16

Zey

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE ECONOMIA

EL SISTEMA LINEAL DE GASTO Y LA TEORIA DE LA DEMANDA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN ECONOMIA

P R E S E N T A :

ANTONIO CARDENAS Y ALMAGRO

México, D. F. 1987

EL SISTEMA LINEAL DE GASTO Y LA TEORIA DE LA DEMANDA
(UNA EXPOSICIÓN)

INTRODUCCION

CAPITULO 1 TEORIA DE LA DEMANDA

1.1 TEORÍA DEL CONSUMIDOR. PREFERENCIAS Y UTILIDAD
1.1.1 PREFERENCIAS DEL CONSUMIDOR. AXIOMAS DE LA ELECCIÓN
1) AXIOMA DE REFLEXIVIDAD; 2) AXIOMA DE TRANSITIVIDAD; 3) AXIOMA DE COMPLETEZ; 4) AXIOMA DE CONTINUIDAD; 5) AXIOMA DE MONOTONICIDAD; 6) AXIOMA DE CONVEXIDAD
1.1.2 LA FUNCIÓN DE UTILIDAD. PROPIEDADES
1.1.3 PROPIEDADES DE DIFERENCIABILIDAD
1.1.4 SEPARABILIDAD DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD
A) SEPARABILIDAD DÉBIL; B) SEPARABILIDAD FUERTE
1.1.5 ADITIVIDAD DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD

1.2 LA RESTRICCIÓN PRESUPUESTAL
1.2.1 LÍNEA DEL PRESUPUESTO
1.2.2 DIFERENTES RESTRICCIONES PRESUPUESTALES

1.3 DERIVACIÓN DE LAS FUNCIONES DE DEMANDA
1.3.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA
1.3.2 MÉTODO DE SOLUCIÓN
A) LA FUNCIÓN AUXILIAR; B) CONDICIONES DE PRIMER ORDEN; C) CONDICIONES DE SEGUNDO ORDEN; D) CONDICIONES PARA UN MÁXIMO GLOBAL

1.4 LA DUALIDAD EN LA TEORÍA DEL CONSUMIDOR
1.4.1 EFECTOS INGRESO Y SUSTITUCIÓN DE UN CAMBIO EN PRECIOS
1.4.2 FUNCIÓN DE COSTO
1.4.3 EL LEMA DE SHEPHARD
1.4.4 FUNCIÓN INDIRECTA DE UTILIDAD
1.4.5 LA IDENTIDAD DE ROY
1.4.6 OTRAS RELACIONES
1.4.7 CONCLUSIONES

1.5 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE DEMANDA
1.5.1 ADITIVIDAD
A) AGREGACIÓN DE ENGEL; B) AGREGACIÓN DE COURNOT
1.5.2 HOMOGENEIDAD
1.5.3 SIMETRÍA
1.5.4 NEGATIVIDAD:

1.6 LA ECUACIÓN DE SLUTSKY

CAPITULO 2 EL SISTEMA LINEAL DE GASTO

2.1 Función de utilidad de Stone-Geary
2.1.1 Derivación de la función de utilidad de Stone-Geary
2.1.2 Propiedades de la función de Stone-Geary
2.1.3 Una transformación lineal de la función de utilidad

2.2 Sistemas de funciones de demanda
2.2.1 Demandas no compensadas
A) La función auxiliar; B) Condiciones de primer orden
2.2.2 Demandas compensadas
A) Planteamiento de la función auxiliar; B) Condiciones de primer orden

2.3 La dualidad en el Sistema Lineal de Gasto
2.3.1 Función de utilidad indirecta
2.3.2 Función de costo
2.3.3 Propiedades de la función de costo
2.3.4 La identidad de Roy
2.3.5 El lema de Shephard
2.3.6 Otras relaciones entre funciones

2.4 Propiedades de las demandas compensadas y no compensadas del SLG
2.4.1 Aditividad
A) Agregación de Engel; B) Agregación de Cournot
2.4.2 Homogeneidad
2.4.3 Simetría
2.4.4 Negatividad

CAPITULO 3 REVISION DE UNA APLICACION DEL SLG PARA MEXICO

3.1 El sistema de ecuaciones estimable

3.2 Supuestos y método de estimación

3.3 Una nota sobre los datos utilizados

3.4 Estimaciones del SLG

3.5 Las restricciones de la teoría

3.6 Capacidad predictiva del SLG

3.7 Comentarios finales

CONCLUSIONES

BIBLIOGRAFIA

Hasta finales del siglo XIX, el avance consistió en los desarrollos teóricos de los autores antes mencionados. No fué sino hasta finales del siglo diecinueve y principios del presente, que se empezaron a aplicar las técnicas del análisis estadístico de regresión en la estimación estadística de modelos teóricos, sobre todo a partir de las ideas de Marshall.

En su Revisión de la teoría de la demanda (Hicks, 1958), J. R. efectúa un replanteamiento de la teoría del consumidor, principalmente a partir de las ideas de Marshall, con el objeto de lograr un modelo analítico, consistente teóricamente, que permita estudiar las preferencias del consumidor desde el punto de vista econométrico.

Aunque han surgido nuevas ideas debidas a G. Debreu, H. Sonneschen, Deaton, Muellbauer y H. Theil, entre los más distinguidos, acerca de una teoría del comportamiento del consumidor que permita establecer modelos verificables con la econometría, el trabajo de Hicks sigue siendo fundamental en esta línea de análisis.

Con el objeto de estudiar la estructura del gasto, en la literatura reciente han aparecido modelos especificados como sistemas completos de funciones de demanda. Existen ensayos y libros de texto excelentes que sistematizan el desarrollo de este enfoque - véase por ejemplo, Brown y Deaton, 1973, Phlips, 1974 y Deaton, 1980. Todos los modelos utilizados cumplen con las restricciones de la teoría de la demanda del Consumidor. Estas restricciones son: aditividad, homogeneidad, simetría y no negatividad.

Una buena parte de estos sistemas de demanda utilizados en la literatura reciente se han derivado de funciones de utilidad directa. Por ejemplo, el Sistema Lineal de Gasto, SLG, (en inglés, Linear Expenditure System, o LES), desarrollado por Stone, se deriva de una función de utilidad directa conocida con [illegible] condición de Stone-Geary. Phlips, 1974, pg. 126, muestra como el sistema de demandas no compensadas conocido como LES, que cumple con las restricciones de la teoría de la Demanda, se deriva de la función de utilidad mencionada; o el modelo SAP, que también proviene de una función de utilidad. - véase García-Alba, 1986.

De igual manera, otros modelos se derivan aprovechando la dualidad de la teoría de la Demanda. Por ejemplo, el modelo ADDILOG se deriva de una función de utilidad indirecta sugerida por Houthakker (1960); otros como el Sistema de Demanda Casi Ideal -SDCI- (en inglés: Almost ideal demand system, AIDS; Deaton y Muellbauer, 1980) se derivan de una función de costo.

OTRA VERTIENTE IMPORTANTE EN LA DERIVACIÓN DE FORMAS ESTIMABLES CONSISTE EN EL USO DE UNA APROXIMACIÓN LINEAL A UNA FUNCION DE DEMANDA CON LA CONDICIÓN DE QUE CUMPLA CON LAS RESTRICCIONES DE LA TEORÍA DE LA DEMANDA ANTES MENCIONADAS. ESTO QUIERE DECIR QUE NO SE POSTULA NINGUNA FUNCIÓN DE UTILIDAD Y, POR LO TANTO, LOS SISTEMAS DE DEMANDA APROXIMADOS NO POSEEN NINGUNA PROPIEDAD QUE PROVENGA DE ESA FUNCIÓN.

EL EJEMPLO MÁS IMPORTANTE DE ESTA VERTIENTE ES EL MODELO DE ROTTERDAM, (VÉASE THEIL, 1975), EL CUAL SE DERIVA DE LAS FUNCIONES DE DEMANDA MISMAS MEDIANTE UNA APROXIMACIÓN LINEAL DE UNA FUNCIÓN NO LINEAL. ESTE MODELO PRESENTA ALGUNAS VENTAJAS: SE PUEDEN IMPONER SUCESIVAMENTE, CON EL OBJETO DE PROBARLAS, LAS RESTRICCIONES DE LA TEORÍA DE LA DEMANDA, Y SE PUEDEN PROBAR Y COMPARAR ALGUNAS OTRAS ESPECIFICACIONES DE FUNCIONES DE DEMANDA. POR EJEMPLO, EL MODELO ADDILOG Y EL MODELO LES SON MODELOS "ANIDADOS" 1/ EN EL MODELO DE ROTTERDAM.

EL MODELO DE ROTTERDAM Y EL MODELO SDCI, SON LOS ÚNICOS MODELOS DESARROLLADOS HASTA AHORA QUE PERMITEN LA ESTIMACIÓN SIMULTÁNEA DE LA MATRIZ DE SLUTSKY COMPLETA. ESTA ES OTRA VENTAJA DE ESTOS MODELOS. ADEMÁS, EXISTE LA POSIBILIDAD DE ESTIMAR LAS ELASTICIDADES-INGRESO Y ELASTICIDADES-PRECIO A PARTIR DE LOS COEFICIENTES ESTIMADOS.

1/ UN MODELO "ANIDADO" ES UNA ESPECIFICACIÓN PARTICULAR DE UN MODELO MÁS GENERAL QUE LO INCLUYE.

El presente trabajo tiene como objetivo fundamental una exposición de uno de los modelos para el análisis de la conducta del consumidor que han sido muy utilizados en las últimas tres décadas. Este modelo, conocido como el Sistema lineal de gasto, SLG, tiene su fundamento en la moderna teoría axiomática del Consumidor. Por esta razón, también se realiza una exposición de la teoría del Consumidor, con el objeto de resaltar la relación que existe entre la teoría y el modelo de análisis econométrico. Por último, se revisan los resutlados de una estimación del modelo con datos para México realizada por García Alba, 1986.

El trabajo está estructurado en tres capítulos. En el primero se desarrolla una exposición de la teoría axiomática de la demanda del Consumidor. En el segundo capítulo se expone uno de los modelos de ecuaciones de demanda más utilizados: el Sistema lineal de gasto, (SLG). Por último, en el tercer capítulo, se revisa una estimación del SLG para México y su consistencia con la teoría y el modelo desarrollados en los capítulos 1 y 2.

CAPITULO 1

TEORIA DE LA DEMANDA

1.1 TEORÍA DEL CONSUMIDOR. PREFERENCIAS Y UTILIDAD

1.1.1 PREFERENCIAS DEL CONSUMIDOR. AXIOMAS DE LA ELECCIÓN

EN LA TEORÍA NEOCLÁSICA, EL ESTUDIO DE LA CONDUCTA DEL CONSUMIDOR SE ENFOCA COMO UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN DE LA UTILIDAD, SUJETO AL INGRESO RECIBIDO. LA UTILIDAD ES UN INDICADOR HIPOTÉTICO QUE SIRVE COMO UN ÍNDICE ORDENADOR DE LAS PREFERENCIAS DEL CONSUMIDOR.

ESTAS PREFERENCIAS DEL CONSUMIDOR PUEDEN ORDENARSE DE ACUERDO A CRITERIOS MUY DIFERENTES, UNOS RACIONALES Y OTROS QUIZÁ EN APARIENCIA IRRACIONALES. PARA HACER POSIBLE UN ANÁLISIS ESTADÍSTICO, AUNQUE ES DESEABLE TOMAR EN CUENTA TODAS LAS PREFERENCIAS OBSERVABLES, SERÁ NECESARIO ESTABLECER UN MODELO CON SUPUESTOS. ESTOS SUPUESTOS PODRÍAN EXCLUIR ALGUNAS PREFERENCIAS OBSERVABLES EMPÍRICAMENTE.

Para establecer este modelo, en primer lugar, suponemos que las decisiones del consumidor están regidas por un sistema de preferencias definido por un conjunto de principios racionales o axiomas, denominados axiomas de la elección del consumidor.

En segundo lugar, las decisiones que el consumidor lleva a cabo tienen por objeto establecer la asignación de un ingreso, I, que se supone fijo, en la compra de un número finito de bienes. Cada uno de estos bienes puede definirse en un sentido muy amplio o muy limitado, de acuerdo a los objetivos del análisis. Pueden ser bienes agrupados o individuales; por ejemplo, cuando se habla de vestido, alimentación, habitación, etc. se tiene en mente una aplicación muy diferente que cuando se habla de carne, leche, autos, etc. La definición de bien deberá ser muy precisa de acuerdo a la aplicación del modelo al análisis.

En el desarrollo de este capítulo se adopta la siguiente definición de bien:

Un *bien* es un determinado producto o servicio entregado en un lugar y tiempo específicos.

PERO EL CONSUMIDOR NO ELIGE UN BIEN ÚNICO. SU PROBLEMA CONSISTE EN DECIDIR LA ASIGNACIÓN EN UN MOMENTO DADO DE SU INGRESO A LA COMPRA DE TODOS LOS SATISFACTORES, AGRUPADOS EN UNA CANASTA DE BIENES. LA CANASTA DE BIENES SE DEFINE DE LA SIGUIENTE MANERA:

CANASTA DE BIENES: ES EL CONJUNTO DE n CANTIDADES DE CADA BIEN, q_i, QUE UN CONSUMIDOR PUEDE ELEGIR.

ESTA CANASTA DE n BIENES LA REPRESENTAREMOS POR EL VECTOR q:

$$q = (q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)' \qquad (1.1.1)$$

ADEMÁS, SUPONEMOS QUE CADA BIEN ES PERFECTAMENTE DIVISIBLE. ESTE SUPUESTO IMPLICA LA SIGUIENTE RESTRICCIÓN:

$$q_j \geq 0 \qquad \text{PARA TODA } j = 1, 2, \ldots, n \qquad (1.1.2)$$

PARA EFECTUAR SU ELECCIÓN, EL CONSUMIDOR DEBE TOMAR EN CUENTA TODAS LAS POSIBLES OPCIONES DE CANASTAS DE BIENES A LAS QUE SE PODRÍA ENFRENTAR. SE DEFINE EL SIGUIENTE CONJUNTO:

ESPACIO DE BIENES: ES EL CONJUNTO C DE TODAS LAS POSIBLES CANASTAS DE BIENES, q^i, QUE EL CONSUMIDOR PODRÍA TOMAR EN CUENTA AL HACER LA ELECCIÓN.

EN NOTACIÓN DE CONJUNTOS, EL ESPACIO DE BIENES, C, SE DEFINE COMO:

$$C \qquad \{(q_j) \mid q_j \geq 0 \text{ PARA TODA } j=1,2,\ldots,n\} \quad (1.1.3)$$

SE UTILIZA LA CONVENCIÓN DE REPRESENTAR DIFERENTES CANASTAS DE BIENES CON SUPERÍNDICES, DE TAL MANERA QUE q^1 Y q^2 REPRESENTAN DOS CANASTAS DE BIENES EN EL ESPACIO DE BIENES C.

EL ESPACIO DE BIENES, C, DEBE CONTEMPLAR TODAS LAS POSIBILIDADES. ENTONCES, TAMBIÉN DEBERÁ AGRUPAR A TODAS AQUELLAS CANASTAS, QUE AUNQUE PODRÍAN NO SER SELECCIONADAS, SON POSIBLES Y COMPLETAN EL PANORAMA DE ELECCIÓN.

PARA ESTABLECER UN SISTEMA DE PREFERENCIAS QUE ES LA BASE DE LA ELECCIÓN DEL CONSUMIDOR, SE REQUIERE DE UNA RELACIÓN DE PREFERENCIA. PARA DEFINIR ESTA RELACIÓN, SE INTRODUCE LA SIGUIENTE NOTACIÓN:

$\succsim$ "SE PREFIERE O ES INDIFERENTE A" (PREFERENCIA DÉBIL).

ESTA ES UNA RELACIÓN DÉBIL PORQUE INTRODUCE LA POSIBILIDAD DE QUE DOS BIENES SEAN INDIFERENTES ENTRE SÍ, LO CUAL LES ASIGNA EL MISMO LUGAR EN EL ORDENAMIENTO DE PREFERENCIAS.

DE ACUERDO A LAS CONVENCIONES ANTERIORES, LA RELACIÓN $q^1 \succsim q^2$ SIGNIFICA "q^1 ES PREFERIDO O INDIFERENTE A q^2. TAMBIÉN SE PUEDE DECIR "q^1 ES AL MENOS TAN PREFERIDO COMO q^2".

SE DEFINE LA SIGUENTE RELACIÓN BINARIA ENTRE CUALESQUIERA DOS CANASTAS DE BIENES, q^1, q^2 DEL ESPACIO DE BIENES C:

$$q^1 \succsim q^2 \qquad (1.1.4)$$

SE DEFINEN TRES AXIOMAS SOBRE ESTA RELACIÓN DE PREFERENCIA, LOS CUALES SON:

1) REFLEXIVIDAD
2) TRANSITIVIDAD
3) COMPLETEZ

1) AXIOMA DE REFLEXIVIDAD: PARA TODA $q^i \in C$:

$$q^i \succsim q^i \qquad (1.1.5)$$

ESTE AXIOMA DICTA QUE CADA CANASTA DE BIENES ES AL MENOS TAN PREFERIDA COMO ELLA MISMA. AUNQUE NO TIENE UN SIGNIFICADO ECONÓMICO, ES MATEMÁTICAMENTE INDISPENSABLE PARA DEFINIR EL SISTEMA ORDENADOR DE PREFERENCIAS.

2) AXIOMA DE TRANSITIVIDAD: SI $q^1 \succsim q^2$ Y $q^2 \succsim q^3$

ENTONCES: $q^1 \succsim q^3$ (1.1.6)

ESTE AXIOMA ESPECIFICA UN COMPORTAMIENTO RACIONAL DEL CONSUMIDOR. POR EJEMPLO, SI UN INDIVIDUO PREFIERE CERVEZA AL VINO Y, POR OTRA PARTE, VINO EN LUGAR DE AGUA, PREFERIRÁ CERVEZA EN LUGAR DE AGUA SI SU SISTEMA DE ELECCIÓN ES RACIONAL. COMO SEÑALA PHLIPS, 1970, PG. 5, ESTE AXIOMA EXCLUYE DEL ANÁLISIS ALGUNAS RELACIONES DE PREFERENCIA QUE AUNQUE NO SON IRRACIONALES, PUDIERAN EXISTIR PERO NO PUEDEN TOMARSE EN CUENTA EN NUESTRO SISTEMA DE PREFERENCIAS.

UN EJEMPLO DE ESTAS RELACIONES ESTÁ DADO EN PEARCE, 1964, PG. 20: UN INVITADO, AL FINAL DE LA COMIDA TIENE QUE ELEGIR ENTRE UNA MANZANA GRANDE Y UNA CHICA. A PESAR DE QUE AÚN TIENE HAMBRE, POR CORTESÍA HACIA LOS DEMÁS COMENSALES, ESCOGE LA MANZANA PEQUEÑA. MÁS TARDE, TIENE UNA NUEVA POSIBILIDAD DE ELECCIÓN ENTRE UNA PERA GRANDE Y UNA MANZANA CHICA, QUEDÁNDOSE CON LA PERA GRANDE - PORQUE AUNQUE SE COMIÓ LA MANZANDA CHICA, QUERÍA LA GRANDE. FINALMENTE, AL OFRECÉRSELE UNA PERA Y UNA MANZANA GRANDES, ESCOGIÓ LA MANZANA - PORQUE LE GUSTAN MUCHO LAS MANZANAS.

EL EJEMPLO ANTERIOR REFLEJA UN COMPORTAMIENTO NORMAL DE UN CONSUMIDOR, PUES SU CONDUCTA OBSERVADA OBEDECE A RAZONES APARENTEMENTE RACIONALES. SIN EMBARGO, SI PRESENTAMOS ORDENADAS LAS DECISIONES TOMADAS POR ESTE COMENSAL SE PUEDE OBSERVAR UNA CONTRADICCIÓN EN LA ELECCIÓN:

PERA GRANDE > MANZANA CHICA

MANZANA GRANDE > PERA GRANDE

MANZANA CHICA > MANZANA GRANDE

PARA OBSERVAR LA TRANSITIVIDAD SE SUSTITUYEN LAS RELACIONES ANTERIORES:

MANZANA GRANDE>PERA GRANDE>MANZANA CHICA>MANZANA GRANDE

EN ESTA RELACIÓN SE PUEDE OBSERVAR LA FALTA DE TRANSITIVIDAD QUE SE MANIFIESTA POR UNA CONTRADICCIÓN EN EL ORDENAMIENTO DE PREFERENCIAS, PUES EL COMENSAL HA PREFERIDO UNA MANZANA GRANDE A UNA CHICA PERO TAMBIÉN PREFIERE UNA MANZANA CHICA A UNA GRANDE.

SU ELECCIÓN NO CONFORMA UN SISTEMA CONSISTENTE DE PREFERENCIA ¿PORQUÉ ELIGIÓ PRIMERO LA MANZANA CHICA SI AÚN TENÍA HAMBRE? LA EXPLICACIÓN NO SEÑALA UNA CONDUCTA IRRACIONAL, PUES LA PRIMERA VEZ SELECCIONÓ LA MANZANA CHICA POR CORTESÍA HACIA EL ANFITRIÓN. ESTA DELICADEZA FUE UN ELEMENTO IMPLÍCITO PERO DETERMINANTE EN LA DECISIÓN, QUE AL QUEDAR EXLCUIDA DEL ESPACIO DE BIENES, C, RESULTÓ EN UNA INCOSISTENCIA EN SU SISTEMA DE PREFERENCIAS.

ENTONCES, ES IMPERATIVO ESPECIFICAR DE MANERA CORRECTA EL CONJUNTO C DE TAL MODO QUE CADA CANASTA DE BIENES, q^1, CONTEMPLE EXPLÍCITAMENTE CADA POSIBLE COMPORTAMIENTO DETERMINANTE DE UNA ELECCIÓN.

3) AXIOMA DE COMPLETEZ: PARA CUALQUIER PAR DE BIENES $\in$ C:

$$q^1 \succsim q^2 \quad o \quad q^2 \succsim q^1 \qquad (1.1.7)$$

ESTE AXIOMA PROPONE QUE EL CONSUMIDOR ES CAPAZ DE JUZGAR ENTRE CUALESQUIERA DOS CANASTAS POSIBLES DE BIENES. DICHO DE OTRA MANERA, PROPONE QUE TODAS LAS CANASTAS CONSIDERADAS EN C SON COMPARABLES. CON ESTE AXIOMA SE ASEGURA QUE NO QUEDA NINGUNA OPCIÓN FUERA DEL ESPACIO DE BIENES; ES DECIR, SE ASEGURA QUE C ES COMPLETO.

A PARTIR DE LA RELACIÓN DEFINIDA EN (1.1.3), SE PUEDEN ESTABLECER OTRAS DOS RELACIONES DE PREFERENCIA. PARA EL EFECTO SE ADOPTAN LAS SIGUIENTES DEFINICIONES:

RELACIÓN DE PREFERENCIA ESTRICTA: SE DICE QUE UNA CANASTA q^1 SE PREFIERE ESTRICTAMENTE A UNA CANASTA q^2; ES DECIR, $q^1 \succ q^2$ SÍ Y SÓLO SI $q^1 \succsim q^2$ Y no $q^2 \succsim q^1$.

RELACIÓN DE INDIFERENCIA: SE DICE QUE UNA CANASTA Q^1 ES INDIFERENTE A UNA CANSTA q^2; ES DECIR:

$q^1 \sim q^2$ SÍ Y SÓLO SI $q^1 \succsim q^2$ Y $q^2 \succsim q^1$.

La relación de indiferencia requiere que las dos canastas sean tan buenas entre sí al mismo tiempo. Con esta relación se puede definir el conjunto indiferencia de una canasta, digamos q^1.

Dado que el conjunto espacio de bienes, C, se supone completo (axioma 3), también se pueden definir el conjunto preferencia, P_q1, el conjunto no preferencia, NP_q1 y el conjunto indiferencia I_q1:

$$P_q1 = [q \in C \mid q \succsim q^1] \qquad (1.1.8)$$

$$NP_q1 = [q \in C \mid q^1 \succsim q] \qquad (1.1.9)$$

$$I_q^1 = [q \in C \mid q \sim q^1] \qquad (1.1.10)$$

donde Iq^1 es el conjunto de todas las canastas del espacio de bienes que son indiferentes a q^1.

Con los elementos desarrollados hasta ahora podemos proponer un sistema ordenado de preferencias. Para esto, se establece la siguiente definición:

4) AXIOMA DE CONTINUIDAD: PARA PODER LLEGAR AL PUNTO QUE SE DESEA, ES NECESARIO SUPONER QUE EL ORDENAMIENTO DE PREFERENCIAS DEFINIDO ANTES ES CONTINUO. DE ESTA MANERA SE PODRÁN ESTABLECER LAS CONDICIONES TOPOLÓGICAS DEL ORDENAMIENTO DE PREFERENCIAS MÁS ADECUADAS; ADEMÁS, ESTE SUPUESTO TENDRÁ CONSECUENCIAS INTERESANTES EN EL ANÁLISIS DE LA UTILIDAD. A CONTINUACIÓN SE INTRODUCE EL AXIOMA DE CONTINUIDAD.

PARA TODA CANASTA $q^i \varepsilon$ C SE DEFINEN LOS SIGUIENTES CONJUNTOS:

$$A(q^i) = \{q^j \varepsilon C \mid q^j \succsim q^i\} \qquad (1.1.11)$$

EL CONJUNTO $A(q^i)$ ES EL CONJUNTO DE TODAS LAS CANASTAS DE BIENES QUE PERTENECEN AL ESPACIO DE BIENES Y QUE SON AL MENOS TAN PREFERIDOS COMO LA CANASTA q^i.

$$B(q^i) = \{q \varepsilon C \mid q^i \succsim q\} \qquad (1.1.12)$$

EL CONJUNTO $B(q^i)$ ES EL CONJUNTO DE TODAS LAS CANASTAS q QUE SON MENOS PREFERIDAS QUE LA CANASTA q^i.

EL CONJUNTO A ES EL CONTORNO SUPERIOR Y EL CONJUNTO B ES EL CONTORNO INFERIOR. EXISTEN TANTOS CONJUNTOS DE CONTORNO COMO CANASTAS EN C. EL AXIOMA DE CONTINUIDAD PROPONE QUE ESTOS DOS TIPOS DE CONJUNTOS SON CERRADOS EN RELACIÓN A C; ES DECIR, CONTIENEN SUS FRONTERAS, PARA CUALQUIER q^i Y q QUE PERTENECEN A C.

5) AXIOMA DE MONOTONICIDAD: CUANDO DOS CANASTAS DE BIENES, q^1 Y q^2 ϵ C SON TALES QUE q^1 DOMINA A q^2, ENTONCES q^1 SE PREFIERE A q^2.

POR ESTE AXIOMA SE SUPONE QUE EL CONSUMIDOR PREFERIRÁ UNA CANASTA RESPECTO A OTRA SI PREFIERE CADA UNO DE LOS BIENES QUE CONSTITUYEN DICHA CANASTA RESPECTO DE LOS BIENES DE LA OTRA. POR EJEMPLO, DEFINAMOS DOS CANASTAS:

$q^1 = (q^1{}_1, q^1{}_2)$ Y $q^2 = (q^2{}_1, q^2{}_2)$

SE DICE QUE q^1 DOMINA SI Y SÓLO SI:

$q^1{}_1 > q^2{}_1$ Y $q^1{}_2 > q^2{}_2$ (1.1.13)

PARA CUALQUIER $q \in C$.

EN ESTE EJEMPLO, LA CANASTA q^1 DOMINA PORQUE SUS COMPONENTES SE PREFIEREN A LOS DE q^2.

