

01183

1982

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
SECCION HIDRAULICA

RESONANCIA EN SISTEMAS DE CONDUCTOS A PRESION

Tesis que presenta

RAFAEL GUARGA FERRO

para obtener el grado de

DOCTOR EN INGENIERIA HIDRAULICA

COORDINADOR DE LA SECCION

R. SPRINGALL G.

SECRETARIO ACADEMICO

S. TIRADO

JURADO

M.en I. José Luis Sánchez Bribiesca

Dr. Jaime Cervantes de Gortari

Dr. Gerardo Hiriart Le-Bert

Dr. Gabriel Echávez Aldape

Dr. Rolando Springall Galindo

Dr. Gonzalo Alducín González

Dr. Octavio Escóñ Chávez

01183
1982

C.U., México, D.F. a 17 de agosto de 1982.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

1.	INTRODUCCION	1
2.	ANTECEDENTES	4
3.	MODELO LINEAL DE CALCULO Y METODO DE LAS MATRICES DE TRANSFERENCIA	12
4.	TEORIAS EXISTENTES SOBRE RESONANCIA Y CRITICA DE LAS MISMAS	43
5.	ANALISIS TEORICO DE CUATRO CASOS	51
6.	ANALISIS EXPERIMENTAL DE CUATRO CASOS	66
7.	NUEVA TEORIA SOBRE LA RESONANCIA EN CONDUCTOS A PRESION	98
8.	ANALISIS DE LOS CUATRO CASOS CON LA NUEVA TEORIA	113
9.	TRATAMIENTO NUMERICO DE LA NUEVA TEORIA	132
10.	CONCLUSIONES	146
	AGRADECIMIENTOS	148
	REFERENCIAS	150
	APENDICE	A 1

1. INTRODUCCION

Quando un sistema de conductos a presión se halla sometido a una excitación, se plantea el problema de la posible resonancia del sistema. Dicho problema consiste en determinar las frecuencias en las que se producen las máximas amplitudes, localizar los puntos del sistema donde éstas ocurren y calcularlas. Este problema puede plantearse para la carga piezométrica o para el gasto. El ingeniero sin embargo, preocupado en la seguridad del sistema, tiene mayor interés en el conocimiento de la resonancia de la carga piezométrica. Por ello en lo que sigue trataremos en especial ese problema

Como se verá en el capítulo 2, este problema motivó el interés de los principales investigadores que trabajaron en el pasado sobre el fenómeno de golpe de ariete. Sin embargo el problema de la resonancia dejó de ser una curiosidad interesante para pasar a ser un problema técnico de significación hace no más de dos décadas. En el capítulo 2 se relata este

proceso que culmina con la formulación de dos teorías sobre la resonancia de sistemas de conductos a presión. Estas teorías pudieron ser formulados debido a la introducción de modelos lineales que permitieron la aplicación de conceptos de utilidad probada en otras áreas de aplicación técnica. En el capítulo 3 se realiza una formulación cuidadosa de dicho modelo lineal con el propósito de simplificar la exposición del resto del trabajo. Sin embargo, como se verá en el capítulo 4, las dos teorías existentes sobre el problema de la resonancia en sistemas de conductos a presión (Teoría de la Impedancia Terminal y Teoría de las Oscilaciones Libres), presentan aspectos no bien resueltos teóricamente. En el capítulo 5 se analizan, con estas teorías, cuatro ejemplos cuya realización experimental puede efectuarse en el laboratorio. En el capítulo 6 se describe la instalación que se construyó con ese propósito y se presentan los resultados obtenidos, observándose que algunos de éstos contradicen los resultados teóricos hallados en el capítulo 5. Por ello se hace necesario realizar una reformulación teórica de los fenómenos de la resonancia en conductos a presión, la cual se presenta en el capítulo 7 (Teoría de Localización de Máximos). Aplicando el nuevo punto de vista, en el capítulo 8, se analizan los cuatro ejemplos tratados en los capítulos 5 y 6 usando para ello la nueva teoría y se comparan los resultados teóricos hallados con las evidencias experimentales presentadas en el capítulo 7, obteniéndose una buena confirmación experimental de la nueva teoría. En el capítulo 9 se presenta el tratamiento por computadora de la Teoría de Localización de Máximos y se aplica esta teoría y la de la Impedancia Terminal al proyecto de una planta hidroeléctrica, realizándose un análisis de la conducta a seguir en cada caso y observándose las consecuencias prácticas del empleo de las dos teorías.

El trabajo finaliza con una serie de conclusiones que resumen los elementos nuevos que se aportan a la teoría de la resonancia en sistemas de conductos a presión. Este es el contenido del capítulo 10.

2. ANTECEDENTES

En este capítulo haremos una rápida reseña de los orígenes y el desarrollo de las teorías con las que se vincula nuestro trabajo y relacionaremos ese proceso con los problemas técnicos planteados en otros medios y en México. Expondremos asimismo las razones por las cuales el problema de la resonancia hidráulica ha salido de la colección de las curiosidades para plantearse como un problema de interés técnico creciente, en especial en la última década.

2.1 Formulación de las Ecuaciones Básicas

Paradójicamente las ecuaciones que hoy todo ingeniero hidráulico conoce como el modelo teórico del "golpe de ariete", nacieron como descripción teórica del fenómeno acústico en un fluido. Fue N. Joukowsky en 1897 quien observó que los fenómenos de incremento súbito de presión en las tuberías de conducción

de agua que sobrevengan luego de una maniobra de apertura o cierre de válvulas respondían a las mismas ecuaciones. Estos resultados fueron obtenidos en los estudios que Joukowsky emprendió para resolver el proyecto de una gran red urbana de distribución de agua (ref 1).

Los resultados de Joukowsky fueron desarrollados por L. Allievi y De Sparre y verificados experimentalmente en un trabajo minucioso y que aún hoy en día posee gran interés por Ch. Camichel, D. Eydoux y M. Gariel. Este trabajo se realizó en distintas instalaciones de laboratorio e industriales en Toulouse (Francia) (ref 2).

2.2 Verificación Experimental

En el trabajo del equipo de Camichel el problema de la resonancia se trata en dos capítulos de los once que tiene la obra. En estos capítulos se estudia la resonancia de tuberías simples y de tuberías compuestas por tuberías simples en serie. Sin embargo, es evidente en el propio trabajo de Camichel, que el interés de estos dos capítulos sobre resonancia era de tipo teórico y secundario en un tratado dirigido a buscar la confirmación experimental de los conocimientos técnicos que se estaban aplicando y se iban a aplicar en el futuro para la construcción de cientos de plantas hidroeléctricas en Europa y E.E.U.U.

2.3 Interés Técnico del Problema de la Resonancia

El interés técnico en el problema de la resonancia hidráulica se circunscribe, durante un largo periodo, al análisis de plantas hidroeléctricas que presentan anomalías frente al comportamiento previsto. Dichas anomalías en

varios casos se explican como consecuencia de fenómenos de resonancia y en estas explicaciones participan los más destacados especialistas en el tema.

Son los conocidos casos, reiteradamente citados en la bibliografía, de la catástrofe de la planta de generación y bombeo de Lac Blanc - Lac Noir en la región de los Vosgos, la fisuración repetida del túnel de Kandergrund (la última ocurrió en 1945) y la resonancia de la planta canadiense de Bersimis II (refs 3, 4, 5 y 6).

Sin embargo dos procesos concurren para sacar el problema de la resonancia de sistemas de conductos a presión de la condición, según el Prof. Fanelli (ref 7) de "curiosidad de laboratorio o de tema de investigaciones teóricas elegantes apropiadas para las memorias de las Academias". Estos procesos son, por un lado, el crecimiento de la potencia unitaria de las turbomáquinas y por otro, el acelerado desarrollo de los circuitos hidráulicos de comando y control. A estos dos procesos fundamentales se suman otras aplicaciones que también han motivado trabajos de interés como son los circuitos de combustible de los cohetes.

Es un hecho que los fabricantes de turbomáquinas están incrementando la potencia unitaria de sus máquinas aceleradamente. Así es que en 1963 las turbinas de mayor potencia del mundo eran de poco más de 200 Mw (Bratsk, URSS) y hoy se contruyen las de Itaipu (Brasil, Paraguay), con 900 Mw por unidad. Como el rendimiento hidráulico de las máquinas no aumenta con su potencia hidráulica la potencia residual no controlada es proporcional a la potencia hidráulica de las máquinas. La magnitud de esta potencia no controlada, que en las grandes máquinas es de decenas de MW, hace que sea posible excitar en

el sistema fenómenos que antes no se percibían. En particular las grandes turbinas Francis que presentan un vórtice pulsante cuando operan a carga parcial o a sobre carga, son un excitador potencial de resonancias peligrosas. Por otra parte, el gigantismo de las instalaciones propicia el descenso de la frecuencia de excitadores cuyo comportamiento se describe mediante un número de Strouhal constante (ref 8). Al aumentar los diámetros y permanecer sensiblemente constantes las velocidades desciende la frecuencia de la excitación producida.

La literatura técnica de los últimos quince años abunda en trabajos en los cuales se da cuenta de problemas de esta naturaleza en grandes instalaciones industriales (refs 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 y 17).

Todo ello confluye para que el estudio de la resonancia de grandes sistemas industriales de conducción deba realizarse sin excepción en la etapa de proyecto de los mismos.

El otro proceso de importancia en cuanto al impulso dado al estudio de la resonancia de sistemas a presión, proviene de la creciente aplicación de sistemas hidráulicos para la automatización de la producción industrial y el control de vehículos. Esto se refleja en la literatura técnica en diversos trabajos que tratan sobre la respuesta de tuberías en régimen laminar ante excitaciones transitorias (refs 18, 19 y 20).

Finalmente también los viajes espaciales y la guerra han estimulado estudios vinculados a la posible resonancia de los circuitos de combustible de los cohetes (refs 21, 22 y 23).

2.4 Métodos Lineales y Verificación de los Mismos

Las ecuaciones de tipo hiperbólico que matemáticamente expresan este tipo de fenómenos oscilatorios fueron atacadas inicialmente de forma gráfica (ref 24) y luego, aplicando también del método de las características, se introdujo el cálculo electrónico (ref 25). Paralelamente se desarrolla la aplicación de técnicas de cálculo operacional desarrollada por Heaviside en electricidad (ref 20). Estas técnicas que suponen incorporar el análisis complejo y los transformados de Fourier y de Laplace y por lo tanto la linealización de las ecuaciones en lo que tiene que ver con los términos de fricción, se aplican especialmente a los sistemas hidráulicos en flujo turbulento en la década del 60 por parte de E. Wylie de la Universidad de Michigan (ref 27, 28) y F. Brown del Instituto Tecnológico de Massachussets (ref 29) quienes desarrollan los conceptos de "impedancia hidráulica" y de "matriz de transferencia". En 1970 H. Chaudry (Ingeniero consultor, Canadá) (refs 30 y 31) aplica el concepto de "matriz de transferencia" para conductos a presión con flujo turbulento. La verificación de estos métodos, que suponen la linealización en la formulación matemática, se realiza en forma simultánea a su introducción. En efecto, al aplicar el concepto de impedancia hidráulica Wylie resuelve varios circuitos mediante dicho método y compara, con buen éxito, la solución con la obtenida aplicando características. Asimismo, Chaudry recurre a la comparación con el método de las características y con los resultados experimentales obtenidos por Camichel (ref 2).

Posteriormente, M. Fanelli (ref 32) realiza cuidadosas mediciones que verifican el modelo linealizado en una instalación experimental que trabaja con

una tubería de acrílico. En la bibliografía ya citada hay dos trabajos, el de Fashbaugh y Streeter (ref 21) y el de Zielke, Wylie y Keller (ref 23) que hacen uso del método lineal para el estudio del comportamiento oscilatorio de instalaciones experimentales. En ambos trabajos el método lineal responde satisfactoriamente a la confrontación con los resultados experimentales.

2.5 Teorías de la Resonancia

Una de las preocupaciones de quienes proyectan los sistemas de conducciones a presión mencionados, susceptibles de entrar en resonancia, es prever ese fenómeno y evitarlo. Ello ha dado lugar a la formulación de teorías de la resonancia que pretenden darle al proyectista un conjunto numerable aunque infinito de frecuencias peligrosas en las cuales, si el sistema fuese excitado, habría resonancia.

Estas teorías, en lo que tenemos conocimiento, son dos. Cronológicamente la primera fue formulada por E. Wylie (Universidad de Michigan) en su tesis de doctorado (1964) (ref 27) y luego (1965) publicada en el Journal of Basic Engineering de la ASME (ref 28). La segunda es formulada por W. Zielke en 1971 (ref 33) como comentario al trabajo de H. Chaudry en el cual propone la aplicación de las matrices de transferencia (ref 30) y donde hace una formulación muy limitada de la teoría, cuya autoría debe atribuírsele, como se señaló, a Zielke. Posteriormente este autor publica el análisis de un caso particular desde el punto de vista de su teoría (ref 34).

Estas teorías son expuestas en los libros técnicos de mayor aceptación en cuanto a fenómenos hidráulicos no estacionarios como son los conocidos textos

de Wylie y Streeter "Fluid transients" (ref 35) y el de Chaudry ya citado "Applied Hydraulic transients" (ref 31). En dichas exposiciones se establece que las teorías serían complementarias puesto que se aplicarían a clases de problemas diferentes y por supuesto se admite que en la clase correspondiente, cada teoría es correcta.

2.6 Crítica a las Teorías de la Resonancia

Zielke, en el trabajo que se presenta en la Ref 34, realiza comentarios que destacan algunas limitaciones de su teoría y recomienda procurar su confirmación experimental. Esta es la única observación que conocemos, que apunta a poner en duda una de las teorías. Por otro lado, según lo veremos en detalle en el capítulo 6, las instalaciones de laboratorio que se utilizaron para estudiar problemas particulares (refs 2, 21, 23) o para verificar la teoría lineal (ref 32) no podían dar elementos experimentales para mostrar las deficiencias de las teorías.

En el Instituto de Ingeniería de la UNAM se construyó una instalación de laboratorio capaz de confrontar entre sí las teorías y obviamente confrontarlas con los datos experimentales. El resultado de ese trabajo se publicará en el presente año en el Simposio de la IAHR de Amsterdam (ref 36) y muestra la necesidad de encontrar una formulación teórica que supere las deficiencias que se prueba poseen las dos teorías existentes.

El planteo, desarrollo y verificación experimental de esa nueva teoría es el contenido fundamental de este trabajo. En él, y dado el carácter inédito de la crítica que se publicará en septiembre del presente año, está también contenido en su totalidad el material teórico y experimental de la ref 36.

2.7 El Problema de la P.H. de "La Angostura"

Para finalizar este capítulo de Antecedentes, queremos explicar brevemente por qué surge, en México, la preocupación por el estudio del problema de la resonancia en conductos a presión. Ello está ligado a una planta hidroeléctrica de gran tamaño (900 Mw) que comenzó a operar en 1976 y desde el comienzo de su operación presentó problemas muy serios de oscilaciones a carga parcial. Este hecho motivó la intervención de diversos consultantes (refs 37, 38, 39, 40, 41 y 42) entre ellos el Instituto de Ingeniería. El interés del problema dió motivo también a su difusión en congresos especializados (ref 13). La solución del problema (ref 43) confirma la tesis que interpreta el fenómeno como resonancia de las pulsaciones producidas por el vórtice en la descarga con la tubería de presión del sistema hidráulico.

El interés del problema planteado en "La Angostura" y la necesidad obvia de evitar, en el futuro, en las nuevas plantas de gran tamaño que México se propone construir, la repetición de problemas similares, ha obligado a considerar el problema de la resonancia como prioritario en lo que tiene que ver con el diseño de plantas hidroeléctricas. Producto de este esfuerzo han sido algunos trabajos dirigidos esencialmente a divulgar en el medio técnico mexicano estos problemas (refs 44, 45 y 46).

El trabajo que a continuación se presenta es consecuencia de este interés en resolver en el país problemas cuya resolución por otros supondría probablemente décadas de demora en su aplicación local, con las consiguientes pérdidas por reducción de la vida útil de los equipos y su operación no eficiente.

3. MODELO LINEAL DE CALCULO Y METODO DE LAS MATRICES DE TRANSFERENCIA

En este capítulo haremos una revisión del modelo lineal de cálculo que se usa en la formulación de las teorías de la resonancia. El material que presentaremos se encuentra en la bibliografía citada si bien en el desarrollo del capítulo hemos tratado algunos aspectos que usualmente sólo son mencionados. Este es el caso de la formulación explícita de las hipótesis de simplificación en las que se basa el modelo, la incorporación de la celeridad compleja que permite comprender el efecto de la fricción en las ondas progresivas, la noción de rama principal, la determinación de los componentes oscilatorios del gasto y la carga piezométrica en un punto cualquiera de una rama principal, el papel de la fricción y la formulación adimensional del modelo.

La elección del método de las matrices de transferencia (ref 31) para realizar la exposición del trabajo obedece a razones de preferencia

personal, habiéndose podido utilizar de igual manera el método de la impedancia hidráulica (ref 27).

El capítulo finaliza con un comentario sobre el límite y los alcances del modelo lineal.

3.1 Ecuaciones Fundamentales

Se considera un fluido en movimiento por una tubería suficientemente larga como para poder despreciar la alteración que introducen los extremos. Las variables que describen el fenómeno se ilustran en la fig 3.1 y se detallan a continuación

x - abscisa medida según el eje de la tubería en el sentido del flujo [m]

t - tiempo [s]

Q - gasto instantáneo en una sección determinada, $Q = Q(x,t)$ [m³/s]

A - área instantánea de una sección determinada [m²]

V - velocidad media instantánea en una sección determinada $V = V(x,t) = Q/A$ [m/s]

p - presión instantánea en un punto [Pa]

γ - peso específico del fluido [N/m³]

z - cota respecto a un nivel de referencia horizontal de cada punto [m]

H - carga piezométrica instantánea en una sección determinada $H = p/\gamma + z$, $H = H(x,t)$ [m]

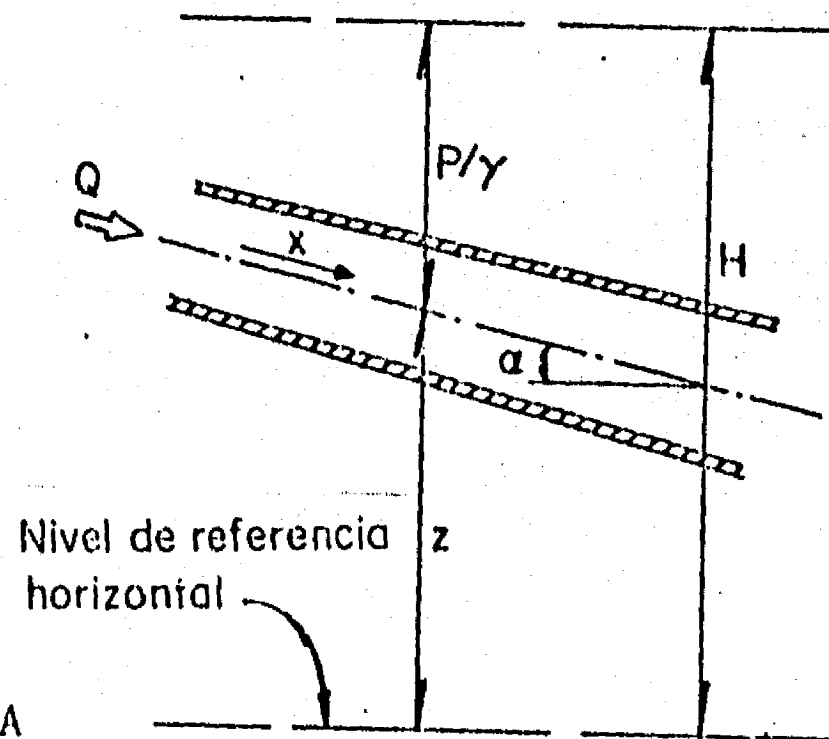


Fig 3.1 Variables principales

- α - ángulo del eje de la tubería con el plano horizontal en una sección,
 $\alpha = \alpha(x)$ [radianes]
- c - celeridad de las ondas acústicas en una sección $c = c(x)$ [m/s]
- K - Módulo de elasticidad volumétrica del fluido, $K = \frac{\Delta p}{\Delta V/V}$ (V volumen considerado) [Pa].
- E - Módulo de Young del material de la tubería [Pa]

Las hipótesis de simplificación que permiten formular las ecuaciones son las siguientes.

- A - El flujo en la tubería es unidimensional
- B - La sección de la tubería es circular y su espesor es uniforme en cada sección. En consecuencia se define:
- D - diámetro de una sección $D = 2 \left[\frac{A(x,t)}{\pi} \right]^{1/2} = D(x,t)$ [m]
- e - espesor de la tubería en una sección $e = e(x)$ [m]
- C - Las paredes de la tubería y el fluido se comportan como cuerpos de Hooke (relación lineal entre tensiones y deformaciones) y sus parámetros no dependen de la frecuencia de las oscilaciones. En consecuencia puede definirse E y K .
- D - Valen las fórmulas de pérdida de carga para flujo estacionario aún cuando el flujo no lo sea
- E - Se cumplen las siguientes relaciones entre las derivadas temporales y espaciales de las variables que se indican para todo x y t salvo eventualmente en un número finito de puntos.

$$\left| \frac{\partial V}{\partial t} \right| \gg \left| V \frac{\partial V}{\partial x} \right|$$

$$\left| \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial t} \right| \gg \left| \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} \right|$$

$$\left| \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial x} \right| \gg \left| \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \right|$$

$$\left| \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial t} \right| \gg \left| \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|$$

físicamente estas cuatro aproximaciones significan lo siguiente. La primera que en todo punto $\left| \frac{V}{c} \right| \ll 1$. La segunda y la tercera (para tubos de pared delgada) que $\left| p D / e E \right| \ll 1$ y la cuarta que $\left| \frac{p}{K} \right| \ll 1$. Como es evidente, para los intervalos habituales de presiones y velocidades industriales y para el agua como fluido y el acero como material de las paredes de las tuberías, estas relaciones se satisfacen ampliamente.

Las hipótesis anunciadas son las usuales en el tratamiento de este problema como puede verse en las siguientes referencias 25, 31 y 47.

Aplicando las hipótesis al problema tratado se llega, en cuanto a la conservación de la masa, a la ecuación siguiente (ver p. ejemp. ref 31).

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{g A}{c^2} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (3.1)$$

y en cuanto a la conservación de la cantidad de movimiento a la ecuación siguiente, llamada ecuación dinámica

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{g A} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{f Q^2}{2 g D A^2} = 0 \quad (3.2)$$

siendo f el factor de fricción(*) de Darcy-Weisbach y utilizándose en (3.2) una ley cuadrática para la pérdida de carga distribuida.

(*) El término fricción se utiliza en el sentido usual de "pérdidas disipativas" tal como aparece por ejemplo en la ref 31, caps 2 y 8.

3.2 Aplicación de las Ecuaciones Fundamentales al Flujo Oscilatorio

Para aplicar las ecuaciones 3.1 y 3.2 al flujo oscilatorio se procede a escribir

$$Q = Q_0 + q^* \quad (3.3)$$

$$H = H_0 + h^* \quad (3.4)$$

siendo Q_0 y H_0 los valores medios de Q y H que serán considerados estacionarios en lo que sigue, $Q_0 = Q_0(x)$ y $H_0 = H_0(x)$. De 3.3 y 3.4 resulta que $q^* = Q - Q_0$, $h^* = H - H_0$.

Introduciendo 3.3 y 3.4 en las ecuaciones 3.1 y 3.2 y recordando que al tratar un tramo de tubería sin derivaciones $\frac{\partial Q_0}{\partial x} = 0$, se tiene

$$\frac{\partial q^*}{\partial x} + \frac{g A}{c^2} \frac{\partial h^*}{\partial t} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial h^*}{\partial x} + \frac{1}{g A} \frac{\partial q^*}{\partial t} + \frac{f Q_0 q^*}{g D \Lambda^2} + \frac{f q^{*2}}{2 g D A^2} = 0$$

puesto que

$$\frac{\partial H_0}{\partial x} = - \frac{f Q_0^2}{2 g D \Lambda^2}$$

Si a las hipótesis realizadas se le agrega la siguiente

F - En el sistema considerado se verifica en todo punto y todo instante

$$\text{que } \left| \frac{q^*}{Q_0} \right| \ll 1.$$

La ecuación 3.6 puede simplificarse resultando en definitiva la siguiente ecuación dinámica linealizada.

$$\frac{\partial h^*}{\partial x} + \frac{1}{g \Lambda} \frac{\partial q^*}{\partial t} + R q^* = 0 \quad (3.7)$$

siendo $R = \frac{f Q_0}{g D \Lambda^2}$ para flujo turbulento con una ley cuadrática de pérdida de carga distribuida.

Obsérvese que las ecuaciones 3.5 y 3.7 son ecuaciones lineales en q^* y h^* .

Las ecuaciones 3.5 y 3.7 serán las ecuaciones básicas del desarrollo que se realiza en el presente trabajo. Dichas ecuaciones pueden resumirse en la ecuación matricial siguiente

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} q^* \\ h^* \end{pmatrix} = -B \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} q^* \\ h^* \end{pmatrix} - G \begin{pmatrix} q^* \\ h^* \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

siendo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & g \Lambda \\ \frac{c^2}{g \Lambda} & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} R g \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los valores propios λ de la matriz B determinan el tipo de sistema. La ecuación característica de B es $\lambda^2 - c^2 = 0$. En consecuencia $\lambda = \pm c$. Siendo c real los valores propios son reales y distintos. Por lo tanto, la ec 3.8 constituye un sistema hiperbólico (ref 48, p 172).

3.3 Soluciones Oscilatorias Estacionarias

Las soluciones de 3.8 que interesa estudiar son aquellas soluciones en que q^* y h^* cumplen que

$$\begin{aligned} q^*(x, t) &= q^*(x, t + T) \\ q^*(x, t) &= h^*(x, t + T) \end{aligned} \tag{3.9}$$

siendo T un valor constante y arbitrario.

Estas soluciones se denominan "oscilaciones estacionarias" del sistema, en el gasto o en la carga.

Si las funciones q^* y h^* cumplen 3.9 y además son definidas y uniformes excepto posiblemente en un número finito de puntos del intervalo $0 < t < T$ y por último q^* , h^* , $\frac{\partial q^*}{\partial t^*}$ y $\frac{\partial h^*}{\partial t^*}$ son continuos a trazos en el mismo intervalo (condiciones de Dirichlet) pueden desarrollarse en serie de Fourier, esto es

$$\begin{aligned} q^*(x, t) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q_n(x) e^{jn\omega_0 t} \\ h^*(x, t) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h_n(x) e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

siendo j la unidad imaginaria, $q_n(x) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} q^*(x, t) e^{-jn\omega_0 t} dt$,

$$h_n(x) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} h^*(x, t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad \text{y} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$
 En consecuencia cualquier solución del tipo 3.9 buscado puede expresarse como suma de soluciones del tipo

$$\begin{aligned}
 q^*(x, t) &= \operatorname{Re} [q(x) e^{j\omega t}] \\
 h^*(x, t) &= \operatorname{Re} [h(x) e^{j\omega t}]
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

siendo q y h complejas donde ω es $2\pi n/T$. Por lo tanto en lo que sigue trabajaremos con expresiones senoidales de q^* y h^* del tipo indicado en 3.10.

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación matricial 3.8 y eliminando $e^{j\omega t}$, que resulta factor común a ambos términos, se tiene:

$$\operatorname{Re} \left\{ j\omega \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ -B \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix} - G \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix} \right\}
 \tag{3.11}$$

El sistema 3.11 es la parte real del siguiente sistema

$$\left\{ \begin{pmatrix} j\omega & 0 \\ 0 & j\omega \end{pmatrix} + G \right\} \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix} = -B \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}
 \tag{3.12}$$

Por linealidad 3.12 es inmediato que si $q(x)$ y $h(x)$ (complejos) son soluciones de 3.12, lo son de 3.11 y recíprocamente. Si se construyen ahora las funciones $q e^{j\omega t}$ y $h e^{j\omega t}$, por la forma como se dedujo 3.11 de 3.8 es también inmediato que las partes reales de estas funciones son soluciones de 3.8. En consecuencia, el problema planteado se reduce a encontrar la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en el campo complejo.

$$j \omega h = - \frac{c^2}{g \Lambda} \frac{d q}{d x} \quad (3.13)$$

$$(j \omega + R g \Lambda) q = - g \Lambda \frac{d h}{d x} \quad (3.14)$$

El sistema anterior puede transformarse fácilmente mediante derivación en otro en el cual, en cada ecuación, aparezca una sola de las funciones incógnitas. Estas ecuaciones son

$$\frac{d^2 q}{d x^2} = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{j \omega R g \Lambda}{c^2} \right) q \quad (3.15)$$

$$\frac{d^2 h}{d x^2} = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{j \omega R g \Lambda}{c^2} \right) h \quad (3.16)$$

Por razones que se verán más adelante conviene definir una celeridad compleja (ref 7) que se designará \bar{c} y cuya definición es la siguiente

$$\bar{c} = c \left[\frac{1}{1 - \frac{j R g \Lambda}{\omega}} \right]^{1/2} \quad (3.17)$$

tomándose como raíz la de menor argumento.

Aplicando 3.17, las ecuaciones 3.15 y 3.16 pueden escribirse como

$$\frac{d^2 q}{d x^2} = - \frac{\omega^2}{\bar{c}^2} q \quad (3.18)$$

$$\frac{d^2 h}{d x^2} = - \frac{\omega^2}{\bar{c}^2} h \quad (3.19)$$

Las soluciones generales de (3.18) y (3.19) son

$$q(x) = \Lambda_1 e^{\mu x} + \Lambda_2 e^{-\mu x} \quad (3.20)$$

$$h(x) = \Lambda_1' e^{\mu x} + \Lambda_2' e^{-\mu x} \quad (3.21)$$

siendo $\mu = j \frac{\omega}{c}$ y $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_1', \Lambda_2'$ constantes complejas que son determinadas por las condiciones de frontera.

Al buscarse soluciones del tipo 3.9 y 3.10, la utilización de un modelo unidimensional supone que las longitudes de onda de las soluciones sean mucho mayores que el diámetro de la tubería. Se agrega en consecuencia la siguiente hipótesis:

G - Se verifica que $\frac{\omega D}{2 \pi c} \ll 1$

Las expresiones 3.20 y 3.21 muestran que en un circuito de conductos a presión es posible conocer q y h para todo x . Un concepto que es de gran utilidad al punto que es tomado como fundamental por algunos autores (refs 6, 27, y 28) es el de "impedancia hidráulica".

Se denomina "impedancia hidráulica" en el punto i al cociente

$$Z_i = \frac{h_i}{q_i} \quad [s/m^2] \quad (3.22)$$

La impedancia hidráulica es un número complejo que no depende del tiempo. No expresa sin embargo una propiedad material del sistema en el punto puesto que Z_i depende de las condiciones de frontera en el tramo donde se encuentre el punto i .

3.4 Ondas Progresivas y Ondas Estacionarias

Obsérvese que las expresiones 3.20 y 3.21 deben sustituirse en 3.9 y 3.10 para obtener las expresiones de q^* y h^* bajo la forma de ondas estacionarias, esto es, oscilaciones cuyas amplitudes y fases no dependen del tiempo. Sin embargo, operando 3.20 y 3.21 es posible relacionar las referidas ondas estacionarias con la superposición de ondas progresivas. Para ello se trabajará con q y se resumirán resultados para h puesto que el procedimiento a seguir es igual en ambos casos.

Recordando que $1/\bar{c}$ es complejo, puede ponerse como $\frac{1}{c_1} + j\frac{1}{c_2}$. Si no existiese fricción distribuida en el sistema, la parte imaginaria del complejo $1/\bar{c}$ sería nula y c_1 sería igual a c .

Multiplicando 3.20 por $e^{j\omega t}$ resulta

$$q = A_1 e^{-\frac{\omega x}{c_2}} \cdot e^{j\omega \left(t + \frac{x}{c_1}\right)} + A_2 e^{\frac{\omega x}{c_2}} \cdot e^{j\omega \left(t - \frac{x}{c_1}\right)} \quad (3.23)$$

En consecuencia

$$q^* = \text{Re} \left[A_1 e^{-\frac{\omega x}{c_2}} \cdot e^{j\omega \left(t + \frac{x}{c_1}\right)} \right] + \text{Re} \left[A_2 e^{\frac{\omega x}{c_2}} \cdot e^{j\omega \left(t - \frac{x}{c_1}\right)} \right] \quad (3.24)$$

En virtud de la elección de la raíz que se hizo en 3.17, resulta que c_1 es positivo y c_2 es negativo. Por ello

$$\text{Re} \left[A_1 e^{-\frac{\omega x}{c_2}} \cdot e^{j\omega \left(t + \frac{x}{c_1}\right)} \right] \quad (3.25)$$

es una onda que se desplaza en el sentido opuesto al del crecimiento de x , con la velocidad c , y va amortiguándose exponencialmente según el factor $e^{-\frac{\omega x}{c_2}}$ en el sentido de su desplazamiento.

Análogamente

$$\text{Re} \left[A_2 e^{-\frac{\omega x}{c_2}} \cdot e^{j\omega \left(t - \frac{x}{c_1} \right)} \right] \quad (3.26)$$

es una onda que se desplaza en el mismo sentido en que crecen las x , con velocidad c_1 y va amortiguándose exponencialmente según el factor $e^{-\frac{\omega x}{c_2}}$ en el sentido de su desplazamiento.

El resultado para h^* es análogo, pudiendo escribirse como

$$h^* = \text{Re} \left[A_1' e^{-\frac{\omega x}{c_2}} \cdot e^{j\omega \left(t + \frac{x}{c_1} \right)} \right] + \text{Re} \left[A_2' e^{-\frac{\omega x}{c_2}} \cdot e^{j\omega \left(t - \frac{x}{c_2} \right)} \right] \quad (3.27)$$

siendo enteramente similar la interpretación de h^* como suma de dos ondas progresivas desplazándose en sentido opuesto y amortiguándose en amplitud en el sentido del desplazamiento.

3.5 Matrices de Transferencia

3.5.1 Matrices de campo

En esta sección se analizará el problema de cómo relacionar, a partir de

3.20 y 3.21, los valores de q y h en los dos extremos de una tubería.

En primer lugar debe observarse que si bien en 3.20 y 3.21 aparecen cuatro constantes complejas Λ_1 , Λ_2 , Λ_1' y Λ_2' éstas no son independientes entre sí, puesto que deben cumplirse las relaciones 3.13 y 3.14 .

Sustituyendo 3.20 y 3.21 en 3.13 y 3.14 resulta que

$$q(x) = -\frac{1}{Z_c} (C_1 e^{\mu x} - C_2 e^{-\mu x}) \quad (3.28)$$

$$h(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x} \quad (3.29)$$

siendo $C_1 = \Lambda_1'$ y $C_2 = \Lambda_2'$ y resulta que $\Lambda_1 = -\frac{gA}{c^2} j\omega \Lambda_1'$ y

$\Lambda_2 = -\frac{gA}{c^2} j\omega \Lambda_2'$. Asimismo Z_c , que se denominará "impedancia característica de la tubería" vale,

$$Z_c = \frac{\mu c^2}{j\omega gA} \quad (3.30)$$

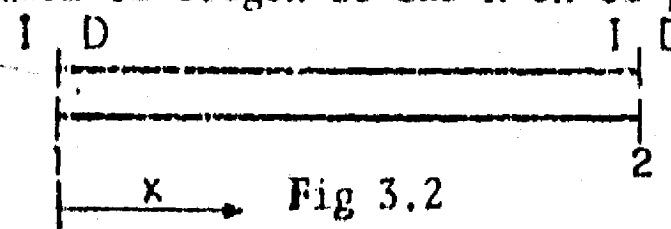
y para el caso sin fricción distribuida, $\mu = j\omega/c$ y $Z_c = \frac{c}{gA}$

Habiendo reducido las 4 constantes libres a dos se procederá a determinar las mismas a partir de las condiciones de frontera.

Considérese una tubería cuyos extremos sean 1 y 2. Ver fig 3.2

En cada extremo se distinguirá el lado izquierdo (I) del derecho (D) de acuerdo a un observador que mire la tubería de manera que el flujo venga de

su izquierda y vaya a su derecha. Se tomará el origen de las x en el punto 1 y el extremo de la tubería será $x = \ell$.



Aplicando estos convencionalismos a 3.28 y 3.29 resulta que

$$q_{1D} = -\frac{1}{Z_c} (C_1 - C_2) \quad (3.31)$$

$$h_{1D} = C_1 + C_2 \quad (3.32)$$

$$q_{2I} = -\frac{1}{Z_c} (C_1 e^{\mu\ell} - C_2 e^{-\mu\ell}) \quad (3.33)$$

$$h_{2I} = C_1 e^{\mu\ell} + C_2 e^{-\mu\ell} \quad (3.34)$$

Despejando C_1 y C_2 en función de q_{1D} y h_{1D} de 3.31 y 3.32 y sustituyendo estas constantes en 3.33 y 3.34 resultará

$$q_{2I} = \cosh \mu\ell q_{1D} - \frac{1}{Z_c} \sinh \mu\ell h_{1D} \quad (3.35)$$

$$h_{2I} = -Z_c \sinh \mu\ell q_{1D} + \cosh \mu\ell h_{1D} \quad (3.36)$$

siendo $Z_c = c^2 \mu / g A j\omega$.

$$\text{y recordando que } \cosh \mu\ell = \frac{e^{\mu\ell} + e^{-\mu\ell}}{2} \text{ y } \sinh \mu\ell = \frac{e^{\mu\ell} - e^{-\mu\ell}}{2}$$

Las expresiones 3.35 y 3.36 pueden incluirse en una sola expresión en notación matricial que es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_{2I} = C \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_{1D} \quad (3.37)$$

siendo

$$C = \begin{pmatrix} \cosh \mu \ell & -\frac{1}{Z_c} \sinh \mu \ell \\ -Z_c \sinh \mu \ell & \cosh \mu \ell \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Si en el cálculo la fricción no se considera, la expresión 3.38 de C se convierte en

$$C = \begin{pmatrix} \cos \omega \frac{\ell}{c} & -j \frac{1}{Z_c} \sin \omega \frac{\ell}{c} \\ -j Z_c \sin \frac{\omega \ell}{c} & \cos \omega \frac{\ell}{c} \end{pmatrix}$$

donde $Z_c = \frac{c}{gA}$

La matriz C se denominará matriz de transferencia del conducto que va de 1 a 2. Para diferenciarlas de las matrices de transferencia de las singularidades con parámetros concentrados, estas matrices de transferencia con parámetros distribuidos se denominarán "matrices de campo" y las matrices de las singularidades que se verán a continuación se denominarán "matrices de punto".

3.5.2 Matrices de punto

La deducción de las "matrices de punto" debe hacerse para cada tipo de singularidad asignándose a Q y H en la singularidad, el comportamiento que la misma impone.

Esto se traduce en expresiones algebraicas que se linealizan en $| q^*/Q_0 |$ y $| h^*/H_0 |$ hallándose entonces una relación matricial que vincula q_I, h_I con q_D, h_D . Dicha matriz es la matriz de punto correspondiente. Para ilustrar el procedimiento se presentará en lo que sigue y a título de ejemplo, la deducción de las matrices correspondientes a una válvula oscilante y a un oscilador a pistón que son los excitadores que luego utilizaremos en los cuatro sistemas simples que analizaremos en detalle.

3.5.2.1 Matriz de transferencia de una válvula oscilante

Sea una válvula cuya operación, en régimen estacionaria, puede describirse con la fórmula clásica

$$Q_0 = (C_g A)_0 \sqrt{2g (H_I - H_D)_0} \quad (3.39)$$

siendo C_g el coeficiente de gasto y A el área libre de pasaje.

