficie de crecimiento es solamente 1, puesto que cualquier intercambio entre estos cuatro vecinos nos produce la misma configuración.

Procederemos ahora, a asignar a cada "\*", -excepto la que siempre aparece-, la probabilidad  $p$  y a cada "o" la probabilidad  $q=1-p$ . Podríamos asignar a cada sitio el valor de la probabilidad que le correspondiese según (3.8) pero en este momento, es decir cuando se terminó el crecimiento, es imposible saber de que configuración procede. A un sitio "-" le damos el promedio de ambas probabilidades i.e.  $(1/2)[p+(1-p)]=1/2$ . Hecho esto, a cada una de las configuraciones en la figura (5.1),



x	1	-	-	-	-	1
x	S	1	-	-	1	x
x	x	x	-	-	0	x
0	0	•	-	-	-	1
-	-	-	-	-	-	-
0	-	-	-	-	-	-
x	1	-	-	-	-	0

		1				
	-1	•	∅			
		∅				

Fig.5.2 Cálculo de la probabilidad para un sitio de la superficie de crecimiento.

le acuñaremos, el valor que resulte de las combinaciones por la probabilidad de cada sitio de acuerdo a la asignación que hemos indicado.

Para  $\Sigma \sigma_i = -2$ , existen cuatro configuraciones dependiendo de el lugar que ocupe el sitio "\*". En este caso puede estar en cualquiera de las cuatro posiciones posibles. El intercambio de un sitio "o" con un sitio "o", no produce una configuración distinta. Puesto que a cada sitio "o" le hemos asignado el valor  $(1-p)$  entonces el valor para la configuración cuya  $\Sigma \sigma_i = -2$  es  $4(1-p)^3$ .

Para  $\Sigma \sigma_i = -1$  tenemos 12 configuraciones que son resultado de los cuatro lugares en que puede aparecer "\*" y los 3 en que puede aparecer "-". Nuevamente el intercambio de los dos lugares "o" no nos produce una configuración distinta. El sitio "-" nos da un factor de  $1/2$  y los dos sitios "o" un factor de  $(1-p)^2$ . Por tanto, el valor para esta configuración es  $12(1-p)^2$ .

Los valores para las restantes configuraciones se calculan de igual manera y los resultados se muestran en la siguiente tabla.

$\Sigma \sigma$	$C_i$
-2	$4(1-p)^3$
-1	$6(1-p)^2$
0	$3(1-p) + 6p(1-p)^2$
1	$6p(1-p) + 1/2$
2	$3p/2 + 4p^2(1-p)$
3	$2p^2$
4	$p^3$

Introduciendo los valores de  $C_i$  de la tabla anterior en la ecuación (3.8) como factores de peso se tiene la  $p^*$  que se busca luego de normalizar:

$$p^* = \frac{\sum_{i=-2}^4 C_i F(i, H)}{\sum_{i=-2}^4 C_i} \quad (5.1)$$

$$F(i, H) = \frac{\exp(Ji + H)}{\exp(Ji + H) + \exp(-Ji - H)} \quad (5.2)$$

De la ecuación (5.1) se aprecia que  $p^*$  es una función de  $p$  es decir,  $p^* = G(p)$ , siendo  $G(p)$  un cociente de polinomios cúbicos en  $p$ . Dado que no conocemos  $p$ , propondremos que la probabilidad de que un vecino se rompa,  $p$ , sea igual a la probabilidad de que se rompa el sitio central,  $p^*$ , lo cual transforma (5.1) en una ecuación autoconsistente que resolvemos por iteraciones sucesivas, esto es,  $p^* = G(p^*)$  e iniciamos con un valor pequeño para  $p$  (cero puede ser un buen número), y el resultado lo volvemos a introducir en  $p_1 = G(p_0)$  hasta que  $p_{n+1} = p_n$ , habiendo encontrado de esta manera las raíces estables (al menos una).

Si en seguida modificamos ligeramente los valores de  $J$  y  $H$  podemos esperar, puesto que la exponencial es una función monótona creciente suave, que la nueva raíz para  $p$  difiera en poco de la anterior. Se observa que efectivamente se cumple nuestra suposición, por lo que el siguiente proceso iterativo lo iniciamos con la raíz que le precede. De esta manera se observa que la

primera raíz se obtiene después de 8 iteraciones mientras las siguientes son halladas en 2 ó 3 iteraciones cuando el criterio de convergencia es:

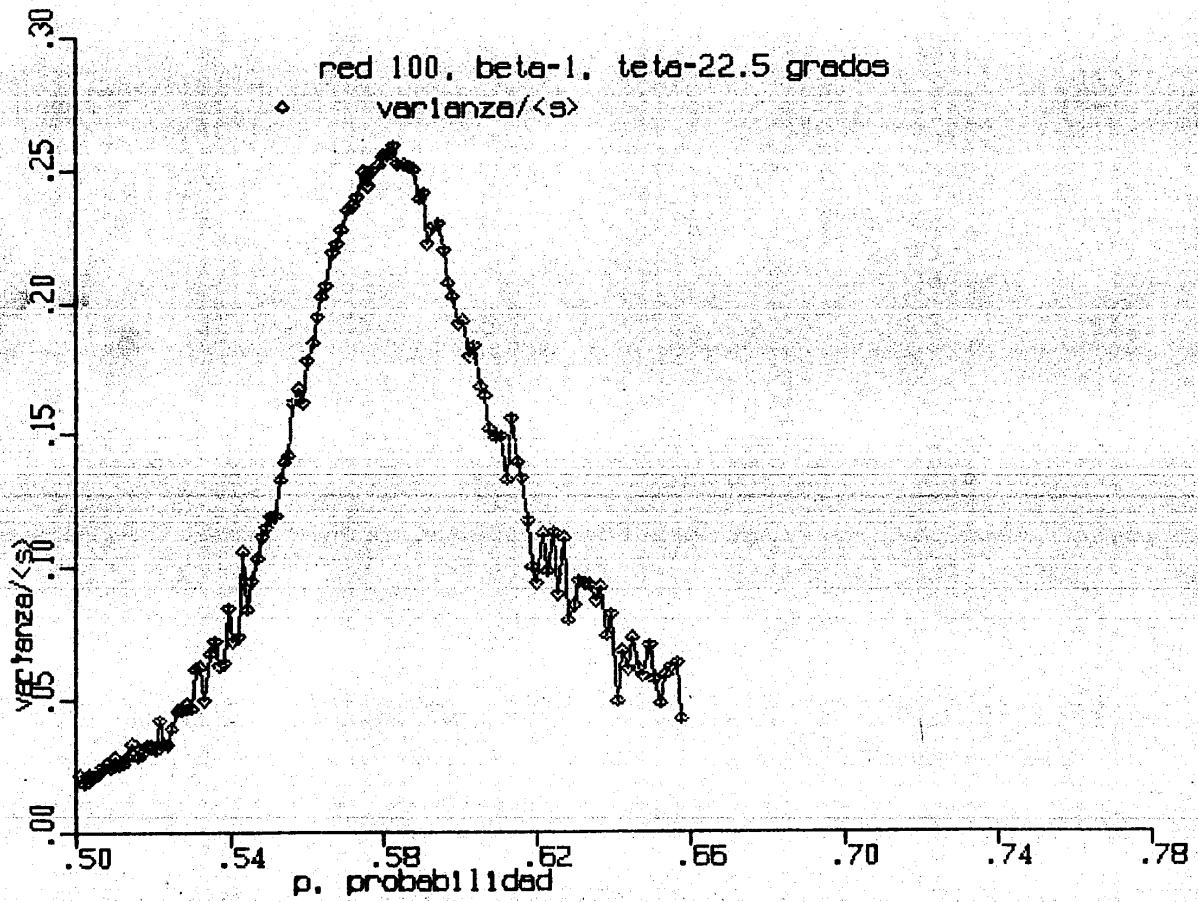
$$|P_n - P_{n+1}| < 0.001.$$

En nuestro modelo, el hecho de que los cúmulos una vez crecidos nos reproduzcan propiedades estáticas de percolación, no quiere decir que sea un modelo estático; es dinámico puesto que: i) la configuración final si depende de la historia y ii) el crecimiento solo se detiene hasta que el cúmulo es completamente encerrado por los sitios inmunes.

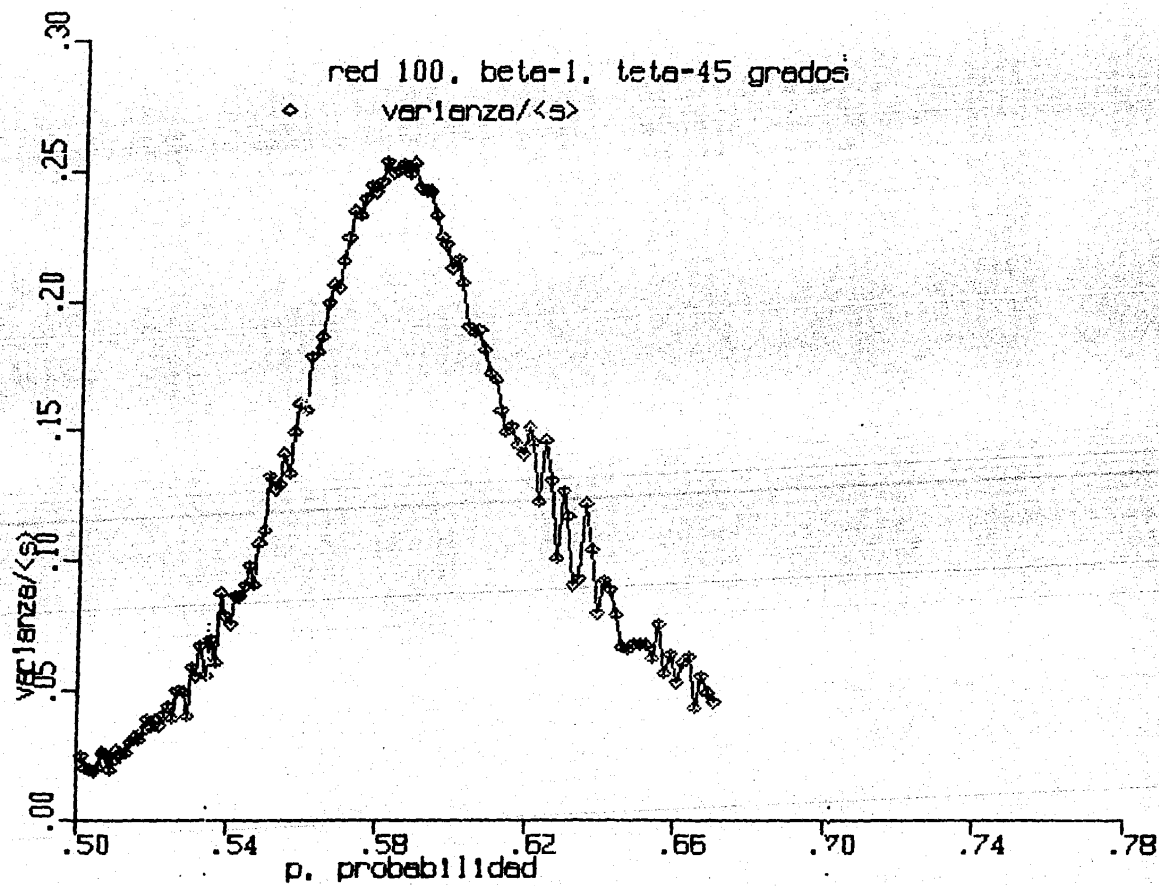
Sin embargo, hemos logrado definir una función que nos permite hacer un mapeo de nuestro modelo dinámico al modelo estático de percolación y que es capaz de reproducirnos algunos aspectos de nuestro modelo.