6) AXIOMA DE CONVEXIDAD: SE PIDE QUE EL ORDENAMIENTO DE PREFERENCIAS SEA CONVEXO. ESTE ORDENAMIENTO ES CONVEXO SI TODOS LOS CONJUNTOS DE CONTORNO SUPERIOR, $A(q^i)$, SON CONVEXOS. LA CONDICIÓN DE CONVEXIDAD SE CUMPLE SI PARA TODA a TAL QUE $0 \leq a \leq 1$, DADA LA RELACIÓN DE PREFERENCIA ENTRE CUALESQUIERA DOS CANASTAS:

$$\text{SI } q^2 \succsim q^1 \quad \text{ENTONCES} \quad aq^2 + (1-a)q^1 \succsim q^1 \qquad (1.1.14)$$

ESTE AXIOMA SUPONE QUE EL CONSUMIDOR RACIONAL PERCIBE QUE SI q^2 ES AL MENOS TAN PREFERIDO COMO q^1, ENTONCES, CUALQUIER COMBINACIÓN (LINEAL) DE AMBAS CANASTAS SERÁ AL MENOS TAN PREFERIDA COMO q^1.

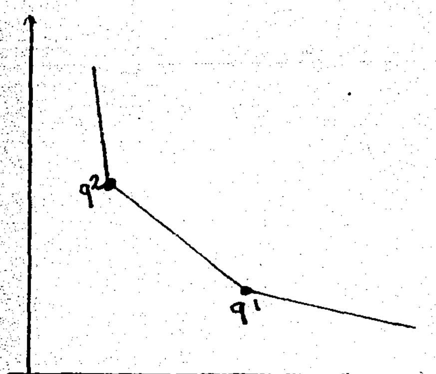
TAMBIÉN SE PUEDE IMPONER LA CONDICIÓN DE CONVEXIDAD ESTRICTA. ESTA SE DEFINE DE LA SIGUIENTE MANERA:

CONVEXIDAD ESTRICTA: PARA TODA r TAL QUE $0 \leq r \leq 1$, SI PARA CUALESQUIERA DOS CANASTAS q^1, q^1 SE CUMPLE:

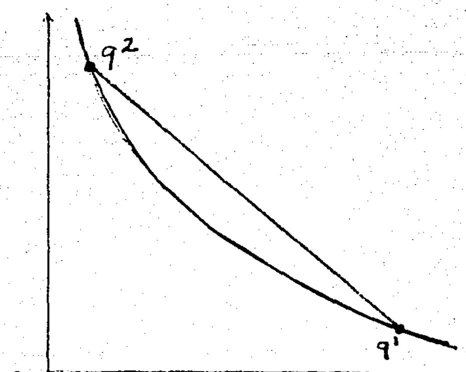
$$rq^2 + (1-r)q^1 > q^2 \qquad (1.1.15)$$

CUANDO $q^2 \sim q^1$

LA CONVEXIDAD Y LA CONVEXIDAD ESTRICTA SE PUEDEN ILUSTRAR EN UN ESPACIO DE DOS BIENES, q^1 Y q^1 CON LOS DIAGRAMAS SIGUIENTES:



CONVEXIDAD



CONVEXIDAD ESTRICTA

LA CONVEXIDAD ESTRICTA SEÑALA QUE SI q^1 Y q^2 SON INDIFERENTES PARA UN CONSUMIDOR, ESTE, SIN EMBARGO, PREFERIRÁ UNA COMBINACIÓN (LINEAL) DE AMBAS CANASTAS SOBRE CADA CANASTA POR SEPARADO.

La importancia de los axiomas 1 a 4 consiste en que Debreu, 1959, pg. 54-59 ha demostrado que si C es un espacio topológico conectado y separable y si se define un ordenamiento de preferencias continuo con la relación $\succsim$ sobre este espacio, entonces existe una función continua del espacio C en los reales. Además, los axiomas 4 y 5 tienen implicaciones en la función antes mencionada, como se verá en la siguiente sección.

1.1.2 La función de utilidad. Propiedades: De acuerdo a los planteamientos del apartado enterior, la aportación de Debreu que nos interesa es la función del espacio C en los reales. Para examinar esta aportación, se define siguiente la función:

Función de utilidad: Si C es un conjunto y $\succsim$ es una relación binaria en este conjunto. Entonces una función $u(\cdot)$ de C a los reales es una representación de la relación $\succsim$. Llamemos a $u(\cdot)$ una función de utilidad si para cualesquiera dos $q^i \in C$:

$$u(q^1) \geq u(q^2) \quad \Longleftrightarrow \quad q^1 \succsim q^2 \qquad (1.1.16)$$

ES IMPORTANTE NOTAR QUE LA PROPOSICIÓN ANTERIOR DEMOSTRADA POR DEBREU NO IMPLICA QUE LA FUNCIÓN $u(\cdot)$ SEA ÚNICA; CUALQUIER TRANSFORMACIÓN MONÓTONA DE $u(\cdot)$ TAMBIÉN SERÁ UNA FUNCIÓN DE UTILIDAD.

LA FUNCIÓN DE UTILIDAD DEBE CUMPLIR CON LAS PROPIEDADES DERIVADAS DE LA IMPOSICIÓN DE LOS AXIOMAS SOBRE LAS PREFERENCIAS DE LOS CONSUMIDORES. ESTOS AXIOMAS IMPLICAN QUE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD $u(\cdot)$ SERÁ UNA TRANSFORMACIÓN MONÓTONA CRECIENTE Y CUASI-CÓNCAVA.

LA INTRODUCCIÓN DEL AXIOMA DE MONOTONICIDAD A LA RELACIÓN DE PREFERENCIA ENTRE DOS CANASTAS IMPLICA UNA FUNCIÓN DE UTILIDAD MONÓTONA CRECIENTE; ESTO ES:

SI $q^1 \succ q^2$ ENTONCES $u(q^1) > u(q^2)$ (1.1.17)

LA IMPOSICIÓN DEL AXIOMA DE CONVEXIDAD IMPLICA LA PROPIEDAD DE QUE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD ES CUASI-CÓNCAVA.

FUNCIÓN CUASI-CÓNCAVA: UNA FUNCIÓN $u(\cdot)$ ES CUASI-CÓNCAVA SI PARA TODAS q^1, q^2 ϵ C Y PARA CUALQUIER r TAL QUE $0 \leq r \leq 1$, SE CUMPLE:

$$u(rq^1 + (1-r)q^2) \geq \min\,(u(q^1),\ u(q^2)) \qquad (1.1.18)$$

LA PROPIEDAD DE CUASI-CONCAVIDAD DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD SIGNIFICA QUE UN CONSUMIDOR RECIBIRÁ AL MENOS TANTA UTILIDAD POR UNA COMBINACIÓN (LINEAL) DE DOS CANASTAS, q^1, q^2 QUE LA MENOR DE LAS UTILIDADES QUE RECIBIRÍA POR SOLO UNA DE ELLAS, SI LAS PREFIERE POR SEPARADO.

ASÍ COMO LA CONVEXIDAD DE LAS PREFERENCIAS SIGNIFICA CUASI-CONCAVIDAD DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD, LA CONVEXIDAD ESTRICTA IMPLICA CUASI-CONCAVIDAD ESTRICTA DE $u(\cdot)$.

CONVEXIDAD ESTRICTA: UNA FUNCIÓN $u(\cdot)$ ES CUASI-CÓNCAVA ESTRICTA CUANDO PARA TODA r TAL QUE $0 \leq r \leq 1$, SE CUMPLE:

$$u(rq^1 + (1-r)q^2) > u(q^2) \qquad (1.1.19)$$

CUANDO $u(q^1) \geq u(q^2)$

1.1.3 Propiedades de diferenciabilidad En páginas anteriores se ha establecido la existencia de una función de utilidad a partir de un preordenamiento de preferencias. Sin embargo, para los fines de nuestra discusión sobre una función de demanda, esto no es suficiente.

Para estudiar los efectos de los cambios en los precios y en el ingreso, es necesario tener una función de demanda diferenciable. Lo anterior se logra al imponer condiciones de diferenciabilidad al ordenamiento de preferencias. Sin embargo, una revisión de estas condiciones supera el alcance de la presente discusión.

Pero la función de utilidad diferenciable deberá cumplir con las siguientes propiedades: (Barten y Bohm, 1982, pg. 303-304):

A) continua
B) monótona creciente
C) cuasi-cóncava estricta
D) con primera y segunda derivadas; estas deberán ser funciones continuas de q
E) Las primeras derivadas deberán ser positivas. Estas derivadas reciben el nombre de utilidades marginales

F) LA MATRIZ HESSIANA O DE SEGUNDAS DERIVADAS DEBE SER SIMÉTRICA Y NEGATIVA DEFINIDA. LA NEGATIVIDAD SE DERIVA DE SUPONER QUE LAS PREFERENCIAS SON ESTRICTAMENTE CONVEXAS; O TAMBIÉN, QUE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD ES ESTRICTAMENTE CUASI-CÓNCAVA. SE CONOCE COMO LA CONDICIÓN DE CUASI-CONCAVIDAD FUERTE.

1.1.4 SEPARABILIDAD: LA SEPARABILIDAD ES UNA PROPIEDAD MUY UTILIZADA EN LAS FUNCIONES DE UTILIDAD. ES MUY IMPORTANTE PORQUE TIENE CONSECUENCIAS FUNDAMENTALES EN LAS FUNCIONES DE DEMANDA QUE SE DERIVAN DE FUNCIONES DE UTILIDAD.

TAMBIÉN HA SIDO UTILIZADA EN LOS ORDENAMIENTOS DE PREFERENCIAS. SUPONGA QUE EL CONJUNTO C SE PUEDE PARTIR EN VARIOS SUBESPACIOS. CADA SUBESPACIO PUEDE CORRESPONDER A CANASTAS CON DIFERENTES FECHAS, LOCALIDADES, ETC.

LA SEPARABILIDAD IMPLICA QUE LAS PREFERENCIAS POR LAS CANASTAS EN CADA SUBESPACIO SON INDEPENDIENTES DE LOS NIVELES DE COMPRA DE LAS CANASTAS QUE QUEDAN FUERA DEL RESPECTIVO SUBESPACIO. SE DICE ENTONCES QUE EL SUBESPACIO ES SEPARABLE.

EXISTEN DOS CONCEPTOS DIFERENTES DE SEPARABILIDAD: A) SEPARABILIDAD DÉBIL Y B) SEPARABILIDAD FUERTE.

A) SEPARABILIDAD DÉBIL: CUANDO LAS PREFERENCIAS SEPARABLES SE PUEDEN REPRESENTAR CON UNA FUNCIÓN DE UTILIDAD COMO LA SIGUIENTE:

$$u(q) = f(u_1(q_1),\ u_2(q_2), \ldots,\ u_n(q_n) \qquad (1.1.20)$$

DONDE $q = (q_1,\ q_2, \ldots,\ q_n)'$

SE DICE QUE LA SEPARABILIDAD ES DÉBIL.

B) SEPARABILIDAD FUERTE: CUANDO LAS PREFERENCIAS SEPARABLES PUEDEN REPRESENTAR CON UNA FUNCIÓN DE UTILIDAD COMO LA SIGUIENTE:

$$u(q) = f(u_1(q_1) + u_2(q_2) + \ldots + u_n(q_n) \qquad (1.1.21)$$

SE DICE QUE LA SEPARABILIDAD ES FUERTE O ADITIVA.

ESTE ÚLTIMO TIPO DE SEPARABILIDAD NOS CONDUCE A LA PROPIEDAD DE LA SECCIÓN SIGUIENTE:

1.1.5 ADITIVIDAD: CUANDO LA FUNCIÓN DE UTILIDAD ES SEPARABLE EN BIENES ELEMENTALES SE CONOCE COMO ADITIVIDAD DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD. ESTA ES UNA SITUACIÓN LÍMITE QUE TIENE IMPLICACIONES MUY RESTRICTIVAS, COMO SE VERÁ MÁS ADELANTE.

AUNQUE LAS IMPLICACIONES SE REFIEREN A LAS FUNCIONES DE DEMANDA DERIVADAS DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD, ESTAS SE COMENTARÁN A CONTINUACIÓN PARA PONER ÉNFASIS AL HECHO DE QUE LAS RESTRICCIONES PROVIENEN DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD.

LA PRIMERA IMPLICACIÓN ES QUE LOS EFECTOS-SUSTITUCIÓN CRUZADOS, s_{ij}, (VER SECCIÓN 1.4.1) SON:

A) TODOS POSITIVOS
B) TODOS NEGATIVOS CUANDO LOS BIENES i Y j SON BIENES INFERIORES
C) UNO POSITIVO CUANDO EL BIEN i O j ES EL ÚNICO BIEN SUPERIOR.

UNA SEGUNDA IMPLICACIÓN DE LA ADITIVIDAD CONSISTE EN QUE LA ELASTICIDAD-PRECIO DE LA DEMANDA DE CADA BIEN SE APROXIMA A UNA PROPORCIÓN DE LA ELASTICIDAD-INGRESO DEL MISMO BIEN. CUANDO SE UTILIZA UN SISTEMA DE DEMADA QUE PROVIENE DE UNA FUNCIÓN DE UTILIDAD ADITIVA, ESTA IMPLICACIÓN ES EMPÍRICAMENTE MUY RESTRICTIVA.

UNA TERCERA CONSISTE EN QUE SI LA FUNCIÓN ES ADITIVA, LAS PARTICIPACIONES MARGINALES EN EL GASTO, β_i, SON:

A) TODAS POSITIVAS MENRORES QUE LA UNIDAD.

B) TODAS MENOS UNA SON NEGATIVAS; LA ÚNICA POSITIVA ES MAYOR QUE UNO.

LA PRUEBA DE ESTA PROPIEDAD SE ENCUENTRA EN BARTEN Y BOHM, PG. 424

LA ADITIVIDAD SE PUEDE CONFIRMAR SI LAS SIGUIENTES DERIVADAS CRUZADAS DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD SON CERO (VER PHLIPS, 1974, PG. 58).

SI DERIVAMOS LA FUNCIÓN DE UTILIDAD ADITIVA (1.1.21) CON RESPECTO A q_i:

$$\frac{\partial u(q)}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} F(\Sigma_i u_i(q_i)) = \frac{du_i(q_i)}{dq_i}$$

LA SEGUNDA DERIVADA CON RESPECTO A q_j ($i \neq j$) DE LA EXPRESIÓN ANTERIOR ES:

$$\frac{\partial^2}{\partial q_i\ \partial q_j} = \frac{d}{dq_j}\left(\frac{du_i(q_i)}{dq_j}\right) = 0 \qquad (1.2.22)$$

ESTE RESULTADO SIGNIFICA QUE LA ADITIVIDAD -SEPARABILIDAD FUERTE- DE BIENES ELEMENTALES IMPLICA INDEPENDENCIA DE LA UTILIDAD MARGINAL DEL BIEN i RESPECTO AL CONSUMO DEL BIEN j.

EL SUPUESTO DE ADITIVIDAD ES IMPORTANTE PORQUE EN ESTUDIOS EMPÍRICOS, COMO EN EL QUE SE REVISARÁ EN EL CAPÍTULO 3, SE UTILIZAN SISTEMAS DE DEMANDA DERIVADOS DE FUNCIONES DE UTILIDAD ADITIVAS.

DEATON Y MUELLBAUER, 1980, PG. 137-141 SEÑALAN LAS VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE LA ADITIVIDAD. ESTE ES UN SUPUESTO RAZONABLE CUANDO EL MODELO SE APLICA AL ESTUDIO DE LA DEMANDA DE BIENES AGRUPADOS, TALES COMO ALIMENTOS, VESTIDO O VIVIENDA; ES UN SUPUESTO INDEFENDIBLE CUANDO SE APLICA A BIENES MUY DESAGREGADOS, COMO CARNE DE RES O AUTOMÓVILES, PORQUE ELIMINA LA EXISTENCIA DE CUALQUIER RELACIÓN ENTRE LAS DEMANDAS DE CUALESQUIERA DOS BIENES CONSIDERADOS.

UNA VENTAJA DE LA RELACIÓN APROXIMADA DE LAS ELASTICIDADES-PRECIO Y LAS ELASTICIDADES-INGRESO DE CADA BIEN QUE RESULTAN DE LA ADITIVIDAD ES QUE SE PUEDEN OBTENER ESTIMACIONES DE LAS ELASTICIDADES-PRECIO PRÁCTICAMENTE SIN OBSERVACIONES SOBRE LOS CAMBIOS DE LOS PRECIOS. ESTO SUCEDE

CUANDO SE ESTIMAN FUNCIONES DE DEMANDA CON OBSERVACIONES DE CORTE TRANSVERSAL. SIN EMBARGO, LAS ESTIMACIONES TENDRÁN UN CARACTER TEÓRICO EN EL SENTIDO QUE SE "DEDUCEN" COMO RESULTADO DE UNA RESTRICCIÓN TEÓRICA.

UNA DESVENTAJA DEL SUPUESTO DE ADITIVIDAD ES QUE NO SE PUEDEN MODELAR DEMANDAS DE BIENES INFERIORES NI COMPLEMENTARIOS. LA ADITIVIDAD IMPONE UNA ESTRUCTURA TAL A LA MATRIZ DE SUSTITUCIÓN QUE SI ESTA HA DE SER NEGATIVA SEMIDEFINIDA, s_{ij} DEBEN SER TODOS POSITIVOS.

SI LA RELACIÓN DE COMPLEMENTARIEDAD DE DOS BIENES ESTA DADA POR EL SIGNO NEGATIVO DE s_{ij}, LOS SIGNOS COMPATIBLES CON LA PROPIEDAD DE NEGATIVIDAD EXCLUYEN ESTE TIPO DE BIENES DEL PROCESO DE MODELAJE.

1.2 LA RESTRICCIÓN PRESUPUESTAL

DE ACUERDO CON EL PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA GENERAL DEL CONSUMIDOR QUE CONSISTE EN LA ELECCIÓN DE UNA CANASTA DE BIENES DE ACUERDO A LAS PREFERENCIAS Y AL INGRESO, EL OBJETIVO DE ESTA SECCIÓN ES DISCUTIR LAS RESTRICCIONES PRESUPUESTALES QUE ENFRENTA EL CONSUMIDOR.

LA RESTRICCIÓN PRESUPUESTAL MÁS ELEMENTAL IMPLICA QUE LA SUMA DE LAS CANTIDADES GASTADAS EN LA COMPRA DE UNA CANASTA DE BIENES NO PUEDE EXCEDER AL MONTO DEL INGRESO DEL CONSUMIDOR. ESTA RESTRICCIÓN TIENE DOS ELEMENTOS, LOS PRECIOS Y EL INGRESO DEL CONSUMIDOR.

EL PRIMER ELEMENTO DE ESTA RESTRICCIÓN PRESUPUESTAL ES EL PRECIO DE LA CANASTA DE BIENES. ESTE SE DENOTARÁ POR EL SIGUIENTE VECTOR:

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)' \qquad (1.2.1)$$

DONDE $p_1, p_2, \ldots, p_n$ SON LOS PRECIOS DE LOS BIENES $q_1, q_2, \ldots, q_n$ QUE COMPONEN LA CANASTA q DEFINIDA EN LA SECCIÓN ANTERIOR.

El segundo elemento es el ingreso del consumidor, que se denotará con el escalar I.

Entonces, la restricción presupuestal se escribe como:

$$I \geq p_i q_i \qquad (1.2.2)$$

Esta restricción reduce las posibilidades de elección del consumidor a un subespacio del espacio de bienes C definido en la sección 1.1.1. Este subespacio es el conjunto de oportunidades, Q y se define como sigue:

$$Q = \{q \text{ en } C \mid \text{para todo } p_i q_i \leq I\}$$

$$= \{q \text{ en } E^n \mid \text{para todo } p_i q_i \leq I, q \geq 0\} \qquad (1.2.3)$$

1.2.1 Línea del Presupuesto: La linea del presupuesto es la frontera de Q, cuando $I = p_i q_i$. Esta será una recta para n=2 y se representa en la figura 1.2.1. Para n=3 será un plano y en el caso general, n, un hiperplano.

En la figura 1.2.1, el área del triángulo AOB ilustra el conjunto de oportunidades. La línea del presupuesto es la recta

AB. LOS PUNTOS A Y B SE OBTIENEN A PARTIR DE LA SIGUIENTE ECUACIÓN:

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = 1 \qquad (1.2.4)$$

PARA A:

$$q_2 = 0 \text{ Y } q_1 = \frac{1}{p_1}$$

PARA B:

$$q_1 = 0 \text{ Y } q_2 = \frac{1}{p_2} \qquad (1.2.5)$$

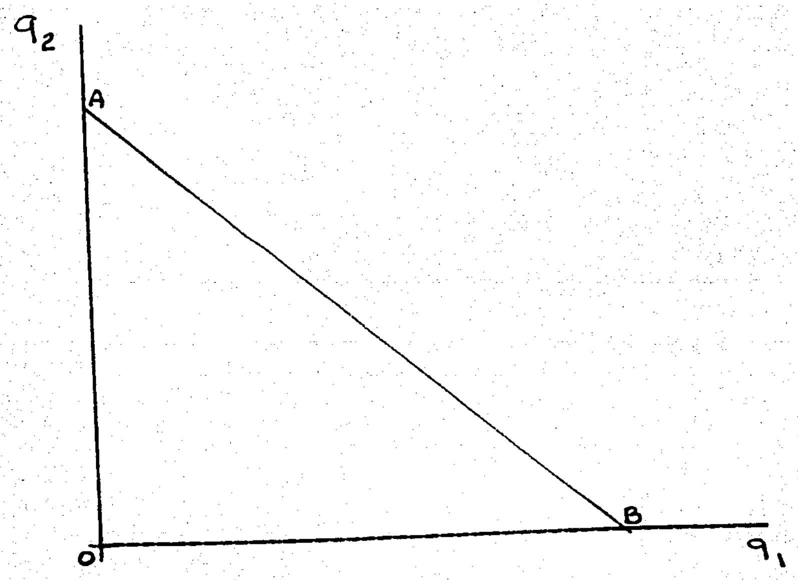


FIGURA 1.2.1

1.2.2 DIFERENTES RESTRICCIONES PRESUPUESTALES: SE PODRÍAN PLANTEAR COMPLICACIONES AL ANÁLISIS, COMO POR EJEMPLO, UN MÍNIMO DE SUBSISTENCIA. SUPONGAMOS QUE EL PUNTO C, CON COORDENADAS (q_1^m, q_2^m) REPRESENTA ESTE MÍNIMO. EL EFECTO QUE RESULTA ES LA REDUCCIÓN DEL CONJUNTO DE OPORTUNIDADES, Q. EN LA FIG. 2.2 SE ILUSTRA ESTE HECHO, DEL TRIÁNGULO AOB AL TRIÁNGULO DCE, DONDE TODOS LOS PUNTOS FUERA DEL ÚLTIMO TIENEN MENOS DE q_1, DE q_2 O MENOS DE LOS DOS QUE EL PUNTO MÍNIMO.

LA REINTERPRETACIÓN DE q_1 Y q_2 PERMITE UNA GRAN VARIEDAD DE APLICACIONES. POR EJEMPLO, SI q_1 ES OCIO Y q_2, ALGUNA CANASTA DE BIENES, LA RESTRICCIÓN LINEAL ESTARÍA REPRESENTANDO A UN CONSUMIDOR QUE TRABAJA POR UN SALARIO MONETARIO FIJO, SIN PERCIBIR OTROS INGRESOS; TAMPOCO PAGA IMPUESTOS SOBRE SU SALARIO. LA IDEA FUNDAMENTAL QUE ESTÁ ATRÁS DE ESTA INTERPRETACIÓN ES QUE EL CONSUMIDOR ELIGE ENTRE TRABAJAR Y OBTENER UNA CANASTA DE BIENES MÁS CUANTIOSA O TENER MÁS TIEMPO DE ESPARCIMIENTO. POR ESTO SE ESTABLECEN LOS SUPUESTOS SOBRE EL INGRESO, EL SALARIO Y LOS IMPUESTOS.

AUNQUE PUEDEN SUPONERSE RESTRICCIONES NO LINEALES AL PRESUPUESTO (VÉASE DEATON Y MUELLBAUER, 1980, PGS. 5-12), UNA GRAN CANTIDAD DE ESTUDIOS DE LA DEMANDA DEL CONSUMIDOR DESCANSAN

SOBRE UNA RESTRICCIÓN LINEAL SIMPLE DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$I = \Sigma p_i q_i \qquad (1.2.6)$$

LA DESIGUALDAD PRESENTE EN (1.2.2) SE JUSTIFICA SI EL CONSUMIDOR CONSIDERA QUE SIEMPRE EXISTE UN BIEN Q_i EN LA CANASTA q^J DEL QUE DESEA TENER MÁS QUE MENOS. CON LA RESTRICCIÓN (2.4) SE ELIMINAN LAS NO LINEALIDADES, INDIVISIBILIDADES, LAS INCERTIDUMBRES Y LA INTERDEPENDENCIA QUE QUE PUDIERAN PRESENTAR.

1.3 DERIVACIÓN DE LAS FUNCIONES DE DEMANDA

EN ESTA SECCIÓN SE DESARROLLA, A PARTIR DE LOS ELEMENTOS DE LAS SECCIONES ANTERIORES, LA DERIVACIÓN DE LAS FUNCIONES DE DEMANDA EN EL CONTEXTO DE LA TEORÍA NEOCLÁSICA DEL CONSUMIDOR.

PARA ESTA TEORÍA, LA DERIVACIÓN DE LAS DEMANDAS SE PLANTEA COMO UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN CLÁSICA, QUE CONSISTE EN MAXIMIZAR LA FUNCIÓN DE UTILIDAD DIRECTA SUJETA A UNA RESTRICCIÓN LINEAL DE PRESUPUESTO.

LA POSIBILIDAD DE PLANTEAR ESTE PROBLEMA ES UNA CONSECUENCIA DE SUPONER LAS PROPIEDADES DE DIFERENCIABILIDAD DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD.

1.3.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA: EL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN SE PLANTEA EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$\max u(q) \quad \text{SUJETA A } I = \Sigma_i p_i q_i \qquad (1.3.1)$$

DONDE $u(q)$ ES LA FUNCIÓN DE UTILIDAD DERIVADA DEL PREORDENAMIENTO OBTENIDO DE LOS AXIOMAS DEL CONSUMIDOR (VER SECCIÓN 1.1.1).

LA SOLUCIÓN DE (1.3.1) ES UN SISTEMA DE ECUACIONES CON LA SIGUIENTE FORMA GENERAL:

$$q_i = m_i(I, p) \qquad (1.3.2)$$

LAS FUNCIONES DE ESTE SISTEMA SE DENOMINAN FUNCIONES DE DEMANDA NO COMPENSADAS. EL ARGUMENTO DE ESTAS FUNCIONES LO COMPONEN LOS PRECIOS DE LOS DIFERENTES BIENES, p_i Y EL INGRESO, I. SE ABUNDARÁ SOBRE EL TEMA MÁS ADELANTE.

1.3.2 MÉTODO DE SOLUCIÓN: LA SOLUCIÓN MATEMÁTICA SE REDUCE AL PROBLEMA CLÁSICO EN CÁLCULO DE ENCONTRAR EL MÁXIMO RESTRINGIDO DE UNA FUNCIÓN. LOS PASOS A SEGUIR SON:

A) PLANTEAR LA FUNCIÓN AUXILIAR

B) ENCONTRAR LAS CONDICIONES NECESARIAS O DE PRIMER ORDEN PARA OBTENER UN MÁXIMO LOCAL

C) VERIFICAR LAS CONDICIONES DE SEGUNDO ORDEN PARA EL MÁXIMO LOCAL

D) VERIFICAR LAS CONDICIONES PARA UN MÁXIMO GLOBAL

A) LA FUNCIÓN AUXILIAR: PARA ENCONTRAR LAS CONDICIONES DE PRIMER ORDEN SE FORMA LA FUNCIÓN AUXILIAR SIGUIENTE:

$$L = u(q) - \lambda(\Sigma\, p_i q_i - 1) \qquad (1.3.3)$$

DONDE λ ES EL MULTIPLICADOR DE LAGRANGE. SE OBTIENEN LAS PRIMERAS DERIVADAS DE (1.3.3) CON RESPECTO A q_i Y λ Y SE IGUALAN A CERO. DE ESTA MANERA SE OBTIENEN n+1 ECUACIONES.