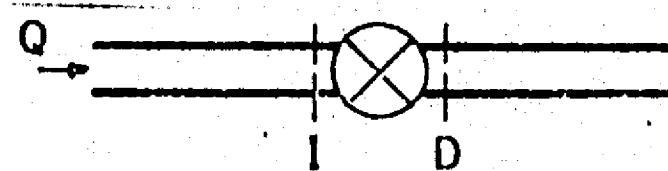


Fig 3.3 Válvula oscilante

Se admite que en la operación no estacionaria vale una ley del mismo tipo, resultando

$$Q = C_g A \sqrt{2g (H_I - H_D)} \quad (3.40)$$

Sustituyendo en (3.40), Q y H por sus expresiones 3.3 y 3.4 y poniendo

$$\frac{C_g A}{(C_g A)_0} = 1 + \tau^* \quad (3.41)$$

resulta:

$$1 + \frac{q^*}{Q_0} = (1 + \tau^*) \cdot \left[1 + \frac{h_I^* - h_D^*}{(H_I - H_D)_0} \right]^{1/2} \quad (3.42)$$

Admitiendo que $\left| \frac{h_I^* - h_D^*}{(H_I - H_D)_0} \right| \ll 1$ y que $|\tau^*| \ll 1$

linealizando (3.42) resulta

$$\frac{q^*}{Q_0} = \tau^* + \frac{1}{2} \frac{h_I^* - h_D^*}{(H_I - H_D)_0} \quad (3.43)$$

Pasando (3.43) a notación compleja poniendo

$$\tau^* = \text{Re} \left[k e^{j\omega t} \right] \text{ se tiene:}$$

$$\frac{q}{Q_0} = k + \frac{1}{2} \frac{h_I - h_D}{(H_I - H_D)_0} \quad (3.44)$$

Ordenando 3.44 para pasar a la notación matricial resulta:

$$\begin{aligned} q_D &= q_I = q \\ h_D &= -\frac{2(H_I - H_D)_0}{Q_0} \cdot q_I + 2(H_I - H_D)_0 k + h_I \end{aligned} \quad (3.45)$$

Poniendo $(H_I - H_D)_0 = \Delta H$ y $2 \Delta H k = K$ se tiene la siguiente ecuación matricial correspondiente a la válvula oscilante.

$$\begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2 \Delta H}{Q_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_I + \begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Nótese que la condición de excitador de la válvula se expresa a través de la matriz columna. Si $K = 0$ (3.46) representa la ecuación matricial de un orificio.

Suele designarse a $2 \Delta H/Q_0$ como "impedancia" de la válvula y escribirse $2 \Delta H/Q_0 = Z_v$. La matriz de 2×2 la designaremos como V y la matriz columna como E .

Para terminar importa señalar que la condición $|h^*/H_0| \ll 1$ no había sido aún necesario imponerla.

Sin embargo y como se muestra en el desarrollo anterior, la existencia de pérdidas de carga localizadas (no distribuidas) obliga a linealizar ecuaciones del tipo (3.39). Por ello debe establecerse como última hipótesis de simplificación del modelo lineal, la siguiente:

H - En el sistema considerado se verifica en todo punto y todo instante que $\left| \frac{h^*}{H_0} \right| \ll 1$.

3.5.2.2. Matriz de transferencia de un oscilador de pistón

El oscilador de pistón que trataremos se presenta en la figura 3.4.

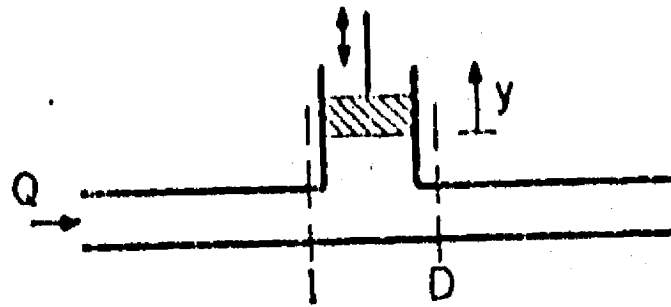


Fig 3.4 Oscilador de Pistón

Las ecuaciones que relacionan la carga y el gasto pulsatorio son las siguientes:

$$q_1^* = q_D^* + \tilde{q}^* \quad (3.47)$$

$$h_I^* = h_D^* = \tilde{h}^*$$

siendo \tilde{q}^* el gasto que sale de la tubería hacia el recinto donde se aloja el pistón y \tilde{h}^* la carga piezométrica pulsatoria en dicho recinto. Este se considera suficientemente pequeño como para que la carga y el gasto pulsatorio puedan ser considerados invariables en cada instante en el interior del recinto.

El gasto \tilde{q}^* está determinado por el movimiento impuesto al pistón que será armónico. En consecuencia si $y = Y \cos \omega t$, se tendrá que

$$\tilde{q}^* = -AY\omega \sin \omega t \quad (3.48)$$

siendo A el área del pistón. Pasando ahora las ecuaciones (3.47) y (3.48) a notación compleja y dándole forma matricial a las relaciones resultantes, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_I + \begin{pmatrix} -\dot{q} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

siendo $\dot{q} = j \Lambda Y w$.

Nótese que al no haber pérdida de carga localizada, la matriz de 2 x 2 es la matriz identidad y que la matriz columna correspondiente al carácter de excitador del pistón difiere de la hallada para la válvula (3.46) en que el pistón excita el gasto y la válvula la carga piezométrica.

3.6 Matriz de una Turbomáquina

En la bibliografía, las turbomáquinas han sido tratadas habitualmente como una válvula oscilante. Sin embargo, en los últimos años hay evidencias que indican que ese esquema es excesivamente simplificado para tratar la turbomáquina cuando opera a carga parcial o a sobrecarga. En particular la formación de un vórtice en la descarga de las turbinas Francis cuando operan fuera de la zona de diseño en el diagrama colinal, genera fuertes pulsaciones y obliga a tratar al circuito hidráulico para esas condiciones de operación de la máquina.

Varios autores han tratado ya este delicado problema como por ejemplo Fannelli (ref 49), Brennen (ref 50).

Como nuestro trabajo se orienta al estudio del problema de la resonancia, hemos excluído expresamente el tratamiento del problema de representación de la turbomáquina.

3.7 Matriz Global de una Rama Principal

En la sección 3.4 nos hemos referido a las matrices de transferencia de campo y de punto que traducen el comportamiento ante las oscilaciones estacionarias de las tuberías y las singularidades. En esta sección examinaremos cómo se trata un sistema complejo cuyas matrices de campo y punto se conocen.

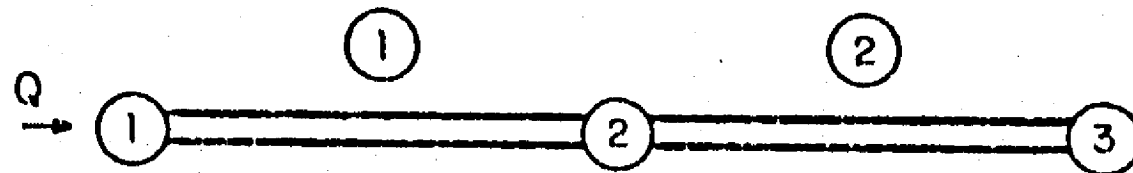
Todo sistema de conductos a presión tiene por lo menos dos extremos. Uno de entrada del fluido al sistema y otro de salida. En nuestros análisis consideramos siempre una *rama principal*, esto es una rama que une dos extremos, uno de entrada y otro de salida. Sobre el eje de esa rama se medirá la x a partir de un origen prefijado (habitualmente el extremo de entrada). A continuación veremos cómo es posible determinar el vector columna.

$$\begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix} = z$$

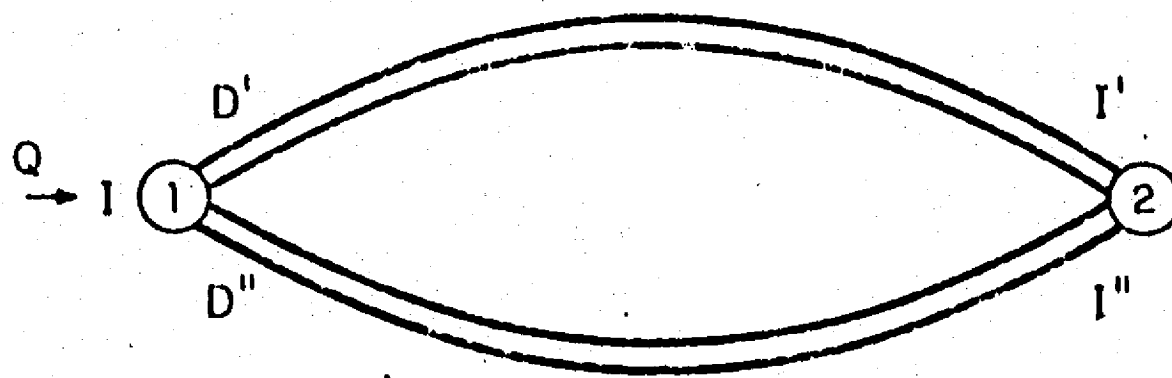
en todo punto de la rama.

3.7.1 Tuberías en serie o en paralelo

En primer lugar se analizarán dos esquemas de disposición de las tuberías que facilitan la resolución de las ramas tal como se presentan en la práctica. Estos esquemas se presentan en la fig 3.5 y son las tuberías en serie (a) y en paralelo (b).



Tuberías en serie (a)



Tuberías en paralelo (b)

Fig 3.5 Esquemas de disposición de tuberías

3.7.1.1 Tuberías en serie

Las matrices de transferencia se designarán como C_i cuando correspondan al conducto o tubería i y P_i cuando correspondan al punto o singularidad i . El vector columna z_{iI} corresponde al vector inmediatamente aguas arriba del punto i (I - izquierda) y z_{iD} al vector inmediatamente aguas abajo (D - derecha). La relación entre los z_i es la siguiente (fig 3.5 (a)).

$$\begin{aligned}
 z_{1D} &= P_1 z_{1I} \\
 z_{2I} &= C_1 z_{1D} \\
 z_{2D} &= P_2 z_{2I} \\
 z_{3I} &= C_2 z_{2D} \\
 z_{3D} &= P_3 z_{3I}
 \end{aligned}
 \tag{3.51}$$

Sustituyendo la última relación en la penúltima y así sucesivamente resulta:

$$z_{3D} = A z_{1I}, \quad A = P_3 C_2 P_2 C_1 P_1 \tag{3.52}$$

donde A es la matriz equivalente de la serie. Es una matriz de dos por dos producto de las cinco matrices de dos por dos indicadas, de manera que el esquema de tuberías en serie tiene su matriz de transferencia A que se halla a partir de las respectivas matrices de campo y punto, tal como se indica en (3.52). Para que el (3.52) sea un sistema determinado de los cuatro valores q_{1I} , h_{1I} y q_{3D} , h_{3D} , dos deben ser conocidos.

3.7.1.2 Tuberías en paralelo

De la fig 3.5 (b) sale que la relación de los Z_i es en este caso, la siguiente:

$$\begin{aligned}
 z_{1D} &= P_1 z_{1I} \\
 z_{2I'} &= C_1' z_{1D'} \\
 z_{2I''} &= C_1'' z_{1D''} \\
 z_{2D} &= P_2 z_{2I}
 \end{aligned}
 \tag{3.53}$$

Falta establecer las relaciones en los puntos 1 y 2 para calcular la matriz global para este caso. Estas son, despreciando pérdidas locales en las bifurcaciones

$$\begin{aligned}
 q_{1I} &= q_{1D'} + q_{1D''} \\
 h_{1I} &= h_{1D'} = h_{2D''} \\
 q_{2D} &= q_{3I'} + q_{3I''} \\
 h_{2D} &= h_{3I'} = h_{3I''}
 \end{aligned}
 \tag{3.54}$$

Se trata ahora de hallar la matriz B equivalente del paralelo

$$z_{2D} = B z_{1I'} \tag{3.55}$$

Operando resulta que la matriz B tiene los siguientes coeficientes.

$$b_{11} = b_{21} \frac{c_{11}'}{c_{21}'} + \frac{c_{11}''}{c_{21}''}$$

$$b_{12} = c'_{12} + c''_{12} - \left(\frac{c'_{11} c'_{22}}{c'_{21}} + \frac{c''_{11} c''_{22}}{c''_{21}} \right) + \left(\frac{c'_{11}}{c'_{21}} + \frac{c''_{11}}{c''_{21}} \right) b_{22}$$

$$b_{21} = \frac{c'_{21} c''_{21}}{c'_{21} + c''_{21}} \quad (3.56)$$

$$b_{22} = \frac{c'_{22} c''_{21} + c'_{21} c''_{22}}{c'_{21} + c''_{21}}$$

Se trata también de una matriz de dos por dos y para que el sistema (3.56) sea determinado deben conocerse dos de los cuatro valores q_{1I} , h_{1I} , q_{2D} , h_{2D} .

3.7.2 Matriz de la rama principal

Con lo visto en el párrafo 3.5.1 estamos en condiciones de hallar z_{iI} y z_{iD} en todos los puntos i de una rama principal. En efecto, consideramos un sistema complejo como el que aparece en la fig 3.6 siendo $i = 1, 2, \dots, 5, 6$. Como ya se dijo, una rama principal es una rama que une dos extremos del sistema, uno de entrada y otro de salida. La rama que consideramos a título de ejemplo está indicada en la fig 3.6.

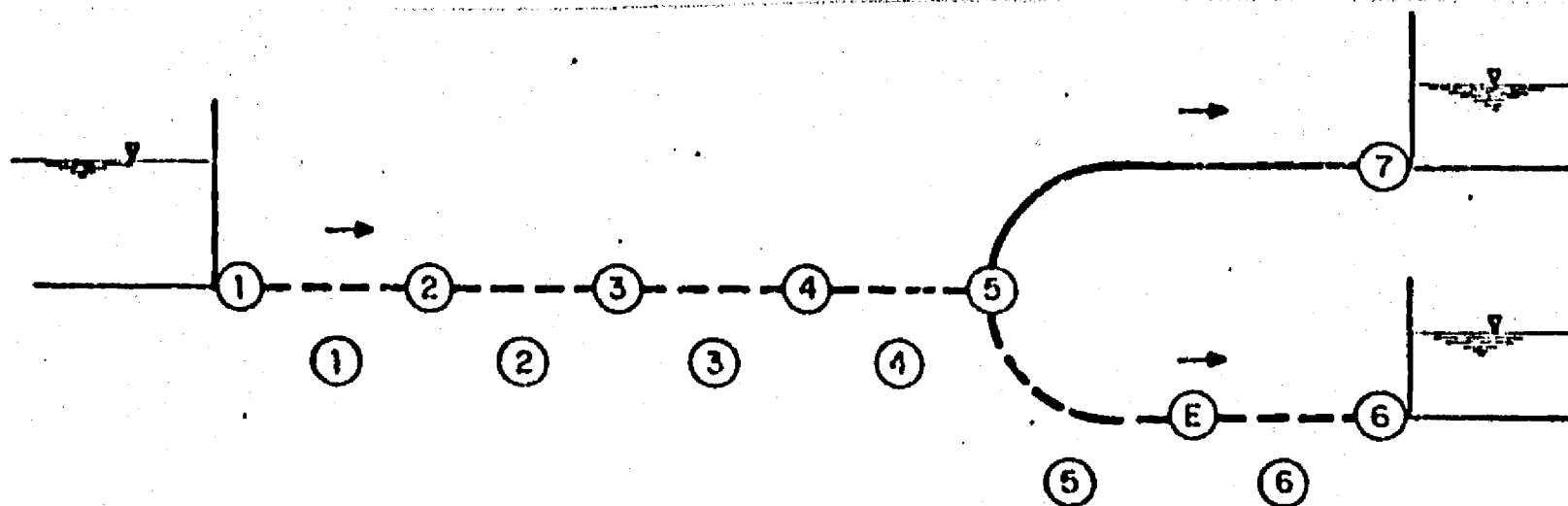


Fig 3.6 Sistema de tuberías

Para hallar z_{iI} y z_{iD} en todos los puntos i de la rama principal deben resolverse los problemas elementales que se indican a continuación:

Matriz del punto 1	P_1
Matriz de la tubería 1	C_1
Matriz del punto 2	P_2
Matriz de la tubería 2	C_2
Matriz del punto 3	P_3
Matriz de la tubería 3	C_3
Matriz del punto 4	P_4
Matriz de la tubería 4	C_4
Matriz de la tubería 5	C_5
Matriz de la tubería 7	C_7
Matrices del excitador E	V, E
Matriz de la tubería 6	C_6
Matriz del punto 6	P_6

A continuación se procede a hallar la matriz de la bifurcación que existe en el punto E. Esta matriz se denominará P_5 y queda determinada con la condición de frontera $h_{7D} = 0$.

En estas condiciones pueden formularse estas relaciones.

$$\begin{aligned}
 z_{5I} &= C_4 P_4 C_3 P_3 C_2 P_2 C_1 P_1 z_{1I} \\
 z_{5D} &= P_5 z_{5I} \\
 z_{6D} &= (C_6 V C_5) z_{5D} + C_6 E
 \end{aligned}
 \tag{3.57}$$

siendo $E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ la matriz activa del excitador.

En consecuencia se tiene

$$z_{6D} = Uz_{1I} + C_6 E \quad (3.58)$$

siendo

$$U = C_6 V C_5 P_5 C_4 P_4 C_3 P_3 C_2 P_2 C_1 P_1$$

donde U es una matriz de dos por dos.

Las condiciones de frontera aún no utilizadas, a saber $h_{1I} = h_{6D} = 0$ determinan el sistema (3.53).

Conociendo z_{1I} es posible encontrar, mediante el empleo de las matrices que se requieran de las matrices ya utilizadas para calcular U , el vector z_{iI} o z_{iD} que interese.

Como se verá más adelante, tiene gran interés conocer el vector z_p para todo punto P de la abscisa x en la rama. Si el punto P coincide con algún iI o iD el problema ya ha sido considerado. Si el punto P pertenece al interior de una tubería, supongamos que sea la tubería i , el problema se resuelve utilizando una matriz C del tipo (3.38) donde se pone $l = x$ y la relación entre z_p y z_{iD} (conocido) será

$$z_p = Cz_{iD} \quad (3.59)$$

3.8 Papel de la Fricción

La fricción distribuida en las tuberías, introduce un parámetro más en el análisis, según ya se vio en la sección 3.2. En la bibliografía son numerosas las observaciones en cuanto al papel no significativo que posee la fricción en los cálculos de las frecuencias de resonancia. Ver por ejemplo las refs 23, 27 y 28. Interesa en consecuencia saber cómo evaluar el papel de la fricción en un sistema dado.

La fricción interviene en el cálculo a través de la celeridad compleja \bar{c} , definida en (3.17).

La relación entre c (celeridad) y la celeridad compleja \bar{c} es la siguiente

$$\frac{c}{\bar{c}} = \left(1 - j \frac{f Q_0}{DA\omega} \right)^{1/2} \quad (3.50)$$

La expresión (3.52) nos proporciona el criterio de evaluación del papel de la fricción. Basta comparar el valor de $f V_0/D\omega$ con la unidad, esto es:

$$\frac{f V_0}{D \omega} \lesssim 1 \quad (3.51)$$

En un sistema el papel de la fricción crece con las velocidades medias y decrece con la frecuencia de la oscilación. Al despreciar la fricción los resultados serán mejores para velocidades medias bajas y frecuencias de oscilación altas.

3.9 Formulación Adimensional

Tomando como punto de partida la matriz de transferencia de una tubería tal como se presenta en (3.38), las variables y parámetros que intervienen en esa expresión en relación con el tipo de problema que nos interesa, son los siguientes

$$\begin{aligned} \text{Variables} & - q, h, \omega \\ \text{Parámetros} & - l, c, g, A, f, V_0, D \end{aligned} \quad (3.52)$$

Aplicando a la ecuación matricial el método de reducción de parámetros como complemento del "análisis inspeccional" (ref 51), resulta que la máxima reducción posible de variables y parámetros adimensionados lleva a la siguiente situación.

$$\text{Variables adimensionadas } \frac{q}{l^2 c}, \frac{h}{l}, l \frac{\omega}{c}, \frac{f V_0}{D \omega}$$

$$\text{Parámetros adimensionados } \frac{A}{l^2}, \frac{c^2}{l g}$$

Estos resultados serán utilizados posteriormente.

3.10 Límites y Alcances del Modelo Lineal

Una crítica global que puede realizarse a todo lo expuesto en este capítulo es que se basa en un modelo lineal del fenómeno oscilatorio.

Esta crítica que sin duda es justa, sin embargo puede limitarse en su alcance señalando que si las componentes oscilatorias de la carga piezométrica (h^*) y del gasto volumétrico (q^*) son suficientemente pequeñas frente a los valores medios, esto es $\left| \frac{h^*}{H_0} \right| \ll 1$ y $\left| \frac{q^*}{Q_0} \right| \ll 1$, los métodos lineales se aproximan todo lo que se desee al comportamiento real del fenómeno. Ante este argumento puede contestarse que en las proximidades de la resonancia, en algunos puntos del sistema, las amplitudes de h^* y q^* crecen fuera de todo control y ello invalidaría los métodos lineales en las proximidades de la resonancia. Esto sin duda es correcto y sería un error grave suponer que cuando el sistema está resonando estos métodos pueden describir adecuadamente lo que ocurre. Sin embargo, como el interés primario de las teorías de la resonancia es hallar las frecuencias resonantes o peligrosas en el sistema y no determinar por ejemplo amplitudes en la oscilación de q^* y h^* en la resonancia, se justifica el empleo de los métodos lineales siempre que no se pierdan de vistas las limitaciones señaladas.

En cuanto a la exactitud con que los métodos lineales reproducen el fenómeno real existe en la bibliografía información sobre algunos trabajos experimentales y su comparación con los resultados obtenidos mediante los métodos lineales. Ver los trabajos de Fanelli (ref 32), Zielke y Wylie (ref 23), Guarga (ref 46) y Chaudry (refs 30 y 31).

Asimismo, en el trabajo de Wylie (ref 27) se realizan varias comparaciones entre el método lineal de las impedancias hidráulicas y el método de las características que permite la integración de las ecuaciones completas. El resultado de estas comparaciones es ampliamente satisfactorio.

Para finalizar este comentario sobre la validez del modelo lineal, debe señalarse, que cuando se establece que la solución (en frecuencias) a un determinado problema es un conjunto infinito pero numerable de frecuencias, surge la pregunta referida al máximo valor de n para el cual la solución posee sentido. Esto está referido a la precisión con la que se conocen los datos del problema y en particular la celeridad de las ondas acústicas, pues es el parámetro cuya determinación es más compleja.

Veamos esto con un ejemplo. Supongamos que en un problema determinado se establece que las frecuencias de resonancia están dadas por la expresión $f_n = \frac{n c}{4 \ell}$ con $n = 1, 2, 3, \dots$, c - celeridad y ℓ - longitud.

Obviamente $\Delta f = f \frac{\Delta c}{c}$, por otro lado $f_{n+1} - f_n = \frac{c}{4 \ell}$.

En consecuencia $\Delta f > \frac{f_{n+1} - f_n}{2}$ si $f > \frac{c^2}{8 \Delta c \ell}$. Por lo tanto, carece de todo sentido predecir frecuencias para $n > \frac{c}{2 \Delta c}$ puesto que las frecuencias resonantes se confunden con las frecuencias antiresonantes.

4. TEORIAS EXISTENTES SOBRE RESONANCIA Y CRITICA DE LAS MISMAS

Al proyectista de una planta hidroeléctrica, de un equipo hidráulico de control o del sistema de alimentación de combustible de un vehículo, le interesa conocer en la etapa de proyecto, el comportamiento del sistema ante las oscilaciones estacionarias. En particular le interesa resolver el problema de la resonancia del mismo, esto es, conocer en qué puntos del sistema y para qué frecuencias se producen las máximas amplitudes de la oscilación de la presión. El propósito que se persigue al resolver este problema es el de evitar que dichos máximos se produzcan, aumentando en consecuencia la vida útil del sistema.

4.1 Teorías Existentes

Se han propuesto dos teorías aplicables a sistemas de conductos a presión, que intentan resolver el problema de la resonancia. Estas teorías son la

propuesta por E. Wylie (ref 27) en 1964 que llamaremos "Teoría de la Impedancia Terminal" (TIT) y la propuesta por W. Zielke (ref 31) en 1971 que llamaremos "Teoría de las Oscilaciones Libres" (TOL). Cada una de estas teorías define un concepto de resonancia del sistema y propone un método de cálculo. A continuación realizaremos una reseña crítica de las mismas.

4.2 Teoría de la Impedancia Terminal (TIT)

Luego de examinar la bibliografía sobre el tema, Wylie señala (ref 27, p 22):

"Faltan desarrollar los conceptos (de impedancia RG)(*) y aplicarlos explícitamente a los casos de resonancia de la fundamental y armónicas en sistemas complejos. Falta asimismo mostrar que las armónicas superiores pueden producirse sin que se presenten nodos o antinodos en un cambio de geometría de la tubería. Falta también encontrar un método que evite el uso de la 'tubería equivalente' y finalmente, falta encontrar un método para determinar los periodos correspondientes a la resonancia, lo cual es lo esencial en un sistema dado".

Estos son los objetivos del trabajo de Wylie y debe decirse que todos, salvo el último, son cumplidos plenamente mediante el desarrollo sistemático de la teoría de las impedancias hidráulicas. En lo que sigue nos detendremos exclusivamente en la exposición de Wylie en lo referido al problema de la determinación de las frecuencias de resonancia en sistemas complejos. Para ello veremos en primer lugar qué son, para Wylie, las frecuencias de resonancia. La definición que Wylie realiza está estrictamente ligada al hecho de que los sistemas que trata son una clase restringida de sistemas. En efecto,

(*) En las transcripciones los agregados aclaratorios incorporados por R. Guarga se indican entre paréntesis y con las iniciales (RG).

Wylie sólo trata sistemas que se ajustan a la siguiente descripción (ref 27, p 67).

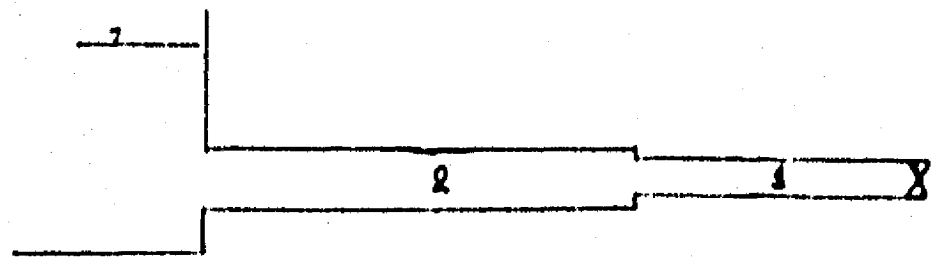
"Cada sistema tiene un tanque de carga constante en el extremo aguas arriba y la excitación se produce en el extremo aguas abajo (terminal). En los sistemas con ramal se estudian diferentes condiciones de frontera en el ramal".

En particular la geometría de los sistemas estudiados por Wylie es la que se ilustra en la fig 3.1.

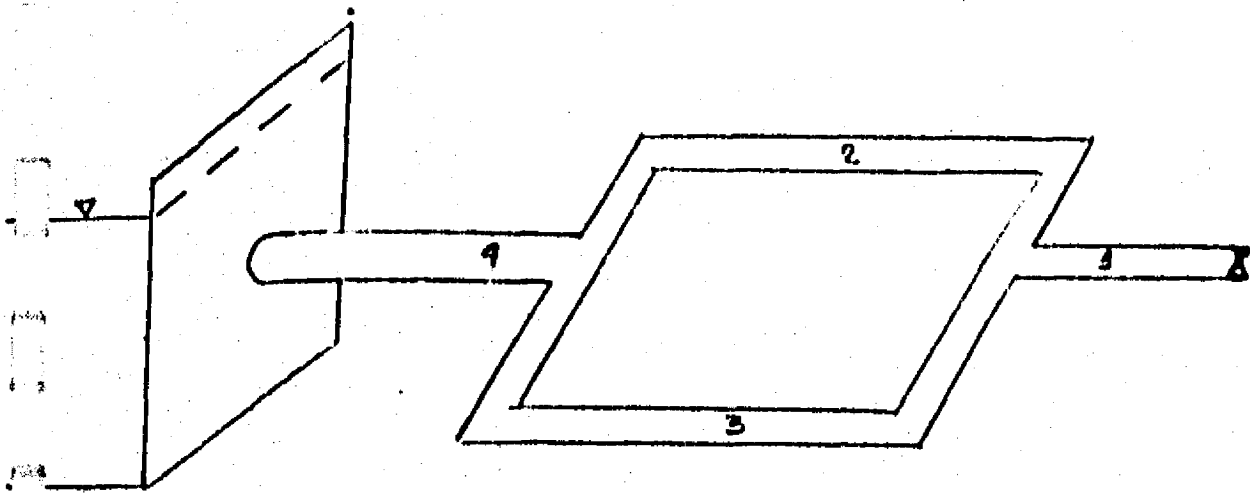
Como puede observarse en la fig 3.1 los sistemas estudiados por Wylie tienen todos la excitación en un extremo (extremo aguas abajo) y esto condiciona el resto de su trabajo, en especial condiciona su definición de las "frecuencias naturales" del sistema y en consecuencia de las frecuencias de resonancia. Al respecto Wylie establece (ref 27; p. 60)

"En un sistema particular, la impedancia terminal varía con la frecuencia y es máxima (su módulo, R_G) para el infinito número de frecuencias de resonancia. Estas son las frecuencias naturales del sistema en el caso de los sistemas que tienen un tanque de carga constante en el extremo aguas arriba y ellas corresponden a la frecuencia fundamental y a las armónicas impares".

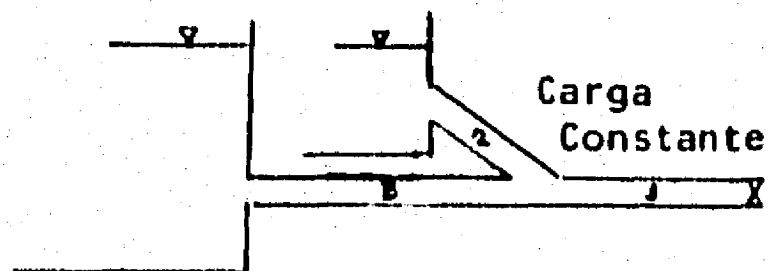
Con estos elementos de la teoría expuesta por Wylie es posible intentar dar respuesta al problema de la resonancia para una clase restringida de sistemas de conductos a presión (aquellos con excitación terminal). Para estos sistemas el punto donde se producen las máximas amplitudes, según Wylie,



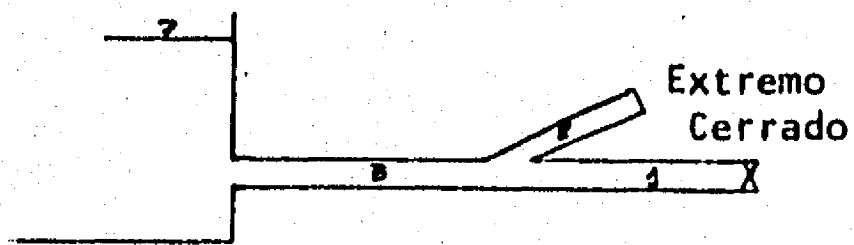
Sistema serie



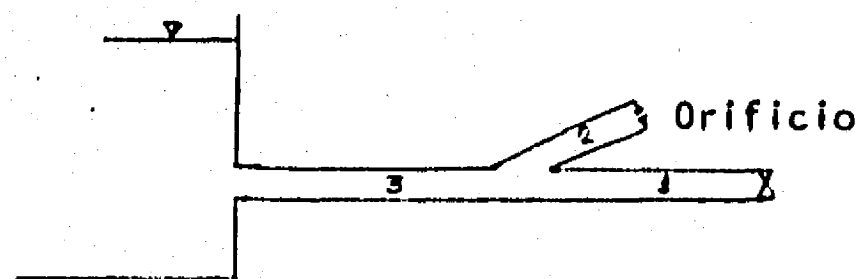
Sistema paralelo



Sistema con ramal (B1)



Sistema con ramal (B2)



Sistema con ramal (B3)

Fig 3-1. Sistemas estudiados por E. Wylie

será siempre el extremo terminal del sistema y las frecuencias a las que esto se producen serán las frecuencias que hacen máximo el módulo de la impedancia terminal (frecuencias naturales según Wylie).

Las críticas que caben a la teoría de la impedancia terminal como respuesta al problema general de resonancia en un sistema de conductos a presión son las siguientes:

- A) Sólo trata un tipo muy especial de sistemas (sistemas con excitación terminal y carga constante en el otro extremo). No incluye por ejemplo los sistemas en los que la excitación no está en un extremo sino en un punto interior. Este tipo de arreglo se presenta con frecuencia en las plantas hidroeléctricas.
- B) Ubica de antemano el punto más peligroso (punto donde se producen las máximas amplitudes) en el extremo terminal. Luego se verá como esto no es así ni siquiera para algunos de los sistemas con excitación terminal y carga constante en el extremo inicial, que trata el propio Wylie.
- C) Las frecuencias de resonancia del sistema están asociadas al máximo del módulo de la impedancia terminal. Se verá más adelante cómo algunos sistemas con excitación terminal presentan la resonancia en frecuencias que hacen mínimo y no máximo el módulo de la impedancia terminal.

D) Es desafortunado denominar "frecuencias naturales del sistema" a las frecuencias que hacen máximo el módulo de la impedancia en un punto arbitrariamente escogido en el sistema. Estas frecuencias sólo están asociadas al comportamiento del módulo de la impedancia en ese punto y no están asociadas, como se verá, al comportamiento global del sistema.

4.3 Teoría de las Oscilaciones Libres (TOL)

Esta teoría la propone Zielke por primera vez en la discusión (ref 33) que realiza del trabajo de Chaudry (ref 30) donde éste desarrolla el método de las matrices de transferencia. Luego profundiza su análisis en un trabajo (ref 34) presentado en 1972 en la Conferencia Internacional de Oscilaciones de Presión (Canterbury, Inglaterra). En ninguno de los trabajos se presentan resultados experimentales.

La teoría expuesta por Zielke es recomendada en el libro de Wylie y Streeter (ref 35, p. 286) como el procedimiento adecuado a emplearse en los sistemas en los cuales "la excitación no está definida". Asimismo, se recomienda su aplicación en el libro de Chaudry (ref 31, p. 200) en los "sistemas autoexcitados".

En esta teoría no hay, como sí las hay en la de la impedancia terminal, limitaciones en cuanto a los sistemas considerados. De manera que su formulación debe entenderse aplicable a cualquier sistema de conductos a presión.

Para responder al problema de la resonancia, esta teoría analiza las "oscilaciones libres" del sistema de la siguiente forma (ref 34 p. 5)

"Las oscilaciones libres son causadas por una excitación inicial y de duración limitada en el tiempo. Las oscilaciones que subsisten en el sistema (una vez que cesó la excitación, RG) dependen del tiempo y están sometidas a un amortiguamiento lineal y en consecuencia deberán amortiguarse de manera exponencial. Las ecuaciones correspondientes a las oscilaciones libres se obtienen de las ecuaciones de transferencia (nuestras matrices de transferencia, RG) reemplazando $j\omega$ por la frecuencia compleja $s = \sigma + j\omega$ y las ecuaciones resultantes son las transformadas de Laplace de las ecuaciones de flujo".

"Si se desea analizar un sistema en particular, se debe disponer de las ecuaciones (matrices, RG) de todas las tuberías y también de las ecuaciones adicionales que establecen las condiciones en los extremos, en los puntos donde hay ramales y en los componentes hidráulicos como cámaras de aire, bombas, turbinas, válvulas, etc. Si se formula correctamente el problema habrá tantas ecuaciones como valores incógnitas de presiones y gastos. Sin embargo, el número de ecuaciones pueden, en general, reducirse mediante la multiplicación de las matrices de los conductos y de otros componentes del sistema cuando éstos se hallan en serie. El sistema de ecuaciones escrita en anotación matricial será entonces

$$U(s) \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix} = 0$$

Siendo $U(s)$ la matriz global del sistema y q y h los valores complejos del gasto y la carga en un punto de referencia del sistema. Este conjunto de ecuaciones determina la naturaleza de las oscilaciones libres. Si hubiese excitadores en el sistema, sus transformadas de Laplace aparecerían en el término de la derecha de la ecuación anterior (no se altera en consecuencia por la presencia

de excitadores la forma de las ecuaciones, RG). La solución no trivial de las ecuaciones sólo es posible si

$$\det U(s) = 0$$

Esta expresión plantea el problema como un problema convencional de valores propios en análisis de vibraciones".

En consecuencia, siendo el sistema continuo se obtendrá un conjunto infinito pero numerable de soluciones s_k , $k = 0, 1, 2$. Las frecuencias ω_R se denominan "frecuencias propias" del sistema y habrá resonancia en el sistema cuando algún excitador, excite en alguna frecuencia que coincida con algún ω_R . Para determinar los puntos donde se presenta la máxima amplitud en las presiones se procede a calcular, para cada una de las frecuencias, la forma modal correspondiente en las presiones. Los máximos de la forma modal corresponden a los puntos de máxima amplitud.

De acuerdo a la formulación anterior, este método resolvería en forma general y completa el problema de la resonancia en sistemas de conductos a presión.

Las críticas que cabe realizar a esta teoría son las siguientes:

- A) Carece de verificación experimental
- B) No se demuestra en ninguno de los trabajos donde esta teoría es expuesta, que la determinación de frecuencias y localización de puntos de amplitud máxima realizada de acuerdo a la misma, coincida con las frecuencias y los puntos del sistema en los que se producen las máximas amplitudes en las oscilaciones de la presión.

5. ANALISIS TEORICO DE CUATRO CASOS

En este capítulo se tratarán cuatro casos que han sido elegidos con el propósito de evidenciar contradicciones entre las dos teorías expuestas en el capítulo 4 (casos Nos. 1 y 3) o de mostrar contradicciones entre los resultados de una teoría y los resultados experimentales que se expondrán en el capítulo 6.

5.1 Primer Caso

Estudiaremos el caso de un conducto de características uniformes conectado aguas arriba a un tanque de nivel constante y que tiene en su extremo aguas abajo, una válvula oscilante como excitador (fig 5.1).

Para simplificar el tratamiento analítico del problema admitiremos que la fricción es despreciable en el conducto, no así en la válvula.