Los resultados del mapeo propuesto aquí, reproducen algunos aspectos de percolación. Podemos hablar de una probabilidad crítica de percolación para toda la malla. Esta probabilidad como fue obtenida líneas arriba necesariamente depende del valor del acoplamiento entre los vecinos. Por otro lado la  $p^*$  fue obtenida como una aproximación a primeros vecinos. Una aproximación a segundos vecinos, mejora los resultados muy poco.

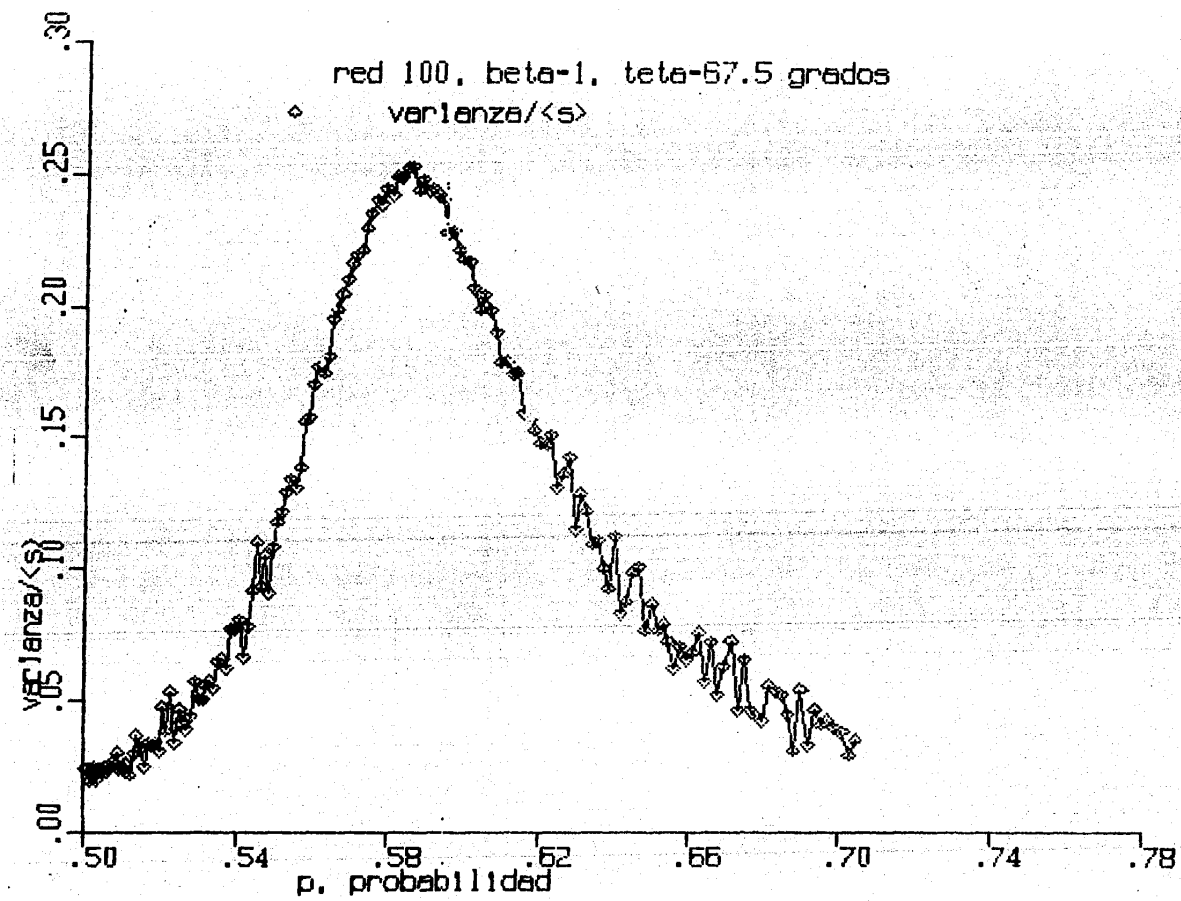
La función  $V_2$  de la sección IV nos permite encontrar un valor crítico para  $p$  en base a la estadística de los cúmulos crecidos y los resultados resultan bastante aceptables sobre todo si se toma en cuenta que se está trabajando con redes finitas. La figura 5.3 muestra gráficas de  $V_2$  para valores de  $J$  y  $H$  sobre las rectas