B) CONDICIONES DE PRIMER ORDEN: ESTAS ECUACIONES SON LAS CONDICIONES DE PRIMER ORDEN:

$$\frac{\partial u(q)}{\partial q_i} = \frac{\partial u(q)}{\partial q_i} - \lambda p_i = 0 \qquad (1.3.4)$$

$$\frac{\partial u(q)}{\lambda} = - \Sigma\, p_i q_i + 1 = 0$$

DESPEJANDO EL SISTEMA (1.3.4), OBTENEMOS EL SIGUIENTE SISTEMA:

$$\frac{\partial u(q)}{\partial q_i} = \lambda p_i \qquad (1.3.5)$$

$$\Sigma\, p_i q_i = I \qquad (i=1,\ldots,n)$$

LA SOLUCIÓN DEL SISTEMA (1.3.5) NOS DA n VALORES ÓPTIMOS DE q_i Y EL VALOR DEL MULTIPLICADOR DE LAGRANGE, λ. CADA UNO DE LOS VALORES DE EQUILIBRIO q_i APARECEN COMO FUNCIONES DE LOS PRECIOS p_i Y DEL INGRESO, I. ESTAS FUNCIONES SE CONOCEN COMO LAS FUNCIONES DE DEMANDA NO COMPENSADAS.

IGUALANDO LAS DERIVADAS DE u(q) CON RESPECTO A p_i, (1.2.3), SE OBTIENE LA CONDICIÓN DE EQUILIBRIO CUANDO SE OPTIMIZA LA UTILIDAD, LA CUAL SE EXPRESA DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$\frac{\partial u(q)}{\partial p_1} = \frac{\partial u(q)}{\partial p_2} = \ldots = \frac{\partial u(q)}{\partial p_n} = \lambda \qquad (1.3.6)$$

Y TAMBIÉN:

$$\frac{\partial u/\partial q_i}{\partial u/\partial q_j} = \frac{p_i}{p_j} \qquad (1.3.7)$$

EN EL CONTEXTO DE LA UTILIDAD ORDINAL, LA RAZÓN DEL MIEMBRO IZQUIERDO DE (1.3.4) SE INTEPRETA COMO LA TASA MARGINAL DE SUSTITUCIÓN DEL BIEN i POR EL BIEN j. ESTA EXPRESIÓN APUNTA EL RESULTADO BIEN CONOCIDO DE QUE EN EL EQUILIBRIO DEL CONSUMIDOR, LOS PRECIOS RELATIVOS SE IGUALAN CON LA TASA MARGINAL DE SUSTITUCIÓN.

EL MULTIPLICADOR DE LAGRANGE, λ, APARECE COMO UN FACTOR DE PROPORCIONALIDAD EN LAS PRIMERAS n ECUACIONES (1.3.5). COMO p_i ES UNA CONSTANTE EN NUESTRO ANÁLISIS, λ SE PUEDE ESCRIBIR COMO:

$$\frac{\partial u(q)}{\partial p_i p_j} = \lambda \qquad (3.8)$$

EL PRODUCTO $p_i p_j$ ES EL GASTO EN EL BIEN j: EL MULTIPLICADOR DE LAGRANGE, λ SE INTERPRETA COMO EL CAMBIO EN LA UTILIDAD DE EQUILIBRIO COMO RESPUESTA A UN CAMBIO EN EL INGRESO.

C) CONDICIONES DE SEGUNDO ORDEN: PARA LAS CONDICIONES DE SEGUNDO ORDEN SE DEBEN TENER PRESENTES LAS SIGUIENTES DEFINICIONES:

HESSIANO: ES LA MATRIZ DE LAS SEGUNDAS DERIVADAS PARCIALES DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD, $u(q)$. ESTA MATRIZ ES SIMÉTRICA (VER PROPIEDAD 3, SECCIÓN 2.1). SI:

$$u_{jj} = \frac{\partial^2 u(q)}{\partial q_j^2}$$

$$u_{ij} = \frac{\partial^2 u(q)}{\partial q_i \partial q_j} \qquad (1.3.9)$$

EL *HESSIANO* LO REPRESENTAMOS CON LA MATRIZ SIGUIENTE:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \cdots\cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} \cdots\cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} \cdots\cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \qquad (1.3.10)$$

EL *HESSIANO BORDEADO* SE DEFINE COMO LA MATRIZ SIGUIENTE:

$$U' = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & p_2 & \cdots\cdots & p_n \\ p_1 & u_{11} & u_{12} & \cdots\cdots & u_{1n} \\ p_2 & u_{21} & u_{22} & \cdots\cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_n & u_{n1} & u_{n2} & \cdots\cdots & u_{nn} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & p \\ \hline p' & H \end{array}\right] \qquad (1.3.11)$$

DONDE P ES EL VECTOR DE PRECIOS.

MENORES PRINCIPALES: SON LOS DETERMINANTES QUE RESULTAN DE ELIMINAR LA ÚLTIMA COLUMNA Y FILA DEL HESSIANO BORDEADO.

LAS CONDICIONES DE SEGUNDO ORDEN PARA LA EXISTENCIA DE UN MÁXIMO LOCAL SON LAS SIGUIENTES: EL *HESSIANO HORLADO* DEBE SER NEGATIVO DEFINIDO. ESTO ES, EL DETERMINANTE DEL HESSIANO DEBE TENER EL SIGNO $(-1)^n$ DONDE n ES EL NÚMERO DE VARIABLES. EL MENOR PRINCIPAL DEBE TENER SIGNO OPUESTO Y LOS MENORES PRINCIPALES DE ORDENES SUCESIVAMENTE MÁS PEQUEÑOS DEBEN ALTERNAR EL SIGNO HASTA EL MENOR DE ORDEN 2.

D) CONDICIONES PARA UN MÁXIMO GLOBAL: UNA VEZ OBTENIDO EL MÁXIMO LOCAL, SE BUSCA QUE ESTE SEA ABSOLUTO, ES DECIR UN

MÁXIMO GLOBAL. LAS CONDICIONES PARA QUE UN MÁXIMO LOCAL SEA UN MÁXIMO GLOBAL, DE ACUERDO AL TEOREMA LOCAL-GLOBAL (VÉASE INTRILLIGATOR, 1971, PG. 12-19) SON:

I) $u(q)$ SEA UNA FUNCIÓN CÓNCAVA

II) EL CONJUNTO DE OPORTUNIDADES, Q, DEBE SER UN CONJUNTO CONVEXO

SI $u(q)$ ES ESTRICTAMENTE CÓNCAVA SOBRE UN CONJUNTO FACTIBLE QUE SEA CONVEXO, EL MÁXIMO GLOBAL SERÁ ÚNICO. SIN EMBARGO, LOS AXIOMAS ESTABLECIDOS EN LA SECCIÓN 2.1 NO IMPLICAN LA CONCAVIDAD ESTRICTA DE $u(q)$. EL AXIOMA DE CONVEXIDAD SOLO GARANTIZA QUE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD SEA CUASI-CÓNCAVA.

PHLIPS, 1974, PG. 25, SEÑALA QUE CUALQUIER FUNCIÓN $u(q)$ CUASI-CÓNCAVA QUE SEA UNA FUNCIÓN CRECIENTE DE TODOS LOS ELEMENTOS DE q_i PUEDE EXPRESARSE COMO UNA TRANSFORMACIÓN MONÓTONA CRECIENTE DE ALGUNA FUNCIÓN CÓNCAVA. ENTONCES, TODAS LAS FUNCIONES DE UTILIDAD QUE CONCUERDAN CON LOS AXIOMAS DE LA ELECCIÓN SON TRANSFORMACIONES MONÓTONAS CRECIENTES DE ALGUNA FUNCIÓN DE UTILIDAD CÓNCAVA. EN CONSECUENCIA, AL APLICAR EL TEOREMA ANTERIOR A NUESTRA FUNCIÓN DE UTILIDAD YA DEFINIDA, CUALQUIER MÁXIMO LOCAL TAMBIÉN ES UN MÁXIMO GLOBAL.

A CONTINUACIÓN SE ILUSTRA EL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN CON LA ELECCIÓN ENTRE DOS BIENES, q_1 Y q_2. SE REPRESENTAN EN UN CUADRANTE, SEÑALÁNDOSE EL CONJUNTO DE OPORTUNIDADES, Q, Y LA NATURALEZA DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD POR MEDIO DE LÍNEAS DE CONTORNO Y LA DIRECCIÓN DE LA PREFERENCIA.

LÍNEA DE CONTORNO DE LA FUNCIÓN OBJETIVO: ES EL CONJUNTO DE TODOS LOS PUNTOS EN EL ESPACIO EUCLIDIANO E^2 TALES QUE $u(q)$ ES CONSTANTE.

MAPA DE CONTORNO: EL CONJUNTO DE LÍNEAS DE CONTORNO ES EL *MAPA DE CONTORNO* QUE REFERIDO A LA FUNCIÓN DE UTILIDAD SE LLAMA MAPA DE INDIFERENCIA. EN ESTE CONTEXTO, LAS *LINEAS DE CONTORNO* SE LLAMAN *CURVAS DE INDIFERENCIA*.

UNA CONSECUENCIA INTERESANTE DE LA PROPIEDAD DE CUASI-CONCAVIDAD DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD ES QUE LAS CURVAS DE INDIFERENCIA SON CONVEXAS POR EL ORIGEN.

DIRECCIÓN DE LA PREFERENCIA: ES LA DIRECCIÓN EN LA CUAL EL VALOR DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD SE INCREMENTA MÁS RÁPIDO. ESTA DIRECCIÓN DE LA PREFERENCIA ESTÁ DADA POR LA DIRECCIÓN DEL VECTOR GRADIENTE DE LAS PRIMERAS DERIVADAS DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD.

$$\frac{\partial u}{\partial q} = \left(\frac{\partial u}{\partial q_1} \frac{\partial u}{\partial q_2} \frac{\partial u}{\partial q_n}\right)' \qquad (1.3.12)$$

GEOMÉTRICAMENTE, LA SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN ES LA ELECCIÓN DE UN PUNTO O CONJUNTO DE PUNTOS EN EL CONJUNTO OPORTUNIDAD EN EL CUAL SE OBTIENE LA CURVA DE INDIFERENCIA MÁS ALTA EN LA DIRECCIÓN DE LA PREFERENCIA. SE ILUSTRA CON LA SIGUIENTE FIGURA:

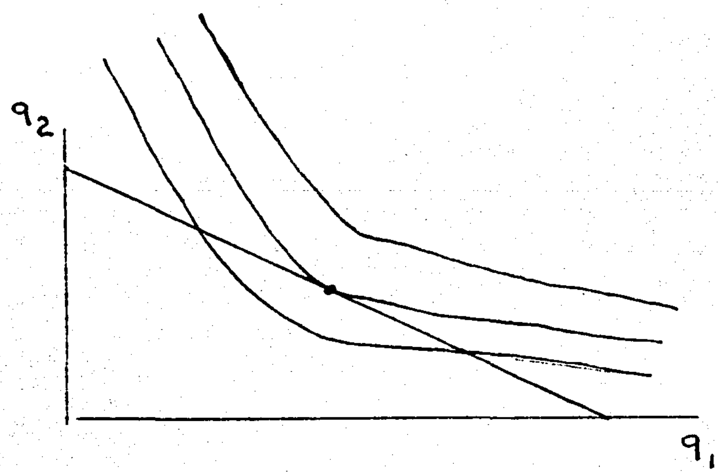


FIGURA 1.3.1

1.4 La Dualidad en la teoría del Consumidor

En esta sección se presenta el panorama completo de relaciones en la dualidad del consumidor. Estas relaciones son entre las funciones de demanda, compensadas y no compensadas, la función de costo y la función de utilidad indirecta. La figura 1.4.1 resume estas relaciones. Las flechas indican el sentido de la relación.

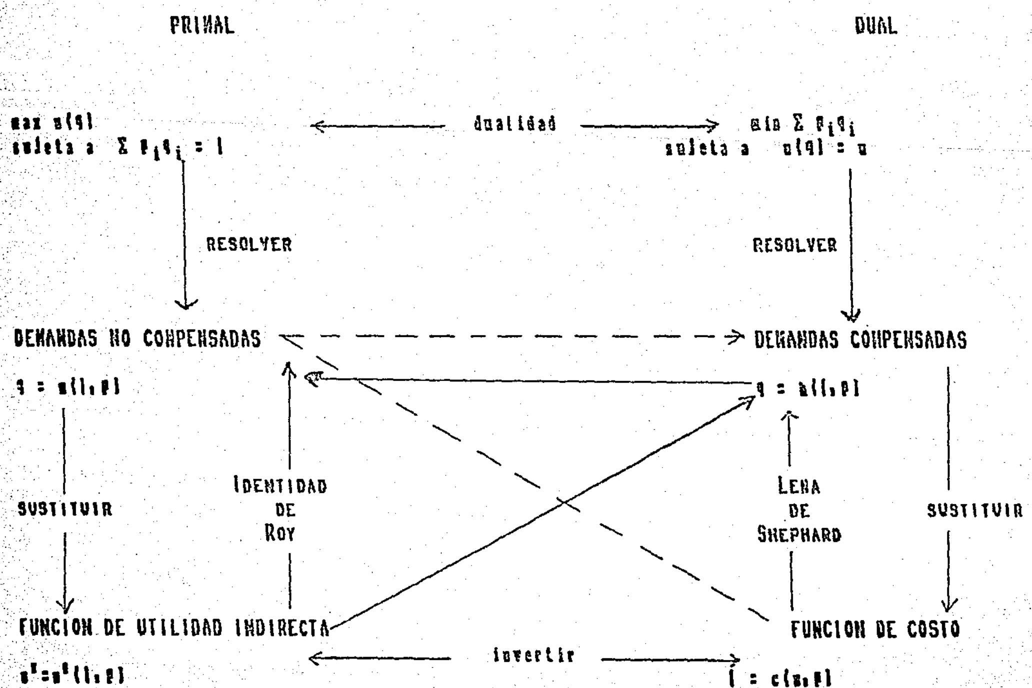


FIGURA 1.4.1 DUALIDAD

COMO SE HA VISTO EN LA SECCIÓN ANTERIOR, LA TEORÍA NEOCLÁSICA DEL CONSUMIDOR TRATA EL PROBLEMA DE LA DEMANDA COMO UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN. ENTONCES TAMBIÉN SE PUEDE ABORDAR PLANTEANDO EL DUAL DEL PROBLEMA DE MAXIMIZAR LA UTILIDAD. EL PROBLEMA PRIMAL DE LA SECCIÓN 2.3 ES:

$\max u(q)$ SUJETA A $I = \Sigma p_i q_i$

EL PROBLEMA DUAL CORRESPONDIENTE AL ANTERIOR ES:

$\min I = p_i q_i$ SUJETA A $u = u(q_i)$ (1.4.1)

EL ENFOQUE UTILIZADO EN LA SOLUCIÓN DE AMBOS PROBLEMAS ES EL DE LA TEORÍA DE LA PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA. EN LOS DOS PROBLEMAS SE BUSCA UN VECTOR ÓPTIMO DE CANTIDADES, q, ES DECIR, AQUÉL QUE MAXIMIZA LA UTILIDAD O EL QUE MINIMIZA EL GASTO. EL PRIMAL TIENE COMO SOLUCIÓN AL SISTEMA DE ECUACIONES DE DEMANDA *NO COMPENSADAS* (VER SECCIÓN 2.3), CON EL INGRESO, I, Y LOS PRECIOS, p_i COMO ARGUMENTOS. LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DUAL ES UN SISTEMA DE ECUACIONES QUE SE DENOMINAN FUNCIONES DE DEMANDA *COMPENSADAS*. ESTE NOMBRE LO RECIBEN PORQUE AL TENER COMO ARGUMENTO LA UTILIDAD Y LOS PRECIOS, SE PUEDEN ANALIZAR LOS EFECTOS DE CAMBIOS EN PRECIOS SOBRE LAS CANTIDADES DEMANDADAS MANTENIENDO CONSTANTE EL NIVEL DE UTILIDAD. ES DECIR,

COMPENSANDO LA PÉRDIDA DE UTILIDAD ORIGINADA POR EL EFECTO TOTAL DEL CAMBIO EN LOS PRECIOS.

PARA ENTENDER MEJOR AL SISTEMA COMPENSADO, SE REVISA EN EL SIGUIENTE APARTADO EL EFECTO SOBRE LA DEMANDA DE UN CAMBIO EN PRECIOS.

1.4.1 EFECTOS INGRESO Y SUSTITUCIÓN DE UN CAMBIO EN PRECIOS:

PARA PROFUNDIZAR EN LA EXPLICACIÓN DE LA DIFERENCIA ENTRE LAS DEMANDAS NO COMPENSADAS Y LAS COMPENSADAS PRESENTAMOS EL ANÁLISIS DEL EFECTO DE UN CAMBIO EN UN PRECIO SOBRE LA CANTIDAD DEMANDADA. PARA ILUSTRAR SE UTILIZA UN EJEMPLO CON DOS BIENES. EN LA FIGURA 4.1 SE MUESTRA LA DESCOMPOSICIÓN DEL EFECTO TOTAL EN DOS EFECTOS: EL EFECTO INGRESO Y EL EFECTO SUSTITUCIÓN GLOBAL.

A CONTINUACIÓN SE REVISA LA ESTÁTICA COMPARADA DE UNA DISMINUCIÓN EN EL PRECIO p_2 PARA EL CASO DE LA DEMANDA DE DOS BIENES. EL PRECIO AUMENTA DE p_2 A p_2^*. EN LA NUEVA SITUACIÓN DE PRECIOS EL CONSUMIDOR PUEDE COMPRAR MENOS DEL BIEN q_2. LA LINEA DEL PRESUPUESTO SE DESPLAZA A LA IZQUIERDA.

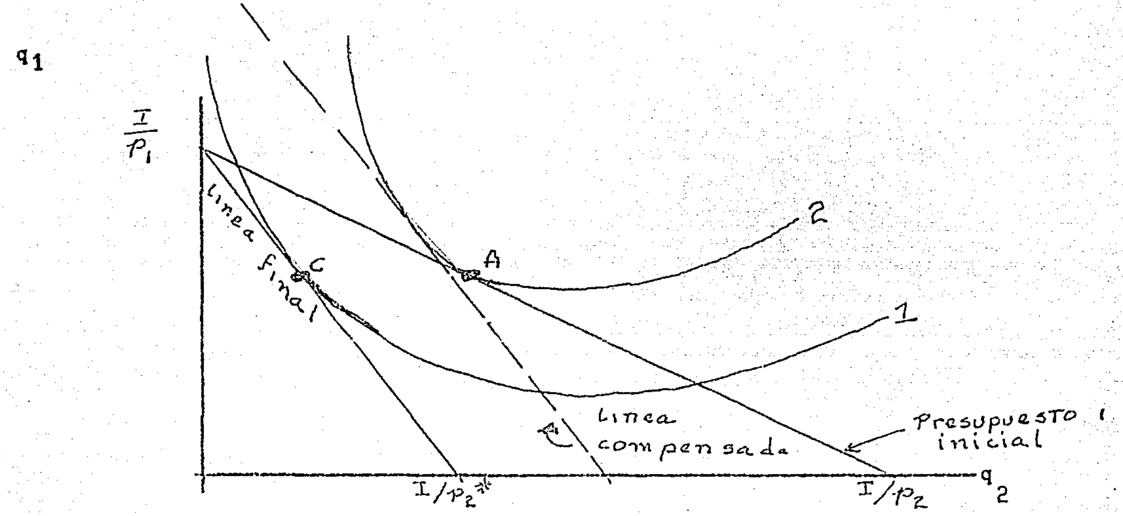


FIGURA 1.4.2 EFECTOS INGRESO Y SUSTITUCIÓN

EL ÓPTIMO DEL CONSUMIDOR CAMBIA DEL PUNTO A ORIGINAL AL PUNTO C, DONDE UNA CURVA DE INDIFERENCIA SE INTERSECTA CON LA NUEVA LINEA DEL PRESUPUESTO. LA PENDIENTE DE ESTA LINEA ESTA DADA POR:

$$- \frac{p_2^*}{p_2} \qquad (1.4.2)$$

EL EFECTO TOTAL ESTÁ DADO POR LA DISMINUCIÓN DEL GASTO ENTRE q_1 Y q_2 QUE IMPLICA PASAR DEL PUNTO A AL PUNTO C. PARA DISTINGUIR LOS EFECTOS INGRESO Y SUSTITUCIÓN SE PLANTEA LA SIGUIENTE PREGUNTA: ¿CUÁL SERÍA EL EFECTO DE UN SUBSIDIO AL CONSUMO QUE COMPENSE LA PÉRDIDA DE PODER ADQUISITIVO MENTENIENDO AL CONSUMIDOR EN EL MISMO NIVEL DE UTILIDAD?

UN AUMENTO EN EL INGRESO DESPLAZARÁ LA NUEVA LINEA DEL PRESUPUESTO HACIA LA DERECHA CON LA MISMA PENDIENTE, (1.4.2), GENERADO LA LINEA DEL PRESUPUESTO COMPENSADA (LA LINEA PUNTEADA DE LA FIGURA 1.4.2).

EL PUNTO DE EQUILIBRIO CORRESPONDIENTE SERÍA B. EL EFECTO SUSTITUCIÓN ES EL CAMBIO DE A A B, SUSTITUYENDO q_2 POR q_1 AL COMPRAR MENOS DEL PRIMERO Y MÁS DEL SEGUNDO. EL EFECTO INGRESO SE REPRESENTA POR EL CAMBIO DE B A C, AL COMPRAR MENOS DE AMBOS BIENES POR UNA DISMINUCIÓN EN EL INGRESO REAL.

SE PUEDE NOTAR QUE B SE LOCALIZA A LA IZQUIERDA DE A, LO CUAL ES CONSISTENTE CON EL RESULTADO GENERAL DE QUE EL EFECTO SUSTITUCIÓN ES NEGATIVO. ADEMÁS, EL BIEN q_1 ES UN BIEN SUPERIOR PUESTO QUE UNA DISMINUCIÓN EN EL INGRESO ORIGINA UNA DISMINUCIÓN EN SU DEMANDA (C SE LOCALIZA A LA IZQUIERDA DE B). ADEMÁS, q_2 ES UN BIEN NORMAL PUES AL CAMBIAR SU PRECIO, EL EFECTO TOTAL ES UNA DISMINUCIÓN EN LA DEMANDA (C SE LOCALIZA A LA IZQUIERDA DE A).

1.4.2 FUNCIÓN DE COSTO: OTRA FUNCIÓN ASOCIADA AL PROBLEMA DUAL DE LA MAXIMIZACIÓN DE LA UTILIDAD ES LA FUNCIÓN DE COSTO DEL CONSUMIDOR. ESTA FUNCIÓN SE PUEDE EXPRESAR DE LA SIGUIENTE FORMA GENERAL:

$$I = c(p,u) = \Sigma p_j h_j(p,u) \qquad (1.4.3)$$

DONDE $h_j(p,u)$ SON LAS FUNCIONES DE DEMANDA COMPENSADAS.
LA FUNCIÓN DE COSTO REPRESENTA EL COSTO MÍNIMO PARA EL CONSUMIDOR DE MANTENER SU GASTO CON EL MISMO NIVEL DE UTILIDAD.

DEATON Y MUELLBAUER, 1980, PG. 39-41, ENLISTAN CINCO PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE COSTO. ESTAS SON:

PROPIEDAD 1: LA FUNCIÓN DE COSTO ES HOMOGÉNEA DE GRADO UNO EN PRECIOS. PARA CUALQUIER ESCALAR $r>0$

$$c(rp,u) = rc(p,u) \qquad (1.4.4)$$

ESTA ES UNA CONSECUENCIA DIRECTA DE LA SOLUCIÓN DEL DUAL. SI LOS PRECIOS SE DOBLAN, SE NECESITA EL DOBLE DE q PARA PERMANECER SOBRE LA MISMA CURVA DE INDIFERENCIA.

PROPIEDAD 2: LA FUNCIÓN DE COSTO ES CRECIENTE EN u, NO-DECRECIENTE EN p Y AL MENOS CRECIENTE EN UNO DE LOS PRECIOS, p_j.

ESTA PROPIEDAD ES CONSECUENCIA DIRECTA DEL AXIOMA DE MONOTONICIDAD (SECCIÓN 2.1). ES CRECIENTE EN u PORQUE DADOS UNOS PRECIOS, EL CONSUMIDOR TIENE QUE GASTAR MÁS PARA MEJORAR (OBTENER UN NIVEL DE UTILIDAD MÁS ALTO). POR OTRA PARTE, ES NO DECRECIENTE EN p PORQUE SI AUMENTAN LOS PRECIOS, EL CONSUMIDOR TIENE QUE GASTAR MÁS PERO SOLO PARA CONSERVAR SU NIVEL DE UTILIDAD.

PROPIEDAD 3: LA FUNCIÓN DE COSTO ES CÓNCAVA EN PRECIOS.
LA CONCAVIDAD EN PRECIOS IMPLICA QUE SI LOS PRECIOS AUMENTAN, EL COSTO, CUANDO MÁS, AUMENTA LINEALMENTE. ESTO SE DEBE PRINCIPALMENTE A QUE EL CONSUMIDOR RACIONAL MINIMIZA EL GASTO ELIGIENDO LO QUE DEBE COMPRAR PARA SACAR EL MEJOR PARTIDO A LOS CAMBIOS EN PRECIOS.

SE DICE QUE UNA FUNCIÓN $f(z)$ DEFINIDA SOBRE UN VECTOR z ES UNA FUNCIÓN CÓNCAVA SI PARA CUALQUIER $0 \leq r \leq 1$ SE CUMPLE LO SIGUIENTE:

$$f[rz^1 + (1-r)z^2] \geq rf(z^1) + (1-r)f(z^2) \quad (1.4.5)$$

LOS MISMOS AUTORES APORTAN UNA PRUEBA DE ESTA PROPIEDAD. EL ARGUMENTO ES EL SIGUIENTE: SUPONGAMOS DOS VECTORES DE PRECIOS EN DOS MOMENTOS DIFERENTES, p^1 Y p^2; SUPONGAMOS UN TERCER PRECIO, p^3, TAL QUE:

$$p^3 = rp^1 + (1-r)p^2 \qquad (1.4.6)$$

SUPONGAMOS A q^3 COMO LA CANASTA DE BIENES ÓPTIMA CUANDO LOS PRECIOS SON p^3 Y EL NIVEL DE UTILIDAD ES u. ENTONCES, LA FUNCIÓN DE COSTO ES:

$$c(p^3,u) = \Sigma\, p^3{}_j q_j{}^3 = \Sigma\, q_j{}^3(rp_j{}^1 + (1-r) \qquad (1.4.7)$$

SABEMOS, POR LA DEFINICIÓN DE COSTO, QUE q^3 ES LA CANTIDAD ÓPTIMA PARA EL PRECIO p^3 PERO NO NECESARIAMENTE PARA p^2 Y p^1.

ENTONCES, LAS SIGUIENTES DESIGUALDADES SON VÁLIDAS:

$$c(p^1,u) \leq \Sigma\, p^1{}_i q^3{}_i$$

$$(1.4.8)$$

$$c(p^2,u) \leq \Sigma\, p^2{}_i q^3{}_i$$

Sustituyendo (1.4.8) en (1.4.7) resultan las siguientes dos posibilidades:

Una desigualdad en (1.4.8):

$$c(rp^1 + (1-r)p^2, u) > rc(p^1, u) + (1-r)c(p^2, u) \quad (1.4.9)$$

La igualdad en (1.4.8):

$$c(rp^1 + (1-r)p^2, u) = rc(p^1, u) + (1-r)c(p^2, u)$$

Las dos relaciones anteriores implican la condición de concavidad de la función de costo:

$$c(rp^1 + (1-r)p^2, u) = rc(p^1, u) + (1-r)c(p^2, u) \quad (1.4.10)$$

Esta prueba no depende de la convexidad del sistema de preferencias sino de la definición de la función de costo. Por lo tanto, la función de costo es cóncava para cualquier tipo de curva de indiferencia.