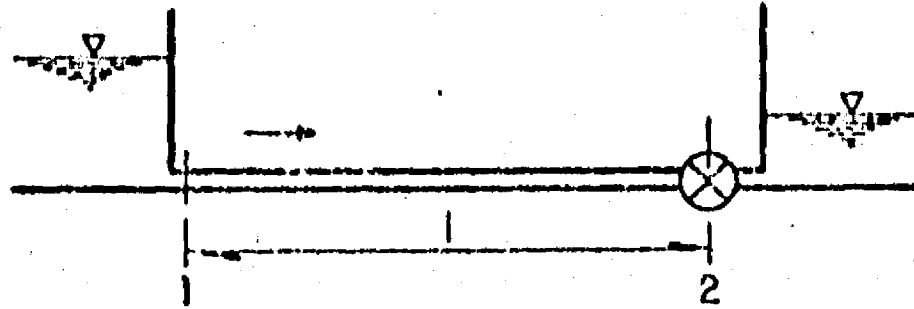


Fig 5.1 Sistema correspondiente al primer caso

Las condiciones de frontera son las siguientes

$$h_{1I} = 0$$

$$h_{2D} = 0$$

(5.1)

5.1.1. Solución dada por la Teoría de la Impedancia Terminal (TIT)

En la teoría de la impedancia terminal las frecuencias de resonancia se determinan haciendo máximo el módulo de la impedancia en 2I. Calcularemos entonces dicho módulo recordando que

$$Z_{2I} = \frac{h_{2I}}{q_{2I}}$$

(5.2)

Haciendo uso de (5.1) y (3.38) se tiene

$$Z_{2I} = \frac{c_{2I} q_{1D}}{c_{1I} q_{1D}} = \frac{c_{2I}}{c_{1I}} = -j Z_c \frac{\operatorname{sen} b \omega}{\cos b \omega} = -j Z_c \operatorname{tg} b \omega$$

siendo $b = \ell/c$

$$| Z_{2I} | = Z_c | \operatorname{tg} b \omega | \quad (5.3)$$

El módulo de Z_{2I} es máximo cuando $b\omega = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$. En consecuencia las frecuencias de resonancia f estarán dadas por

$$f_n = (2n - 1) \frac{c}{4 \ell} \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

5.1.2 Solución dada por la Teoría de las Oscilaciones Libres (TOL)

En esta teoría se investigan las oscilaciones que se mantienen en el sistema una vez que habiendo sido excitado, la excitación cesó. Por ello deben eliminarse los excitadores al realizar el análisis del sistema. En nuestro caso debe eliminarse la matriz E de la función de transferencia de la válvula que quedará reducida a la matriz V (ver párrafo 3.5.2.1). Para calcular las oscilaciones compatibles con las condiciones de frontera se calcula h_{2D} que debe ser nulo .

$$h_{2D} = u_{2I} q_{1I} = 0 \quad (5.4)$$

donde

$$U = V C$$

Para que exista solución no trivial, debe verificarse que $u_{21} = 0$. Las frecuencias que anulan u_{21} son llamadas en esta teoría, frecuencias naturales del sistema o frecuencias de resonancia.

Calculando u_{21} resulta

$$u_{21} = c_{21} - Z_v c_{11}$$

y sustituyendo los c_{ij} por sus valores (ver sección 4.3) se tiene

$$u_{21} = -Z_v \cosh \mu \ell - Z_c \sinh \mu \ell \quad (5.6)$$

donde $Z_c = \frac{C}{gA}$ con $\mu = \frac{s}{c}$ y $s = \sigma + j\omega$

Sustituyendo (5.6) en (5.4) se tiene

$$-Z_v (e^{\mu \ell} + e^{-\mu \ell}) - Z_c (e^{\mu \ell} - e^{-\mu \ell}) = 0 \quad (5.7)$$

Simplificando, sustituyendo s y μ por sus valores y poniendo $b = \frac{\ell}{c}$

$$-Z_v \left[e^{2\sigma b} \cdot (\cos \omega b + j \operatorname{sen} \omega b) + (\cos \omega b - j \operatorname{sen} \omega b) \right] - Z_c \left[e^{2\sigma b} (\cos \omega b + j \operatorname{sen} \omega b) - (\cos \omega b - j \operatorname{sen} \omega b) \right] = 0 \quad (5.8)$$

Lo cual implica que la parte real y la parte imaginaria sean nulas, esto es:

$$\begin{aligned} \cos \omega b (e^{2\sigma b} \cdot \beta + 1) &= 0 \\ \sin \omega b (e^{2\sigma b} \cdot \beta - 1) &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

siendo $\beta = (1 + Z_c/Z_v)/(1 - Z_c/Z_v)$.

Para resolver el sistema (5.9) deben distinguirse tres situaciones a saber:

$Z_v > Z_c$

En esta situación $\beta > 0$ y en consecuencia $\cos \omega b = 0$ y $\sigma = -\frac{1}{2b} \log_e \beta$. Por lo tanto $b\omega = (2n - 1)\frac{\pi}{2}$, siendo las frecuencias de resonancia

$$f_n = (2n - 1) \frac{c}{4l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.10)$$

$Z_v < Z_c$

En esta situación $\beta < 0$ y en consecuencia $\sin \omega b = 0$ y $\sigma = -\frac{1}{2b} \log_e (-\beta)$. Por lo tanto $b\omega = n\pi$, siendo las frecuencias de resonancia

$$f_n = \frac{nc}{2l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.11)$$

$Z_v = Z_c$

En esta situación no hay solución del sistema (5.9). No habría pues frecuencias de resonancia.

5.2 Segundo Caso

Estudiaremos ahora el caso de un conducto de longitud 2ℓ conectado en el extremo aguas arriba a un tanque de nivel constante y lo mismo en el extremo aguas abajo. En un punto que dista ℓ del extremo aguas arriba, se halla una válvula rotatoria (fig 5.2) que actúa como excitador.

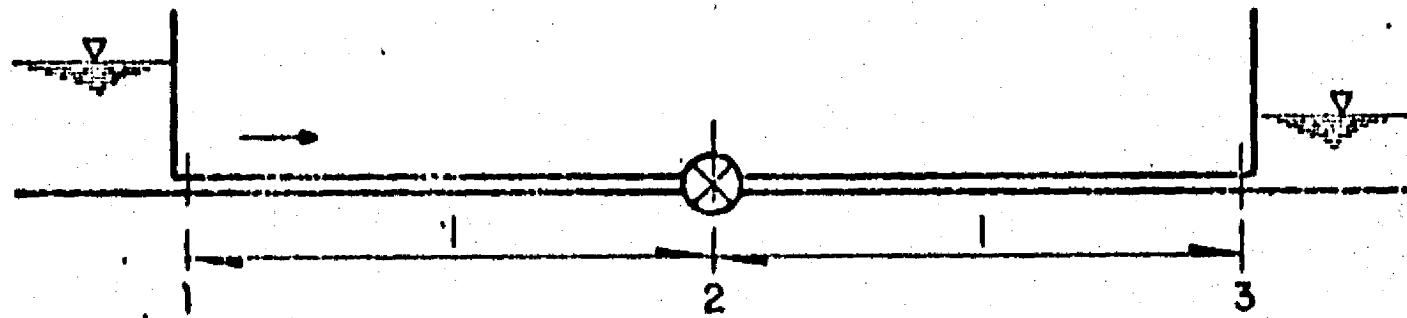


Fig 5.2 Sistema correspondiente al segundo caso

También aquí admitiremos que la fricción es despreciable en los conductos. En este caso sólo es aplicable la Teoría de las Oscilaciones Libres pues el sistema no tiene el excitador en un extremo como lo exige la Teoría de la Impedancia Terminal (ver sección 4.1).

Las condiciones de frontera son

$$h_{1I} = 0$$

(5.12)

$$h_{3D} = 0$$

La función de transferencia del excitador es igual a la presentada en (5.1.2).

En este caso $U = CVC$, y debe eliminarse E como se hizo en 5.1.2. Para el cálculo de las oscilaciones compatibles con las condiciones de frontera del sistema se calcula h_{3D} que debe ser nulo.

$$h_{3D} = u_{21} g_{1D} = 0$$

Debemos entonces estudiar $u_{21} = 0$. Las frecuencias que anulan u_{21} en esta teoría son, como ya se vió, las llamadas frecuencias de resonancia.

Calculando u_{21} se obtiene

$$u_{21} = -c_{11}(2c_{12} - Z'v c_{11}) \quad (5.14)$$

Debiendo verificarse $u_{21} = 0$, la expresión 5.14 se reduce a dos sistemas no simultáneos de ecuaciones a saber

$$\operatorname{Re}(c_{11}) = 0 \quad (5.15)$$

$$\operatorname{Im}(c_{11}) = 0$$

y

$$\operatorname{Re}(c_{12} - Z'v c_{11}) = 0 \quad (5.16)$$

$$\operatorname{Im}(c_{12} - Z'v c_{11}) = 0$$

siendo $Z'v = Zv/2$. Basta que se verifique uno de ellos para que (5.14) se verifique. En consecuencia las soluciones de (5.14) se componen de las soluciones de (5.15) y de las soluciones de (5.16),

Sustituyendo los c_{ij} por sus valores (ver sección 4.3) con $Zc = c/gA$, $\mu = \frac{s}{c}$, $s = \sigma + j\omega$ y $b = \frac{\ell}{c}$, se tiene para (5.15),

$$\begin{aligned} \cos b\omega (e^{2b\sigma} + 1) &= 0 \\ \text{sen } b\omega (e^{2b\sigma} - 1) &= 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

y para (5.16)

$$\begin{aligned} \cos b\omega (e^{2b\sigma} \beta' + 1) &= 0 \\ \text{sen } b\omega (e^{2b\sigma} \beta' - 1) &= 0 \end{aligned} \tag{5.16}$$

siendo $\beta' = (1 + Zc/Z'v)/(1 - Zv/Z'v)$

La solución del sistema (5.15) será $b\omega = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$ y $\sigma = 0$ para todo Zc y Zv . En frecuencia se tiene

$$f_n = (2n - 1) \frac{c}{4\ell} \tag{5.17}$$

La solución del sistema 5.16 es igual a la hallada en 5.9 cambiando β por β' y Zv por $Z'v$, en consecuencia se tendrán tres situaciones, a saber:

$$\frac{Z_v}{2} > Z_c$$

En esta situación $\beta' > 0$ y en consecuencia $\cos b\omega = 0$ y $\sigma = -\frac{1}{2b} \log_c \beta'$. Por lo tanto $b\omega = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$, siendo las frecuencias de resonancia.

$$f_n = (2n - 1) \frac{c}{4\ell}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.18)$$

$$\frac{Z_v}{2} < Z_c$$

En esta situación $\beta' < 0$ y en consecuencia $\sin b\omega = 0$ y $\sigma = -\frac{1}{2b} \log(-\beta')$. Por lo tanto $b\omega = n\pi$, siendo las frecuencias de resonancia.

$$f_n = \frac{n c}{2\ell} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.19)$$

$$\frac{Z_v}{2} = Z_c$$

El sistema (5.16) carece de solución.

5.3 Tercer Caso

El tercer caso es similar al caso No. 1 salvo que la válvula rotatoria se sustituye por un oscilador de pistón y un orificio inmediatamente aguas abajo de éste. En la fig 5.3 se presenta el esquema del tercer caso.

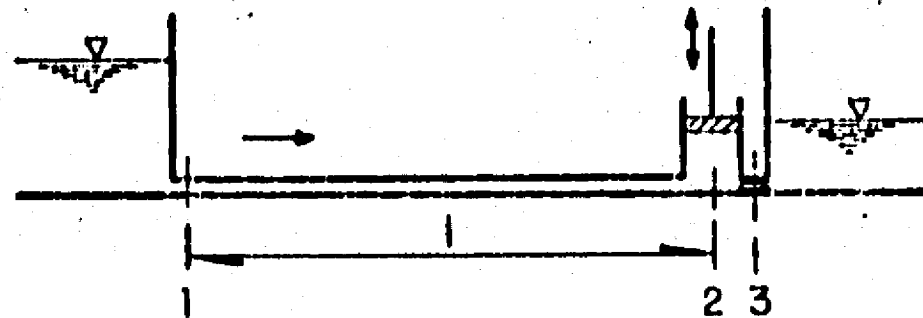


Fig 5.3 Esquema correspondiente al tercer caso

También aquí admitiremos que la fricción es despreciable en los conductos. Las condiciones de frontera son las siguientes

$$h_{11} = 0 \quad (5.20)$$

$$h_{3D} = 0$$

5.3.1. Solución dada por la Teoría de la Impedancia Terminal (TIT)

Para este caso el procedimiento a seguir es análogo al seguido para el caso No. 1 y el resultado es el mismo puesto que la impedancia en $2I$ no está afectada por el tipo de excitador y quedando determinada por la condición $h_{1I} = 0$.

En consecuencia vale (5.3) como expresión de $|Z_{2I}|$ y se tiene que los máximos de la impedancia terminal se tienen en $\omega = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$ y las frecuencias de resonancia según esta teoría estarán dadas por

$$f_n = (2n - 1) \frac{c}{4\ell} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.21)$$

5.3.2. Solución dada por la Teoría de las Oscilaciones Libres (TOL)

También aquí el procedimiento a seguir es igual al empleado en el párrafo 5.1.2 (caso No. 1) puesto que al eliminar la parte activa del excitador queda el orificio cuya matriz de transferencia es la de la válvula oscilante con $K = 0$. De manera que los resultados son los mismos. Llamado Z_0 (impedancia del orificio) a $2\Delta H/Q_0$ en el orificio, resultan las siguientes frecuencias de resonancia.

$$Z_0 > Z_c$$

$$f_n = (2n - 1) \frac{c}{4\ell} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$Z_0 < Z_c$$

$$f_n = \frac{nc}{2\ell} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$Z_0 = Z_c$$

No hay frecuencias de resonancia

5.4 Cuarto Caso

El cuarto caso posee un esquema similar al segundo caso y difiere en que el excitador es un oscilador de pistón del tipo visto en el tercer caso y estudiado en 3.5.2.2. En la fig 5.4 se presenta el esquema correspondiente a este caso.

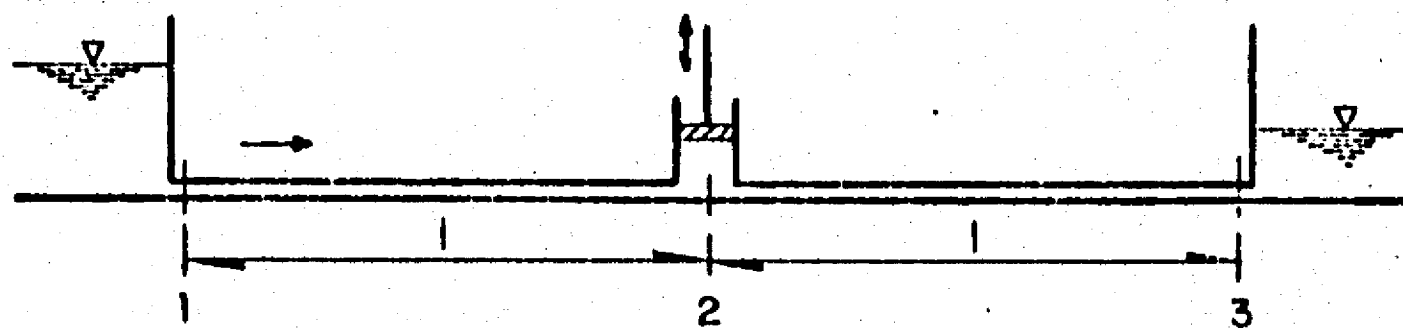


Fig 5.4 Esquema correspondiente al cuarto caso

Se admitirá que la fricción es despreciable en los conductos como lo hemos hecho para los restantes casos. Como en el segundo caso aquí tampoco puede aplicarse TIT pues el sistema no tiene el excitador en un extremo como lo exige TIT (ver sección 4.2).

Las condiciones de frontera son

$$h_{1I} = 0 \tag{5.24}$$

$$h_{3D} = 0$$

Analogamente al caso dos, aquí también debe estudiarse $u_{21} = 0$ para hallar las frecuencias naturales.

Calculando u_{21} se tiene

$$u_{21} = 2 c_{12} c_{11} \tag{5.25}$$

La anulaci3n de u_{21} a partir de (5.25) equivale a la soluci3n del sistema

$$\text{Re} (2 c_{12} c_{11}) = 0 \tag{5.26}$$

$$\text{Im} (2 c_{12} c_{11}) = 0$$

Sustituyendo los c_{ij} por sus valores (ver secci3n 4.3) siendo $Zc = c/gA$, $\mu = \frac{s}{c}$, $s = \sigma + j\omega$ y $b = \ell/c$ se tiene

$$\text{sen } 2\omega b (e^{4\sigma b} + 1) = 0 \tag{5.26}$$

$$\text{cos } 2\omega b (e^{4\sigma b} - 1) = 0$$

La solución del sistema será $b\omega = \frac{n\pi}{2}$ y $\sigma = 0$. En frecuencias se tendrá

$$f_n = \frac{n c}{4 \ell} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.27)$$

5.5 Resumen de los Resultados Obtenidos

A continuación presentamos el cuadro 5.1 donde se resume para cada caso los resultados obtenidos en cuanto a las frecuencias resonantes dadas por TIT y TOL.

Del examen del cuadro 5.1, se deduce que en los casos en que ambas teorías son aplicables (casos 1 y 3) los resultados obtenidos en cuanto a frecuencias resonantes son contradictorias para la situación $Z_v < Z_c$ en el caso 1 y para $Z_o < Z_c$ en el caso 3. Esta conclusión se opone al criterio generalizado (ver por ejemplo ref 31 p. 250 y ref 35 p. 236) de que ambas teorías son complementarias pues se aplicarían a casos diferentes. TIT se aplicaría cuando se conoce el excitador (ubicación y características) y TOL cuando eso no ocurre.

Los casos 1 y 3 son casos en los cuales ambas teorías pueden aplicarse y sus resultados, como se vió, no son idénticos.

Estas contradicciones entre los resultados de ambas teorías no son, sin embargo, el cargo más grave que pueda hacerse contra ellas, puesto que una podría ser errónea y otra correcta, sino que la evidencia experimental que presentaremos en el próximo capítulo mostrará que ambas exhiben divergencias serias en relación con los resultados experimentales.

CASO	ESQUEMA DE LA INSTALACION	TEORIA	SITUACION	FRECUENCIAS DE RESONANCIA(*)		OBSERVACIONES
				$(2n-1)\frac{c}{4l} (1)$	$\frac{nc}{2l} (1)$	
1		TIT	$Z_v \leq Z_c$	si	no	Para $Z_v < Z_c$ se contradicen TIT y TOL
		TOL	$Z_v > Z_c$	si	no	
			$Z_v < Z_c$ $Z_v = Z_c$	no -	si -	
2		TOL	$Z_v > 2Z_c$	si	no	TIT no es aplicable
			$Z_v < 2Z_c$	si	si	
			$Z_v = 2Z_c$	-	-	
3		TIT	$Z_o \leq Z_c$	si	no	Para $Z_o < Z_c$ se contradicen TIT y TOL
		TOL	$Z_o > Z_c$	si	no	
			$Z_o < Z_c$ $Z_o = Z_c$	no -	si -	
4		TOL		si	si	TIT no es aplicable a este caso

Cuadro 5.1 Resumen de las frecuencias resonantes para los cuatro casos

(*) En estas columnas se indica con "si" cuando la frecuencia es de resonancia y con "no" cuando no lo es

(1) $n = 1, 2, 3, \dots$, c - celeridad, l - longitud

6. ANALISIS EXPERIMENTAL DE LOS CUATRO CASOS

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en una instalación experimental construída especialmente con el propósito de verificar las teorías de la resonancia.

Se analizan experimentalmente los cuatro casos tratados en forma teórica en el capítulo anterior. Para el análisis se tomarán en cada caso situaciones en las que alguna de las teorías da resultados que difieren de los experimentales.

La evidencia experimental obtenida fundamenta, como se verá, la necesidad de elaborar una nueva teoría de la resonancia.

6.1 Antecedentes

Los antecedentes que se encuentran en la bibliografía especializada en cuanto a trabajos experimentales para el estudio de la resonancia son, en nuestro conocimiento únicamente cuatro. Como se verá en cada caso, sin embargo, por razones diferentes ninguno de ellos puede suministrar evidencias experimentales sobre la inexactitud de las teorías de la resonancia. Estos trabajos son los siguientes.

6.1.1 Trabajos de Camichel y otros (1918)

Aun hoy la referencia obligada por lo detallado de su descripción y el rigor de su análisis, es el trabajo del equipo francés de Toulouse encabezado por Ch. Camichel. Este equipo trabajó en instalaciones de laboratorio ubicadas en el Instituto de Electrotécnica de Toulouse e instalaciones industriales ubicadas en la planta hidroeléctrica de Soulom y en la de Gas de Toulouse. La publicación de los resultados de varios años de trabajo se realizó en 1918 (ref 2).

El propósito del trabajo fue la verificación de los resultados teóricos en cuanto al golpe de ariete obtenido fundamentalmente por Allievi, Joukowsky y Sparre. Del conjunto del mismo solamente dos capítulos (capítulo VI y XI) están dedicados a fenómenos de resonancia. El capítulo VI trata de tuberías con características constantes y el capítulo XI con tuberías de características variables. Estos resultados son de gran interés, pero para tuberías de características constantes sólo tratan casos en que Z_v (impedancia hidráulica del excitador) es mayor que Z_c (impedancia característica de la tubería) en instalaciones del tipo indicado en la fig 6.1.

En estos casos las tres teorías que se han examinado, teoría de la Impedancia Terminal (TII), Teoría de las Oscilaciones libres (TOL), dan el mismo resultado en cuanto a frecuencias resonantes, por ello el trabajo de Camichel no sirve para diferenciar entre sí las referidas teorías.

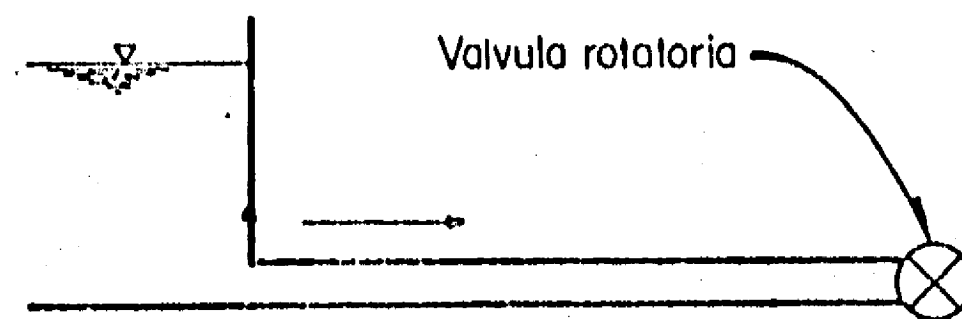


Fig 6.1 Esquema de las instalaciones con características constantes utilizadas por Camichel (Usina de gas e Instituto de Electrotécnica de Toulouse, Francia)

6.1.2 Trabajo de Fashbaug y Streeter

Este trabajo (ref 21) se realizó con el propósito de resolver un problema de resonancia en el circuito de combustible del cohete Titan II de los EEUU. En la fig 6.2 se presenta el circuito ensayado. Al utilizarse como fluido el propio combustible del cohete para reproducir la cavitación que se observa en el prototipo, la determinación de las celeridades se realizó indirectamente, postulando que la resonancia se producía en la frecuencia cuya longitud de onda era cuatro veces la longitud del circuito. En consecuencia, en este trabajo se toma como cierta la Teoría de la Impedancia Terminal (TIT) y se deducen las celeridades para que las frecuencias de resonancia coincidan con lo previsto por dicha teoría. Este trabajo fue realizado el año siguiente de que Wylie formulara TIT y su coautor Streeter tenía

conocimiento directo de los conceptos manejados por Wylie. Por estas razones el referido trabajo tampoco puede utilizarse para probar una u otra teoría pues sus resultados fueron obtenidos bajo el postulado de que TIT era correcta.

6.1.3 Trabajo de Zielke, Wylie y Killer

Este trabajo, realizado conjuntamente por los autores de la Teoría de las Oscilaciones Libres (TOL) y de TIT, fue elaborado antes de que Zielke formulara su teoría (TOL) puesto que el trabajo es de 1969 y la primera referencia a TOL es de 1971 (ref 22).

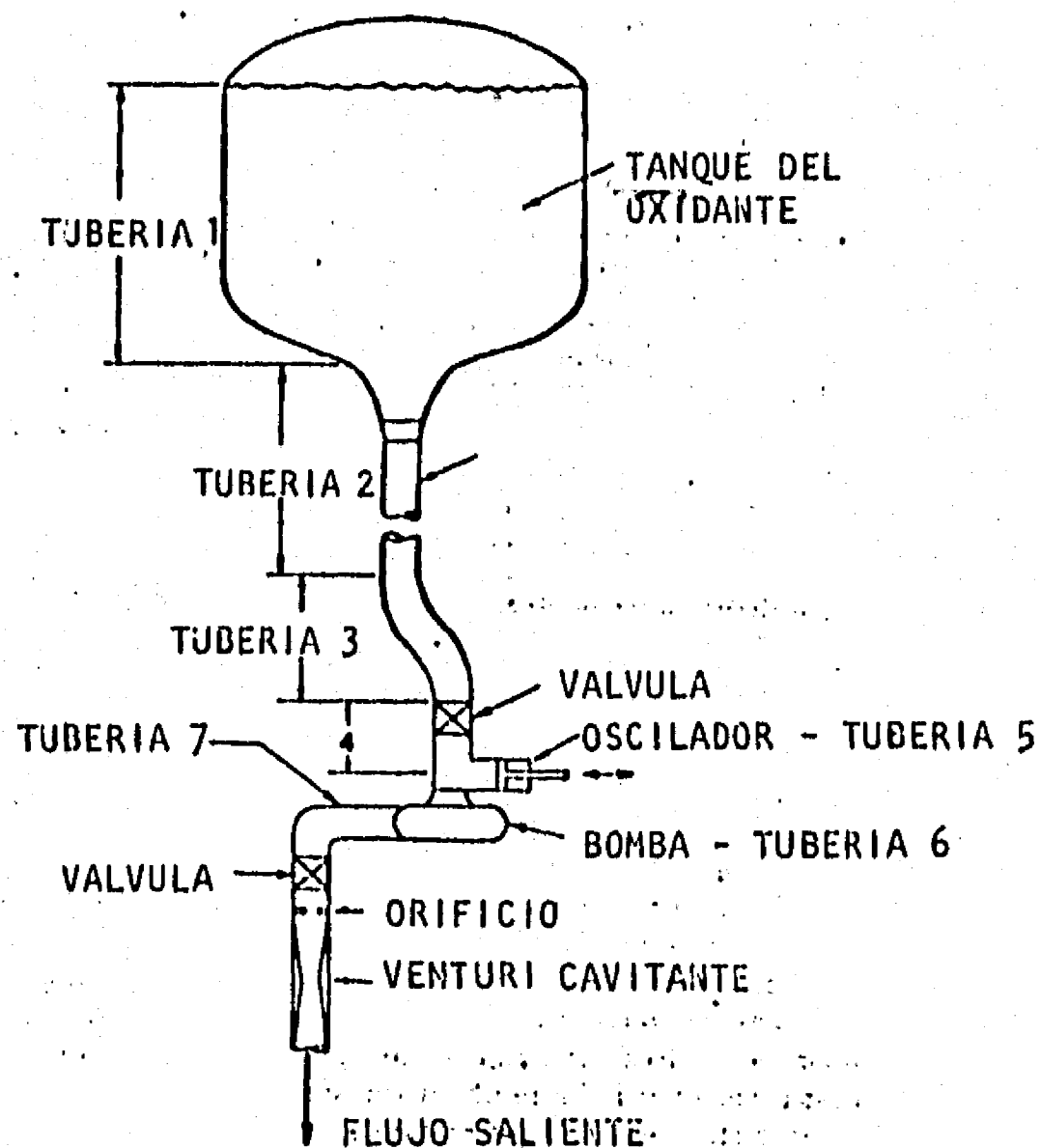


Fig 6.2 Instalación experimental utilizada por Fashbaugh y Streeter (EEUU).

El propósito del trabajo fue el estudio de un circuito de combustible aplicable a diversos vehículos espaciales. En dicho trabajo se aplica para el cálculo, el método de la impedancia desarrollada por Wylie en su tesis de doctorado (ref 27). En la fig 6.3 se muestra el esquema de la instalación experimental utilizada por estos autores.

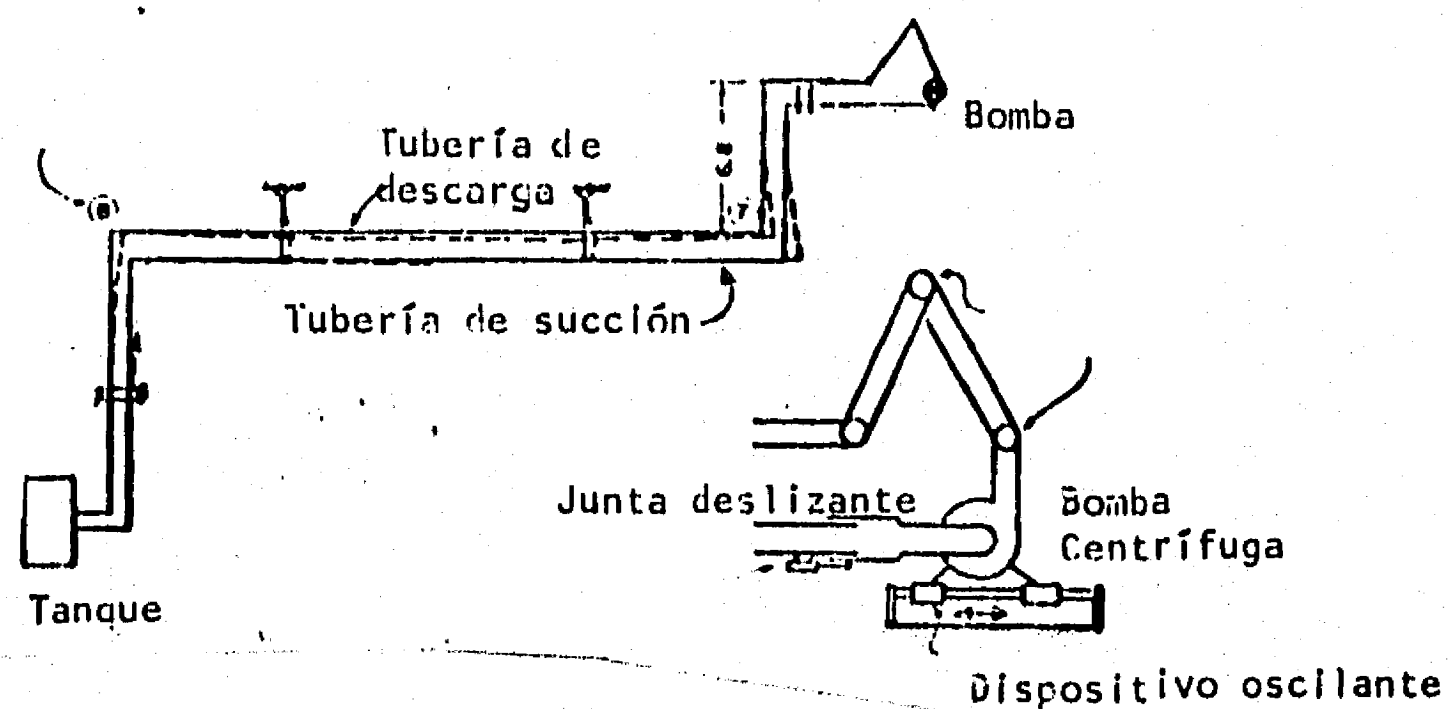


Fig 6.3 Instalación experimental utilizada por Zielke y Wylie (EEUU).

Como puede observarse se trata de un esquema análogo al del ejemplo cuatro desarrollado en el capítulo 5. En el desarrollo del trabajo no aparece mención alguna a la Teoría de la Impedancia Terminal, lo cual siendo Wylie uno de los coautores es un poco sorprendente, y el cálculo de la frecuencia de resonancia se realiza experimentalmente, ajustándose luego un modelo lineal (método de las impedancias), con muy buen resultado: como el sistema presenta presiones variables a lo largo de su longitud, las celeridades según

se establece en el texto son variables. Al no indicarse qué celeridades se utilizan es imposible reproducir el cálculo numérico realizado. Sin embargo, en lo que tiene que ver con las teorías de la resonancia los resultados obtenidos no arrojan luz sobre los mismos puesto que sólo se analiza el primer pico que se presenta. Dicho pico es previsto por TIT y por TOL tal como ya se vió en el análisis del ejemplo cuatro. Si se hubiese examinado el segundo pico de resonancia dicho pico de aparecer en una frecuencia triple del primero confirmaría TIT, y de aparecer en una frecuencia doble desmentiría a TIT sorprendiendo a Wylie y daría un buen argumento experimental para TOL, la teoría que dos años más tarde formularía Zielke. Sin embargo como sólo examinan el primer pico, nada de lo que podía haber ocurrido ocurrió y los resultados obtenidos no nos sirven para profundizar en relación a la verdad contenida en TOL y en TIT.

6.1.4 Trabajo de M. Fanelli

Este trabajo realizado por M. Fanelli en los laboratorios del CRIS (Centro di Ricerca Idraulica e Strutturale) ubicados en Milán, es sin duda la confirmación experimental más cuidadosa del modelo lineal, tanto en lo referido a la determinación de las frecuencias de resonancia como a la previsión de amplitudes lejos de la resonancia y asimismo en lo que tiene que ver con la fase de la oscilación respecto al excitador.

La instalación usada por Fanelli se presenta en la fig 6.4 (ver ref 32).

Con esta instalación, Fanelli estudia, mediante un excitador a pistón colocado en la mitad pero bloqueando con una tapa ciega una mitad de la tubería, un circuito cuyo esquema se muestra en la fig 6.5.

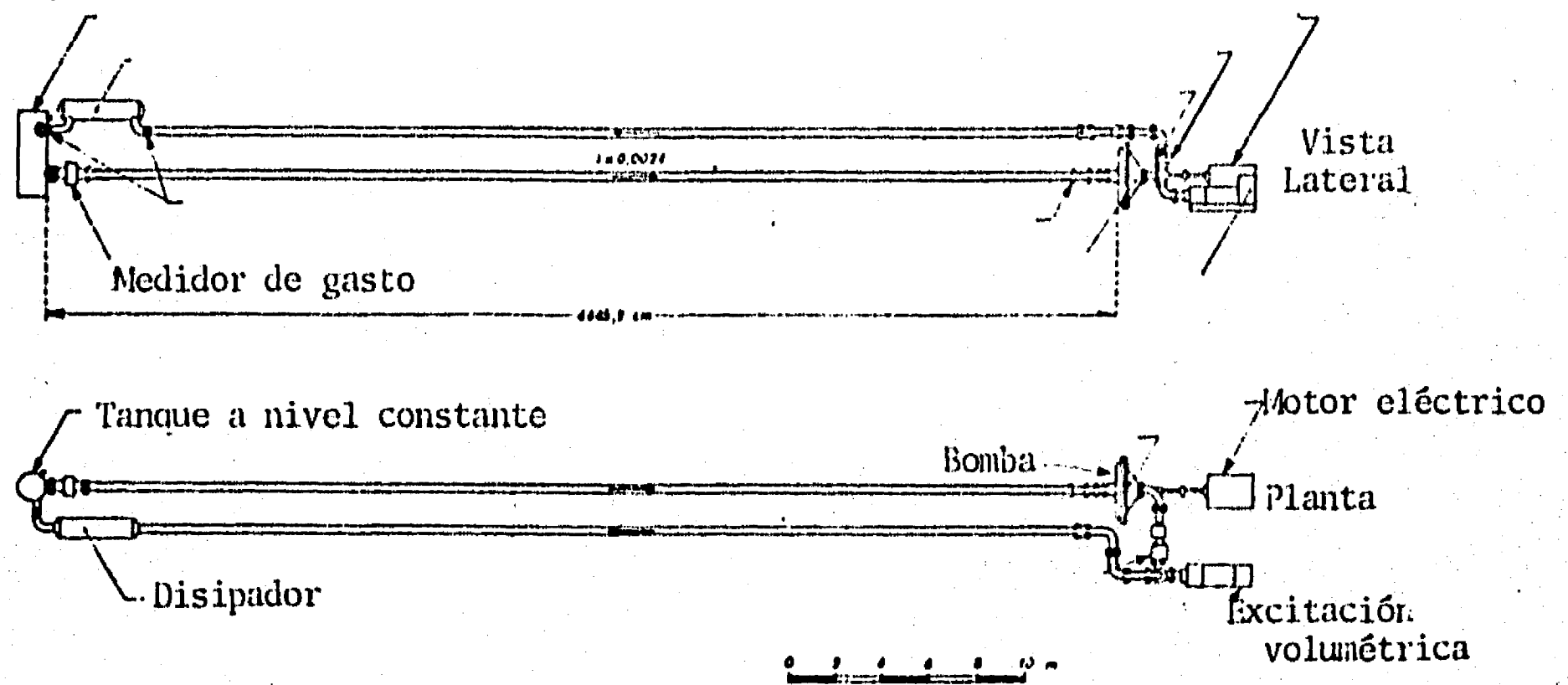


Fig 6.4 Instalación experimental utilizada por el Prof. M. Fanelli (Milán, Italia).

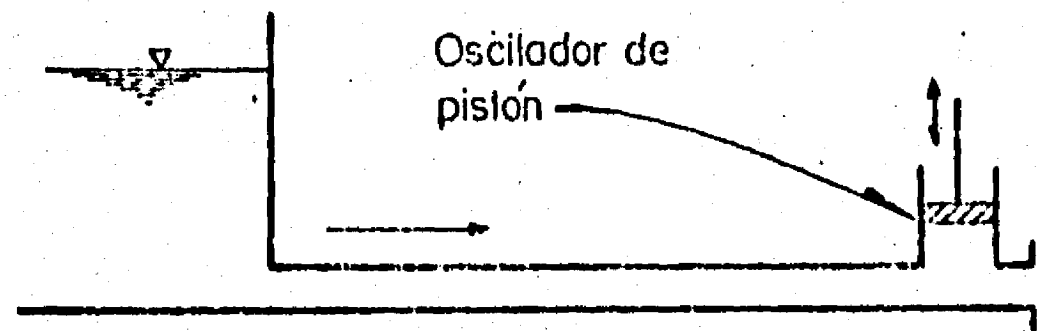


Fig 6.5 Esquema del circuito resonante estudiado por Fanelli.

Basta realizar cálculos sencillos para concluir que para este esquema TIT y TOL dan como frecuencias resonantes la sucesión $f_n = (2n - 1) \frac{c}{4l}$ y estas frecuencias son precisamente las halladas por Fanelli. Por lo tanto, tampoco estas experiencias, tan valiosas desde otro punto de vista, no nos son útiles en relación a la confirmación de una u otra teoría cuando ellas discrepan entre sí.

La imposibilidad de utilizar el material experimental obtenido por otros autores con el propósito deseado por nosotros llevó a la construcción de una instalación experimental en la cual fuese posible reproducir los ejemplos teóricos vistos en el capítulo 5. A continuación se realizará una descripción somera de la referida instalación.

6.2 Instalación Experimental Construida en el Instituto de Ingeniería

En el laboratorio del Instituto de Ingeniería se construyó una instalación para el estudio de oscilaciones estacionarias en conductos a presión. En la fig 6.6 se presenta un esquema de la misma.