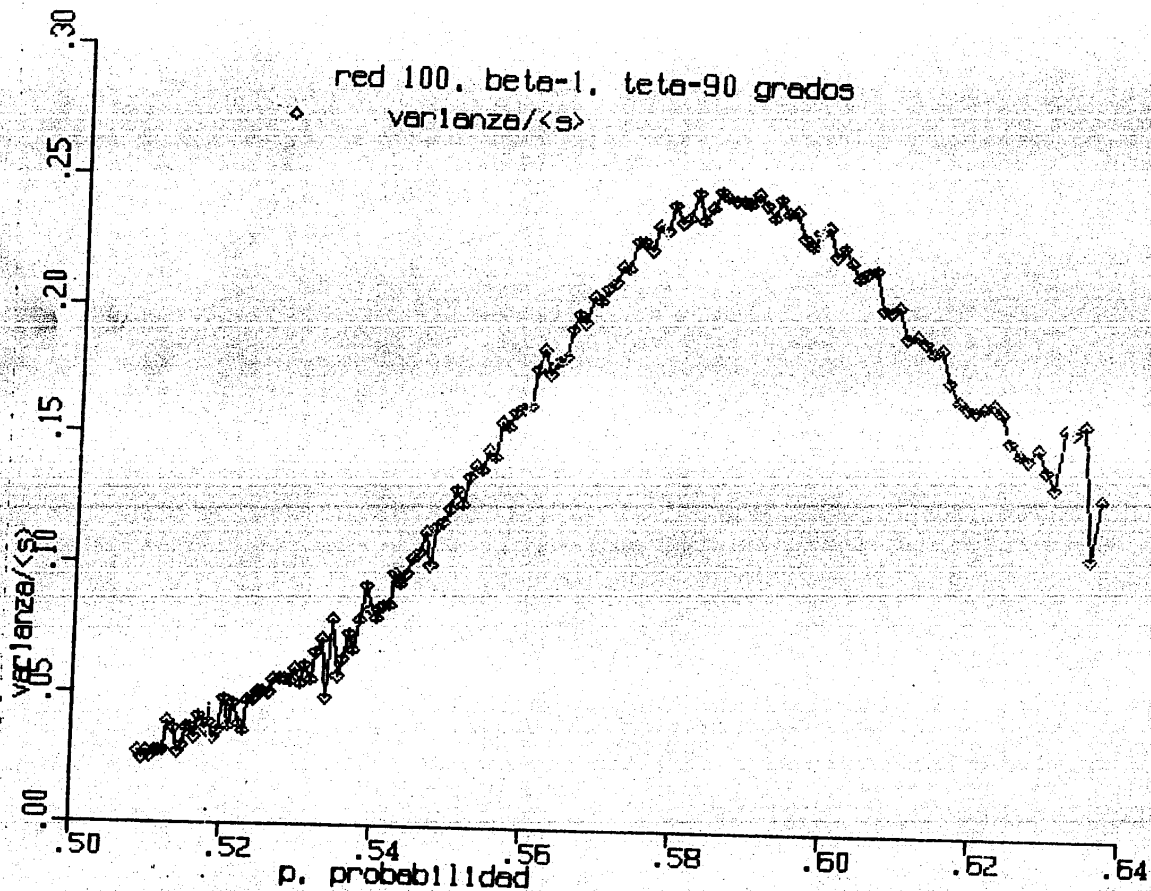
6/19



949



64c

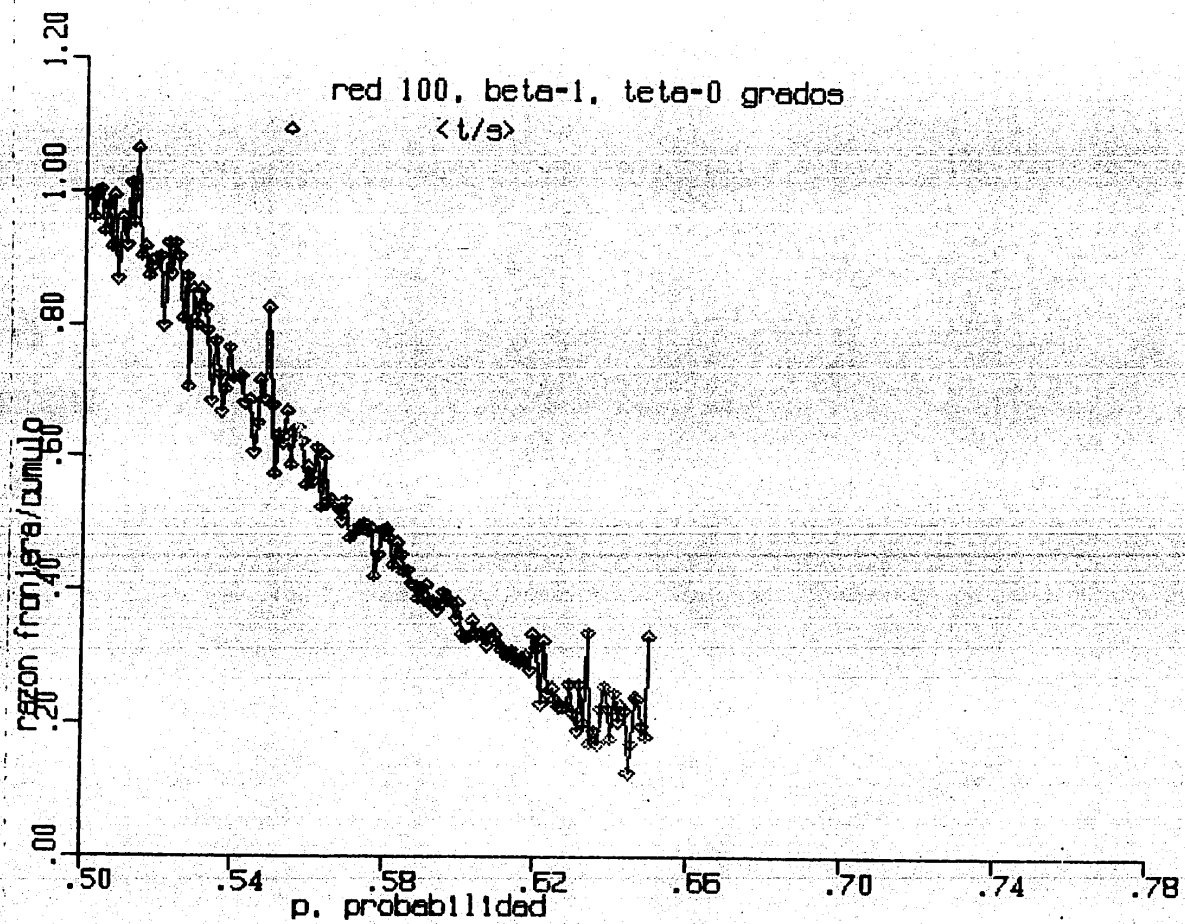


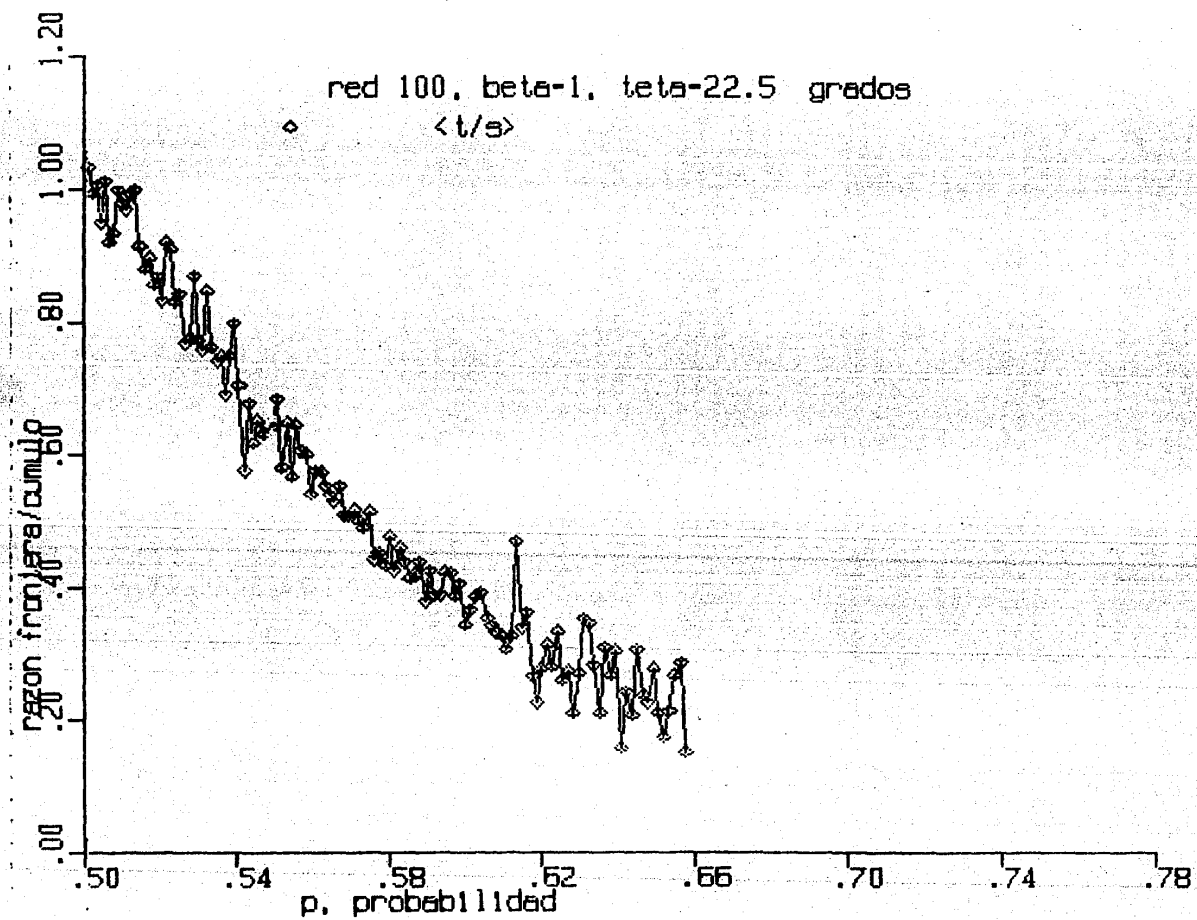


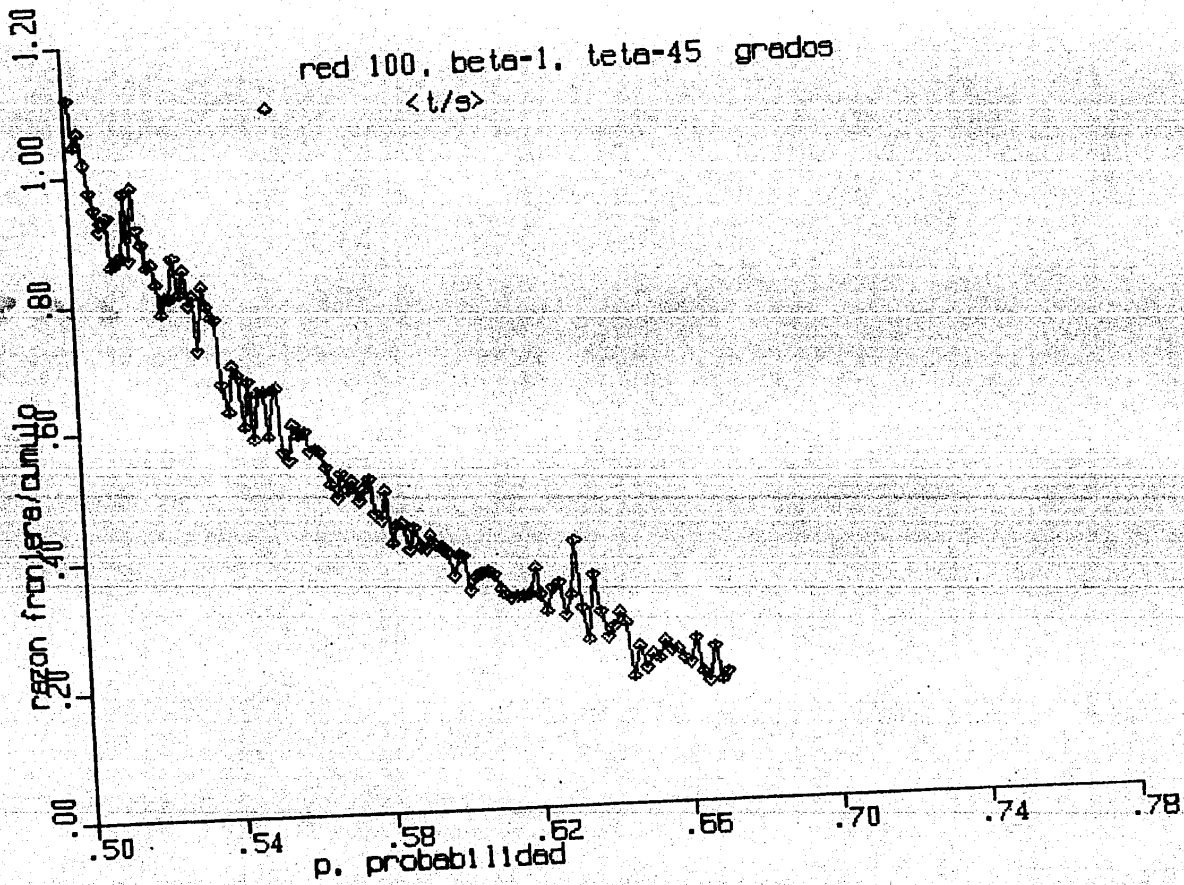
$J=0$ ,  $J=H/2$ ,  $J=H$ ,  $J=2H$  y  $H=0$ . Se observa que los máximos para las distintas curvas están aproximadamente al mismo valor de  $p^*$ . La diferencia entre las curvas extremas, esto es,  $J=0$  y  $H$  variable a  $H=0$  y  $J$  variable, es de menos de 0.01 en la probabilidad lo que representa poco menos de 1%.