Propiedad 4: La función de costo es continua en p. Además, existen la primera y segunda derivadas con respecto al vector de precios, excepto posiblemente para un determinado conjunto de vectores de precios.

PROPIEDAD 5: CUANDO EXISTEN LAS DERIVADAS PARCIALES DE LA FUNCIÓN DE COSTO CON RESPECTO AL VECTOR DE PRECIOS, ESTAS SON LAS FUNCIONES DE DEMANDA COMPENSADA. ESTO ES:

$$\frac{\partial c(p,u)}{\partial_j} = h_j(p,u) = q_j \qquad (1.4.11)$$

1.4.3 EL LEMA DE SHEPHARD: LA PROPIEDAD (1.4.11) TAMBIÉN SE CONOCE COMO EL LEMA DE SHEPHARD Y ES DE VITAL IMPORTANCIA PORQUE CON SU USO SE PUEDE HACER EXPLÍCITO EL SISTEMA DE DEMANDAS NO COMPENSADAS QUE SUBYACE TRAS UNA DETERMINADA FUNCIÓN DE COSTO.

DEATON Y MUELLBAUER PROPORCIONAN LA SIGUIENTE PRUEBA DEL LEMA: SUPÓNGASE UN VECTOR DE PRECIOS ARBITRARIO, p^0 Y UN NIVEL DE UTILIDAD. AL MINIMIZAR COSTOS SE OBTIENE q^0. ADEMÁS, PARA CUALQUIER OTRO p SE DEFINE LA SIGUIENTE FUNCIÓN:

$$z(p) = \Sigma\, p_i q^0_{\ i} - c(p,u) \qquad (1.4.13)$$

EL COSTO DE q^0 A LOS PRECIOS p NO ES NECESARIAMENTE EL MÍNIMO PORQUE q^0 NO ES EL ÓPTIMO DADO p. ENTONCES, LA SIGUIENTE DESIGUALDAD ES VERDADERA:

$$c(p,u) \leq \sum p_i q^0_i \qquad (1.4.13)$$

ENTONCES: $z(p) > 0$

EL MÍNIMO DE $z(p)$ SE OBTIENE CUANDO:

$p = (p_i{}^0)'$ $(i=1,2,\ldots,n)$ ES DECIR:

$$z(p^0) = \sum p^0{}_i q^0{}_i - c(p,u) = 0 \qquad (1.4.14)$$

OBTENIENDO LAS PRIMERAS DERIVADAS DE (1.4.14) CON RESPECTO DE CADA p_j TENEMOS:

$$\frac{\partial}{\partial p_j} z(p^0) = q^0{}_j - \frac{\partial}{\partial p_j} c(p,u) = 0 \qquad (1.4.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_j} c(p,u) = q_j = h_j(p,u)$$

1.4.4 FUNCIÓN INDIRECTA DE UTILIDAD: HASTA AHORA SÓLO SE HA HABLADO DE FUNCIONES DE UTILIDAD CUYOS ARGUMENTOS SON LAS CANTIDADES DEL BIEN, q_j $(j=1,2,\ldots,n)$. ESTAS FUNCIONES

DE UTILIDAD SON DIRECTAS PUES DESCRIBEN EL ORDENAMIENTO DE PREFERENCIAS (LA CONDUCTA RACIONAL DE UN CONSUMIDOR) DE MANERA DIRECTA

TAMBIÉN SE HA ESTABLECIDO QUE LA MAXIMIZACIÓN DE LA FUNCIÓN (DIRECTA) DE UTILIDAD SUJETA A UNA RESTRICCIÓN LINEAL RESULTA EN UN SISTEMA DE FUNCIONES DE DEMANDA NO COMPENSADAS CON LA FORMA GENERAL SIGUIENTE:

$$q_j = m_j(p_1, p_2, \ldots, p_n, I) \qquad (1.4.16)$$

LA FUNCIÓN INDIRECTA DE UTILIDAD RESULTA AL SUSTITUIR LA CANTIDAD ÓPTIMA q_j (LAS FUNCIONES DE DEMANDA NO COMPENSADAS) EN LA FUNCIÓN DIRECTA DE UTILIDAD. SI LLAMAMOS u^* A ESTA FUNCIÓN ENTONCES TENEMOS:

$$u^* = u^*[m_1(p, I), m_2(p, I), \ldots m_n(p, I)] = u^*(p, I) \quad (1.4.17)$$

LOS ARGUMENTOS DE LA NUEVA FUNCIÓN SON LOS PRECIOS p_i, Y EL INGRESO, I.

LAS PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN INDIRECTA DE UTILIDAD CITADAS POR PHLIPS, 1974, PG. 28-31, SON TRES:

PROPIEDAD 1: LA FUNCIÓN INDIRECTA DE UTILIDAD REPRESENTA LA MAYOR UTILIDAD QUE PUEDE OBTENERSE DADOS LOS PRECIOS Y EL INGRESO. ESTO ES CIERTO DEBIDO A QUE SE SUSTITUYEN LAS CANTIDADES ÓPTIMAS DADO UN INGRESO EN LA FUNCIÓN DIRECTA DE UTILIDAD.

PROPIEDAD 2: LA FUNCIÓN INDIRECTA DE UTILIDAD ES UNA FUNCIÓN HOMOGÉNEA DE GRADO CERO. ESTA PROPIEDAD SIGNIFICA QUE UN CAMBIO PROPORCIONAL EN LOS PRECIOS Y EN EL INGRESO, AL NO AFECTAR LA DEMANDA, TAMPOCO AFECTA EL NIVEL DE UTILIDAD MÁXIMO OBTENIBLE. ESTA ES UNA CONSECUENCIA DE UNA PROPIEDAD SIMILAR DE LAS FUNCIONES DE DEMANDA NO COMPENSADAS, LA CUAL SE TRATARÁ MÁS ADELANTE EN LA SECCIÓN SIGUIENTE.

PROPIEDAD 3: EXISTE UNA RELACIÓN DE DUALIDAD ENTRE LAS FUNCIONES DIRECTA E INDIRECTA DE UTILIDAD. LA MAXIMIZACIÓN DE LA FUNCIÓN DIRECTA DE UTILIDAD CON RESPECTO A q CON LOS PRECIOS Y EL INGRESO DADOS RESULTA EN LAS MISMAS ECUACIONES DE DEMANDA QUE LA MINIMIZACIÓN DE LA FUNCIÓN INDIRECTA DE UTILIDAD RESPECTO DE LOS PRECIOS Y EL INGRESO CON LAS CANTIDADES q COMO DADAS. ESTA PROPIEDAD ES LA MÁS ÚTIL PUES NOS PERMITE DERIVAR LAS ECUACIONES DE DEMANDA A PARTIR DE LA FUNCIÓN INDIRECTA DE UTILIDAD. PARA EL EFECTO SE APLICA LA IDENTIDAD DE ROY.

1.4.5 LA IDENTIDAD DE ROY: DEATON Y MUELLBAUER, 1980, PG.41, OBTIENEN LA IDENTIDAD DE ROY DE LA SIGUIENTE MANERA: RECORDANDO (1.4.3) Y (1.4.15) ESCRIBIMOS LA FUNCIÓN INDIRECTA DE UTILIDAD COMO LA IDENTIDAD PUESTO QUE LA FUNCIÓN DE COSTO ES LA INVERSA DE LA FUNCIÓN INDIRECTA DE UTILIDAD:

$$u^* \equiv u^*(c(p,u),p) \qquad (1.4.18)$$

AL OBTENER LA DIFERENCIAL DE u^* MANTENIENDO u CONSTANTE (ESTO IMPLICA TAMBIÉN QUE $du^*=0$) TENEMOS:

$$du^* = \frac{\partial u^*}{\partial I} \cdot \frac{\partial c(p,u)}{p_j} \, dp_j + \frac{u^*}{p_j} \, dp_j = 0$$

ENTONCES:

$$\frac{\partial u^*}{\partial I} \cdot \frac{\partial c(p,u)}{\partial p_j} + \frac{\partial u^*}{p_j} = 0$$

POR LA PROPIEDAD 5 DE LA FUNCIÓN DE COSTO, LA ECUACIÓN (1.4.15) Y AL DESPEJAR, OBTENEMOS:

$$q_j = h_j(p,u) = \frac{\partial c(p,u)}{\partial p_j} = - \frac{\partial u^*/\partial p_j}{\partial u^*/\partial I} \qquad (1.4.19)$$

Esta última expresión es conocida en la literatura como la identidad de Roy, la cual relaciona el sistema de demandas no compensadas con la función de utilidad indirecta.

1.4.6 Otras relaciones: En este apartado se completa el panorama de relaciones en el enfoque de la dualidad. La figura 1.4.2 resume estas relaciones.

Si sustituimos en la función de utilidad directa las cantidades óptimas (funciones de demanda no compensadas), obtenemos la función de utilidad indirecta. Si se sustituye en la línea del presupuesto las cantidades óptimas (funciones de demanda compensadas), se obtiene la función de costo.

Para obtener las demandas no compensadas a partir de la función de utilidad indirecta se utiliza la identidad de Roy. Las demandas compensadas se obtienen al sustituir en las demandas no compensadas la función de costo.

$$q_j = m_j(I, p) = m_j(c(p, u), p) = h_j(p, u) \quad (1.4.20)$$

DE MANERA SIMILAR, PARA OBTENER LAS DEMANDAS COMPENSADAS A PARTIR DE LA FUNCIÓN DE COSTO SE UTILIZA LA PROPIEDAD 5. PARA OBTENER LAS FUNCIONES NO COMPENSADAS A PARTIR DE LAS COMPENSADAS SE SUSTITUYE EN ESTAS ÚLTIMAS LA FUNCIÓN DE UTILIDAD DIRECTA.

$$q_j = h_j(p, u) = h_j[u^*(I, p), p] = m_j(I, p) \quad (1.4.21)$$

1.4.7 CONCLUSIONES: EN RESUMEN, LAS RELACIONES REVISADAS EN ESTA SECCIÓN SON LAS SIGUIENTES: LA SOLUCIÓN DEL PRIMAL SON LAS DEMANDAS NO COMPENSADAS; LA SOLUCIÓN DEL DUAL SON LAS DEMANDAS COMPENSADAS. SUSTITUYENDO LA FUNCIONES DE DEMANDA NO COMPENSADAS EN LA FUNCIÓN DIRECTA DE UTILIDAD, OBTENEMOS LA FUNCIÓN INDIRECTA DE UTILIDAD. AL SUSTITUIR EN LA ECUACIÓN DE PRESUPUESTO LAS FUNCIONES DE DEMANDA DEMANDA COMPENSADAS RESULTA LA FUNCIÓN DE COSTO. AL INVERTIR LA FUNCIÓN INDIRECTA DE UTILIDAD OBTENEMOS TAMBIEN LA FUNCIÓN DE COSTO Y VICEVERSA. ADEMÁS, SI DIFERENCIAMOS LA FUNCIÓN DE COSTO CON RESPECTO DE LOS PRECIOS, SE OBTIENEN LAS FUNCIONES DE DEMANDA CONPENSADAS. POR OTRA PARTE, SI SE APLICA LA IDENTIDAD DE ROY A LA FUNCIÓN INDIRECTA DE UTILIDAD, SE OBTIENEN LAS FUNCIONES DE DEMANDA NO COMPENSADAS. TAMBIÉN ES POSIBLE QUE LA MAXIMIZACIÓN DE $u(q)$ CON LOS PRECIOS Y EL INGRESO DADOS RESULTE EN LAS MISMAS ECUACIONES DE DEMANDA QUE LA MINIMIZACIÓN DE LA FUNCIÓN indirecta de utilidad respecto de los precios y el ingreso ahora dadas las cantidades q.

1.5 Propiedades de las funciones de demanda

En esta sección se examinan las propiedades de los sistemas de demanda compensados y no compensados. Estas propiedades resultan de la maximización restringida de una función de utilidad y toman la forma de restricciones matemáticas. Son válidas para cualquier función de utilidad. Por ello su caracter de restricciones generales. Las propiedades examinadas son: aditividad, homogeneidad, simetría y negatividad.

1.5.1 Aditividad:

La suma de las cantidades óptimas multiplicadas por sus precios son iguales al gasto total. Esta propiedad se expresa como:

$$\Sigma\, p_j h_j(u, p) = \Sigma\, p_j m_j(I, p) = I \quad (1.5.1)$$

Debido a que el sistema compensado $h_j(u, p)$ es la solución del dual del problema cuya solución es el sistema de demanda no compensado, $m_j(I, p)$, ambas cantidades óptimas, q_j, deben coincidir. Entonces se pueden usar de manera indiferente.

En ocasiones es útil expresar la aditividad como una restricción sobre las primeras derivadas de las funciones de demanda. Al expresarlas como derivadas de las demandas no compensadas, se pueden distinguir dos formas diferentes: A) agregación de Engel y B) agregación de Cournot.

A) Agregación de Engel: Es la derivada de la condición de aditividad (1.5.1) con respecto al ingreso, I:

$$\frac{\partial}{\partial I}\left(\Sigma\, p_j m_j(I,p)\right) = \frac{\partial}{\partial I} I$$

$$\Longrightarrow \quad \Sigma\, p_j \cdot \frac{\partial m_j(I,p)}{\partial I} = 1 \qquad (1.5.2)$$

B) *Agregación de Cournot:* Es la derivada con respecto de p_j de ambos miembros de la ecuación (5.1):

$$\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\Sigma\, p_i m_i(I,p)\right) = \frac{\partial}{\partial p_j} I)$$

$$\Longrightarrow \quad \Sigma\, p_i \frac{\partial m_i(I,p)}{\partial p_j} + m_j(I,p) = 0 \qquad (1.5.3)$$

LA SUMATORIA DEL MIEMBRO IZQUIERDO DE LA ECUACIÓN (1.5.3) RESULTA DE DERIVAR PARA TODO $i \neq j$ Y EL SEGUNDO TÉRMINO DEL MISMO MIEMBRO, DE DERIVAR CUANDO $i=j$.

AMBAS RESTRICCIONES (1.5.2) Y (1.5.3) SON EXPRESIONES DE LA RESTRICCIÓN DE ADITIVIDAD Y SU FORMA ESTA IMPLICADA POR LA RESTRICCIÓN PRESUPUESTAL LINEAL Y LA MONOTONICIDAD DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD. LA AGREGACIÓN DE ENGEL SEÑALA LOS CAMBIOS EN LA DEMANDA COMO RESPUESTA A CAMBIOS EN EL INGRESO SIN ALTERAR LA LINEA DEL PRESUPUESTO. LA AGREGACIÓN DE COURNOT MUESTRA CÓMO SE AJUSTA LA DEMANDA EN RESPUESTA A CAMBIOS EN PRECIOS SIN ALTERAR LA RESTRICCIÓN PRESUPUESTAL.

AMBAS AGREGACIONES SE PUEDEN EXPRESAR EN TÉRMINOS DE ELASTICIDADES. PARA ELLO, SE REQUIEREN LAS SIGUIENTES DEFINICIÓNES DE ELASTICIDAD:

ELASTICIDAD-INGRESO DE LA DEMANDA: ES LA VARIACIÓN PROPORCIONAL DE LA CANTIDAD DEMANDADA COMO RESPUESTA A CAMBIOS EN EL INGRESO. SU EXPRESIÓN MATEMÁTICA ES LA SIGUIENTE:

$$v_i = \frac{\partial m_i}{\partial I} \cdot \frac{I}{m_i} \qquad (1.5.4)$$

ESTA RELACIÓN TAMBIÉN SE PUEDE EXPRESAR COMO LA DERIVADA LOGARÍTMICA DE LAS DEMANDAS NO COMPENSADAS CON RESPECTO AL GASTO. SE DENOTAN POR:

$$e_i = \frac{\partial \ln m_i(I, p)}{\partial \ln I} \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \qquad (1.5.5)$$

ELASTICIDAD-PRECIO DE LA DEMANDA: ES LA VARIACIÓN PORCENTUAL EN LA CANTIDAD DEMANDADA EN RESPUESTA A 1 POR CIENTO DE CAMBIO EN EL PRECIO. SE EXPRESA DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial m_i}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{m_i} \qquad (1.5.6)$$

LA ELASTICIDAD ANTERIOR TAMBIÉN SE PUEDEN EXPRESAR EN TÉRMINOS LOGARÍTMICOS COMO LA DERIVADAS LOGARÍTMICAS DE LAS FUNCIONES DE DEMANDA NO COMPENSADAS RESPECTO DE p_i. SE DENOTAN POR:

$$e_{ij} = \frac{\partial \ln m_i(I, p)}{\partial \ln p_j} \qquad (i, j=1, 2, .., n) \qquad (1.5.7)$$

CON TODAS LAS ELASTICIDADES-PRECIO DEFINIDAS EN (1.5.6) SE FORMA UNA MATRIZ. LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL SON LAS ELASTICIDADES-PRECIO DE LOS n BIENES. LOS ELEMENTOS FUERA DE

LA DIAGONAL SON LAS ELASTICIDADES CRUZADAS DE LAS DEMANDAS DE LOS n BIENES. LAS ELASTICIDADES DE ESTA MATRIZ TAMBIÉN SE CONOCEN COMO ELASTICIDADES NO COMPENSADAS, PUESTO QUE PROVIENEN DE LAS FUNCIONES $m_i(I,p)$.

LA AGREGACIÓN DE ENGEL Y LA AGREGACIÓN DE COURNOT SE PUEDEN EXPRESAR EN TÉRMINOS DE LAS FRACCIONES DEL GASTO TOTAL QUE REPRESENTA CADA DEMANDA. CON ESTE OBJETIVO SE INTRODUCE LA SIGUIENTE DEFINICIÓN:

PROPORCIÓN DEL GASTO: LA I-ÉSIMA PROPORCIÓN DE GASTO SE DEFINE COMO LA PARTE DEL GASTO TOTAL DESTINADA A LA COMPRA DEL BIEN i Y SE EXPRESA DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$w_i = \frac{p_i q_i}{I} = \frac{p_i q_i}{\Sigma\, p_i q_i} \qquad (1.5.8)$$

ENTONCES, LA AGREGACIÓN DE ENGEL (1.5.2) SE CONVIERTE EN:

$$\Sigma\left(\frac{p_i q_i}{I} \cdot \frac{\partial m_i}{\partial I} \cdot \frac{I}{q_i}\right) = 1 \qquad (1.5.9)$$

Y POR (1.5.8) Y (1.5.4), LA AGREGACIÓN ANTERIOR FINALMENTE SE EXPRESA EN TÉRMINOS DE ELASTICIDADES DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$\Sigma\, w_i v_i = 1 \qquad (1.5.10)$$

SI PROCEDEMOS DE MANERA SIMILAR DIVIDIENDO LA EXPRESIÓN DE LA AGREGACIÓN DE COURNOT, (1.5.3) DIVIDIENDO ENTRE I Y MULTIPLICANDO Y DIVIDIENDO EL TÉRMINO DE LA SUMATORIA POR q_j Y p_i Y CANCELANDO p_i DE LA SUMATORIA SOBRE i, TENEMOS:

$$\Sigma_i \left(\frac{p_i q_i}{I} \cdot \frac{\partial m_i}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{q_i}\right) + \frac{p_j q_j}{I} = 0 \qquad (1.5.11)$$

1.5.2 HOMOGENEIDAD: LAS DEMANDAS COMPENSADAS SON HOMOGÉNEAS DE GRADO CERO EN PRECIOS; LAS DEMANDAS NO COMPENSADAS LO SON EN PRECIOS Y GASTO TOTAL. ENTONCES, PARA TODO $r>0$, SE DEBE CUMPLIR QUE:

$$h_j(rP, u) = h_j(u, P) = m_j(rI, rP) = m_j(I, P) \quad (1.5.12)$$

EL SUPUESTO DE HOMOGENEIDAD SUPONE AUSENCIA DE "ILUSIÓN MONETARIA". ESTO SIGNIFICA QUE EL CONSUMIDOR, ANTE UN AUMENTO DE SU INGRESO NOMINAL, NO RESPONDE COMPRANDO MÁS. LA CONDUCTA RACIONAL TRAS LA AUSENCIA DE ESTE EFECTO CONSISTE EN QUE LOS PRECIOS Y EL INGRESO NO JUEGAN UN PAPEL DETERMINANTE EN LA ORDENACIÓN DE PREFERENCIAS.

ESTE SUPUESTO SE ROMPE CUANDO SE OBSERVA QUE EL CONSUMIDOR COMPRA MÁS PORQUE TIENE MAYOR INGRESO O PORQUE EL BIEN ES MÁS CARO; ES DECIR, CUANDO JUZGA LA CALIDAD DEL BIEN POR EL PRECIO, PORQUE CREE QUE LOS BIENES MÁS CAROS SON MEJORES O PORQUE PAGAR MÁS DA CATEGORÍA A SU CONSUMO.

LA HOMOGENEIDAD TAMBIÉN SE PUEDE EXPRESAR COMO UNA RESTRICCIÓN SOBRE LAS DERIVADAS DE LOS SISTEMAS DE DEMANDA. PARA DERIVAR LA RESTRICCIÓN SE OBTIENE LA DIFERENCIAL TOTAL DE LAS DEMANDAS NO COMPENSADAS:

$$dq_i = \frac{\partial m_i}{\partial I} dI + \Sigma_j \frac{\partial m_i}{\partial p_j} dp_j \qquad (1.5.13)$$

LA HOMOGENEIDAD REQUIERE QUE LOS CAMBIOS EN EL INGRESO Y EN LOS PRECIOS SEAN PROPORCIONALES. ENTONCES, LA CONSTANTE a ES:

$$a = \frac{dI}{I} = \frac{dp_j}{p_i} \qquad (1.5.14)$$

MULTIPLICANDO Y DIVIDIENDO EL SEGUNDO MIEMBRO DE (1.5.13) POR I Y p_j Y SUSTITUYENDO (1.5.14) RESULTA:

$$dq_i = \left(I \frac{\partial m_i}{\partial I} + \Sigma_j \; p_j \frac{\partial m_j}{\partial p_j}\right) \cdot a \qquad (1.5.15)$$

POR EL TEOREMA DE EULER (VÉASE ROBERTS Y SCHULZE, 1978, PG. 141), DADO QUE m_i ES CONTÍNUA Y TIENE PRIMERAS DERIVADAS CONTÍNUAS, SI SE CUMPLE QUE:

$$I \frac{\partial m_i}{\partial I} + \Sigma_j \; p_j \frac{\partial m_i}{\partial p_j} = 0 \qquad (1.5.16)$$

SE PUEDE CONCLUIR QUE LA FUNCIÓN $m_i(I, p)$ ES HOMOGÉNEA DE GRADO CERO. LA EXPRESIÓN (1.5.16) ES LA RESTRICCIÓN DE HOMOGENEIDAD EXPRESADA EN TÉRMINOS DE DERIVADAS.

LA RESTRICCIÓN DE HOMOGENEIDAD TAMBIÉN SE PUEDE EXPRESAR EN ELASTICIDADES. DIVIDIENDO LA ECUACIÓN (1.5.8) ENTRE $m_i(p, I)$ Y SUSTITUYENDO LAS DEFINICIONES DE ELASTICIDAD-INGRESO Y ELASTICIDAD-PRECIO, SE OBTIENE:

$$\nu_i + \Sigma_j \, \varepsilon_{ij} = 0 \qquad (1.5.17)$$

1.5.3 SIMETRÍA: PARA ESTABLECER LA PROPIEDAD DE SIMETRÍA ES NECESARIO DEFINIR LA MATRIZ DE SUSTITUCIÓN: ES LA MATRIZ DE ORDEN (n, n) DEFINIDA POR LAS DERIVADAS DE LAS DEMANDAS COMPENSADAS, $h_i(u, p)$ CON RESPECTO A TODOS LOS PRECIOS DE LOS BIENES, p_j. TAMBIÉN SE LE CONOCE COMO LA MATRIZ DE SLUTSKY Y SE DENOTA POR:

$$s_{ij} \equiv \frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j} \qquad (1.5.18)$$

LA PROPIEDAD DE SIMETRÍA CONSISTE EN QUE PARA TODO $i \neq j$:

$$s_{ij} = \frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j(u, p)}{\partial p_i} = s_{ji} \qquad (1.5.19)$$

LA SIMETRÍA SE PUEDE PROBAR DE LA SIGUIENTE MANERA: RECORDANDO LA PROPIEDAD 5 DE LA FUNCIÓN DE COSTO (SECCIÓN 2.4.2):

$$h_i(u, p) = \frac{\partial c(u, p)}{\partial p_i}$$

ENTONCES, SE SUSTITUYE EN (1.5.19):

$$\frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 c(u, p)}{\partial p_i \, \partial p_j} \qquad (1.5.20)$$

DE MANERA SIMILAR SE PUEDE OBTENER:

$$\frac{\partial h_j(u,p)}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 c(u,p)}{\partial p_j \, \partial p_i} \qquad (1.5.21)$$

POR EL TEOREMA DE YOUNG (VÉASE ROBERTS Y SCHULZE, 1973, PG. 128), SI EXISTEN LAS SEGUNDAS DERIVADAS CRUZADAS Y SON CONTÍNUAS, ENTONCES NO IMPORTA EL ORDEN DE DERIVACIÓN.

$$\frac{\partial^2 c(u,p)}{\partial p_i \, \partial p_j} = \frac{\partial^2 c(u,p)}{\partial p_j \, \partial p_i} \implies s_{ij} = s_{ji} \qquad (1.5.22)$$

LA MATRIZ S NOS BRINDA INFORMACIÓN SOBRE CÓMO UN CONSUMIDOR SUSTITUYE LAS CANTIDADES DEMANDADAS DE DOS BIENES CUANDO SUS PRECIOS CAMBIAN. LA PROPIEDAD DE SIMETRÍA DE ESTA MATRIZ SIGNIFICA QUE UN CONSUMIDOR SUSTITUYE DE IGUAL MANERA SUS CANTIDADES DEMANDADAS DE DOS BIENES FRENTE A INCREMENTOS EN SUS PRECIOS.

SUPONGAMOS, POR EJEMPLO, UNA ELECCIÓN ENTRE PERAS Y MANZANAS. SI AUMENTA DE MANERA COMPENSADA EL PRECIO DE LAS MANZANAS, AUMENTA LA CANTIDAD DE PERAS DEMANDADAS EN EL MISMO NÚMERO QUE AUMENTARÍA LA DEMANDA DE MANZANAS FRENTE A UN INCREMENTO COMPENSADO EN EL PRECIO DE LAS PERAS.

1.5.4 NEGATIVIDAD: UN TEOREMA DEL CÁLCULO SEÑALA QUE UNA MATRIZ DE SEGUNDAS DERIVADAS DE UNA FUNCIÓN CÓNCAVA, TIENE COMO CARACTERÍSTICA SER NEGATIVA SEMIDEFINIDA. LA MATRIZ S SE OBTIENE AL DERIVAR LAS FUNCIONES DE DEMANDA COMPENSADAS CON RESPECTO A LOS PRECIOS; ESTAS A SU VEZ, SON LA PRIMERA DERIVADA DE LA FUNCIÓN DE COSTO - PROPIEDAD 5. COMO SE RECORDARÁ, LA FUNCIÓN DE COSTO ES CÓNCAVA EN PRECIOS -PROPIEDAD 3 (VÉASE SECCIÓN 1.4.2). CON EL ARGUMENTO ANTERIOR SE CONFIRMA QUE LA MATRIZ S, DE ORDEN (n,n), ES NEGATIVA SEMIDEFINIDA.