Dicha instalación consta de una tubería de tubo de hierro galvanizado de 2" de diámetro nominal construido con tubo comercial. Dicha tubería mide 163.10 m de longitud. Posee los siguientes elementos indicados en la fig 6.6. Una bomba centrífuga con motor de 20 HP (fig 6.7); un tanque de tranquilización y un tanque que admite aire comprimido para fijar un nodo de presión a la entrada de la tubería (fig 6.8), ambos tanques tienen una capacidad de 0.06 m³; un manómetro diferencial para medir pérdida de carga en un codo de la tubería y que está calibrado para la medición de gastos

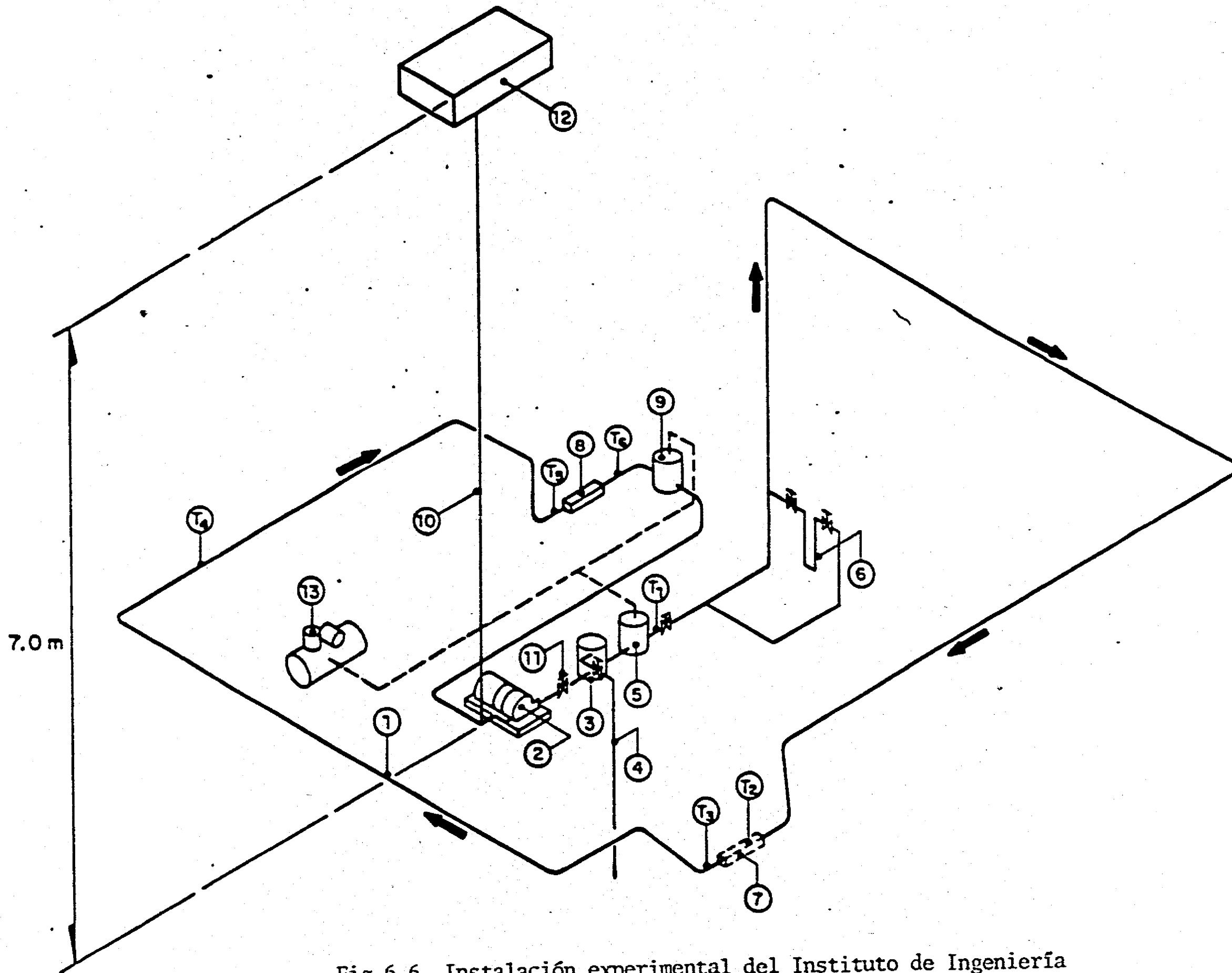


Fig 6.6 Instalación experimental del Instituto de Ingeniería

Notas correspondientes a la fig 6.6.

1. Tubería de ϕ 2" y longitud de 163.10 m
2. Bomba centrífuga de 20 HP
3. Tanque de tranquilización (0.06 m³)
4. Drenaje para el enfriamiento del sistema
5. Tanque para fijar la presión. Admite aire comprimido (0.06 m³)
6. Manómetro diferencial para medir gasto mediante un codo calibrado.
7. Punto medio de la tubería. Aquí es posible localizar el excitador (casos Nos. 1 y 3).
8. Extremo de aguas abajo de la tubería. Aquí es posible localizar el excitador (casos Nos. 2 y 4).
9. Tanque para fijar la presión. Admite aire comprimido (0.06 m³).
10. Tubería para introducir agua fría al sistema y fijar la presión en la sección.
11. Válvula para regular el gasto
12. Tanque elevado principal del laboratorio.
13. Compresor de aire

$T_1, T_2 \dots T_6$. Posiciones donde es posible ubicar las celdas de presión.

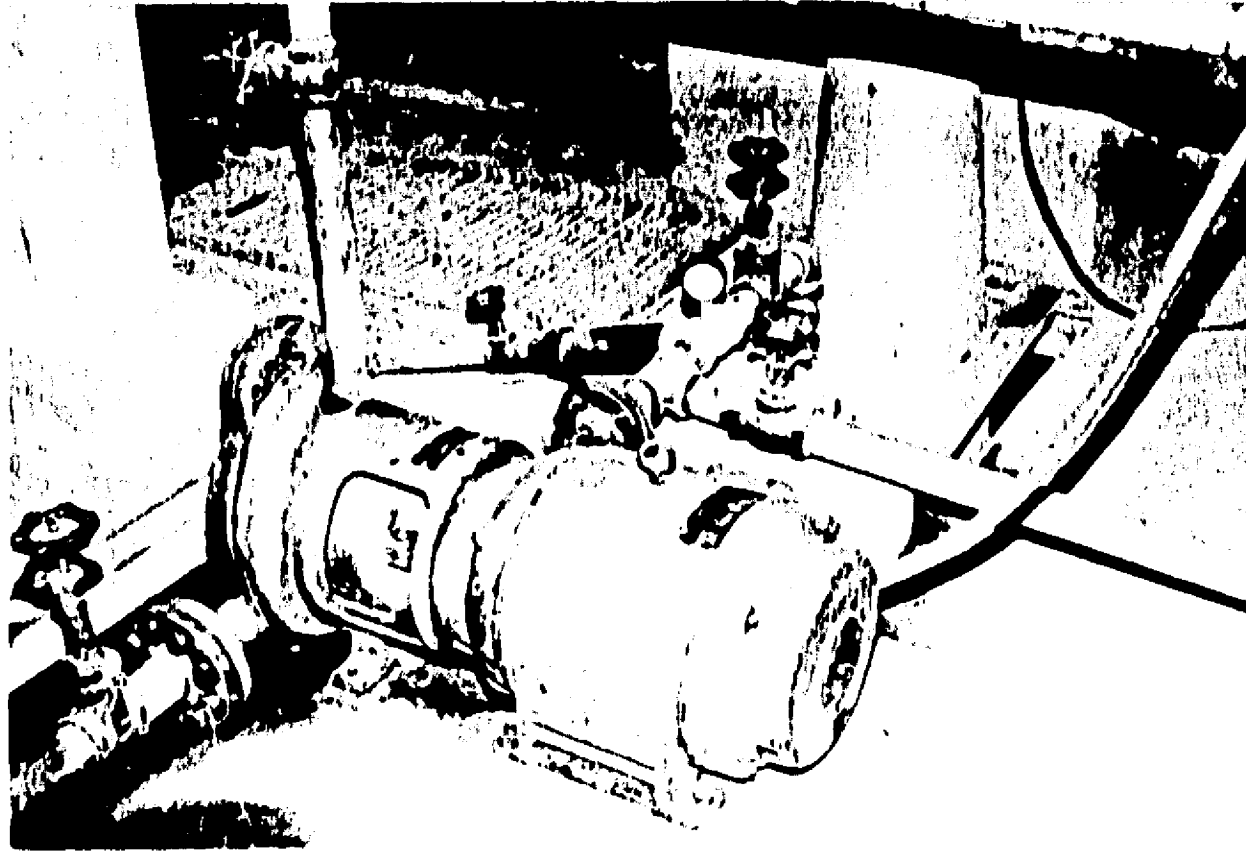


Fig 6.7 Bomba centrífuga de 20 HP

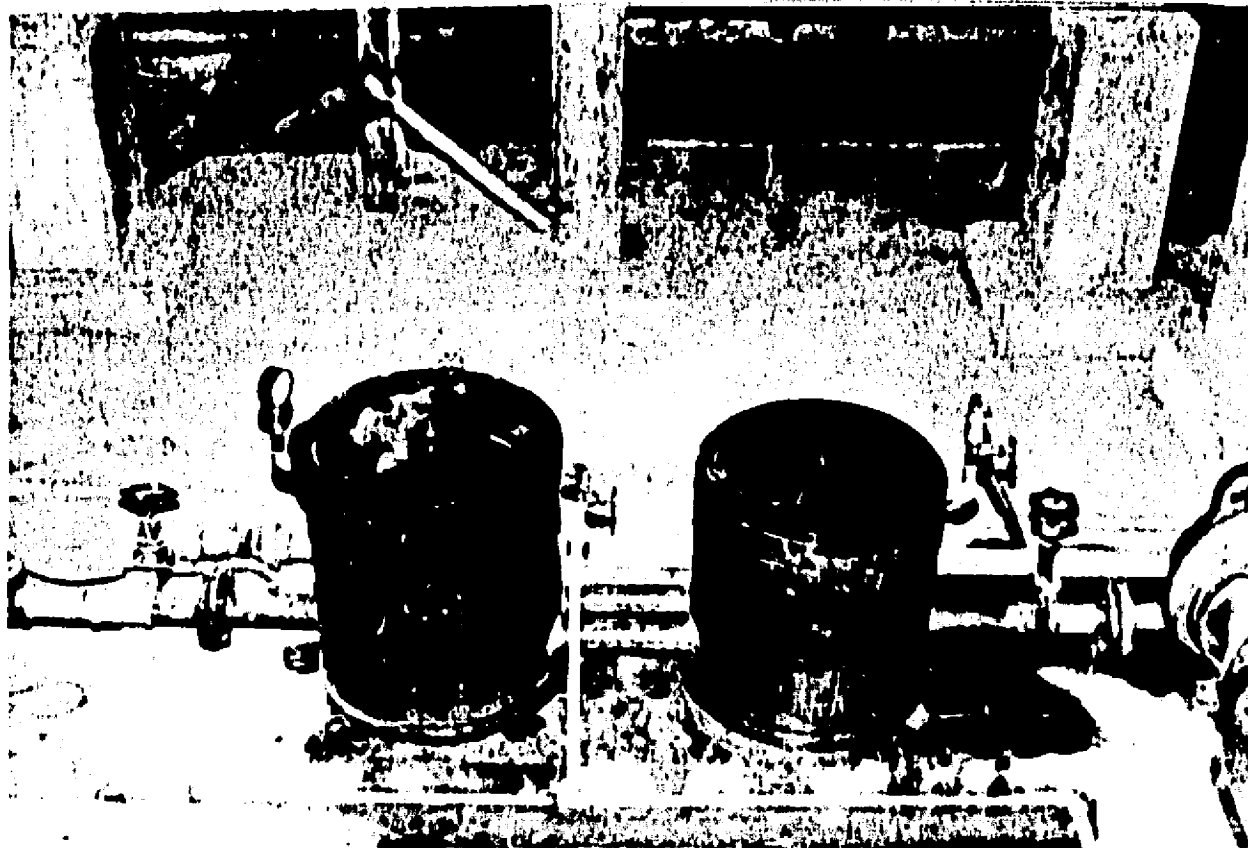


Fig 6.8. Tanques en el extremo aguas arriba de la tubería

(fig 6.9) y un tanque de 0.06 m^3 ubicado en el extremo aguas abajo que admite aire comprimido y que sirve para fijar un nodo de presión en dicho extremo (fig 6.10). El sistema es cerrado salvo una salida regulable de agua ubicada en el tanque de tranquilización y una entrada ubicada en la succión de la bomba que sirve además, al estar conectada con el tanque de carga constante del laboratorio, para fijar una presión de 6 a 7 m.c.a. en la succión de la bomba. El objeto de esta salida es impedir el calentamiento del sistema al operarse la recirculación de agua. El sistema trabaja normalmente con una presión de 40 m.c.a. lo cual asegura un buen control de la celeridad que como es sabido a presiones más bajas es muy sensible a las cantidades de aire disuelto que tenga el agua (ref 35).

Los excitadores que se han construido son de dos tipos, una válvula rotatoria (figs 6.11 y 6.12) y un pistón (figs 6.13 y 6.14). Estos excitadores pueden ser colocados en dos posiciones en el sistema, éstas son el extremo de aguas abajo y el punto medio de la longitud de la tubería. En las figs 6.15 y 6.16 se ve la válvula rotatoria ubicada en la primera posición y en la segunda respectivamente.

Cuando la válvula no ocupa una posición se coloca un tramo de tubería idéntica a la de la tubería larga, en la longitud ocupada por la válvula.

La frecuencia de la excitación se controla mediante una polea cónica de paso variable y se mide mediante un contador de pulsos alimentado por una célula fotoeléctrica que se activa a través de un disco transparente con 60 sectores opacos.

Las presiones oscilatorias se midieron mediante celdas del tipo que utilizan como sistema sensible un puente con cuatro elementos resistivos tipo "strain-gage" (Gould Statham Universal Transducing Cells, modelo UC3).

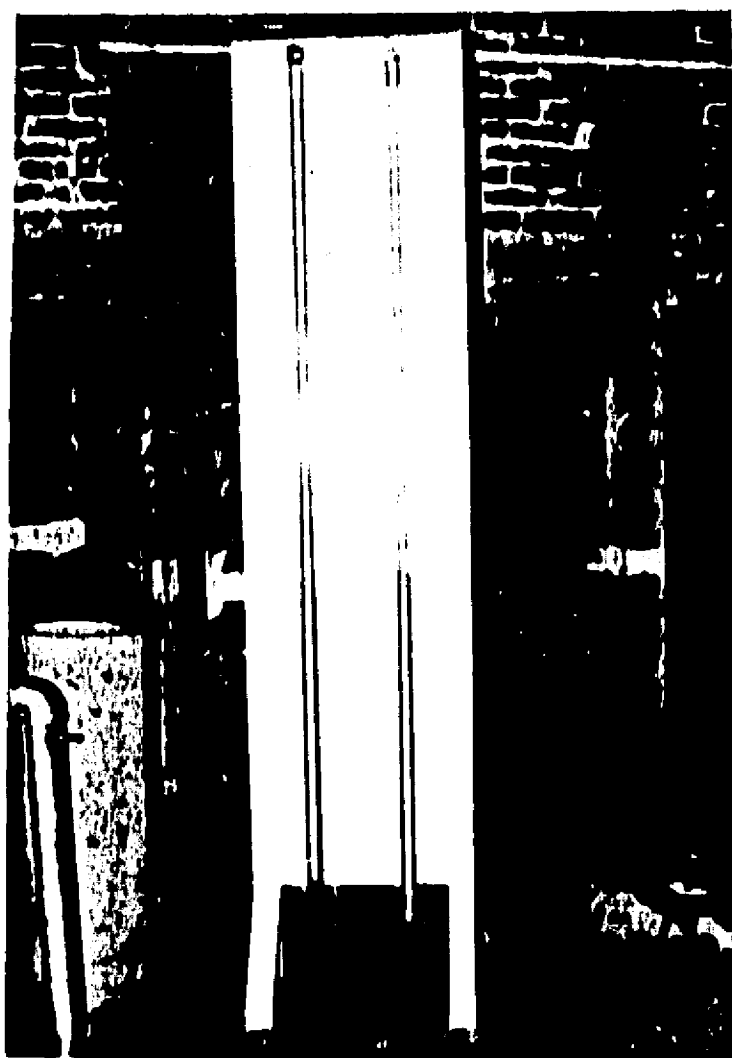


Fig 6.9 Manómetro para medición de gastos

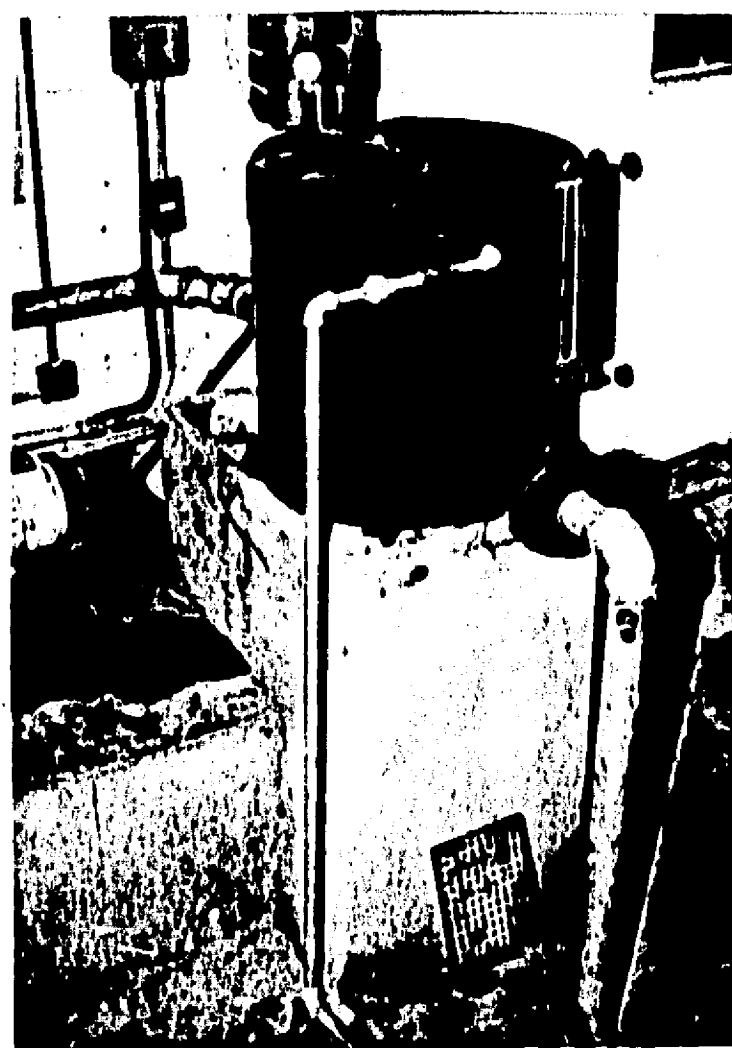


Fig 6.10 Tanque en el extremo de aguas abajo

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

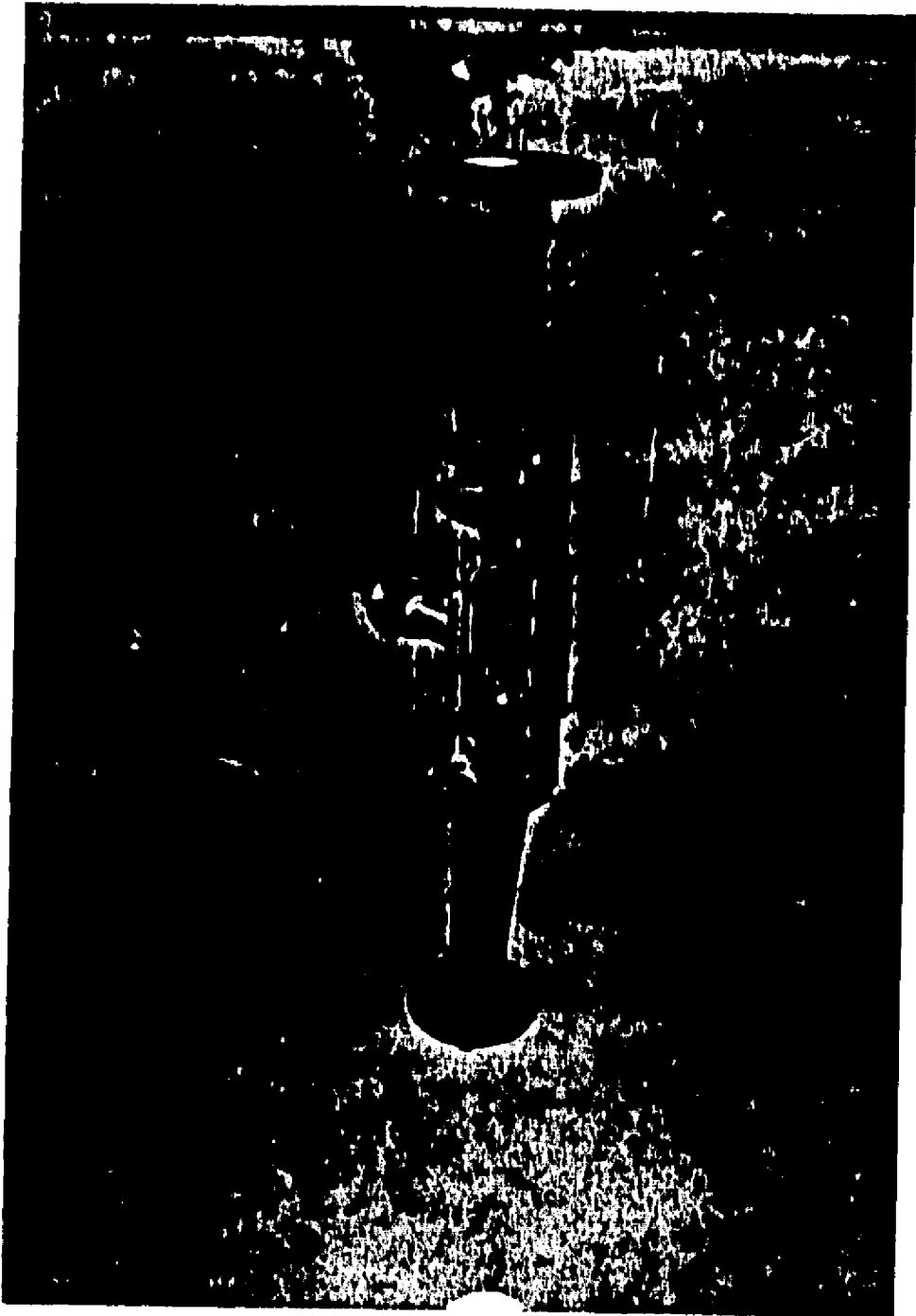


Fig 6.11 Válvula rotatoria (armada)

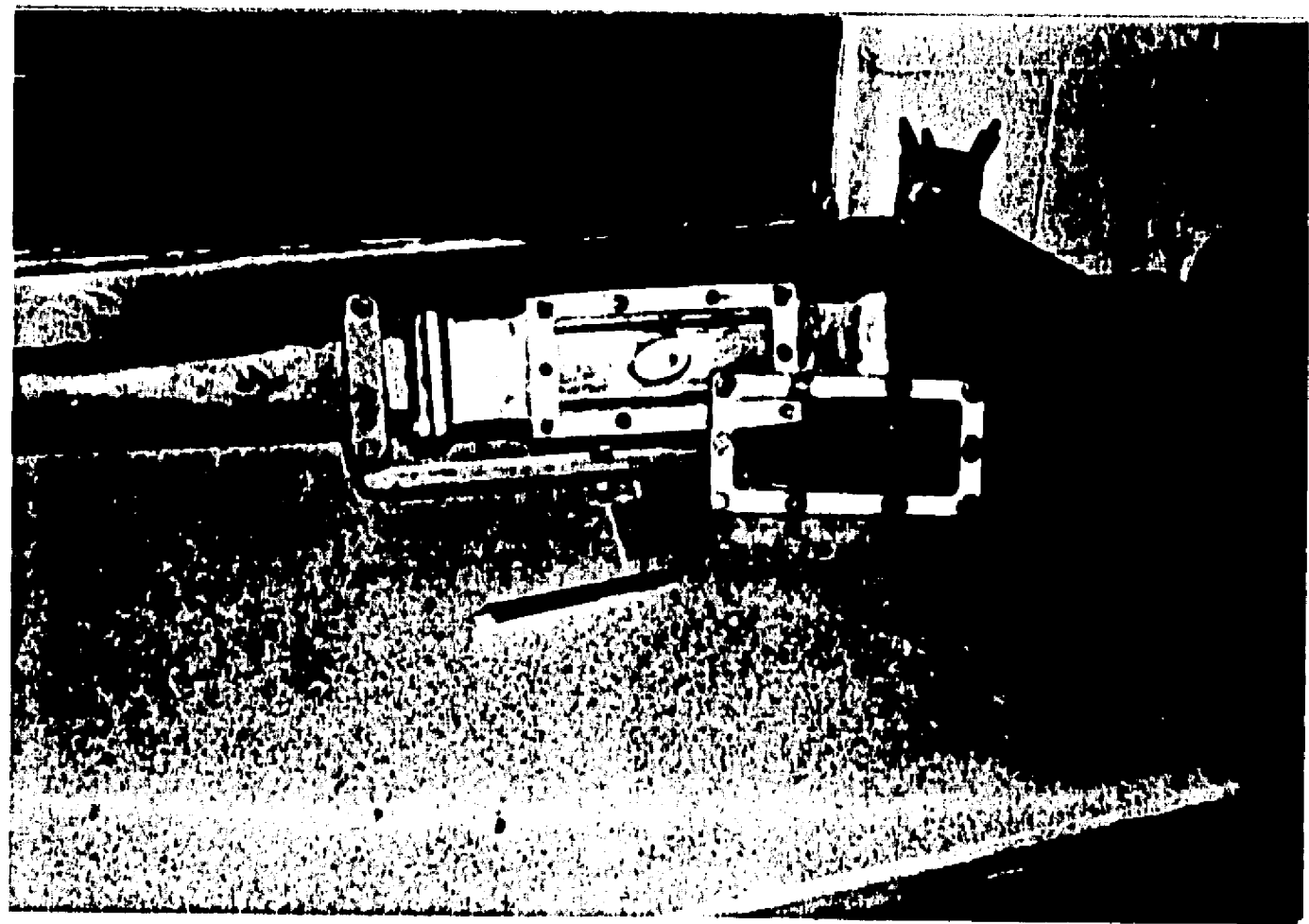


Fig 6.12 Válvula rotatoria (desarmada)

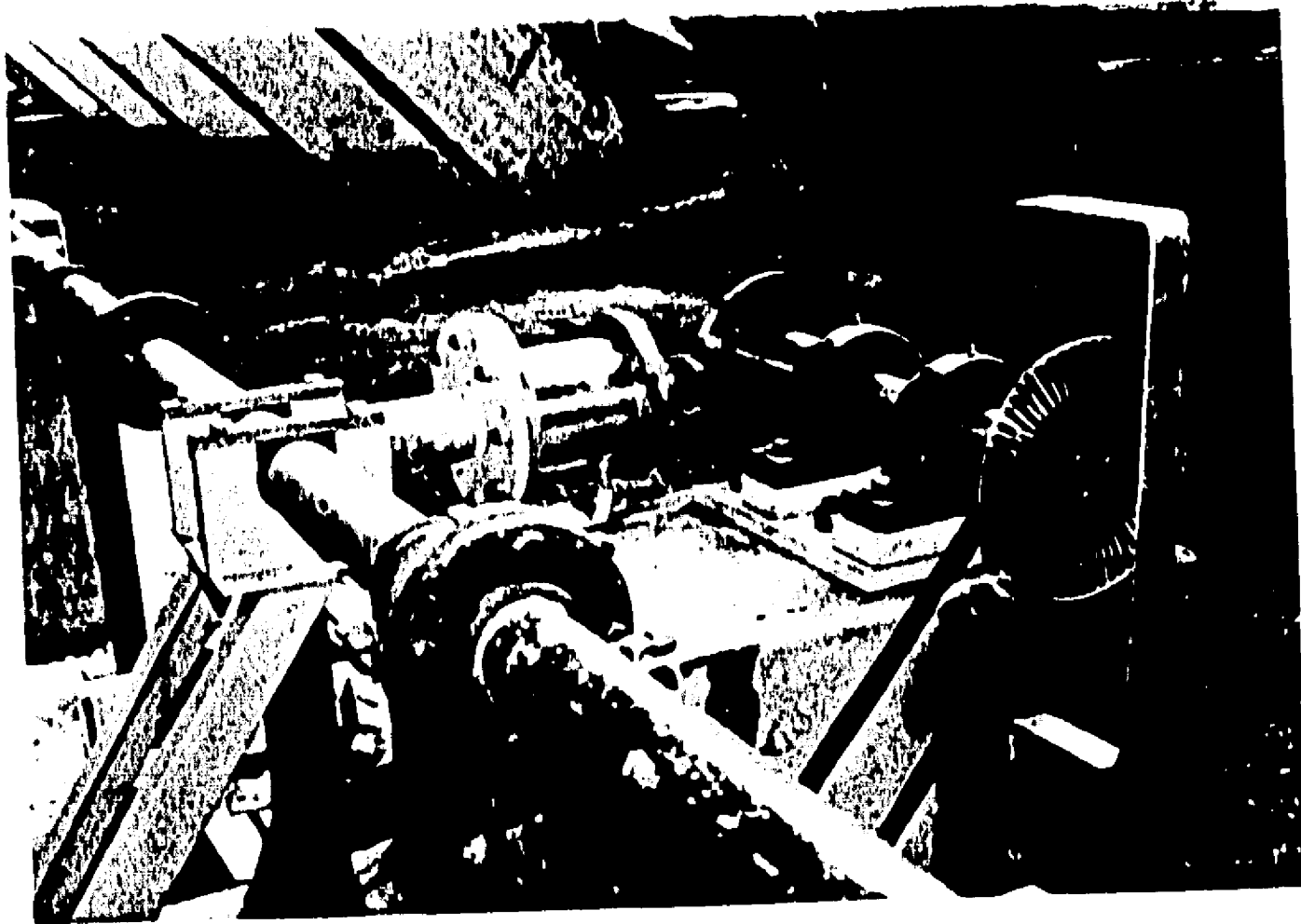


Fig 6.13 Oscilador de pistón (armado)

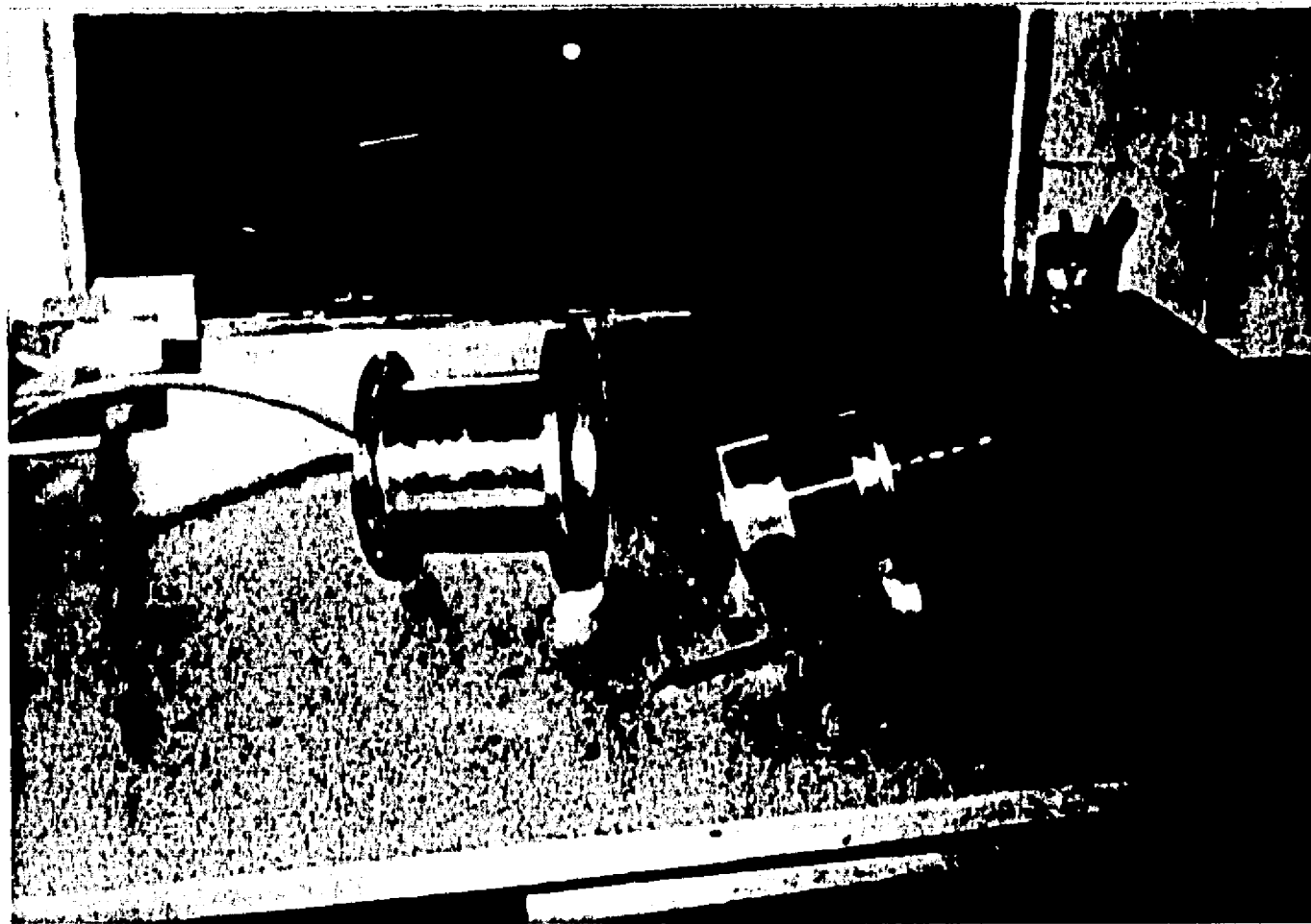


Fig 6.14 Oscilador de pistón (desarmado)

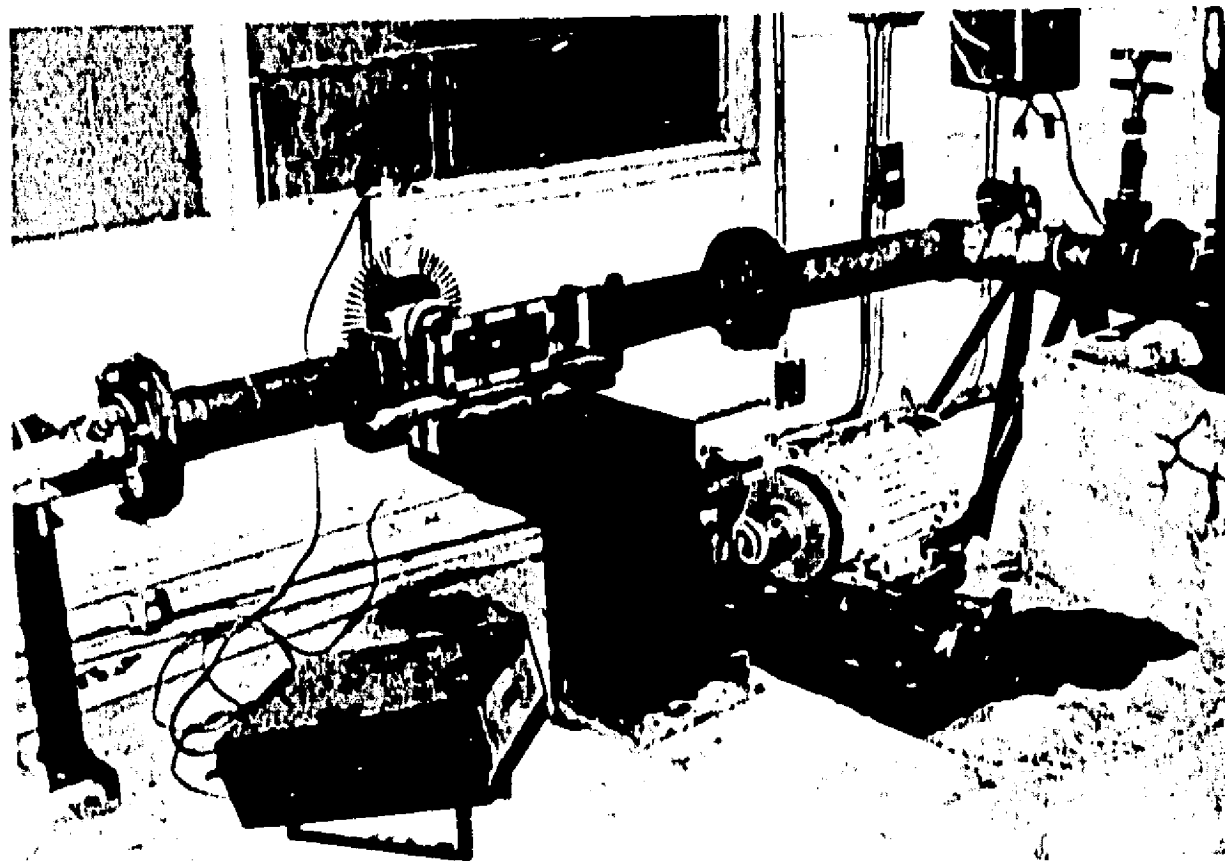


Fig 6.15 Válvula rotatoria en el extremo de aguas abajo



Fig 6.16 Válvula rotatoria en el punto medio de la tubería.

En la fig 6.17 se observa una celda desarmada donde aparece el vástago sensible y el diafragma utilizado (50 lb/in²). En la fig 6.18 se observa una celda colocada en la tubería en posición de medida. La señal enviada por la celda es recibida por un acondicionador de señales, que a su vez envía la señal a un osciloscopio que permite la observación y a un equipo de registro en papel fotosensible. La medición de frecuencias se realiza mediante un analizador de espectros modelo HP 3582A Spectrum Analyzer Hewlett Packard. En la fig 6.19 se muestra el conjunto de los equipos utilizados.

Con la instalación descrita se pueden realizar las experiencias que permiten la verificación de los cuatro casos tratados teóricamente en el capítulo 5. A continuación presentaremos la descripción de las experiencias realizadas y de los resultados obtenidos para cada uno de los casos.

Debe señalarse que la tubería de la instalación en virtud de su pequeño diámetro (2 pulgadas) posee una impedancia característica Z_c muy alta ($Z_c \approx 65\,000 \text{ s/m}^2$). En las tuberías industriales Z_c es mucho menor puesto que la celeridad puede descender en un 20 ó 30%, pero el área puede aumentar centenares o miles de veces. Esta peculiaridad de nuestra instalación facilita el estudio de todas las situaciones en que se requiere Z_c alta. Como las situaciones en las que se presentan discrepancias entre las teorías son precisamente aquellos en que se requiere Z_c mayor que otras impedancias del sistema, la instalación construída se adecua a necesidades experimentales planteadas.

6.3 Examen Experimental de los Cuatro Casos

Todas las medidas realizadas suponen el conocimiento de la celeridad de las ondas acústicas en la tubería. La celeridad se ha medido a partir de los

registros de oscilaciones libres tomadas en cada caso. La tubería se consideraba en condiciones de trabajar cuando las celeridades calculadas a partir de 2 registros consecutivos en el mismo punto de la tubería no diferían de 1350 m/s(*) y entre sí en más de 5%. La celeridad final tomada en cada experiencia correspondió al promedio de las celeridades cuya diferencia era menor o igual al 5%. El margen de 5% tomado corresponde a la precisión con que puede medirse en los registros la frecuencia de las oscilaciones libres.

Las frecuencias de la excitación se midieron directamente tal como se explica en 6.2.

Las amplitudes se midieron a partir de los registros obtenidos en el papel fotosensible. Como los resultados en amplitud se expresan como cocientes adimensionales, dichos cocientes se calculan como cocientes de amplitudes de trazos, previa corrección por diferencia de ganancia de los acondicionadores de señal. La diferencia de ganancia se calcula intercambiando los acondicionadores entre dos celdas sin modificar las respectivas señales.

6.3.1 Caso No. 1

El caso No. 1, cuyo esquema se presenta en la fig 6.20, puede reproducirse sin dificultad en la instalación descrita ubicando la válvula rotatoria en el extremo aguas abajo de la tubería.

La verificación experimental de las teorías se realizó para $Z_v < Z_c$ pues en esta situación en la que se observan discrepancias entre TIT y TOL (ver cuadro 5.1 en el capítulo 5).