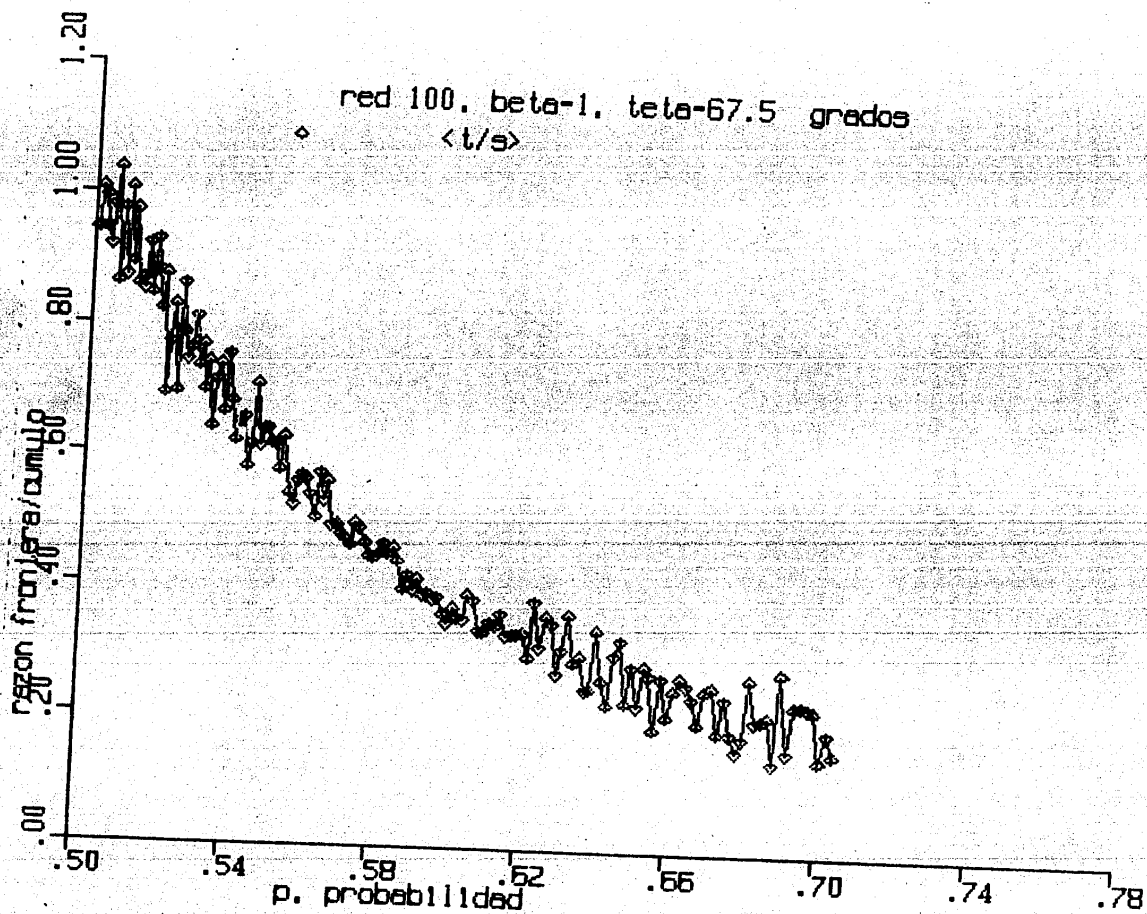
Hemos calculado para cada cúmulo crecido la razón de frontera a cúmulo y se observa que independientemente de los valores de  $H$  y  $J$  estas curvas siguen un comportamiento muy semejante. De hecho las gráficas se coinciden casi completamente unas con otras. Nuevamente las gráficas presentadas son para valores de  $H$  y  $J$  sobre las rectas  $J=0$ ,  $J=H/2$ ,  $J=H$ ,  $J=2H$ ,  $H=0$ . Las curvas tienen un comportamiento descendente, ello se debe a que para  $p^*=0.5$ , crecen pocos cúmulos grandes y las fronteras son del mismo orden que el cúmulo, de ahí que  $\langle t/s \rangle$  valga aproximadamente 1. Eventualmente  $\langle t/s \rangle$  valdrá cero cuando  $p^*=1$  puesto que para ese valor de  $p^*$  es imposible que se creen fronteras. Las figuras 5.4 a 5.8 muestran lo anterior.