LA NEGATIVIDAD SEMIDEFINIDA DE LA MATRIZ S SE EXPRESA COMO SIGUE: DADO EL ORDEN DE LA MATRIZ S, PARA CUALQUIER VECTOR b DE ORDEN n, LA FORMA CUADRÁTICA SIGUIENTE DEFINE UNA MATRIZ NEGATIVA SEMIDEFINIDA:

$$\Sigma_i \Sigma_j b_i s_{ij} b_j \leq 0 \qquad (1.5.23)$$

LA NEGATIVIDAD IMPONE DESIGUALDADES COMO RESTRICCIONES A LA MATRIZ DE SLUTSKY. LA MÁS IMPORTANTE DICE QUE LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL PRINCIPAL DE S NO DEBEN SER POSITIVOS; ES DECIR, PARA TODO i:

$$s_{ii} \leq 0 \qquad (1.5.24)$$

LA IMPLICACIÓN ECONÓMICA DE ESTA RESTRICCIÓN CONSISTE EN QUE EL CONSUMIDOR, AL MANTENER EL MISMO NIVEL DE UTILIDAD, DEMANDARÁ MENOS FRENTE A UN INCREMENTO EN EL PRECIO DE UN BIEN. ESTA ES LA EXPRESIÓN DE LA TRADICIONAL "LEY DE LA DEMANDA".

LA SIMETRÍA Y LA NEGATIVIDAD SE DERIVAN DE POSTULAR UN SISTEMA CONSISTENTE DE PREFERENCIAS. LA SIMETRÍA ES UNA GARANTÍA DE LA CONSISTENCIA DE LAS PREFERENCIAS DEL CONSUMIDOR Y SIRVE PARA PROBARLA. LA NEGATIVIDAD PROVIENE DE LA CONCAVIDAD DE LA FUNCIÓN DE COSTOS. ESTA CONCAVIDAD SE DEBE A QUE LOS COSTOS SE MINIMIZAN PARA MANTENER UN MISMO NIVEL DE UTILIDAD.

1.6 LA ECUACIÓN DE SLUTSKY

LA MATRIZ DE SUSTITUCIÓN S TAMBIÉN SE PUEDE ESTABLECER EN TÉRMINOS DE LAS DEMANDAS NO COMPENSADAS. ESTA FUNCIÓN ES CUMPLIDA POR LA ECUACIÓN DE SLUTSKY, QUE SE OBTIENE DIFERENCIANDO LA SIGUIENTE EXPRESION CON RESPECTO A p_j:

$$s_{ij} = \frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j} = \frac{\partial m_i(c(u,p),p)}{\partial p_j} = \frac{\partial m_i}{\partial I} \cdot \frac{c(u,p)}{p_j} + \frac{\partial m_i}{p_j}$$

SUSTITUYENDO (1.4.13) EN LA EXPRESIÓN ANTERIOR, TENEMOS:

$$s_{ij} = \frac{\partial m_i}{\partial I} \cdot q_j + \frac{\partial m_i}{\partial p_j} \qquad (1.5.25)$$

LA ECUACIÓN DE SLUTSKY PROPONE QUE LA SUSTITUCIÓN COMPENSADA DE UN BIEN POR OTRO DEBIDO A UN CAMBIO EN EL PRECIO ESTA DADO POR EL CAMBIO NO COMPENSADO EN LA DEMANDA COMO RESPUESTA A UN CAMBIO EN EL PRECIO, REPRESENTADO EN (1.5.25) POR EL SEGUNDO TÉRMINO. ESTE CAMBIO SE TIENE QUE "COMPENSAR" POR LA PÉRDIDA DE UTILIDAD DEBIDA AL EFECTO INGRESO; ENTONCES, SE SUMA EL PRIMER TÉRMINO DE (1.5.25).

SI ARREGLAMOS LA ECUACIÓN (1.5.25), PODEMOS ESCRIBIR EL CAMBIO EN LA DEMANDA NO COMPENSADA DEBIDO A UN CAMBIO EN EL PRECIO EN TÉRMINOS DE UN EFECTO SUSTITUCIÓN - s_{ij} - Y UN EFECTO INGRESO DEL MISMO CAMBIO EN PRECIOS. ENTONCES RESULTA LA ECUACIÓN SIGUIENTE, QUE NOS PERMITE CALCULAR EL EFECTO GLOBAL SOBRE LA DEMANDA DE UN CAMBIO EN EL PRECIO DE UN BIEN:

$$\frac{\partial m_i}{\partial p_j} = s_{ij} - q_j \cdot \frac{\partial m_i}{\partial I} \qquad (1.5.26)$$

EL EFECTO SUSTITUCIÓN ESTÁ REPRESENTADO POR s_{ij} Y ES POSITIVO. EL EFECTO INGRESO ESTÁ REPRESENTADO POR EL SEGUNDO TÉRMINO Y ES NEGATIVO.

CAPITULO 2

EL SISTEMA LINEAL DE GASTO

En este capítulo se revisa uno de los modelos de ecuaciones de demanda más utilizados en la literatura: el Sistema lineal de gasto, SLG. La revisión se efectúa de acuerdo al desarrollo del capítulo 1. Esto es así porque el SLG es un modelo derivado de una función de utilidad que cumple con las restricciones de la teoría del Consumidor.

2.1 Función de utilidad de Stone-Geary

Como se vió en el capítulo 2, son muchas las posibilidades de establecer una función que represente un ordenamiento racional de preferencias, es decir, una función de utilidad y que permite derivar un sistema de funciones de demanda del consumidor.

En el estudio econométrico de la demanda del consumidor, un criterio dominante para buscar una función de utilidad de la cual derivar sistemas estimables de demanda ha sido la necesidad de utilizar métodos lineales en la estimación de los parámetros

DE LAS FUNCIONES DE DEMANDA. EN ESTE SENTIDO SE PLANTEA LA NECESIDAD DE UNA FUNCIÓN DE UTILIDAD QUE AL MAXIMIZAR SUJETA A UNA RESTRICCIÓN LINEAL DE GASTO, TENGA COMO RESULTADO UN SISTEMA DE DEMANDAS LINEAL EN PARÁMETROS Y VARIABLES.

2.1.1 DERIVACIÓN DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD DE STONE-GEARY:

UNA FUNCIÓN DE UTILIDAD COMO LA QUE NOS PREOCUPA FUÉ DESARROLLADA POR SAMUELSON (1947,48) Y GEARY (1950-51) A PARTIR DE UN SISTEMA LINEAL ESTABLECIDO INICIALMENTE POR KLEIN Y RUBIN (1947-48). ESTE SISTEMA SE ORIGINÓ AL INTRODUCIR LAS RESTRICCIONES GENERALES DE LA TEORÍA DE LA DEMANDA A UN SISTEMA LINEAL EN PRECIOS E INGRESO. EL SISTEMA RESULTANTE TENÍA LA SIGUIENTE ESPECIFICACIÓN:

$$p_i q_i = p_i g_i + \beta_i (I - \Sigma\, p_i g_i) \qquad (2.1.1)$$

EL RAZONAMIENTO DE SAMUELSON Y GEARY PARA DERIVAR LA FUNCIÓN DE UTILIDAD COMPATIBLE CON (2.1.1) ES EL SIGUIENTE: PARA CUALQUIER FUNCIÓN DE UTILIDAD, u', LA CONDICIÓN DE EQUILIBRIO - VER ECUACIÓN (1.3.5) - REQUIERE:

$$\frac{\partial u'}{\partial q_i} = \lambda p_i \qquad (2.1.2)$$

$$du' = \sum \frac{\partial u'}{\partial q_i} \cdot dq_i = 0 \qquad (2.1.3)$$

SUSTITUYENDO (2.1.2) EN (2.1.3):

$$du' = \sum \lambda p_i dq_i = 0$$

DIVIDIENDO LA ECUACIÓN ANTERIOR ENTRE λ

$$du' = \sum p_i dq_i = 0 \qquad (2.1.4)$$

LA DIFERENCIAL DU' CONTIENE LAS CONDICIONES DE EQUILIBRIO QUE RESULTAN DE MAXIMIZAR CUALQUIER FUNCIÓN DE UTILIDAD SUJETA A UNA RESTRICCIÓN PRESUPUESTAL LINEAL. SE BUSCA ENTONCES UNA FUNCIÓN DE UTILIDAD COMPATIBLE CON LAS CONDICIONES (2.1.4) Y (2.1.1).

DESPEJANDO p_i DE (2.1.1) TENEMOS:

$$p_i = \frac{\beta_i}{q_i - \gamma_i} (I - \sum p_i \gamma_i) \qquad (2.1.5)$$

SUSTITUYENDO (2.1.5) EN (2.1.4)

$$du' = \frac{\Sigma \beta_i}{q_i - \gamma_i} c \, dq_i = 0 \qquad (2.1.6)$$

PUESTO QUE $c = 1 - \Sigma \beta_i \gamma_i$ ES UNA CONSTANTE, SE DIVIDE (2.1.6) ENTRE c:

$$du' = \frac{\Sigma \beta_i}{q_i - \gamma_i} dq_i \qquad (2.1.7)$$

AL INTEGRAR AMBOS MIEMBROS DE (2.1.7) RESULTA:

$$u' = \int \Sigma \frac{\beta_i}{q_i - \gamma_i} dq_i \qquad (2.1.8)$$

2.1.2 PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD DE STONE - GEARY:

LA EXPRESIÓN (2.1.8) SE CONOCE EN LA LITERATURA COMO LA FUNCIÓN DE UTILIDAD DE STONE-GEARY. ESTA FUNCIÓN CUMPLE CON LAS PROPIEDADES DE UNA FUNCIÓN DE UTILIDAD PLANTEADAS EN LA SECCIÓN 1.1. LA EXISTENCIA DE LA FUNCIÓN REQUIERE QUE:

$q_i \geq \gamma_i$

La condición de diferenciabilidad respecto de q_i requiere eliminar el caso en que $q_i = \gamma_i$ de la restricción anterior. Entonces se cumple la siguiente restricción:

$$q_i > \gamma_i \qquad (2.1.9)$$

Para que la función sea creciente, debe cumplirse lo siguiente:

$$0 \leq \beta_i \leq 1 \qquad (2.1.10)$$

$$\Sigma\ \beta_i = 1 \qquad (2.1.11)$$

Para poder cumplir con la concavidad, se requieren las restricciones (2.1.9) y (2.1.10). Por otra parte, la utilidad marginal se obtiene derivando (2.1.8) respecto de q_i:

$$\frac{\partial u}{\partial q_i} = \frac{\beta_i}{q_i - \gamma_i} > 0 \qquad (2.1.2)$$

Las utilidades marginales son positivas si y sólo si se cumplen las restricciones (2.1.9) y (2.1.10).

2.1.3 Una transformación lineal de la función de utilidad:

Como se dijo en la sección 1.1, la aportación de Debreu es la función de utilidad derivada de un preordenamiento. Además, esta función no es única; cualquier transformación monótona también será una función de utilidad.

De acuerdo a lo anterior, una transformación logarítmica de (2.1.8) también es una función de utilidad. Si u'=ln u, entonces, sustituyendo la expresión anterior y tomando antilogaritmos, resulta la expresión siguiente:

$$u = \Pi_i (q_i - \gamma S)^{\beta_i} \qquad (2.1.13)$$

Esta expresión es una transformación monótona de la función de Stone-Geary. En el desarrollo de las siguientes secciones, se usará (2.1.8) y (2.1.13) de manera indistinta como las funciones de utilidad de Stone-Geary.

2.2 Sistemas de funciones de demanda

De acuerdo con las propiedades discutidas en la sección 1.4, las funciones de demanda que se pueden derivar son de dos tipos: demandas no compensadas y demandas compensadas.

Las primeras resultan de maximizar la función de utilidad de Stone-Geary sujeta a una restricción presupuestal lineal. Tienen como argumento a los precios de los n bienes y al ingreso, I. Las segundas son el resultado de resolver el dual del problema anterior. Este consiste en minimizar el gasto para obtener un nivel de utilidad dado.

2.2.1 Demandas no compensadas: Para obtener las demandas no compensadas se establece el siguiente problema de optimización, a partir de la función de utilidad (2.1.13) 1/. El problema a resolver es:

$$\max u = \Pi_i (q_i - \gamma_i)^{\beta_i} \text{ sujeto a } I = \Sigma p_i q_i \qquad (2.2.1)$$

Para resolver el problema, se siguen los pasos establecidos en el apartado 1.3.2. Estos consisten en el planteamiento de una función auxiliar, la obtención de las condiciones de primero y segundo orden para un máximo local y las condiciones para un máximo global.

1/ La función de utilidad derivada en (2.1.8) es una transformación monótona creci
función de utilidad usada en (2.1.13). Las dos expresiones son entonces válidas para derivar las funciones de demanda.

A) LA FUNCIÓN AUXILIAR: PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE MAXIMIZACIÓN SE ESTABLECE LA SIGUIENTE FUNCIÓN AUXILIAR:

$$L = \Pi_i (q_i - \gamma_i)^{\beta_i} + \lambda(\Sigma\, p_i q_i - I) \qquad (2.2.2)$$

DONDE λ ES EL MULTIPLICADOR DE LAGRANGE.

B) CONDICIONES DE PRIMER ORDEN: SE OBTIENEN AL DERIVAR LA FUNCIÓN L (2.2.2) CON RESPECTO A q_i Y λ:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\beta_i}{q_i - \gamma_i}\, \Pi_i (q_i - \gamma_i)^{\beta_i} + \lambda\, p_i$$

$$(2.2.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \Sigma\, p_i q_i - I$$

SE IGUALAN CON CERO CADA UNA DE LAS DERIVADAS DE L EN EL SISTEMA (2.2.3) Y SE OBTIENEN n+1 ECUACIONES DE LAS CUALES SE DESPEJAN LOS n VALORES DE q_i Y EL DE λ.

$$\frac{\beta_i}{q_i - \gamma_i} u' + \lambda p_i = 0$$

$$\Sigma\, p_i q_i - I = 0 \qquad (2.2.4)$$

RESOLVIENDO EL SISTEMA (2.2.4) POR IGUALACIÓN, RESULTA:

$$\frac{\beta_i}{q_i - \gamma_i} u' + \lambda p_i = \Sigma\, p_i q_i - I$$

PARA ENCONTRAR EL VALOR DE λ SE DESPEJA β_i DE LA ECUACIÓN ANTERIOR:

$$\beta_i = \frac{1}{-u'} \lambda\, p_i (q_i - \gamma_i) \qquad (2.2.5)$$

RECORDANDO LA PROPIEDAD (1.1.11), SUMAMOS (2.2.5) SOBRE i:

$$\Sigma_i\, \beta_i = \frac{\lambda}{-u} \Sigma_i\, p_i (q_i - \gamma_i) = 1$$

EN LA EXPRESIÓN ANTERIOR DESPEJAMOS λ:

$$\lambda = \frac{-u'}{\Sigma_i\, p_i (q_i - \gamma_i)} \qquad (2.2.6)$$

Ahora sustituimos λ en (2.2.5):

$$\beta_i = \frac{p_i q_i - p_i \gamma_i}{1 - \Sigma\, p_i - \gamma_i}$$

Despejamos $p_i q_i$

$$p_i q_i = p_i \gamma_i + \beta_i (1 - \Sigma\, p_i \gamma_i) \qquad (2.2.7)$$

o bien

$$q_i = \gamma_i + \frac{\beta_i}{p_i} (1 - \Sigma\, p_i \gamma_i) \qquad (2.2.8)$$

Estas ecuaciones son las *funciones de demanda no compensadas* del Sistema lineal de gasto, SLG. Son no compensadas porque tienen como argumento los precios y el ingreso.

Una interpretación de (2.2.7) se puede encontrar en Samuelson, 1947. La cantidad del bien i que se decide comprar a priori se representa por γ_i. Entonces, $\Sigma p_i \gamma_i$ es la parte del presupuesto que se decide comprar de fijo. Otra interpretación dice que esta cantidad es

EL CONSUMO MÍNIMO, DE SUBSISTENCIA QUE EFECTÚA UN CONSUMIDOR. ENTONCES, EL RESIDUO $I-\Sigma p_i \gamma_i$ ES UN INGRESO SUPERNUMERARIO QUE SE ASIGNA DE ACUERDO A LAS PROPORCIONES β_i QUE SON CONSTANTES. ESTA INTERPRETACIÓN REQUIERE QUE LAS γ_i SEAN POSITIVAS. ESTA CONDICIÓN NO SURGE COMO NECESARIA DESDE EL PUNTO DE VISTA TEÓRICO.

EL SLG (2.2.7) ES LINEAL EN PRECIOS E INGRESO. ESTO EXPLICA SU NOMBRE: SISTEMA LINEAL DE GASTO. SIN EMBARGO, EL MODELO NO ES LINEAL EN LOS PARÁMETROS β_i Y γ_i.

EL COEFICIENTE β_i SE INTERPRETA COMO LA PARTICIPACIÓN MARGINAL EN EL GASTO. COMO SE MENCIONÓ ANTES, DEBE SER CONSTANTE Y POSITIVA.

EN SÍNTESIS, CADA ECUACIÓN DE DEMANDA $p_i q_i$ SE COMPONE DE DOS ELEMENTOS: EL GASTO FIJO O DE SUBSISTENCIA, DENOTADO POR $p_i \gamma_i$ Y EL GASTO SUPERNUMERARIO, QUE ES UNA PROPORCIÓN FIJA β_i DEL INGRESO SUPERNUMERARIO, $I-\Sigma p_i \gamma_i$.

2.2.2 DEMANDAS COMPENSADAS: LAS DEMANDAS COMPENSADAS SE OBTIENEN COMO RESULTADO DE MINIMIZAR LA FUNCIÓN DE COSTO SUJETA A LA FUNCIÓN DE UTILIDAD DE STONE-GEARY (2.1.8) COMO RESTRICCIÓN.

$$\min \Sigma\, p_i q_i \quad \text{SUJETA A} \quad u' = \Sigma\, \beta_i \ln(q_i - \gamma_i) \qquad (2.2.9)$$

PARA RESOLVER EL PROBLEMA SE PROCEDE DE LA MANERA YA CONOCIDA.

A) PLANTEAMIENTO DE LA FUNCIÓN AUXILIAR: LA FUNCIÓN OBJETIVO DEL PROBLEMA ES:

$$L = \Sigma\, p_i q_i - \lambda(\Sigma\, \beta_i \ln(q_i - \gamma_i) - \ln u) \qquad (2.2.10)$$

DONDE λ ES EL MULTIPLICADOR DE LAGRANGE.

B) CONDICIONES DE PRIMER ORDEN: LAS CONDICIONES DE PRIMER ORDEN SE OBTIENEN IGUALANDO CON CERO LAS DERIVADAS DE L CON RESPECTO A q_i Y DE λ:

o

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \Sigma\, p_i - \lambda \frac{\beta_i}{q_i - \gamma_i} = 0 \qquad (2.2.11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \Sigma\, \beta_i \ln(q_i - \gamma_i) + \ln u = 0 \qquad (2.2.12)$$

SE DESPEJA $q_i - \gamma_i$ DE (2.2.11):

$$q_i - \gamma_i = \lambda \frac{\beta_i}{p_i} \qquad (2.2.13)$$

LA ECUACIÓN (2.2.13) SE SUSTITUYE EN (2.2.12) Y SE OBTIENE EL ANTILOGARITMO DE LA ECUACIÓN RESULTANTE:

$$u = \Pi_i (\lambda \frac{\beta_i}{p_i})^{\beta_i} = \Pi_i \lambda^{\beta_i} \Pi_i (\frac{\beta_i}{p_i})^{\beta_i} = \lambda^{\Sigma \beta_i} \Pi_i (\frac{\beta_i}{p_i})^{\beta}$$

APLICANDO LA RESTRICCIÓN (1.1.11), LA EXPRESIÓN ANTERIOR SE CONVIERTE EN:

$$u = \lambda \Pi_i (\frac{\beta_i}{p_i})^{\beta}$$

DESPEJAMOS λ DE LA ECUACIÓN ANTERIOR PARA OBTENER:

$$\lambda = u \Pi_i (\frac{p_i}{\beta_i})^{\beta}$$

SUSTITUIMOS (2.2.14) EN (2.2.13) Y DESPEJAMOS $p_i q_i$:

$$p_i q_i = p_i \gamma_i + \beta_i \beta_0 p_0 u \qquad (2.2.15)$$

DONDE:

$$\beta_o \equiv \frac{1}{\Sigma_i \beta_i{}^{\beta_i}} \quad y \quad p_o \equiv \Sigma_i p_i{}^{\beta_i}$$

LA EXPRESIÓN (2.2.15) SE CONOCE COMO EL SISTEMA DE FUNCIONES DE DEMANDA *NO COMPENSADAS.* TIENE COMO ARGUMENTOS A LOS PRECIOS Y EL NIVEL DE UTILIDAD ÓPTIMO.

2.3 LA DUALIDAD EN EL SISTEMA LINEAL DE GASTO

EN EL PRIMER CAPÍTULO SE ESTABLECIERON DIFERENTES FUNCIONES CUANDO SE CONSIDERA LA DUALIDAD EN LOS SISTEMAS DE DEMANDA DERIVADOS DE UNA FUNCIÓN DE UTILIDAD. ESTAS SON: LA FUNCIÓN INDIRECTA DE UTILIDAD, QUE SE DERIVA DE LAS DEMANDAS NO COMPENSADAS Y LA FUNCIÓN DE COSTO, LA CUAL PROVIENE DE LAS FUNCIONES DE DEMANDA COMPENSADAS.

EN ESTA SECCIÓN SE DERIVAN PRIMERO LA FUNCIÓN INDIRECTA DE UTILIDAD Y LA FUNCIÓN DE COSTO QUE CORRESPONDEN A LA FUNCIÓN DE UTILIDAD DE STONE-GEARY. DESPUÉS SE REVISAN LAS RELACIONES QUE EXISTEN ENTRE ESTAS FUNCIONES.

2.3.1 FUNCIÓN DE UTILIDAD INDIRECTA: LA FUNCIÓN INDIRECTA RESULTA AL SUSTITUIR LAS DEMANDAS NO COMPENSADAS EN LA FUNCIÓN DIRECTA DE UTILIDAD.

SE DESPEJA $q_i - \gamma_i$ DE (2.2.8)

$$q_i - \gamma_i = \frac{\beta_i}{p_i}(1 - \Sigma p_i \gamma_i)$$

LA EXPRESIÓN ANTERIOR SE SUSTITUYE EN LA FUNCIÓN DE UTILIDAD (1.1.13):

$$u^* = \Pi_i \left(\frac{\beta_i}{p_i} (1 - \Sigma p_i \gamma_i)\right)^{\beta_i}$$

$$= \Pi_i \left(\frac{\beta_i}{p_i}\right)^{\beta_i} \Pi_i (1 - \Sigma p_i \gamma_i)^{\beta_i}$$

$$= \frac{(1 - \Sigma p_i \gamma_i)^{\Sigma \beta_i}}{\Pi_i \left(\frac{p_i}{\beta_i}\right)^{\Sigma \beta_i}} \qquad (2.3.1)$$

$$= \frac{1 - \Sigma p_i \gamma_i}{\beta_0 p_0}$$

DONDE

$$\beta_0 \equiv \frac{1}{\Pi_i \beta_i^{\beta_i}} \qquad \text{Y} \qquad p_0 \equiv \Pi_i p_i^{\beta_i}$$

LA EXPRESIÓN (2.3.1) ES LA FUNCIÓN DE UTILIDAD INDIRECTA. SUS ARGUMENTOS SON LOS PRECIOS Y LA UTILIDAD.

2.3.2 FUNCIÓN DE COSTO: LA FUNCIÓN DE COSTO SE PUEDE OBTENER AL SUSTITUIR LAS FUNCIONES DE DEMANDA COMPENSADAS (2.2.15) EN LA ECUACIÓN DEL INGRESO. SUMANDO SOBRE i AMBOS MIEMBROS DE (2.2.15):

$$\Sigma_i p_i q_i = \Sigma_i p_i \gamma_i + \beta_0 p_0 u \Sigma_i \beta_i$$

DONDE β_0 Y p_0 TIENEN EL SIGNIFICADO ESTABLECIDO ANTES.

APLICANDO LA RESTRICCIÓN (1.2.11), RESULTA LA SIGUIENTE EXPRESIÓN:

$$c(u, p) = \Sigma\, p_i \gamma_i + \beta_0 p_0 U^* \qquad (2.3.2)$$

LA ECUACIÓN (2.3.2) ES LA FUNCIÓN DE COSTO.

2.3.3 PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE COSTO: LA FUNCIÓN DE COSTO TIENE LAS SIGUIENTES PROPIEDADES:

PROPIEDAD 1: LA FUNCIÓN ES LINEAL HOMOGÉNEA EN PRECIOS. ESTO ES, PARA CUALQUIER ESCALAR $s \geq 0$:

$$c(u, sp) = \Sigma s p_i \gamma_i + u^* \beta_0 s p_0 = s \Sigma p_i \gamma_i + s u^* \beta_0 p_0$$

$$= s(\Sigma p_i \gamma_i + u^* \beta_0 p_0) = sc(u, p) \qquad (2.3.3)$$

PROPIEDAD 2: LA FUNCIÓN DE COSTO ES MONÓTONA CRECIENTE EN u.

$$\frac{\partial l}{\partial u} = \beta_0 p_0 > 0 \qquad (2.3.4)$$

SÍ Y SÓLO SI $\beta_i \geq 0$ PARA TODA i; DADO QUE $p_i \geq 0$ PARA TODA i. ESTA ÚLTIMA RESTRICCIÓN JUNTO CON $\Sigma\beta_i = 1$ IMPLICAN QUE $0 \leq \beta_i \leq 1$.

PROPIEDAD 3: LA FUNCIÓN ES MONÓTONA NO DECRECIENTE EN p. ESTO ES, DE ACUERDO A LA DEFINICIÓN DE ESTE TIPO DE FUNCIONES, SE TIENE:

$$\frac{\partial l}{\partial p_i} = \gamma_i \geq 0 \qquad (2.3.5)$$

SI $\gamma_i > 0$ PARA AL MENOS UN PRECIO, ENTONCES $c(u, p)$ ES MONÓTONA CRECIENTE PARA ESE PRECIO.

PROPIEDAD 4: LA FUNCIÓN DE COSTO ES CÓNCAVA EN PRECIOS:

PARA PROBAR ESTA PROPIEDAD DEFINIMOS DOS VECTORES DE PRECIOS, p^1 Y p^2 TALES QUE:

$$p^3 = rp^1 + (1-r)p^2 \text{ PARA TODA } 0 \leq r \leq 1 \qquad (2.3.6)$$

LA DEMANDA COMPENSADA QUE MANTIENE EL NIVEL DE UTILIDAD $u(q^3)$ ES:

$$q^3 = \gamma_i + \frac{\beta_i}{p_i{}^3} u(q^3)\beta_0 p_0{}^3$$

LA FUNCIÓN DE COSTO CORRESPONDIENTE A LA DEMANDA ANTERIOR ES:

$$c(u, p^3) = \Sigma p_i{}^3 \gamma_i + \beta_0 p_0{}^3 u^*(q^3)$$

SUSTITUYENDO p^3 EN LA FUNCIÓN DE COSTO:

$$c(u, p^3) = \Sigma \gamma_i (r p_i{}^1 + (1-r) p_i{}^2) + u(q^3)\beta_0 (r p_0{}^2 + (1-r) p_0{}^2)$$

$$= r(\Sigma p_i{}^1 \gamma_i + u(q^3) p_0{}^1) + (1-r)(\Sigma p_i{}^2 \gamma_i + u(q^3)\beta_0 p_0{}^2) \qquad (2.3.7)$$

PERO q^3 PUEDE SER UNA SOLUCIÓN FACTIBLE PARA EL PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN DE $c(u, p^1)$ Y $c(u, p^2)$ PERO NO NECESARIAMENTE ES LA CANTIDAD DE COSTO MÍNIMO EN CADA FUNCIÓN. ENTONCES:

$$c(u, p^1) \leq \Sigma p_i{}^1 y_i + u(q^3)\beta_0{}^1 \qquad (2.3.8)$$

Y

$$c(u, p^2) \leq \Sigma p_i{}^2 y_i + u(q^3)\beta_0{}^2 \qquad (2.3.9)$$

SUSTITUYENDO

$$c(u, p^3) \geq rc(u, p^1) + (1-r)c(u, p^2) \qquad (2.3.10)$$

LA CONDICIÓN ANTERIOR MUESTRA QUE LA FUNCIÓN DE COSTO ES CÓNCAVA EN PRECIOS PUES, PARA UN PRECIO P^3 QUE ES UNA COMBINACIÓN LINEAL DE P^1 Y P^2, LA FUNCIÓN, EVALUADA EN ESE PRECIO, ES AL MENOS IGUAL QUE LA FUNCIÓN EVALUADA CON CADA PRECIO POR SEPARADO.