La verificación consistió en la realización de dos series de experimentos. En la primera serie de experimentos se midieron amplitudes en el punto 2I (fig

(*) Celeridad teórica de la tubería

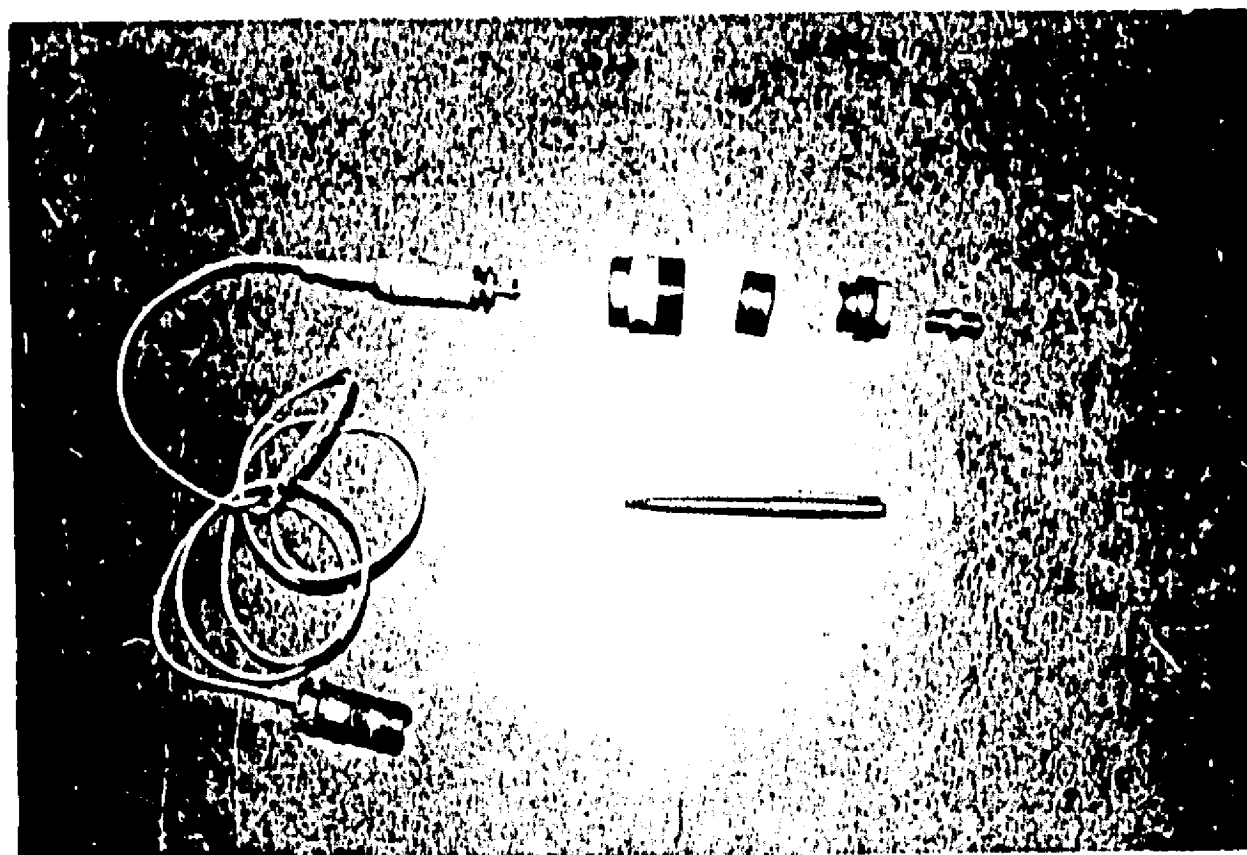


Fig 6.17 Celda de medición (desarmada)

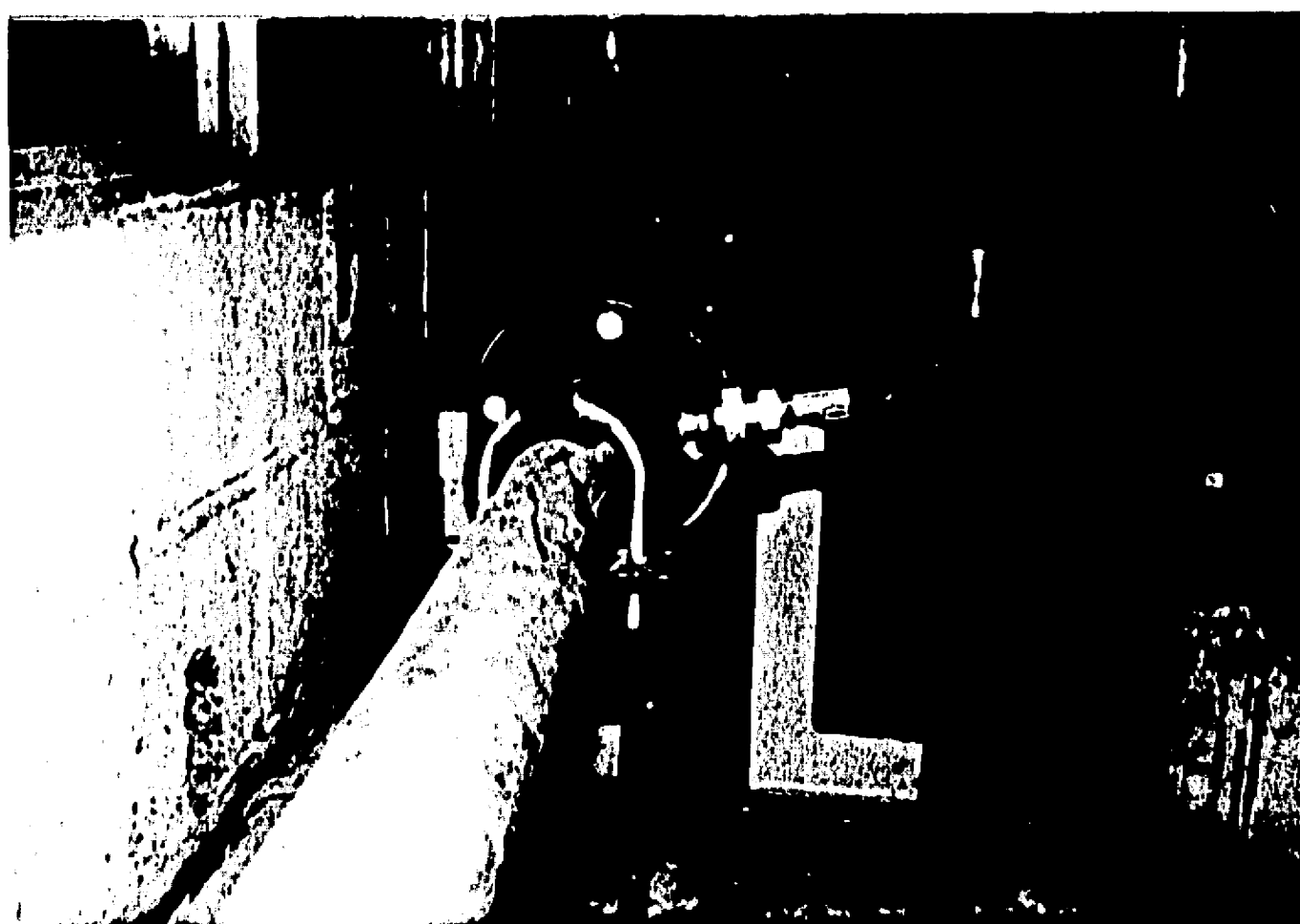


Fig 6.18 Celda colocada en posición de medida

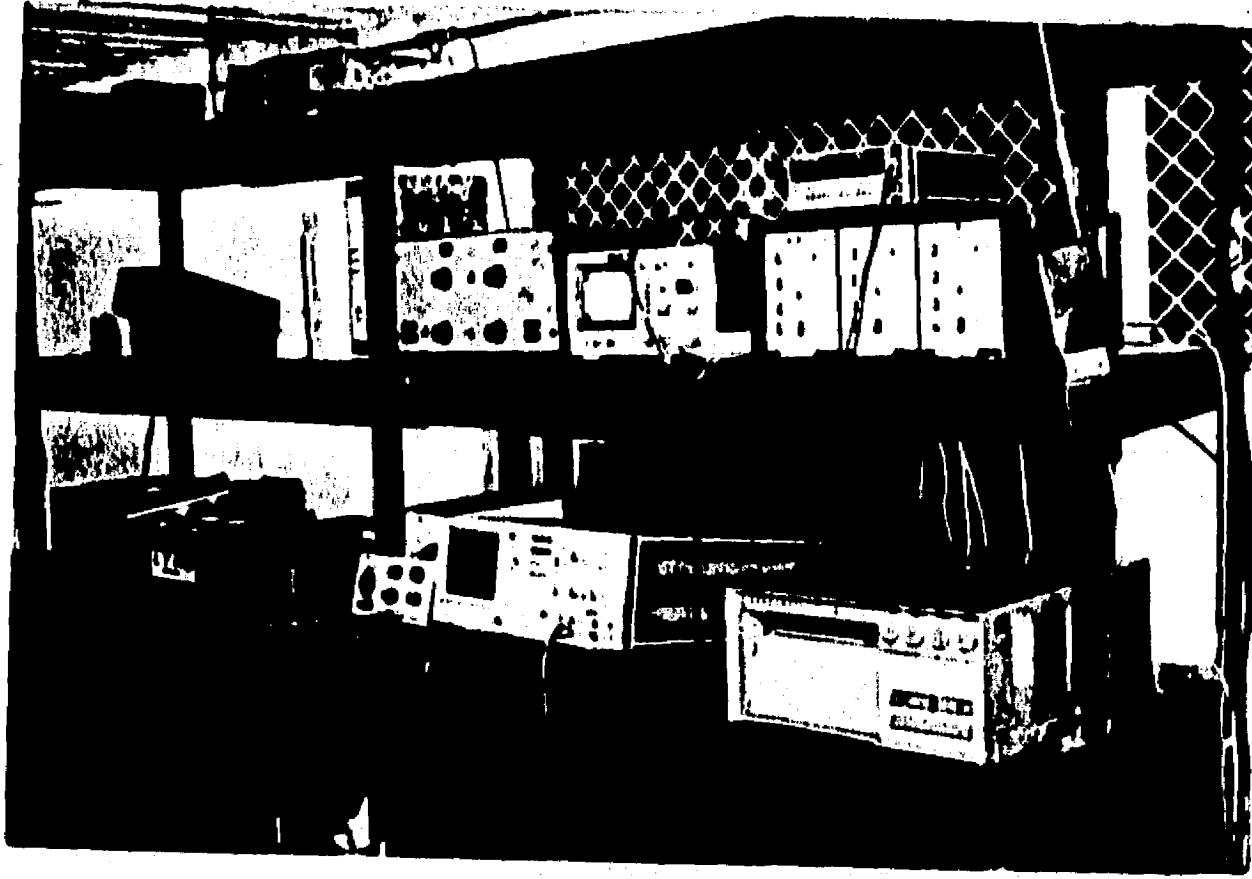


Fig 6.19 Conjunto de los equipos utilizados

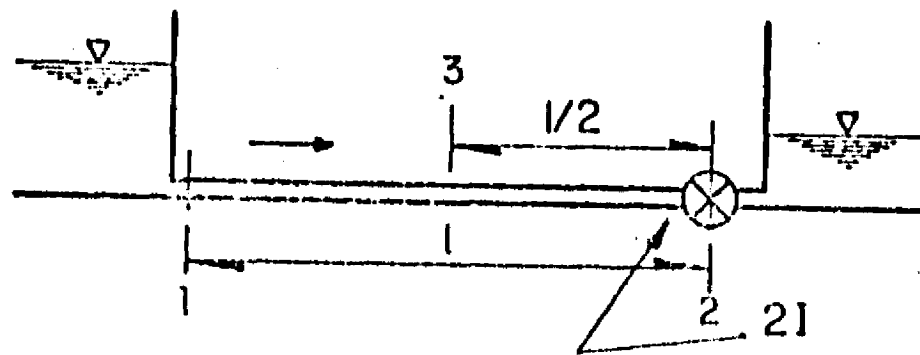


Fig 6.20 Esquema del caso No. 1

6.20) para un intervalo de frecuencias centrado aproximadamente en $\frac{c}{4\ell}$ que es la frecuencia de resonancia prevista por TIT según se vió en la sección 5.1. El punto 21 fue elegido en virtud de que al tratarse de una onda de longitud de onda 4ℓ , con un nodo en $x = 0$ (extremo de aguas arriba), en el punto 21 esta onda presenta el máximo de amplitud. En la instalación de la fig 6.6, esta medición se realizó colocando la celda de presión en la posición T5.

En la segunda serie de experiencias, se midieron amplitudes en el punto 3 (fig 6.20) para un intervalo de frecuencias aproximadamente centrado en $\frac{c}{2\ell}$ que es la frecuencia de resonancia según TOL (sección 5.1). La medición de amplitudes se hace ahora en el punto 3 puesto que tratándose de una onda estacionaria con longitud de onda 2ℓ y con un nodo en $x = 0$, resulta que la máxima amplitud se encuentra en $x = \ell/2$. En la instalación de la fig 6.6, esta medición se realizó colocando la celda de presión en la posición T₂. Para ambas series de experimentos valor de K en la válvula rotatoria se mantuvo constante.

Los resultados obtenidos se presentan en la fig 6.21. De dicha figura se deduce que en la frecuencia $\frac{c}{4\ell}$ no hay resonancia y por lo tanto debe concluirse que TIT presenta un error. La resonancia se produce para $\frac{c}{2\ell}$ lo cual tampoco es previsto por TIT. Esta frecuencia de resonancia es la prevista por TOL. En consecuencia con este experimento puede concluirse que TIT no es una teoría satisfactoria puesto que sus resultados presentan discrepancias serias con los resultados experimentales aun en sistemas muy simples como el estudiado en este caso No. 1.

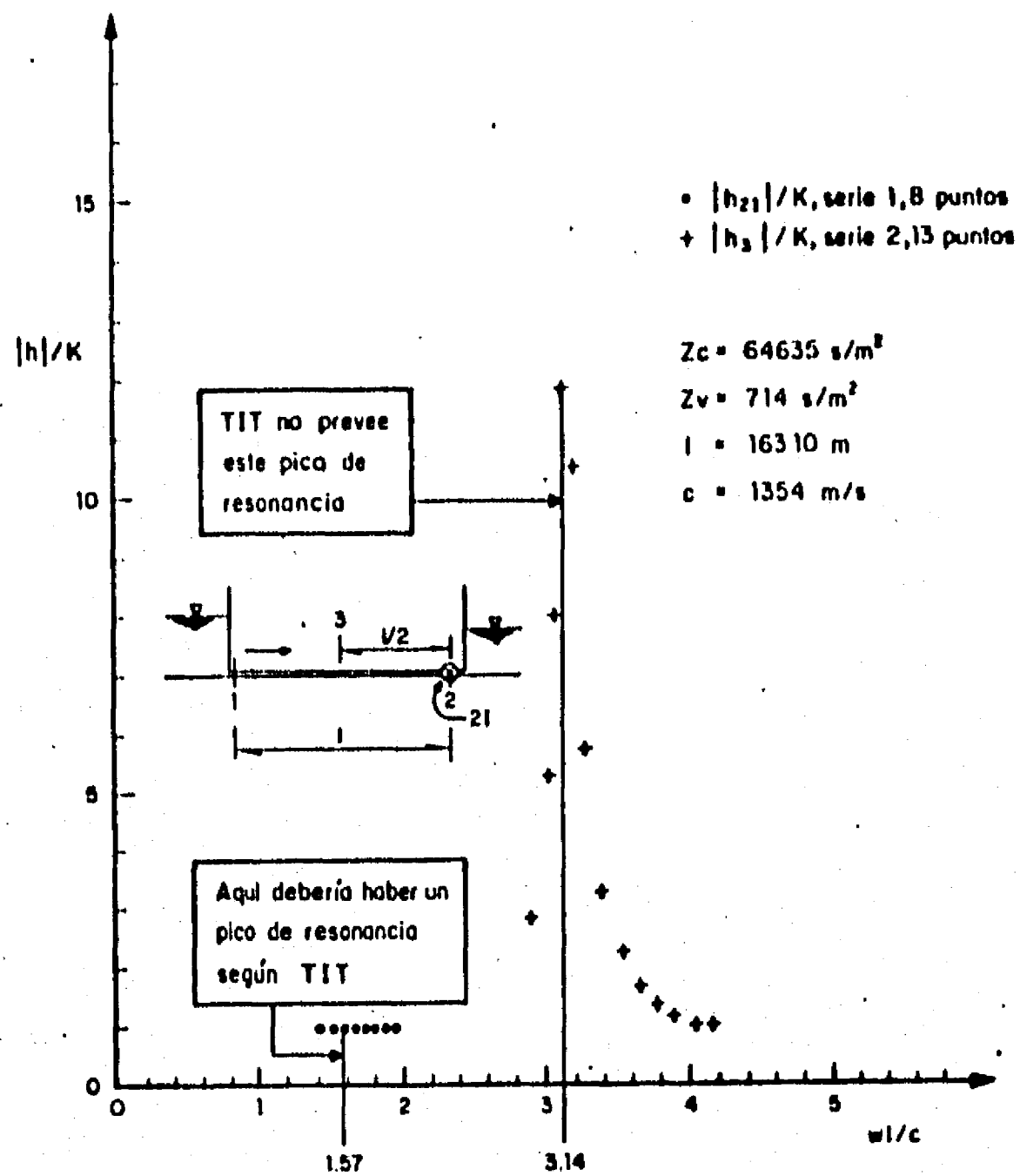


Fig 6.21 Análisis experimental del caso No. 1(*)

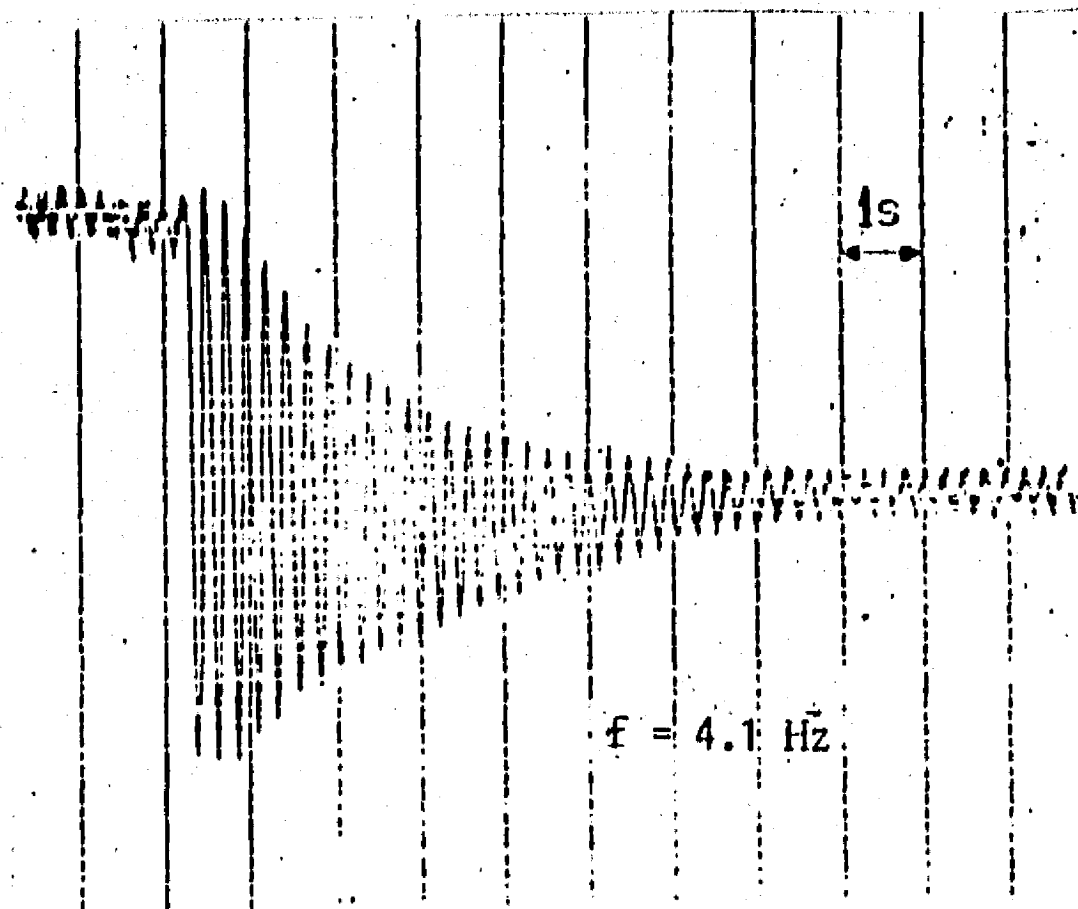


Fig 6.22 Oscilaciones libres registradas en el punto 3.

(*) Los datos correspondientes a esta figura se presentan en el Apéndice, sección A1. En la sección A5 se muestran algunos registros que ilustran el fenómeno de la resonancia.

La instalación experimental puede ser usada también para verificar la frecuencia de las oscilaciones libres encontrada por TOL para este ejemplo.

Para ello se coloca en el punto 3 una celda (posición T_2 en la fig 6.6) y el sistema se excita por ejemplo imponiéndole un giro brusco a la válvula previamente en reposo para luego detenerla nuevamente. Una vez que la válvula se detuvo, se obtuvo en T_2 el registro que se presenta en la fig 6.22. Dicho registro muestra que la frecuencia teórica prevista por TOL es la de las oscilaciones libres amortiguadas del sistema.

6.3.2 Caso No. 2

El caso No. 2, cuyo esquema se presenta en la fig 6.23, también puede reproducirse sin dificultad en la instalación de la fig 6.6 ubicando ahora la

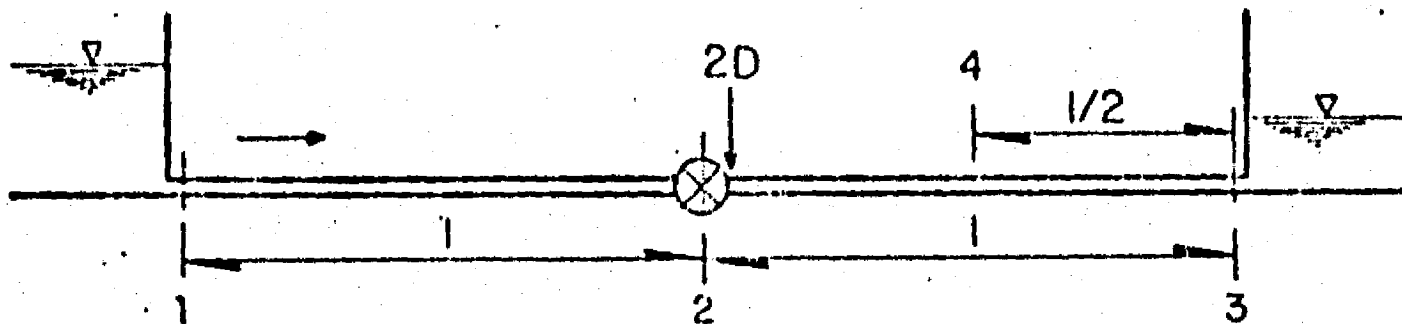


Fig 6.23 Esquema correspondiente al caso No. 2

válvula rotatoria en el punto medio de la longitud total de la tubería. Estudiaremos la resonancia para el caso en que $\frac{Z_v}{2} < Z_c$. De acuerdo con los resultados obtenidos en la sección 5.2, las primeras dos frecuencias resonantes serían $\frac{c}{4l}$ y $\frac{c}{2l}$. Para estudiar este sistema se realizaron dos series de experimentos. En la primera serie las amplitudes se midieron en el punto 2D (fig 6.23) colocando en la instalación respresentada en la fig 6.6 una celda de presión en la posición T_3 . En la segunda serie las amplitudes se

$$\bullet \frac{|h_{21}|}{|h_3|}$$

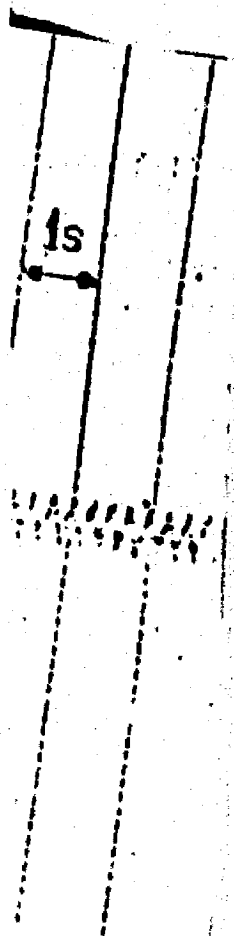
$$Z_c = 646$$

$$Z_v = 714$$

$$l = 163 \text{ m}$$

$$c = 1354$$

del caso



se prese
algunos

midieron en el punto 4 (fig 6.23) mediante la colocación de una celda en la posición T_4 (fig 6.6).

En la primera serie de experimentos se midieron amplitudes para un intervalo de frecuencias aproximadamente centrado en $\frac{c}{4\ell}$. La elección del punto 2D (fig 6.23) para medir amplitudes obedece a que al tratarse de una onda de longitud 4ℓ con nodos en 1 y 3 (fig 6.23) el máximo de amplitud se halla en el punto 2D.

En la segunda serie de experimentos se midieron amplitudes para un intervalo de frecuencias aproximadamente centrado en $\frac{c}{2\ell}$. La elección en esta serie del punto 4 (fig 6.23) para medir amplitudes, responde a que se tiene una onda de longitud 2ℓ con nodos en 1, 2 y 3. En consecuencia, el máximo de amplitud para esta onda se encuentra en el punto 4.

Los resultados obtenidos en las dos series de experiencias se presentan en la fig 6.24. De esta figura se deduce que la frecuencia $\frac{c}{4\ell}$, prevista por TOL como resonante, no lo es. En cambio si lo es $\frac{c}{2\ell}$, también prevista por TOL como resonante.

De estas dos series de experimentos se concluye que tampoco TOL es una teoría satisfactoria puesto que según se ha mostrado, establece como resonantes frecuencias que no lo son. Si estas discrepancias se presentan en sistemas tan simples como el estudiado, es de esperar que en sistemas más complejos las mismas puedan aumentar.

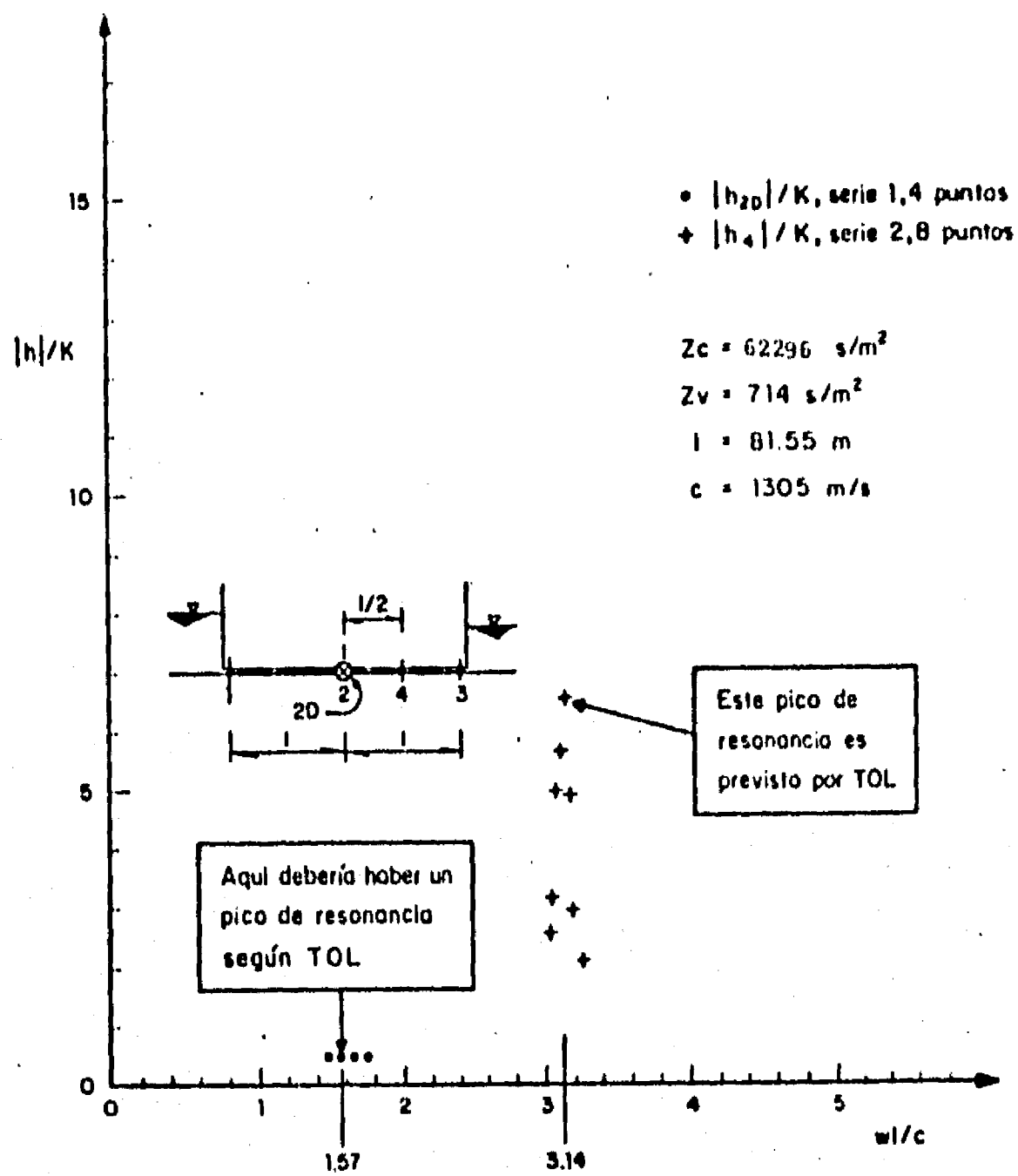


Fig 6.24 Análisis experimental del caso No. 2(*)

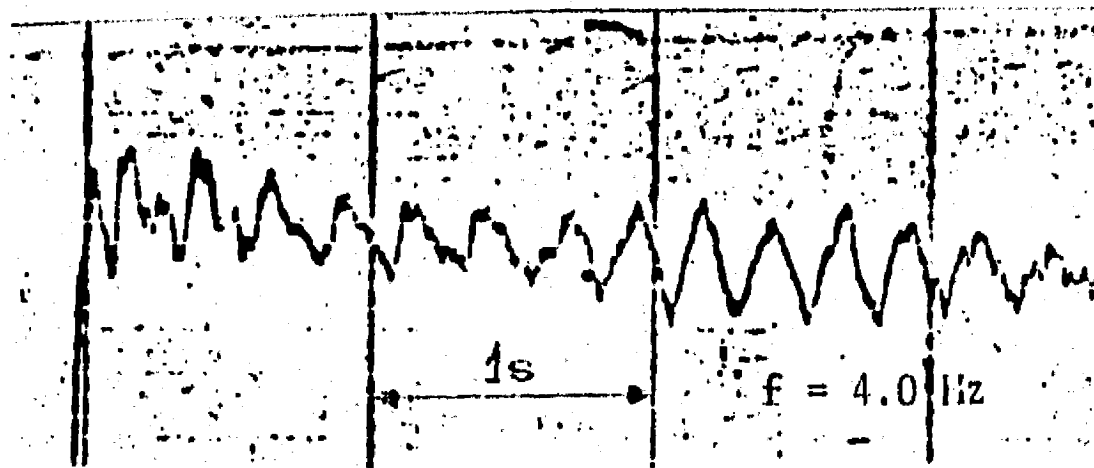


Fig 6.25 Oscilaciones libres registradas en el punto 2D.

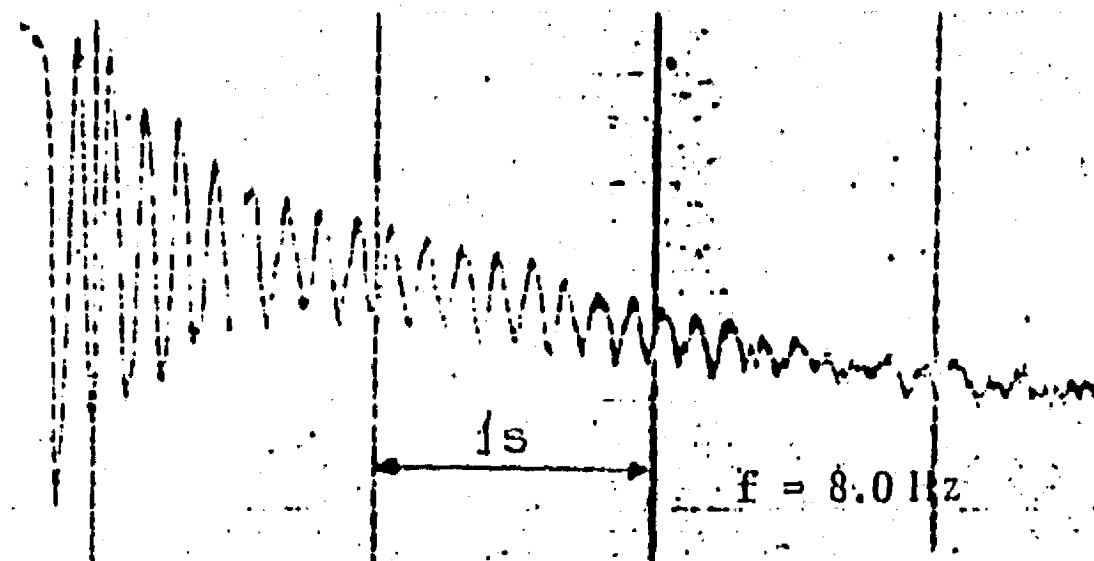


Fig 6.26 Oscilaciones libres registradas en el punto 4.

(*) Los datos correspondientes a esta figura se presentan en el Apéndice, sección A2.

También para este caso puede procederse a verificar experimentalmente las frecuencias de las oscilaciones libres encontradas por TOL. Con ese propósito se colocaron dos celdas en las posiciones T_3 y T_4 (fig 6.6) y el sistema se excita de la misma forma descrita en el ejemplo No. 1. Habiendo cesado la excitación (válvula nuevamente en reposo) se obtuvieron los registros que se presentan en las figs 6.25 y 6.26. En dichos registros se observa que las frecuencias $\frac{c}{4\ell}$ (fig 6.25) y $\frac{c}{2\ell}$ (fig 6.26) previstas por TOL son realmente las frecuencias de las oscilaciones libres amortiguadas. De este hecho experimental y de las observaciones realizadas respecto a la resonancia, se deduce que las frecuencias "naturales" del sistema (frecuencia de las oscilaciones libres amortiguadas) no siempre son frecuencias de resonancia.

El análisis experimental de los dos casos que restan no darán lugar a nuevas conclusiones respecto a TIT y a TOL simplemente confirmarán las conclusiones que hemos obtenido a partir de los dos casos ya expuestos.

6.3.3 Caso No. 3

La instalación de la fig 6.6 permite estudiar experimentalmente el caso No. 3 (fig 6.27) sustituyendo la válvula rotatoria ubicada en el extremo aguas abajo

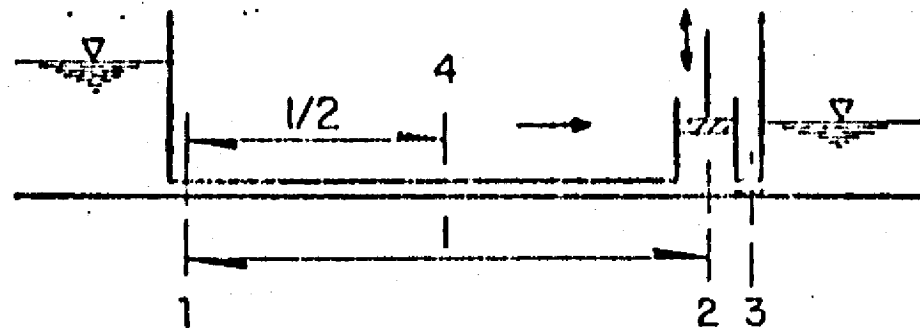


Fig 6.27 Esquema correspondiente al caso No. 3

de la tubería, tal como se trabajó en el caso No. 1, por el excitador a pistón ya descrito en la sección 6.3.1. La pérdida de carga aguas abajo del excitador se establece con una válvula de compuerta.

De acuerdo a lo visto en el cuadro 5.1 del capítulo 5, en este tercer caso hay contradicciones entre los resultados dados por TIT y los dados por TOL. Las contradicciones son las mismas que las halladas en el caso No. 1 de manera que el procedimiento experimental que se siguió fue el mismo que se describió en el caso No. 1 (sección 6.3). El resultado de este trabajo se resume en la fig 6.28. En dicha figura se comprueba que en la frecuencia de resonancia prevista por TIT no hay resonancia y que TOL prevee correctamente la resonancia en $\frac{c}{2l}$.

Asímismo se comprueba, con el registro obtenido en el punto 4 (fig 6.27) luego de excitar el sistema y una vez que la excitación cesó, que la frecuencia de las oscilaciones libres amortiguadas es la prevista por TOL (fig 6.29).

En consecuencia y como ya se dijo, el resultado del examen experimental de este caso reafirma la conclusión obtenida al estudiar el caso No. 1.

6.3.4 Caso No. 4

El caso No. 4 se estudia con un arreglo de la instalación de la fig 6.6, similar al empleado en el caso No. 2, cambiando el excitador. En lugar de la válvula rotatoria se coloca el excitador a pistón ya descrito en la sección 6.2. En la fig 6.30 se presenta el esquema correspondiente al caso No. 4 que salvo en el tipo de excitación es igual al del caso No. 2.