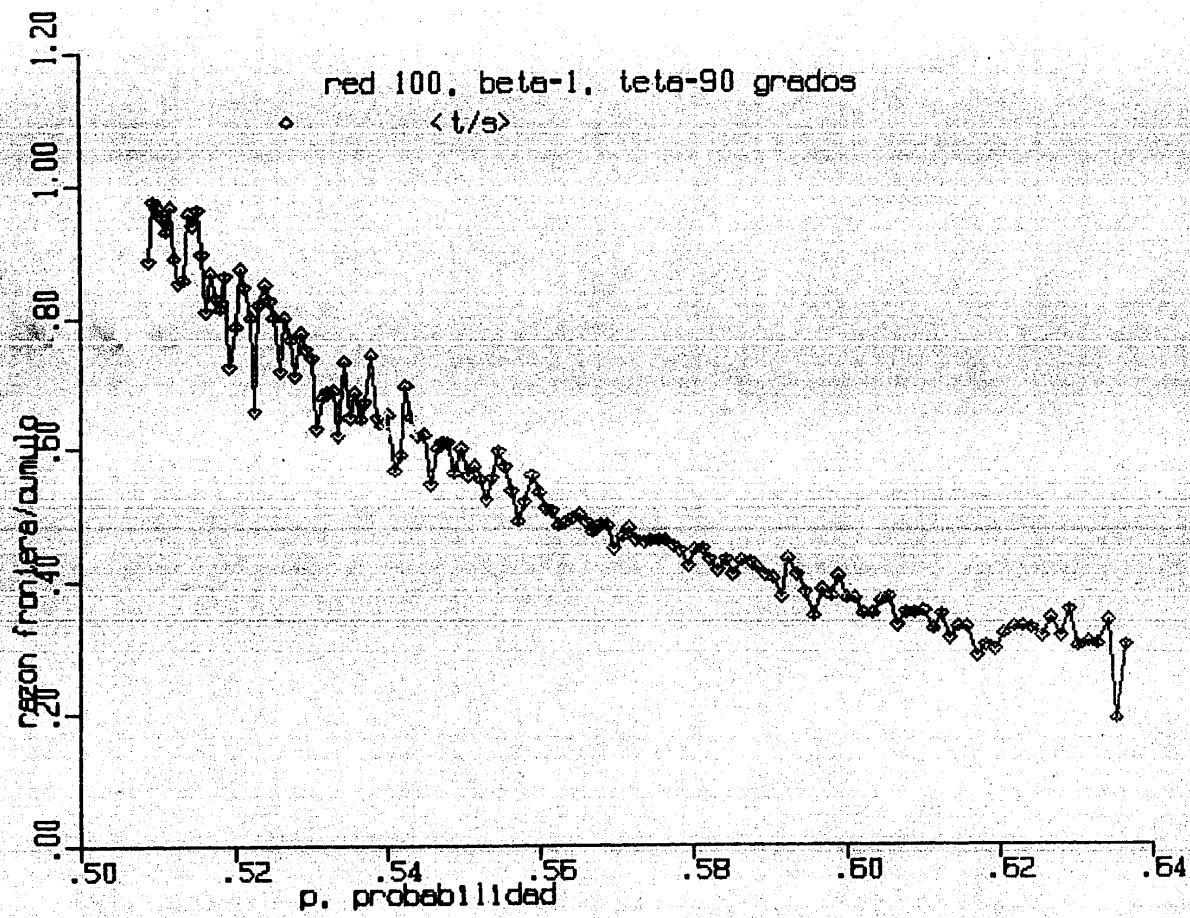
Por todo esto podemos decir que el modelo de crecimiento planteado puede mapearse conveniente a percolación aun para acoplamiento entre vecinos. Esto nos permite poder modelar la propagación de fractura de una falla sísmica como un aspecto puramente geométrico de la misma.











## CONCLUSIONES

Hemos visto que los modelos geofísicos de barreras [Aki, 1979], y el de asperezas [Kanamori, 1981], visualizan el rompimiento de una falla sísmica en base a propiedades geométricas: a grandes eventos corresponden geometrías complejas y eventos pequeños involucran geometrías más simples. El modelo de asperezas es capaz de reproducir los eventos anteriores al rompimiento de la falla tales como premonitores, aumento de la sismicidad de pequeña magnitud antes del evento principal y es por tanto más usado para simular los patrones sísmicos que conducen al rompimiento de la falla. El modelo de barrera enfatiza en la detención de la ruptura y los eventos subsiguientes y es por tanto más eficiente en predecir los eventos posteriores al evento principal tales como las réplicas. Estos modelos de alguna manera son complementarios en el sentido de que enfatizan aspectos diferentes del mismo fenómeno.