2.3.4 LA IDENTIDAD DE ROY: LAS FUNCIONES DE DEMANDA NO COMPENSADAS SE PUEDEN OBTENER A PARTIR DE LA FUNCIÓN INDIRECTA DE UTILIDAD POR MEDIO DE LA IDENTIDAD DE ROY. ESTA SE ESCRIBE COMO:

$$q_i \equiv - \frac{\dfrac{\partial u^*}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial u^*}{\partial I}} \qquad (2.3.11)$$

PARA APLICAR LA IDENTIDAD DE ROY, SE DERIVA LA FUNCIÓN DE UTILIDAD INDIRECTA (2.3.1) RESPECTO DE p_i E I. LAS DERIVADAS SON:

$$\frac{\partial u^*}{\partial p_i} = - \frac{\gamma_i + \dfrac{\beta_i}{p_i} (I - \Sigma p_i \gamma_i)}{\beta_0 p_0} \qquad (2.3.12)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial I} = \frac{1}{\beta_0 p_0} \qquad (2.3.13)$$

SUSTITUYENDO LAS EXPRESIONES (2.3.12) Y (2.3.13) EN LA IDENTIDAD (2.3.11), OBTENEMOS LAS FUNCIONES DE DEMANDA NO COMPENSADAS:

$$q_i = \frac{\gamma_i + \frac{\beta_i}{p_i}(1-\Sigma p_i\gamma_i)}{\beta_0 p_0}\beta_0 p_0 = m_i(p,1)$$

2.3.5 EL LEMA DE SHEPHARD: EN EL CONTEXTO DE LA DUALIDAD, EL LEMA DE SHEPHARD ES UNA PROPIEDAD DE LA FUNCIÓN DE COSTO QUE NOS PERMITE OBTENER LAS DEMANDAS COMPENSADAS QUE ESTÁN IMPLÍCITAS EN ELLA. EL LEMA NOS DICE LO SIGUIENTE:

$$q_i = \frac{\partial c(u,p)}{\partial p_i} \equiv h_i(u,p) \qquad (2.3.14)$$

DERIVANDO (2.3.2) CON RESPECTO A p_i, OBTENEMOS EL RESULTADO DESEADO:

$$q_i = \frac{\partial c(u,p)}{\partial p_i} = \gamma_i + \frac{\beta_i}{p_i} \equiv h_i(u,p)$$

LA EXPRESIÓN ANTERIOR CONSTITUYE EL SISTEMA DE FUNCIONES DE DEMANDA COMPENSADAS. SI MULTIPLICAMOS LA ECUACIÓN POR p_i, RESULTA LA ECUACIÓN (2.2.15)

2.3.6 Otras relaciones entre funciones: Además de las ya señaladas en los apartados anteriores, existen otras relaciones entre las funciones de demanda, de utilidad indirecta y de costo.

Como se puede observar en la figura 1.4.1 (sección 1.4), se puede obtener la función de costo al invertir la función de utilidad indirecta y viceversa. Despejando I de la función (2.3.1):

$$\Sigma p_i q_i = \Sigma p_i \gamma_i + \beta_0 p_0 u^* = c(u^*, p)$$

Se pueden obtener las funciones de demanda no compensadas (2.2.7) a partir de las funciones compensadas (2.2.15) sustituyendo la función de utilidad indirecta (2.3.1) en estas últimas.

$$h(u, p) = p_i q_i = p_i \gamma_i + \beta_i \beta_0 p_0 \frac{(I - \Sigma p_i \gamma_i)}{\beta_0 p_0}$$

$$= p_i \gamma_i + \beta_i (I - \Sigma p_i \gamma_i) = m(I, p)$$

También se pueden obtener las demandas compensadas a partir de las funciones de demanda no compensadas al sustituir en estas la función de costo.

$$m(I,p) = p_i \gamma_i + \beta_i(\Sigma p_i \gamma_i + \beta_0 p_0 u^* - \Sigma p_i \gamma_i)$$

$$= p_i \gamma_i + \beta_i \beta_0 p_0 u^* = h(u,p)$$

CON ESTAS RELACIONES SE COMPLETA EL ESQUEMA REPRESENTADO EN LA FIGURA 3.2.

2.4 PROPIEDADES DE LAS DEMANDAS COMPENSADAS Y NO COMPENSADAS DEL SLG

EN ESTA SECCIÓN SE VERIFICA QUE LAS DEMANDAS NO COMPENSADAS OBTENIDAS AL OPTIMIZAR LA FUNCIÓN DE UTILIDAD DE STONE-GEARY SUJETA A UNA RESTRICCIÓN PRESUPUESTAL LINEAL CUMPLEN CON LAS PROPIEDADES DE UNA FUNCIÓN DE DEMANDA.

EN LA SECCIÓN 1.5 SE PROPONEN CUATRO PROPIEDADES GENERALES QUE TODO SISTEMA DE DEMANDA DEBE CUMPLIR. ESTAS SON:

ADITIVIDAD

HOMOGENEIDAD

SIMETRÍA

NEGATIVIDAD

2.4.1 ADITIVIDAD: PARA CUMPLIR CON ESTA PROPIEDAD LA SUMA DE LAS CANTIDADES ÓPTIMAS MULTIPLICADAS POR SUS PRECIOS DEBEN SER IGUALES AL GASTO TOTAL.

$$I = \Sigma\, p_i q_i \qquad (2.4.1)$$

LAS DEMANDAS NO COMPENSADAS DEBEN CUMPLIR CON (2.4.1). PARA CONFIRMALO, SUSTITUIMOS LA EXPRESIÓN (2.2.8) EN (2.4.1), RECORDANDO LA VIGENCIA DE LA RESTRICCIÓN (2.2.11).

$$\Sigma\, p_i \gamma_i + \frac{\beta_i}{p_i} (I - \Sigma p_i \gamma_i)$$

$$\Sigma\, p_i \gamma_i + I - \Sigma\, p_i \gamma_i = I$$

SUSTITUYENDO (2.4.2) EN (2.4.1) TENEMOS:

$$\Sigma\, p_i q_i = \Sigma\, p_i \gamma_i + \Sigma\, \beta_i \beta_0 p_0 \frac{(I - \Sigma\, p_i \gamma_i)}{\beta_0 p_0}$$

CANCELANDO TÉRMINOS SEMEJANTES, RESULTA:

$$\Sigma\, p_i q_i = \Sigma\, p_i \gamma_i + \Sigma\, \beta_i (I - \Sigma\, p_i \gamma_i) = I$$

La restricción de aditividad implica dos propiedades: a) agregación de Engel; b) agregación de Cournot.

a) Agregación de Engel: Esta propiedad es la derivada de la condición de aditividad (2.4.1) con respecto del ingreso, I. Aplicando el resultado (1.5.2) se obtiene la expresión de la agregación de Engel.

$$\Sigma_j \; p_j \frac{\partial}{\partial I}(\gamma_j + \frac{\beta_j}{p_j}(I - \Sigma p_i \gamma_i) = 1$$

Al efectuar la derivación, resulta:

$$\Sigma_j \beta_j = 1 \qquad (2.4.2)$$

b) Agregación de Cournot: Esta propiedad de las funciones de demanda no compensadas también es una consecuencia de la aditividad. Se define como la derivada de la condición (2.4.1) con respecto de p_j, a partir del resultado (1.5.3).

$$\Sigma_i \; p_i \frac{\partial}{\partial I}(\gamma_i + \frac{\beta_i}{p_i}(I - \Sigma p_i \gamma_i) + q_j = 0$$

La ecuación anterior se puede expresar en términos de derivadas. Para lograrlo, se divide entre el ingreso, I, y se multiplica por p_j toda la ecuación anterior; el primer término se multiplica y divide por p_j para obtener la siguiente expresión:

$$\varepsilon_{ii} = -\beta_i \frac{p_i\gamma_i + (1-\Sigma p_i\gamma_i)}{p_i\gamma_i + \beta_i(1-\Sigma p_i\gamma_i)}$$

$$= -1 + \frac{\gamma_i(1-\beta_i)}{q_i} \qquad (2.4.4)$$

La elasticidad-precio cruzada de las mismas demandas está dada por la expresión siguiente:

$$\varepsilon_{ij} = -\gamma_j \frac{p_j\beta_j}{q_j p_j} \qquad (2.4.5)$$

Entonces, la agregación de Cournot se expresa, sustituyendo (2.4.5) en (2.4.3), y despejando, como sigue:

$$w_j = -\beta_j p_j \gamma_j \Sigma_i \frac{w_i}{q_i p_i} \qquad (2.4.6)$$

Por otra parte, la agregación de Engel (2.4.2) también se puede expresar en términos de elasticidades con la expresión siguiente:

$$\frac{\Sigma\ p_i q_i}{I}\ \nu_i = 1 \qquad 2.4.7)$$

Donde ν_i es la elasticidad-ingreso de la demanda no compensada.

La elasticidad-ingreso del modelo SLG se define, recordando (1.5.12), como:

$$\nu_i = \beta_i \frac{I}{p_i q_i} \qquad (2.4.8)$$

Si sustituimos la proporción de gasto (1.5.14) en (2.4.7), la agregación de Engel también es:

$$\Sigma_i w_i \nu_i = 1 \qquad (2.4.9)$$

2.4.2 Homogeneidad: Las demandas compensadas (2.2.15) son homogéneas de grado cero en precios; las demandas no compensadas, (2.2.7) son homogéneas de grado cero en precios e ingreso.

Para verificar la homogeneidad de las demandas compensadas, multiplicamos p_i en (2.2.15) por una constante $0 \leq r \leq 1$ y se aplica la aditividad de Engel, (2.4.2):

$$h_i(u, rp) = \gamma_i + \frac{\beta_i}{rp_i}\beta_0 u^* \Pi_i (rp_i)^{\beta_i}$$

$$= \gamma_i + \frac{\beta_i}{rp_i}\beta_0 u^* r^{\Sigma\beta_i} \Pi_i p_i^{\beta_i}$$

$$= \gamma_i + r^0 \frac{\beta_i}{p_i}\beta_0 u^* \Pi_i p_i^{\beta_i}$$

$$= r^0 h_i(u, p)$$

PUESTO QUE EL EXPONENTE DE r ES CERO, LA PROPOSICIÓN DE HOMOGENEIDAD QUEDA DEMOSTRADA.

EL MISMO PROCEDIMIENTO SE APLICA A LAS FUNCIONES DE DEMANDA NO COMPENSADAS, (2.2.7) PARA VERIFICAR LA HOMOGENIDAD. MULTIPLICAMOS p_i E I EN LA ECUACIÓN POR UNA CONSTANTE $0 \leq r \leq 1$:

$$m_i(rI, rp) = \gamma_i + \frac{\beta_i}{rp_i}(rI - \Sigma r p_i \gamma_i)$$

$$= \gamma_i + r^0 \frac{\beta_i}{p_i}(I - \Sigma p_i \gamma_i) = r^0 m_i(I, p)$$

COMO EL EXPONENTE DE r ES CERO, LAS FUNCIONES DE DEMANDA NO COMPENSADAS SON HOMOGÉNEAS DE GRADO CERO EN PRECIOS E INGRESO.

LA RESTRICCIÓN DE HOMOGENEIDAD SE PUEDE ESCRIBIR EN TÉRMINOS DE ELASTICIDADES DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$\nu_i + \Sigma_j \, \varepsilon_{ij} = 0 \qquad (2.4.10)$$

LO CUAL IMPLICA PARA EL SLG QUE

$$\beta_i = \frac{1}{I} \Sigma_j \beta_j p_j \gamma_j$$

PARA TODA $i \neq j$

2.4.3 SIMETRÍA: LAS DERIVADAS CRUZADAS DE LAS DEMANDAS COMPENSADAS RESPECTO DE LOS PRECIOS SON SIMÉTRICAS. ESTO ES, PARA TODA i, j, LA MATRIZ DE SUSTITUCIÓN ES SIMÉTRICA.

SE DEBE CUMPLIR:

$$[s_{ij}] = [s_{ji}] \tag{2.4.11}$$

ESTA CONDICIÓN SÍ CUMPLE CON LA IGUALDAD SIGUIENTE:

$$\frac{\partial h_i(u^*, p)}{\partial p_j} \equiv \frac{\partial h_j(u, p)}{\partial p_i} \tag{2.4.12}$$

PARA VERIFICAR, SE DESPEJA q_i DE (2.2.15) Y SE DERIVA DE ACUERDO A (2.4.12):

$$\frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j} = \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = \frac{\beta_j}{p_j} h_i(u, p) \tag{2.4.13}$$

$$\frac{\partial h_j(u, p)}{\partial p_i} = \frac{\partial q_j}{\partial p_i} = \frac{\beta_i}{p_i} h_j(u, p) \tag{2.4.14}$$

PARA QUE SE CUMPLA LA SIMETRÍA, LAS ECUACIONES (2.4.13) Y (2.4.14) DEBEN SER IGUALES.

$$\frac{\beta_j}{p_j} h_j(u, p) = \frac{\beta_i}{p_i} h_i(u, p)$$

Si multiplicamos la ecuación anterior por $p_i p_j$ resulta:

$$\beta_i \beta_j = \beta_j \beta_i$$

El resultado anterior muestra que se cumple la condición de simetría.

2.4.4 Negatividad: La matriz de sustitución debe ser negativa semidefinida. Para probar esta propiedad, se utiliza un teorema que dice que la matriz hessiana de una función cóncava es negativa semidefinida. La matriz de Sustitución es la matriz hessiana de la función de Costo. Esta función es cóncava en precios, como se demuestra en la propiedad 4 de la función de Costo, ecuación (2.3.6); entonces, la matriz de sustitución es negativa semidefinida.

Una característica importante de la negatividad consiste en que la diagonal principal de la matriz de sustitución, S, solo debe tener elementos positivos. Esto significa que:

$$s_{ii} \leq 0$$

Derivando las funciones de demanda no compensadas respecto de p_i:

$$s_{ii} = \frac{\partial h_i(u^*, p)}{\partial p_j} = -(I-\Sigma p_i \gamma_i) \frac{(1-\beta_i)\beta_i}{(p_i)^2} \leq 0$$

La expresión anterior es negativa para todo $\beta_i<1$ y cero para $\beta_i=1$ puesto que todos los β_i, los precios y el ingreso "supernumerario", $I-\Sigma p_i \gamma_i$, son positivos.

Los elementos fuera de la diagonal de la matriz S son positivos. Estos elementos se obtienen al derivar la función de demanda compensada respecto de p_j.

$$s_{ij} = \frac{\partial h_i(u^*, p)}{\partial p_j} = (I-\Sigma p_i \gamma_i) \frac{\beta_i \beta_j}{p_i p_j} \geq 0$$

La relación entre las demandas no compensadas y la matriz de sustitución esta dada por la ecuación de Slutsky, (1.5.25). El resultado de s_{ij} para toda i, j debe ser el mismo que los anteriores. Las ecuaciones de Slutsky son:

$$s_{ii} = \frac{\beta_i}{p_i}(\gamma_i + \frac{\beta_i}{p_i}(I-\Sigma p_i \gamma_i)) - \frac{\beta_i}{p_i} (\gamma_i + \frac{I-\Sigma p_i \gamma_i}{p_i})$$

$$s_{ij} = \frac{\beta_i}{p_i}(\gamma_j + \frac{\beta_j}{p_j}(1-\Sigma p_i \gamma_i)) - \frac{\beta_i}{p_i}\gamma_i$$

EN ESTAS ECUACIONES SE PUEDE DISTINGUIR EL EFECTO SUSTITUCIÓN, CON s_{ij}, Y EL EFECTO INGRESO, CON EL PRIMER TÉRMINO DEL SEGUNDO MIEMBRO DE CADA ECUACIÓN.

CAPITULO 3

REVISION DE UNA APLICACION DEL SLG PARA MEXICO

En este capítulo, con el objeto de ilustrar una aplicación del modelo, se revisan las estimaciones del Sistema lineal de gasto, (SLG) realizadas por García Alba, 1986, pgs. 305-335. En su artículo, dicho autor lleva a cabo estimaciones del SLG con el objeto de comparar los resultados con los de estimaciones de modelos de ecuaciones de demanda alternativos, entre ellos, uno propuesto por el autor. Con las estimaciones de los parámetros, el autor obtuvo las elasticidades-ingreso y elasticidades-precio, propias y cruzadas, compensadas y no compensadas.

Nuestro trabajo consiste en revisar la ecuación estimable, los supuestos de estimación, los datos utilizados y los resultados obtenidos. A continuación, con estos resultados, se confirma el grado de cumplimiento de las restricciones de la teoría de la demanda del Consumidor: aditividad de Engel, aditividad de Cournot, Homogeneidad, simetría y negatividad, que tienen los parámetros estimados; por último, se revisa la capacidad predictiva del SLG estimado.

3.1 El sistema de ecuaciones estimable

La ecuación estimable del SLG propuesta por García Alba, 1986, pg. 314, es, adaptada a nuestra nomenclatura desarrollada en el capítulo 2, la siguiente:

$$w_{it} = (1-\theta)\beta_i\left(1-\frac{\Sigma_j p_{jt}\gamma_j{}^o\nu_t}{I_t}\right) + (1-\theta)\frac{p_{it}\gamma_i{}^o\nu_t}{I_t} + \theta w_{it-1} + u_{it} \qquad (3.1.1)$$

donde i= 1,2,..,n y t representa el tiempo; w_{it} es la iésima proporción de gasto (1.5.14) en el tiempo t; N_t es un índice del tamaño de la población; pi son los precios y β_i, γ_i y θ son parámetros.

La ecuación (3.1.1) es una transformación de la expresión desarrollada para el capítulo 2. Se obtiene al dividir (2.2.7) entre el ingreso, I, e introducir un esquema de rezagos distribuidos de Koyck. El parámetro θ aparece para "permitir rezagos en las respuestas del consumo de acuerdo a un esquema de ajuste temporal del tipo de Koyck" (García Alba, 1986, pg. 315).

El autor también señala que dicho parámetro es el mismo para todos los bienes. Postular un θ diferente para cada bien considerado sería inconsistente con la aditividad. Se reporta

ADEMÁS, UN MEJOR AJUSTE ESTADÍSTICO A LA MUESTRA QUE EN EL CASO DE $\theta=0$. (GARCÍA ALBA, PG. 315)

LA VARIABLE γ_t SE SUSTITUYE POR $\gamma_t{}^0 N_t$ PARA "PERMITIR QUE LOS NIVELES DE SUBSISTENCIA VARÍEN CON EL TAMAÑO DE LA POBLACIÓN" (GARCÍA ALBA, PG. 315). DE ESTA MANERA, LA ESTIMACIÓN DEL CONSUMO DE SUBSISTENCIA "AGREGADO" TOMA EN CUENTA QUE LA POBLACIÓN NO ES LA MISMA EN EL TIEMPO.

3.2 SUPUESTOS Y MÉTODO DE ESTIMACIÓN

EL AUTOR RECONOCE EN PRINCIPIO QUE EL SUPUESTO DE MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS, (MCO), PARA LA MATRIZ DE VARIANZA-COVARIANZA DE LOS ERRORES, EL CUAL SE EXPRESA COMO:

$$V(u) = \sigma^2 I \qquad (3.2.1)$$

CONDUCE A ESTIMADORES INCONSISTENTES CUANDO SE ESTIMAN SISTEMAS DE ECUACIONES DE DEMANDA.

ACEPTA TAMBIÉN QUE EL SIGUIENTE SUPUESTO SOBRE LA MATRIZ DE VARIANZA-COVARIANZA DE LOS ERRORES ES UN SUPUESTO ADECUADO.

$$V(u) = \sigma^2 \Omega \qquad (3.2.2)$$

LA EXPRESIÓN (3.2.2) SUPONE QUE LAS VARIANZAS NO SON CONSTANTES Y PERMITE QUE LAS COVARIANZAS SEAN DIFERENTES DE CERO. ES UN SUPUESTO RAZONABLE DESDE DOS PUNTOS DE VISTA. PRIMERO, EL USO DE DATOS EN LA ESTIMACIÓN QUE SON UNA MEZCLA DE SERIES DE TIEMPO Y DE CORTE TRANSVERSAL PUEDE CONDUCIR A PROBLEMAS DE HETEROSCEDASTICIDAD; SEGUNDO, UNA PROPIEDAD DEL SISTEMA ESTIMABLE (3.1.1) DERIVADA DE LA PROPIEDAD DE ADITIVIDAD SEÑALA QUE LA SUMA DE LOS ERRORES ENTRE LAS n ECUACIONES ES CERO.

$$\Sigma_i \, u_{it} = 0 \qquad (3.2.3)$$

LA PROPIEDAD (3.2.3) IMPLICA QUE EL ERROR ESTOCÁSTICO u_{it} ESPECIFICADO EN CUALQUIER ECUACIÓN DEL SISTEMA (3.1.1) SE DEBE COMPENSAR CON LOS $n-1$ ERRORES DE LAS OTRAS ECUACIONES PARA QUE LA ADITIVIDAD SE CUMPLA. ESTO SIGNIFICA QUE NO TODAS LAS COVARIANZAS DE $V(u)$ DEBEN SER IGUALES A CERO. ENTONCES, UN SUPUESTO ADECUADO PARA LA MATRIZ Ω QUE DA RESPUESTA A LOS PROBLEMAS ANTERIORES ES EL SIGUIENTE:

$$\Omega = \frac{I - i\,i'}{n} \qquad (3.2.4)$$

De acuerdo al autor, la ventaja de este supuesto es que los estimadores de MCO coinciden con aquéllos de Minimos cuadrados generalizados, (MCG), por lo que sus estimaciones se efectúan con el primer método mencionado.

3.3 Una nota sobre los datos utilizados

Los datos sobre consumo privado, por origen del bien, utilizados en las estimaciones provienen de las Cuentas Nacionales elaboradas por la Secretaría de Programación y Presupuesto, SPP. Estos aparecen desagregados en nueve grandes divisiones. La Gran Dvisión de Manufacturas también aparece separada en nueve divisiones. Puesto que por definición, el consumo privado de la Gran División 4 es cero, se cuenta con 16 grupos de consumo privado por origen.

Sin embargo, una limitante es el número de observaciones disponibles. Los datos elaborados por SPP solo cuentan con 12 observaciones, lo cual constituye una muestra demasiado pequeña para realizar estimaciones.

Para aumentar el tamaño de la muestra se recurrió a una extrapolación de las tendencias del consumo privado hacia atrás, a partir de 1970, aprovechando la estructura del consumo

OBSERVADA EN LAS CUENTAS NACIONALES ELABORADAS POR EL BANCO DE MÉXICO Y DE LA MATRIZ DE INSUMO-PRODUCTO DE 1960, TAMBIÉN ELABORADA POR LA MISMA INSTITUCIÓN.

CON EL OBJETO DE COMPATIBILIZAR LAS DOS FUENTES DE INFORMACIÓN Y "PEGAR" LAS SERIES ESTADÍSTICAS, SE REDUJERON LOS GRUPOS A 14, AGRUPADOS DE ACUERDO AL SIGUIENTE CUADRO:

CUADRO 3.2.1 AGREGACION DE MERCANCIAS PARA LA ESTIMACION DE LOS SISTEMAS DE DEMANDA

1.SECTOR PRIMARIO	GRAN DIVISIÓN 1	AGRICULTURA, GANADERÍA, SILVICULTURA, PESCA
	GRAN DIVISIÓN 2	MINERÍA
2.ELECTRICIDAD	GRAN DIVISIÓN 5	ELECTRICIDAD
3.RESTAURANTES Y HOTELES	GRAN DIVISIÓN 6	COMERCIO, RESTAURANTES Y HOTELES
4.TRANSPORTE	GRAN DIVISIÓN 7	TRANSPORTE, ALMACENAMIENTO Y COMUNICACIONES
5.SERVS. FINANC. VIVIENDA	GRAN DIVISIÓN 8	SERVICIOS FINANCIEROS, SEGUROS, BIENES RAÍCES
6.OTROS SERVICIOS	GRAN DIVISIÓN 9	SERVICIOS COMUNALES, SOCIALES, PERSONALES
7.ALIMENTOS PROCESADOS	DIVISIÓN I	ALIMENTOS, BEBIDAS, TABACO
8.TEXTILES	DIVISIÓN II	TEXTILES, ROPA, CUERO Y SUS DERIVADOS
9.PRODUCTOS DE MADERA	DIVISIÓN III	MADERA Y PRODUCTOS DE MADERA
10.PAPEL	DIVISIÓN IV	PAPEL, PRODUCTOS DE PAPEL, LIBROS
11.PRODUCTOS QUÍMICOS	DIVISIÓN V	DERIVADOS DE PETROLEO, HULE, PLÁSTICO
12.PRODUCTOS MINERALES NO METÁLICOS	DIVISIÓN VI	PRODUCTOS MINERALES NO METALICOS EXCEPTO DERIVADOS DEL PETRÓLEO
13.PRODUCTOS METÁLICOS	DIVISIÓN VII	INDUSTRIAS METÁLICAS BÁSICAS
	DIVISIÓN VIII	PRODUCTOS METÁLICOS, MAQUINARIA Y EQUIPO
14.OTRAS MANUFACTURAS	DIVISIÓN IX	OTRAS INDUSTRIAS MANUFACTURERAS

FUENTE: GARCIA ALBA, 1986, PG. 314

DE ESTA MANERA, CON EL PROCEDIMIENTO DE EXTRAPOLACIÓN DE LAS TENDENCIAS REALIZADO, EL AUTOR LOGRÓ AUMENTAR EL TAMAÑO DE MUESTRA, DE 12 OBSERVACIONES A 22. EL PERÍODO ANALIZADO ES ENTONCES 1960-1981.

3.4 ESTIMACIONES DEL SLG

UNA VEZ DECIDIDO EL MÉTODO DE ESTIMACIÓN Y PREPARADOS LOS DATOS, SE ELIGE EL PROCEDIMIENTO PARA ESTIMAR LOS PARÁMETROS. LOS PARÁMETROS QUE SE DEBEN ESTIMAR SON: $(1-\theta)\gamma_i^0$ Y β_i. EL MODELO ESTIMABLE ES NO LINEAL EN PARÁMETROS, PERO SI CONOCEMOS VALORES DE β_i, EL MODELO ES LINEAL EN $(1-\theta)\gamma_i^0$. DE IGUAL MANERA, SI TENEMOS VALORES CONOCIDOS DE $(1-\theta)\gamma_i^0$, EL MODELO ES LINEAL EN β_i.

ESTA CARACTERÍSTICA DE LA ECUACIÓN ESTIMABLE DEL MODELO SLG PERMITE UTILIZAR UN PROCEDIMIENTO ITERATIVO PARA CALCULAR LAS ESTIMACIONES DE LOS PARÁMETROS. EL PROCEDIMIENTO ES EL SIGUIENTE: SE DAN VALORES INICIALES A LOS COEFICIENTES β_i Y SE ESTIMAN LOS $(1-\theta)\gamma_i^0$. ESTAS ESTIMACIONES SE USAN PARA ESTIMAR β_i EN EL SIGUIENTE PASO. DE ESTA MANERA SE TIENE UN ESTIMADOR EN DOS PASOS, QUE SE REPITE HASTA QUE NO SE OBTENGA DIFERENCIA SIGNIFICATIVA ENTRE LAS ESTIMACIONES DE DOS ITERACIONES CONSECUTIVAS.

Este procedimiento por primera vez fué utilizado por R. Stone en 1954 (ver R. Stone, 1954). para estimar el SLG. Como dicen Deaton y Muellbauer, 1980, pg. 66, "De acuerdo a los estándares modernos, este procedimiento no es muy eficiente ni muy exacto, pero permitió a Stone aplicar el modelo a seis grupos de bienes....".