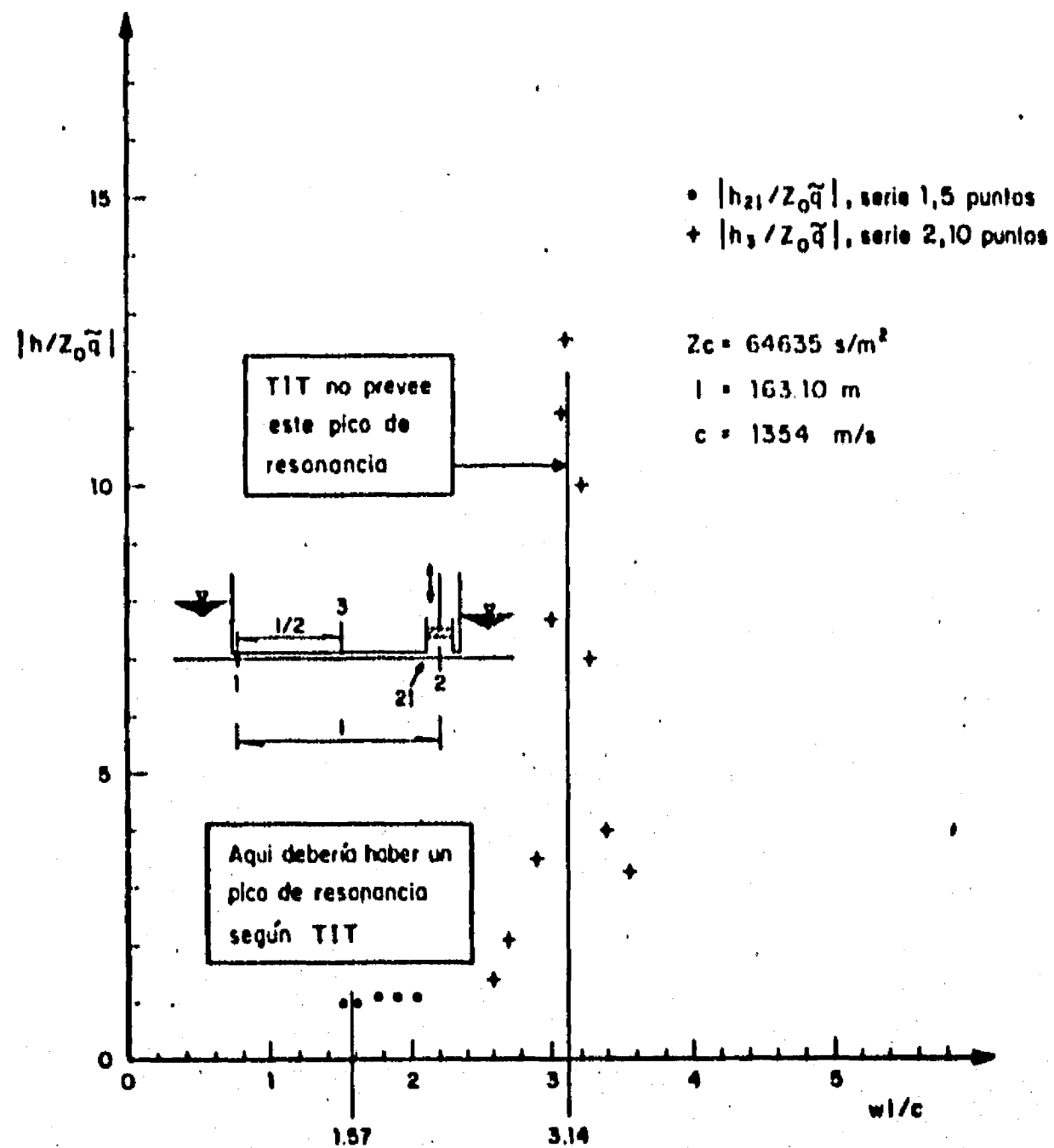


Fig 6.28 Análisis experimental del caso No. 3(*)

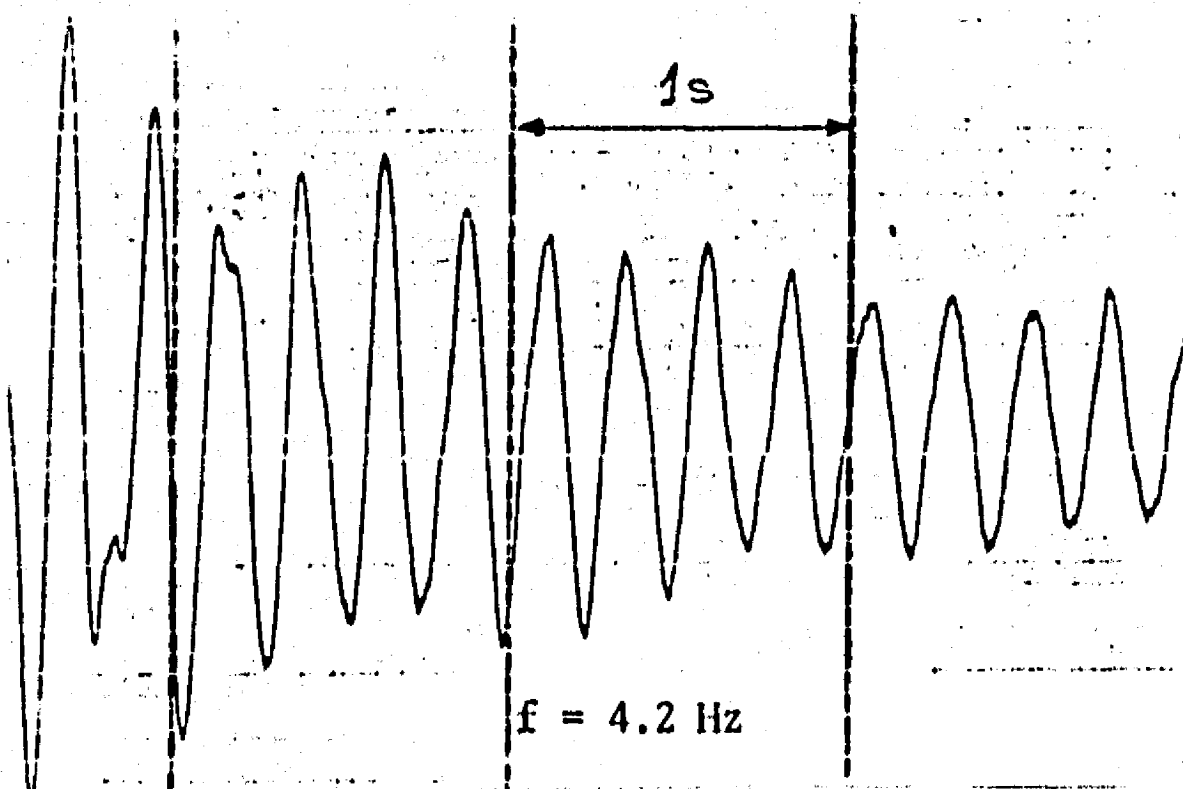


Fig 6.29 Oscilaciones libres registradas en el punto 4.

(*) Los datos correspondientes a esta figura se presentan en el Apéndice, sección A3.

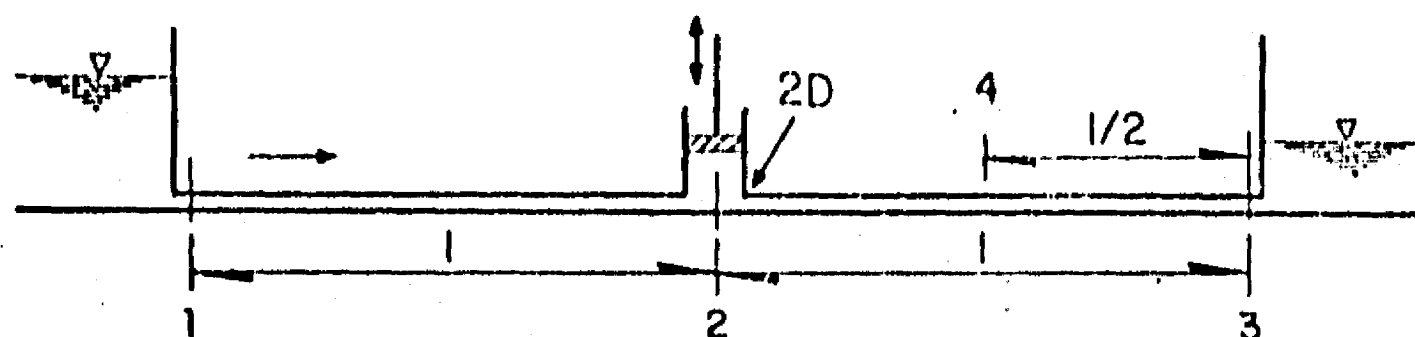


Fig 6.30 Esquema correspondiente al caso No. 4

El procedimiento experimental seguido en este caso es enteramente similar al empleado en el examen del caso No. 2 y que se ha descrito en la sección 6.4.

El resultado de dicho trabajo se resume en la fig 6.31. En dicha figura puede observarse que de las dos frecuencias más bajas que TOL predice como frecuencias de resonancia ($\frac{c}{4\ell}$ y $\frac{c}{2\ell}$) sólo lo es la primera, no siéndolo la segunda.

En las figs 6.32 y 6.33 se observan registros tomados en los punto 2D y 4 (fig 6.30) luego de excitar el sistema y una vez que la excitación cesó. Estas figuras muestran que los resultados de TOL respecto a las frecuencias de las oscilaciones libres amortiguadas son correctas, por lo tanto, las conclusiones a las que se llegan del examen experimental de este caso son las mismas a las que se llegó al estudiarse el caso No. 2 (sección 6.3.2).

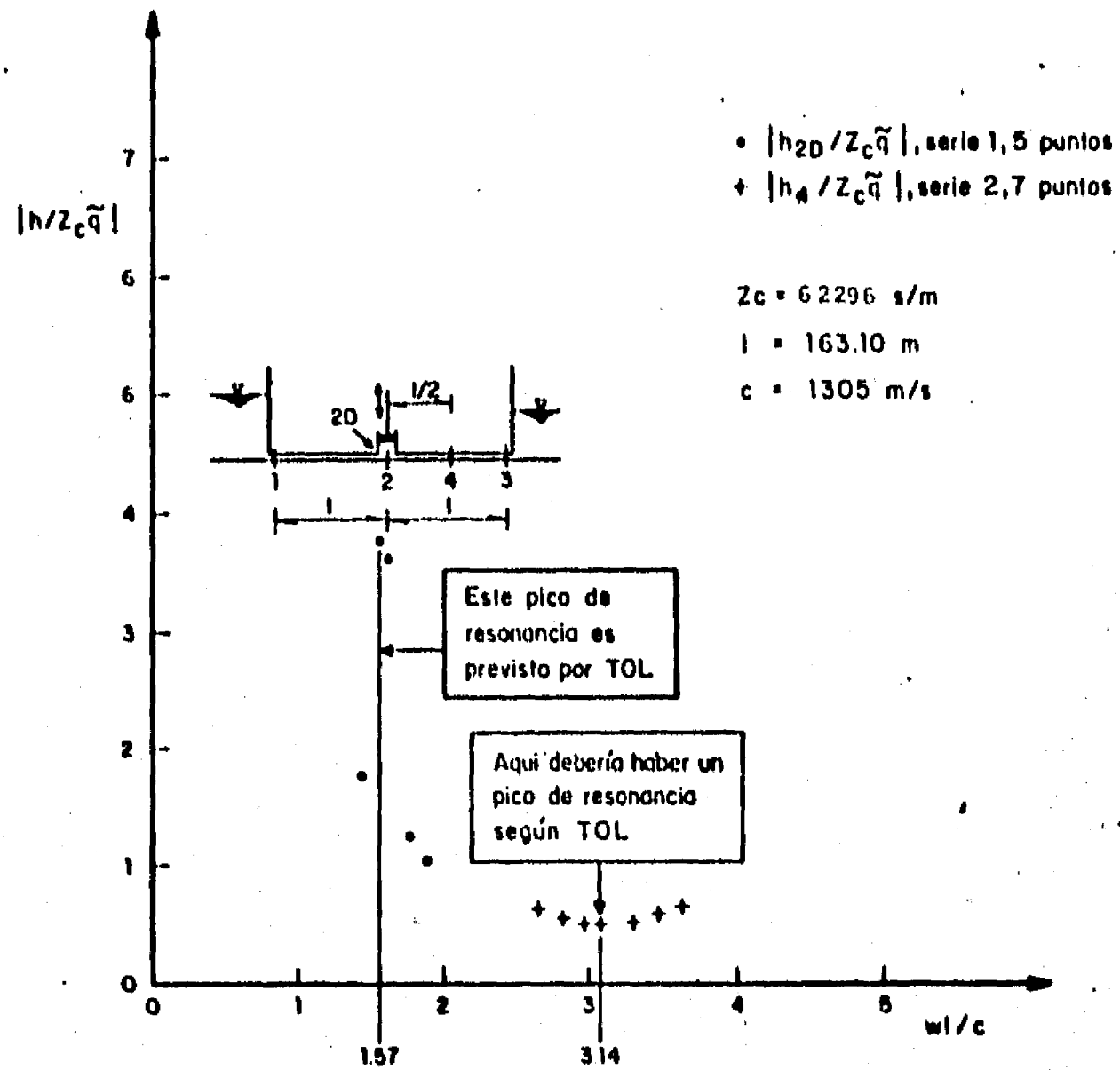


Fig 6.31 Análisis experimental del caso No. 4 (*)

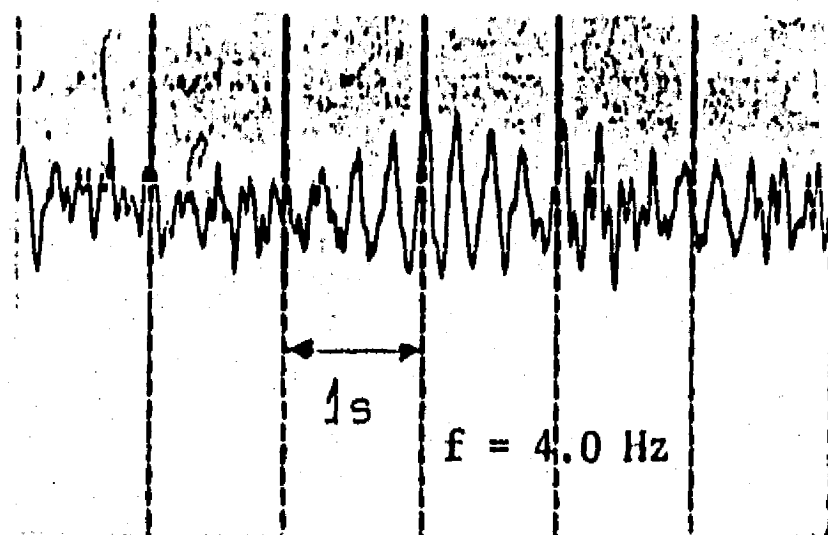


Fig 6.32 Oscilaciones libres registradas en el punto 2D.

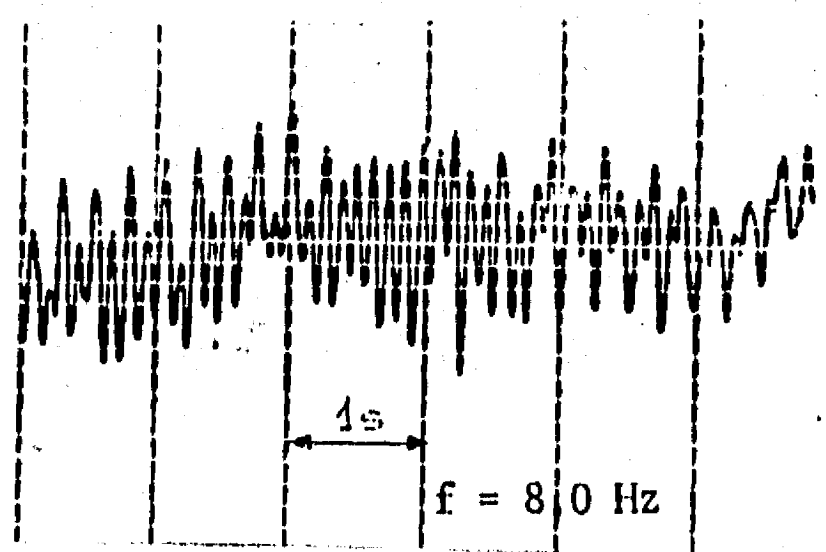


Fig 6.33 Oscilaciones libres registradas en el punto 4.

(*) Los datos correspondientes a esta figura se presentan en el Apéndice, sección A4.

6.4 Resumen de Conclusiones

Las conclusiones obtenidas en el examen experimental de los cuatro casos estudiados pueden resumirse de la siguiente manera.

- a) Se han encontrado dos casos (casos Nos 1 y 3) en los cuales se ha podido probar experimentalmente que la Teoría de la Impedancia Terminal (TIT) no da las frecuencias reales de resonancia.
- b) Se han encontrado dos casos (casos Nos 2 y 4) en los cuales se ha podido probar experimentalmente que algunas de las frecuencias que la Teoría de las Oscilaciones Libres (TOL) da como frecuencias de resonancia, no lo son.

En el cuadro 6.1 se presentan gráficamente estas conclusiones marcándose con rayas inclinadas los resultados cuya falsedad ha sido probada.

Una conclusión práctica que se desprende de las deficiencias comprobadas en las teorías existentes es la necesidad de elaborar una nueva teoría capaz de reflejar cabalmente el problema de la resonancia de un sistema complejo de conductos a presión. La formulación de esta nueva teoría, la aplicación de la misma a la resolución de los casos estudiados y su verificación experimental es el contenido de los próximos dos capítulos.

Caso	Esquema de la Instalación	Teoría	Situación	Frecuencias de Resonancia		Observaciones		
				$(2n-1) \frac{c}{4\ell} (1)$	$\frac{nc}{2\ell} (1)$			
1		TIT	$Z_v > Z_c$	si	no			
			$Z_v < Z_c$	si	no	(*) Estudio experimental		
			$Z_v = Z_c$	si	no			
		TOL	$Z_v > Z_c$	si	no			
			$Z_v < Z_c$	no	si	Estudio experimental		
			$Z_v = Z_c$	-	-			
2		TOL	$Z_v > 2Z_c$	si	no			
			$Z_v < 2Z_c$	si	si	Estudio experimental		
			$Z_v = 2Z_c$	-	-			
3		TIT	$Z_0 \geq Z_c$	si	no	Estudio experimental		
			TOL	$Z_0 > Z_c$	si	no		
				$Z_0 < Z_c$	no	si	Estudio experimental	
		$Z_0 = Z_c$		-	-			
		4		TOL	-	si	si	Estudio experimental

Resultado teórico que se probó experimentalmente que es falso

(*) Indica que se realizó estudio experimental de ese caso y situación

(1) $n = 1, 2, 3, \dots$, c - celeridad, ℓ - longitud

Cuadro 6.1 Verificación experimental de los resultados teóricos.

7. NUEVA TEORIA SOBRE LA RESONANCIA EN CONDUCTOS A PRESION

7.1 Planteo de la Nueva Teoría

De acuerdo a lo visto en la sección 3.6, en toda rama principal de un sistema de conductos a presión es posible construir la función $h(x, \omega)$ siendo h la amplitud compleja de la parte pulsante de la carga piezométrica (sección 3.3). Para hallar $h(x, \omega)$ es necesario conocer todas las matrices de transferencia de campo y de punto en la rama considerada y las condiciones de frontera en los extremos de la rama.

Al proyectista del sistema le interesa determinar:

1. Las frecuencias para las cuales en uno o más puntos del sistema se presentan máximos de amplitud en las oscilaciones estacionarias de la carga piezométrica. Estas frecuencias se denominarán "frecuencias de resonancia".

2. Para cada "frecuencia de resonancia" interesa localizar la posición de los puntos en los que se producen los mencionados máximos.

Así formulado el problema, la solución del mismo consiste en la localización en el plano x, ω de los máximos del módulo de $h(x, \omega)$ o lo que es lo mismo puesto que $|h(x, \omega)| \geq 0$, pero analíticamente es más simple, la localización de los máximos de la función $M(x, \omega) = |h(x, \omega)|^2 = h(x, \omega) \cdot \bar{h}(x, \omega)$, siendo \bar{h} el complejo conjugado de h .

7.2 Localización de Máximos

La localización de los máximos debe realizarse en una región rectangular del plano x, ω definido por las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} 0 < x < L \\ \omega_m < \omega < \omega_M \end{aligned} \quad (7.1)$$

siendo L la longitud de la rama considerada medida sobre la línea media de los conductos que la forman, ω_m la frecuencia circular mínima que interesa investigar y ω_M la máxima que interese. Conviene que el intervalo de frecuencias en el que se espera que actúen los excitadores del sistema esté contenido con holgura dentro del intervalo (ω_m, ω_M) . Esto evitará estudiar en particular los extremos del intervalo de frecuencias

En la referida región del plano x, ω que denominaremos R , consideremos la subregión R_d compuesta por el conjunto de puntos en los que $M(x, \omega)$ es diferenciable una vez por lo menos. En dicha subregión los puntos P_i de coordenadas x_i, ω_i tales que $M(P_i)$ es máximo, verifican las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial M}{\partial \omega} &= 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$M(P_i) - M(P) > Q, \text{ para todo } P$$

que verifique $0 < |P_i - P| < \epsilon$ siendo ϵ arbitrariamente pequeño y positivo

En consecuencia todo P_i solución de (7.2) y que verifique (7.3), nos proporciona una frecuencia de resonancia $\omega = \omega_i$ y la localización $x = x_i$ en la rama, de un máximo de amplitud que esa frecuencia produce.

Sea R_c la región complementaria de R_d respecto a R , esto es $R_c \cap R_d = \phi$ y $R_c \cup R_d = R$. R_c en consecuencia está formada por todos los puntos de R en los que la función $M(x, \omega)$ no es diferenciable. Antes de investigar en general la condición de diferenciabilidad de $M(x, \omega)$ señalaremos que a R_c pertenecen los P_k en los cuales la función no está definida. En estos puntos en general $M \rightarrow \infty$; en consecuencia corresponden a máximos de la función. De cualquier forma deben investigarse en particular, incorporando los P_k en los que $M \rightarrow \infty$ al conjunto de P_i dado por 7.2 y 7.3. Nótese que en R_c se incluyen los extremos de la rama pues en ellos $M(x, \omega)$ es diferenciable por la derecha o por la izquierda pero no en general.

7.3 Diferenciabilidad en $M(x, \omega)$

Recordando que $M(x, \omega) = h(x, \omega) \cdot \bar{h}(x, \omega)$, resulta que si $h(x, \omega)$ es diferenciable, lo es también $M(x, \omega)$. Estudiaremos pues la diferenciabilidad de $h(x, \omega)$ en ω y en x .

7.3.1 Diferenciabilidad en ω

Considerando una rama principal (sección 3.6) y conociendo las condiciones de frontera en los extremos, $h(x, \omega)$ se expresa en su forma más general para un punto $P(x, \omega)$ cualquiera como

$$h(x, \omega) = u_{21}(x, \omega) \cdot q_1 + u_{22}(x, \omega)h_1 + d_{21}(x, \omega) \cdot e_1 + d_{22}(x, \omega) e_2 \quad (7.4)$$

siendo u_{ij} y d_{ij} las componentes de las matrices de transferencia globales resultantes, q_1, h_1 las condiciones en el extremo aguas arriba y e_1, e_2 las componentes de la matriz columna de excitación (sección 3.4).

Diferenciando se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(x, \omega)}{\partial \omega} = & \frac{\partial u_{21}}{\partial \omega} \cdot q_1 + u_{21} \frac{dq_1}{d\omega} + \frac{\partial u_{22}}{\partial \omega} \cdot h_1 + u_{22} \frac{dh_1}{d\omega} + \\ & \frac{\partial d_{21}}{\partial \omega} e_1 + \frac{\partial d_{22}}{\partial \omega} e_2 + d_{21} \frac{de_1}{d\omega} + d_{22} \frac{de_2}{d\omega} \end{aligned} \quad (7.5)$$

siendo las u_{ij} y d_{ij} productos y sumas de funciones diferenciables en ω (componentes de matrices de transferencia de campo y punto) y admitiendo que las condiciones de frontera q_1, h_1 y las componentes de la excitación e_1, e_2 son diferenciables en ω como ocurre para las condiciones de frontera y excitaciones más comunes, resulta que $h(x, \omega)$ es diferenciable en ω .

7.3.2 Diferenciabilidad en x

Analizaremos ahora los casos de la diferenciabilidad de M cuando x es la abscisa de un punto de un conducto y cuando x es la abscisa de una singularidad.

7.3.2.1. Diferenciabilidad en un conducto

Sea x la abscisa de un punto que está en un conducto. Sea δ una cantidad pequeña y arbitraria. Calculemos ahora $h(x + \delta)$ y $h(x)$. Haciendo uso de la matriz de campo entre x_0 y $x_0 + \delta$ se tiene que

$$h(x + \delta, \omega) = c_{21} q(x, \omega) + c_{22} h(x, \omega) \quad (7.6)$$

Despreciando la fricción en el tramo de longitud δ se tiene que

$$c_{21} = -j \frac{c}{gA} \operatorname{sen} \frac{\delta}{c} \omega \quad (7.7)$$

$$c_{22} = \cos \frac{\delta}{c} \omega$$

Haciendo uso de (7.6) y (7.7) se calcula la derivada

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{h(x + \delta, \omega) - h(x, \omega)}{\delta} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(-j \frac{c}{gA} \operatorname{sen} \frac{\delta}{c} \omega \right) \cdot q(x, \omega) \cdot \frac{1}{\delta} \\ &+ \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\cos \frac{\delta \omega}{c} - 1 \right) \frac{1}{\delta} \cdot h(x, \omega) = -j \frac{\omega}{gA} q(x, \omega) \end{aligned} \quad (7.8)$$

En consecuencia, cuando x es la abscisa de un punto que está en un conducto, $h(x, \omega)$ es diferenciable.

7.3.2.2 Diferenciabilidad en una Singularidad

La función de transferencia asociada a una singularidad en la que puede existir un excitador se expresa en forma matricial de la siguiente forma (sección 3.4).

$$\begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_D = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_I + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_I + E \quad (7.9)$$

En la fig 7.1 se establece la nomenclatura utilizada.

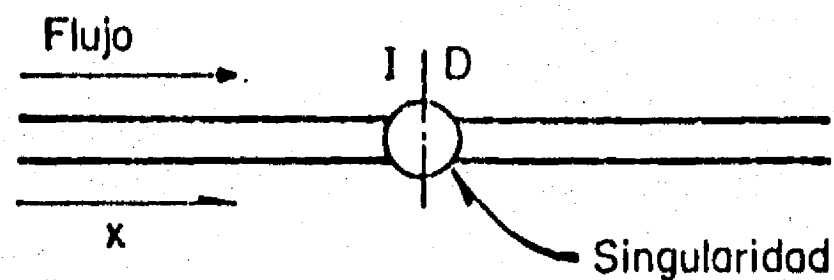


Fig 7.1 Esquema de una singularidad

Para estudiar la diferenciabilidad de $h(x, \omega)$ en la singularidad, calcularemos la función en un punto ubicado aguas abajo de la singularidad a una distancia δ . Sea $C(\delta)$ la matriz de transferencia del tramo de conducto de longitud δ . Aplicando (7.8) puede escribirse

$$\begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_\delta = C(\delta) \cdot S \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_I + C(\delta) E \quad (7.9)$$

Escribiendo la segunda ecuación implícita en (7.9) se tiene

$$h(\delta) = (c_{21} s_{11} + c_{22} s_{21})q_I + (c_{21} s_{21} + c_{22} s_{22})h_I + c_{21} e_1 + c_{22} e_2$$

Para calcular la derivada en la singularidad se tiene

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{h(\delta) - H_I}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{c_{21} s_{11}}{\delta} q_I + \frac{c_{22} s_{21}}{\delta} q_I + \frac{c_{21} s_{21}}{\delta} h_I + \frac{c_{22} s_{22} - 1}{\delta} h_I + \frac{c_{21} e_1}{\delta} + \frac{c_{22} e_2}{\delta} \right] \quad (7.10)$$

Despreciando la fricción en el pequeño tramo de longitud δ , se tienen los siguientes valores para los coeficientes de C

$$c_{11} = \cos \frac{\delta}{c} \omega \quad c_{12} = j \frac{gA}{c} \operatorname{sen} \frac{\delta}{c} \omega \quad c_{21} = -j \frac{c}{gA} \operatorname{sen} \frac{\delta}{c} \omega$$

$$c_{22} = \cos \frac{\delta}{c} \omega \quad (7.11)$$

Calculando el límite del segundo miembro como suma de los límites de los sumandos se tiene:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{c_{21} s_{11}}{\delta} q_I = -j \frac{\omega}{gA} s_{11} q_I$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{c_{22} s_{21}}{\delta} q_I = \infty, \text{ salvo que } s_{21} = 0$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{c_{21} s_{21}}{\delta} h_I = -j \frac{\omega}{g\Lambda} \cdot s_{21} h_I$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{c_{22} s_{22} - 1}{\delta} h_I \text{ salvo que } s_{22} = 1 \quad (7.12)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{c_{21} e_I}{\delta} = -j \frac{\omega}{g\Lambda} e_I$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{c_{22} e_2}{\delta} = \infty \text{ salvo que } e_2 = 0$$

En consecuencia, solamente si la función de transferencia de la singularidad es tal que

$$\begin{aligned} s_{21} &= 0 \\ s_{22} &= 1 \\ e_2 &= 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

la función $h(x, \omega)$ y por lo tanto $M(x, \omega)$ es diferenciable. El resultado obtenido en (7.13) permite establecer por simple inspección cuáles singularidades incorporarán puntos $P_S = (x_S, \omega)$ siendo x_S la abscisa de la singularidad, a R_C (región de los puntos del plano x, ω en los que $M(x, \omega)$ no es diferenciable) y cuáles no.

Resumiendo, en toda singularidad cuya función de transferencia tenga la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_D = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_I + \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

$M(x, \omega)$ es diferenciable y por tanto los $P_s = (x_s, \omega)$ correspondientes, pertenecen a R_d (región de los puntos del plano x, ω en los que $M(x, \omega)$, es diferenciable). Este tipo de singularidad se denominará "evitable" en relación con el estudio de diferenciability. Las singularidades que no son "evitables" se denominarán "no evitables".

La teoría propuesta se denominará "Teoría de Localización de Máximos" y se designará abreviadamente como TLM.

7.4 Procedimiento de Aplicación de TLM

El procedimiento a seguir para aplicar TLM a un ramal principal en un sistema de conductos a presión es el siguiente:

1. Calcular $M(x, \omega)$ para todo $P(x, \omega)$ en que sea posible, perteneciente a la región R definida por (7.1).
2. Dentro de R se localizan los puntos P_k en los que $M(x, \omega)$ no está definida y los P_s correspondientes a singularidades no evitables y a los extremos de la rama. Los P_k y los P_s así definidos constituyen R_c .
Hallada R_c , su complemento respecto a R es R_d .

3. En la región R_d se resuelve el sistema (7,2) con la condición (7,3). Los P_i solución pasan a integrar el conjunto C_M de los puntos $P(x, \omega)$ tales que $M(x, \omega)$ es máximo.
4. Se localizan los P_s correspondientes a singularidades no evitables cuyo lugar geométrico en el plano x, ω serán paralelas al eje ω de ecuación $x = x_s$. En dichos puntos se estudia la función $M(x_s, \omega)$ a la izquierda y a la derecha de la singularidad. Los máximos que se encuentran pasarán a ser examinados en particular para decidir si corresponden a máximos reales de $M(x, \omega)$. En caso de que esto ocurra los P_s (izquierda y/o derecha) correspondientes se incorporarán al conjunto C_M .
5. Se localizan los P_k en los que $M(x, \omega)$ no está definida. En dichos puntos se estudia el límite siguiente:

$$\lim_{P \rightarrow P_k} M(x, \omega) \quad (7.15)$$

De acuerdo al valor del límite se incorporan los P_k o no al conjunto C_M de puntos en los que $M(x, \omega)$ es máximo.

6. El conjunto C_M así construido, da las frecuencias circulares que denominaremos de resonancia y también los puntos del ramal principal estudiado en los que ocurren los máximos de la función $M(x, \omega)$.

7.5 Procedimiento Alternativo de Aplicación de TLM

En 7.4 se expuso un procedimiento general que permite aplicar TLM a un ramal principal. Sin embargo, cuando el sistema se compone de un número pequeño de tuberías simples y la fricción puede despreciarse, existe un procedimiento alternativo que simplifica mucho la aplicación de TLM. Dicho procedimiento difiere del procedimiento general únicamente en el punto 3 referido a la resolución del sistema (7.2). Para poder formular este nuevo camino de resolución de (7.2) debemos previamente calcular $M(x, \omega)$, en una tubería simple sin fricción distribuida.

7.5.1 Cálculo de $M(x, \omega)$ en una tubería simple sin fricción

Sea una tubería simple (Z_c y c constantes en toda su longitud), en la cual se conocen q_1 y h_1 para todo ω , siendo 1 y 2 los extremos de la tubería (ver fig 7.2).

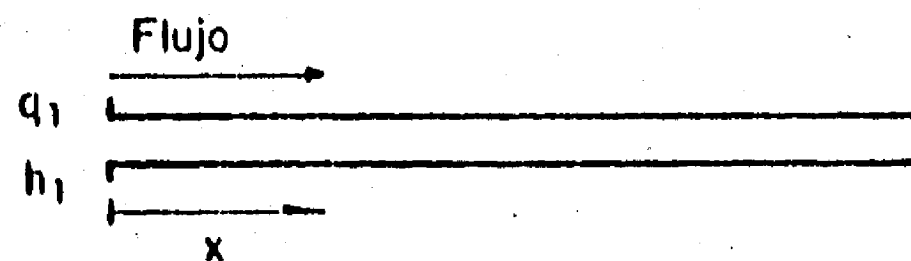


Fig 7.2 Esquema de la tubería simple

De acuerdo a lo visto en la sección 3.8 puede tomarse la variable adimensionalizada $\lambda \frac{\omega}{c}$ en lugar de ω . Dicha variable se designará como $\Omega = \lambda \omega / c$ y para un punto de abscisa x se designará como $X = \frac{x \omega}{c}$. Haciendo uso de estas nuevas variables adimensionadas $h(x, \omega)$ en la tubería puede expresarse en función

de q_1, h_1 (podría hacerse todo el desarrollo para cualquier par formado con dos de los valores q_1, h_1, q_2, h_2) resulta:

$$h(X, \Omega) = -j Zc q_1 \operatorname{sen} X + h_1 \operatorname{cos} X \quad (7.16)$$

siendo

$$q_1 = q_1(\Omega) \quad h_1 = h_1(\Omega)$$

Puede demostrarse fácilmente que

$$M(X, \Omega) = |h(X, \Omega)|^2 = |q_1|^2 Zc^2 \operatorname{sen}^2 X + |h_1|^2 \operatorname{cos}^2 X + Zc \operatorname{sen} 2X \cdot \operatorname{Im}(q_1 \bar{h}_1) \quad (7.17)$$

7.5.2 Localización de los extremos

Calculando ahora la derivada parcial respecto a X resulta.

$$\frac{\partial M(X, \Omega)}{\partial X} = \left[|q_1|^2 Zc - |h_1|^2 \right] \operatorname{sen} 2X + 2Zc \operatorname{cos} 2X \operatorname{Im}(q_1 \bar{h}_1) \quad (7.18)$$

Igualando (7.18) a cero y separando los términos dependientes de Ω de los que dependen de X resulta:

$$\operatorname{tg} 2X = \frac{2Zc \operatorname{Im}(q_1 \bar{h}_1)}{|h_1|^2 - Zc |q_1|^2} \quad (7.19)$$

En consecuencia de (7.19) resulta que

$$X = \frac{1}{c} \text{Arc tg} \frac{2 Zc \text{Im} (q_1 \bar{h}_1)}{|h_1|^2 - Zc |q_1|^2} \quad (7.20)$$

La expresión 7.20 permite localizar sobre el eje de la tubería los puntos en que $\frac{\partial M}{\partial X} = 0$ en función de Ω puesto que el miembro de la derecha de la igualdad sólo depende de Ω . Simbólicamente se tiene una función dada por 7.20 que designaremos como $X = F(\Omega)$ que conocida Ω localiza los puntos X en que $\frac{\partial M}{\partial X} = 0$. Por lo tanto si ahora se estudian los extremos de la función de una variable

$$G(\Omega) = M(F(\Omega), \Omega) \quad (7.21)$$

esto es, se resuelve la ecuación

$$\frac{dG}{d\Omega} = 0 \quad (7.22)$$

las soluciones de 7.22 son valores de Ω tales que $\frac{\partial M}{\partial X} = \frac{\partial M}{\partial \Omega} = 0$. Con $X = F(\Omega)$. En efecto, de 7.22 se tiene que

$$\frac{dG}{d\Omega} = \frac{\partial M}{\partial X} \cdot \frac{dF}{d\Omega} + \frac{\partial M}{\partial \Omega} \quad (7.23)$$

pero $\frac{\partial M}{\partial X}$ calculado en $X = F(\Omega)$ es nulo. En consecuencia de 7.23 sale que para Ω solución de 7.22 con $X = F(\Omega)$ deducida de 7.20, resulta que

$$\frac{\partial M}{\partial \Omega} = 0. \text{ Asimismo, por definición de } F(\Omega), \frac{\partial M}{\partial X} = 0.$$

Por lo tanto si de las soluciones de 7.22 elegimos aquellas en que $G(\Omega)$ es máximo, hemos hallado aplicando 7.20 parejas X_i, Ω_i tales que

$$x_{ip} = \frac{(X_i + 2p\pi)c}{\omega_{in}} \quad (7.24)$$

$$\omega_{in} = \frac{c(\Omega_i + 2n\pi)}{\ell}$$

siendo los valores de p respecto a n tales que $x_{ip}/\ell < 1$. Estas son entonces las coordenadas en el plano x_i, ω_i de los puntos P_i solución del sistema de ecuaciones 7.2 con la condición 7.3.

De esta forma puede resolverse el punto 3 del procedimiento general expuesto en 7.4. La simplificación consiste en valerse de la posibilidad de expresar X como $F(\Omega)$ a partir de $\frac{\partial M}{\partial X} = 0$ y luego resolver los extremos de una función $G(\Omega)$ de una sola variable para verificar $\frac{\partial M}{\partial \Omega} = 0$.

Al realizar el cambio de variables de x, ω a X, Ω la región R en el plano x, ω pasa al plano X, Ω . Esto debe tenerse en cuenta al utilizar este procedimiento alternativo de aplicación de TLM.

Resumen

Se ha propuesto una teoría que denominamos "Teoría de Localización de los Máximos" (TLM) que permite determinar las frecuencias de resonancia del sistema definidas como las frecuencias en que en uno o más puntos del ramal principal estudiado, se presentan máximos de amplitud. Si el sistema posee varios ramales principales, las frecuencias de resonancia del sistema se obtienen hallando las correspondientes para cada uno de los ramales y considerando el conjunto de las mismas.

La teoría propuesta como se vió, da también como resultado la ubicación espacial de los máximos a lo largo del eje de la tubería.

En el próximo capítulo se aplicará esta teoría a la resolución de los cuatro casos estudiados en los capítulos 5 y 6 y para los cuales se probó que las teorías existentes presentan serias deficiencias.

8. ANALISIS DE LOS CUATRO CASOS CON LA NUEVA TEORIA

En este capítulo realizaremos un análisis con la nueva teoría TLM de los cuatro casos tratados con las teorías TIT y TOL en el capítulo 5. El propósito del capítulo es confrontar los resultados obtenidos mediante la aplicación de TLM en los cuatro casos que han servido para mostrar las diferencias de las otras teorías con los resultados experimentales presentados en el capítulo 6. Se tratarán los cuatro casos en el orden con que ya se han expuesto anteriormente.

8.1 Primer Caso

Se trata del sistema cuyo esquema se presenta en la fig 5.1 y en la cual la rama principal es en este caso la única.

Para aplicar TLM seguiremos el procedimiento detallado en la sección 7.5 pues el sistema se compone de una sola tubería simple.

8.1.1 Cálculo de $M(x, \omega)$

Siendo $M(x, \omega) = |h(x, \omega)|^2$ calcularemos $h(x, \omega)$ usando la notación empleada en el capítulo 5 e imponiendo la condición $h_1 = 0$.

$$h(x, \omega) = c_{21}(x, \omega) \cdot q_{1I}, \quad c_{21}(x, \omega) = -j Z_c \operatorname{sen} \frac{\omega x}{c} \quad (8.1)$$

$$q_{1I} = -\frac{K}{u_{21}}, \quad u_{21} = -Z_v \cos \frac{\ell \omega}{c} - j Z_c \operatorname{sen} \frac{\ell \omega}{c} \quad (8.2)$$

en consecuencia

$$h(x, \omega) = \frac{-j K Z_c \operatorname{sen} \frac{\omega x}{c}}{Z_v \cos \frac{\ell \omega}{c} + j Z_c \operatorname{sen} \frac{\ell \omega}{c}} \quad (8.3)$$

y $M(x, \omega) = |h(x, \omega)|^2$ será

$$M(x, \omega) = \frac{K^2 Z_c^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\omega x}{c}}{Z_v^2 \cos^2 \frac{\ell \omega}{c} + Z_c^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\ell \omega}{c}} \quad \text{para } 0 \leq x \leq \ell \quad (8.4)$$

$$M(x, \omega) = 0 \quad \text{para } x = \ell^+$$

donde ℓ^+ es el punto 2D y la región R es

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq \ell \\ 0 &< \omega \end{aligned} \quad (8.5)$$

8.1.2 Determinación de R_c y R_d

R_c está formada por los puntos de R en los que $M(x, \omega)$ no está definida o no es diferenciable. De la inspección de (8.4) sale que está definida en toda la región y es diferenciable para $0 \leq x \leq \ell$ y no lo es en $x = \ell^+$. Por lo tanto para este caso R_D es la región $0 \leq x \leq \ell$, $0 < \omega$ y R_d es la región $x = \ell^+$, $0 < \omega$ obviamente en R_c hay un mínimo y por lo tanto no aporta ningún punto a C_M (conjunto de puntos de R en los que $M(x, \omega)$ es máximo).