Los modelos de crecimiento por su misma naturaleza producen dominios geométricos. Hemos implementado un modelo de crecimiento que toma en cuenta algunos aspectos físicos de una falla sísmica como acoplamiento entre los vecinos y barreras de esfuerzo para simular la propagación de la ruptura sísmica.

Se ha construido una función estadística para encontrar los valores críticos de nuestros parámetros, es decir, aquellos valores para los cuales la fractura se propaga a toda la latiz produciéndose un gran evento sísmico.

Percolación es un modelo estático que define dominios

geométricos y que ha sido bastante estudiado. Con el objeto de poder utilizar los resultados de esta teoría se ha construido una función  $p^*$  que nos permite mapear algunos aspectos de nuestro modelo de crecimiento en el modelo de percolación.

En resumen hemos mostrado que las propiedades geométricas de los modelos geofísicos de barreras y asperezas pueden representarse en un modelo de crecimiento. Los modelos de crecimiento definen dominios geométricos y lo mismo sucede con teoría de percolación. En base a la función  $V_2$  de la estadística de los cúmulos crecidos, logramos determinar percolación ( $J=0$ ), con resultados bastante aceptables, sobre todo al considerar que se trabajó con redes finitas. Aún cuando las configuraciones de nuestro modelo de crecimiento dependen fuertemente de la historia hemos logrado mediante una probabilidad  $p^*$  mapear algunas características del mismo al modelo estático de percolación y con la misma función  $V_2$  encontramos que los valores críticos de  $p^*$  para las distintas curvas difieren en menos de 1% y la misma diferencia se observa entre el valor teórico de percolación y estas curvas.



REFERENCIAS.

Aki Keiiti, *Characterization of Barriers on an Earthquake Fault.* J. Geoph. Res. Vol.84, No. B11, 1979.

Aki, Keiiti. *Asperities, Barriers, Characteristic Earthquakes and Strong Motion Prediction.* J. Geophys. Res. Vol. 89, No. B7. pp. 5867-5872, 1984.

Bakun W. H., Stewart R.M., Bufe C.G. and Marks S.M. *Implication of Seismicity for Failure of a section of the San Andreas Fault.* Bull. Seism. Soc. Am. Vol. 70, No. 1, pp. 185-201, 1980

Burridge R. and Knopoff L. *Model and Theoretical Seismicity* Bull. Seism. Soc. Am. Vol. 57 pp. 341-371.

Das S. and Aki K. *Fault Plane with Barriers: A versatile Earthquake Model* J. Geophys. Res. Vol. 82, No 36 1977.

Eaton J. P., O'Neill M. E. Murdock J. N. *Aftershocks of the 1966 Parfield-Cholame California Earthquake: A Detailed Study.* Bull. Seism. Soc. Am. Vol 60 No. 4. pp. 1151-1197, 1970.

Gaunt D.S., Sykes M.F., Heather Ruskin. *Percolation Processes in d-dimensions.* J. Phys. A. Math. Gen. Vol. 9, No 11 1976.

Gradshteyn and Ryzhik *Tables of integral, Series and Products* Academic Press 1980.

Herrman H.J. *Growth: an introduction.* Eds. Stanley and Ostrowsky pp.3-20. 1986.

Herrman H.J. *Geometrical Cluster Growth models and Kinetic Gelation* Phys. Rep. Vol. 136, No.3, 1986.

Hoshen J. and Kopelman R. *Percolation and Cluster Distribution I. Cluster multiple labeling technique and critical Concentration algorithm.* Phys. Rev. B, Vol. 14 No. 8, 1976.

Hoshen J., Stauffer D., Bishop G.H., Harrison R.J. and Quinn G.D. *Monte Carlo Experiments on Cluster Size Distribution in Percolation.* J. Phys. A. Math. Gen. Vol 12, No. 8, 1979.

Kanamori H. and Anderson D. L. *Theoretical basis of some empirical relation in seismology* Bull. Seism. Soc. Am. Vol 65 No 5 pp. 1073-1095, 1975.

Kanamori H., Stewart G.S. *Seismological Aspects of the Guatemala Earthquake of February 4, 1976* J. Geophys. Res. Vol 85, No. B7, 1978

Kanamori H. *The Nature of Seismicity Patterns before large Earthquakes.* M. Ewing Ser. Vol 4. Am. Geophys. Union. 1981.

Lay T. and Kanamori H. *Earthquake doublets in the 1980 Solomon Islands.* Physics of the Earth and Planetary Int. Vol. 21 pp.283-304, 1980.

Lomnitz-Adler J. *Asperity Models and Characteristic Earthquakes* Geophys. J.R. astr. Soc. Vol 83 pp. 435-450, 1985.

Lomnitz-Adler J. *On the Magnitud-Frequency relation of asperity models.* Tectonophysics. Vol 120, pp. 133-140, 1980.

Lomnitz-Adler J. *The Statistical Dynamics of the Earthquake Process.* Bull. Seism. Soc. Am. Vol. 75, No 2, pp. 441-459, 1985.

Stauffer D. *Scaling Theory of Percolation Clusters.* Physics Rep. Vol 54. No 1, pp. 1-74, 1979

Sykes M.F., Gaunt D.S., Maureen Gleen. *Percolation Processes in three dimensions.* J. Phys. A. Math. Gen. Vol. 9, No. 10, 1976.

V.K.S. Shante and S. Kirkpatrick. *An Introduction to percolation theory.* Adv. Phys. Vol. 20, 325, 1970.

Wilson K.G. *Problemas Físicos con muchas escalas de longitud.* Invest. Ciencia No 37, 1979.