El problema de la eficiencia se asocia a la distribución en el muestreo de los estimadores. El hecho de que un estimador sea más eficiente que otro sólo se puede afirmar con la distribución límite, cuando el tamaño de muestra tiende a infinito. Esto es así porque el método de mínimos cuadrados alternativo sería MCG. Como se desconoce la distribución en el muestreo de los estimadores cuando se trata de pequeñas muestras, el problema de la eficiencia normalmente se dilucida en base a experimentos de Montecarlo. Estos experimentos consisten en aproximar las distribuciones en el muestreo de diferentes métodos para estimar los parámetros de un modelo y observar cuál método tiene la distribución muestral con menor varianza.

La distribución en el muestreo de los estimadores se aproxima generando un número grande de muestras (normalmente mayor de 100) del mismo tamaño que la muestra usada en la estimación. Con estas muestras se obtiene la distribución

EMPÍRICA DE LOS ESTIMADORES Y SE CALCULA SU VARIANZA. EL MÉTODO MÁS EFICIENTE SERÁ EL QUE TENGA LA MENOR VARIANZA.

LAS MUESTRAS SE GENERAN DE LA SIGUIENTE MANERA: SE GENERAN VALORES DEL ERROR ALEATORIO u_{it} CON UN GENERADOR DE NÚMEROS ALEATORIOS Y CON LA MUESTRA DE VARIABLES EXPLICATIVAS Y CON LOS VALORES DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO EXPERIMENTADO SE CALCULAN VALORES DE LA VARIABLE EXPLICADA. DE ESTA MANERA SE TIENE UN NÚMERO GRANDE DE MUESTRAS Y SE ESTIMAN LOS PARÁMETROS DEL MODELO PARA CADA MUESTRA. CON ESTOS PARÁMETROS SE APROXIMA LA DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE LOS ESTIMADORES. UNA EXPOSICIÓN MÁS DETALLADA DE LOS MÉTODOS DE MONTECARLO QUEDARÍA FUERA DE LOS OBJETIVOS DE ESTE TRABAJO. PARA MAYORES DETALLES, SE PUEDE CONSULTAR JUDGE, ET. AL., 1982.

OTRA ALTERNATIVA A LOS EXPERIMENTOS DE MONTECARLO PUEDE SER EL USO DEL MÉTODO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD, MV. ESTE MÉTODO CONSISTE EN SUPONER UNA DISTRIBUCIÓN DE LOS ERRORES ALEATORIOS Y MAXIMIZAR LA FUNCIÓN DE MÁXIMA VEROSIMILITUD QUE SE CONSTRUYE A PARTIR DE LA DISTRIBUCIÓN SUPÜESTA. A.P.BARTEN, 1969, EFECTUÓ LA ESTIMACIÓN DE DIFERENTES VERSIONES DE UN SISTEMA GRANDE DE 16 ECUACIONES PARA PROBAR LAS DISTINTAS RESTRICCIONES QUE LA TEORÍA DE LA DEMANDA IMPONE. EL MÉTODO UTILIZADO PARA SUS ESTIMACIONES FUÉ DEL DE MV. UNA DISCUSIÓN MÁS AMPLIA DEL MÉTODO DE MV

QUEDARÍA FUERA DEL ALCANCE DEL PRESENTE CAPÍTULO. PARA UNA REFERENCIA SE PUEDE CONSULTAR POR EJEMPLO, JUDGE, ET. AL., 1982, CAPS. 3 Y 4.

UNA VEZ ESTIMADOS LOS PARÁMETROS, PARA OBTENER LAS ESTIMACIONES DE γ_i^0, SE DIVIDEN LOS COEFICIENTES ESTIMADOS DE $(I-\theta)\gamma_i^0$ ENTRE LA ESTIMACIÓN DE $(I-\theta)$. LOS RESULTADOS OBTENIDOS POR GARCÍA ALBA SE PRESENTAN EN EL CUADRO 3.2.2

CUADRO 3.2.2 PARAMETROS DEL MODELO SLG Y PROYECCIONES PARA 1982

	β_i	$(1-\theta)\gamma_i$	γ_i	P_i82	π_i82	π_i82	dif	P_iq_i	P_iq_i	dif
1	.091930	22,640.000	42,993.6800	8.898789	.100923	.1068309	-.0059080	594,543.2	594,543.2	0
2	.012438	1,263.630	2,399.6510	3.736154	.003939	.0040197	-.0000805	23,206.0	23,206.0	0
3	.061140	10,547.400	20,029.6600	13.069550	.069788	.0693268	.0004609	411,123.6	411,123.6	0
4	.086367	10,711.600	20,341.4800	11.278560	.068277	.0649743	.0033023	402,221.6	402,221.6	0
5	.030028	20,394.200	38,728.8800	7.807195	.079808	.0812043	-.0013966	470,151.6	470,151.6	0
6	.034160	20,201.300	38,362.5600	11.444470	.122766	.1168025	.0059629	723,218.7	723,218.7	0
7	.230843	55,608.500	105,601.3000	8.686909	.249747	.2576412	-.0078943	1,471,274.0	1,471,274.0	0
8	.149231	24,357.200	46,254.6700	9.066510	.113309	.1188710	-.0055620	667,510.0	667,510.0	0
9	.009633	3,326.340	6,316.7670	10.965170	.020331	.0190591	.0012722	119,772.6	119,772.6	0
10	.007211	1,796.910	3,412.3580	11.428110	.013066	.0107275	.0023382	76,970.6	76,970.6	0
11	.119551	14,373.800	27,296.0500	7.126572	.066268	.0016367	.0046313	390,388.6	390,388.6	0
12	.008336	1,480.060	2,810.6550	9.825701	.007008	.0073542	-.0003467	41,281.7	41,281.7	0
13	.140745	14,796.700	28,099.1400	7.516328	.061259	.0088990	-.0076402	360,879.2	360,879.2	0
14	.018388	278.189	528.2849	13.486480	.023513	.0126530	.0108604	138,518.3	138,518.3	0
SUMA	1.000001		813,929.1000		1.0000000	1.0000000	0.0000000	5,891,060.0	5,891,060.0	0

FUENTE: GARCÍA ALBA, 1986, PG. 316, CUADRO 4.2 Y CÁLCULOS PROPIOS

Todos los parámetros presentados tienen coeficientes "t" sigificativos. Esto quiere decir que se puede rechazar la hipótesis estadística de que cada parámetro es cero con 99% de confianza. Esto es así porque todos los estadísticos "t" de los parámetros estimados son mayores que el valor crítico del estadístico "t" para 19 grados de libertad, que es de 2.861.

Con las estimaciones de los parámetros β_i, $(1-\theta)V_i$ y θ se pueden calcular las estimaciones de las elasticidades-ingreso y elasticidades-precio, compensadas y no compensadas. En los cuadros 3.2.3 a 3.2.5 se presentan las elasticidades estimadas por García Alba.

CUADRO 3.2.3 ELASTICIDADES ESTIMADAS DEL MODELO SLG

SECTOR	ELASTICIDADES INGRESO	ELASTICIDADES-PRECIO PROPIAS NO COMPENSADAS	ELASTICIDADES-PRECIO PROPIAS COMPENSADAS
1	.841705	-.173666	-.081736
2	2.926523	-.321502	-.309064
3	.905963	-.152099	-.090959
4	1.437703	-.226834	-.140467
5	.364873	-.067875	-.037847
6	.306819	-.065850	-.031690
7	.881700	-.303365	-.072522
8	1.244603	-.262464	-.113233
9	.544141	-.067262	-.057629
10	.709805	-.082569	-.075358
11	2.007926	-.308604	-.189053
12	1.114225	-.126496	-.118160
13	2.142075	-.337574	-.196829
14	.798354	-.102193	-.083805

FUENTE: García Alba, 1986, cuadro 4.4, pág. 319

CUADRO 3.2.4 ELASTICIDADES-PRECIO NO COMPENSADAS

i-j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	-.173666	-.002458	-.051300	-.042790	-.066567	-.090637	-.199593	-.037490	-.014034	-.007902	-.039354	-.005547	-.042636	-.017731
2	-.290861	-.321502	-.178366	-.148776	-.231447	-.315137	-.693966	-.304194	-.048794	-.027474	-.136830	-.019286	-.148240	-.061650
3	-.090042	-.002645	-.152099	-.046056	-.071649	-.097557	-.214831	-.094169	-.015105	-.008505	-.042358	-.005970	-.045891	-.019085
4	-.142890	-.004198	-.087625	-.226834	-.113702	-.154816	-.340922	-.149441	-.023971	-.013497	-.067220	-.009474	-.072825	-.030287
5	-.036264	-.001065	-.022238	-.018549	-.067875	-.039291	-.086522	-.037926	-.006084	-.003425	-.017060	-.002405	-.018482	-.007686
6	-.030494	-.000896	-.018700	-.015598	-.024265	-.065850	-.072756	-.031892	-.005116	-.002880	-.014345	-.002022	-.015542	-.006463
7	-.087630	-.002575	-.053738	-.044823	-.069730	-.094944	-.303365	-.091647	-.014701	-.008277	-.041224	-.005810	-.044662	-.018574
8	-.123699	-.003634	-.075856	-.063272	-.098431	-.134023	-.295133	-.252464	-.020751	-.011684	-.058191	-.008202	-.063044	-.026219
9	-.054081	-.001589	-.033164	-.027662	-.043034	-.058595	-.129032	-.056560	-.067262	-.005108	-.025441	-.003586	-.027563	-.011463
10	-.070546	-.002073	-.043261	-.036084	-.056136	-.076434	-.168316	-.073780	-.011835	-.082569	-.033187	-.004678	-.035954	-.014953
11	-.199564	-.005863	-.122379	-.102077	-.158799	-.216219	-.476139	-.208712	-.033478	-.018850	-.308604	-.013232	-.101709	-.042299
12	-.110741	-.003254	-.067910	-.056644	-.088120	-.119983	-.264216	-.115817	-.018577	-.010460	-.052096	-.126496	-.056440	-.023472
13	-.212897	-.006255	-.130555	-.108897	-.169408	-.230665	-.507950	-.222658	-.035715	-.020110	-.100153	-.014116	-.337574	-.045125
14	-.079347	-.002331	-.048659	-.040586	-.063139	-.085969	-.189314	-.082984	-.013311	-.007495	-.037327	-.005261	-.040440	-.102193

FUENTE: GARCÍA ALBA, 1986, CUADRO 4.5, PG. 322

CUADRO 3.2.5 ELASTICIDADES-PRECIO COMPENSADAS

i-j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	-.081736	.001120	.005503	.007774	.002703	.003075	.020778	.013432	.000867	.000649	.010761	.000750	.012668	.001655
2	.028770	-.309064	.019134	.027029	.009397	.010691	.072244	.046703	.003015	.002257	.037414	.002609	.044047	.005755
3	.008906	.001205	-.090959	.008364	.002909	.003309	.022365	.014458	.000933	.000699	.011582	.000808	.013636	.001781
4	.014134	.001912	.009400	-.140467	.004617	.005252	.035491	.022944	.001481	.001109	.018380	.001282	.021639	.002827
5	.003587	.000485	.002386	.003370	-.037847	.001333	.009007	.005823	.000376	.000281	.004665	.000325	.005492	.000717
6	.003016	.000408	.002006	.002834	.000985	-.031690	.007574	.004896	.000316	.000237	.003923	.000274	.004618	.000603
7	.008669	.001173	.005765	.008143	.002831	.003221	-.072522	.014071	.000908	.000680	.011272	.000786	.013270	.001734
8	.012235	.001655	.008137	.011495	.003997	.004547	.030724	-.113233	.001282	.000960	.015912	.001109	.018733	.002447
9	.005349	.000724	.003558	.005026	.001747	.001988	.013433	.008684	-.057629	.000420	.006957	.000485	.008190	.001070
10	.006978	.000944	.004641	.006556	.002279	.002593	.017522	.011327	.000731	-.075358	.009075	.000633	.010683	.001396
11	.019740	.002671	.013128	.018545	.006448	.007335	.049567	.032043	.002068	.001548	-.189053	.001790	.030221	.009480
12	.010954	.001482	.007285	.010291	.003578	.004070	.027506	.017781	.001148	.000859	.014245	-.118160	.016770	.002191
13	.021058	.002849	.014005	.019784	.006878	.007825	.052879	.034184	.002207	.001652	.027385	.001910	-.196829	.004212
14	.007848	.001062	.005220	.007374	.002564	.002916	.019708	.012741	.000822	.000616	.010207	.000712	.012016	-.038050

FUENTE: GARCÍA ALBA, 1986, CUADRO 4.9, PG. 326

3.5 LAS RESTRICCIONES DE LA TEORÍA

PARA EVALUAR SI LAS ESTIMACIONES DEL SLG QUE NOS OCUPA CUMPLEN CON LAS RESTRICCIONES IMPUESTAS POR LA TEORÍA DEL CONSUMIDOR, SE UTILIZARON LAS FÓRMULAS DEL CUADRO SIGUIENTE:

CUADRO 3.2.6 RESTRICCIONES DE LA TEORIA DE LA DEMANDA

ADITIVIDAD DE ENGEL	$\Sigma_i \beta_i = 1$
ADITIVIDAD DE COURNOT	$\Sigma_i w_i \epsilon_{ij} + w_j = 0$
HOMOGENEIDAD	$\Sigma_j \epsilon_{ij} + \nu_j = 0$
MATRIZ DE SLUTSKY	$s_{ij} = \frac{1}{w_j} \epsilon_{ij} + \nu_j$
SIMETRÍA	$s_{ij} = s_{ji}$
NEGATIVIDAD	$s_{ii} \leq 0$

LAS ESTIMACIONES DE LOS PARÁMETROS OBTENIDAS POR GARCÍA ALBA CUMPLEN CON LAS RESTRICCIONES A PRIORI PROPUESTAS EN EL CAPÍTULO 2. EN EL CUADRO 3.2.7 A CONTINUACIÓN, SE MUESTRAN LOS RESULTADOS OBTENIDOS AL APLICAR LAS FÓRMULAS DEL CUADRO 3.2.6 A LAS ESTIMACIONES REALIZADAS POR GARCÍA ALBA.

Como se puede ver a continuación en el cuadro 3.2.7, la suma de las β_i es igual a la unidad, hecho que muestra el cumplimiento de la agregación de Engel.

En el mismo cuadro aparecen los resultados del cálculo de la agregación de Cournot. Se puede afirmar que las estimaciones la cumplen pues el resultado de la fórmula correspondiente a esta restricción, aplicada a cada bien, es muy cercana a cero.

CUADRO 3.2.7 RESTRICCIONES DE LA TEORIA DE LA DEMANDA ESTIMADAS PARA SLG

I-J	BETA	HOMOGENEIDAD	AGREGACION DE COURNOT	NEGATIVIDAD
1	.091930	.000000	.011618	-.074163
2	.012438	.000000	.000380	-.307876
3	.061140	.000001	-.012187	-.105295
4	.086367	.000001	-.008110	-.157226
5	.030028	.000001	.026181	-.028943
6	.034160	.000000	-.004252	-.034218
7	.230843	.000000	.038786	-.042735
8	.149231	.000000	-.009047	-.131375
9	.009633	.000001	.001650	-.057003
10	.007211	-.000001	-.000222	-.075778
11	.119551	.000002	.001454	-.189464
12	.008336	-.000001	-.000103	-.118573
13	.140745	-.000003	-.007319	-.222024
14	.018388	-.000001	-.004303	-.088196
ENGEL	1.000001 (AGREGACION DE)			

FUENTE: Cuadros 3.2.2, 3.2.4 y 3.2.5

LAS ESTIMACIONES REVISADAS CUMPLEN CON LA RESTRICCIÓN DE HOMOGENEIDAD. EN EL CUADRO 3.2.7 SE PRESENTAN EN LA COLUMNA DE HOMOGENEIDAD LOS RESULTADOS DE LA ECUACIÓN RESPECTIVA DEL CUADRO 3.2.6. COMO SE PUEDE OBSERVAR, LA RESTRICCIÓN SE CUMPLE PUES EL RESULTADO DE LA ECUACIÓN CALCULADA PARA CADA BIEN, ES IGUAL A CERO.

UNO DE LOS ELEMENTOS ANALÍTICOS MÁS IMPORTANTES DE LA TEORÍA NEOCLÁSICA DEL CONSUMIDOR ES LA MATRIZ DE SUSTITUCIÓN. LOS ELEMENTOS DE ESTA MATRIZ SON LOS CAMBIOS EN LA DEMANDA COMPENSADA DEBIDOS A CAMBIOS EN LOS PRECIOS. LOS CÁLCULOS DE ESTA MATRIZ SE PRESENTAN A CONTINUACIÓN EN EL CUADRO 3.2.8.

LAS RESTRICCIONES DE NEGATIVIDAD QUE SE IMPONEN SOBRE LA MATRIZ DE SUSTITUCIÓN SON DOS: PRIMERO, LA MATRIZ DEBE SER NEGATIVA SEMIDEFINIDA; SEGUNDO, LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL PRINCIPAL DEBEN SER TODOS NEGATIVOS. EN EL CUADRO 3.2.8 SE PUEDE OBSERVAR QUE ESTA CONDICIÓN DE LA TEORÍA SÍ SE CUMPLE. LOS COEFICIENTES TAMBIÉN SE REPRODUCEN EN EL CUADRO 3.2.7 PARA SU MEJOR OBSERVACIÓN.

CUADRO 3.2.8 COEFICIENTES DE SUSTITUCION (MATRIZ DE SLUTSKY)

i-j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	-.074163	.313796	-.151294	-.042092	.217831	-.037445	.166492	.011049	.096971	.015793	.178453	.061136	.051313	-.169510
2	.466093	-.307876	-.526054	-.146339	.757372	-.130204	.578870	.038413	.337201	.054957	.620461	.212615	.178429	-.589744
3	.144286	.337892	-.105295	-.045291	.234459	-.040308	.179200	.011894	.104395	.017025	.192083	.065870	.055229	-.182568
4	.228978	.536095	-.258428	-.157226	.372073	-.063962	.284380	.018865	.165648	.027005	.304812	.104531	.087653	-.289745
5	.058111	.136141	-.065581	-.018243	-.028943	-.016237	.072173	.004792	.042017	.006894	.077352	.026444	.022251	-.073505
6	.048866	.114384	-.055151	-.015347	.079404	-.034218	.060689	.004027	.035331	.005803	.065056	.022285	.018699	-.061804
7	.140428	.328663	-.158490	-.044087	.228182	-.039226	-.042735	.011576	.101571	.016593	.186932	.064122	.053749	-.177686
8	.198217	.464123	-.223719	-.062235	.322095	-.055377	.246182	-.131375	.143422	.023398	.263882	.090425	.075884	-.250823
9	.086663	.202869	-.097805	-.027198	.140821	-.024212	.107632	.007143	-.057008	.010256	.115372	.039522	.033174	-.109662
10	.113047	.264583	-.127585	-.035484	.183691	-.031580	.140400	.009315	.081764	-.075778	.150488	.051521	.043285	-.143054
11	.319789	.748720	-.360927	-.100401	.519642	-.089328	.397171	.026351	.231369	.037735	-.189464	.145931	.122430	-.404638
12	.177453	.415358	-.200288	-.055716	.288353	-.049571	.220395	.014623	.128410	.020952	.236226	-.118578	.067932	-.224523
13	.341152	.798678	-.3850385	-.107115	.554362	-.095301	.423705	.028093	.246808	.040190	.454148	1.380391	-.222024	-.431673
14	.127148	.297721	-.143504	-.039921	.206607	-.035517	.157914	.010479	.091587	.014981	.169264	.058031	.048672	-.338196

FUENTE: CALCULADO CON LOS DATOS DE LOS CUADROS 3.2.3 Y 3.2.4

LA RESTRICCIÓN DE SIMETRÍA REQUIERE QUE LOS ELEMENTOS DEL TRIÁNGULO SUPERIOR DE LA MATRIZ DE SUSTITUCIÓN SEAN IGUALES A LOS ELEMENTOS DEL TRIÁNGULO INFERIOR; DE ESTA MANERA SE CUMPLE CON LA RESTRICCIÓN DE SIMETRÍA DEL CUADRO 3.2.6. LA MATRIZ DE SUSTITUCIÓN NO CUMPLE CON ESTA RESTRICCIÓN, COMO SE PUEDE OBSERVAR EN EL CUADRO 3.2.8.

EN EL CUADRO 3.2.9 SE PRESENTAN LOS RESULTADOS DE LA FÓRMULA DE LA RESTRICCIÓN DE SIMETRÍA DEL CUADRO 3.2.6. SI LA RESTRICCIÓN SE CUMPLIERA, LOS ELEMENTOS DEL TRIÁNGULO INFERIOR DE LA MATRIZ PRESENTADA SERÍAN CERO, AL IGUAL QUE LOS DE LA DIAGONAL PRINCIPAL. AL SER DIFERENTES DE CERO, LA CONDICIÓN DE SIMETRÍA NO SE CUMPLE.

CUADRO 3.2.9 CALCULO DE LA RESTRICCION DE SIMETRIA

I-J	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	.000000													
2	.152296	.000000												
3	.295580	.863946	.000000											
4	.271070	.682431	-.213137	.000000										
5	-.159719	-.621231	-.300041	-.390317	.000000									
6	.086311	.244587	-.014843	.048616	.095641	.000000								
7	-.026065	-.250207	-.337690	-.328467	.156008	-.099915	.000000							
8	.187169	.425710	-.235613	-.081010	.317303	-.059403	.234607	.000000						
9	-.010308	-.134332	-.202199	-.192846	.098804	-.059543	.006061	-.136279	.000000					
10	.097255	.209627	-.144611	-.062489	.176797	-.037383	.123807	-.014083	.071508	.000000				
11	.141336	.128259	-.553010	-.405213	.442289	-.154384	.210239	-.237531	.115997	-.112753	.000000			
12	.116316	.202743	-.266158	-.160247	.261910	-.071856	.156273	-.075802	.088888	-.030569	.090295	.000000		
13	.299839	.620250	-.440268	-.194777	.532111	-.113910	.369955	-.047792	.213634	-.003095	.331718	1.812458	.000000	
14	.296747	.987465	.039064	.249825	.280113	.026287	.335600	.261302	.201649	.158035	.573902	.282554	.480345	.000000

FUENTE: CALCULADO EN BASE AL CUADRO 3.2.8

3.6 Capacidad predictiva del SLG

Una característica muy atractiva del modelo SLG es su capacidad predictiva. El modelo estimado que se comenta en el presente capítulo muestra muy buena capacidad predictiva. Una característica de la ecuación estimable es que está especificada en términos de las participaciones medias en el gasto, w_{ij}. La ventaja de esta especificación, como puede apreciarse en el cuadro 3.2., es que a pesar de las pequeñas diferencias entre la variable explicada observada y estimada, al predecir los niveles de gasto en cada bien, $p_i q_i$, el error desaparece.

Para estos comentarios se realizó un ejercicio de predicción para 1982 con las estimaciones de β_i, γ_i y θ de García Alba, usando los precios y el ingreso (gasto total) observados en dicho año. El modelo se estimó para el período 1970-81. Se tomaron los datos de consumo privado por sector de origen de las Cuentas Nacionales de SPP para el año de 1982 y sus correspondientes precios implícitos. Los resultados se presentan en el cuadro 3.2.2. En dicho cuadro se pueden observar las pequeñas diferencias entre cada w_{ij} observada y la estimada. Estas diferencias se anulan al calcular el valor de la demanda por sector de origen. La diferencia en el consumo observado y estimado es cero, como podrá observarse. Esto se debe al orden de magnitud del valor del consumo.

3.7 Comentarios finales

En este capítulo se revisaron las estimaciones del SLG realizadas por García Alba para el período 1970-81. Por una parte se verificó que los prámetros del modelo estimado cumplieran con las restricciones de la teoría del Consumidor expuestas en los capítulos 1 y 2. Se concluyó que se cumplen con las restricciones de aditividad, homogeneidad y negatividad; la restricción de simetría no se cumplió.

Esta verificación del cumplimiento de restricciones de la teoría debe acotarse en el sentido siguiente. No se trata de una constatación estadística de las restricciones mediante una prueba de hipótesis; sólo de la verificación de restricciones impuestas algebraicamente en el desarrollo del modelo SLG.

Para efectuar una constatación estadística se requiere proceder en la investigación de manera un tanto diferente. En este caso, se propone pára su estimación, una forma general y se estima con y sin restricciones. Con estas estimaciones restringidas y no restringidas se efectúan pruebas de hipótesis estadísticas con el objetivo de verificar el cumplimiento de las restricciones desde el punto de vista estadístico.

Sin embargo, esta tarea tiene una dificultad, originada en el método estadístico utilizado. Esta dificultad consiste en que una estimación sin restricciones restaría grados de libertad a la prueba de hipótesis, dado el tamaño fijo y reducido de la muestra, y la imposibilidad de ampliarlo. Por esta razón, el procedimiento sólo sería viable en la estimación de sistemas de demanda con pocos bienes (un número menor de sectores al considerado por García Alba).

Por otra parte, la razón de obtener ecuaciones estimables a partir de una teoría es plantear restricciones que permitan disminuir el número de parámetros a estimar. El procedimiento propuesto para la prueba de hipótesis contradice la idea de introducir restricciones originadas en la teoría con el objeto de reducir el número de parámetros a estimar.

Con el objetivo en mente de efectuar pruebas estadísticas, sería más conveniente la estimación de otras formas funcionales que faciliten las pruebas de hipótesis estadísticas. Tal es el caso del modelo de Rotterdam, desarrollado por H. Theil y en un principio, por A. Barten (ver Theil, H. 1975). Este modelo permite la prueba sucesiva o "anidada" de las restricciones de la teoría de la demanda.*

---

* Un ejercicio de estimación del modelo de Rotterdam se puede encontrar en A. Cárdenas, 1986.

LAS ETIMACIONES DE LAS ELASTICIDADES SON CONSECUENTES CON LAS RESTRICCIONES DE LA TEORÍA. LAS ESTIMACIONES DE β_i Y $\gamma_i 0$ SON TODAS POSITIVAS. ESTE RESULTADO IMPONE RESTRICCIONES A LOS VALORES DE LAS ELASTICIDADES. LAS ELASTICIDADES-INGRESO SON TODAS POSITIVAS Y LAS ELASTICIDADES-PRECIO PROPIAS DE LA DEMANDA, ε_{ii}, SON MENORES QUE LA UNIDAD.

TODAS ELASTICIDADES-PRECIO PROPIAS COMPENSADAS TIENEN SIGNO NEGATIVO. ESTE HECHO REFLEJA LA RESTRICCIÓN DE NEGATIVIDAD SOBRE LOS ELEMENTOS s_{ij} DE LA MATRIZ DE SUSTITUCIÓN; ES DECIR, EL CUMPLIMIENTO DE LA LLAMADA "LEY DE LA DEMANDA".

SI LAS ELASTICIDADES-PRECIO CRUZADAS SON POSITIVAS, LOS GRUPOS DE BIENES SON SUSTITUTOS ENTRE SÍ; SI SON NEGATIVAS, LOS BIENES SON COMPLEMENTARIOS. PARA ILUSTRAR LO ANTERIOR, SUPONGAMOS DOS BIENES, MANTEQUILLA Y MARGARINA. ES FÁCIL INTUIR QUE ESTOS DOS BIENES SON SUSTITUTOS ENTRE SÍ. SI AUMENTA EL PRECIO DE LA MANTEQUILLA, SU CANTIDAD DEMANDADA DISMINUYE, DEMANDANDO MÁS MARGARINA. POR ESTA RAZÓN, LA ELASTICIDAD-PRECIO CRUZADA DE ESTOS DOS BIENES ES POSITIVA.