8.1.3 Localización de máximos

Como el sistema analizado se compone de una sola tubería simple y no consideramos la fricción distribuida, el trabajo analítico se simplifica aplicando el procedimiento descrito en la sección 7.5.

Introduciendo variables adimensionadas $X = \frac{x \omega}{c}$ y $\Omega = \frac{\ell \omega}{c}$ en la expresión 8.4 de $M(x, \omega)$ resulta

$$M(X, \Omega) = \frac{K^2 Zc^2 \operatorname{sen}^2 X}{Zv^2 \cos^2 \Omega + Zc^2 \operatorname{sen}^2 \Omega} \quad 0 \leq X \leq 2\pi, \quad 0 < \Omega \leq 2\pi$$

$X < \Omega$

Obsérvese que en la región de X, Ω indicada $M(X, \Omega)$ toma todos los valores posibles. Por la periodicidad de las funciones trigonométricas involucradas carece de sentido tomar en X, Ω una región de estudio más extendida. Calculando $\frac{\partial M}{\partial X} = 0$ o aplicando 7.19, con la condición $h_1 = h(0, \Omega)$, resulta

$$\operatorname{sen} 2X = 0 \tag{8.7}$$

$$\omega_n = (2n - 1) \frac{c \pi}{2 \ell}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.13)$$

$Z_v < Z_c$

En esta situación y procediendo de igual forma, los máximos se localizan en $\Omega = \pi$ y $\Omega = 2\pi$ obteniéndose las siguientes frecuencias de resonancia

$$\omega_n = \frac{n c \pi}{\ell} \quad (8.14)$$

$Z_v = Z_c$

En esta situación se tiene sustituyendo en (8.4) que el máximo de $M(x, \omega)$ es $K^2 Z_c^2$ y para $\omega > \frac{\pi c}{2 \ell}$ se encuentra (cualquiera sea ω) dentro del sistema en las posiciones dadas por (8.10). En esta situación por lo tanto, TIM le está indicando al proyectista para que toda frecuencia circular, mayor o igual que $\frac{\pi c}{2 \ell}$, tendrá en el sistema, un máximo de amplitud que debe prevenir. Diremos entonces que todas las frecuencias mayores o iguales que $\frac{c}{4 \ell}$ son de resonancia puesto que se satisface el sistema (7.2) y la condición (7.3), en puntos P_j pertenecientes a R .

Obsérvese que al pasar de Ω a ω se debe tomar ω con su colección infinita y numerable de armónicos.

Los pasos 4° y 5° del procedimiento detallado en la sección 7.4 no se aplican en este caso pues en R_c sólo hay mínimos.

En consecuencia los extremos se encuentran en

$$X = m \frac{\pi}{2}, \quad m = 1, 2, 3, 4 \quad (8.9)$$

Observando 8.9 puede verse que para m par $M(x, \ell)$ se anula, por lo tanto para esos m $M(X, \Omega)$ presenta un mínimo. En consecuencia, los puntos que interesa analizar corresponden a

$$X = (2p - 1) \frac{\pi}{2} \quad p = 1, 2 \quad (8.10)$$

Sustituyendo X por su expresión 8.10 en 8.6 se encuentra la función $G(\Omega)$ definida en 7.21 resultando:

$$G(\Omega) = M \left[(2p - 1) \frac{\pi}{2}, \Omega \right] = \frac{K^2 Z_c^2}{Z_v^2 \cos^2 \Omega + Z_c^2 \sin^2 \Omega}$$

Debe resolverse ahora $\frac{dG}{d\Omega} = 0$.

Calculando la derivada se tiene:

$$\frac{dG}{d\Omega} = \frac{K^2 Z_c^2 (Z_v^2 - Z_c^2) \sin 2\Omega}{(Z_v^2 - Z_c^2) \cos^2 \Omega + Z_c^2} = 0 \quad (8.12)$$

En 8.12 deben distinguirse tres situaciones, a saber:

$Z_v > Z_c$

En esta situación, observando la variación de signo de $\frac{dG}{d\omega}$, los máximos se hallan en $\Omega = \pi/2$ y $\Omega = \frac{3}{2}\pi$ siendo, en consecuencia, las frecuencias circulares de resonancia.

8.1.4 Frecuencias de resonancia y ubicación espacial de los máximos

En consecuencia C_M , el conjunto de puntos R en que $M(x, \omega)$ es máximo será el siguiente:

$$Z_v > Z_c \quad f_n = (2n - 1) \frac{c}{4\ell}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad x = \frac{2p - 1}{2n - 1} \ell, \\ p = 1, 2, \dots; \quad p < n$$

$$Z_v < Z_c \quad f_n = \frac{n c}{2\ell}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad x = \frac{2p - 1}{2n} \ell, \quad p = 1, 2, \dots; \\ p < n + \frac{1}{2} \quad (8.15)$$

$$Z_v = Z_c \quad f \geq \frac{c}{4\ell}, \quad x = (2p - 1) \frac{c}{4f} \quad \text{con } p \text{ tal que } x \leq \ell$$

8.2 Segundo Caso

Se trata del sistema cuyo esquema se presenta en la fig 5.2. Este sistema también tiene una sola rama principal. Procederemos de acuerdo a la sección 7.5, pues el sistema se compone de solamente dos tuberías simples.

8.2.1 Cálculo de $M(x, \omega)$

Tomando como origen de la x el extremo de aguas arriba y suponiendo que $h_1 = h_3 = 0$, $h(x, \omega)$ tiene las siguientes expresiones en las tuberías 1 - 2 y 2 - 3 respectivamente.

$$h(x, \omega) = -c_{21}(x, \omega) \frac{c_{22}(\ell, \omega) K}{u_{21}(\ell, \omega)}, \quad 0 \leq x \leq \ell$$

$$h(x, \omega) = - \frac{c_{11}(\ell, \omega) K}{u_{21}(\ell, \omega)} \left[c_{21}(x - \ell, \omega) c_{22}(\ell, \omega) - c_{22}(x - \ell, \omega) c_{21}(\ell, \omega) \right]; \ell < x \leq 2\ell \quad (8.16)$$

Operando se puede comprobar que las expresiones de $M(x, \omega)$ en $0 \leq x \leq \ell$ y en $\ell < x \leq 2\ell$, son las siguientes

$$M(x, \omega) = \frac{K^2 Z_c^2 \sin^2 x \frac{\omega}{c}}{(Zv^2 - 4Z_c^2) \cos^2 \frac{\ell \omega}{c} + 4Z_c^2} \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (8.17)$$

$$M(x, \omega) = \frac{K^2 Z_c^2 \sin^2 \left[(2\ell - x) \frac{\omega}{c} \right]}{(Zv^2 - 4Z_c^2) \cos^2 \frac{\ell \omega}{c} + 4Z_c^2}, \quad \ell < x \leq 2\ell \quad (8.18)$$

siendo la región R la siguiente

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 2\ell \\ 0 &< \omega \end{aligned} \quad (8.19)$$

8.2.2 Determinación de R_c y R_d

De la inspección de (8.13) se deduce que $M(x, \omega)$ está definida y es diferenciable en toda la región R . En consecuencia en este caso $R_d = R$ y $R = \phi$.

8.2.3 Localización de máximos

El sistema analizado se compone de dos tuberías simples y tampoco se considera la fricción. En consecuencia, aquí también es conveniente por la simplificación analítica que supone, aplicar el procedimiento descrito en la sección 7.5.

Introduciendo variables adimensionadas $X = \frac{x\omega}{c}$ y $\Omega = \frac{l\omega}{c}$ en las expresiones 8.17 y 8.18 de $M(x, \omega)$ resulta:

$$M(X, \Omega) = \frac{K^2 Zc^2 \operatorname{sen}^2 X}{(Zv^2 - 4Zc^2) \cos^2 \Omega + 4Zc^2} \quad \begin{array}{l} 0 \leq X \leq 2\pi \\ 0 < \Omega \leq 2\pi \\ X < \Omega \end{array} \quad (8.20)$$

$$M(X, \Omega) = \frac{K^2 Zc^2 \operatorname{sen}^2(2\Omega - X)}{(Zv^2 - 4Zc^2) \cos^2 \Omega + 4Zc^2} \quad \begin{array}{l} 2\pi \leq X \leq 4\pi \\ 0 < \Omega \leq 2\pi \\ X < 2\Omega \end{array} \quad (8.21)$$

Nótese que la región de estudio en X, Ω toma en cuenta la periodicidad de las funciones trigonométricas involucradas.

Calculando $\frac{\partial M}{\partial X} = 0$ para 8.20 resulta

$$\operatorname{sen} 2X = 0 \quad (8.22)$$

Los extremos se encuentran en

$$X = m \frac{\pi}{2} \quad m = 1, 2, 3, 4 \quad (8.23)$$

Observando en 8.20 que para m por $M(X, \Omega)$ se anula, resulta que los máximos deben buscarse en

$$X = (2p - 1) \frac{\pi}{2} \quad p = 1, 2, \quad (8.24)$$

Calcularemos ahora $\frac{\partial M}{\partial X} = 0$ para 8.21, resultando

$$\text{sen} \left[2(2\Omega - X) \right] = 0 \quad (8.25)$$

lo cual supone que en la tubería aguas abajo de la válvula los extremos se hallan en

$$2\Omega - X = r \frac{\pi}{2} \quad r = 1, 2, 3, 4 \quad (8.20)$$

Sustituyendo en 8.21 se observa que para r par $M(X, \Omega) = 0$. En consecuencia los máximos deben buscarse en $r = 2p - 1$ con $p = 1, 2, \dots$. Por lo tanto

$$X = 2\Omega - (2p - 1) \frac{\pi}{2} \quad (8.27)$$

Sustituyendo 8.24 en 8.20 y 8.27 en 8.21 se llega a la misma expresión $G(\Omega)$.

Calculando $\frac{dG}{d\Omega} = 0$ resulta:

$$\frac{dG}{d\Omega} = \frac{K^2 Z_c^2 (Z_v^2 - Z_c^2) \text{sen}^2 2\Omega}{\left[(Z_v'^2 - Z_c^2) \cos^2 \Omega + Z_c^2 \right]^2} = 0 \quad (8.28)$$

Como puede verse 8.28 resulta formalmente igual a 8.12 poniendo $Z_v' = \frac{Z_v}{2}$. En consecuencia la discusión de sus soluciones es igual a la ya efectuada en

en la sección anterior 8.1. Tendremos por lo tanto las siguientes tres situaciones posibles:

$$\frac{Z_V}{2} < Z_C$$

Los máximos se hallan $\Omega = (2n - 1)\pi$. Las frecuencias circulares de resonancia serán

$$\omega_n = (2n - 1) \frac{c \pi}{2 \ell}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.29)$$

$$\frac{Z_V}{2} < Z_C$$

Los máximos se hallan en $\Omega = n \pi$. Las frecuencias circulares de resonancia serán:

$$\omega_n = \frac{n \pi c}{\ell}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.30)$$

$$\frac{Z_V}{2} = Z_C$$

En esta situación vale la discusión ya realizada para el caso $Z_V = Z_C$ en la sección anterior (8.1)

Diremos en consecuencia que todas las frecuencias mayores o iguales que $\frac{c}{4 \ell}$ son de resonancia pues se satisface el sistema (8.2) y la condición (7.3) en puntos P_i pertenecientes a R .

Obsérvese que siempre, al pasar de Ω a ω , deben tomarse todos los armónicos de ω .

Los pasos 4° y 5° del procedimiento indicado en la sección 7.4 no se aplican tampoco en este caso pues $R_C = \phi$.

8.2.4 Frecuencias de resonancia y ubicación espacial de los máximos

Resumiendo entonces C_M , el conjunto de puntos de R en que $M(x, \omega)$ es máximo, será el que se indica a continuación

$$\begin{aligned} \frac{Z_V}{2} > Z_C & \quad f_n = (2n - 1) \frac{c}{4\ell}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad x = \frac{2p - 1}{2n - 1} \ell, \\ & \quad x = 2\ell \left[1 - \frac{2p - 1}{2n - 1} \cdot \frac{1}{2} \right]; \quad p = 1, 2, \dots, \\ & \quad n = 1, 2, \dots, \quad p \leq n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{Z_V}{2} < Z_C & \quad f_n = \frac{n c}{2\ell}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad x = \frac{2p - 1}{2n} \ell; \\ & \quad x = 2\ell \left[1 - \frac{2p - 1}{4n} \right]; \quad p = 1, 2, \dots, \quad (8.31) \\ & \quad n = 1, 2, \dots, \quad p < n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{Z_V}{2} = Z_C \quad f \geq \frac{c}{4\ell}, \quad x = (2p - 1) \cdot \frac{c}{4f}; \quad \text{con } p \text{ tal que } x \leq \ell$$

8.3 Tercer Caso

Se trata del sistema cuyo esquema se presenta en la fig 5.3. Es un caso similar al caso No. 1 salvo que el excitador es ahora un oscilador de pistón. También aquí conviene utilizar el procedimiento detallado en la sección 7.5 pues el sistema se compone de una sola tubería simple.

8.3.1 Cálculo de $M(x, \omega)$

Utilizando la notación empleada en el capítulo 5, se tiene la siguiente expresión para $M(x, \omega)$ aplicando las condiciones de frontera $h_1 = h_{3D} = 0$:

$$M(x, \omega) = \frac{\tilde{q}^2 Z_c^2 Z_0^2 \sin \frac{x \omega}{c}}{Z_0^2 \cos^2 \frac{\omega \ell}{c} + Z_c^2 \sin^2 \frac{\omega \ell}{c}} \quad \text{para } 0 \leq x \leq \ell$$

(8.32)

$$M(x, \omega) = 0 \quad \text{para } x = \ell^+$$

donde ℓ^+ es el punto 3D y la región R es

$$0 \leq x \leq \ell$$

$$0 < \omega$$

8.3.2. Determinación de R_c y R_d

De la expresión 8.32 sale que la función $M(x, \omega)$ está definida y es diferenciable en todo R salvo para $x = \ell^+$. En consecuencia R_c es la región $x = \ell^+$, $0 < \omega$ y en ella $M(\ell^+, \omega)$ presenta un mínimo y no aporta ningún punto a C_M .

8.3.3 Localización de máximos

Utilizando el procedimiento expuesto en la sección 7.5 se expresa $M(x, \omega)$ en función de las variables $X = \frac{x \omega}{c}$ y $\Omega = \frac{\ell \omega}{c}$, obteniéndose:

$$M(X, \Omega) = \frac{\tilde{q}^2 Z_c^2 Z_0^2 \sin^2 X}{Z_0^2 \cos^2 \Omega + Z_c^2 \sin^2 \Omega}, \quad 0 \leq X \leq 2\pi, \quad 0 < \Omega \leq 2\pi \quad (8.34)$$

Calculando $\frac{\partial M}{\partial X} = 0$ se tiene $\sin X = 0$. Por el mismo razonamiento empleado en 8.1.3 y 8.2.3, los máximos se hallan en

$$X = (2p - 1) \frac{\pi}{2}, \quad p = 1, 2, \quad (8.35)$$

Sustituyendo 8.8.5 en 8.3.4 resulta:

$$G(\Omega) = \frac{\tilde{q}^2 Z_c^2 Z_0^2}{(Z_0^2 - Z_c^2) \cos^2 \Omega + Z_c^2} \quad (8.36)$$

Resolviendo $\frac{dG}{d\Omega} = 0$ y pasando de Ω a ω se tiene un resultado análogo al obtenido para el caso No. 1, a saber;

$$Z_0 > Z_c \quad \omega_n = (2n - 1) \frac{c \pi}{2 \ell}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$Z_0 < Z_c \quad \omega_n = \frac{n c \pi}{\ell}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.37)$$

$$Z_v = Z_c \quad \omega > \frac{\pi c}{2 \ell}$$

Los pasos 4° y 5° del procedimiento indicado en la sección 7.4 no se aplican puesto que en R_c hay sólo mínimos.

8.3.5 Frecuencias de resonancia y ubicación espacial de los máximos

El conjunto C_M de los puntos de R en que $M(x, \omega)$ es máximo será el siguiente:

$$Z_0 > Z_c \quad f_n = (2n - 1) \frac{c}{4\ell} \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad ;$$

$$x = \frac{2p - 1}{2n - 1} \ell \quad , \quad p = 1, 2, \dots \quad ; \quad p < n$$

$$Z_0 < Z_c \quad f_n = \frac{n c}{2\ell} \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad ; \quad x = \frac{2p - 1}{2n} \ell$$

$$p = 1, 2, \dots \quad ; \quad p < n + \frac{1}{2}$$

(8.38)

$$Z_0 = Z_c \quad f_n \geq \frac{c}{4\ell} \quad , \quad x = (2p - 1) \frac{c}{4f} \quad ; \quad \text{con } p \text{ tal que } x < \ell$$

8.4 Cuarto Caso

Se trata del sistema presentado en la fig 5.4. Esto es un caso similar al caso No. 2 con un oscilador a pistón en el lugar de la válvula rotatoria. Se utilizará el procedimiento indicado en la sección 7.5 para la localización de los máximos puesto que el sistema se compone únicamente de dos tuberías simples.

8.4.1 Cálculo de $M(x, \omega)$

Se tienen dos expresiones de $M(x, \omega)$, una para la tubería 1 - 2 y otra para la tubería 2 - 3. Las condiciones de frontera son $h_1 = h_3 = 0$. El origen de las x es el extremo aguas arriba.

$$M(x, \omega) = \frac{Zc^2 \operatorname{sen}^2 \frac{x\omega}{c}}{4 \cos^2 \frac{\ell\omega}{c}} \cdot \frac{1}{q^2} \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (8.39)$$

$$M(x, \omega) = \frac{Zc^2 \operatorname{sen}^2(2\ell - x) \frac{\omega}{c}}{4 \cos^2 \frac{\ell\omega}{c}} \frac{1}{q^2} \quad \ell < x \leq 2\ell \quad (8.40)$$

La región R es la siguiente

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 2\ell \\ 0 &< \omega \end{aligned} \quad (8.41)$$

8.4.2 Determinación de R_c y R_d

Por inspección de $M(x, \omega)$ en 8.38 resulta que $M(x, \omega)$ está definida y es diferenciable salvo en

$$\omega = (2n - 1) \frac{\pi c}{2\ell} \quad (8.42)$$

R_c en este caso está compuesta por los puntos pertenecientes a rectas paralelas al eje de las x y de ordenadas dadas por 8.40. El complemento respecto a R de R_c es R_d .

8.4.3 Localización de máximos

Utilizando las variables $X = \frac{x\omega}{c}$ y $\Omega = \frac{\ell\omega}{c}$ las expresiones de M se transforman en las siguientes

$$M(x, \Omega) = \frac{Zc^2 \text{sen}^2 X}{4 \cos^2 \Omega} \frac{\gamma^2}{q^2} \quad \begin{array}{l} 0 \leq X \leq 2\pi \\ 0 < \Omega \leq \pi \\ X < \Omega \end{array} \quad (8.43)$$

$$M(X, \Omega) = \frac{Zc^2 \text{sen}^2 (2\Omega - X)}{4 \cos^2 \Omega} \frac{\gamma^2}{q^2} \quad \begin{array}{l} 2\pi < X \leq 4\pi \\ 0 \leq \Omega < 2\pi \\ X < 2\Omega \end{array} \quad (8.44)$$

Calculando $\frac{\partial M}{\partial X} = 0$ para 8.42 se tiene

$$\text{sen } 2X = 0 \quad (8.45)$$

Los máximos se hallan en

$$x = (2p - 1) \frac{\pi}{2}, \quad p = 1, 2, \quad (8.46)$$

Calculando $\frac{\partial M}{\partial X} = 0$ para 8.43 resulta

$$\text{sen } [2(2\Omega - X)] = 0 \quad (8.47)$$

Los máximos se encuentran en

$$X = 2\Omega - (2p - 1) \frac{\pi}{2}, \quad p = 1, 2, \quad (8.48)$$

Sustituyendo 8.46 en 8.43 y 8.48 en 8.44 se llega a la misma expresión $G(\Omega)$.
Calculando $\frac{dG}{d\Omega}$ se tiene que $\frac{dG}{d\Omega} = 0$ para $\Omega = \pi$ y $\Omega = 2\pi$. Como en el caso anterior puede verse fácilmente que se trata de mínimos de $G(\Omega)$.

Tampoco en este caso se aplica el 4° paso del procedimiento establecido en la sección 7.4. Sin embargo, debe aplicarse el 5° paso puesto que, como en el caso anterior, existen P_k en x, ω en los que $M(x, \omega)$ no está definida.

8.4.4 Puntos en los que $M(x, \omega)$ no está definida

Estos puntos son los que verifican 8.41 e integran R_c . En estos puntos $M(x, \omega)$, en cualquiera de las dos tuberías, tomarán valores muy grandes.

8.4.5 Frecuencias de resonancia y ubicación espacial de los máximos

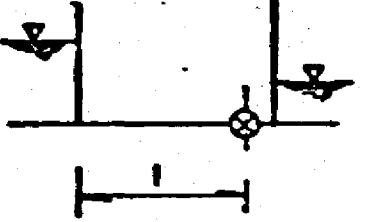
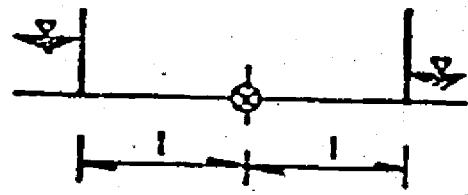
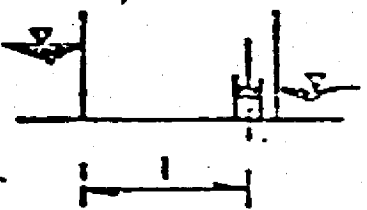
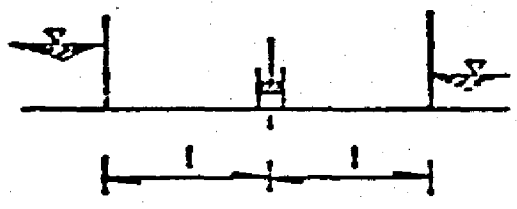
El conjunto C_M de puntos de R en que $M(x, \omega)$ tiende a infinito es el siguiente:

$$f_n = (2n - 1) \frac{c}{4l}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad \text{para todo } x \quad (8.49)$$

8.5 Resumen de los Resultados Obtenidos y Comparación con los Resultados Experimentales

Se presenta a continuación el cuadro 8.1. Dicho cuadro tiene una estructura idéntica a la de los cuadros 5.1 y 6.1. En el cuadro se resumen los resultados hallados mediante la aplicación de TLM a los cuatro casos que se han venido estudiando en los Capítulos 5 y 6. Para los casos que presentaban mayor interés se realizaron verificaciones experimentales cuyos resultados ya se presentaron en el cuadro 6.1 y las contradicciones entre la experiencia y la teoría se indicaron mediante un rayado.

En el cuadro 8.1 se mantiene el mismo criterio, y como no hay contradicciones entre los resultados experimentales presentados en el capítulo 6 y los resultados teóricos hallados en este capítulo, en este cuadro no aparecen zonas rayadas. Este cuadro es en consecuencia la demostración de que TLM es una teoría que supera los problemas que se presentan al confrontar TIT y TOL con la experiencia.

CASO	ESQUEMA DE LA INSTALACION	TEORIA	SITUACION	FRECUENCIAS DE RESONANCIA		OBSERVACIONES
				$(2n - 1) \frac{c}{4\ell} (1)$	$\frac{nc}{2\ell} (1)$	
1		LMA	$Z_v > Z_c$	si	no	Verif. experimental(*)
			$Z_v < Z_c$	no	si	
			$Z_v = Z_c$	(**)		
2		LMA	$Z_v > Z_c$	si	no	Verif. experimental(*)
			$Z_v < Z_c$	no	si	
			$Z_v = Z_c$	(**)		
3		LMA	$Z_o > Z_c$	si	no	Verif. experimental(*)
			$Z_o < Z_c$	no	si	
			$Z_o = Z_c$	(**)		
4		LMA	-	si	no	Verif. experimental(*)

(*) Significa que el resultado teórico se ha verificado experimentalmente

(**) Ver en el texto de este capítulo las frecuencias de resonancia para esta situación

(1) $n = 1, 2, 3, \dots$, c - celeridad, ℓ - longitud

Cuadro 8.1 Verificación experimental de LMA

9. TRATAMIENTO NUMERICO DE LA NUEVA TEORIA

En este capítulo se presentará un tratamiento numérico para resolver el problema de la resonancia en un sistema de conductos a presión mediante la aplicación de la Teoría de Localización de Máximos. Dicho tratamiento numérico puede ser procesado con facilidad en una minicomputadora.

9.1 Problema Analítico a Resolver

El problema analítico que debe resolverse para aplicar TLM es un problema de extremos libres de una función $M(x, \omega)$ de dos variables. Este problema ya fue expuesto en el capítulo 7 sección 7.2 y en lo esencial consiste en la resolución del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial \omega} = 0$$

(9.1)

en una región R_d dada en general, salvo líneas singulares, por

$$0 \leq x \leq L \quad (9.2)$$

$$\omega_m < \omega < \omega_M$$

siendo L la longitud de la rama considerada y (ω_m, ω_M) el intervalo de frecuencias circulares que interesa investigar.

De las soluciones halladas para 9.1 y que pertenezcan a R_d , deben hallarse los máximos, esto es, los puntos $P_i = (x_i, \omega_i)$ tales que verifiquen

$$M(P_i) - M(P) > 0, \text{ con } 0 < |P_i - P| < \epsilon \quad (9.3)$$

siendo ϵ positivo y arbitrariamente pequeño.

9.2 Método de Resolución

9.2.1 Localización de un máximo

El método de resolución numérica que emplearemos es el clásico método de Newton-Raphson para dos dimensiones (ref 52 p 169). Sean $\frac{\partial M}{\partial x} = f(x, \omega)$, $\frac{\partial M}{\partial \omega} = g(x, \omega)$, $u = x_{k+1} - x_k$ y $v = \omega_{k+1} - \omega_k$. El sistema de ecuaciones que debe resolverse en cada iteración es el siguiente:

$$u f_x(x_k, \omega_k) + v f_y(x_k, \omega_k) = -f(x_k, \omega_k) \quad (9.4)$$

$$u g_x(x_k, \omega_k) + v g_y(x_k, \omega_k) = -g(x_k, \omega_k)$$

Resolviendo el sistema para u y v se calculan las x_{k+1} y ω_{k+1} mediante las relaciones

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + u \\ \omega_{k+1} &= \omega_k + v\end{aligned}\tag{9.5}$$

Si el método converge, se llega a localizar un posible extremo de la función $M(x, \omega)$. Para examinar si el punto x_0, ω_0 hallado corresponde a un máximo se estudian las siguientes dos inecuaciones

$$\begin{aligned}M(x_0, \omega_0) - \frac{M(x_0 + \tau, \omega_0) + M(x_0 - \delta, \omega_0)}{2} &> 0 \\ M(x_0, \omega_0) - \frac{M(x_0, \omega_0 + \sigma) + M(x_0, \omega_0 - \sigma)}{2} &> 0\end{aligned}\tag{9.6}$$

Siendo τ y σ incrementos dados. Si x_0, ω_0 verifica ambas inecuaciones el extremo será un máximo si δ y σ son suficientemente pequeños.

La convergencia del método se produce si para algún k se verifica que $|f(x_k, \omega_k)| < \epsilon$ y $|g(x_k, \omega_k)| < \epsilon$ siendo ϵ positivo y arbitrariamente pequeño.

El método de Newton-Raphson requiere un punto x_1, ω_1 que debe estar próximo al máximo buscado pues en caso contrario no ocurre la convergencia al mismo.

A continuación expondremos el procedimiento para localizar puntos próximos a los máximos.

9.2.2 Localización de puntos próximos a los máximos

La localización de puntos próximos a los máximos que permitan aplicar el método de Newton-Raphson a partir de ellos, se efectúa en la siguiente forma.

La región R_d se cubre mediante una malla rectangular cuyos pasos se definen como

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{L}{m} \\ \Delta \omega &= \frac{\omega_M - \omega_m}{n}\end{aligned}\tag{9.7}$$

siendo m y n naturales. En cada nudo de la malla x_j, ω_j y se verifican para todos los nudos interiores de la malla las siguientes inecuaciones

$$M(x_j, \omega_j) - M(x_{j+1}, \omega_j) > 0$$

$$M(x_j, \omega_j) - M(x_{j-1}, \omega_j) > 0$$

$$M(x_j, \omega_j) - M(x_j, \omega_{j+1}) > 0$$

$$M(x_j, \omega_j) - M(x_j, \omega_{j-1}) > 0$$

Si se verifican las cuatro inecuaciones para x_j, ω_j ese punto se tomará como punto de partida para realizar la iteración por Newton-Raphson y encontrar el máximo próximo. Si no se verifican, el punto carece de interés. Los puntos de partida los denominaremos "seudo-máximos".

Subsiste el problema de localizar todos los máximos que puedan existir en R_d

Para ello se aplicará el siguiente procedimiento.

9.2.3 Localización de todos los máximos

El procedimiento consiste en comenzar por una malla mínima (por ejemplo $m_0 = 50$, $n_0 = 50$) y aplicar el método explicado en 9.2.2. Luego tomar la malla $m_1 = 2m_0$, $n_1 = 2n_0$ y repetir el procedimiento. Si los seudomáximos hallados se corresponden con los hallados para la malla definida por m_0 , n_0 puede considerarse que se han localizado los pseudo-máximos suficientes para proceder a aplicar a partir de ellos Newton-Raphson y hallar todos los máximos. Si se desea mayor seguridad en cuanto a encontrar todos puede efectuarse otra comparación más con $m_2 = 2m_1$, $n_2 = 2n_1$.

Si al reducir la malla se encontrasen más o menos pseudo-máximos que en la etapa anterior se continuará el procedimiento hasta que los pseudo-máximos no se modifiquen en dos o tres etapas sucesivas.

9.2.3 Cálculo de las derivadas

El cálculo de f , f_x , f_ω , g , g_x y g_ω debe realizarse a partir de $M(x, \omega)$ con suficiente aproximación como para que la propagación de los errores de truncación no afecte los resultados. Para el tipo de funciones que definen $M(x, \omega)$ que son funciones trigonométricas y exponenciales una aproximación de primer orden para ambas derivadas ha dado resultados satisfactorios.

En consecuencia el cálculo se ha hecho de la siguiente forma

$$f = \frac{M(x + \delta x, \omega) - M(x - \delta x, \omega)}{2 \delta x}$$

$$f_x = \frac{M(x + 2 \delta x, \omega) + M(x - 2 \delta x, \omega) - 2M(x, \omega)}{4 \delta^2 x}$$

$$f_\omega = \frac{M(x + \delta x, \omega + \delta \omega) + M(x - \delta x, \omega - \delta \omega) - M(x - \delta x, \omega + \delta \omega) - M(x + \delta x, \omega - \delta \omega)}{4 \delta x \delta \omega}$$

y análogamente con g.

9.3 Ejemplo de Aplicación

9.3.1 Planteo del ejemplo

Se tiene el siguiente sistema de conductos a presión. Ver fig 9.1.

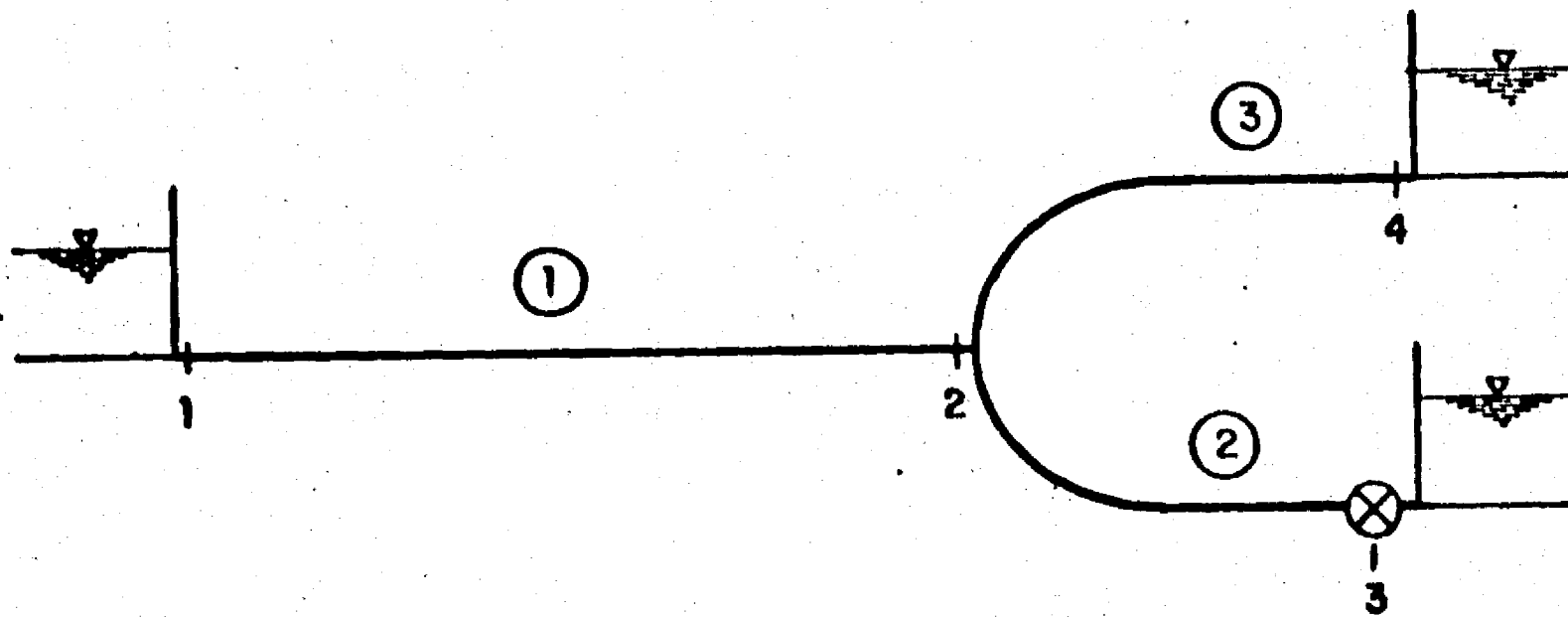


Fig 9.1 Sistema de conductos a presión

Se trata de un sistema bifurcado con una válvula oscilante como excitador en el extremo de uno de los brazos de la bifurcación. Las condiciones de frontera son

$$h_{1I} = h_{2D} = h_{3D} = 0 \quad (9.9)$$

En la bifurcación se tiene

$$h_{2I} = h_{2D'} = h_{2D''} \quad (9.10)$$

$$q_{2I} = q_{2D'} + q_{2D''}$$

indicando las primas la tubería 2 y las bprimas la tubería 3.

Los datos del problema son los siguientes

$$l_1 = 240 \text{ m}$$

$$l_2 = 120 \text{ m}$$

$$l_3 = 120 \text{ m}$$

$$z_{c1} = z_{c2} = z_{c3} = z_c$$

$$\frac{z_v}{z_c} = 0.5$$

factor de fricción $f = 0.013$

Diámetro $D = D_1 = D_2 = D_3 = D = 12 \text{ m}$

Velocidad media en la tubería 1, $V_{01} = 10 \text{ m/s}$

$2\Delta H_k = K = 1 \text{ m}$ (válvula)

Celeridad $c_1 = c_2 = c_3 = c = 1300 \text{ m/s}$

Intervalo de frecuencias de excitación

$$\omega_m = 10 \text{ rad/s}$$

$$\omega_M = 15 \text{ rad/s}$$

El sistema tiene dos ramales principales, el ramal 123 y el ramal 124, y se compone de tres tramos de tubería simple 1-2, 2-3 y 2-4. La fricción se considerará despreciable puesto que $f \text{ Vo/D } \omega_m$ es 1.10×10^{-3} .

Un proyectista enfrentado a este problema y orientándose mediante la (ref 35) atacar el problema aplicando la teoría de la impedancia terminal (TIT) puesto que se conoce la ubicación y frecuencias de operación del excitador. En consecuencia se analizarán los resultados obtenidos aplicando TIT y TLM.

9.3.2 Aplicación de TIT

El sistema se ajusta a uno de los casos estudiados por E. Wylie (refs 27 y 28) de manera que esto reafirmará al proyectista en la aplicación de TIT.

Para aplicar esta teoría debe calcularse la impedancia inmediatamente antes de la válvula oscilante, esto es Z_{3I} . Se halla el módulo de $| Z_{3I} | = F(\omega)$ y se calculan los máximos de $F(\omega)$. Las frecuencias ω que corresponden a estos máximos serán las frecuencias de resonancia o naturales del sistema según TIT.

Procediendo a calcular $| Z_{3I} |$ se tiene que

$$| Z_{3I} | = Z_c \left| \frac{\text{sen } (1.5 \Omega) + \text{sen } \Omega \cos \frac{\Omega}{2}}{3 \cos \frac{\Omega}{2} \cos \Omega} \right| \quad (9.11)$$

siendo $\Omega = \frac{\omega l}{c}$

Los máximos se hallan en

$$\omega (2n - 1) \pi \frac{c}{2l} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.12)$$

$$\omega (2n - 1) \frac{\pi c}{l}$$

para $n = 1$ se tienen las siguientes frecuencias de resonancia

$$\omega_1 = 8.5085 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_2 = 17.0170 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Considerando el intervalo de frecuencias de excitación (ω_m, ω_M) se tiene la siguiente situación. Ver fig 9.2

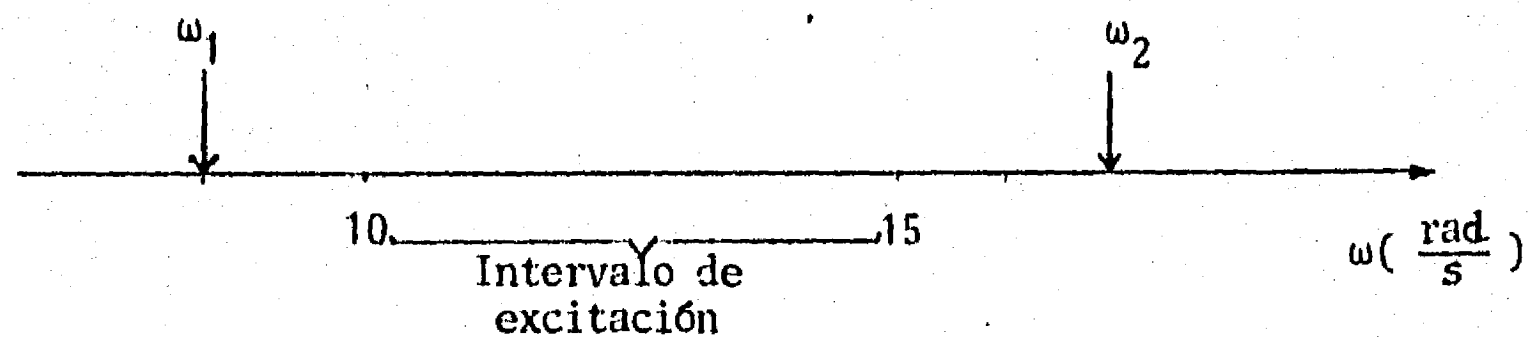


Fig 9.2 Resonancia según TIT

En consecuencia, según TIT el sistema no resonará puesto que no hay frecuencias de resonancia dentro del intervalo de excitación dado.

9.3.3 Aplicación de TLM

Deberá calcularse $M(x, \omega)$ para todo punto de la región R dada por

$$5 \text{ rad/s} < \omega < 8 \text{ rad/s}$$

$$0 < x < 660 \text{ m}$$

La bifurcación $M(x, \omega)$, al no intervenir la función, puede expresarse como ya se vió como $M(X, \Omega)$ siendo $X = \frac{x \omega}{c}$ y $\Omega = \frac{\omega \ell}{c}$. Calculando dicha función se tiene

Tramo 1 - 2

$$M(X, \Omega) = \frac{K^2 \operatorname{sen}^2 X}{9 \beta^2 \cos^2 \Omega \cos^2 \frac{\Omega}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\Omega}{2} (\cos \Omega + 4 \cos^2 \frac{\Omega}{2})^2} \quad (9.13)$$

$$\frac{\omega_n \ell}{c} < \Omega < \frac{\omega_M \ell}{c}, \quad 0 < X < \frac{\omega_M \ell}{c}, \quad X < \Omega$$

Tramo 2 - 3

$$M(X, \Omega) = \frac{4 K^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{3}{2} \Omega - X \right) \cdot \cos^2 \frac{\Omega}{2}}{9 \beta^2 \cos^2 \Omega \cos^2 \frac{\Omega}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\Omega}{2} (\cos \Omega + 4 \cos^2 \frac{\Omega}{2})^2} \quad (9.14)$$

$$\frac{\omega_m \ell}{c} < \Omega < \frac{\omega_M \ell}{c}; \quad \frac{\omega_m \ell}{c} < X < \frac{3}{2} \frac{\omega_M \ell}{c}, \quad X < \frac{3}{2} \Omega$$

Tramo 2 - 4

$$M(x, \Omega) = (AC - DB)^2 + (DA + BC - E)^2$$

$$\frac{\omega_m \ell}{c} < \Omega < \frac{\omega_M \ell}{c} \quad ; \quad \frac{\omega_m \ell}{c} < X < \frac{3}{2} \frac{\omega_M \ell}{c}$$

siendo

$$A = \frac{\beta^2 \cos(X - \frac{3}{2}\Omega) \cos \frac{\Omega}{2} + \operatorname{sen}(X - \frac{3}{2}\Omega) \operatorname{sen} \frac{\Omega}{2}}{\beta^2 \cos^2 \frac{\Omega}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\Omega}{2}}$$

$$B = \frac{\beta \operatorname{sen}(X - 2\Omega)}{\beta^2 \cos^2 \frac{\Omega}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\Omega}{2}}$$

$$C = \frac{K \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} \frac{\Omega}{2} (\cos \Omega + 4 \cos^2 \frac{\Omega}{2})}{9 \beta^2 \cos^2 \Omega \cos^2 \frac{\Omega}{2} + \operatorname{sen} \frac{\Omega}{2} (\cos \Omega + 4 \cos^2 \frac{\Omega}{2})^2}$$

$$D = -\frac{K}{\beta} \operatorname{sen} \frac{\Omega}{2} + \frac{3 K \beta \cos \Omega \cos \frac{\Omega}{2} \operatorname{sen} \Omega}{9 \beta^2 \cos^2 \Omega \cos^2 \frac{\Omega}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\Omega}{2} (\cos \Omega + 4 \cos^2 \frac{\Omega}{2})^2}$$

$$E = \frac{K}{\beta} \operatorname{sen} (X - \frac{3}{2}\Omega)$$

Aplicando el procedimiento numérico reseñado en este capítulo a cada una de las funciones $M(X, \Omega)$ halladas en las regiones X, Ω que se indicaron resultan las siguientes frecuencias fundamentales de resonancia de acuerdo a TIM.

$$\omega = 12.46 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 12.19 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 12.38 \text{ rad/s}$$

Ordenándolas de menor a mayor resulta

$$\omega_1 = 12.19 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 12.38 \text{ rad/s}$$

$$\omega_3 = 12.46 \text{ rad/s}$$

Considerando el intervalo de frecuencias de excitación se tiene ahora la siguiente situación. Ver fig 9.3.

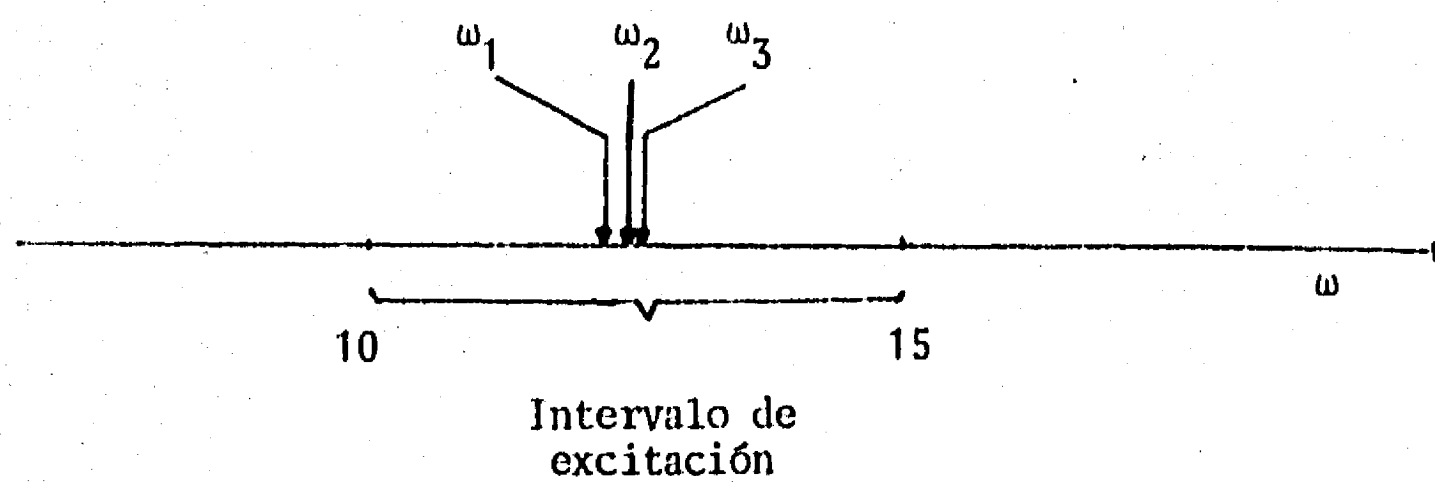


Fig 9.3 Resonancia según TLM

En consecuencia según TLM habrá resonancia en el sistema puesto que el excitador puede excitar las frecuencias ω_1 , ω_2 y ω_3 .

En la fig 9.4 se presentan las formas de onda correspondientes a la frecuencia circular $\omega_3 = 12.46$ rad/s.

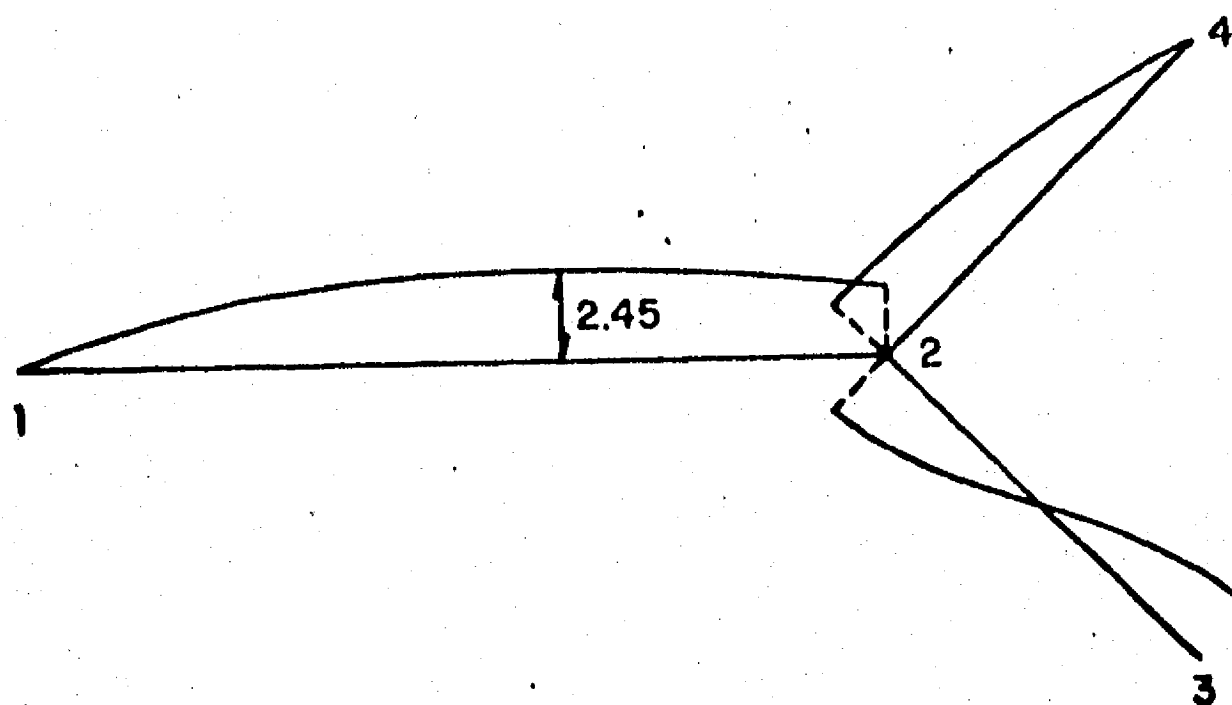


Fig 9.4 Formas de onda correspondientes a la frecuencia circular $\omega_3 = 12.46$ rad/s

Calculando $|h(x, \omega)|$ para $x = 163.83$ m y $\omega_3 = 12.46$ rad/s, se tiene que $|h(x, \omega)| = 2.45$ m.c.a. Como la amplitud de la excitación vale en este ejemplo la unidad ($K = 1$), se constata que en la primera frecuencia de resonancia del tramo 12 la amplificación producida es de 2,45.

Este hecho deberá ser tenido en cuenta por el proyectista en el diseño de su sistema incrementando su resistencia en relación con la calculada para la operación estacionaria (no oscilante) del mismo.

9.4 Conclusión

El procedimiento de cálculo numérico propuesto permite aplicar TLM a sistemas complejos de conductos a presión. El resultado obtenido localiza frecuencias peligrosas y los puntos del sistema en los que, en dichas frecuencias, se producen las máximas amplitudes.

10. CONCLUSIONES

En este capítulo se establecerán conclusiones que precisan los elementos nuevos que el trabajo aporta a la teoría de la resonancia en sistemas de conductos a presión.

El trabajo aporta dos tipos de contribuciones, las referidas a la crítica a las teorías existentes y las referidas a la nueva teoría propuesta. De esa forma, en consecuencia, agruparemos las conclusiones.

10.1 Conclusiones Referidas a la Crítica

- a) Se demuestra que las dos teorías conocidas de resonancia en sistemas de conductos a presión (TIT y TOL) no son complementarias, como habitualmente se les considera, sino que en casos en los que ambas pueden aplicarse dan resultados contradictorios.

- b) Se demuestra que TIT y TOL dan resultados contradictorios con resultados experimentales obtenidos en una instalación de laboratorio que permite reproducir sistemas simples.

10.2 Conclusiones Referidas a la Nueva Teoría

- a) La nueva teoría propuesta en este trabajo, denominada Teoría de Localización de Máximos (TIM), esta basada en una definición precisa de lo que se entiende por resonancia del sistema.
- b) La definición adoptada se deriva de la necesidad del ingeniero de proyectar una instalación segura en cuanto a su resistencia frente a las sobrepresiones que el fenómeno de la resonancia produce en el sistema.
- c) La aplicación de TIM a los casos en que TIT o TOL dan resultados equivocados, da resultados acordes con los obtenidos en la instalación de laboratorio.
- d) La definición de resonancia a partir de la cual se estructura TIM y la validez del modelo lineal que se utiliza, garantizan los buenos resultados que el proyectista ha de obtener al aplicar esta teoría a sistemas más complejos que los ya estudiados en el laboratorio.
- e) TIM se traduce analíticamente en un problema clásico de búsqueda de extremos libres de una función de dos variables cuya resolución en general no ofrece dificultades particulares.
- f) Se presenta un esquema computacional que permite abordar sin dificultad la resolución de sistemas de gran complejidad mediante el empleo de TIM.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido posible en virtud del apoyo recibido en el Instituto de Ingeniería de la UNAM y en la Comisión Federal de Electricidad para estudiar en profundidad el problema de las oscilaciones estacionarias en las plantas hidroeléctricas de México.

Con la convicción de que mencionar algunos nombres constituye una casi inevitable injusticia para los que no se mencionan, quisiéramos sin embargo destacar en especial, dentro del personal del Instituto de Ingeniería al Prof. José L. Sánchez B. quien nos estimuló y en buena medida capacitó, para introducirnos en esta temática nueva para la ingeniería hidráulica y al Dr. Gerardo Hiriart junto con quien abordamos el problema de la P.H. "La Angostura".

El trabajo realizado en el Instituto fue auspiciado y financiado por la Comisión Federal de Electricidad a iniciativa del Ing. Antonio Capella V., quien en todo momento nos alentó personalmente e impulsó la participación del Instituto en el estudio y resolución de estos nuevos problemas asociados a la instalación de unidades generadoras de gran potencia.

La posibilidad de intercambiar opiniones sobre estos problemas con el Prof. Michele Fanelli, Director del Centro de Investigación Hidráulica y Estructural del Frente Energético Italiano (ENEL) ha sido también de gran importancia para el desarrollo de las ideas que se proponen este trabajo.

Finalmente quisiera mencionar al Prof. Oscar J. Maggiolo, ex Rector de la Universidad de Uruguay fallecido hace dos años en Venezuela donde vivió exiliado. Con Maggiolo tuve el privilegio de trabajar durante más de una década en el Laboratorio de Hidráulica y Mecánica de Fluidos de dicha Universidad y aprender el costo en esfuerzo del trabajo científico.

A todos ellos, por lo que me han enseñado, vaya mi agradecimiento.

Por último, deseo mencionar y agradecer a la Sra. Martha E. Lara quien realizó el trabajo de mecanografía con paciencia y cuidado.

Referencias

1. Rouse, H. e Ince, S., "History of hydraulics", Dover Publications, 1956
2. Camichel, Ch., Eydoux, D. y Gariel, M., "Etude theorique et experimentale des coups de belier", Université de Toulouse, 1918.
3. Jaeger, Ch., "The theory of resonance in hydro-power systems. Discussion of incidents and accidents occurring in pressure systems" ASME, J. of Basic Engineering, Dic 1963.
4. Jaeger, Ch., "Fluid transients in hydroelectric engineering practice", Blackie, Glasgow, 1977.
5. Abbott, H.F., Gibson, W.L. y Mc Caig, I.W. "Measurements of auto-oscillation in an hydroelectric supply tunnel and penstock system", ASME, J. of Basic Eng., Dic. 1963, pp 625-630.
6. Wylie, E. y Streeter, V., "Resonance in Bersimis No. 2 piping system", ASME, J. of Basic Engineering, Dic 1965, pp 925-931.
7. Fanelli, M., "Les phénomènes de résonance hydraulique", La Houille Blanche, No 4, 1976, pp 233-253.
8. Fanelli, M., "Stability problems of hydraulic circuits", IAHR, Conferencia en el Congreso de Cagliari.
9. Bakes, F. y Mc Goodwing, B., "Flow induced vibration in circulating water system", ASCE, J. of the Hydraulic Division, Agosto 1980, pp 1394-1398.
10. Causon, G.J., "Precautions against resonant water hammer", Water Power, enero 1968, pp.20-22.
11. Ehrhart, R.W., "Auto oscillation in the Hyatt plant's penstock system", Water Power and Dam Construction, abril 1979, pp 38-41.
12. Gardner, P. y Gummer, J., "The use of air chambers to suppress hydraulic resonance", Water Power, P I marzo 1973, pp 102-105, PII abril 1973, pp 135-139.
13. Glattfelder, A., Grein, H. y Huser, L., "A case of self-excited oscillations in a hydroelectric unit", IAHR-IUTAM, Symposium Karlsruhe, 1979.
14. Jordan, V., "Resonant water hammer induced by vibrations in a spherical valve", Water Power, mayo 1973, pp 171-178.
15. Koning, H. y Whippen, W., "Vibration problems at Conowingo", Water Power, julio 1967, pp 259-260.
16. Alekseev, A. K. y Garipov, M.M., "Calculating the high frequency pressure oscillations in an hydraulic system with axial reciprocating pumps", Russian Engineering Journal, Vol 59, No 7, 1979, pp 20-22.

17. Thorley, A., "Influence of transient velocity on resonating frequencies", ASME, 71-WA/FA-20, 1971.
18. Brown, F.T., "The transient response of fluid lines" ASME, J. of Basic Eng., Dic. 1962, pp 547-553.
19. D'Souza, A.E. y Oldenburger, R., "Dynamic response of fluid lines", ASME, J. of Basic Eng., Set 1964, pp 589-598.
20. Goodson, R.E. y Leonard, R.G., "A survey of modeling techniques for fluid lines transients" ASME, Transactions, junio 1972, pp 474-482.
21. Fashbaug, R y Streeter, V., "Resonance in liquid rocket engine systems", ASME, J. of Basic Engineering, Dec 1965, pp 1011-1017.
22. Wylie, E. y Zielke, W., "Propellant line dynamics", Office of Research Administration, Report No. 08040-2, Univ. of Michigan, Set 1967.
23. Zielke, W., Wylie, E. y Keller, R., "Forced and self excited oscillations in propellant lines", ASME, J. of Basic Engineering, Dic 1969, pp 671-677.
24. Bergeron, L., "Water hammer in hydraulics and wave surges in electricity", John Wiley and Sons Inc., 1961.
25. Streeter, V., "Waterhammer analysis of pipelines", ASCE, J. of the Hydraulics Division, HY4, julio 1964, pp 151-171.
26. Brown, F., "A unified approach to the analysis of uniform one-dimensional distributed systems", ASME, Journal of Basic Engineering, junio 1967, pp 423-439.
27. Wylie, E., "Resonance in pressurized piping systems", Ph. D. Thesis. University of Michigan, 1964.
28. Wylie, E., "Resonance in pressurized piping systems", ASME, J. of Basic Engineering, Dic 1965, pp 960-966.
29. Brown, F.T., Margolis, D.L. y Shah, R.P., "Small-amplitude frequency behaviour of fluid lines with turbulent flow", ASME, Transactions, Dic 1969, pp 578-693.
30. Chaudry, H., "Resonance in pressurized piping systems", ASCE, J. of the Hydraulics Division, HY9, Set 1970, pp 1819-1837.
31. Chaudry, H., "Applied Hydraulic Transients", Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1979.
32. Fanelli, M., "Risposta dinamica di una condotta in pressione con parete elastica smorzante". L.Energia Elettrica, No 1, 1973,
33. Zielke, W. y Rosl, G., "Discussion of resonance in pressurized piping systems" ASCE, J. of the Hydraulics Division, 97, HY7, julio 1971, pp 1141-1145.

34. Zielke, W. y Hack, H., "Resonance frequencies and associated mode shapes of pressurized piping systems". Int. Conf. on Pressure Surges Set 1972, Canterbury, Inglaterra, pp G1-1-13.
35. Wylie, E. y Streeter, V., "Fluid transients", Mc Graw Hill Inc., 1978.
36. Guarga, R., "About the necessity to perfect the resonance theory", IAHR, Simposio 1982, Amsterdam (para publicarse).
37. Glattfelder, A., Grein, H. y Huser, L., "Oscilaciones a cargas parciales en la Central 'La Angostura'. Fenómenos, concepto de modelo y subsanación", Informe de Escher Wyss No SD-78-007, Nov 1978.
38. E L C - Electroconsult, "Planta hidroeléctrica 'La Angostura'. Informe No 1. Pruebas en las Unidades 2 y 3, hechas en Octubre de 1978", Informe de E L C, Milán.
39. Hiriart, G., Guarga, R. y Madinaveitia, M., "Oscilaciones en plantas hidroeléctricas. Mediciones en las P.H. 'La Angostura' y 'Malpaso' (julio 1979)".
40. Hiriart, G. y Guarga, R., "Oscilaciones en plantas hidroeléctricas. Mediciones en 'La Angostura' (diciembre 1979)". Informe del Instituto de Ingeniería de la UNAM, Proy. 9103, Enero 1980.
41. Guarga, R. e Hiriart G., "Informe de diagnóstico sobre las P.H. de 'Malpaso' y 'La Angostura' ". Informe del Instituto de Ingeniería de la UNAM, Proy. 9103, Mayo 1980.
42. Dorfler, P., "Oscilaciones hidráulicas en la Central 'La Angostura' ". Informe de Escher Wyss, No WT-80-601 SP, Enero 1981.
43. Guarga, R. y Torres, J.J., "Reducción de las oscilaciones de presión en la P.H. 'La Angostura', mediante inyección de aire". Informe del Instituto de Ingeniería de la UNAM, Proy. 1118, enero 1982.
44. Guarga, R., Hiriart, G. y Rivera, M., "Utilización de lumbreras para alterar la frecuencia de resonancia de una tubería". VI Congreso Nacional de Hidráulica, 1980, Mérida (Yucatán), México.
45. Guarga, R., Hiriart, G. y Rivera, M., "Verificación experimental de dos métodos de cálculo de la resonancia en una planta hidroeléctrica", VI Congreso Nacional de Hidráulica, 1980, Mérida (Yucatán), México.
46. Guarga, R., Torres, J.J. y Escobar, P., "Verificación en prototipo del comportamiento de lumbreras y bifurcaciones en flujo oscilatorio", Congreso de la Academia Nacional de Ingeniería, Sep 1982, Torreón, (Coahuila), México (para publicarse).
47. Parmakian, J., "Water hammer analysis", Dover Publications Inc. New York, 1963.

48. Courant, R. y Hilbert, D., "Methods of mathematical physics", Interscience Publishers, Inc. New York, 1953.
49. Fanelli, M. y Siccardi, F., "Comportement dynamique des turbomachines hydrauliques", SHG, Sesión del Comité Técnico de la División "Aplicaciones industriales de la mecánica de fluidos", junio 1979.
50. Brennen, C. y Braisted, D., "Stability of hydraulics systems with focus on cavitating pumps". IAHR, Simposio 1980, Tokio, Japón pp 255-265.
51. Guarga, R., "Reducción de parámetros: un método que complementa el análisis inspeccional". IAHR IX Simposio Latinoamericano de Hidráulica, Mérida, Venezuela, 1980.
52. Dodes, I., "Numerical Analysis for Computer Science" North-Holland, New York, 1978.

APENDICE

AI. ANALISIS EXPERIMENTAL DEL CASO 1

1. Datos para el cálculo de la celeridad

Experiencia	Frecuencia (Hz)	Frecuencia osc. libres	Celeridad media m/s
1	4.1	$\frac{c}{2 \ell}$	1354
2	4.2		

$\ell = 163.10 \text{ m}$

2. Datos para la elaboración de la figura 6.21

RPM eje válvula	Frec. de excitación (Hz)	$\frac{\omega \ell}{c}$	$\left \frac{h_1}{K} \right $	$\left \frac{h_2}{K} \right $
60	2.00	1.50	1	
63	2.10	1.58	1	
65	2.17	1.62	0.95	
68	2.27	1.69	0.95	
71	2.37	1.77	0.95	
74	2.47	1.84	0.95	
77	2.57	1.92	0.95	
115	3.83	2.98		2.82
120	4.00	3.02		5.27
123	4.10	3.09		8.00
125	4.17	3.14		11.82
127	4.23	3.19		10.45
130	4.33	3.27		5.73

RPM eje válvula	Frec. de excitación (Hz)	$\frac{\omega l}{c}$	$\left \frac{h_1}{K} \right $	$\left \frac{h_2}{K} \right $
135	4.50	3.39		3.18
140	4.67	3.52		2.27
145	4.83	3.64		1.64
150	5.00	3.77		1.35
155	5.17	3.90		1.18
160	5.33	4.02		1.00
165	5.50	4.15		1.00

Notas: 1. La medida de K se hizo directamente para $\frac{\omega l}{c} = \pi/2$. Ver expresión 8.3.

2. El gasto medio empleado en las experiencias fue de $0.0021 \text{ m}^3/\text{s}$

3. La presión en el extremo aguas arriba de la tubería fue de 4 Kg/cm^2

A2. ANALISIS EXPERIMENTAL DEL CASO 2

1. Datos para el cálculo de la celeridad

Experiencia	Frecuencia (Hz)	Frecuencia osc. libres	Celeridad media (m/s)
1	4.0	$c/4 \ell$	1305
2	8.0	$c/2 \ell$	1305

$$\ell = 81.55 \text{ m}$$

2. Datos para la elaboración de la figura 6.24

RPM eje válvula	Frec. de excitación (Hz)	$\frac{\omega \ell}{c}$	$\left \frac{h_{2D}}{K} \right $	$\left \frac{h_4}{K} \right $
115	3.83	1.50	0.5	
119	3.97	1.56	0.5	
127	4.23	1.66	0.5	
133	4.43	1.74	0.5	
230	7.67	3.01		2.62
232	7.73	3.04		3.16
236	7.87	3.09		4.97
238	7.93	3.11		5.71
240	8.00	3.14		6.52
242	8.07	3.17		4.90
244	8.13	3.19		2.96
246	8.20	3.22		2.22

Notas 1. La medida de K se hizo directamente para $\frac{\omega \ell}{c} = \frac{\pi}{2}$. Ver expresión 8.17

2. El gasto medio empleado en las experiencias fue de $0.0025 \text{ m}^3/\text{s}$

3. La presión en el extremo aguas arriba de la tubería fue de 4 Kg/cm²

A3 ANALISIS EXPERIMENTAL DEL CASO 3

1. Datos para el cálculo de la celeridad

Experiencia	Frecuencia (Hz)	Frecuencia osc. libres	Celeridad media (m/s)
1	4.2		
2	4.1	$c/2 \ell$	1354

2. Datos para la elaboración de la figura 6.21

RPM eje excitador	Frec. de excitación (Hz)	$\frac{\omega \ell}{c}$	$\left \frac{h_2 I}{Z_0 \tilde{q}} \right $	$\left \frac{h_3}{Z_0 \tilde{q}} \right $
119	1.98	1.50	1	
130	2.17	1.63	1	
140	2.33	1.77	1.14	
157	2.52	1.90	1.14	
162	2.70	2.04	1.14	
205	3.42	2.45		1.40
216	3.60	2.72		2.11
226	3.77	2.86		3.51
237	3.95	2.99		7.72
247	4.12	3.11		11.23
249	4.15	3.14		12.46
253	4.22	3.20		10.00
259	4.32	3.26		7.02
270	4.50	3.40		4.39
280	4.67	3.54		3.33

- Notas: 1. La medida de $Z_0 \approx \xi$ se hizo directamente para $\frac{\omega \ell}{c} = \frac{\pi}{2}$. Ver expresión 8.32.
2. El gasto medio empleado fue de $0.002 \text{ m}^3/\text{s}$
3. La presión en el tanque de aguas arriba fue de 2 Kg/cm^2

A.4 ANALISIS EXPERIMENTAL DEL CASO 4

1. Datos para el cálculo de la celeridad

Experiencia	Frecuencia (Hz)	Frecuencia osc. libres	Celeridad media (m/s)
1	4.0	$c/4 \ell$	1305
2	8.0	$c/2 \ell$	1305

$$\ell = 81.55 \text{ m}$$

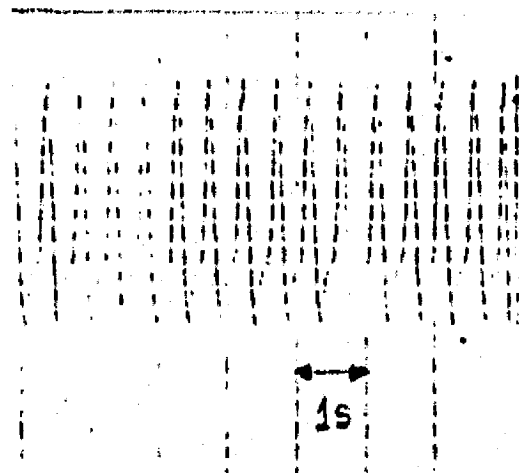
2. Datos para la elaboración de la figura 6.31

RPM eje excitador	Frec. de excitación (Hz)	$\frac{\omega \ell}{c}$	$\left \frac{h_2 D}{Z_c \tilde{q}} \right $	$\left \frac{h_4}{Z_o \tilde{q}} \right $
219	3.65	1.43	1.76	
240	4.00	1.57	3.76	
251	4.18	1.64	3.64	
264	4.40	1.73	1.27	
288	4.80	1.89	1.03	
320	5.33	2.64		0.64
340	5.67	2.81		0.55
360	6.00	2.98		0.52
380	6.33	3.14		0.50
400	6.67	3.31		0.52
420	7.00	3.47		0.59
440	7.33	3.64		0.67

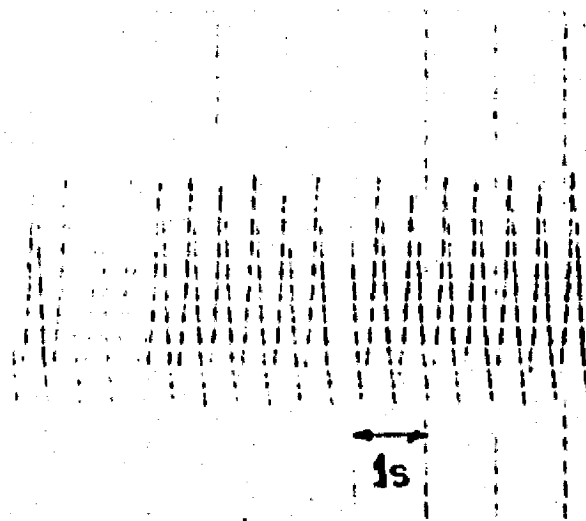
- NOTAS:
1. La medida de $Z_c q$ se realizó directamente para $\frac{\omega r}{c} = \pi$ para el cálculo de $|h_4| / |Z_c \tilde{q}|$
 2. El gasto medio empleado en las experiencias fue de $0.001 \text{ m}^3/\text{s}$
 3. $Z_c \tilde{q}$ se calculó a partir de la fórmula 8.43 para $n = 264 \text{ rpm}$ en el cálculo de $|h_{2D}| / |Z_c \tilde{q}|$
 4. La presión en el extremo aguas arriba de la tubería fue de 1 Kg/cm^2

A.5 REGISTROS QUE ILUSTRAN EL FENOMENO DE LA RESONANCIA EN UNO DE LOS CASOS (CASO 1)

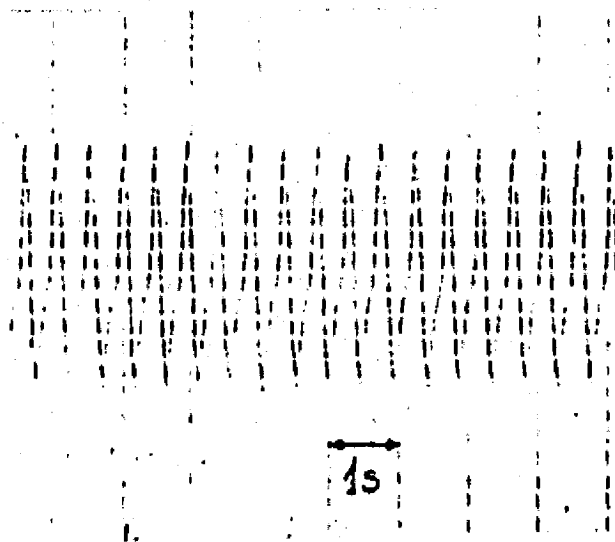
Los tres registros que se muestran en la figura A.1 corresponden a la señal observada por la celda ubicada en la posición 2I (ver fig 6.21 en el texto)



(a) RPM 60, Frec. excitación 2.00 Hz, $\frac{\omega \ell}{c} = 1.50$



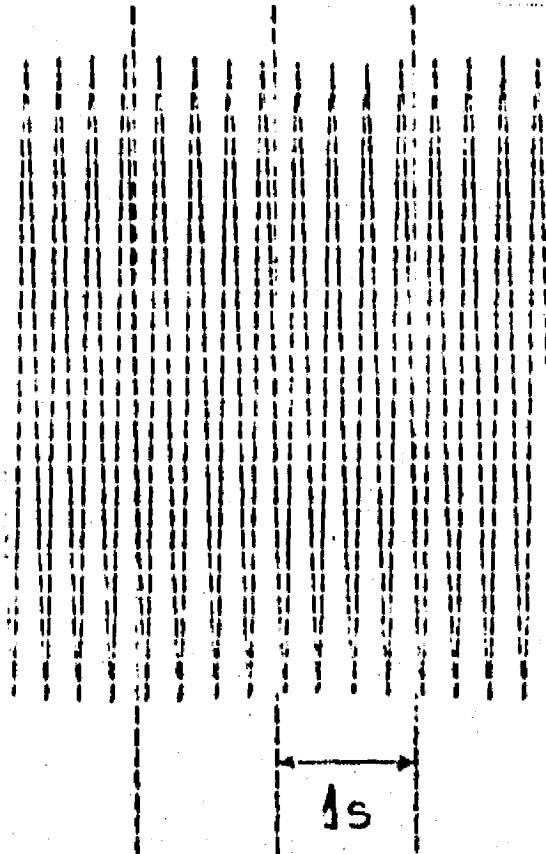
(b) RPM 63, Frec. excitación 2.10 Hz, $\frac{\omega \ell}{c} = 1.58$



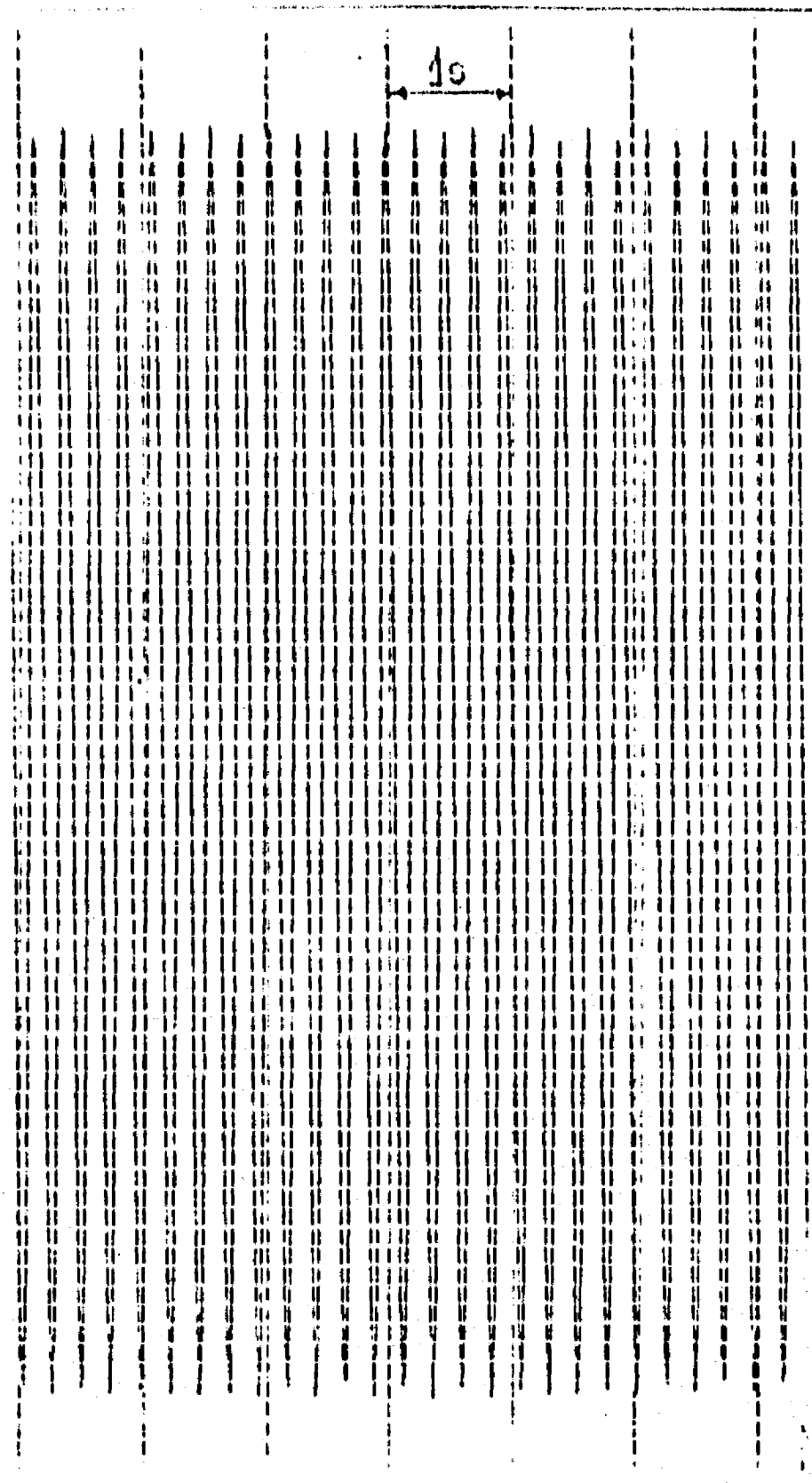
(c) RPM 65, Frec. excitación 2.17 Hz, $\frac{\omega \ell}{c} = 1.62$

Fig A.1 Registros correspondientes al Caso 1, posición 2I.

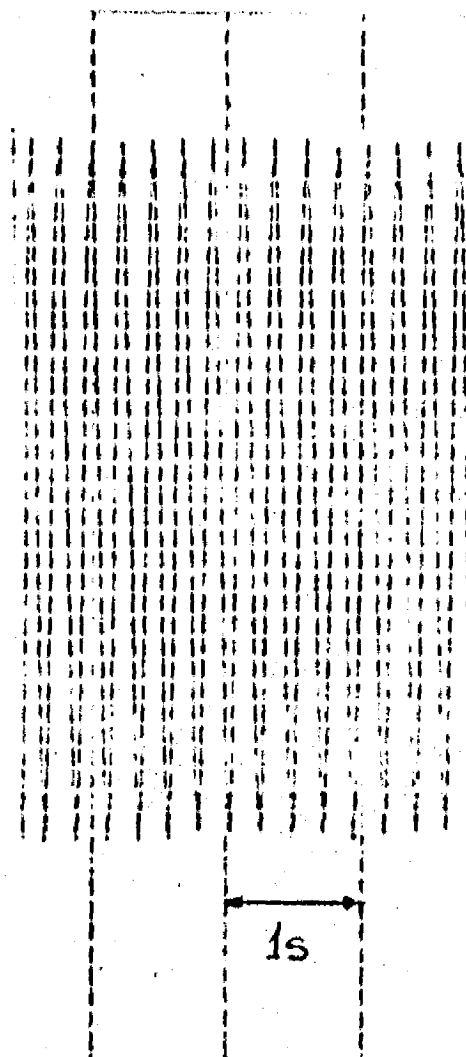
Los tres registros que se muestran en la fig A.2 corresponden a la señal observada por la celda ubicada en la posición 3 (ver fig 6.21 en el texto).



(a) RPM 120, Frec. excitación 4.00 Hz, $\frac{\omega l}{c} = 3.02$



(b) RPM 125- Frec. excitación 4.17 Hz, $\frac{\omega l}{c} = 3.14$



(c) RPM 130, Frec. excitación 4.33 Hz, $\frac{\omega}{c} \cdot l = 3.27$

Fig A.2 Registros correspondientes al caso 1, posición 3.

La relación de escalas que corresponde a los registros de las Figs A1 y A2 es la siguiente

$$\frac{\text{Escala de la celda en la posición 2I}}{\text{Escala de la celda en la posición 3}} = 1.8$$