EN EL MODELO ESTIMADO, TODAS LAS ELASTICIDADES-PRECIO COMPENSADAS CRUZADAS TIENEN SIGNO POSITIVO. ESTO SIGNIFICA QUE

TODOS LOS GRUPOS DE BIENES SON SUSTITUTOS ENTRE SÍ. COMO SE RECORDARÁ, EN LOS CAPÍTULOS ANTERIORES SE HABLÓ DE UNA LIMITACIÓN DEL SLG, QUE CONSISTÍA EN IMPONER UN SIGNO POSITIVO A LAS ELASTICIDADES-PRECIO COMPENSADAS CRUZADAS.

ENTONCES, MÁS QUE UN RESULTADO ANALÍTICO DEL MODELO SLG, LA SUSTITUBILIDAD DE LOS GRUPOS DE BIENES ES UN RESULTADO DE SUPONER UN MODELO DE DEMANDA DERIVADO DE UNA FUNCIÓN DE UTILIDAD ADITIVA.

CUANDO LA ELASTICIDAD-INGRESO DE UN BIEN ES MAYOR QUE LA UNIDAD, ESTE BIEN ES UN "LUJO". UN "LUJO" EN EL SENTIDO DE QUE A MAYOR INGRESO MÁS AUMENTA SU DEMANDA. POR EL CONTRARIO, A DISMINUCIONES EN EL INGRESO CORRESPONDE UNA DISMINUCIÓN EN LA DEMANDA. SI LA MISMA ELASTICIDAD ES MENOR QUE LA UNIDAD, EL BIEN SE CLASIFICA COMO UN "BÁSICO", PUES ESTE VALOR DE LA ELASTICIDAD-INGRESO IMPLICA QUE LA DEMANDA NO CAMBIA MUCHO ANTE CAMBIOS EN EL INGRESO.

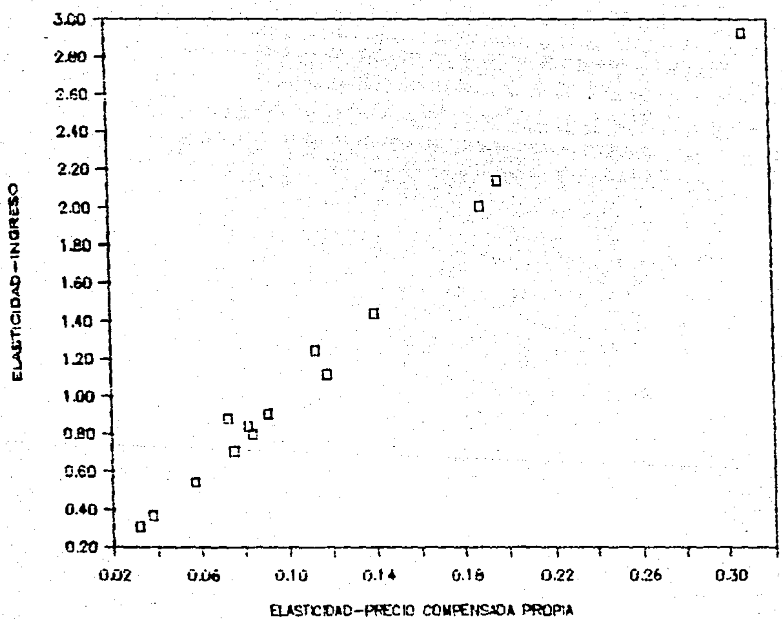
DE ACUERDO A LO ANTERIOR, LOS SECTORES (1) AGROPECUARIO; (3) RESTAURANTES Y HOTELES; (5) SERVICIOS FINANCIEROS Y VIVIENDA; (6) OTROS SERVICIOS; (7) ALIMENTOS PROCESADOS; (9) PRODUCTOS DE MADERA; (10) PAPEL Y (14) OTRAS MANUFACTURES SE PUEDEN CLASIFICAR COMO "BÁSICOS". LOS SECTORES QUE POR EL VALOR

DE SU ELASTICIDAD-INGRESO SE PUEDEN CLASIFICAR COMO "LUJOS" SON: (2) ELECTRICIDAD; (4) TRANSPORTE; (8) TEXTILES; (11) PRODUCTOS QUÍMICOS; (12) PRODUCTOS MINERALES NO METÁLICOS Y (13) PRODUCTOS METÁLICOS.

ESTOS RESULTADOS COINCIDEN CON LO ESPERADO PARA LOS "BÁSICOS". ES TRADICIONAL QUE LOS ALIMENTOS, VESTIDO Y VIVIENDA SEAN BIENES "BÁSICOS". LOS GRUPOS MÁS INELÁSTICOS SON LOS SERVICIOS FINANCIEROS Y OTROS SERVICIOS, LOS CUALES AGRUPAN LOS SERVICIOS DE ARRENDAMIENTO, SERVICIOS EDUCATIVOS, MÉDICOS Y OTROS SERVICIOS QUE SON IMPORTANTES. EL RESULTADO SORPRENDENTE ES QUE (8) TEXTILES, QUE AGRUPA A PRODUCTOS TEXTILES, ROPA Y ARTÍCULOS DE CUERO RESULTE CON UNA ELASTICIDAD-INGRESO DE 1.24, LO CUAL LO SITÚA COMO UN "LUJO". EL RESTO DE LOS GRUPOS CLASIFICADOS COMO "LUJOS" ES RAZONABLE PUES ESTÁ COMPUESTO DE BIENES INDUSTRIALIZADOS. LOS GRUPOS MÁS ELASTICOS SON (2) ELECTRICIDAD, CON 2.93 Y (13) PRODUCTOS METÁLICOS, CON 2.14

POR ÚLTIMO, SE PUEDE OBSERVAR QUE EXISTE LA RELACIÓN DE PROPORCIONALIDAD APROXIMADA ENTRE LA ELASTICIDAD-INGRESO Y ELASTICIDAD-PRECIO COMPENSADA PROPIA. EN EL DIAGRAMA A CONTINUACIÓN SE MUESTRA COMO EXISTE UNA RELACIÓN (LINEAL) ENTRE DICHAS ELASTICIDADES.

DIAGRAMA 3.7.1 RELACION DE PROPORCIONALIDAD ENTRE ELASTICIDADES



CUADRO 3.7.1 RELACION DE PROPORCIONALIDAD ENTRE ELASTICIDADES

CONSTANTE	0.031427
COEFICIENTE	-9.876695
ERROR ESTANDAR DEL COEF.	0.361046
R^2	.984218
N	14
GRADOS DE LIBERTAD	12
ERROR ESTANDAR DE Y	.097356

FUENTE: CALCULADO CON DATOS DEL CUADRO 3.2.3

El cuadro 3.7.1 muestra los resultados de una regresión entre las elasticidades-precio compensadas propias como variable independiente y las elasticidades-ingreso, como dependiente. La regresión arroja un coeficiente de determinación, R^2, de 0.98, lo cual significa que la relación estadística lineal entre las dos elasticidades es muy grande. Esta relación lineal implica que las dos elasticidades guardan un grado de proporcionalidad.

En conclusión, la limitacion que el SLG presenta para el análisis estructural de la matriz de sustitución nos sugiere que este modelo se puede aplicar a sistemas con grupos de bienes muy amplios, en donde la hipótesis de complementariedad entre dos bienes no sea un objetivo importante a diagnosticar.

Por otra parte, la proporcionalidad entre las elasticidades-ingreso y precio puede verse como una ventaja o una desventaja. Puede considerarse como una ventaja porque se podrían estimar las elasticidades-ingreso y deducir las elasticidades-precio sin necesidad de contar con observaciones de series de tiempo, necesarias para tomar en cuenta los cambios en precios que se dan en el tiempo. Sin embargo, se considera esta propocionalidad como una desventaja precisamente porque el modelo no es "flexible" para modelar los cambios en precios.

En este sentido sería mejor utilizar modelos más "flexibles" como son el SAP, (García Alba, 1986) y el Sistema de demanda casi ideal, SDCI, (Deaton y Muellbauer, 1980, pg. 75).

CONCLUSIONES

El sistema lineal de gasto, SLG, es un modelo que se ha utilizado en las últimas tres décadas para el estudio estadístico de la conducta del consumidor. Sus ecuaciones se obtienen de una función de utilidad conocida en la literatura como la función de Stone-Geary.

Esta función cumple con las propiedades de una función de utilidad. Entre las propiedades de la función de utilidad, una que tiene consecuencias importantes en las funciones de demanda es la aditividad. Esta propiedad consiste en la posibilidad de expresar la función de utilidad como una suma de funciones cuyos argumentos son bienes elementales o simples.

La propiedad de aditividad tiene como consecuencia que todos los efectos-sustitución cruzados, s_{ij}, (cuando $i \neq j$) son: i) todos positivos; ii) negativos cuando los bienes i o j son bienes inferiores y positivos cuando el bien i o j es el único bien superior.

Esta restricción sobre los efectos-sustitución es empíricamente muy restrictiva. Implica en el primer caso que el

MODELO SOLO ACEPTA APLICACIONES PARA BIENES SUSTITUTOS ENTRE SÍ; LA POSIBILIDAD DE MODELAR BIENES COMPLEMENTARIOS ESTÁ EXCLUIDA. ESTO SIGNIFICA QUE UN MODELO DE DEMANDA DERIVADO DE UNA FUNCIÓN DE UTILIDAD ADITIVA SÓLO SE PUEDE APLICAR A GRUPOS MUY AGREGADOS DE BIENES, DONDE LA COMPLEMENTARIEDAD NO ES UN FENÓMENO IMPORTANTE.

UNA SEGUNDA IMPLICACIÓN DE LA ADITIVIDAD CONSISTE EN LA PROPORCIONALIDAD QUE EL MODELO IMPONE ENTRE LAS ELASTICIDADES -PRECIO PROPIAS Y LAS ELESTACIDADES-INGRESO DE CADA BIEN. TIENE DOS CONSECUENCIAS: UNA CONVENIENTE Y OTRA INCONVENIENTE.

LA PROPORCIONALIDAD ES CONVENIENTE PORQUE SE PUEDEN ESTIMAR LAS ELASTICIDADES-PRECIO A PARTIR DE DATOS DE CORTE TRANSVERSAL. CUANDO SE UTILIZAN DATOS DE ESTE TIPO, SE CARECE DE LA INFORMACIÓN SUFICIENTE PARA ESTIMAR LOS EFECTOS DEL CAMBIO DE LOS PRECIOS SOBRE LAS CANTIDADES DEMANDADAS. CON LA PROPORCIONALIDAD SE PUEDEN INFERIR LAS ELASTICIDADES-PRECIO PROPIAS. SIN EMBARGO, ESTAS ESTIMACIONES NO TIENEN UN FUNDAMENTO EMPÍRICO SINO UN ORIGEN "TEÓRICO".

LA INCONVENIENCIA DE LA PROPORCIONALIDAD ES QUE LOS PARÁMETROS ESTIMADOS SON INFLEXIBLES PARA MODELAR LOS EFECTOS SOBRE LA CANTIDAD DEMANDADA DE UN CAMBIO EN LOS PRECIOS. EL

DECIR, LA PROPORCIONALIDAD IMPIDE QUE LAS ELASTICIDADES-PRECIO Y LAS ELASTICIDADES-INGRESO TOMEN VALORES "EMPÍRICOS", INDEPENDIENTES ENTRE SÍ.

AUNQUE PARA LOS AUTORES NEOCLÁSICOS, LA FUNCIÓN DE UTILIDAD ES UN ELEMENTO MUY IMPORTANTE DE ANÁLISIS EN SÍ MISMO, EN EL PRESENTE TRABAJO, DICHA FUNCIÓN TIENE SÓLO IMPORTANCIA EN EL SENTIDO DE QUE ES UNA REPRESENTACIÓN DE UN ORDENAMIENTO DE PREFERENCIAS BASADO EN UN CONJUNTO DE AXIOMAS SOBRE LA CONDUCTA DEL CONSUMIDOR RACIONAL.

ESTO ES ASÍ GRACIAS AL TRABAJO DE DIVERSOS AUTORES, PRINCIPALMENTE DE G. DEBREU, QUIEN ESTABLECIÓ LA RELACIÓN ENTRE UNA FÚNCIÓN MATEMÁTICA CON CIERTAS PROPIEDADES, CONOCIDA COMO FUNCIÓN DE UTILIDAD, Y UN PREORDENAMIENTO DE PREFERENCIAS DERIVADO DE UN CONJUNTO DE AXIOMAS. POR ESTA RAZÓN, EN EL CAPÍTULO PRIMERO SE HA DESARROLLADO UNA EXPOSICIÓN DE LA TEORÍA AXIOMÁTICA DEL CONSUMIDOR.

EN ESTE PRIMER CAPÍTULO SE REVISARON LOS AXIOMAS NECESARIOS PARA CONSTRUIR UN SISTEMA PARA ORDENAR LAS PREFERENCIAS. ESTE SISTEMA CONSISTE EN UN PREORDENAMIENTO QUE PERMITE ESTABLECER UNA FUNCIÓN DE VARIABLE REAL LLAMADA FUNCIÓN DE UTILIDAD. CONTINUACIÓN SE EXAMINÓ EL SUPUESTO DE LINEA DEL PRESUPUEST

NECESARIA PARA RESOLVER EL PROBLEMA NEOCLÁSICO DEL CONSUMIDOR QUE CONSISTE EN MAXIMIZAR LA FUNCIÓN DE UTILIDAD SUJETA A UNA RESTRICCIÓN PRESUPUESTAL LINEAL.

DE ESTE PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN RESULTARON LAS FUNCIONES DE DEMANDA NO COMPENSADAS. EL DUAL DEL PROBLEMA TUVO COMO RESULTADO LAS FUNCIONES DE DEMANDA COMPENSADAS. A CONTINUACIÓN SE PLANTEARON LAS PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE DEMANDA COMPENSADAS Y NO COMPENSADAS: ADITIVIDAD, HOMOGENEIDAD, SIMETRÍA Y NEGATIVIDAD.

EL SEGUNDO CAPÍTULO SE DESARROLLÓ CON UNA ESTRUCTURA SIMILAR A LA DEL PRIMERO CON EL OBJETIVO DE RESALTAR QUE EL SISTEMA LINEAL DE GASTO TIENE SU ORIGEN EN LA FUNCIÓN DE UTILIDAD DE STONE-GEARY. UNA VEZ ESTABLECIDA DICHA FUNCIÓN DE UTILIDAD, SE PROCEDIÓ A DERIVAR LAS FUNCIONES DE DEMANDA DEL SLG. AL MAXIMIZAR LA FUNCIÓN DE UTLIDAD CON EL PRESUPUESTO COMO RESTRICCIÓN, SE OBTUVO EL SISTEMA DE FUNCIONES DE DEMANDA NO COMPENSADO. SE LLAMAN DEMANDAS NO COMPENSADAS PORQUE NO TOMAN EN CUENTA LOS EFECTOS-INGRESO Y SUSTITUCIÓN NECESARIOS PARA MANTENER AL CONSUMIDOR EN EL MISMO NIVEL DE UTILIDAD CUANDO SE HAN ALTERADO LOS PRECIOS RELATIVOS; ES DECIR, PARA "COMPENSAR" SU PÉRDIDA DE UTILIDAD DEBIDO A CAMBIOS EN LOS PRECIOS RELATIVOS.

Para apreciar el problema de la "compensación" se introdujo el tema de la dualidad en la teoría de la demanda del Consumidor. Esta consiste en resolver el problema dual del problema de optimización planteado ya planteado (primal). El dual se resuelve al minimizar la función de costo sujeta a una función de utilidad como restricción.

La solución del dual nos permite obtener las funciones de demanda "compensadas". Con estas funciones se pueden estimar elasticidades-precio no compensadas; esto es, los efectos sobre la cantidad demandada como consecuencia de cambios en precios manteniendo el mismo nivel de utilidad.

En el tercer capítulo se revisan las estimaciones del SLG realizadas por García Alba, 1985. Estas estimaciones resultaron consecuentes con las restricciones a priori - establecidas por la teoría. Las estimaciones de β_i y $\gamma_i{}^0$ son todas positivas. Estos resultados imponen restricciones a los valores de las elasticidades. Las elasticidades-ingreso son todas positivas y las elasticidades-precio propias de la demanda, ε_{ii}, son menores que la unidad.

Las elasticidades-precio propias compensadas tienen signo negativo. Este hecho refleja la restricción de negatividad sobre los elementos s_{ij} de la matriz de sustitución. Esta negatividad significa que se cumple la "ley de la demanda".

Si las elasticidades-precio cruzadas son positivas, los grupos de bienes son sustitutos entre sí; si son negativas, los bienes son complementarios. En el modelo estimado, todas las elasticidades-precio compensadas cruzadas resultaron con signo positivo. Esto significa que todos los grupos de bienes son sustitutos entre sí. Como se recordará, en los capítulos anteriores se habló de una limitación del SLG, que consistía en imponer un signo positivo a las elasticidades-precio compensadas cruzadas. Entonces, más que un resultado analítico del modelo SLG, la sustitubilidad de los grupos de bienes es un resultado de suponer un modelo de demanda derivado de una función de utilidad aditiva.

Cuando la elasticidad-ingreso de un bien es mayor que la unidad, este bien es un "lujo". Por el contrario, si es menor que la unidad, el bien se clasifica como un "básico". De acuerdo a lo anterior, los sectores (1) Agropecuario; (3) Restaurantes y hoteles; (5) Servicios financieros y vivienda; (6) Otros servicios; (7) Alimentos procesados; (9) Productos de madera; (10) Papel y (14) Otras manufacturas se clasificaron como "básicos". Los sectores que por el valor de su elasticidad

-ingreso se clasificaron como "lujos" son: (2) Electricidad; (4) Transporte; (8) Textiles; (11) Productos químicos; (12) Productos minerales no metálicos y (13) Productos metálicos.

Estos resultados para los "básicos" coinciden con los valores esperados. Es congruente que los alimentos, vestido y vivienda sean bienes "básicos". Los grupos más inelásticos son los servicios financieros y otros servicios, los cuales agrupan los servicios de arrendamiento, servicios educativos, médicos y otros servicios que son importantes. El resultado que más llama la atención es que (8) Textiles, que agrupa a productos textiles, ropa y artículos de cuero resulte con una elasticidad-ingreso de 1.24, lo cual lo sitúa como un "lujo", cuando se espera que el vestido sea un bien "basico". El resto de los grupos clasificados como "lujos" es razonable pues está compuesto principalmente de bienes manufacturados. Los grupos más elasticos son (2) Electricidad, con 2.93 y (13) Productos metálicos, con 2.14.

Se pudo observar que existe una relación de proporcionalidad aproximada entre la elasticidad-ingreso y elasticidad-precio compensada propia. Esta relación (lineal) entre dichas elasticidades se confirmó con los resultados de una regresión entre las elasticidades-precio compensadas propias como

VARIABLE INDEPENDIENTE Y LAS ELASTICIDADES-INGRESO, COMO DEPENDIENTE. LA REGRESIÓN ARROJA UN COEFICIENTE DE DETERMINACIÓN, R^2, DE 0.98, LO CUAL SIGNIFICA QUE LA RELACIÓN ESTADÍSTICA LINEAL ENTRE LAS DOS ELASTICIDADES ES MUY GRANDE. ESTA RELACIÓN LINEAL IMPLICA QUE LAS DOS ELASTICIDADES GUARDAN UN GRADO DE PROPORCIONALIDAD.

AL RESPECTO SE PUEDE CONCLUIR QUE LA LIMITACIÓN QUE EL SLG PRESENTA PARA EL ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE LA MATRIZ DE SUSTITUCIÓN NOS SUGIERE QUE ESTE MODELO SE PUEDE APLICAR A SISTEMAS CON GRUPOS DE BIENES MUY AMPLIOS, EN DONDE LA HIPÓTESIS DE COMPLEMENTARIEDAD ENTRE DOS BIENES NO SEA UN OBJETIVO IMPORTANTE A DIAGNOSTICAR.

POR OTRA PARTE, LA PROPORCIONALIDAD ENTRE LAS ELASTICIDADES-INGRESO Y PRECIO PUEDE VERSE COMO UNA VENTAJA O UNA DESVENTAJA. PUEDE CONSIDERARSE COMO UNA VENTAJA PORQUE SE PODRÍAN ESTIMAR LAS ELASTICIDADES-INGRESO Y DEDUCIR LAS ELASTICIDADES-PRECIO SIN NECESIDAD DE CONTAR CON OBSERVACIONES DE SERIES DE TIEMPO, NECESARIAS PARA TOMAR EN CUENTA LOS CAMBIOS EN PRECIOS QUE SE DAN EN EL TIEMPO. SIN EMBARGO, SE CONSIDERA ESTA PROPOCIONALIDAD COMO UNA DESVENTAJA PRECISAMENTE PORQUE EL MODELO NO ES "FLEXIBLE" PARA MODELAR EFECTOS DE LOS CAMBIOS EN PRECIOS. EN ESTE SENTIDO SERÍA MEJOR UTILIZAR MODELOS MÁS

"FLEXIBLES" COMO SON EL SAP, (GARCÍA ALBA, 1986) Y EL SISTEMA DE DEMANDA CASI IDEAL, SDCI, (DEATON Y MUELLBAUER, 1980, PG. 75); ES DECIR: MODELOS QUE NO IMPONEN RESTRICCIONES A LOS PARÁMETROS ESTIMADOS.

AL REVISAR LA CAPACIDAD PREDICTIVA DEL MODELO, SE ENCONTRÓ QUE LA VERSIÓN DEL SLG ESTIMADA POR GARCÍA ALBA TIENE UNA BUENA CAPACIDAD PREDICTIVA. AL ESTIMAR LAS CIFRAS DE DEMANDA PARA EL PARA EL AÑO DE 1983 SE REPRODUCEN LAS CIFRAS OBSERVADAS EN ESE AÑO. ESTO FUÉ ASÍ PORQUE AL PREDECIR DEMANDAS DE CADA BIEN A PARTIR DE LAS PROPORCIONES DE GASTO ESTIMADAS PARA 1983 PERMITIÓ UNA GRAN EXACTITUD.

EN RESUMEN, EL SLG ES UN SISTEMA DE FUNCIONES DE DEMANDA DE AMPLIO USO DURANTE LOS ÚLTIMOS TREINTA AÑOS, DERIVADO DE UNA FUNCIÓN DE UTILIDAD. LA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS SE PUEDE EFECTUAR CON MÉTODOS ACCESIBLES Y NO REPRESENTA UN OBSTÁCULO. CON ESTE SISTEMA SE PUEDE EFECTUAR EL ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE LA MATRIZ DE SUSTITUCIÓN, SE PUEDEN OBTENER ESTIMACIONES DE LAS ELESTAICIDADES-PRECIO: PROPIAS Y CRUZADAS, Y LAS ELASTICIDADES-INGRESO. TAMBIÉN PERMITE EFECTUAR PREDICCIONES MUY ACERTADAS CUANDO SE ESPECIFICA EN TÉRMINOS DE LAS PROPORCIONES DEL GASTO.

LAS PRINCIPALES LIMITACIONES DE ESTE MODELO CONSISTEN, POR UNA PARTE, EN LA PROPORCIONALIDAD ENTRE LAS ELASTICIDADES-PRECIO PROPIAS Y LAS ELESTACIDADES-INGRESO; Y POR OTRA, EN LA INCAPACIDAD DE MODELAR LA COMPLEMENTARIEDAD ENTRE BIENES. POR ESTA RAZÓN, SOLO SE RECOMIENDA PARA GRUPOS DE BIENES DONDE LA HIPÓTESIS DE COMPLEMENTARIEDAD NO ES IMPORTANTE.

BIBLIOGRAFIA

ARROW, KENNETH J. Y INTRILLIGATOR, MICHAEL D. (1982)
HANDBOOK OF MATHEMATICAL ECONOMICS AMSTERDAM. NORTH-HOLLAND PUBLISHING CO.

BARTEN, ANTON P. Y B|HM, VOLKER (1982)
"CONSUMER THEORY" EN: ARROW E INTRILLIGATOR (1982), VOL. II, CAP. 9, PGS. 381-429.

BARTEN, ANTON P. (1969)
"MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION OF A COMPLETE SYSTEME OF DEMAND EQUATIONS" EUROPEAN ECONOMIC REVIEW VOL. 1, 1969, PGS. 7-73

BROWN, ALAN Y DEATON, ANGUS (1972)
"MODELS OF CONSUMER BEHAVIOUR" ECONOMIC JOURNAL DEC. 1972.

CARDENAS, ANTONIO (1986)
ESTIMACIÓN DE UN SISTEMA DE DEMANDA: EL CASO DE MÉXICO" ANALISIS ECONOMICO JUL-DIC 1986. VOL. V NO. 9, PGS.13-34

CHIPMAN, J.S.; HURWICZ, L.; RICHTER, M.K. Y SONNENSCHEIN, H.S. (1971)
PREFERENCES, UTILITY AND DEMAND. A MINNESOTA SYMPOSIUM NEW YORK, HARCOURT, BRACE-JOVANOVICH.

DEATON, ANGUS Y MUELLBAUER, JOHN (1980)
ECONOMICS AND CONSUMER BEHAVIOR CAMBRIDGE, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.

DEBREU, GERARD (1959)
THEORY OF VALUE AN AXIOMATIC ANALYSIS OF ECONOMIC EQUILIBRIUM NEW HAVEN, YALE UNIVERSITY PRESS. COWLES FOUNDATION MONOGRAPH, 17.

DIEWERT, W.E. (1982)
"DUALITY APPROACHES TO MICROECONOMIC THEORY" EN: ARROW E INTRILLIGATOR (1982) VOL. II, CAP. 12, PGS. 535-599.

GARCIA ALBA IDUNATE, PASCUAL (1986)
"ESPECIFICACIÓN DE UN SISTEMA DE DEMANDA Y SU APLICACIÓN A MÉXICO" ESTUDIOS ECONOMICOS VOL. 1, NÚM. 2, JUL-DIC 1986, PGS. 305-335

HICKS, JOHN R. (1958)
REVISION DE LA TEORIA DE LA DEMANDA México. Fondo de Cultura Económica. 1ª reimp. 1974

INTRILLIGATOR, MICHAEL D. (1971)
MATHEMATICAL OPTIMIZATION AND ECONOMIC THEORY Englewood Cilffs, N. J. Prentice-Hall, Inc.

JUDGE, GEORGE G., R. CARTER HILL, WILLIAM E. GRIFFITHS, HELMUT LUTKEPOHL, TSOUNG-CHAO LEE (1982)
INTRODUCTION TO THE THEORY AND PRACTICE OF ECONOMETRICS New York, Wiley.

LANCASTER, KELVIN (1968)
ECONOMIA MATEMATICA Barcelona. BOSCH, Casa Editorial. (Traducción del inglés: 1972).

LUDLOW WIECHERS, JORGE (1985)
ECONOMIA MATEMATICA Mimeografiado. (En Prensa).

MAYES, DAVID G. (1981)
APPLICATIONS OF ECONOMETRICS Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall, Inc.

PEARCE, I.F. (1974)
A CONTRIBUTION TO DEMAND ANALYSIS Oxford University Press. Oxford.

PHLIPS, LOUIS (1974)
APPLIED CONSUMTION ANALYSIS Amsterdam. North- Holland Pub. Co.

ROBERTS, BLAINE y SCHULZE, DAVID L. (1973)
MODERN MATHEMATICS AND ECONOMIC ANALISIS New York. W.W. Norton & Co.

SAMUELSON, P.A. (1947)
"Some implications of linearity" REVIEW OF ECONOMIC STUDIES vol. 30, pgs. 229-232.

SONNENSCHEIN, H.F. (1971)
"Demand theory without transitive preferences, with application to the theory of competitive equilibrium" en J.S. CHIPMAN (1971). pgs. 215-223.

STONE, RICHARD (1954)
"LINEAR EXPENDITURE SYSTEMS AND DEMAND ANALYSIS: AN APPLICATION TO THE PATTERN OF BRITISH DEMAND" ECONOMIC JOURNAL VOL. 64 P 511-527

THEIL, HENRI. (1975)
THEORY AND MEASUREMENT OF CONSUMER DEMAND AMSTERDAM, NORTH-HOLLAND. VOL. 1